

# REVISTA DE LA ACADEMIA COLOMBIANA de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales

LA ACADEMIA ES ORGANO CONSULTIVO DEL GOBIERNO NACIONAL

VOLUMEN XV

OCTUBRE DE 1981

NUMERO 57

PATRONO DE LA ACADEMIA:  
SEÑOR PRESIDENTE DE LA REPUBLICA

PRESIDENTE DE LA ACADEMIA:  
JORGE ARIAS DE GREIFF

DIRECTOR DE LA REVISTA:  
LUIS EDUARDO MORA-OSEJO

## SUMARIO:

	Págs.
Valores de juegos de mercado sin pagos laterales, por <i>Guillermo Owen</i> .....	5
Una fórmula de sumación aproximada, por <i>Gabriel Poveda Ramos</i> .....	25
Dos ecuaciones en diferencias finitas con coeficientes variables, por <i>Gabriel Poveda Ramos</i> .....	31
Einstein y la Teoría Cuántica, por <i>Guillermo Castillo T.</i> .....	39
Las desigualdades entre Operadores como medio de fijar límites para los valores propios, por <i>Guillermo Castillo T.</i> .....	41
La química analítica: ciencia, disciplina y herramienta de trabajo para el químico, por <i>Inés Bernal de Ramirez</i> .....	45
Deshidrogenasa malica en las primeras etapas del desarrollo de <i>Hyla labialis</i> , por <i>Jaime F. George C.</i> , Ph. D. ....	53
Estudios electroforéticos de la hemolinfa de una población de escorpiones, <i>Tityus colombianus</i> , por <i>Jaime F. George C.</i> , Ph. D. ....	59
Aspectos de la Distribución Regional de Algas Marinas en la Costa Atlántica de Colombia, por <i>Reinhard Schnetter</i> . ....	63

## CRONICA DE LA ACADEMIA:

La Academia celebra el Centenario del Nacimiento de Albert Einstein (1879 — 1979) .....	75
Palabras del Presidente de la Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, <i>Dr. Arias de Greiff</i> .....	77
Albert Einstein: Algunos aspectos epistemológicos, por <i>Diógenes Campos</i> . ....	79
Espacio y Tiempo en la Relatividad Especial, por <i>Mauricio García Castañeda</i> . ....	83
Mi encuentro con EINSTEIN, por <i>Jorge Ancizar-Sordo</i> , Ph. D. ....	87
Constitución de la Academia .....	89
Normas de los manuscritos para su publicación en la Revista de la Academia .....	93

(La responsabilidad de las ideas emitidas en la Revista corresponde a sus autores. La colaboración es solicitada. No se devuelve la colaboración espontánea ni se mantiene correspondencia sobre ella).



EMBLEMA DE LA ACADEMIA MATRIZ ESPAÑOLA

SEDE DE LA ACADEMIA: OBSERVATORIO ASTRONÓMICO NACIONAL  
APARTADO AEREO 2584 — CALLE 8ª CARRERA 8ª — BOGOTÁ 1. D. E., COLOMBIA

# VALORES DE JUEGOS DE MERCADO SIN PAGOS LATERALES

**Guillermo Owen \***

*Departamento de Matemáticas  
Universidad de los Andes*

## ABSTRACTO

En este artículo analizamos una situación de mercado desde el punto de vista del valor juego-teórico. La primera parte introduce el mercado básico y da condiciones para optimalidad, en el sentido de Pareto y equilibrios competitivos. La segunda parte desarrolla una función característica para representar esto en forma de juego. La tercera parte explica la teoría de extensiones multilineales y da la forma de esta extensión para el juego de mercado aquí tratado. La cuarta parte desarrolla las ecuaciones de valor para el juego y muestra, en particular, que jugadores equivalentes reciben trato equivalente para el valor. La quinta parte estudia el mercado replicado  $r$  veces, y muestra la relación entre los dos juegos (el original y el replicado). La sexta parte considera el caso de mercados "grandes" (es decir,  $r \rightarrow \infty$ ), y da un sistema de ecuaciones diferenciales asintóticamente válido para el valor del juego. La séptima parte trata los equilibrios económicos en general y desarrolla un modelo cuya solución es efectivamente igual a aquella desarrollada en la sexta parte.

### 1. El Mercado Básico

Consideramos aquí una situación de juego de mercado, en la cual  $n$  jugadores (negociantes) empieza con una dote inicial en  $m$  bienes. Asumimos que éstos se pueden transferir entre los jugadores de manera a incrementar su utilidad. Además, las preferencias de cada jugador se pueden representar por una función de utilidad individual, que normalizamos a 0 para la dote inicial del jugador. Más exactamente, sea  $z^i$  ( $z_1^i, \dots, z_m^i$ ) la dote inicial del jugador  $i$ . Entonces, para cualquier  $x = (x_1, \dots, x_m)$ , definimos

$$u^i(x_1, \dots, x_m)$$

como la utilidad del jugador  $i$  para el paquete de bienes  $z^i + x = (z_1^i + x_1, \dots, z_m^i + x_m)$ . La normalización nos da entonces

$$(1) \quad u^i(0, 0, \dots, 0) = 0$$

para cada  $i=1, \dots, n$ . Asumimos que  $u^i$  es diferenciable, con  $u_j^i = \frac{\partial u^i}{\partial x_j} > 0$  para cada  $j=1, \dots, m$ . Si, para cada  $i=1, \dots, n$ ,  $x^i$  es un vector de  $m$  componentes, entonces

$$X = \langle x^1; x^2; \dots; x^n \rangle$$

es una **alocación**. La alocación es factible si, para cada  $j$ ,

$$(2) \quad x_j^1 + x_j^2 + \dots + x_j^n = 0$$

Una alocación factible,  $X$ , es **eficiente** si no existe ninguna alocación factible  $Y = \langle y^1; \dots; y^n \rangle$  tal que  $u^i(y^i) \geq u^i(x^i)$  para cada  $i$ , con  $u^i(y^i) > u^i(x^i)$  para por lo menos una  $i$ . Asumiendo diferenciability, una condición necesaria para la eficiencia de  $X$  es la existencia de dos vectores,  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  y  $(p_1, \dots, p_m)$  tales que, para cada  $i, j$ :

$$(3) \quad u_j^i(x^i) = \lambda_i p_j$$

Esta condición es suficiente para la eficiencia de  $X$  si las funciones  $u^i$  son cóncavas. Asumiremos, en general, que las funciones  $u^i$  son cóncavas.

Asumiendo las condiciones (3), el vector  $p = (p_1, \dots, p_m)$  es el vector de precios: representa precios (para los  $m$  bienes) tales que ninguno de los jugadores querrá cambiar de la alocación  $X$  si los bienes se compran y venden a estos precios. Las cantidades  $\lambda_i$  son multiplicadores de Lagrange que representan la utilidad marginal de cada jugador para una unidad de dinero.

Alternativamente, los multiplicadores  $\lambda_i$  representan la tasa de transferencia (local) de utilidad entre jugadores. Así pues, si el jugador  $i$  cede la pequeña cantidad  $\epsilon \lambda_i$ , entonces la utilidad del jugador  $k$  se puede incrementar en la pequeña cantidad  $\epsilon \lambda_k$ , sin variar las utilidades de los demás jugadores.

Se debe notar, naturalmente, que el dinero no está en realidad presente en esta economía; es posible multiplicar el vector  $\lambda$  por cualquier escalar, si se divide el vector  $p$  por el mismo escalar. Asumire-

\* Trabajo presentado el día de su posesión como Miembro Correspondiente de la Academia.

mos, sin embargo, que este escalar sea positivo; así los precios y los multiplicadores siempre serán positivos. Así pues, el vector  $\lambda$  está determinado hasta multiplicación por un escalar positivo, y se puede, en general, normalizar de cualquier manera que deseemos, por ejemplo poniendo uno de los  $\lambda_i$  igual a 1, o poniendo la suma  $\lambda_1 + \dots + \lambda_m$  igual a 1.

Si la asignación eficiente  $X$  y el vector de precios o satisfacen, además, la condición

$$(4) \quad P_1 x_1^i + P_2 x_2^i + \dots + P_m x_m^i = 0$$

para cada  $i=1, \dots, n$ , entonces  $X$  es un equilibrio competitivo.

En esencia, un equilibrio competitivo  $(x^*; p^*)$  se puede explicar así: si, antes de empezar las negociaciones, se promulgan los precios  $p^*$ , entonces las ofertas y demandas de los  $n$  jugadores serán precisamente las de  $X^*$ , la cual, como es una asignación factible, no necesita ajustes. Si, en cambio, se promulgaran otros precios (es decir, precios que no corresponden al equilibrio), entonces habría un exceso de demanda para algunos bienes, y exceso de oferta para otros bienes, así que sería necesario ajustar los precios eventualmente.

Condiciones para la existencia y unicidad de los equilibrios competitivos se encuentran en la literatura ([8], [9]). En general, la existencia ocurre en muchos casos, pero la unicidad no es común. Varios sistemas dinámicos, algunos de los cuales convergen a un equilibrio (bajo ciertas condiciones), también se encuentran en la literatura ([1], [2]).

Los vectores  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ , normalizados de alguna manera, forman un conjunto de dimensión  $n-1$ . Existe una correspondencia entre estos vectores y las asignaciones eficientes  $X$ . Esta correspondencia no es siempre una biyección, es decir que pueden corresponder varias  $X$  a un mismo  $\lambda$ , o varios vectores  $\lambda$  a una misma asignación. Asumiendo, sin embargo, que las funciones  $u^i$  son diferenciables, habrá un  $\lambda$  único para cada asignación eficiente. Si además, las  $u^i$  son estrictamente cóncavas, entonces habrá no más de una asignación para cada  $\lambda$ . Esto lo entendemos si consideramos que cada uno de los vectores  $x^i$  maximiza la función lagrangiana

$$(5) \quad F = u^i(x_1^i, \dots, x_m^i) - \lambda_i \sum_j p_j x_j^i$$

para los  $\lambda_i, p_j$ . También maximiza, por lo tanto,

$$(6) \quad \lambda_i^{-1} F_i = \lambda_i^{-1} u^i(x^i) - \sum_j p_j x_j^i$$

y concluimos que los  $n$  vectores  $x^i$  juntos maximizan la suma

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \frac{F_i}{\lambda_i} &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i} u^i(x^i) - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m p_j x_j^i \\ &= \sum_{j=1}^m \frac{u^i}{\lambda_i} - \sum_{j=1}^m p_j \sum_{i=1}^n x_j^i \end{aligned}$$

Pero por la condición (2), esta última suma es igual a 0. Por lo tanto la asignación  $X = \langle x^1, \dots, x^n \rangle$  maximiza la función

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i} u^i(x_1^i, \dots, x_m^i)$$

sujeto a las restricciones

$$\sum_{i=1}^n x_j^i = 0 \quad j=1, \dots, m.$$

Para funciones  $u^i$  estrictamente cóncavas, la asignación maximizante  $X$  es naturalmente única, si es que existe. Por lo tanto, podremos hablar de una correspondencia biyectiva entre los vectores  $\lambda$  normalizados y las asignaciones eficientes  $X$ .

**Lema 1.** Sean  $\hat{\lambda}, \lambda^*$  dos vectores tales que

$$\lambda_i^* > \hat{\lambda}_i$$

$$\lambda_i^* = \hat{\lambda}_i \quad i=2, \dots, n$$

y sean  $\hat{x}, X^*$  las asignaciones eficientes correspondientes. Entonces

$$u^i(\hat{x}^i) \geq u^i(x^{*i}).$$

Prueba: Sabemos que  $\hat{x}$  maximiza  $\sum \frac{1}{\hat{\lambda}_i} u^i$ , mientras que  $X^*$  maximiza  $\sum \frac{1}{\lambda_i^*} u^i$ .

Entonces

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \frac{1}{\hat{\lambda}_i} u^i(\hat{x}^i) + \sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i^*} u^i(x^{*i}) &\geq \sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i^*} u^i(\hat{x}^i) \\ &+ \sum_{i=1}^n \frac{1}{\hat{\lambda}_i} u^i(x^{*i}). \end{aligned}$$

Cancelando términos iguales, esto nos da la desigualdad

$$\left( \frac{1}{\hat{\lambda}_i} - \frac{1}{\lambda_i^*} \right) (u^i(\hat{x}^i) - u^i(x^{*i})) \geq 0.$$

El primer factor de este producto, por hipótesis, es positivo, por lo tanto el segundo factor es no negativo, o sea

$$u^i(\hat{x}^i) \geq u^i(x^{*i}).$$

**Lema 2.** Supóngase que los dos jugadores, 1 y 2, son intercambiables, en el sentido de que las dos funciones  $u^1$  y  $u^2$  son idénticas (esto querrá decir que tienen los mismos gustos y las mismas dotes iniciales). Sea  $\lambda$  un vector lagrangiano, y sea  $X$  la asignación correspondiente. Si  $\lambda_1 > \lambda_2$ , entonces

$$u^1(x^1) \leq u^1(x^2).$$

Prueba: De nuevo recordamos que X maximiza la

suma  $\sum_{\lambda_i}^1 u^i$ . Por lo tanto

$$\frac{1}{\lambda_1} u^1(x^1) + \frac{1}{\lambda_2} u^1(x^2) + \sum_3^n \frac{1}{\lambda_i} u^i(x^i) \geq$$

$$\frac{1}{\lambda_1} u^1(x^2) + \frac{1}{\lambda_2} u^1(x^1) + \sum_3^n \frac{1}{\lambda_i} u^i(x^i)$$

lo que nos da

$$\left( \frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} \right) (u^1(x^1) - u^1(x^2)) \geq 0.$$

Aquí, el primer factor es negativo, por lo tanto el segundo factor debe ser no positivo, y

$$u^1(x^1) \leq u^1(x^2).$$

## 2. Desarrollo Juego-Teórico

Vamos ahora a tratar este mercado como un juego a n personas (sin pagos laterales). Para una coalición S (un subconjunto del conjunto N= 1,2,...,n de los jugadores), definimos V(S) como el conjunto de todos los puntos

$$y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$$

tales que existe una asignación X que satisfaga

$$(7) \quad \sum_{i \in S} x_j^i = 0 \quad j=1, \dots, m$$

$$(8) \quad x_j^i = 0 \quad \forall i \notin S$$

$$(9) \quad u^i(x^i) \geq y_i \quad i=1, \dots, n$$

Un punto y es óptimo en el sentido de Pareto (o.s.p.) en V(S) si no existe y' en V(S) tal que  $y'_i \geq y_i$  para por lo menos un i. Los puntos o.s.p. y corresponden a las asignaciones eficientes, es decir, si y es o.s.p. en V(S), entonces

$$y_i = u^i(x^i)$$

donde X es una asignación eficiente para S (es decir, eficiente sujeto a las restricciones (7)-(8)). De nuevo la condición necesaria que será suficiente si las  $u^i$  son cóncavas— es que

$$(10) \quad u_j^i(x^i) = \lambda_i p_j$$

para cada  $i \in S$  y cada  $j=1, m$  (y, además que X satisfaga (7)-(8)).

Definida de esta manera, V es la función característica de un juego sin pagos laterales. No es difícil de ver que cualquier equilibrio competitivo corresponde a un punto del corazón, luego el juego, en el

caso general de existencia de un equilibrio (en particular, si las funciones de utilidad son cóncavas), tendrá un corazón no vacío. Generalmente puede haber otros puntos en el corazón.

## 3. Extensiones Multilineales

Se han sugerido varios métodos para dar un valor a los juegos sin pagos laterales. El método que seguimos aquí es el de Owen [12], basado en la idea de una extensión multilineal [11].

Dado el juego a n personas con función característica V (cuyos valores son conjuntos), la extensión multilineal es una función F (cuyos valores también son conjuntos) definida para n-tuplas  $(q_1, q_2, \dots, q_n)$  de variables reales,  $0 \leq q_i \leq 1$ . El conjunto  $F(q_1, q_2, \dots, q_n)$  consiste de todos los  $(y_1, \dots, y_n)$  que puedan expresarse en la forma

$$(11) \quad y = \sum_{S \subset N} P_S(q) y(S)$$

donde

$$(12) \quad P_S(q) = \prod_{i \in S} q_i \prod_{i \notin S} (1 - q_i)$$

y, para cada S,  $y(S) \in V(S)$ .

Para el juego de mercado que estamos estudiando, el conjunto  $F(q_1, \dots, q_n)$  consistirá de todos los vectores y que satisfagan

$$(13) \quad y_i \leq \sum_{S \subset N} P_S(q) u^i(x^i(S))$$

donde, para cada S,  $X(S) = \langle x^1(S), x^2(S), \dots, x^n(S) \rangle$  es una asignación factible, que satisface (7)-(8).

Una condición necesaria (pero no suficiente) para que  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  sea o.s.p. en F(q) es que, en (11), y(S) sea o.s.p. en V(S) para todo S tal que  $P_S(q) > 0$ . En nuestro caso, quiere decir que, en (13) debe haber igualdad, y, además, cada una de las asignaciones X(S) debe ser eficiente, sujeto a (7)-(8). Para cada S, pues (excepto si  $P_S(q) = 0$ ), existirán dos vectores,  $\lambda(S) = (\lambda_1(S), \dots, \lambda_n(S))$  y  $p(S) = (p_1(S), \dots, p_n(S))$  tales que

$$u_j^i(x^i(S)) = \lambda_i(S) p_j(S)$$

para todo  $i \in S, j=1, \dots, m$ . Notamos que los  $\lambda_i(S)$  no tienen importancia (mejor dicho, no están definidos) cuando  $i \notin S$ . Para los  $i \in S$ , los  $\lambda_i(S)$  están definidos hasta multiplicación por una constante positiva.

Se presenta una pregunta en cuanto a la relación entre los varios vectores  $\lambda(S)$ . La respuesta es que, hasta multiplicación por una constante, deben ser iguales:

Lema 3. Sea y, definido por (13) (con igualdad) o.s.p. en F(q), sean  $P_S(q) > 0, P_T(q) > 0$ , y sean  $i, k \in S \cap T$ . Entonces

$$\frac{\lambda_i(S)}{\lambda_i(T)} = \frac{\lambda_k(S)}{\lambda_k(T)}$$

Prueba: Como todos los  $\lambda(S) > 0$ , y se pueden multiplicar por un escalar positivo cualquiera, asumiremos que  $\lambda_i(S) = \lambda_k(T) = 1$ . Si el lema es falso,  $\lambda_k(S) \neq \lambda_k(T)$ . No se pierde generalidad al asumir que

$$\lambda_k(S) = \lambda_k(T) + h, \quad h > 0.$$

Cambiemos ahora la alocación  $X(S)$  a  $\bar{X}(S)$  poniendo, para un  $j$  en particular,

$$\bar{x}_j^i(S) = x_j^i(S) - \frac{\epsilon}{p_j(S)P_S(q)}$$

$$\bar{x}_j^k(S) = x_j^k(S) + \frac{\epsilon}{p_j(S)P_S(q)}$$

donde  $\epsilon$  es un número muy pequeño pero positivo. Ningún otro de los componentes de los varios vectores en  $X(S)$  se varía. Obviamente,  $\bar{X}(S)$  satisface (7)-(8). Además,

$$u^i(\bar{x}^i(S)) = u^i(x^i(S)) - \frac{\epsilon}{P_S(q)} + \theta(\epsilon)$$

$$u^k(\bar{x}^k(S)) = u^k(x^k(S)) + \frac{\epsilon \lambda_k(S)}{P_S(q)} + \theta(\epsilon),$$

donde los  $\theta(\epsilon)$  son cantidades desestimables.

De la misma manera, ponemos, para la misma  $j$ ,

$$\bar{x}_j^i(T) = x_j^i(T) + \frac{\epsilon}{p_j(T)P_T(q)}$$

$$\bar{x}_j^k(T) = x_j^k(T) - \frac{\epsilon}{p_j(T)P_T(q)}$$

y aparte de esto dejamos que  $\bar{X}(T)$  sea lo mismo que  $X(T)$ . De nuevo vemos que  $\bar{X}(T)$  satisface (7)-(8), y tenemos

$$u^i(\bar{x}^i(T)) = u^i(x^i(T)) + \frac{\epsilon}{P_T(q)} + \theta(\epsilon)$$

$$u^k(\bar{x}^k(T)) = u^k(x^k(T)) - \frac{\epsilon \lambda_k(T)}{P_T(q)} + \theta(\epsilon)$$

donde de nuevo los  $\theta(\epsilon)$  son desestimables. Si todos los demás  $X(U)$  quedan sin cambio, tendremos

$$\bar{y}^i = \sum_{UCN} P_U(q) u^i(\bar{x}^i(U))$$

$$\bar{y}^k = \sum_{UCN} P_U(q) u^k(\bar{x}^k(U))$$

Vemos que la suma para  $\bar{y}^i$  difiere de la de  $y^i$  sólo que el sumando para  $U=S$  se ha incrementado en  $\epsilon$ ,

mientras aquel para  $U=T$  se ha disminuido en  $\epsilon$ . Por lo tanto  $\bar{y}^i = y^i$  (excepto los términos desestimables  $\theta(\epsilon)$ ). Al mismo tiempo, vemos que la suma para  $\bar{y}^k$  difiere de la de  $y^k$  en que el sumando para  $U=S$  se ha incrementado en  $\epsilon \lambda_k(S)$  mientras que el de  $U=T$  se ha disminuido en  $\epsilon \lambda_k(T)$ . El cambio neto da

$$\bar{y}^k = y^k + \epsilon (\lambda_k(S) - \lambda_k(T)) + \theta(\epsilon)$$

$$\bar{y}^k = y^k + \epsilon h + \theta(\epsilon)$$

de manera que podemos aumentar  $y^k$  sin cambiar los demás  $y^h$ ; concluimos que el punto  $y$  no es o.s.p. La contradicción prueba el lema.

El lema nos dice que, hasta multiplicación por un escalar, los números  $\lambda_i(S)$  son independientes de  $S$ . Esta constante multiplicativa se puede incluir en los vectores  $p(S)$  de precios, lo que nos dice que en realidad sólo habrá un vector  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ . La condición necesaria para que  $y$  sea o.s.p., entonces, es que, para cada  $i \in S, j=1, \dots, m$ , tengamos

$$(14) \quad u_j^i(x^i(S)) = \lambda_i p_j(S)$$

El vector  $\lambda$  nos da, como siempre, la tasa (local) de transferibilidad de utilidad: si  $i$  cede la pequeña cantidad  $\epsilon \lambda_i$ , entonces  $k$  puede ganar la pequeña cantidad  $\epsilon \lambda_k$ .

Como había sucedido anteriormente, encontramos que cada vector  $y$  o.s.p. se caracteriza por el vector lagrangiano  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ ; la  $y$  correspondiente se obtiene con igualdad en (13), donde cada alocación  $X(S)$  maximiza

$$\sum_{i \in S} \frac{1}{\lambda_i} u^i(x_i)$$

sujeto a (7)-(8). Los siguientes lemas son generalizaciones directas de los Lemas 1 y 2.

Lema 4. Sea  $\hat{\lambda}$  y  $\lambda^*$  vectores lagrangianos tales que

$$\lambda_1^* > \hat{\lambda}_1$$

$$\lambda_i^* = \hat{\lambda}_i \quad i = 2, \dots, n.$$

Sean  $\hat{y}$  y  $y^*$  los correspondientes puntos o.s.p. de  $F(q)$ . Entonces

$$\hat{y}_i \geq y_i^*$$

Prueba: Por el Lema 1, vemos que, para cada  $S \subset N, 1 \in S$ ,

$$u^1(\hat{x}^1) \geq u^1(x^{*1})$$

mientras que, si  $1 \notin S, u^1(x^1(S)) = u^1(0) = 0$ .

Ahora bien,

$$\hat{y}_1 = \sum P_S u^1(\hat{x}^1); y_1^* = \sum P_S u^1(x^{*1})$$

y, como todos los  $P_s \geq 0$ , vemos que  $\hat{y}_1 \geq y_1^*$ .

**Lema 5.** Sean los jugadores 1 y 2 intercambiables, en el sentido de que las funciones  $u^1$  y  $u^2$  son idénticas, y supóngase que  $q_1 = q_2$ . Sea  $y$  un punto o.s.p. de  $F(q)$ , con vector lagrangiano  $\lambda$ , tal que  $\lambda_1 > \lambda_2$ . Entonces

$$y_1 \leq y_2.$$

Prueba: Existen cuatro tipos de coalición, según si alguno, ambos o ninguno de 1 y 2 pertenecen. Asumamos que  $S$  es una coalición tal que  $1 \notin S$ ,  $2 \notin S$ , y sean

$$S' = S \cup \{1\}$$

$$\hat{S} = S \cup \{2\}$$

$$S^* = S \cup \{1, 2\}$$

Es fácil ver que  $P_{S'}(q) = P_{\hat{S}}(q)$ , ya que  $q_1 = q_2$ .

Podemos aplicar el Lema 1 a  $S'$  y  $\hat{S}$ , ya que difieren solamente en que hemos intercambiado los jugadores 1 y 2. Entonces,  $\lambda_1 \geq \lambda_2$ , vemos que

$$u^1(x^1(S')) \leq u^1(x^2(\hat{S}))$$

$$u^1(x^1(S')) \leq u^2(x^2(\hat{S}))$$

Para el conjunto  $S^*$ , aplicamos el Lema 2, que nos da

$$u^1(x^2(S^*)) \leq u^2(x^2(S^*))$$

Finalmente,  $x^1(S) = x^2(S) = 0$ , ya que  $1, 2 \notin S$ . Tenemos, entonces,

$$y_1 = \sum_S \left\{ P_{S'} u^1(x^1(S')) + P_{S^*} u^1(x^1(S^*)) \right\}$$

$$y_2 = \sum_S \left\{ P_{\hat{S}} u^2(x^2(\hat{S})) + P_{S^*} u^2(x^2(S^*)) \right\}$$

Aquí, los  $P$  son no negativos, con  $P_{S'} = P_{\hat{S}}$ , y los sumandos en la suma para  $y_1$  son no mayores que los de la suma para  $y_2$ . Por lo tanto  $y_1 \leq y_2$ .

#### 4. El Valor

Para un juego con extensión multilinear  $F$ , un valor se define en [12] de la siguiente manera:

Si restringimos  $(y_1, \dots, y_n)$  a la superficie o.s.p. de  $F(q)$ , el conjunto de todas éstas  $(y; q)$  tiene dimensión  $2n-1$ . Cualquiera de las  $2n$  variables puede entonces tratarse como una función (implícita) de las otras  $2n-1$ . En la mayoría de los casos (incluyendo, como lo veremos, el presente juego de

mercado), esta función es diferenciable, o sea que las derivadas

$$\frac{\partial y_i}{\partial q_j}$$

se pueden en general definir. (Esta es la derivada de  $y_i$  con respecto a  $q_j$ , dado que las demás  $y_k, q_k$  no varían, y que el punto  $(y_1, \dots, y_n)$  sigue sobre la superficie o.s.p. de  $F(q)$ .)

Considérese entonces el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

(15)

$$\frac{dq_i}{dt} = 1$$

(16)

$$\frac{dy_i}{dt} = \frac{\partial y_i}{\partial q_i}$$

con valores iniciales  $y_i(0) = q_i(0) = 0$ . Si este sistema se puede resolver para  $0 \leq t \leq 1$ , entonces el punto

$$y(1) = (y_1(1), y_2(1), \dots, y_n(1))$$

es un valor del juego.

Es fácil ver, de (15), que  $q_i(t) = t$  para todo  $i$  y todo  $t$ . Por lo tanto sólo necesitamos considerar valores de  $q$  en la "diagonal principal"  $(t, t, \dots, t)$ . Para tales  $q$ , tenemos

$$P_s(q) = t^s(1-t)^{n-s}$$

donde  $s$  es el número de jugadores en la coalición  $S$ . Entonces

$$y_i = \sum_{\substack{ScN \\ i \in S}} t^s(1-t)^{n-s} u^i(x^i(S))$$

y así, dejando que solamente  $q_i$  aumente (por una cantidad pequeña) vemos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial y_i}{\partial q_i} &= \sum_{i \in S} t^{s-1}(1-t)^{n-s} u^i(x^i(S)) + \\ &+ \sum_{i \in S} t^s(1-t)^{n-s} \frac{\partial u^i(x^i(S))}{\partial q_i} \end{aligned}$$

Ahora,

$$\frac{\partial u^i}{\partial q_i} = \lambda_i \sum_{j=1}^m P_j \frac{\partial x_j^i}{\partial q_i}$$

y por lo tanto

(17)

$$\frac{\partial y_i}{\partial q_i} = \sum_{i \in S} t^{s-1} (1-t)^{n-s} \left[ u^i(x^i(S)) + \lambda_i t \sum_j p_j(S) \frac{\partial x_j^i(S)}{\partial q_i} \right]$$

Ahora, para cualquier  $k \neq i$ , tendremos

$$\frac{\partial y_k}{\partial q_i} = \sum_{i \in S} t^{s-1} (1-t)^{n-s} \left[ u^k(x^k(S)) - u^k(x^k(S - \{i\})) \right] + \lambda_k \sum_S t^s (1-t)^{n-s} \sum_{j=1}^m p_j(S) \frac{\partial x_j^k(S)}{\partial q_i}$$

Pero queremos que  $\partial y_k / \partial q_i = 0$  para todo  $k \neq i$ , y por lo tanto

$$(18) \quad \sum_S t^s (1-t)^{n-s} \sum_{j=1}^m p_j(S) \frac{\partial x_j^k(S)}{\partial q_i} = - \frac{1}{\lambda_k} \sum_{i \in S} t^{s-1} (1-t)^{n-s} \left[ u^k(x^k(S)) - u^k(x^k(S - \{i\})) \right]$$

Como (7)-(8) debe ser válido para cada  $X(S)$ , tendremos

$$\frac{\partial x_j^i(S)}{\partial q_i} = - \sum_{k \neq i} \frac{\partial x_j^k(S)}{\partial q_i}$$

y, además,

$$\frac{\partial x_j^i(S)}{\partial q_i} = 0 \quad \forall i \in S$$

Por lo tanto,

$$\lambda_i \sum_{i \in S} t^s (1-t)^{n-s} \sum_j p_j(S) \frac{\partial x_j^i(S)}{\partial q_i} = \lambda_i \sum_S t^s (1-t)^{n-s} \sum_j p_j(S) \frac{\partial x_j^i(S)}{\partial q_i}$$

$$= -\lambda_i \sum_S t^s (1-t)^{n-s} \sum_j p_j(S) \sum_{k \neq i} \frac{\partial x_j^k(S)}{\partial q_i} = -\lambda_i \sum_{k \neq i} \left[ \sum_S t^s (1-t)^{n-s} \sum_{j=1}^m p_j(S) \frac{\partial x_j^k(S)}{\partial q_i} \right]$$

y, por (18), esto es igual a

$$\sum_{k \neq i} \frac{\lambda_i}{\lambda_k} \sum_S t^{s-1} (1-t)^{n-s} \left[ u^k(x^k(S)) - u^k(x^k(S - \{i\})) \right]$$

Si introducimos esto en (17), obtenemos

$$\frac{\partial y_i}{\partial q_i} = \sum_{i \in S} t^{s-1} (1-t)^{n-s} \left[ u^i(x^i(S)) + \sum_{k \neq i} \frac{\lambda_i}{\lambda_k} \left[ u^k(x^k(S)) - u^k(x^k(S - \{i\})) \right] \right]$$

y, recordando que  $x^i(S - \{i\}) = 0$ , obtenemos

$$\frac{\partial y_i}{\partial q_i} = \lambda_i \sum_{i \in S} t^{s-1} (1-t)^{n-s} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\lambda_k} \left[ u^k(x^k(S)) - u^k(x^k(S - \{i\})) \right]$$

y la ecuación (16) tiene la forma

$$(19) \quad \frac{dy_i}{dt} = \lambda_i \sum_{i \in S} t^{s-1} (1-t)^{n-s} \sum_{k=1}^n \frac{u^k(x^k(S)) - u^k(x^k(S - \{i\}))}{\lambda_k}$$

Generalmente, al conocer los  $y_i(t)$  podemos determinar los  $\lambda_i(t)$ , los cuales a su vez nos ayudan a calcular los varios  $X(S)$ , ya que sabemos que  $X(S)$  siempre maximiza la suma

$$\sum_{k \in S} \frac{u^k(x^k)}{\lambda_k}$$

sujeto a las restricciones (7)-(8). Existe un problema si los  $u^i$  no son estrictamente cóncavos ya que,

en ese caso, el problema de maximización puede tener varias soluciones: los  $X(S)$  no están completamente determinados. En este caso, se debe notar que la diferencia

$$\sum_{k=1}^n \frac{u_k x^k(S)}{\lambda_k} - \sum_{k=1}^n \frac{u^k(x^k(S - \{i\}))}{\lambda_k}$$

es lo que en realidad nos interesa, y esta diferencia está bien definida si conocemos los  $\lambda_i$  -- es la expresión que deseamos maximizar, menos otra de estas expresiones. Por lo tanto, al conocer los  $\lambda_i$ , la ecuación diferencial (19) está bien definida.

Asumiendo la diferenciabilidad de las varias funciones  $u^i(x)$ , podemos aplicar el Lema 3, y vemos que los  $y_i(t)$  automáticamente determinan los  $\lambda_i$  si todos los  $P_s(q)$  son positivos. Esto pasará, naturalmente, si  $q = (t, t, \dots, t)$  con  $0 < t \leq 1$ , y concluimos que las ecuaciones (19) están bien definidas para  $0 < t \leq 1$ ; si, además, las derivadas de segundo orden de los  $u^i$  son acotadas, el sistema será Lipschitziano.

En  $t=0$ , la situación se complica. Esto se debe, en esencia, a que la diferenciabilidad de las funciones  $u^i$  no nos garantiza una frontera lisa para el conjunto  $F(0)$  -- o, en otras palabras, el Lema 3 no sirve de nada aquí.

Para resolver esta dificultad, notamos que si todos los gradientes

$$\nabla u^i(0, 0, \dots, 0)$$

coinciden, o son proporcionales, entonces el punto  $(0, 0, \dots, 0)$  será o.s.p. para cada  $V(S)$ ; es decir, el juego es no esencial. En ese caso, las ecuaciones (16) tienen la solución trivial  $y=0$ .

Supongamos, entonces, que no todos los gradientes  $\nabla u^i(0, 0, \dots, 0)$  son proporcionales. En ese caso, para cada  $i$  habrá por lo menos un  $k$  tal que  $V(\{i, k\})$  contiene puntos  $y$  con  $y_i, y_k$  positivos,  $y_h = 0$  para  $h \neq i, h \neq k$ .

Consideremos, ahora, el conjunto  $W$  de todos los puntos con forma

$$y = \sum_{i=1}^n \sum_{k=i+1}^n y(\{i, k\})$$

donde cada  $y(\{i, k\}) \in V(\{i, k\})$ . Es fácil ver que  $W$  es convexo. Si  $\hat{y}$  es o.s.p. en  $W$ , existen número  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  tales que  $\hat{y}$  maximiza la suma

$$\frac{y_1}{\lambda_1} + \frac{y_2}{\lambda_2} + \dots + \frac{y_n}{\lambda_n}$$

sujeto a las restricciones (20). Si ponemos entonces

$$\hat{y} = \sum_{i < k} \hat{y}(\{i, k\})$$

con  $\hat{y}(\{i, k\}) \in V(\{i, k\})$ , es fácil ver que  $\hat{y}(\{i, k\})$  maximiza

$$\frac{y_i}{\lambda_i} + \frac{y_k}{\lambda_k}$$

sujeto a  $y \in V(\{i, k\})$ .

Para cada punto  $y \in W$ , con el  $\lambda$  correspondiente, definamos las cantidades

(21)

$$\phi_i = \sum_{k \neq i} \frac{y_k(\{i, k\})}{\lambda_k} - \frac{y_i(\{i, k\})}{\lambda_i}$$

Veremos que existe un punto  $y$  tal que, para cada  $i$ ,  $\phi_i = 0$ . En efecto, consideremos el vector  $\delta y = (\lambda_1 \phi_1, \lambda_2 \phi_2, \dots, \lambda_n \phi_n)$ , definido para cada  $y$  en la superficie o.s.p. de  $W$ . Tenemos

$$\begin{aligned} \sum_i \frac{\delta y_i}{\lambda_i} &= \sum_i \phi_i = \sum_i \sum_{k \neq i} \left[ \frac{y_k(\{i, k\})}{\lambda_k} - \frac{y_i(\{i, k\})}{\lambda_i} \right] \\ &= \sum_{i \neq k} \sum_k \frac{y_k(\{i, k\})}{\lambda_k} - \sum_{i \neq k} \sum_k \frac{y_i(\{i, k\})}{\lambda_i} \end{aligned}$$

y esto es obviamente igual a 0. Por lo tanto  $\delta y$  es tangente a la superficie de  $W$ .

Supongamos, ahora, que  $y_i = 0$  para algún  $i$ . Para cada  $k$ , sabemos que  $(0, 0, \dots, 0) \in V(\{i, k\})$ , y entonces, debido a las propiedades de maximización de  $y$ , tenemos

$$\frac{y_i(\{i, k\})}{\lambda_i} + \frac{y_k(\{i, k\})}{\lambda_k} \geq 0.$$

En esta desigualdad, la desigualdad estricta debe cumplirse por lo menos para un valor de  $k$  -- ya que existe  $k$  tal que  $y_i, y_k$  pueden ambos ser positivos y así, sumando con respecto a  $k$ , obtendremos

$$\sum_k \frac{y_k(\{i, k\})}{\lambda_k} > - \sum_i \frac{y_i(\{i, k\})}{\lambda_i} = 0$$

así que  $\delta y_i = \lambda_i \phi_i > 0$ . Vemos, entonces, que  $\delta y$  es un campo vectorial definido sobre la superficie o.s.p. del conjunto  $W^*$ :

$$W^* = W \cap \{y \mid y_i \geq 0\}$$



y que este campo, en las aristas  $y_1=0$  de este conjunto, está dirigido hacia el interior de la superficie. Concluimos que existe  $y^* > 0$ , en la superficie o.s.p. de  $W^*$ , tal que todos los  $\phi_i = 0$ . Sea  $\lambda^*$  el vector  $\lambda$  correspondiente. Veremos ahora que  $y^*$  trata a jugadores equivalentes simétricamente:

**Lema 6.** Sean 1, 2 jugadores equivalentes, y sea  $y^*$  tal que todos los  $\phi_i = 0$ . Entonces  $y_1^* = y_2^*$ .

Prueba: Supóngase que  $y_1^* > y_2^*$ . Entonces, para algún valor de  $k$ ,  $y_1^* (\{1,k\}) > y_2^* (\{2,k\})$ , o  $y_1^* (\{1,2\}) > y_2^* (\{1,2\})$ . En cualquiera de estos casos, el uso del Lema 1 o el Lema 2 nos da

$$\lambda_1^* \leq \lambda_2^*.$$

Supongamos primero que  $\lambda_1^* < \lambda_2^*$ . Entonces, para cada  $k=3, \dots, n$ ,

$$y_k^* (\{1,k\}) \leq y_k^* (\{2,k\}).$$

debido al Lema 1. Así mismo, debido al Lema 2,

$$y_1^* (\{1,2\}) \geq y_2^* (\{1,2\})$$

y éstos no pueden ambos ser negativos, así que  $y_1^* (\{1,2\}) \geq 0$ . Entonces

$$\frac{y_1^* (\{1,2\})}{\lambda_1^*} \geq \frac{y_1^* (\{1,2\})}{\lambda_2^*} \geq \frac{y_2^* (\{1,2\})}{\lambda_2^*}$$

Por lo tanto

$$\sum_{k \neq 1} \frac{y_k^* (\{1,k\})}{\lambda_k} \leq \sum_{k \neq 2} \frac{y_k^* (\{2,k\})}{\lambda_k}$$

y, además,

$$\sum_{k \neq 1} \frac{y_1^* (\{1,k\})}{\lambda_1} = \frac{y_1^*}{\lambda_1} > \frac{y_1^*}{\lambda_2} > \frac{y_2^*}{\lambda_2} = \sum_{k \neq 2} \frac{y_2^* (\{2,k\})}{\lambda_2}.$$

Por lo tanto,  $\phi_1 < \phi_2$ , lo que contradice la hipótesis que todos  $\phi_i = 0$ .

Supongamos, ahora, que  $\lambda_1^* = \lambda_2^*$ . En este caso, las propiedades de maximalidad de los  $y_1^* (\{1,k\})$  nos dicen que, para cada  $k \geq 3$ ,

$$\frac{y_1^* (\{1,k\})}{\lambda_1^*} + \frac{y_k^* (\{1,k\})}{\lambda_k^*} = \frac{y_2^* (\{2,k\})}{\lambda_2^*} + \frac{y_k^* (\{2,k\})}{\lambda_k^*}$$

puesto que ambos maximizan la misma expresión, y por lo tanto

$$\sum_{k \neq 1} \left\{ \frac{y_1^* (\{1,k\})}{\lambda_1^*} + \frac{y_k^* (\{1,k\})}{\lambda_k^*} \right\} = \sum_{k \neq 2} \left\{ \frac{y_2^* (\{2,k\})}{\lambda_2^*} + \frac{y_k^* (\{2,k\})}{\lambda_k^*} \right\}$$

Sean  $V_1$  y  $V_2$  los lados izquierdo y derecho, respectivamente, de esta ecuación. Entonces

$$\phi_1 = V_1 - 2 \frac{y_1^*}{\lambda_1^*} \quad \phi_2 = V_2 - 2 \frac{y_2^*}{\lambda_2^*}$$

y, como  $V_1 = V_2$ ,  $\lambda_1^* = \lambda_2^* > 0$ ,  $y_1^* > y_2^*$ , vemos que  $\phi_1 < \phi_2$ . De nuevo encontramos que no todos los  $\phi_i = 0$ . La contradicción prueba el Lema:  $y_1^* = y_2^*$ .

Volvemos ahora al sistema (19) y su comportamiento para valores pequeños de  $t$ . Si  $t$  es pequeño, el coeficiente  $P_S(t, t, \dots, t)$  es aproximadamente igual a  $t^s$ , y, como los conjuntos  $S$  con  $s=0$  o  $s=1$  no pueden dar utilidad, vemos que los valores de  $y(t)$  deben tener orden de magnitud  $t^2$ . Efectivamente,

$$(22) \quad y_i = t^2 \sum_{k \neq i} y_i (\{i,k\}) + O(t^3)$$

donde  $y_i (\{i,k\}) = u^i(x^i (\{i,k\}))$ , y, por (19),

$$(23) \quad \dot{y}_i = t \lambda_i \sum_{k \neq i} \left\{ \frac{y_i (\{i,k\})}{\lambda_i} + \frac{y_k (\{i,k\})}{\lambda_k} \right\} + O(t^2)$$

Las soluciones "bien comportadas" son aquellas que toman la forma de series de potencias de  $t$ , o sea que el coeficiente de  $t^2$  debe ser constante; por lo tanto, al diferenciar (22), encontramos

$$\dot{y}_i = 2t \sum_{k \neq i} y_i (\{i,k\}) + O(t^2)$$

y, al igualar esto con (23), tenemos

$$(24) \quad 2 \sum_{k \neq i} y_i (\{i,k\}) = \lambda_i \sum_{k \neq i} \frac{y_i (\{i,k\})}{\lambda_i} + \frac{y_k (\{i,k\})}{\lambda_k}$$

o, simplemente,  $\phi_i = 0$ .

Por lo tanto, las soluciones analíticas deben comenzar con los valores iniciales

$$y_i (\{i,k\}) = y_1^* (\{i,k\}) \quad \text{en } t = 0$$

y los  $\lambda_i^*$  correspondientes como valores iniciales de  $\lambda_i$ ; éstos a su vez sirven para calcular valores iniciales de los  $y_i(S)$  para otros conjuntos  $S$ .

En breve, entonces, las soluciones  $y^*$  de la ecuación  $\dot{\phi} = 0$  nos permiten obtener valores iniciales para el sistema diferencial (19) en el punto  $t = 0$ :

$$y_i(t) = t^2 y_i^* + 0(t^3).$$

Después del principio, el sistema (19) continúa sin más puntos singulares.

Buen comportamiento de las funciones  $u^i$  (es decir, su doble diferenciabilidad) nos garantizará que (19) tiene soluciones únicas después del comienzo; tendremos, pues, exactamente una solución de (19) para cada solución  $y^*$  de  $\dot{\phi} = 0$ . Es importante notar que, si  $i$  y  $k$  son jugadores equivalentes, tendremos entonces  $y_i(t) = y_k(t)$  para todo  $t \in [0, 1]$ , es decir que el valor siempre trata a los jugadores equivalentes de igual manera.

## 5. El Mercado Replicado

Consideremos ahora la situación que se presenta en caso de lo que llamaremos replicación  $r$ -tuple. Efectivamente, esta replicación aumenta el número de jugadores de  $n$  a  $rn$  ( $r$ , un entero positivo), reemplazando al jugador,  $i$ , del juego original, con  $r$  jugadores que llamaremos *de tipo  $i$* . Cada uno de los  $r$  jugadores de tipo  $i$  en el juego replicado tiene una dote inicial  $z^i$ , y, más importante, tiene la misma función de utilidad,  $u^i$ . Jugadores del mismo tipo son, pues, equivalentes en el sentido del Lema 2.

Representaremos cada jugador de este juego por un par  $(h, i)$ , donde  $h$  e  $i$  son enteros,  $1 \leq h \leq r$ ,  $1 \leq i \leq n$ . El jugador  $(h, i)$  es entonces el  $h$ -ésimo jugador de tipo  $i$ , o la  $h$ -ésima réplica de  $i$ .

El juego nuevo sigue siendo, naturalmente, un juego de mercado; lo importante es que la estructura es un poco más específica que la que habíamos considerado originalmente. De todas maneras, todo lo que se había dicho originalmente sigue siendo verdad ahora: función característica, corazón, valor se definen de la misma manera. Gracias, sin embargo, a la estructura especial, podemos obtener resultados más fuertes.

Notamos, además, que cada coalición  $S$  se puede representar por un vector  $s = (s_1, s_2, \dots, s_n)$ , donde  $s_i$  es el número de jugadores de tipo  $i$  en  $S$ .

En muchos casos, estaremos interesados, no en la utilidad que recibe un jugador  $(h, i)$ , sino en la utilidad total a todos los jugadores de tipo  $i$  en cierta coalición  $S$  (o en todo el juego). Escribiremos

$$(26) \quad w_S^i = \sum_{\substack{h \\ (h,i) \in S}} u^i(x^{hi}).$$

Asumiendo, como siempre, la concavidad de las funciones  $u^i$ , notamos que  $w^i$  se maximiza (sujeto a un total fijo de bienes para todos los jugadores de

tipo  $i$ ) si todos los jugadores de este tipo reciben cantidades iguales:

$$(27) \quad x^{hi} = \frac{1}{s_i} \xi^i \quad (h,i) \in S$$

y entonces

$$(28) \quad w_S^i = s_i u^i\left(\frac{1}{s_i} \xi^i\right)$$

donde  $\xi^i = (\xi_1^i, \dots, \xi_m^i)$  es la realocación total a los jugadores de tipo  $i$  en esta coalición.

Se debe notar que, en la ecuación (28),  $w^i$  es función de las  $m+1$  variables  $\xi_j^i$  ( $j=1, \dots, m$ ) y  $s_i$ . Naturalmente,  $s_i$  sólo puede tomar valores positivos enteros, pero no hay razón valedera que nos prohíba extender esta definición a todos los valores reales positivos de  $s_i$  (y quizá, tomando límites, también hasta  $s_i = 0$ ). Definamos, entonces,

$$(29) \quad w^i(\xi_1^i, \dots, \xi_m^i; p) = p u^i\left(\frac{1}{p} \xi_1^i, \dots, \frac{1}{p} \xi_m^i\right).$$

Como  $u^i$  es cóncava, es claro que, para cada  $p > 0$ ,  $w^i$  es cóncava en las  $m$  variables  $\xi_j^i$ . En realidad, lo siguiente es verdad:

**Lema 7.** Si  $u^i$  es cóncava, entonces  $w^i$  es cóncava sobre todo el conjunto  $p > 0$ .

Prueba: Sean,  $p, p' > 0$ ,  $\alpha + \beta = 1$ ,  $\alpha, \beta \geq 0$ . Pongamos

$$\gamma = \frac{\alpha p}{\alpha p + \beta p'} \quad \delta = \frac{\beta p'}{\alpha p + \beta p'}$$

y obviamente  $\gamma, \delta \geq 0$ , con  $\gamma + \delta = 1$ .

Entonces, para dos vectores  $\xi$  y  $\xi'$ , tenemos

$$\begin{aligned} w(\alpha \xi + \beta \xi'; \alpha p + \beta p') &= \\ &= (\alpha p + \beta p') u\left(\frac{\alpha \xi + \beta \xi'}{\alpha p + \beta p'}\right) \\ &= (\alpha p + \beta p') u\left(\gamma \frac{\xi}{p} + \delta \frac{\xi'}{p'}\right) \\ &\geq (\alpha p + \beta p') \left[ \gamma u\left(\frac{\xi}{p}\right) + \delta u\left(\frac{\xi'}{p'}\right) \right] \\ &= \alpha p u\left(\frac{\xi}{p}\right) + \beta p' u\left(\frac{\xi'}{p'}\right) \\ &= \alpha w(\xi; p) + \beta w(\xi'; p') \end{aligned}$$

Esto nos dará

$$w(\alpha\xi + \beta\xi'; \alpha p + \beta p') \geq \alpha w(\xi; p) + \beta w(\xi'; p')$$

y vemos que  $w$  es cóncava.

## 6. Valor del Juego Replicado

Ahora estudiaremos el valor del juego. En este caso, la simetría nos permite una simplificación. Hemos visto anteriormente que el proceso de integración usado trata todos los jugadores del mismo tipo simétricamente (puesto que son equivalentes). Así, en (19), tendremos

$$(30) \quad y^{hi}(t) = y^{\ell i}(t)$$

y también

$$(31) \quad \lambda_{hi}(t) = \lambda_{\ell i}(t)$$

para todo  $h, \ell = 1, \dots, r; i = 1, \dots, n$ , y  $0 \leq t \leq 1$ .

Ahora, para cualquier coalición  $S$ , la alocaación  $X(S)(t)$  debe maximizar la expresión

$$\sum_{(h,i) \in S} \frac{u^i(x^{hi})}{\lambda_{hi}(t)}$$

y, debido a la simetría, esto se puede escribir en la forma

$$\sum_{i=1}^n \frac{s_i u^i(x^i)}{\lambda_i(t)}$$

donde  $x^i$  es el paquete de bienes de cada jugador de tipo  $i$  en  $S$ , y  $\lambda_i$  es el valor común de todos los  $\lambda_{hi}$  ( $h=1, \dots, r$ ). De nuevo usando la simetría, es fácil ver que el vector  $x^i(S)$  depende solamente de los números  $s_1, s_2, \dots, s_n$  de jugadores de cada tipo, y no en los jugadores particulares de cada tipo que pertenecen a  $S$ .

La alocaación total a todos los jugadores de tipo  $i$ , en  $S$ , es entonces

$$(32) \quad \xi^i(S) = s_i x^i(S)$$

y la utilidad total para todos estos jugadores es

$$(33) \quad w^i(\xi^i, s_i) = s_i u^i(x^i).$$

Posiblemente sea más fácil tratar las alocaaciones totales,  $\xi^i$ , y las utilidades totales,  $w^i$ , de todos los jugadores de tipo  $i$  en una coalición dada. Si es así, notemos que la alocaación  $\Xi(S) = (\xi^1(S), \dots, \xi^n(S))$  debe maximizar la expresión

$$\sum_{i=1}^n \frac{w^i(\xi^i, s_i)}{\lambda_i}$$

sujeto a las restricciones

$$(34) \quad \sum_{i=1}^n \xi^i = 0$$

$$(35) \quad \xi^i = 0 \quad \text{Si } s_i = 0.$$

Las ecuaciones (19) se pueden transformar ahora, si ponemos

$$(36) \quad \eta_i = \sum_{h=1}^r y_{hi} = r y_{hi}$$

$$(37) \quad \sigma = \sum_{i=1}^n s_i$$

lo que nos dará

$$(38) \quad \eta_i = \sum_{S \subset N} t^\sigma (1-t)^{nr-\sigma} w^i(\xi^i(S); s_i).$$

Ahora,  $\xi^i(S)$  depende, no del conjunto  $S$ , sino del vector  $(s_1, \dots, s_n)$ .

Para este vector  $s$ , habrá

$$\prod_{k=1}^n \binom{r}{s_k} = \binom{r}{s_1} \binom{r}{s_2} \dots \binom{r}{s_n}$$

conjuntos diferentes,  $S$ , para este mismo vector  $s$ .

Luego

$$(39) \quad \eta_i = \sum_s t^\sigma (1-t)^{nr-\sigma} \prod_{k=1}^n \binom{r}{s_k} w^i(\xi^i(s); s_i)$$

donde la suma se toma sobre todos los vectores  $s$ , enteros, tales que  $0 \leq s_k \leq r$  ( $k=1, \dots, n$ ).

De la misma manera, la ecuación (19) será ahora

$$\dot{y}_{hi} = \lambda_i \sum_{\substack{S \\ (h,i) \in S}} t^{\sigma-1} (1-t)^{nr-\sigma} \sum_{k=1}^n \frac{u^k(x^k(S)) - u^k(x^k(S'))}{\lambda_{\ell k}}$$

donde  $S' = S - \{(h,i)\}$ . Para un valor de  $k$  dado, existen  $s_k$  valores de  $l$  tales que  $(l,k) \in S$ , y así tenemos

$$\dot{y}_{hi} = \lambda_i \sum_{\substack{S \\ (h,i) \in S}} t^{\sigma-1} (1-t)^{nr-\sigma} \\ \sum_{k=1}^n \frac{s_k u^k(x^k(S)) - s'_k u^k(x^k(S'))}{\lambda_k}$$

donde  $s'_i = s_i - 1$ ,  $s'_k = s_k$  si  $k \neq i$ . De nuevo, tendremos

$$w^k(\xi^k(S); s_k) = s_k u^k(x^k(S))$$

luego

$$(40) \quad \dot{y}_{hi} = \lambda_i \sum_{\substack{S \\ (h,i) \in S}} t^{\sigma-1} (1-t)^{nr-\sigma} \\ \sum_{k=1}^n \frac{w^k(\xi^k(S); s_k) - w^k(\xi^k(S'); s_k)}{\lambda_k}$$

De nuevo preferimos expresar esta suma en términos de los vectores  $s$  más que de los conjuntos  $S$ . Dado  $s$ , el jugador  $(h,i)$  está naturalmente fijo, y hay  $\binom{r-1}{s_i-1}$  maneras de escoger los otros  $s_i - 1$  jugadores de tipo  $i$ . Para  $k \neq i$ , existen  $\binom{r}{s_k}$  maneras de escoger los  $s_k$  jugadores de tipo  $k$ . Tenemos

$$\binom{r-1}{s_i-1} = \frac{s_i}{r} \binom{r}{s_i}$$

y por lo tanto existen

$$\frac{s_i}{r} \prod_{k=1}^n \binom{r}{s_k}$$

maneras diferentes de escoger a  $S$ , dado  $s$ . Tenemos, entonces,

$$(41) \quad \dot{y}_{hi} = \lambda_i \sum_s \frac{s_i}{r} t^{\sigma} (1-t)^{nr-\sigma} \prod_{k=1}^n \binom{r}{s_k} \\ \sum_{k=1}^n \frac{w^k(\xi^k(s); S_k) - w^k(\xi^k(s'); S'_k)}{\lambda_k}$$

y, recordando que  $\eta_i = t y_{hi}$ , obtenemos

$$(42) \quad \eta_i = \lambda_i \sum_s \frac{s_i}{t} t^{\sigma} (1-t)^{nr-\sigma} \prod_{k=1}^n \binom{r}{s_k} \\ \sum_{k=1}^n \frac{w^k(\xi^k(s); S_k) - w^k(\xi^k(s'); S'_k)}{\lambda_k}$$

donde la suma se toma sobre todos los vectores  $s$ , con  $0 \leq s_k \leq r$ . Naturalmente, el valor para el juego replicado no es, en general, igual al valor para el juego original (sin replicar). Se sabe que esto no pasa ni siquiera para los juegos con pagos laterales; *a fortiori*, podemos esperar comportamiento más extraño aún de los juegos sin pagos laterales. La solución, pues, del sistema (19) para el juego no replicado ( $r=1$ ) no nos dará, en general, la solución para juegos más grandes ( $r \geq 2$ ). Es interesante, sin embargo, notar que, para valores pequeños de  $t$ , los juegos replicados y no replicados dan, en efecto, las mismas soluciones.

**Teorema 1.** Sea

$$(42) \quad y_i(t) = y_i^* t^2 + o(t^3)$$

una solución regular (analítica), válida cerca de  $t = 0$ , para el sistema (19) del juego no replicado. Entonces

$$(43) \quad y_{hi}(t) = r y_i^* t^2 + o(t^3)$$

es una solución regular para (19) del juego replicado. Conversamente, toda solución regular para el juego replicado tendrá la forma (43).

Prueba: Sea  $y_i(t) = y_i^* t^2 + o(t^3)$  una solución para el juego no replicado.

Existen entonces números  $\lambda_i^*$ ,  $\hat{y}_i(\{i,k\})$  tales que

$$y_i^* = \sum_{k \neq i} \hat{y}_i(\{i,k\})$$

y, para cada  $(i,k)$ , los números  $\hat{y}_i(\{i,k\})$ ,  $\hat{y}_k(\{i,k\})$  maximizan

$$\frac{y_i}{\lambda_i^*} + \frac{y_k}{\lambda_k^*}$$

sujeto a  $y \in V(\{i,k\})$ . Además, para cada  $i$ ,

$$\sum_{k \neq i} \frac{\hat{y}_i(\{i,k\})}{\lambda_i^*} = \sum_{k \neq i} \frac{\hat{y}_k(\{i,k\})}{\lambda_k^*}$$

Para el juego replicado, ahora, sea

$$\tilde{y}_{hi} (\{(h,i), (\ell,k)\}) = \hat{y}_i (\{i,k\}) \quad \text{si } i \neq k$$

$$\tilde{y}_{hi} (\{(h,i), (\ell,i)\}) = 0$$

$$\lambda_{hi} = \lambda_i^*$$

Ahora bien, los dos conjuntos,  $V(\{i,k\})$  en el juego original, y  $V(\{(h,i), (\ell,k)\})$  en el juego replicado son congruentes en el sentido de que, si  $y$  está en el primero de ellos, entonces existe  $y'$  en el otro, con  $y'_{hi} = y_i$ ,  $y'_{\ell k} = y_k$ ; conversamente, si  $y'$  pertenece al segundo de ellos, existe tal  $y$  en el primero. Por lo tanto  $\tilde{y}_{hi} (\{(h,i), (\ell,k)\})$ ,  $\tilde{y}_{\ell k} (\{(h,i), (\ell,k)\})$  maximizan

$$\frac{y_{hi}}{\lambda_{hi}} + \frac{y_{\ell k}}{\lambda_{\ell k}}$$

sujeto a  $y \in V(\{(h,i), (\ell,k)\})$ .

Debido a la simetría y concavidad de las funciones de utilidad, vemos que  $y_{hi} + y_{\ell i} \leq 0$  para todo  $y \in V(\{(h,i), (\ell,i)\})$ . Por lo tanto los valores  $\tilde{y}_{hi} = \tilde{y}_{\ell i} = 0$  maximizan la expresión

$$\frac{y_{hi}}{\lambda_{hi}} + \frac{y_{\ell i}}{\lambda_{\ell i}}$$

sobre todo este conjunto.

Finalmente, para cada  $(h,i)$  tenemos

$$\begin{aligned} & \sum_{(\ell,k) \neq (h,i)} \left[ \frac{\tilde{y}_{hi} (\{(h,i), (\ell,k)\})}{\lambda_{hi}} - \frac{\tilde{y}_{\ell k} (\{(h,i), (\ell,k)\})}{\lambda_{\ell k}} \right] \\ &= \sum_{k \neq i} \sum_{\ell=1}^r \left[ \frac{\tilde{y}_{hi} (\{(h,i), (\ell,k)\})}{\lambda_{hi}} - \frac{\tilde{y}_{\ell k} (\{(h,i), (\ell,k)\})}{\lambda_{\ell k}} \right] \\ &= r \sum_{k \neq i} \left[ \frac{\hat{y}_i (\{i,k\})}{\lambda_i^*} - \frac{\hat{y}_k (\{i,k\})}{\lambda_k^*} \right] \\ &= 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto ese vector  $\tilde{y}$  nos dará una solución regular de (19). Tenemos

$$\sum_{(\ell,k) \neq (h,i)} \tilde{y}_{hi} (\{(h,i), (\ell,k)\}) =$$

$$\begin{aligned} & \sum_{k \neq i} \sum_{\ell=1}^r \tilde{y}_{hi} (\{(h,i), (\ell,k)\}) = \\ & r \sum_{k \neq i} \hat{y}_i (\{i,k\}) \\ &= r y_i^* \end{aligned}$$

y vemos que

$$y_{hi}(t) = r y_i^* t^2 + o(t^3)$$

es una solución regular de (19) de  $t = 0$ .

Conversamente, supongamos que

$$y_{hi}(t) = y_{hi}^{**} t^2 + o(t^3)$$

es una solución regular para el juego replicado, y sean  $\lambda_{hi}^{**}$  los componentes del vector lagrangiano correspondiente. Entonces

$$y_{hi}^{**} = y_{\ell i}^{**}; \lambda_{hi}^{**} = \lambda_{\ell i}^{**}$$

para todo  $h, \ell = 1, \dots, r$  y todo  $i = 1, \dots, n$ .

Sabemos que existen números  $\tilde{y}_{hi} (\{(h,i), (\ell,k)\})$  tales que

$$y_{hi}^{**} = \sum_{(\ell,k) \neq (h,i)} \tilde{y}_{hi} (\{(h,i), (\ell,k)\})$$

que  $\tilde{y}_{hi} (\{(h,i), (\ell,k)\})$ ,  $\tilde{y}_{\ell k} (\{(h,i), (\ell,k)\})$  maximizan

$$\frac{y_{hi}}{\lambda_{hi}^{**}} + \frac{y_{\ell k}}{\lambda_{\ell k}^{**}}$$

para  $y \in V(\{(h,i), (\ell,k)\})$ , y que, para cada  $(h,i)$ ,

$$\begin{aligned} & \sum_{(k,\ell) \neq (h,i)} \left[ \frac{y_{hi} (\{(h,i), (\ell,k)\})}{\lambda_{hi}^{**}} - \frac{y_{\ell k} (\{(h,i), (\ell,k)\})}{\lambda_{\ell k}^{**}} \right] = 0 \end{aligned}$$

Como los  $\lambda_{hi}^{**}$  no dependen de h, pondremos

$$\lambda_i^* = \lambda_{hi}^{**}$$

y, además,

$$\hat{y}_i(\{i,k\}) = \frac{1}{r^2} \sum_{h=1}^r \sum_{\ell=1}^r \tilde{y}_{hi}(\{(h,i), (\ell,k)\})$$

para cada par i,k,  $i \neq k$ .

Ahora bien, el punto  $\tilde{y}(\{(h,i), (\ell,k)\})$  pertenece a  $V(\{(h,i), (\ell,k)\})$ , luego, bajo el mapa natural  $y_{hi} \rightarrow y_i, y_{\ell k} \rightarrow y_k$ , nos dará un punto de  $V(\{i,k\})$  en el juego no replicado. Como este conjunto es convexo, el punto  $\hat{y}(\{i,k\})$ , que es el promedio de estos  $r^2$  puntos, también pertenece a  $V(\{i,k\})$ . Además,

$$\frac{\hat{y}_i(\{i,k\})}{\lambda_i^*} + \frac{\hat{y}_k(\{i,k\})}{\lambda_k^*} = \frac{1}{r^2} \sum_h \sum_\ell \left[ \frac{\tilde{y}_{hi}(\{(h,i), (\ell,k)\})}{\lambda_i^*} + \frac{\tilde{y}_{\ell k}(\{(h,i), (\ell,k)\})}{\lambda_k^*} \right]$$

y como cada uno de los sumandos aquí maximiza  $y_i/\lambda_i^* + y_k/\lambda_k^*$ , también lo hace el lado izquierdo de esta ecuación - el promedio aritmético de ellos. Por lo tanto  $\hat{y}_i(\{i,k\}), \hat{y}_k(\{i,k\})$  maximiza

$$\frac{y_i}{\lambda_i^*} + \frac{y_k}{\lambda_k^*}$$

sujeto a  $y \in V(\{i,k\})$ .

Finalmente, para cada i, tenemos

$$\begin{aligned} & \sum_{k \neq i} \left[ \frac{\hat{y}_i(\{i,k\})}{\lambda_i^*} - \frac{\hat{y}_k(\{i,k\})}{\lambda_k^*} \right] \\ &= \frac{1}{r^2} \sum_{k \neq i} \sum_{h=1}^r \sum_{\ell=1}^r \left[ \frac{\tilde{y}_{hi}(\{(h,i), (\ell,k)\})}{\lambda_{hi}^{**}} - \frac{\tilde{y}_{\ell k}(\{(h,i), (\ell,k)\})}{\lambda_{\ell k}^{**}} \right] \\ &= \frac{1}{r^2} \sum_{h=1}^r \left\{ \sum_{k \neq i} \sum_{\ell=1}^r \left[ \frac{\tilde{y}_{hi}(\{(h,i), (\ell,k)\})}{\lambda_{hi}^{**}} - \frac{\tilde{y}_{\ell k}(\{(h,i), (\ell,k)\})}{\lambda_{\ell k}^{**}} \right] \right\} \end{aligned}$$

En esta última expresión, le podemos añadir, a la suma interna, términos como

$$\frac{y_{hi}(\{(h,i), (\ell,i)\})}{\lambda_{hi}^{**}} - \frac{y_{\ell i}(\{(h,i), (\ell,i)\})}{\lambda_{\ell i}^{**}}$$

ya que éstos se cancelarán al sumar con respecto a h (la suma externa). El total de esta suma será entonces

$$\frac{1}{r^2} \sum_{h=1}^r \left\{ \sum_{(\ell,k) \neq (h,i)} \left[ \frac{\tilde{y}_{hi}(\{(h,i), (\ell,k)\})}{\lambda_{hi}^{**}} - \frac{\tilde{y}_{\ell k}(\{(h,i), (\ell,k)\})}{\lambda_{\ell k}^{**}} \right] \right\}$$

y, por hipótesis, la suma interna es igual a cero. Entonces

$$\sum_{k \neq i} \left[ \frac{\hat{y}_i(\{i,k\})}{\lambda_i^*} - \frac{\hat{y}_k(\{i,k\})}{\lambda_k^*} \right] = 0$$

y los  $\hat{y}(\{i,k\})$  nos darán una solución regular. Esta es

$$\begin{aligned} y_i^* &= \sum_{k \neq i} \hat{y}_i(\{i,k\}) \\ &= \frac{1}{r^2} \sum_{k \neq i} \left\{ \sum_{h=1}^r \sum_{\ell=1}^r \tilde{y}_{hi}(\{(h,i), (\ell,k)\}) \right\} \end{aligned}$$

(44)

$$y_i^* = \frac{1}{r^2} \sum_{h=1}^r \left\{ \sum_{k \neq i} \sum_{\ell=1}^r \tilde{y}_{hi}(\{(h,i), (\ell,k)\}) \right\}$$

Ahora, para  $h \neq \ell$ , sabemos que

$$\frac{\tilde{y}_{hi}(\{(h,i), (\ell,i)\})}{\lambda_{hi}^{**}} + \frac{\tilde{y}_{\ell i}(\{(h,i), (\ell,i)\})}{\lambda_{\ell i}^{**}} = 0$$

porque, debido a la concavidad, esto no puede ser positivo, pero sí puede ser 0 (su valor máximo) si escogemos  $\tilde{y}_{hi} = \tilde{y}_{\ell i} = 0$ . Entonces, como  $\lambda_{hi}^{**} = \lambda_{\ell i}^{**}$ , tenemos

$$\tilde{y}_{hi}(\{(h,i), (\ell,i)\}) + \tilde{y}_{\ell i}(\{(h,i), (\ell,i)\}) = 0$$

y por lo tanto, en la ecuación (44), podemos añadir los términos  $\tilde{y}_{hi}(\{(h,i), (\ell,i)\})$  a la suma interna - ya que éstos se cancelarán al tomar la suma externa (con respecto a h). Por lo tanto

$$y_i^* = \frac{1}{r^2} \sum_{h=1}^r \left\{ \sum_{(l,k) \neq (h,i)} \tilde{y}_{hi} \left( \{(h,i), (l,k)\} \right) \right\}$$

$$= \frac{1}{r^2} \sum_{h=1}^r y_{hi}^{**}$$

Ahora bien,  $y_{hi}^{**}$  es independiente de  $h$ , luego

$$y_i^* = \frac{1}{r} y_{hi}^{**}$$

y vemos que la solución regular es

$$y_i(t) = \frac{1}{r} y_{hi}^{**} t^2 + O(t^3).$$

## 7. Propiedades Asintóticas

Consideremos, en fin, el comportamiento de las ecuaciones de valor si  $r$ , el número de réplicas, aumenta sin cota. Empezamos con la ecuación (42)

$$\eta = \lambda_i \sum_s \frac{s_i}{t} t^\sigma (1-t)^{nr-\sigma} \prod_{k=1}^n \binom{r}{s_k}$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{w^k(\xi^k(s); s_k) - w^k(\xi^k(s'); s'_k)}{\lambda_k}$$

Podemos escribir

$$t^\sigma (1-t)^{nr-\sigma} = \prod_{k=1}^n t^{s_k} (1-t)^{r-s_k}$$

luego

$$t^\sigma (1-t)^{nr-\sigma} \prod_{k=1}^n \binom{r}{s_k}$$

$$= \prod_{k=1}^n B(r, s_k; t)$$

donde  $B(r, s_k; t)$  es la probabilidad binomial:

$$B(r, s_k; t) = t^{s_k} (1-t)^{r-s_k} \binom{r}{s_k}$$

Por lo tanto, (42) toma la forma

(45)

$$\eta_i = \lambda_i \sum_s \left\{ \prod B(r, s_k; t) \right\} \left[ \frac{s_i}{t} \sum_{k=1}^n \frac{w^k(s) - w^k(s')}{\lambda_k} \right]$$

donde, por simplificar, hemos escrito  $w^k(s)$  en lugar de  $w^k(\xi^k(s); s_k)$ , etc. De la misma manera, (39)

toma la forma

(46)

$$\eta_i = \sum_s \left\{ \prod B(r, s_k; t) \right\} w^k(s)$$

Aquí, los  $w^k(s)$  dependen de los  $\lambda_k$  además de los  $s_k$ .

Hasta ahora, sólo hemos considerado valores enteros para el vector  $(s_1, \dots, s_n)$ . No hay razón, sin embargo, para no considerar valores fraccionales de los  $s_k$ , sobre todo si trabajamos en el  $\eta$ -espacio (de  $n$  dimensiones) en cambio del  $y$ -espacio (de  $rn$  dimensiones). Definamos, entonces,

$$W(s_1, s_2, \dots, s_n) \quad 0 \leq s_k \leq r$$

como el conjunto de todos los puntos  $(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)$  tales que

$$(47) \quad \eta_i \leq w^i(\xi^i; s_i)$$

para alguna asignación  $\Xi = (\xi^1, \dots, \xi^n)$  que satisfaga

$$(48) \quad \sum_{i=1}^n \xi^i = 0$$

$$(49) \quad \xi^k = 0 \text{ if } s_k = 0$$

Por otra parte, tenemos los conjuntos  $\tilde{F}(q)$ , de todos los  $(\eta_1, \dots, \eta_n)$  que tengan la forma

$$\eta_i = \sum_{h=1}^r y_{hi} \quad i=1, \dots, n$$

para algún  $y \in F(q)$ .

Existe una relación natural entre los conjuntos  $\tilde{F}(q)$  y  $W(s)$ , donde  $s$  y  $q$  cumplen la relación

$$s_i = \sum_{h=1}^r q_{hi} \quad i=1, \dots, n$$

En efecto, es fácil ver que, si todos los  $q_{hi}$  son 0 ó 1, entonces  $F(q) = V(S)$ , donde  $S$  es el conjunto de los  $(h,i)$  con  $q_{hi} = 1$ . En ese caso,

$$\tilde{F}(q) = W(s).$$

En el caso más general, en que los  $q_{hi}$  tienen valores fraccionales, podemos dar un resultado más débil:

Lema 8. Sea  $s_i = \sum_h q_{hi}$ . Entonces

$$(50) \quad \tilde{F}(q) \subset W(s)$$

Prueba: Supóngase que  $\eta \in \tilde{F}(q)$ . Entonces existe  $y \in F(q)$  con

$$\eta_i = \sum_{h=1}^r y_{hi}$$

$$y_{hi} = \sum_{TCN^*} P_t(q) y_{hi}(T)$$

$$y_{hi}(T) \leq u^i(x^{hi}(t))$$

donde  $X(T) = \langle x^{hi}(T) \rangle$  es una asignación factible para la coalición T. Entonces

$$\eta_i = \sum_{TCN} P_t(q) N_i(T)$$

donde

$$\eta_i(T) = \sum_h y_{hi}(T) \leq \sum_{(h,i) \in T} u^i(x^{hi}(T))$$

y

$$\sum_{(h,i) \in T} u^i(x^{hi}(T)) \leq w^i(\xi^i(T); t_i)$$

Por lo tanto

$$\eta_i \leq \sum_{TCN} P_t(q) w^i(\xi^i(T); t_i)$$

Ahora bien, los  $P_T(q)$  son números no negativos que satisfacen

$$\sum_{TCN} P_T(q) = 1$$

luego, por la concavidad de  $w^i$ ,

$$\sum P_T(q) w^i(\xi^i(T); t_i) \leq w^i(\xi^i; \sigma_i)$$

donde

$$\xi^i = \sum_T P_T(q) \xi^i(T)$$

y

$$\sigma = \sum P_T(q) t_i.$$

Ahora bien,

$$\sum_{i=1}^n \xi^i = \sum_{TCN} P_T(q) \sum_{i=1}^n \xi^i(T) = 0$$

ya que cada  $\xi(T)$  es una asignación factible para T. Supóngase, además, que  $\sigma_k = 0$ . Esto quiere decir que, para cada T, o bien  $t_k = 0$ , o  $P_T(q) = 0$ . Pero si  $t_k = 0$ , entonces  $\xi^k(T) = 0$  también, y entonces

$$\text{if } \sigma_k = 0, \text{ then } \xi^k = \sum P_T(q) \xi^k(T) = 0$$

Vemos, pues, que  $\eta$  satisface (48)-(49), así que

$$\eta \in w(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n).$$

Falta demostrar que  $(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) = (s_1, s_2, \dots, s_n)$ ,

donde  $s_i = \sum q_{hi}$ . Esto se debe a que tenemos

$$\sigma_i = \sum_T P_T(q) t_i$$

Sea, pues,  $t_{hi} = 0$  si  $(h,i) \notin T$ ,  $t_{hi} = 1$  si  $(h,i) \in T$ . Entonces

$$t_i = \sum_{h=1}^r t_{hi}$$

y

$$\begin{aligned} \sigma_i &= \sum_h \left\{ \sum_T P_T(q) t_{hi} \right\} \\ &= \sum_h \left\{ \sum_{(h,i) \in T} P_T(q) \right\} \end{aligned}$$

Esto nos da

$$\sum_{(h,i) \in T} P_T(q) = q_{hi} \sum_T \left\{ \prod_{\substack{(\ell,k) \in T \\ (\ell,k) \neq (h,i)}} q_{\ell k} \prod_{(\ell,k) \notin T} (1 - q_{\ell k}) \right\}$$

y la suma en esta última expresión es igual a 1 (ver, p.e.j. [10]). Entonces

$$\sum_T P_T(q) = q_{hi}$$

y

$$\sigma_i = \sum_{h=1}^r q_{hi} = s_i$$



lo que muestra que, efectivamente,  $\eta \in W(S)$ , con

$$s_i = \sum_{h=1}^r q_{hi}$$

como se había planteado. Por lo tanto  $\tilde{F}(q) \subset W(S)$ .

Se ha visto, en particular, que

$$(51) \quad \tilde{F}(t, t, t, \dots, t) \subset W(rt, rt, \dots, rt)$$

Si  $t=0$  ó  $1$ , es fácil ver que  $\tilde{F}$  y  $W$  coinciden. Para otros valores de  $t$ , la inclusión es generalmente propia ( $W$  contiene puntos que no son de  $\tilde{F}$ ).

Quisiéramos demostrar que, si  $r$  aumenta sin cota, los dos lados de (51) se vuelven casi iguales. Esto es algo complicado ya que, cuando  $r$  crece, los dos conjuntos aumentan sin cota. Es por lo tanto necesario normalizar.

Notamos ante todo que, para cualquier  $t > 0$ , las  $w^i$  satisfacen

$$w^i(t\xi; tp) = t p u^i \left( \frac{t\xi}{tp} \right) = t p u^i \left( \frac{\xi}{p} \right) = t w^i(\xi; p)$$

o sea que son homogéneas de grado 1. Vemos, pues, que el punto  $\eta \in W(t, t, \dots, t)$  si y solamente si  $r \eta \in W(rt, rt, \dots, rt)$ .

Por otra parte, definamos  $\tilde{F}'_r(q)$  como el conjunto de todos los  $\eta$  tales que  $r\eta \in \tilde{F}(q)$ . La inclusión (51) es entonces equivalente a

$$(52) \quad \tilde{F}'_r(t, t, \dots, t) \subset W(t, t, \dots, t)$$

Ahora bien, en (52) el lado derecho es independiente de  $r$ ; el izquierdo sí depende de  $r$ . Tenemos entonces lo siguiente:

**Teorema 2.**

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \tilde{F}'_r(t, t, \dots, t) = W(t, t, \dots, t)$$

**Prueba:** Sabemos que  $W$  contiene la unión de los  $\tilde{F}'_r$  ya que contiene a cada uno de ellos. Mostraremos que  $W$  es subconjunto del límite inferior de los  $\tilde{F}'_r$ .

Sea ahora  $\hat{\eta}$  un punto cualquiera de  $W(t, t, \dots, t)$ . Entonces  $\hat{\eta}$  satisface

$$\hat{\eta}_i \leq W^i(\xi^i; t)$$

para alguna alocaión factible  $\hat{\xi} = \langle \xi^1, \dots, \xi^n \rangle$

Sea  $f$  un número, mayor que el valor absoluto de todos los  $\xi^i$ . Sea  $S$  una coalición con todos los  $s_k$  cerca de  $rt$ ; más exactamente, para todo  $k$ ,

$$(53) \quad \left| \frac{s_k}{r} - t \right| < \frac{\epsilon}{f}$$

$$(54) \quad \left| \frac{r}{s_k} - \frac{1}{t} \right| < \epsilon$$

Para todos los  $S$  que cumplen (53)-(54), escojamos  $X(S)$  como

$$x^{hi}(S) = \frac{r}{s_i} \xi^i \quad (h, i) \in S$$

$$x^{hi}(S) = 0 \quad (h, i) \notin S$$

Para los otros  $S$ , sea  $X(S) = \langle 0; 0; \dots; 0 \rangle$ . Es fácil ver que, si  $S$  cumple (53)-(54), tenemos

$$\sum_{(h, i) \in S} x^{hi}(S) = \sum_i s_i \frac{r}{s_i} \xi^i = r \sum_i \xi^i = 0$$

luego  $X(S)$  es factible. Para los otros  $S$ ,  $X(S)$  es obviamente factible.

Ahora, si  $S$  satisface (53)-(54),

$$\sum_h u^i(x^{hi}(S)) = s_i u^i \left( \frac{r \xi^i}{s_i} \right) = r w^i \left( \xi^i; \frac{s_i}{r} \right)$$

luego  $\eta \in \tilde{F}(t, t, \dots, t)$ , donde

$$\eta_i = \sum'_S P_S(q) r w^i \left( \xi^i; \frac{s_i}{r} \right)$$

En esta última expresión, el símbolo ' sobre la sumativa quiere decir que ésta sólo se debe tomar sobre los  $S$  con (53)-(54). Entonces vemos que

$$\frac{1}{r} \eta \in \tilde{F}'_r(t, t, \dots, t)$$

donde

$$(55) \quad \frac{1}{r} \eta_i = \sum'_S \left\{ \prod_k B(r, s_k; t) \right\} w^i \left( \xi^i; \frac{s_i}{r} \right)$$

Considérese ahora el lado derecho de (55). El producto que allí aparece es un producto de probabilidades binomiales, con parámetros  $r$  y  $t$ . Cuando  $r$  crece, la probabilidad de que cada  $s_k/r$  sea cerca de  $t$  se acerca a 1 -- esto quiere decir que (53)-(54) se cumple con probabilidad cerca de 1, y tendremos, para cualquier  $\delta > 0$ ,

$$(56) \quad \sum_S \left\{ \prod_k B(r, s_k; t) \right\} > 1 - \delta$$

si  $r$  es suficientemente grande.

De la misma manera,

$$w^i(\xi_i; \frac{s_i}{r}) - w^i(\xi_i; t) = \frac{s_i}{r} u^i \left( \frac{r\xi_i^i}{s_i} \right) - t u^i \left( \frac{\xi_i^i}{t} \right)$$

$$= \left( \frac{s_i}{r} - t \right) u^i \left( \frac{r\xi_i^i}{s_i} \right) + t \left[ u^i \left( \frac{r\xi_i^i}{s_i} \right) - u^i \left( \frac{\xi_i^i}{t} \right) \right]$$

Ahora bien, el primer término del lado derecho de esta última expresión se puede hacer arbitrariamente pequeño si  $S$  cumple (54), escogiendo  $\epsilon$  pequeño. De la misma manera, el segundo término será arbitrariamente pequeño si  $S$  cumple (53), debido a la continuidad de  $u^i$ . Podemos, pues, tener

$$|w^i(\xi_i; \frac{s_i}{r}) - w^i(\xi_i; t)| < \delta$$

para todo  $S$  que satisface (53)-(54). Concluimos que

$$\frac{1}{r} \eta_i > (1-\delta)(\hat{\eta}_i - \delta)$$

y, como  $\epsilon$  es arbitrariamente pequeño, vemos que existen puntos en  $\tilde{F}_r^i$ , arbitrariamente cerca de  $\hat{\eta}_i$ , si  $r$  es suficientemente grande. Por lo tanto

$$W(t, \dots, t) \subset \lim_{r \rightarrow \infty} \inf \tilde{F}_r^i(t, t, \dots, t)$$

y, como todos los  $\tilde{F}_r^i \subset W$ , tenemos

$$(57) \quad W(t, \dots, t) = \lim_{r \rightarrow \infty} \tilde{F}_r^i(t, t, \dots, t).$$

En (57), es interesante ver que, ni el conjunto de valores de importancia para cada  $x_j^i$  es acotado, entonces en (53) se puede usar la misma  $f$  para todos los puntos  $\eta$ , las funciones  $u^i$  serán uniformemente continuas, y por lo tanto la convergencia será uniforme sobre todo el conjunto  $W(t, \dots, t)$ . La convergencia no es uniforme con respecto a  $t$ , ya que valores cerca de 0 requieren valores muy grandes de  $r$  para (56); la convergencia será uniforme en  $t$  para cualquier intervalo cerrado que no contenga a 0. Por lo tanto: Teorema 3. Asumiendo que los valores relevantes de los  $x_j^i$  sean uniformemente acotados, entonces la convergencia de  $\tilde{F}_r^i(t, t, \dots, t)$  a  $W(t, t, \dots, t)$  es uniforme en  $\eta$  sobre todo  $W$ , y uniforme en  $t$  sobre cualquier intervalo  $[J, 1]$ , donde  $J > 0$ .

En realidad, la condición de cota uniforme en los  $x_j^i$  no es terriblemente restrictiva. En efecto, quiere decir que ninguno de los jugadores reciba

nunca más que un máximo  $f$ , de ningún bien. Esto es razonable ya que, en muchos casos, sólo hay una cantidad fija de cada bien entre todos los jugadores; cualquier transferencia adicional a uno de ellos causaría un déficit que probablemente implicaría utilidades negativas y grandes al jugador con tal déficit.

Encontramos, pues, que cada sucesión convergente de puntos en los conjuntos  $\tilde{F}_r^i(t, t, \dots, t)$  converge a un punto de  $W(t, t, \dots, t)$ ; si, además, los puntos de la sucesión son o.s.p. en los  $\tilde{F}_r^i$  correspondientes, su límite también será o.s.p. en  $W$ . Pues, supóngase que  $\eta^* = \lim \eta(r)$  no es o.s.p. en  $W$ . Entonces existe  $\eta \in W$  con  $\eta_k \geq \eta_k^*$  para todo  $k$ ,  $\eta_i > \eta_i^*$  para una  $i$  por lo menos. Una pequeña cantidad del bien  $j$  (arbitrario) se puede entonces transferir de los jugadores de tipo  $i$  a los demás jugadores (es decir, podemos disminuir  $\xi_j^i$  una cantidad pequeña y aumentar los  $\xi_j^k$ ,  $k \neq i$ , cantidades muy pequeñas), obteniendo así un punto nuevo,  $\eta_i$  con

$$\eta_k > \eta_k^*$$

para todo  $k$ . Entonces, para  $r$  suficientemente grande, podemos encontrar  $\eta'(r)$  en  $\tilde{F}_r^i$ , arbitrariamente cerca a  $\eta'$ . Encontramos entonces que  $\eta_k(r) > \eta_k(r)$  para todo  $k$ , y vemos que  $\eta(r)$  no es o.s.p. en  $\tilde{F}_r^i$ .

Como los conjuntos  $W$  y  $\tilde{F}_r^i$  son todos convexos, convergencia de los conjuntos implicará convergencia de los hiperplanos tangentes. Es decir que, si los puntos o.s.p. convergen,

$$\eta(r) \rightarrow \eta^*$$

de la misma manera los vectores  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  convergen:

$$\lambda(r) \rightarrow \lambda^*$$

donde  $\lambda(r)$  y  $\lambda^*$  son los vectores lagrangianos, definidos para  $\eta(r)$  y  $\eta^*$  respectivamente, y normalizados por

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1. \text{ Además, debido a una propiedad bien conocida de los conjuntos convexos, esta convergencia será uniforme para cualquier subconjunto compacto de } W; \text{ en particular será uniforme sobre la parte no negativa de } W, \text{ que es la única que nos interesa.}$$

Cuando  $r$  aumenta, encontramos que (46) toma la forma aproximada

$$(58) \quad \eta_i(t) \cong w^i(\xi^i(t); rt)$$

ó

$$(59) \quad y_i(t) \cong t u^i(x^i(t))$$

donde  $x^i(t) = \xi^i(t)/rt$ , y donde el error en (59) se acerca a 0 cuando  $r$  crece sin ser acotado. Aquí,

$X(t)$  es una asignación factible y eficiente, y por tanto nos dará vectores de precio  $p(t)$  y lagrangiano  $\lambda(t)$  que satisfacen (3).

Consideremos, ahora, la ecuación (45)

$$\dot{\eta}_i = \lambda_i \sum_s \left\{ \prod_k B(r, s_k; t) \right\} \frac{s_i}{t} \sum_k w^k(\xi^k(s); s_k) - w^k(\xi^k(s'); s'_k)$$

$$\frac{w^k(\xi^k(s); s_k) - w^k(\xi^k(s'); s'_k)}{\lambda_k}$$

Aquí estamos más que todo interesados en los términos  $w^k(\xi^k(s); s_k) - w^k(\xi^k(s'); s'_k)$ ; asumiremos que

$$\xi^k(s') = \xi^k(s) + \delta \xi^k$$

donde los  $\delta \xi^k$  son cantidades pequeñas. (Esto pasa porque los vectores  $s$  y  $s'$  casi son iguales). Entonces, para  $k \neq i$ ,  $s_k = s'_k$ , luego

$$w^k(\xi^k(s'); s'_k) = s_k u^k \left( \frac{\xi^k(s')}{s_k} \right)$$

$$= s_k u^k \left( \frac{\xi^k(s)}{s_k} \right) + s_k \sum_j \frac{1}{s_k} u_j^k \delta \xi_j^k$$

$$= w^k(\xi^k(s); s_k) + \lambda_k \sum_j P_j \delta \xi_j^k$$

Así, para  $k \neq i$ , tenemos

$$\frac{w^k(\xi^k(s); s_k) - w^k(\xi^k(s'); s'_k)}{\lambda_k} = - \sum_{j=1}^m P_j \delta \xi_j^k$$

En cambio,  $s'_i = s_i - 1$ , luego

$$w^i(\xi^i(s); s'_i) = (s_i - 1) u^i \left( \frac{\xi^i(s)}{s_i - 1} \right)$$

Tenemos, pues,

$$\frac{\xi^i(s)}{s_i - 1} = \frac{\xi^i(s)}{s_i} + \frac{\xi^i(s)}{s_i(s_i - 1)}$$

y entonces,

$$u^i \left( \frac{\xi^i(s)}{s_i - 1} \right) \cong u^i \left( \frac{\xi^i(s)}{s_i} \right) + \frac{\lambda_i}{s_i(s_i - 1)} \sum_j P_j \xi_j^i$$

o si ponemos  $x_j^i = \xi_j^i / s_i$ ,

$$u^i \left( \frac{\xi^i(s)}{s_i - 1} \right) \cong u^i \left( \frac{\xi^i(s)}{s_i} \right) + \frac{\lambda_i}{s_i - 1} \sum_j P_j x_j^i$$

y

$$w^i(\xi^i(s); s'_i) \cong \frac{s_i - 1}{s_i} w^i(\xi^i(s); s) + \lambda_i \sum_j P_j x_j^i$$

Por lo tanto,

$$\frac{w^i(\xi^i(s); s'_i) - w^i(\xi^i(s'); s'_i)}{\lambda_i} = \frac{1}{\lambda_i s_i} w^i(\xi^i(s); s'_i) - \sum_{j=1}^m P_j x_j^i - \sum_{j=1}^m P_j \delta \xi_j^i$$

luego, en (45), la sumatoria será igual a

$$\frac{1}{\lambda_i s_i} w^i(\xi^i(s); s'_i) - \sum_{j=1}^m P_j x_j^i - \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m P_j \delta \xi_j^k$$

Esta última sumatoria es 0 porque los  $\delta \xi^k$  deben sumar a cero, y vemos que (45) tiene la aproximación

(60)

$$\dot{\eta}_i = \sum_s \left\{ \prod_k B(r, s_k; t) \right\} \frac{1}{t} \left[ w^i - \lambda_i s_i \sum_j P_j x_j^i \right]$$

Ahora, bien, la distribución probabilística está casi completamente concentrada cerca de  $s_i = rt$ , lo que nos da

$$(61) \quad \dot{\eta}_i \cong \frac{1}{t} \eta_i - \lambda_i r \sum_j P_j x_j^i$$

o equivalentemente,

$$(62) \quad \dot{y}_i \cong -y_i - \lambda_i \sum_j P_j x_j^i$$

Esto, junto con

$$y_i(t) \cong t u^i(x^i)$$

nos da el sistema asintótico, es decir, si  $t$  crece sin cota, la solución del sistema verdadero (19) aproxima la del sistema asintótico (62).

Si, en lugar de  $y_i$ , tratamos con  $u^i = y_i/t$ , tendremos

$$(63) \quad \dot{u}^i = - \frac{1}{t} \lambda_i \sum_j P_j x_j^i$$

como el sistema deseado. Repetimos que esta aproximación no es válida para la vecindad de  $t = 0$ . Cerca de  $t = 0$ , la aproximación

$$u^i(t) = ty_i^* + O(t^2)$$

donde los  $y_i^*$  satisfacen (24), será válida, y nos da un punto de salida.

Con el sistema (63), notamos que los puntos de equilibrio,  $\dot{u}_i = 0$ , satisfacen

$$(64) \quad \sum P_j x_j^i = 0$$

o sea que son los equilibrios competitivos del mercado. Empero, no se puede esperar que el sistema (63) sea en general estable; aún si desestimamos los pequeños errores debidos a la aproximación, no hay garantía alguna de que el sistema converja al equilibrio. Por consiguiente, nuestro modelo para el valor no converge en general. En esto se diferencia del modelo Shapley-Shubik para juegos sin pagos laterales, en el cual el valor converge al equilibrio competitivo cuando  $r$  crece. Esta diferencia radica, sobre todo, en que nuestro modelo es dinámico y trata (en cierto sentido) de imitar el comportamiento temporal de cierto mercado idealizado; el modelo Shapley-Shubik, en cambio, es estático. En la vida real, los mercados no siempre convergen al equilibrio.

### 8. Equilibrios Económicos Generales

Como se ha visto, el modelo de valor para nuestro juego de mercado replicado nos da, asintóticamente, un sistema de ecuaciones diferenciales cuyos puntos de equilibrio son, precisamente, los equilibrios competitivos del mercado. En esta sección presentaremos un modelo de comportamiento de mercado que nos dará —esperamos— cierta justificación para nuestro sistema asintótico. Nuestra consideración aquí no es tanto el problema juego-teórico, cuanto el problema de equilibrio económico general para el mercado descrito en la 1a. sección de este artículo.

En general, la mayoría de análisis de esta situación asumen la existencia de un "corredor" que promulga precios para los varios bienes del mercado. Conociendo estos precios, los varios jugadores (negociantes) ofrecen entonces la venta o compra de ciertas cantidades de los bienes a estos precios (estas son las cantidades  $x_j^i$ ). Si estas ofertas son compatibles (es decir, si se cumplen las condiciones (2)), el corredor las acepta y las transacciones se llevan a cabo. Como las ofertas se asumen, de antemano, satisfacer (3) y (4) (es decir, todos los negociantes tratan de maximizar su utilidad sujeto a la restricción de presupuesto), este proceso nos da un equilibrio competitivo.

Supongamos, empero, que las ofertas no cumplen (2). En este caso, el corredor rechaza todas las ofertas y reajusta los precios, subiendo los precios

de aquellos bienes que muestran exceso de demanda, y bajándolos para aquellos que muestran exceso de oferta. Con estos nuevos precios, los negociantes hacen nuevas ofertas, y el proceso continúa hasta (tal vez) obtener convergencia. Condiciones para convergencia al equilibrio se han estudiado en [1] y [2].

Aunque no deseamos iniciar una polémica en cuanto a los méritos de este modelo, consideramos que no es perfecto, luego puede haber provecho en estudiar otros modelos. Consideremos, pues, el siguiente proceso:

Asumamos que los varios jugadores se reúnen a negociar. Puede haber precios promulgados para los varios bienes, pero aún si no los hay, los jugadores pueden generalmente aumentar su utilidad al negociar, luego ciertas negociaciones se llevarán a cabo, lo que nos dará —implícitamente por lo menos— precios comparativos para los bienes. Después de cierto tiempo, las negociaciones pararán, por cuanto se habrá llegado a una alocaión eficiente. Esta alocaión determina un "precio-sombra" para cada bien, por la condición (3). En general encontraremos, sin embargo, que las condiciones de equilibrio (4) no están satisfechas; esto se debe a que algunos de los negocios se llevaron a cabo antes de determinar los precios finales, y por consiguiente algunos de los jugadores encuentran que hicieron negocio "malos", es decir que compraron más caro, o vendieron más barato, que a los precios finales. Otros, en cambio, han hecho "buenos" negocios, y el valor final (a los precios del mercado) de su paquete final de bienes es superior al de su dote original. Así pues, cuando las negociaciones terminan, las condiciones (2)-(3) se cumplieran, pero no necesariamente las (4).

Para convertir esto en un sistema dinámico, asumiremos, primero, que los bienes son perecederos, y segundo, que los varios negociantes son también productores, y producen los bienes de manera a reemplazarlos a medida que se agotan. Más exactamente, asumimos que, en un período de tiempo, una pequeña fracción,  $\alpha$ , de los bienes existentes desaparece. Simultáneamente, cada negociante produce la misma fracción,  $\alpha$ , de su dote inicial. La cantidad total de cada bien permanece, pues, constante, pero, debido a los negocios, la distribución general de estos bienes varía con el tiempo.

Supongamos que la dote inicial de  $i$  era  $z^i = (z_1^i, \dots, z_m^i)$ . Al principio de un período de tiempo, sus tenencias son  $z^i + x^i$ . Ahora bien, durante el período el consumo de estos bienes será  $\alpha z^i + \alpha x^i$ ; al mismo tiempo,  $i$  produce la cantidad  $\alpha z^i$ , luego sus tenencias cambian por la cantidad  $-\alpha x^i$ . Él puede ahora, naturalmente, negociar con los otros jugadores, pero esto se debe hacer a los precios presentes del mercado, y el efecto neto de todo esto es que, a los precios presentes, el valor de sus bienes

cambiará por la cantidad total  $-\alpha \sum P_j x_j^i$ . Es verdad que las negociaciones harán cambiar los pre-

cios del mercado, pero si el período de tiempo es corto, y  $\alpha$  es pequeño, este cambio debe ser relativamente pequeño. Tendremos, pues, la aproximación,

$$\sum_{j=1}^m p_j \Delta x_j^i \approx -\alpha \sum_{j=1}^m p_j x_j^i$$

donde  $\Delta x_j^i$  es el cambio neto en la cantidad del bien  $j$  que el jugador  $i$  posee. Esta aproximación será exacta en el límite —dejando que el período de tiempo se aproxime a 0— dándonos un sistema diferencial

$$(65) \quad \sum_{j=1}^m p_j \dot{x}_j^i = -\alpha \sum_{j=1}^m p_j x_j^i \quad i=1, \dots, n.$$

Ahora, debemos tener

$$\dot{u}^i = \sum_{j=1}^m u_j^i \dot{x}_j^i$$

pero  $u_j^i = \lambda_i p_j$ , luego

$$\dot{u}^i = \lambda_i \sum_{j=1}^m p_j \dot{x}_j^i$$

ó

$$(66) \quad \dot{u}^i = -\alpha \lambda_i \sum_{j=1}^m p_j x_j^i$$

Se puede ver que, aparte el factor  $\alpha$  que aparece aquí, y el factor  $1/t$  en (63), los dos sistemas son idénticos. El cambio de variable  $T = \alpha t$  hará que (66) sea idéntico a (63). Así pues, este modelo de mercado "razonable" parece apoyar nuestro modelo de valor.

## BIBLIOGRAFIA

1. Arrow, K.J., and L. Hurwicz. "On the Stability of Competitive Equilibrium I", *Econometrica*, 26 (1958), 522-552.
2. Arrow, K.J., H.D. Block, and L. Hurwicz. "On the Stability of Competitive Equilibrium II", *Econometrica*, 27 (1959), 82-109.
3. Arrow, K.J., and F. Hahn. *General Competitive Analysis* San Francisco (Holden-Day) 1971.
4. Aubin, J.P. "Coeur et Valeur des Jeux Floux a Paiements Latéraux", *C.R. Acad. Sc. Paris* 279 (1974), 891-894.
5. Aubin, J.P. "Coeur et Equilibres des Jeux Floux sans Paiements Latéraux", *C.R. Acad. Sc. Paris* 279 (1974), 963-966.
6. Blackett, D.W. *Elementary Topology* New York (Academic Press) 1967.
7. Debreu, G. "New Concepts and Techniques for Equilibrium Analysis", *Int. Econ. Review* 3 (1962), 257-273.
8. Debreu, G. "Economies with a Finite Set of Equilibria", *Econometrica* 38 (1970), 387-392.
9. Dierker, E., and H. Dierker. "The Local Uniqueness of Equilibria", *Econometrica* 40 (1972), 867-881.
10. Owen, G. "The Tensor Composition of Non-Negative Games", *Annals of Mathematics Studies* No. 52, Princeton (Princeton Univ. Press), 1964, 307-326.
11. Owen, G. "Multilinear Extensions of Games", *Management Science* 18 (1972), P64-P79.
12. Owen, G. "Values of Games Without Side Payments", *Int. J. Game Th.* 1 (1972), 95-109.
13. Rockefeller, R.T. *Convex Analysis* Princeton (Princeton Univ. Press), 1970.
14. Shapley, L.S., and M. Shubik. "Pure Competition, Coalitional Power, and Fair Division", *Int. Econ. Review* 10 (1969), 337-362.
15. Shapley, L.S., and M. Shubik "On Market Games", *J. Econ. Theory* 1 (1969), 9-25.

# UNA FORMULA DE SUMACION APROXIMADA

Gabriel Poveda Ramos

1. El propósito de esta nota es establecer una fórmula aproximada para estimar con alguna aproximación el valor numérico de una suma finita de la forma

$$(01) \quad \sum_{n=1}^{n=N} Y_n$$

siendo  $Y_n = f(n)$  una sucesión real conocida y definida en todos los puntos  $x = 1, 2, 3, \dots, N$ . Un caso muy frecuente de este problema es el de calcular sumas del tipo mencionado cuando  $f(n)$  es una función trascendente. Si  $f(n)$  es una función algebraica el problema es muy fácil de resolver, porque basta aplicar la sumación a cada uno de los sumandos del polinomio que da a  $f(n)$ , y calcular todas las sumaciones de la forma

$$(02) \quad \sum_{n=1}^N n^p$$

(siendo  $p$  un exponente entero positivo, conocido) que así resultan. En tal caso existen fórmulas breves de sumación para calcular la suma (02) recurriendo a polinomios de Bernoulli, bastante conocidas (1).

Es evidente que desde el punto de vista del Análisis Numérico sólo se justifica la búsqueda de una fórmula de sumación (siquiera aproximada) cuando el número de sumandos en (01), es decir el número  $N$ , es del orden de las decenas o de los centenares, y cuando no se dispone de recursos de computación digital (sea del "hardware" o del "software"). Cuando el número de sumando  $N$  en (01) es del orden de 10, 20, 30 ó menor, o cuando se dispone de un computador programado, el problema es un ejercicio trivial de cómputo numérico: basta calcular numéricamente los  $N$  números reales  $f(1), f(2), \dots, f(N)$  y luego hacer la suma (Ver Fig. 1).

2. Ejemplos imaginables del problema que se plantea serían los de calcular los valores numéricos de las siguientes expresiones:

a.  $\sum_{n=1}^{150} \frac{1}{n} (= 2.718281846... = \text{base de logaritmos neperianos})$

b.  $\sum_{n=1}^{400} \text{sen}(n \cdot 30^\circ)$

c.  $\sum_{n=1}^{230} n^{-3.2842}$

d.  $\sum_{n=1}^{80} J_0(2.45n)$ , siendo  $J_0(x)$  la función de Bessel del primer tipo y de orden cero (2)

e.  $\zeta(k) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-k} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N n^{-k}$ ,

que es la llamada función "Zeta" de Riemann (3).

3. El método que se usará se inspira en la idea de buscar un ajuste o aproximación que tenga la forma de parábola de segundo grado (o sea un polinomio de segundo grado) para cada terna de términos consecutivos de la sucesión  $\{Y_n\}$  a que se refiere la suma (01). Es decir, que nos planteamos el problema de calcular la parábola de colocación (como se dice en Análisis Numérico); de segundo grado, para cada terna  $(n-1), n, (n+1)$ , de números consecutivos, en donde  $n$  recorre los números naturales desde  $n=1$  hasta  $n=N-1$ . (Véase Fig. 2).

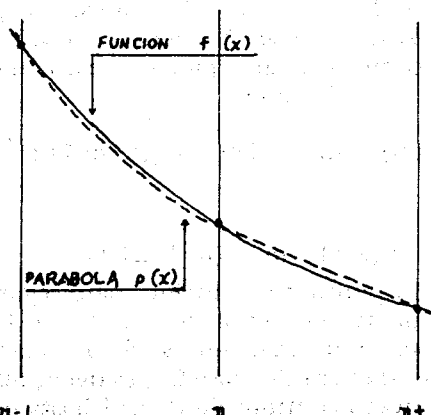


FIG. 2

Sea pues  $p(x, n)$  el polinomio de segundo grado que corresponde a la parábola de colocación que se busca. En cualquier libro de Análisis Numérico (4), (5), se puede comprobar que dicha parábola se caracteriza unívocamente por la condición

$$(03) \begin{vmatrix} p(x,n) & 1 & x & x^2 \\ Y_{n-1} & 1 & n-1 & (n-1)^2 \\ Y_n & 1 & n & n^2 \\ Y_{n+1} & 1 & n+1 & (n+1)^2 \end{vmatrix} = 0$$

Expandiendo el determinante de cuarto orden mediante la regla de Laplace se tiene:

$$P_n(x) \begin{vmatrix} 1 & n-1 & (n-1)^2 \\ 1 & n & n^2 \\ 1 & n+1 & (n+1)^2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} Y_{n-1} & n-1 & (n-1)^2 \\ Y_n & n & n^2 \\ Y_{n+1} & n+1 & (n+1)^2 \end{vmatrix} - x$$

$$\begin{vmatrix} Y_{n-1} & 1 & (n-1)^2 \\ Y_n & 1 & n^2 \\ Y_{n+1} & 1 & (n+1)^2 \end{vmatrix} + x^2 \begin{vmatrix} Y_{n-1} & 1 & (n-1) \\ Y_n & 1 & n \\ Y_{n+1} & 1 & (n+1) \end{vmatrix}$$

Finalmente, expandiendo estos determinantes de tercer orden y recogiendo los términos semejantes se encuentra para el polinomio de colocación  $p(x, n)$ :

$$(04) \quad 2. p(x, n) = Y_{n-1} [n(n+1) - (2n+1)x + x^2] - Y_n [2(n^2 - 1) - 4nx + 2x^2] + Y_{n+1} [n(n-1) - (2n-1)x + x^2]$$

fácilmente se comprueba que la fórmula encontrada (04) es la correcta ya que, sustituyendo sucesivamente  $x$  por  $(n-1)$ ,  $n$  y  $(n+1)$  se obtiene en ella

$$\begin{aligned} p(n-1, n) &= Y_{n-1} \\ p(n, n) &= Y_n \\ p(n+1, n) &= Y_{n+1} \end{aligned}$$

como debe cumplirse para el polinomio de colocación según lo prescribimos más arriba.

4. Una vez determinado el polinomio de colocación en los tres puntos dados, con abscisas  $n-1$ ,  $n$ ,  $n+1$ , podemos escribir para todo el intervalo cerrado desde  $n-1$  hasta  $n+1$ :

$$(05) \quad n-1 < x < n+1 \Rightarrow f(x) = p(x, n) + \epsilon(x, n)$$

en donde  $p(x, n)$  está ya dado por la fórmula (04) y  $\epsilon(x, n)$  es el llamado error de colocación. En cualquier texto de Análisis Numérico (4) se puede recordar o comprobar que, para este caso, el error de colocación es la función

$$(06) \quad \epsilon(x, n) = (x-n+1)(x-n)(x-n-1) f'''(\bar{x})/3!$$

en donde

$$\bar{x} = \bar{x}(x, n) \in I_n = (n-1, n+1)$$

es un cierto punto no conocido, pero seguramente existente dentro del intervalo abierto  $(n-1, n+1)$ , y que depende del valor que se dé a  $x$  para cada  $n$  (desde que  $f(x)$  sea de clase  $C^3$ , es decir, que tenga tercera derivada continua desde  $n-1$  hasta  $n+1$ ).

5. También en cualquier texto de Análisis Numérico se puede comprobar que, por ser  $p(x, n)$  el polinomio de segundo grado que pasa por los tres puntos

$$(n-1, Y_{n-1}), (n, Y_n), (n+1, Y_{n+1})$$

previamente especificados, con abscisas separadas a 1 unidad una de otra, su integral definido en el intervalo de la abscisa más a la izquierda y la abscisa más a la derecha, está dado por la siguiente fórmula

$$(07) \quad \int_{n-1}^{n+1} p(x, n) dx = \frac{1}{3} Y_{n-1} + \frac{4}{3} Y_n + \frac{1}{3} Y_{n+1} \quad (3)$$

que es seguramente muy familiar a muchos lectores.

6. Integrando la ecuación (05) en su intervalo de validez  $(n-1, n+1)$ , se tiene

$$\int_{n-1}^{n+1} f(x) dx = \int_{n-1}^{n+1} p(x, n) dx + \int_{n-1}^{n+1} \epsilon(x, n) dx$$

o también

$$(08) \quad \int_{n-1}^n f(x) dx + \int_n^{n+1} f(x) dx = \frac{1}{3} Y_{n+1} + \int_{n-1}^{n+1} \epsilon(x, n) dx$$

Escribamos la ecuación (08) para  $n = 2, 3, 4, \dots, N-3, N-2, N-1$ :

$$\left| \int_1^2 + \int_2^3 \right| f(x) dx = \frac{1}{3} Y_1 + \frac{4}{3} Y_2 + \frac{1}{3} Y_3 + \int_1^3 \epsilon(x, 2) dx$$

$$\left| \int_2^3 + \int_3^4 \right| f(x) dx = \frac{1}{3} Y_2 + \frac{4}{3} Y_3 + \frac{1}{3} Y_4 + \int_2^4 \epsilon(x, 2) dx$$

$$\left| \int_3^4 + \int_4^5 \right| f(x) dx = \frac{1}{3} Y_3 + \frac{4}{3} Y_4 + \frac{1}{3} Y_5 + \int_3^5 \epsilon(x, 3) dx$$

(3) De esta fórmula se deduce justamente, la conocida fórmula de Simpson.

$$\left| \int_{N-4}^{N-3} + \int_{N-3}^{N-2} \right| f(x) dx = \frac{1}{3} Y_{N-4} + \frac{4}{3} Y_{N-3} + \frac{1}{3} Y_{N-2} + \int_{N-4}^{N-2} \epsilon(x, N-3) dx$$

$$\left| \int_{N-3}^{N-2} + \int_{N-2}^{N-1} \right| f(x) dx = \frac{1}{3} Y_{N-3} + \frac{4}{3} Y_{N-2} + \frac{1}{3} Y_{N-1} + \int_{N-3}^{N-1} \epsilon(x, N-2) dx$$

$$\left| \int_{N-2}^{N-1} + \int_{N-1}^N \right| f(x) dx = \frac{1}{3} Y_{N-2} + \frac{4}{3} Y_{N-1} + \frac{1}{3} Y_N + \int_{N-2}^N \epsilon(x, N-1) dx$$

Sumando las ecuaciones anteriores obtenemos

$$\left| \int_1^2 + 2 \int_2^3 + 2 \int_{N-2}^{N-1} + \int_{N-1}^N \right| f(x) dx = \frac{1}{3} Y_1 + \frac{5}{3} Y_2 + 2 \sum_3^{N-2} Y_n + \frac{5}{3} Y_{N-2} + \frac{1}{3} Y_N + \sum_{N=2}^{N-1} \int_{n=1}^{n+1} \epsilon(x, n) dx$$

Sumando y restando dos integrales definidos (de 1 a 2 y de N-1 a N) y cuatro términos en la suma (2Y<sub>1</sub>, 2Y<sub>2</sub>, 2Y<sub>N-1</sub>, 2Y<sub>N</sub>), dividiendo por 2 y trasponiendo tenemos:

$$(09) \quad \sum_{n=1}^N Y_n = \int_1^N f(x) dx = \frac{1}{2} \int_1^2 f(x) dx - \frac{1}{2} \int_{N-1}^N f(x) dx + \frac{5}{6} (Y_1 + Y_N) + \frac{1}{6} (Y_2 + Y_{N-1}) + E$$

en donde E es el "error de sumación" y está dado por la expresión

$$E = -\frac{1}{2} \sum_{n=2}^{N-1} \int_{n-1}^{n+1} \epsilon(x, n) dx$$

y sustituyendo la función  $\epsilon(x, n)$  por su expresión en (06), esto es

$$E = -\frac{1}{2} \sum_{n=2}^{N-1} \int_{n-1}^{n+1} (x-n+1)(x-n)(x-n-1) f'''(\bar{x}) dx/3!$$

La expresión anterior no se puede calcular explícitamente debido a la indeterminación (y a la eventual multivocidad) de la relación entre  $\bar{x}$  y x. Pero es posible (y es también lo usual en Análisis Numérico) establecer una cota superior para su módulo así:

$$|E| = \frac{1}{12} \left| \sum_{n=2}^{N-1} \int_{n-1}^{n+1} (x-n+1)(x-n)(x-n-1) f'''(\bar{x}) dx \right| \leq \frac{1}{12} \left| \sum_{n=2}^{N-1} \int_{n-1}^{n+1} (x-n+1)(x-n)(x-n+1) |\bar{x}| dx \right|$$

Es un sencillo ejercicio de cálculo elemental el de mostrar que el polinomio de tercer grado en x

$$(x-n+1)(x-n)(x-n+1) = x^3 - 3nx^2 + (3n^2 - 1)x - n(n^2 - 1)$$

tiene su máximo en  $n-1/\sqrt{3}$  y su mínimo en  $n+1/\sqrt{3}$ , y que dicho máximo vale + 0.384900179 así como el mínimo vale -0.384900179. Es decir

$$|(x-n+1)(x-n)(x-n+1)| < 0.384900179$$

y en consecuencia

$$(10) \quad |E| < 0.032075014 \sum_{n=2}^{N-1} \int_{n-1}^{n+1} \max_{\bar{x} \in I_n} |f'''(\bar{x})| dx$$

$$|E| < 0.064150029 \sum_{n=2}^{N-1} \max_{u \in I_n} |f'''(u)|$$

La fórmula (09) es la fórmula de aproximación que buscábamos, y el error absoluto que se comete en ella al omitir el término E está acotado por la inecuación (10).

Podemos pues poner:

$$(11) \quad \sum_{n=1}^N f(n) = \int_1^N f(x) dx - \frac{1}{2} \left( \int_1^2 f(x) dx + \int_{N-1}^N f(x) dx \right) + \frac{5}{6} (f(1) + f(N)) + \frac{1}{6} (f(2) + f(N-1)) + E$$

En donde E está acotado por la inecuación (10), si  $f(x)$  es de clase  $C^3$ .



**7. Ejemplo 1.** Una serie bien conocida en Aritmética es la llamada serie armónica, que se forma con los inversos de los primeros  $N$  números naturales positivos:

$$1 + 1/2 + 1/3 + \dots + 1/N$$

y que se puede también escribir

$$\sum_{n=1}^N f(n), \text{ siendo } f(x) = 1/x$$

Para usar nuestra fórmula de sumación (11), calculamos las siguientes expresiones, en este caso:

$$f(1) = 1, f(2) = 1/2, f(N-1) = 1/(N-1), f(N) = 1/N$$

$$f(1) + f(N) = (N+1)/N, f(2) + f(N-1) = (N+1)/2(N-1)$$

$$\int_1^2 f(x) \cdot dx = \int_1^2 \frac{dx}{x} = \log_e 2, \int_{N-1}^N f(x) \cdot dx = \int_{N-1}^N \frac{dx}{x} = \log_e \frac{N}{N-1} \int_1^N f(x) \cdot dx = \log_e N$$

$$f^{III}(u) = 16/x^4 \rightarrow \max_{u \in I_n} |f^{III}(u)| = 6/(n-1)^4$$

Aplicando la fórmula (11) tenemos:

$$(12) \sum_{n=1}^N (1/n) = \log N - \frac{1}{2} \log \frac{2N}{N-1} + 5(N+1)/6N + E$$

siendo

$$|E| < 0.064150029 \sum_{n=2}^{N-1} \max_{u \in I_n} |f^{III}(u)| = 0.064150029 \times 6 \sum_{n=2}^{N-1} (n-1)^4 = 0.384900174 (1 + 1/2^4 + 1/3^4 + 1/4^4 + \dots + 1/(N-2)^4) = 0.384900174 (1 + 0.0625 + 0.0123456 + 0.00390625 + 0.001600 + 0.0007716099 + 0.0004164933 + 0.0002441406 + 0.00015241579 + 0.0001 + \dots = 1.08215) = 0.4164758$$

Como se ve la cota superior del error es una suma de los inversos de las cuartas potencias de los  $N-2$  primeros números naturales. Cuando  $N \rightarrow \infty$ , esta su-

ma se convierte en una serie infinita de la cual se sabe bien que es convergente. Además:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \log |2N/(N-1)| = \log 2$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} |5(N+1)/6N| = 5/6$$

y por lo tanto

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N (1/n) = \lim_{N \rightarrow \infty} \log N + \log 2 + (5/6) + E$$

y  $E < +\infty$ , de modo que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N (1/n) = +\infty$$

lo cual significa que la serie armónica infinita es divergente, lo cual, por lo demás, es un hecho muy conocido por otros caminos.

**8. Ejemplo 2.** Ya que la fórmula ha sido obtenida ajustando arcos de parábolas a ternas de puntos consecutivos, con ordenadas  $f(n-1)$ ,  $f(n)$ ,  $f(n+1)$ , es claro que la fórmula será rigurosamente exacta si la función de que se trata es  $f(x) = x^2$ , y también si es  $f(x) = x$ . Comprobémoslo para  $f(x) = x^2$ , función elemental y bien conocida:

$$f(1) = 1, f(2) = 4, f(N-1) = N^2 - 2N + 1, f(N) = N^2$$

$$f(1) + f(N) = 1 + N^2, f(2) + f(N-1) = N^2 = 2N + 5$$

$$\int_1^N f(x) dx = \int_1^N x^2 dx = \frac{1}{3}(N^3 - 1), \int_1^2 f(x) dx = 7/3$$

$$\int_{N-1}^N f(x) \cdot dx = \frac{1}{3}(3N^2 - 3N + 1), f^{III}(u) = 0$$

Sustituyendo en la fórmula (11) obtenemos

$$\sum_{n=1}^N n^2 = \frac{1}{3}(N^3 - 1) - \frac{1}{2} \left| \frac{7}{3} + \frac{3N^2 - 3N + 1}{3} \right| + \frac{5}{6}(N^2 + 1) + \frac{1}{6}(N^2 - 2N + 5) + E = N(N+1)(2N+1)/6 + E$$

y el error  $E$  es:

$$|E| < 0.064150029 \sum_{n=2}^{N-1} \max_{u \in I_n} |f^{III}(u)| = 0 \rightarrow E = 0$$

es decir que el error es cero y tenemos

$$(13) \quad \sum_{n=1}^N n^2 = N(N+1)(2N+1)/6$$

Esta fórmula es bastante conocida y se puede obtener por otros varios métodos.

9. Ejemplo 3. La idea de buscar la fórmula aproximada de que hablamos surgió cuando el autor de esta nota se vio precisado a calcular un valor numérico siquiera aproximado para la suma

$$(14) \quad 1 + \frac{1}{2^{0.9}} + \frac{1}{3^{0.9}} + \dots + \frac{1}{99^{0.9}} + \frac{1}{100^{0.9}}$$

Esta serie la encontró el autor cuando hacía un estudio estadístico sobre la distribución de los tamaños de las ciudades en Colombia, medido por su población humana, al aplicarles una ley empírica conocida en demografía como Ley de Auerbach. (6)

Evidentemente, se trata aquí de calcular la sumatoria

$$\sum_{n=1}^N f(n) \text{ en donde } f(x) = x^{-a} \text{ (con } a = 0.9, N = 100)$$

Fácilmente calculamos:

$$f(1) = 1, f(2) = 1/2^{0.9} = 0.535886726$$

$$f(N-1) = f(99) = 1/99^{0.9} = 0.01599294$$

$$f(N) = f(100) = 1/100^{0.9} = 0.015848932$$

$$f(1) + f(N) = f(1) + f(100) = 1.015848932$$

$$f(2) + f(N-1) = f(2) + f(99) = 0.551879667$$

$$\int_1^N f(x) dx = \int_1^N x^{-a} dx = \frac{1}{1-a} x^{1-a} \Big|_1^N = \frac{N^{1-a} - 1}{1-a} = \frac{100^{0.1} - 1}{0.1} = 5.848932$$

$$\int_1^2 f(x) dx = \int_1^2 x^{-a} dx = \frac{1}{1-a} x^{1-a} \Big|_1^2 = \frac{2^{1-a} - 1}{1-a} = \frac{2^{0.1} - 1}{0.1} = 0.717735$$

$$\int_{N-1}^N f(x) dx = \int_{N-1}^N x^{-a} dx = \frac{1}{1-a} x^{1-a} \Big|_{N-1}^N = \frac{N^{1-a} - (N-1)^{1-a}}{1-a} = \frac{100^{0.1} - 99^{0.1}}{0.1} = 0.0015921$$

$$f'''(u) = -a(a+1)(a+2) x^{-(a+2)}$$

$$\max_{x \in I_n} f'''(u) = a(a+1)(a+2)(n-1)^{-(a+3)} = 0.9 \times$$

$$1.9 \times 2.9 (n-1)^{-3.9} = 4.959 (n-1)^{-3.9}$$

Sustituyendo en la fórmula (11) obtenemos:

$$(15) \quad \sum_{n=1}^N n^{-a} = \frac{N^{1-a} - 1}{1-a} - \frac{1}{2(1-a)} (2^{1-a} - 1 + N^{1-a} - (N-1)^{1-a}) + \frac{5}{6} (1+N^{-a}) + \frac{1}{6} (2^{-a} + (N-1)^{-a}) + E$$

de donde

$$(15A) \quad \sum_{n=1}^{100} n^{-0.9} = 5.848932 + (1/2)(0.717735 + 0.0015921) + (5/6) \times 1.015848932 + (1/6) \times 0.551879667 + E = 7.14711627 + E$$

En el caso particular de  $a = 0.9, N = 100$ , el error de sumación tiene una cota superior de:

$$|E| < 0.064150029 \sum_{n=2}^{99} \max_{u \in I_n} |f'''(u)| = 0.064150029 \times 4.959 \sum_{n=2}^{99} (n-1)^{-3.9} = 0.318119993 (1 + 0.66985842 + 0.013779298 + 0.004487102 + 0.0018793903 + 0.0009230179 + 0.0005059617 + 0.00030057237 + 0.00018986907 + 0.00012589254 + \dots \approx 1.0895) \approx 0.34655064$$

El valor relativo de este máximo error posible, sobre el total estimado como 7.14711627 es de 4.85%, que es relativamente satisfactorio para efectos prácticos.

10. Ejemplo 4. Nuestra fórmula (11) permite deducir una expresión para calcular factoriales de números naturales, aproximadamente, y también valores aproximados para la función gama de números reales positivos.

Como bien se sabe el factorial está definido para cada número natural:

$$N! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times N$$

o sea, tomando logaritmos naturales (o neperianos)

$$\log N! = \sum_{n=1}^N \log n$$

En este caso tenemos que calcular:

$$\sum_{n=1}^N f(n) \text{ siendo } (f(x) = \log x$$

Calculamos pues las siguientes expresiones:

$$f(1) = 0, f(2) = \log 2, f(N-1) = \log (N-1),$$

$$f(N) = \log N$$

$$\int_1^N f(x) \cdot dx = \int_1^N \log x \cdot dx = x \cdot \log x - x \Big|_1^N = \log (N^N e^{1-N})$$

$$\int_1^2 f(x) \cdot dx = \log (2^2 e^{-1})$$

$$\int_{N-1}^N \log x \cdot dx = \log N^N (N-1)^{1-N} e^{-1}$$

Aplicamos la fórmula (11) que hemos deducido, como fórmula aproximada, es decir ignorando el término de error E, y usando el signo  $\doteq$  (aproximadamente igual) en lugar del signo = (igual):

$$\begin{aligned} \sum_1^N \log n &\doteq \log (N^N e^{1-N}) - \frac{1}{2} \log (2^2 e^{-1}) - \frac{1}{2} \log |N^N (N-1)^{1-N} e^{-1}| \\ &\doteq \frac{5}{6} \log N + \frac{1}{6} \log 2 + \frac{1}{6} \log (N-1) \\ &= \log |N^{N/2 + 5/6} (N-1)^{N/2 - 2/6} e^{2-N} 2^{5/6}| \end{aligned}$$

es decir, aproximadamente:

(16)

$$N! \doteq 4.146967491 N^{N/2 + 5/6} (N-1)^{N/2 - 2/6} e^{-N}$$

Para  $N=1$ , la fórmula anterior nos da  $1! = 0$ , lo cual es rigurosamente correcto. Para  $N=10$ , el factorial

vale  $10! = 3628800$ , y la fórmula nos da  $10! \doteq 3641252$ , cuyo error relativo es sólo del 0.34%. Para  $N=50$ , cuyo factorial es  $50! = 3.0414093 \times 10^{64}$ , la fórmula da, aproximadamente,  $50! = 3.051885699 \times 10^{64}$ , incurriendo en un error relativo solamente de 0.344% que en cálculos numéricos es un estimativo muy aceptable.

Cuando en la fórmula (16) sustituimos  $N$  por  $N+1$ , se obtiene después de algunas simplificaciones sencillas:

(17)

$$(N+1)! = N! (N+1) \frac{N+1}{N-1} \frac{(N+1)^{1/3} (N-1)^{1/3}}{N^{2/3}} e^{-1} = G(N)$$

Ahora bien, la función  $G(N)$  tiende asintóticamente a 1. En efecto:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{(N+1)^{1/3} (N-1)^{1/3}}{N^{2/3}} = 1$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N+1}{N-1} = \lim_{N \rightarrow 0} \frac{(N/2 - 1/2) + 1}{(N/2 - 1/2)} \frac{N/2}{2} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} (1+1/h)^h = e$$

de donde

$$\lim_{N \rightarrow \infty} G(N) = e \times e^{-1} = 1$$

Es decir que la fórmula (17) puede escribirse, asintóticamente:

$$(18) \quad (N+1)! = N! (N+1)$$

que es la relación de recurrencia a la cual obedece la sucesión de los factoriales de los números naturales, o la que permite calcular valores para la función gama  $\Gamma(u)$ . Vale la pena notar que  $G(10) = 1.000.003345$ , de modo que la fórmula (18) sólo tiene una diferencia relativa con la (17) de 3.34 partes por millón, ya desde un valor bajo de  $N$  como es  $N=10$ .

## BIBLIOGRAFIA

- (1) Mineur, Henri. Les Techniques du Calcul Numerique. Paris. 1952. Librairie Polytechnique Ch. Béranger. Cap. XI.
- (2) Kreyszig, Erwin. Advanced Engineering Analysis. New York. 1962. John Wiley and Sons. Sección 3.5.
- (3) Knopp, Konrad. Teoría de Funciones. Barcelona. 1956. Editorial Labor. Libro II, 2a. parte.
- (4) Scheid, Francis. Theory and Problems of Numerical Analysis. New York. 1968. Mac Graw Hill Book Co. Cap. 10.
- (5) Ralston, Anthony. A First Course in Numerical Analysis. New York. 1965. Chap. 2.
- (6) Poveda Gabriel. Análisis Estadístico de la Población de las Ciudades Colombianas, en Boletín de Matemáticas, Bogotá, Junio 1978.

# DOS ECUACIONES EN DIFERENCIAS FINITAS CON COEFICIENTES VARIABLES

*Gabriel Póveda Ramos*

## INTRODUCCION

1. Es un hecho curioso que el estudio de las ecuaciones en diferencias finitas que se encuentra en libros, textos, revistas, etc. hasta el día de hoy, termina en las ecuaciones lineales con coeficientes constantes. Solamente para la ecuación lineal de primer orden se encuentran soluciones utilizables cuando los coeficientes son variables<sup>1</sup>, y hay casos particulares de ecuaciones de primer orden, no lineales, que admiten algunos procedimientos particulares, ad-hoc, para resolverlas<sup>2</sup>. Los libros dedicados a estos temas, que los abarcan con mayor amplitud, son los de Milne-Thompson y Ch. Jordan (Ver bibliografía) y en ellos no se estudian a fondo las ecuaciones de orden mayor que 1, con coeficientes variables, ni siquiera aquellas que son lineales. En general, la teoría de las ecuaciones en diferencias finitas sigue siendo en parte *terra incognita*, a pesar de su interés teórico y de sus numerosas aplicaciones posibles.

2. El material que se presenta en este artículo ha sido todo elaborado por el autor, sin poder apoyarse en la literatura disponible en nuestro medio, por la casi total ausencia de bases teóricas en la bibliografía que se estudió. Después de estar escrito el artículo, el autor advirtió que una parte del trabajo hecho podía haberse abreviado usando uno o dos teoremas del capítulo 6 del libro de Levy y Lessman, al cual ya se hizo referencia<sup>2</sup>. Sin embargo, el autor cree aún que el trabajo merece presentarse por tres razones:

- a. Porque contiene deducciones y observaciones que no existen publicadas en la literatura accesible actualmente en Colombia.
- b. Porque puede tener alguna utilidad didáctica.
- c. Porque puede estimular en algún lector el interés por estos temas, que son relativamente elementales pero en los cuales hay todavía un buen campo abierto a la investigación.

Por eso se expondrá completamente el trabajo como fue desarrollado por el autor.

## LA ECUACION EN DIFERENCIAS FINITAS DE EULER-CAUCHY

3. Se trata aquí de deducir un método para resolver la ecuación en diferencias finitas

$$(3.1) \quad (n + m - 1)^{(m)} y(n + m) + a_1 (n + m - 2)^{(m-1)} y(n + m - 1) + \dots + a_{m-2} (n + 1)^{(2)} y(n + 2) + a_{m-1} n y(n + 1) + a_m y(n) = 0,$$

cuyos términos tienen el siguiente significado:

$y(n)$  es una sucesión incógnita, definida en el dominio de los números naturales positivos, o sea que la variable independiente es  $n = 1, 2, 3, 4, \dots$ ;  $m$  es un número entero positivo fijo y predeterminado, mayor o igual que 1. Se le denomina el orden de la ecuación;

$$n^{(m)} = n(n - 1) \dots (n - m + 1) = n! / (n - m)!;$$

$a_1, a_2, \dots, a_m$  son constantes reales o complejas, conocidas y predeterminadas.  $a_m$  no es cero. Si lo fuera, el orden de la ecuación sería realmente  $m - 1$  y no  $m$ , como es fácil apreciar.

Además, se pretende que la solución satisfaga las condiciones iniciales

$$(3.1.1) \quad y(1) = y_1, y(2) = y_2, \dots, y(m) = y_m$$

siendo  $y_1, y_2, \dots, y_m$ , números reales o complejos, conocidos y predeterminados. Este tipo de problema se llama un problema de ecuación en diferencias finitas con condiciones iniciales, y tiene varias analogías formales con el conocido problema de Cauchy sobre ecuaciones diferenciales con condiciones iniciales.

Por otra parte, la forma de la ecuación (3.1) presenta también cierta analogía con la forma de la ecuación diferencial

$$(3.2) \quad x^m (d^m y/dx^m) + a_1 x^{m-1} (d^{m-1} y/dx^{m-1}) + a_{m-2} x^2 (d^2 y/dx^2) + a_{m-1} x(dy/dx) + a_m \cdot y = 0$$

(1) Ver, por ejemplo Miller, Kenneth S., *An Introduction to the Calculus of Finite Differences and Difference Equations*, New York, Dover Publications Inc., 1966, 160.

(2) Ver, Levy, H. y F. Lessman, *Finite Difference Equations*, New York, The Macmillan Company, 1961, 278.

ecuación a la cual se le llama ecuación de Euler y Cauchy, y cuya discusión y solución son muy conocidas.

En razón de la analogía de la ecuación original (3.1) con la ecuación (3.2), conviene llamar a la primera con el nombre de ecuación en diferencias finitas de Euler y Cauchy, de orden  $m$ , homogénea.

En los tratados y textos corrientes sobre ecuaciones en diferencias finitas no se la presenta en absoluto, o al menos no se la presenta como caso aparte, digna de su propio estudio.

4. Para explicar mejor la forma de la ecuación, puede presentarse la ecuación (de Euler-Cauchy) de 4o. orden:

$$(n+3)(n+2)(n+1)n \cdot y(n+4) + a_1(n+2)(n+1)n \cdot y(n+3) + a_2(n+1)n \cdot y(n+2) + a_3 n \cdot y(n+1) + a_4 \cdot y(n) = 0$$

$$(a_4 \neq 0, n = 1, 2, 3, \dots)$$

El significado de los términos es el mismo que se explicó atrás. Usando el operador de desplazamiento  $E$ , definido como  $E^k y(n) \equiv y(n+k)$  para todo  $n$  y para todo  $k$  que sean números naturales, la ecuación de 4o. orden se escribe también

$$(n+3)^{(4)} E^4 y(n) + a_1 (n+2)^{(3)} \cdot E^3 y(n) + a_2 (n+1)^{(2)} \cdot E^2 y(n) + a_3 n \cdot E y(n) + a_4 \cdot y(n) = 0$$

5. Las potencias del operador  $nE$ .— Definimos el operador  $nE$  sobre la clase de las sucesiones  $y(n)$  definidas en los naturales positivos ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ), por la identidad.

$$(5.1) (nE) \cdot y(n) = n \cdot E y(n) = n \cdot y(n+1)$$

Por la aplicación reiteradas podemos definir las potencias sucesivas de  $n$ , así, la segunda potencia  $(nE)^2$  es tal que

$$(5.2) (nE)^2 y(n) = (nE) [n \cdot E y(n)] = n(n+1) \cdot E^2 y(n) = (n+1)^{(2)} E^2 y(n)$$

Puesto que, según la definición de  $E$ , se tiene

$$E[n \cdot E y(n)] = (En) \cdot E(Ey) = (n+1) \cdot E^2 y(n)$$

La tercera potencia es  $(nE)^3$ , tal que

$$(5.3) (nE)^3 y(n) = (nE) [(n+1)^{(2)} E^2 y(n)] = n(n+2)^{(2)} E^3 y(n) = (n+2)^{(3)} E^3 y(n)$$

Observando las identidades (5.1), (5.2) y (5.3), se puede escribir:

$$nE = n^{(2)} E \quad (nE)^2 = (n+1)^{(2)} E^2$$

$$(nE)^3 = (n+2)^{(3)} E^3$$

y en general

$$(5.4) (nE)^k = (n+K-1)^{(k)} E^k$$

lo cual puede demostrarse por el método de inducción completa. La ecuación (5.4) permite varias cosas, entre otras las siguientes:

a. Definir las potencias del operador  $(nE)$ :

$$(5.5) (nE)^k \cdot y(n) = (n+K-1)^{(k)} E^k y(n) = (n+K-1)^{(k)} y(n+K)$$

b. Interpretar expresiones de la forma  $(n+K-1)^{(k)} y(n+K)$  en términos de ese operador:

$$(5.6) (n+K-1)^{(k)} y(n+K) = (nE)^k \cdot y(n)$$

c. Comprobar que  $(nE)^h (nE)^k = (nE)^{n+k} = (nE)^k (nE)^h$

6. La Ecuación de Euler - Cauchy de Primer Orden. La forma más sencilla de la ecuación (3.1) que estamos estudiando, es

$$(6.1) n y(n+1) - c \cdot y(n) = 0 \text{ o bien}$$

$$(6.2) (nE - c) y(n) = 0$$

es decir

$$(6.2) y(n+1) - (c/n) y(n) = 0 \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

La anterior ecuación es un caso particular de la ecuación general lineal de primer orden

$$(6.3) y(n+1) - g(n) \cdot y(n) = Q(n)$$

cuya solución general es (1)

$$(6.4) y(n) = \prod_{h=0}^{n-1} g(h) \left[ \sum_{k=0}^{n-1} Q_k \prod_{j=1}^{j=k} \frac{1}{g(j)} + A \right]$$

Siendo  $A$  una constante arbitraria, o una función arbitraria pero periódica con período igual a 1.

Aplicando la fórmula (6.4) a la ecuación (6.2) encontramos que la solución de la ecuación

$$n \cdot y(n+1) - c \cdot y(n) = 0$$

es la sucesión (o mejor, la familia de sucesiones)

$$(6.5) y(n) = A n c^n / n!$$

(1) Ver, por ejemplo, Miller, op. cit.

en donde  $A$  es cualquier constante arbitraria, o, si se quiere, cualquier función definida en los reales positivos y con período igual a 1.

7. Las potencias del operador  $(nE-c)$ . Es fácil comprobar que las potencias de este operador pueden obtenerse usando formalmente el binomio de Newton, a condición de tratar como un sólo símbolo el símbolo  $nE$ . Es decir, para todo número entero positivo  $k$  se tiene

$$(7.1) (nE-c)^k = \sum_{h=0}^k \binom{k}{h} (-c)^{k-h} (nE)^h$$

y, según la fórmula (5.4):

$$(7.2) \quad (nE-c)^k = \sum_{h=0}^k \binom{k}{h} (-c)^{k-h} (n+h-1)^{(h)} E^h$$

Observando la fórmula (7.2) se deduce que toda ecuación en diferencias finitas que pueda escribirse en la forma

$$(7.3) \quad (nE-c)^k y(n) = 0$$

es también del tipo

$$(7.4) \quad (n+k-1)^{(k)} E^k y(n) + \dots + a_{k-1} n y(n+1) + a_k y(n) = 0$$

o sea que pertenece a la clase que hemos llamado ecuaciones de Euler-Cauchy, de orden k.

### 8. La ecuación

$$(8.1) \quad (nE-c)^2 y(n) = 0$$

puede resolverse (o "sumarse" como podría decirse también) fácilmente. Poniendo

$$(8.2) \quad z(n) = (nE-c) y(n)$$

la ecuación (8.1) propuesta se escribe

$$(nE-c) \cdot z(n) = 0$$

que es como la ecuación (6.2), y su solución es como la fórmula (6.5):

$$z(n) = A_1 n c^n / n!$$

siendo  $A_1$  una constante arbitraria

Sustituyendo en (8.2) se obtiene

$$(8.3) \quad (nE-c) y(n) = A_1 \cdot n c^n / n!$$

$$(E-c/n) y(n) = A_1 c^n / n!$$

La ecuación anterior, a su vez, puede tratarse como ecuación de primer orden en  $y(n)$ , no homogénea. Usando la fórmula general (6.4) obtenemos:

$$y(n) = \prod_{h=1}^{n-1} (c/h) \left[ A_2 + \sum_{k=1}^{n-1} A_1 \frac{c^k}{k!} \prod_{j=1}^k (j/c) \right]$$

$$= \prod_{h=1}^{n-1} (c/h) \left( A_2 + \sum_{k=1}^{n-1} A_1 \right) = [c^{n-1} / (n-1)!]$$

$$[A_2 + (n-1) A_1] = (c^n / n!) [n (A_2 / c) + n(n-1)$$

$$(A_1 / c)]$$

es decir

$$y(n) = (c^n / n!) [K_1 n^{(1)} + K_2 n^{(2)}]$$

o bien

$$(8.4) \quad y(n) = (c^n / n!) [C_1 n + C_2 n^2] \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

en donde  $C_1$  y  $C_2$  son constantes arbitrarias que podrán luego determinarse fijando dos condiciones iniciales (o en dos puntos distintos, eventualmente) para  $y(n)$ .

9. En general, la solución de la ecuación en diferencias finitas.

$$(9.1) \quad (nE-c)^r y(n) = 0 \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

en donde r es un número entero positivo y c es un número real o complejo, es

$$(9.2) \quad y(n) = (c^n / n!) [A_1 n + A_2 n^{(2)} + \dots + A_r n^{(r)}]$$

Este teorema se demuestra por inducción completa. En efecto. Admitamos que la solución (9.2) es válida hasta algún valor de r. Entonces la ecuación de orden r+1 de la forma (9.1) puede escribirse

$$(9.3) \quad (nE-c)^{r+1} y(n) = 0$$

y, poniendo

$$(9.4) \quad (nE-c) y(n) = z(n),$$

la (9.3) se escribe

$$(nE-c)^r z(n) = 0$$

$$a(n) = (c^n / n!) [A_1 n + A_2 n^{(2)} + \dots + A_r n^{(r)}]$$

Sustituyendo en (9.4) y dividiendo por n:

$$[E-c/n] y(n) = (c^n / n!) [A_1 n + \dots + A_r n^{(r)}]$$

Esta es una ecuación en DD.FF., lineal, de primer orden, de la forma (6.2) que se resuelve con la fórmula (8.4):

$$y(n) = \prod_{k=1}^{n-1} (c/k) \left\{ \sum_{k=1}^{n-1} (c^k / k! k) [A_1 k + \dots + A_r k^{(r)}] \prod_{j=1}^k (j/c) + B_0 \right\}$$

$$= \prod_{k=1}^{n-1} c \left[ \sum_{k=1}^{n-1} \frac{c^k}{k!} (B_1^1 + B_2^1 k + \dots + B_r^1 k^{r-1}) \frac{k!}{c^k} + B_0 \right]$$

Pero como es bien sabido:

$$\sum_{k=1}^{n-1} k^m = \text{Polinomio en } n \text{ de grado } m+1$$

de donde

$$y(n) = \frac{c^{n-1}}{(n+1)!} (B_0 + B_1 n + \dots + B_r n^r)$$

Multiplicando y dividiendo por  $c^n$ , se tiene

$$y(n) = \frac{c^n}{n!} (B_0 n + B_1 n^2 + \dots + B_r n^{r+1})$$

en donde las B contienen un factor c. Transformando las potencias ordinarias de n en potencias factoriales se encuentra, finalmente

$$y(n) = (c^n/n!) [A_1^1 n + \dots + A_{r+1}^1 n^{(r+1)}]$$

que es precisamente como lo prevé la fórmula (9.2) al sustituir r por r + 1. Queda así demostrado que la fórmula (9.2) es la solución general de la ecuación en DD.FF. propuesta en (9.1).

10. Estamos así en condiciones de tratar la ecuación en DD.FF. de Euler y Cauchy, homogénea, de orden m:

$$(3.1) \quad (n+m-1)^{(m)} y(n+m) + a_1 (n+m-2)^{(m-1)} y(n+m) + \dots + a_{m-1} n y(n+1) + a_m y(n) = 0$$

$$(n=1,2,3,4\dots)$$

Usando el operador E, la ecuación puede escribirse

$$[(n+m-1)^{(m)} E^m + a_1 (n+m-2)^{(m-1)} E^{m-1} + \dots + a_{m-1} nE + a_m] y(n) = 0$$

y, teniendo en cuenta la fórmula (5.6), podemos poner también

$$(10.1) \quad [(nE)^m + a_1 (nE)^{m-1} + \dots + a_{m-1} (nE) + a_m]$$

Es fácil darse cuenta de que el polinomio-operador que aparece en el lado izquierdo de la ecuación anterior puede tratarse como un elemento perteneciente a un anillo de polinomios (en el sentido del Algebra Moderna). Por lo tanto, puede factorizarse en factores de primer grado en nE. Sean  $b_1, b_2, \dots, b_h$  los ceros o raíces simples del polinomio; y sean  $c_1, c_2, \dots, c_k$  las raíces múltiples, siendo  $d_1, d_2, \dots, d_k$  sus multiplicidades respectivas. Esto significa que la ecuación característica

$$(10.2) \quad x^m + a_1 x^{m-1} + \dots + a_{m-1} x + a_m = 0$$

puede factorizarse como

$$(x-b_1)(x-b_2)\dots(x-b_h)(x-c_1)^{d_1}(x-c_2)^{d_2}\dots$$

$$(x-c_k)^{d_k} = 0$$

siendo las multiplicidades tales que

$$(10.3) \quad h+d_1 + d_2 + \dots + d_k = m$$

En conclusión, la ecuación (10.1) es equivalente a la ecuación original (3.1), y también puede escribirse

$$(10.4) \quad [(nE-b_1)\dots(n-b_h)(nE-c_1)^{d_1}\dots(nE-c_k)^{d_k}] y(n) = 0$$

Es bien sabido que si  $a_m \neq 0$  en la ecuación (10.2), entonces ninguno de los ceros  $b_1, \dots, b_h, c_1, \dots, c_k$ , puede ser nulo, debido a la identidad  $b_1 b_2 \dots b_h c_1^{d_1} \dots c_k^{d_k} = a_m$ .

11. Recordemos dos teoremas muy importantes de la teoría de ecuaciones en DD.FF.

11.1 La solución general de toda ecuación en DD.FF. de orden m, contiene m constantes arbitrarias. Estas constantes arbitrarias pueden interpretarse, más generalmente, como funciones periódicas arbitrarias de período igual a 1.

11.2 Para toda ecuación en DD.FF. que sea lineal, de orden mayor que uno, si se conocen dos soluciones linealmente independientes,  $f_1(n), f_2(n)$ , toda combinación lineal de la forma

$$A_1 f_1(n) + A_2 f_2(n)$$

la satisface también, siendo  $A_1, A_2$  funciones periódicas arbitrarias, con período igual a 1. A este tipo de funciones se les llama "periódica-unitaria".

12. Estamos ya en condiciones de describir el método para resolver la ecuación en DD.FF. de Euler-Cauchy de orden  $m \geq 1$ , presentada en la forma (3.1). El algoritmo correspondiente consiste de los siguientes pasos:

a. Convertir la ecuación de la forma original (3.1) a la forma (10.1), como polinomio-operador en la "variable" nE, mediante la identidad (5.6);

b. Factorizar el polinomio-operador que aparece en (10.1), en factores lineales, o sea determinar los "ceros" o raíces del polinomio-operador, el cual quedará en la forma (10.4);

c.1) Para cada raíz simple real  $b_k$ , construir el término (o solución particular)

$$(12.1) \quad A_k \cdot n b_k^n / n!$$

o, si se prefiere,

$$A_k \cdot b_k^n / (n-1)!$$

Si la ecuación es de orden  $m=1$ , esta es la solución general.

c.2) Para cada pareja conjugada,  $b_k, b_k^*$ , de raíces simples complejas,

$$b_k = R_k e^{i\theta} k, b_k^* = R_k e^{-i\theta} k \quad (R_k = \text{mod } b_k,$$

$$\theta_k = \arg b_k)$$

construir el término (o solución particular)

$$(12.2)$$

$$(R_k^n / (n-1)!) (A_k \text{ sen } n\theta_k + A_k + 1 \text{ cos } n\theta_k)$$

siendo  $A_k, A_k + 1$ , funciones arbitrarias pero periódicas-unitarias, mutuamente independientes.

c.3) Para cada raíz múltiple real,  $c_k$ , de multiplicidad  $d_k$ , construir el término

(12.3)

$$\frac{c_k^n}{n!} [B_{k,1} n + B_{k,2} n^{(2)} + \dots + B_{k,d_k} n^{(d_k)}]$$

en donde las  $B^1$  s son funciones periódica-unitarias, arbitrarias. Si se prefiere, el polinomio en potencias factoriales que aparece en la fórmula anterior puede convertirse a polinomio en potencias ordinarias usando las conocidas identidades entre potencias ordinarias y potencias factoriales con números de Stirling como coeficientes<sup>(1)</sup>.

c.4) Para cada pareja conjugada de raíces complejas, múltiples,

$$c_j = C_j i\theta_j, c_j^* = C_j^{-i\theta_j} \quad (C_j = \text{mod } c_j, \theta_j = \text{arg } c_j)$$

con multiplicidad  $d_j$  para cada una de ellas, construir la expresión

(12.4)

$$\frac{C_j}{n!} \text{sen } n\theta_j [B_{j,1} n + \dots + B_{j,d_j} n^{(d_j)}] + \cos n\theta_j [D_{j,1} n + \dots + D_{j,d_j} n^{(d_j)}]$$

en donde las  $B^1$  s y las  $D^1$  s son funciones arbitrarias, periódica-unitarias, mutuamente independientes.

d. Construir la solución general por superposición de los términos resultantes de la etapa anterior. Esto significa que la solución general tendrá la forma

(12.5)

$$y(n) = \frac{1}{(n-1)!} [A_1 b_1 + \dots + A_h b_h] + \frac{c_1^n}{n!} [B_{1,1} n + \dots + B_{1,d_1} n^{(d_1)}] + \dots + \frac{c_k^n}{n!} [B_{k,1} n + \dots + B_{k,d_k} n^{(d_k)}]$$

en donde:

$b_1, b_2, \dots, b_h$  son las raíces simples (reales o complejas) de la ecuación característica (10.2).

$c_1, c_2, \dots, c_k$  son las raíces múltiples (reales o complejas) de la misma ecuación.

$d_1, d_2, \dots, d_k$  son las respectivas multiplicidades de  $c_1, \dots, c_k$ .  $A_1, \dots, A_h, B_{1,1}, \dots, B_{1,d_1}, \dots, B_{k,1}, \dots, B_{k,d_k}$  son funciones arbitrarias periódica-unitarias.

(1) Ver, por ejemplo, Hamming, Numerical Methods for Scientists and Engineers, Ch. 1.

$n=1,2,3,\dots$ , es la variable independiente discreta que recorre la sucesión de números naturales positivos.

Desde luego, si algunas parejas de las raíces simples y/o de las raíces múltiples, son complejas conjugadas, los términos que les corresponden en (12.5) pueden transformarse en términos de la forma (12.2) y (12.4), respectivamente. En la forma general (12.5) puede observarse que el número de funciones arbitrarias periódica-unitarias, es

$$h + d_1 + \dots + d_k$$

que es igual a  $m$  según la ecuación (12.3), y que es precisamente como lo prevé el teorema de existencia de soluciones para ecuaciones en DD.FF. (Ver No. 11.1, más atrás).

13. Para resolver por completo el problema de la ecuación (3.1) con las condiciones iniciales (3.1.a), estudiamos luego la determinación de valores para las funciones arbitraria periódica-unitarias. Este punto lo estudiaremos para el caso de la ecuación de orden  $m=4$ , para evitar una gran complicación en la nomenclatura y en las expresiones que siguen, y porque el análisis que haremos es aplicable a cualquier otro valor  $m > 1$ , sin modificaciones, y en forma que resultará evidente. Consideramos pues la ecuación

(13.1)

$$(m+3)^{(4)} y(n+4) + a_1 (m+2)^{(3)} y(n+3) + \dots + a_4 y(n) = 0 \quad (a_4 \neq 0; n=1,2,\dots)$$

que puede convertirse en

(13.2)

$$[(mE)^4 + a_1 (mE)^3 + \dots + a_4] y(n) = 0,$$

con las condiciones iniciales

(13.3)

$$y(1) = y_1, y(2) = y_2, y(3) = y_3, y(4) = y_4,$$

siendo  $y_1, \dots, y_4$ , números reales o complejos conocidos, no todos nulos.

Supongamos que el polinomio-operador (13.2) tiene dos raíces simples, reales,  $b_1$  y  $b_2$ , y una raíz doble, real,  $c$ . Entonces según la expresión (12.5), en este caso la solución general de (13.1) es

(13.4)

$$y(n) = \frac{n}{n!} [A_1 b_1^n + A_2 b_2^n] + \frac{c^n}{n!} [B_1 n + B_2 n^2]$$

en donde  $b_1 \neq 0, b_2 \neq 0, c \neq 0$ , porque  $a_4 \neq 0$ .

Aplicando las condiciones iniciales se obtiene el sistema lineal

$$\begin{aligned} A_1 b_1 + A_2 b_2 + B_1 c &= y_1 \\ A_1 b_1^2 + A_2 b_2^2 + B_1 c^2 + B_2 c^2 &= 2! y_2 / 2 \\ A_1 b_1^3 + A_2 b_2^3 + B_1 c^3 + B_2 2c^3 &= 3! y_3 / 3 \\ A_1 b_1^4 + A_2 b_2^4 + B_1 c^4 + B_2 3c^4 &= 4! y_4 / 4 \end{aligned}$$



donde las incógnitas son  $A_1, A_2, B_1, B_2$ . El determinante de este sistema es

(13.5)

$$D = b_1 \ b_2 \ c^3 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ b_1 & b_2 & c & 1 \\ b_1^2 & b_2^2 & c^2 & 2c \\ b_1^3 & b_2^3 & c^3 & 3c^2 \end{vmatrix} = b_1 \ b_2 \ c^3 \ H$$

Respecto a  $c$ , el determinante  $H$  es un polinomio de grado 4o., que se anula (como es evidente) para  $c=b_1, c=b_2$ . Respecto a  $b_1$ , el determinante es un polinomio de grado 3o., que se anula para  $b_1=b_2, b_1=c$ . Respecto a  $b_2$ , el determinante es un polinomio de grado 3o., que se anula para  $b_2=b_1, b_2=c$ . Por lo tanto el determinante  $H$  se puede factorizar.

(13.6)

$$H = k (b_1 - b_2) (b_1 - c)^2 (b_2 - c)^2$$

en donde  $k$  es una constante numérica que está por determinar. Para determinar a  $k$  basta observar que el producto de la diagonal principal del determinante  $H$  en (13.5) es  $3b_2 \ c^4$ , y que al expandir el producto indicado en (13.6) el último término sería  $k \ b_2 \ c^4$ . Por tanto  $k=3$ . Luego el determinante (13.5) del sistema es

$$D = 3 \ b_1 \ b_2 \ c^3 (b_1 - b_2) (b_1 - c)^2 (b_2 - c)^2$$

Por hipótesis,  $b_1$  es simple, luego  $b_1 \neq b_2, b_1 \neq c$ . Por la misma razón  $b_2 \neq c$ . Luego

$$D \neq 0$$

Entonces existe un sistema de 4 números  $A_1, A_2, B_1, B_2$ , no todos nulos, que obligan a la solución general (13.4) a cumplir las condiciones iniciales (13.3), además de que satisface la ecuación en DD.FF. que se propuso en (13.1).

La aplicación de este razonamiento a cualquier ecuación del tipo que estudiamos, de cualquier orden  $m > 1$  es evidente por sí misma.

14. Por último, examinamos el comportamiento de la solución general encontrada (14.5), para valores grandes de la variable independiente  $n$ . Observemos que, en general, esa solución es una suma de términos (reales o complejos), correspondientes a cada raíz  $c_i$  de la ecuación auxiliar, que tiene la forma

(14.1)

$$\frac{c_i^n}{n!} [B_{i1} n + B_{i2} n^{(2)} + \dots + B_{i,d_i} n^{(d_i)}]$$

en donde  $d_i \geq 1$  (si  $d=1$ , se trata de una raíz  $c_i$  simple).

Para valores enteros grandes de  $n$ , el factorial puede representarse asintóticamente por la fórmula de Stirling

$$n! = (n/e)^n \sqrt{2\pi n} e^{\theta/12n} \quad (0 < \theta < 1)$$

Sustituyendo en (14.1):

(14.2)

$$\frac{(ec_i)^n}{n^{n-1/2}} [B'_{i1} n + \dots + B'_{i,d_i} n^{(d_i)}]$$

El límite de esta expresión cuando  $n$  tiende a infinito es cero porque para todo valor entero positivo del exponente  $d$ , y para todo número (real o complejo),  $x$ , se tiene

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x^n n^d / n^n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (x^n / n^{n-d}) = 0$$

Esto significa que cualesquiera que sean los valores iniciales de una sucesión infinita  $y(n)$  que satisfaga una ecuación en DD.FF. de Euler-Cauchy homogénea, y cualesquiera que sean los coeficientes de ésta, la sucesión tiende al límite cero.

### LA ECUACION MODIFICADA DE EULER-CAUCHY (FORMA INCREMENTAL)

15. Una ecuación en DD.FF. que tiene cierta analogía con la ecuación (3.1) es la ecuación

(15.1)

$$(n+m-1)^{(m)} \Delta^m y(n) + b_1 (n+m-2)^{(m-1)} \Delta^{m-1} y(n) + \dots + b_{m-1} n \Delta y(n) + b_m y(n) = 0$$

en cuyos términos tienen el mismo significado ya conocido. Los coeficientes  $b$ 's son constantes (reales o complejas) predeterminadas. Esta ecuación se expresa en términos de las diferencias finitas sucesivas de  $y(n)$ ,  $\Delta y(n), \dots, \Delta^m y(n)$ , a diferencia de la ecuación (3.1), que se expresa en términos de los valores sucesivos de la secuencia  $y(n), y(n+1), \dots, y(n+m)$ . Por lo tanto, a la ecuación (15.1) la llamaremos ecuación de Euler-Cauchy, homogénea, modificada. Es importante notar que la una no es reductible a la otra, es decir, que son dos ecuaciones en DD.FF. distintas.

16. Las potencias del operador  $n\Delta$ . El operador  $n\Delta$  se define sobre la clase de sucesiones  $y(n)$  (finitas o infinitas) mediante la identidad

(16.1)

$$n\Delta \cdot y(n) = n [y(n+1) - y(n)] \text{ para todo } n \text{ de la sucesión } y(n).$$

El "cuadrado" (o "segunda potencia") de  $n\Delta$  es

(16.2)

$$\begin{aligned} (n\Delta)^2 y(n) &= (n\Delta) [n\Delta \cdot y(n)] = n \Delta (n \Delta y) = \\ &= n(n\Delta^2 y + \Delta y + \Delta^2 y) = (n+1)n \Delta^2 y + n \Delta y = \\ &= [(n+1)^{(2)} \Delta^2 + n\Delta] y(n) \end{aligned}$$

En general toda potencia entera positiva  $(n\Delta)^m$  de este operador se define por recurrencia<sup>(1)</sup>.

$$(n\Delta)^m y(n) = n \Delta [(n\Delta)^{m-1} y(n)].$$

(1) Nótese que  $(n\Delta)^k \neq n^k \Delta^k$ , es decir que,  $(n\Delta)^k y \neq n^k \Delta^k y$

La tercera potencia es

$$\begin{aligned} (n\Delta)^3 y(n) &= n\Delta [(n\Delta)^2 y(n)] = n\Delta [(n+1)^{(2)} \Delta^2 y(n) \\ &+ n\Delta y(n)] = n[(n+1)^{(2)} \Delta^3 y + 2(n+1) \Delta^2 y + \\ &+ 2(n+1) \Delta^3 y + n \Delta^2 y + \Delta y + \Delta 2y] = [(n+2)^{(3)} \Delta^3 + \\ &+ 3(n+1)^{(2)} \Delta^2 + n\Delta] y(n) \end{aligned}$$

Para deducir estas identidades hemos usado la conocida identidad para potencias factoriales

$$n^{(k)} = (n+1)^{(k)} - n^{(k)} = k n^{(k-1)}$$

La "cuarta potencia" de  $n\Delta$  es

$$(n\Delta)^4 y(n) = n\Delta [(n\Delta)^3 y]$$

Sustituyendo dentro del corchete cuadrado la expresión (16.3) y después de efectuar las diferencias indicadas y simplificar, se obtiene

(16.4)

$$\begin{aligned} (n\Delta)^4 y(n) &= [(n+3)^{(4)} \Delta^4 + 7(n+2)^{(3)} \Delta^3 + \\ &+ 6(n+1)^{(2)} \Delta^2 + n\Delta] y(n) \end{aligned}$$

17. Teorema. Para toda sucesión  $y(n)$ , y para cualquier número entero  $k$  mayor que 1, se tiene

(17.1)

$$(n\Delta)^k y(n) = \sum_{h=1}^k s(h, k) \cdot (n+h-1)^{(h)} \Delta^h y(n),$$

en donde  $s(h, k)$  son los números de Stirling de segunda especie.

Estos números son los que resultan al expresar una potencia ordinaria en potencias factoriales

(17.2)

$$x^k = \sum_{h=1}^k s(h, k) x^{(h)}$$

Obedecen a la ley de recurrencia

(17.3)

$$s(h, k+1) = s(h, k) \cdot h + s(h-1, k)$$

y los primeros son los siguientes

k \ h	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1							
2	1	1						
3	1	3	1					
4	1	7	6	1				
5	1	15	25	10	1			
6	1	31	90	65	15	1		
7	1	63	301	350	140	21	1	
8	1	127	966	1701	1050	266	28	1

Se demuestra este teorema por el método de inducción. Supongamos que la identidad (17.1) es válida hasta algún valor de  $k$ . Mostraremos que entonces es también válida para  $k+1$ . En efecto. Aplicando el operador  $n\Delta$  a  $(n\Delta)^k y(n)$  en la fórmula (17.1), se obtiene

$$\begin{aligned} (n\Delta)^{k+1} y(n) &= n\Delta \sum_{n=1}^k s(h, k) (n+h-1)^{(h)} \Delta^h y(n) \\ &= n \sum_{h=0}^k s(h, k) [h(n+h-1)^{(h-1)} \Delta^h y + h \\ &+ (n+h-1)^{(h-1)} \Delta^{h+1} y(n) + (n+h-1)^{(h)} \Delta^{h+1} y(n)] \end{aligned}$$

pero  $n(n+h-1)^{(h-1)} = (n+h-1)^{(h)}$ , así que la expresión anterior es

$$\begin{aligned} &\sum_{h=1}^k s(h, k) \cdot h (n+h-1)^h \Delta^h y \\ &+ \sum_{h=1}^k s(h, k) [h(n+h-1)^{(h)} + n(n+h-1)^{(h)}] \Delta^{h+1} y(n) \end{aligned}$$

Cambiando de índice en la segunda sumatoria de la expresión anterior,  $h+1=r$ ; y poniendo  $r=h$  en la primera sumación se obtiene

(17.4)

$$\begin{aligned} &\sum_{r=1}^k s(r, k) r (n+r-1)^{(r)} \Delta^r y + \sum_{r=1}^{k+1} s(r-1, k) \\ &\cdot (n+r-1)^{(r)} \Delta^r y \\ &= s(k, k) (n+k)^{(k+1)} \Delta^{k+1} y + \sum_{r=1}^k s(r, k) \cdot r + s(r-1, k) \\ &(n+r-1)^{(r)} \Delta^r y \end{aligned}$$

Pero según la fórmula (17.2) para los números de Stirling

$$s(r, k) r + s(r-1, k) = s(r, k+1); s(k, k) = 1 = s(k+1, k+1)$$

de manera que la expresión (17.4) es (usando nuevamente a  $h$  como índice de sumación):

$$(n\Delta)^{k+1} y = \sum_{h=1}^{k+1} s(h, k+1) (n+h-1)^{(h)} \Delta^h y$$

y esta es precisamente la fórmula (17.1) tal como resultaría poniendo  $k+1$  en lugar de  $k$ . Así queda demostrada la validez de la fórmula (17.1) para toda potencia entera y positiva  $k$  del operador  $n\Delta$ .

18. Para todo valor de  $k$ , las expresiones de la forma (17.2) tienen sus recíprocas de la forma

$$x^{(k)} = \sum_{h=1}^k S(h, k) x^h$$

en donde  $S(h,k)$  son los números de Stirling de primera especie. Así mismo, la fórmula (17.1) tiene su recíproca

$$(18.1) \quad (n+k-1) \Delta^k y(n) = \sum_{h=1}^k S(h,k) (n\Delta)^h y(n)$$

19. De las ecuaciones que estamos estudiando, la más sencilla es la de orden 1

$$(19.1) \quad n\Delta y(n) - ay(n) = 0 \quad (n=1,2,\dots)$$

o bien

$$\Delta y(n) - (a/n) y(n) = 0$$

La fórmula (6.4), referida a la (6.3), da como solución para la ecuación anterior

$$y(n) = A(1+a) (1+a/2) \dots [1+a/(n-1)], \quad n=1,2,3,\dots$$

$$(19.3) \quad y(n) = A \sum_{k=1}^{n-1} (1+a/k), \quad n=1,2,3,\dots$$

siendo  $A$  una función arbitraria periódica-unitaria.

Sobre la solución de la ecuación en DD.FF. lineal, de primera especie, el Anexo a este artículo muestra un método de solución del mismo autor. Ese mismo método permite deducir que la solución a la ecuación

$$(19.4) \quad (n\Delta - a)^2 y(n) = 0$$

$$(19.5) \quad y(n) = \prod_{k=1}^{n-1} (1+a/k) \left[ A_1 + A_2 \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{j+a} \right]$$

y que la solución a la ecuación

$$(19.6) \quad (n\Delta - a)^k y(n) = 0$$

$$(19.7) \quad y(n) = (1+a) (1+a/2) \dots [1+a/(n-1)]$$

$$\left[ A_1 + A_2 \sum_{i_1=1}^{n-1} \frac{1}{i_1+a} + \dots + A_k \sum_{i_1=1}^{n-1} \frac{1}{i_1+a} \right]$$

$$\left[ \sum_{i_2=1}^{i_1-1} \frac{1}{i_2+a} \dots \sum_{i_{k-1}=1}^{i_{k-2}-1} \frac{1}{i_{k-1}+a} \right]$$

en donde  $A_1, \dots, A_k$  son funciones arbitrarias periódica-unitarias.

La demostración de este último resultado es un ejercicio sencillo que puede realizarse usando repetidamente los resultados del Anexo mencionado, y que se deja al lector.

20. Así puede desarrollarse ya el algoritmo para resolver la ecuación homogénea, de Euler-Cauchy, modificada

$$(15.1) \quad (n+m-1)^{(m)} \Delta^m y(n) + A_1 (n+m-2)^{(m-1)} \Delta^{m-1} y(n) + \dots + A_m y(n) = 0$$

que se ejecuta en las siguientes etapas:

a. Expresar cada uno de los términos con potencias factoriales de la ecuación anterior (15.1) en potencias del operador  $n$ , mediante la identidad (18.1).

b. Simplificar y recoger términos semejantes, y escribir la ecuación en la forma

$$[(n\Delta)^m + a_1 (n\Delta)^{m-1} + \dots + a_{m-1} n\Delta + a_m] y(n) = 0$$

c. Factorizar el polinomio-operator del lado izquierdo de esta ecuación en factores lineales, con lo cual la ecuación toma la forma

$$[(n\Delta - b_1) \dots (n\Delta - b_h) (n\Delta - c_1)^{d_1} \dots (n\Delta - c_k)^{d_k}] y(n) = 0$$

en donde  $b_1, \dots, b_h$  son las raíces simples, y las  $c_1, \dots, c_k$  son las raíces múltiples, con multiplicidades  $d_1, \dots, d_k$ , respectivamente.

c.1) Para cada raíz simple (real o compleja)  $b_k$  le corresponde la solución particular

$$A_k (1+b_k) (1+b_k/2) \dots [1+b_k/(n-1)]$$

c.2) Para cada raíz múltiple  $c$ , de multiplicidad  $d$  le corresponde una solución parcial de la forma (19.9), en donde  $c$  tomará el lugar de  $a$  y  $d$  tomará el lugar de  $k$ .

d. Construir la solución general de (15.1) sumando las soluciones parciales ya mencionadas. Esa solución general contiene un número de funciones arbitrarias periódica-unitarias (o constantes) que es precisamente igual a  $m$ .

e. Valorar las constantes  $A_1, \dots, A_m$  usando condiciones iniciales. Se puede demostrar que esto es posible mediante una discusión como la que se hizo en el No. 13.

21. Quedan así resueltas las dos ecuaciones en DD.FF. que nos propusimos estudiar.

## BIBLIOGRAFIA

- Boole, George. *The Calculus of Finite Differences*. New York. Dover Publications Inc. 1960.
- Batchelder, Paul. *An Introduction to Linear Difference Equations*. New York. Dover Publications Inc., 1967.
- Miller, Keneth S. *The Calculus of Finite Differences and Differences Equations*. New York. Dover Publications Inc. 1966.
- Levy, H. y F. Lessman. *Finite Difference Equations*. New York. The MacMillan Co. 1961.
- Milne-Thompson, L.M. *Calculus and Finite Differences*. New York. The MacMillan Co. 1940.
- Jordan, Charles. *Calculus of Finite Differences*. New York. Chelsea Publishing Press. 1965.
- Goldberg, Samuel *Introduction to Difference Equations*. New York. John Whey & Sons. 1958.
- Ralston, Anthony. *A First Course in Numerical Analysis*. New York. Mac Graw Hill-Kogakusha. 1965.

# EINSTEIN Y LA TEORIA CUANTICA

Por: *Guillermo Castillo Torres* \*

*Departamento de Física  
Universidad Nacional de Colombia*

Aunque menos popular que su papel en la teoría de la Relatividad, también es importante la intervención de Einstein en la Teoría cuántica. Pero hay un aspecto paradójico en ella: por un lado fue uno de sus pioneros porque formuló varias hipótesis que tuvieron decisiva importancia en el desarrollo de la teoría, pero por otro discrepó frecuentemente de la interpretación aceptada como oficial, si bien se ha exagerado mucho sobre la magnitud de estas discrepancias.

Su primera contribución importante pertenece al problema de la naturaleza de la luz. A fines del siglo XIX la teoría ondulatoria de la luz había alcanzado grandísima perfección después que Maxwell había predicho que la luz era un tipo de ondas electromagnéticas y que Hertz había producido en su laboratorio ondas de esta clase, las hertzianas, de mayor longitud de onda que las luminosas pero de igual velocidad de propagación y susceptibles de ser reflejadas, refractadas, polarizadas, sufrir interferencia, etc., en forma análoga a lo que ocurre con la luz. El mismo Hertz cuando anunció los resultados de sus experimentos, dijo que en conclusión podría afirmarse que la óptica era un capítulo cerrado. Sin embargo, dentro de este mismo informe mencionó un hecho, para él inexplicable: en su generador de ondas electromagnéticas observó que la chispa saltaba más fácilmente cuando una de las esferas era iluminada con luz ultravioleta. Este era el efecto foto-eléctrico, que iba a reabrir el capítulo de la óptica y darle a esta nuevos e insospechados desarrollos.

El efecto foto-eléctrico tal como se fue descubriendo en los años sucesivos, requiere la incidencia de las ya entonces llamadas ondas electromagnéticas, cuyo espectro va desde las ondas que produjo Hertz hasta las que poco después se descubrieron y se llamaron los rayos  $\gamma$  de las sustancias radiactivas, pasando por la luz visible y los rayos X. La onda incidente, si es de longitud de onda adecuada, desprende electrones de una superficie metálica. Pero había algunas cosas no muy claras, descubiertas experimentalmente por Lenard (1): para cada metal había una frecuencia umbral, es decir por debajo de ella no había efecto foto-eléctrico; la energía cinética de los electrones más veloces dependía de la frecuencia de la onda incidente y no de la intensidad; esta última

propiedad influía sobre el número de electrones emitidos.

Estos hechos surgieron a Einstein una hipótesis (2): la energía incidente no está distribuida continuamente como lo prevé la teoría ondulatoria sino más bien está concentrada en paquetes de energía o *cuantos de luz* como los llamó Einstein, o *fotones* como se les bautizó más adelante. Para ello, Einstein se guió por los resultados de la hipótesis de Planck sobre la distribución espectral de la energía en el cuerpo negro, donde se había supuesto que las frecuencias de los osciladores que producen la onda era un múltiplo entero del célebre *cuanto* de Planck  $h\nu$ , donde  $h$  es la constante de Planck y  $\nu$  es la frecuencia de la radiación emitida. El cuanto de luz tiene también la energía  $h\nu$  y desaparece en el proceso de la expulsión del electrón. Como es un proceso de un fotón por cada electrón, se podrá escribir una ecuación que indique la conservación de la energía.

$$h\nu = h\nu_0 + 1/2 m v^2$$

La energía del fotón  $h\nu$  se convierte en el trabajo de extracción de  $h\nu_0$  y en la energía de los electrones más veloces.  $\nu_0$  es la frecuencia umbral. Los electrones menos veloces requieren más energía para ser extraídos y la ecuación contiene más términos.

Einstein mostró que su ecuación no contradice las mediciones de Lenard (1) cuyos resultados ya habíamos mencionado y fue comprobada exactamente por Millikan en 1916 (3) incluyendo el valor numérico de  $h$ .

Esta hipótesis tuvo después importantes consecuencias: por ejemplo Bohr en su átomo de Hidrógeno supuso que en la transición atómica que da lugar a las líneas espectrales el electrón pasa de un nivel de energía  $E_m$  a otro nivel de energía  $E_n$  y emite un cuanto de luz

$$E_m - E_n = h\nu$$

donde  $\nu$  es de nuevo la frecuencia de la radiación emitida.

Sin embargo, este regreso a la teoría corpuscular fue recibida por muchos con bastante escepticismo. Desde entonces y durante muchos años más se habló de la dualidad onda-partícula que muestra la luz en su naturaleza y sobre cuya solución, que se alcanzó varios años después no tenemos tiempo de extendernos aquí.

\* Trabajo leído en la sesión solemne conmemorativa del Centenario de Einstein.

Después del modelo atómico de Bohr la teoría cuántica pasó por un período de desorientación en que se echaba de menos una serie de principios coherentes que sirvieran de guía y que permitieran calcular no sólo las frecuencias sino también las intensidades de las líneas espectrales. Aquí intervino de nuevo Einstein con el concepto de probabilidad de transición (4), introducido a propósito de su tratamiento fenomenológico de la emisión espontánea y la emisión estimulada. Este concepto reemplazó la noción clásica de intensidad de la radiación.

En muchos centros universitarios de Europa se empezó a trabajar sobre estas ideas. En 1925 nace la Mecánica Cuántica (matricial) de Heisenberg, Born y Jordan y poco después la Mecánica Ondulatoria de Schrödinger que no trabaja con matrices sino con funciones de onda. Al poco tiempo Schrödinger demostró la equivalencia de los dos métodos con lo cual quedó a disposición de los físicos una teoría abstracta fuertemente matemática, que hoy se llama Mecánica Cuántica y que ha tenido éxitos indudables en los terrenos de la Física Atómica, de la Física Molecular, de la Física Nuclear y de la Física del Estado Sólido. Una característica notable de los nuevos métodos es que reemplaza el determinismo de la Física Clásica por las ideas de probabilidad de encontrar la partícula, de probabilidad de transición, probabilidad de algún valor definido, etc.

Y aquí viene uno de los hechos paradójicos, de los cuales está llena la intervención de Einstein en la teoría cuántica. Max Born, el responsable de la interpretación del cuadrado de la función de onda  $|\psi|^2$  (2) como densidad de probabilidad de encontrar la partícula, declaró en su discurso de aceptación del Premio Nobel en 1954, que la idea que le sirvió de guía vino de Einstein cuando este interpretó el cuadrado de la amplitud óptica como densidad de probabilidad de presencia de fotones. Sin embargo, en la larga polémica epistolar que mantuvo con el mismo Born entre 1916 y 1955 (5), Einstein manifiesta sus reservas sobre la interpretación probabilística de Heisenberg, Born y Jordan y asevera varias veces que Dios no juega a los dados. Parece sin embargo exagerada la afirmación de que Einstein rechazó totalmente la interpretación probabilística y de que aspiraba a una interpretación determinista como la de la Mecánica Clásica.

Tanto en su artículo con Rosen y Podolski (6) como en las cartas a Born de los últimos años, lo que se dice es que la Mecánica Cuántica no describe sistemas individuales, sino más bien "ensembles" similarmente prepa-

rados. Einstein fue muy explícito en hacer notar que sus discrepancias con los miembros de la llamada escuela de Copenhague (Bohr, Heisenberg, Born, etc.), versaban sobre puntos de interpretación y no ponían nunca en tela de juicio la formulación matemática. Tampoco rechazó, como a veces se dice, el principio de incertidumbre. Tuvo sí una interpretación diferente (5), (6): preconizó que la partícula libre tiene en realidad una posición determinada y un momentum determinado, si bien no se pueden verificar ambos al mismo tiempo, en el mismo caso individual, a través de una medición; la interpretación corriente entre los físicos es que la partícula no tiene en realidad ni una posición, ni un impulso determinado; la localización definida que resulta en una medición es producida solamente por la inevitable (esencial) intervención de la medida. (Tomado casi textualmente de una de sus cartas a Born).

¿Hasta dónde favoreció Einstein una interpretación determinista? Es cierto que él sostuvo repetidas veces (7) que la formulación conocida de la Mecánica Cuántica es incompleta en el sentido de que no puede describir completamente sistemas individuales y que será reemplazado más tarde por una descripción completa (no se dice si determinista).

De ahí resulta otro interrogante. Apoya Einstein la concepción de las variables ocultas, es decir creía él en la existencia de nuevas variables cuyas leyes no conocemos en detalle y el promedio de cuyos valores es lo que medimos en definitiva?

En realidad el punto de vista de Einstein es compatible con las variables ocultas si bien no las exigió expresamente. Cabe mencionar, sin embargo, que cuando Born hizo una interpretación completa de la Mecánica Cuántica a base de variables ocultas (8) esta solución le mereció a Einstein el calificativo de "barata". Se ha sugerido (9) que probablemente Einstein creía por aquella época (1952) que la "descripción más general" de que había hablado varias veces la iría a suministrar su teoría del campo unificado, que a la sazón ocupaba su atención, pero que en la postre no dio el resultado esperado.

El caso de Einstein con la teoría cuántica ilustra muy bien uno de los rasgos de su carácter: a pesar de haber sido uno de los pioneros de esa teoría, de haber originado con sus ideas muchos desarrollos importantes, nunca perdió su costumbre de analizar cuidadosamente las bases de toda teoría sin aceptar incondicionalmente los enunciados generalmente admitidos, sino por el contrario, sometiéndolos a un agudo escrutinio. Esa es la actitud que se espera de los verdaderos científicos.

## BIBLIOGRAFIA

- (1) R. Lenard, *Ann Physik* 8, 169 (1902).
- (2) A. Einstein, *Ann Physik* 17, 132 (1905).
- (3) R. Millikan, *Phys. Rev.* 7, 355 (1916).
- (4) A. Einstein, *Phys. Zeits* 18, 121 (1917).
- (5) Existe una compilación de esa correspondencia en Alemán: "Albert Einstein - Max Born Briefwechsel" (Rowohlt, Hamburg) y una versión inglesa: M. Born - Einstein Letters (Walter & Co. New York, 1971).
- (6) A. Einstein, B. Podolski y N. Rosen, *Phys. Rev.* 47, 777 (1935).
- (7) Albert Einstein, *Philosopher Scientist*. Ed. por P.A. Schilpp. Reimpreso por Harper y Row. A. Einstein. *Física y Realidad*, J. Franklin Inst. 221, (1936).
- (8) D. Bohm. *Phys. Rev.* 85, 166 (1952).
- (9) L.E. Ballentine. *Am. J. of Physics.* 40, 1.763 (1972).

# LAS DESIGUALDADES ENTRE OPERADORES COMO MEDIO DE FIJAR LIMITES PARA LOS VALORES PROPIOS

Conferencia pronunciada en el VII Congreso Nacional de Física

**Guillermo Castillo T.**  
*Departamento de Física*  
*Universidad Nacional de Colombia*

## 1. Desigualdades entre operadores [1]

Sean dos operadores autoadjuntos A y B.  
Se dice que  $A \leq B$  (1)

$$\text{Si } \langle \psi | A | \psi \rangle \leq \langle \psi | B | \psi \rangle \quad (2)$$

para todo  $|\psi\rangle$  del espacio de Hilbert que pertenezca a la intersección de los dominios de los 2 operadores.

He aquí algunas propiedades útiles:

- a) Si  $A \leq B$  y  $B \leq A$ , entonces  $A = B$
- b) Si  $A \leq B$  y  $B \leq C$ , entonces  $A \leq C$
- c) Se llama cota superior de A,  $M(A)$ , el máximo valor de  $\langle \psi | A | \psi \rangle$  para  $\|\psi\| = 1$
- d) Se llama cota inferior de A,  $m(A)$ , el mínimo valor de  $\langle \psi | A | \psi \rangle$  si  $\|\psi\| = 1$
- e) Para todo valor propio  $\lambda$  de A, vale  $m(A) \leq \lambda \leq M(A)$
- f) Si  $A \geq 0$   
 $|\langle \psi | A | \varphi \rangle|^2 \leq \langle \psi | A | \psi \rangle \langle \varphi | A | \varphi \rangle$  para todo  $\psi$  y  $\varphi$  del dominio de A
- g) Sea  $\Omega = A - B$ , positivamente definido,  $\Omega > 0$  y  $|\psi\rangle = T|\varphi\rangle$ , siendo T un operador que admite un inverso.

$$\text{Entonces } \langle \psi | \Omega | \psi \rangle = \langle \varphi | T^* \Omega T | \varphi \rangle$$

$$\text{Luego si } A > B, \langle \varphi | T^* \Omega T | \varphi \rangle > 0 \quad (3)$$

$$\text{o bien } T^* A T > T^* B T \quad (4)$$

- h) Si en (3) hacemos  $T = \Omega^{-1}$   
 $\langle \varphi | (\Omega^{-1})^* \Omega \Omega^{-1} | \varphi \rangle > 0$   
pero  $\langle \varphi | (\Omega^{-1})^* \Omega \Omega^{-1} | \varphi \rangle = \langle \psi | \Omega^{-1} | \psi \rangle > 0$   
o bien si  $\Omega > 0, \Omega^{-1} > 0$

## 2. Raíz cuadrada de un operador [1]

Para B autoadjunto  $B^2 \leq 0$

Entonces surge la pregunta: Todo operador autoadjunto no negativo es el cuadrado de otro operador autoadjunto? La respuesta es: Dado  $A \geq 0$ , autoadjunto, existe un único B autoadjunto tal que  $B^2 = A$

Tiene sentido pues la notación  $B = A^{1/2}$  para la raíz cuadrada positiva.

## 3. Otras propiedades de las desigualdades [4]

- a) Si  $A > 1$ , sabemos que  $A^{1/2}$  existe y es autoadjunto si A lo es. Pongamos ahora

$$T = A^{-1/2} \text{ en (4):}$$

$$(A^{-1/2})^* A A^{-1/2} > 1 \text{ y de ahí } 1 > A^{-1}$$

- b) Sea  $A > B > 0$   
Poniendo  $T = B^{-1/2}$  en (4)  
 $(B^{-1/2})^* A B^{-1/2} > (B^{-1/2})^* B B^{-1/2}$  o bien  
 $B^{-1/2} A B^{-1/2} > 1$

y de 3 a)  
 $(B^{-1/2} A B^{-1/2})^{-1} < 1$  o bien  
 $B^{1/2} A^{-1} B^{1/2} < 1$  es decir  
 $B^{1/2} A^{-1} B^{1/2} < B^{-1/2} B^{-1} B^{-1/2}$ , lo que significa en virtud de 1 g)  $A^{-1} < B^{-1}$

$$\text{En resumen: si } A > B > 0 \quad (5)$$

$$B^{-1} > A^{-1} > 0$$

## 4. Ordenación de los valores propios [2,3]

La idea de usar las propiedades de los párrafos anteriores para obtener desigualdades entre valores propios, se remonta probablemente a Weyl en 1912.

Dados  $A < B$

Si los valores propios de  $A$  y  $B$  son  $a_k$  y  $b_k$  respectivamente, entonces

$$a_k < b_k \quad (6)$$

Demostración.

Como  $a_k$  y  $b_k$  son valores propios

$$A u_k = a_k u_k \quad B v_k = b_k v_k \quad (7)$$

Del principio variacional podremos deducir para el valor propio más pequeño

$$a_1 \leq \langle v_1 | A | v_1 \rangle, \quad b_1 = \langle v_1 | B | v_1 \rangle \quad (8)$$

lo que usando (2) nos da

$$a_1 < b_1$$

Después se considera la función auxiliar  $\varphi_2 = v_1 \beta_1 + v_2 \beta_2$  normalizada y ortogonal con  $v_1$ . Por esta última razón, usando de nuevo el principio variacional

$$a_2 \leq \langle \varphi_2 | A | \varphi_2 \rangle < \langle \varphi_2 | B | \varphi_2 \rangle$$

Pero  $\langle \varphi_2 | B | \varphi_2 \rangle = b_1 |\beta_1|^2 + b_2 |\beta_2|^2 \leq b_2$ ,

ya que por la normalización de  $\varphi_2$  sabemos que  $|\beta_1|^2 + |\beta_2|^2 = 1$  y suponemos  $b_1 < b_2$ .

Es decir  $a_2 < b_2$

Luego se considera  $\varphi_3 = v_1 \beta_1 + v_2 \beta_2 + v_3 \beta_3$ , normalizada y ortogonal a  $u_1$  y  $u_2$  y se llegará a  $a_3 < b_3$  etc.

## 5. Proyecciones interiores

A. Weinstein, N. Aronszajn, N. W. Bazley [2] y posteriormente P.O. Löwdin [3,4], usaron el concepto de proyección interior.

Sea  $A$  un operador autoadjunto definitivamente positivo,  $A > 0$ . Si  $Q$  es un operador de proyección, la expresión  $A^1 = A^{1/2} Q A^{1/2}$  se llama "proyección interior de  $A$  respecto al proyecto  $Q$ ".

Para el operador de proyección "exterior"  $Q$  sabemos que

$$\langle \psi | Q | \psi \rangle = \langle \psi | Q^2 | \psi \rangle = \langle \psi | Q^* Q | \psi \rangle = \langle Q \psi | Q \psi \rangle \geq 0$$

Como esto también vale para el proyecto  $P = 1 - Q$  en el subespacio complemento ortogonal, resulta

$$0 \leq Q \leq 1 \quad (10)$$

Esto significa que, según (4) con  $T = A^{1/2}$  y  $T^* = A^{1/2}$

$$0 \leq A^{1/2} Q A^{1/2} \leq A \quad (11)$$

Las ecuaciones (6) y (11) son el fundamento de varios métodos para fijar cotas inferiores a los valores propios, algunos de los cuales describiremos abajo. Pero antes veamos algunas formas alternativas del operador  $A^1$ :

Sea pues un conjunto de estado que determinan un sub-espacio

$$\underline{f} = \{ f_1, f_2, \dots, f_n \} \quad (12)$$

Este conjunto posee una matriz

$$\underline{\Delta} = \langle \underline{f} | \underline{f} \rangle \text{ con elementos } \Delta_{k_1} = \langle f_{k_1} | f_{k_1} \rangle$$

Sea un vector  $g$  que descomponemos en uno  $g_f$ , contenido en el sub-espacio (12) y otro  $g_l$ , perpendicular al 1o.

Hagamos  $g_f = \underline{f} \underline{c}$ , donde  $\underline{f}$  es la matriz fila con los elementos  $f^*_1, \dots, f^*_n$  y  $\underline{c}$  la matriz columna de los coeficientes del desarrollo de  $g_f$  por medio de los  $f$

$$\text{Entonces } \langle \underline{f} | g \rangle = \langle \underline{f} | \underline{f} \rangle \underline{c} + \langle \underline{f} | g_l \rangle = \underline{\Delta} \underline{c}$$

$$\text{así que } \underline{c} = \underline{\Delta}^{-1} \langle \underline{f} | g \rangle \text{ y } g_f = \underline{f} \underline{\Delta}^{-1} \langle \underline{f} | g \rangle$$

$$\text{Entonces el operador } Q = \underline{f} \underline{\Delta}^{-1} \langle \underline{f} | \text{ (con la condición } Qg = \underline{f} \underline{\Delta}^{-1} \langle \underline{f} | g \rangle = g_f)$$

cumple los requisitos para ser el proyector sobre el sub-espacio dado. Entonces, en la expresión de la proyección interior,

$$A^1 = A^{1/2} \underline{f} \langle \underline{f} | \underline{f} \rangle^{-1} \langle \underline{f} | A^{1/2} \quad (13)$$

podemos hacer varias substituciones:

$$\begin{aligned} \text{a) } \underline{f} &= A^{1/2} \underline{g} \\ \text{con lo cual } A^1 &= A | \underline{g} \rangle \underline{\Delta}^{-1} \langle \underline{g} | A \\ \text{donde } \underline{\Delta} &= \langle \underline{g} | A | \underline{g} \rangle \end{aligned} \quad (14)$$

$$\text{b) } \underline{f} = A^{-1/2} \underline{h}$$

$$A^1 = | \underline{h} \rangle \underline{\Delta}^{-1} \langle \underline{h} | \text{ donde } \underline{\Delta} = \langle \underline{h} | A^{-1} | \underline{h} \rangle \quad (15)$$

Estas formas se usan en los métodos que describo en el párrafo siguiente.

## 6. Método de los hamiltonianos intermedios [2, 5]

Este método sirve para encontrar cotas inferiores de los valores propios. Los métodos variacionales nos permiten encontrar cotas superiores, pero como observan Bazley y Fax [2] sin cotas inferiores no es posible una estimación sobre la exactitud del cálculo.

La ecuación de valores propios para el hamiltoniano completo es

$$H \psi_i = E_i \psi_i \quad (16)$$

Supongamos que hemos ordenado esos valores propios

$$E_1 \leq E_2 \leq \dots$$

Los valores degenerados aparecen un número de veces igual a su multiplicidad.

Supongamos también que el Hamiltoniano  $H$  se puede escribir

$$H = H^0 + H^1 \quad (17)$$

Donde  $H^1$  es definitivamente positivo pero no necesariamente pequeño.

El problema de valores propios para  $H^0$  se supone resuelto

$$H^0 \psi_i^0 = E_i \psi_i^0 \quad (18)$$

y los respectivos niveles de energía los suponemos ordenados

$$E_1^0 \leq E_2^0 \leq \dots$$

y que además suponemos están abajo del espectro continuo. En virtud de (6), como  $H^0 \leq H$ ,

$$E_1^0 \leq E_1 \quad (19)$$

Así que los valores propios de  $H^0$  producen un acotamiento por debajo (bastante impreciso) de los valores propios de  $H$ .

El método consiste en elegir un conjunto de "Hamiltonianos intermedios"  $H^k$ , tales que

$$H^0 \leq H^k \leq H^{k+1} \leq H$$

Los valores propios de estos Hamiltonianos intermedios están situados entre los  $E_i$  y los  $E_i^0$ .

Definimos los Hamiltonianos intermedios

$$H^k = H^0 + H^1 P^k$$

siendo  $P^k$  un proyector sobre un cierto subespacio de dimensión  $k$ , que luego determinamos de la manera más conveniente. El operador  $P^k$  se puede poner

$$P^k = |g\rangle \langle g| H^1 |g\rangle^{-1} \langle g| H^1$$

(verifíquese que  $P^k = (P^k)^2$ )

$$\text{Entonces } H^1 P^k = H^1 |g\rangle \langle g| H^1 |g\rangle^{-1} \langle g| H^1 \quad (20)$$

que es de la forma (14) para la proyección interna y  $H^1 P^k < H^1$ .

El problema de valores propios se plantea así:

$$\begin{aligned} H^k \psi_i^1 &= (H^0 + H^1 P^k) \psi_i^1 = E_i^k \psi_i^1 \\ \text{o sea } (E_i^k - H^0) \psi_i^1 &= H^1 P^k \psi_i^1 \\ \text{o bien } \psi_i^1 &= (E_i^k - H^0)^{-1} H^1 P^k \psi_i^1 \end{aligned} \quad (21)$$

De (20) y (21)

$$|\psi_i^1\rangle = (E_i^k - H^0)^{-1} H^1 |g\rangle \underline{a} \quad \text{donde}$$

$$\underline{a} = \langle g| H^1 |g\rangle^{-1} \langle g| H^1 |\psi_i^1\rangle.$$

Multiplicado por la izquierda por

$$\langle g| H^1 |g\rangle^{-1} \langle g| H^1,$$

$$\underline{a} = \langle g| H^1 |g\rangle^{-1} \langle g| H^1 (E_i^k - H^0)^{-1} H^1 |g\rangle \underline{a},$$

o bien

$$\{ \langle g| H^1 |g\rangle - \langle g| H^1 (E_i^k - H^0)^{-1} H^1 |g\rangle \} \underline{a} = 0.$$

Como  $\underline{a} \neq 0$

$$\det [ \langle g| H^1 - H^1 (E_i^k - H^0)^{-1} H^1 |g\rangle ] = 0,$$

Ecuación secular del problema de donde salen los  $E_i^k$ .

## 7. Aproximación de Padé [6,7]

Esta aproximación que Padé sugirió desde el siglo pasado, se puede estudiar con ayuda del operador de proyección interna.

Veamos primero cuál fue la idea de Padé. Sea una función  $j(z)$  que admite un desarrollo en serie

$$j(z) = \sum_{l=0}^{\infty} a_l z^l. \quad (22)$$

Se llama "aproximante de Padé"  $[N, M]$  de esta función el cociente de dos polinomios  $P(z)$  y  $Q(z)$  de grados  $M$  y  $N$  respectivamente,

$$[N, M] = \frac{P(z)}{Q(z)} \sim j(z) \quad (23)$$

con  $Q(0) = 1$ .

Se demuestra que se puede elegir  $[N, M]$  de manera que coincida con  $j(z)$  hasta la potencia  $M + N$ .

El reemplazar la serie original por el aproximante es muy ventajoso cuando dicha serie converge muy lentamente o no converge en absoluto. En el caso de desarrollo en serie de operadores, esta sustitución conserva la unitariedad.

En las referencias [6] y [7] se muestra cómo se puede expresar  $[N, M]$  como un producto de determinantes.

Las condiciones de convergencia de  $[N, M]$  al crecer  $N$  y  $M$  son muy bien conocidas cuando (22) es una serie de Stieljes

$$f(-z) = g(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j (-z)^j, \quad (24)$$

donde los coeficientes  $a_j$  son los momentos de una distribución,

$$a_j = \int_0^{\infty} u^j d\varphi(u).$$

$\varphi(u)$  es una función acotada no decreciente.

Para usar el método de las proyecciones internas se introduce un operador  $R$  no negativo y se aplican las fórmulas (11) y (15)

$$R \geq |h\rangle \langle h| R^{-1} |h\rangle^{-1} \langle h| \quad (25)$$

$$\text{Luego se hace } R = R(z) = (1 + z A)^{-1} \quad (26)$$

Consideremos una propiedad física dada por

$$g(z) = \langle \psi | R(z) | \psi \rangle. \quad (27)$$

Desarrollando el denominador de  $R$

$$g(z) = \sum (-z)^l \langle \psi | A^l | \psi \rangle. \quad (28)$$

Entonces  $\langle \psi | A^l | \psi \rangle$  corresponde al  $a_l$  de (22).

En el operador de la proyección interior (15) es cogemos

$$|h_1\rangle = A^{l-1} | \psi \rangle$$



y usando (25) se llega a

$$[N, N] \geq g(z) \geq [N, N-1], \quad (29)$$

propiedad que se puede deducir también [6, 7] por manipulación de los determinantes.

La aproximación de Padé se ha utilizado entre otras muchas cosas, para el caso de los desarrollos en serie que aparecen en la teoría de perturbaciones, donde los aproximantes  $[N, N]$  y  $[N, N-1]$  sirven de cota superior e inferior respectivamente [8]. Análoga situación se presenta en el desarrollo de polarizabilidades por medio de los momentos.

#### 8. Método de Partición [4, 5]

En el método de los Hamiltonianos intermedios, en general se requiere ordenar los valores propios de los Hamiltonianos  $H^0$  y  $H^k$ , lo que en general presupone que se hayan determinado todos esos valores propios. Con el objeto de evitar ese problema, P.O. Löwdin [4,5], propuso como alternativa la introducción de una función de "bracketing"  $\xi = f(\mathcal{E})$  donde  $\mathcal{E}$  es una función que se extiende sobre todo el plano complejo. Tal función cumple la condición de que entre  $\mathcal{E}$  y  $\xi$  se halla siempre un valor propio de  $H$ . El autor de este último método sostiene también que en él se atenúan las dificultades que se han presentado en el método de los Hamiltonianos intermedios para introducir adecuadamente las contribuciones de la parte continua de  $H^0$ .

Para todos esos fines, se introduce el "operador resolvente reducido"

$$T = (\mathcal{E} - PHP)^{-1} P$$

siendo  $P$  un operador de proyección.

En el caso de una perturbación  $V$  definitivamente positiva

$$H = H^0 + V$$

se tiene, según se demuestra en los artículos originales

$$\xi_1 = E_0 + \langle \varphi_0 | t | \varphi_0 \rangle$$

$t$  es el "operador de reacción"

$$t = V + VTV = (1 - V R_0)^{-1} V$$

$$\text{Si } T_0 = (\mathcal{E} - PH_0P)^{-1} P$$

$E_0$  y  $|\varphi_0\rangle$  son un valor propio y un ket propio de  $H^0$ .

También se demuestra  $t^{-1} = V^{-1} - T_0$ .

Además, de las propiedades de las desigualdades entre operadores sale  $\xi < E_1^0$ , siendo  $E_1^0$  la energía del estado fundamental.

$$T_0 < 0$$

$$t^{-1} > V^{-1} > 0$$

$$\text{o bien } 0 < t < V$$

Luego aplicando el concepto de proyección interior, se logran límites inferiores más precisos para  $t$ .

Esta teoría tiene como casos particulares las teorías de perturbaciones tipo Brillouin y tipo Schrödinger.

En la referencia [4] se indica dónde se describen algunas aplicaciones de este método.

#### BIBLIOGRAFIA

- [1] Las demostraciones de estos dos párrafos se dan en los libros de análisis funcional como F. Riesz & B. Sz. — Nagy. Functional Analysis. New York. Ungan Publ. Las demostraciones de 1-g) y 1-f) están en [4].
- [2] N.W. Bazley. Phys. Rev. 120, 144 (1960)  
N.W. Bazley, D.W. Fox. Phys. Rev. 124, 433 (1962).
- [3] P.O. Löwdin. Phys. Rev. 139, A 357 (1965).
- [4] P.O. Löwdin. Intern. J. Quantum Chem. II, 867 (1968).
- [5] P.O. Löwdin J. Chem. Phys. 43, 10, Suppl. (1965).
- [6] The Padé Approximant in Theoretical Physics. Ed. G.A. Baker and Y.L. Gammel. Academic Press. (N.Y.).
- [7] O. Goscinski, E. Brändas. Intern. J. Quantum Chem. V, 131, (1971).
- [8] E. Brändas y O. Goscinski. Phys. Rev. A1. 552 (1970).
- [9] O. Goscinski. Intern. J. Quantum Chem. II, 761 (1968).

# LA QUIMICA ANALITICA: CIENCIA, DISCIPLINA Y HERRAMIENTA DE TRABAJO PARA EL QUIMICO

*Inés Bernal de Ramírez \**

*Departamento de Química  
Universidad Nacional de Colombia*

## **INTRODUCCION-ALQUIMIA\*\***

La Química Analítica es el conocimiento de la caracterización de las sustancias y por esta razón es la rama de la ciencia que se ocupa de las reacciones químicas, reconociendo las propiedades estructurales de las especies que intervienen en las mismas, sus condiciones de equilibrio y sus mecanismos.

Esta disciplina es el resultado de la curiosidad del hombre por conocer de qué están formadas las cosas y por qué se forman, cuya primera manifestación de la que se tenga noticia sucedió en Grecia cuando el Rey solicitó a Arquímedes la investigación para determinar si la corona que le entregara el orfebre era de puro oro o no. El genio de Arquímedes dio la solución estableciendo el primer método que permite conocer la composición de una sustancia determinando su peso específico. Sin embargo este destello creador fue único en la antigüedad, puesto que el hombre pensaba entonces principalmente en buscarle utilidad a las sustancias de que disponía para asegurarse alimento, vivienda y ciertas comodidades; por esta razón el pensamiento químico de esta época fue principalmente de síntesis obteniéndose como resultado un desarrollo industrial en metalurgia, cerámica, tintorería, cervecería y en el nacimiento de la inquietud sobre sustancias que embellecieran el cuerpo o prolongaran la vida. Este pensamiento reinó durante aproximadamente 15 siglos (Siglo XIII D. de C.).

Durante toda esta época floreció la Alquimia, pensamiento que entretecía una Química rudimentaria con otros extensos dominios de la experiencia humana como eran la religión, el folclore, la mitología, la magia, el misticismo.

Durante el Imperio Romano los conocimientos alquímicos se conservaron principalmente en los países africanos de donde vinieron a Europa con la invasión de los Moros.

El pensamiento analítico durante todo este tiempo fue bastante superficial como lo demuestra un escrito del Codex Germanicum publicado en el Siglo XIII que

prescribía para determinar la pureza del azufre: (1) "Si quieres probar si el azufre es bueno o no, coge un terrón en tu mano y llévatelo al oído. Si chasca en forma que tú lo oigas es bueno, pero si guarda silencio y no chasca no es bueno".

Sin embargo la idea de control por pesada ideada por Arquímedes no se había perdido en el transcurso del tiempo, como lo denota una ilustración de un escrito titulado Ordinal de Alquimia publicado en 1477 en Bristol y en el cual aparece el autor del libro Thomas Norton frente a una balanza protegida por una caja. Este alquimista a diferencia de sus contemporáneos trabajaba con balanza sensible y no al ojo.

Llegamos así hasta la época del Renacimiento a comienzos del siglo XVI, época en la cual las doctrinas tenidas como firmes en la época medieval comenzaron a ser objeto de duda y ataque.

## **IATROQUIMIA\***

Apareció en los primeros años de este siglo el suizo Theophrastus Paracelso (3) llamado a ser el iniciador de una nueva doctrina, la Iatroquimia que surgía de la crítica a la alquimia y a la medicina.

Considerando Paracelso el cuerpo humano como un organismo en el cual sucedían cambios químicos, propuso que en caso de enfermedad, dicho organismo necesita sustancias químicas que le comuniquen sus propiedades para reajustarlo.

Esta doctrina seguramente dio nuevo impulso al pensamiento analítico pues planteó el problema de verificar la potencia, virtudes, posibilidades y eficacia de los medicamentos químicos.

Parece ser que la experimentación en aquella época era de tipo directo. Se lee (1) que Basil Valentin un monje que se preocupaba por estos problemas, por la época de 1608 estaba experimentando con cierta sustancia. "Noticioso de que los cerdos del monasterio aumentaban en grasa luego de devorar los residuos de sus experiencias, introdujo cierta cantidad en la comida de sus desprevénidos hermanos, cuidando de exceptuarse él mismo a modo de control; el efecto sobre sus cofrades fue tan desgraciado que la mágica sustancia acabó por

\*\* Origen posiblemente oriental. Introducida a Europa por los musulmanes.

\* Trabajo presentado el día de su posesión como Miembro Correspondiente de la Academia.

\* Siglo XVI - Siglo XVII.

ser conocida con el nombre de antimonio, es decir, enemigo de los monjes”.

Como aporte positivo de la época de la Iatroquímica se le puede atribuir el mérito de haber mantenido viva la tradición experimental durante los siglos XVI y XVII, dando lugar al descubrimiento de nuevas sustancias.

El principal obstáculo para el desarrollo del pensamiento analítico en esta época fue la rigidez mental heredada de la reciente época de la alquimia. Hasta entonces se podría decir que los que se interesaban en la química eran trabajadores prácticos con escaso interés por la teoría. Sus ideas teóricas se asimilaban fácilmente con las nociones más corrientes. La segunda mitad del siglo XVII marcó el comienzo de una nueva era. En 1675 escribía Nicolás Lémery (1) “La vida del hombre es demasiado corta para intentarlo todo; el hombre piensa solo en lo que le es más necesario y gusta de seguir las rutas trilladas por otros”. Sin embargo Lémery trató de luchar contra esta inercia del pensamiento como queda consignado en su publicación “Curso de Química”, que muestra que su autor era un experimentado diestro y sus indicaciones, consecuencia indudable de su propia labor. Intentó relacionar las propiedades de las sustancias con unas supuestas formas de sus partículas últimas en una especie de teoría atómica, pero reconociendo sus limitaciones en el conocimiento.

Por esta época también apareció la enciclopedia química Opera Omnia publicada por Glauber en Amsterdam en la cual su autor pone de presente las limitaciones existentes para recoger y analizar sustancias gaseosas y hace notar que el problema que ocupaba principalmente el pensamiento químico de entonces era el estudio de la combustión. Así vemos surgir a Robert Boyle (2), (3), (4), (5) Robert Hooke, John Mayow, Tachenius y Sthal.

Boyle fue el primer exponente del sistema filosófico inductivo de Francis Bacon basado en la experimentación, la observación y la medida. Desarrolló algunas ideas razonadas concernientes a las reacciones y propuso algunos métodos sencillos de análisis químico, entre ellos el empleo de ciertos jugos vegetales como indicadores de ácidos, bases y sales. Boyle siempre trabajó en forma planeada y metódica aun cuando no siempre llegó a interpretar correctamente sus observaciones. Fue además un crítico especialmente de los iatroquímicos a quienes les ponía en evidencia la falta de claridad en sus escritos que denotaban la falta de conceptos claros en la teoría. El mayor servicio que Boyle prestó a la Química radicó en el campo de las concepciones teóricas pues luchó en contra de las ideas estancadas en los “elementos” Aristotélicos y de los “principios” Paracélsicos.

Dio la primera definición moderna de “elemento” así: (1) “Entiendo por elemento, ciertos cuerpos primitivos y simples, que no estando formados unos de otros, son los ingredientes de que se componen de modo inmediato los cuerpos y en los cuales se resuelven últimamente”. Simultáneamente Robert Hook y John Mayow estudiaron los fenómenos de la combustión y de la respiración; sin embargo como desconocían la técnica de aislar y manipular gases, sólo pudieron llegar al umbral de la verdad en cuanto a la composición del aire y la naturaleza de la combustión.

En la misma época Tachenius demostró poseer algunos conocimientos de las reacciones químicas y del análisis, entre ellas figuraron “la aplicación de la tintura de las agallas de ciertos pescados como reactivo cualitativo de algunas sales metálicas disueltas” (1).

### FLOGISTO\*\*

A finales del siglo XVII publicó Stahl (6) la teoría del Flogisto, nombre que dio al principio inflamable de los cuerpos combustibles, teoría basada en una observación superficial del fenómeno de la combustión y que confundía la combustibilidad, es decir, una propiedad, con una sustancia material hipotética. Esta teoría ignoraba dos hechos bien establecidos para entonces: 1o.- Que los metales aumentaban el peso al arder, y 2o.- Que un volumen de aire confinado se contrae en vez de expandirse, al hacer arder un cuerpo en su seno. Esta teoría coordinó cierto número de observaciones que de otra forma habrían permanecido inconexas, pero los descubrimientos experimentales de importancia realizados en aquel período, lo fueron a pesar de la teoría más que por su causa. Sin embargo, la teoría fue aceptada porque no existía en ese momento ninguna otra, aún por el químico que se distinguió en esta época, Herman Boerhaave, quien a pesar de que en sus escritos nunca mencionó el flogisto, dejó entrever que en su mente existía tal confusión (1).

Tal error no podía persistir por mucho tiempo y así sucedió que a mediados del siglo XVIII Joseph Black quien se consideraba médico, adelantó estudios sobre sustancias que pudieran disolver los cálculos urinarios. Con este fin examinó la “magnesia alba” (Carbonato básico de magnesio) descubriendo que producía efervescencia con los ácidos y que por ignición se convertía en un polvo blanco que ya no presentaba dicha propiedad y que había perdido siete doceavos de su peso original. Black demostró que esta pérdida se debía a un gas que se había separado del material al calcinarlo y al que denominó “aire-fijo”. Una vez más el conocimiento analítico surge para impulsar a la Química una nueva era y destruir la maraña de errores que la tenían frenada. Este experimento realizado en 1754 le permitió, además, conocer al autor, que el aire fijo formado por la calcinación de la magnesia era el mismo que se formaba por la combustión del carbón vegetal; Priestley (7) propuso por la misma época una nueva técnica a la que llamó química neumática, la cual al ser aprovechada junto con los experimentos de Black condujeron al descubrimiento de otros gases y a comprobar el carácter del agua como cuerpo compuesto.

Boyle había sembrado la inquietud sobre qué sustancias se consideraban compuestas y cuáles elementales; esta inquietud empezó entonces a dirigir los pasos de la curiosidad humana que a la vez perseguía el conocimiento de cómo sucedían las transformaciones químicas.

Apareció entonces en el panorama químico el sueco Sheel, dedicado a la farmacia, quien hizo numerosas experiencias originales con multitud de sustancias para determinarles sus propiedades. Sin embargo, su trabajo

\*\* Finales Siglo XVII - Principios Siglo XVIII.

fue de tipo cualitativo en contraste con el que estaba desarrollando su contemporáneo Black.

En Inglaterra también se trabajaba especialmente sobre el mismo problema: Joseph Priestley investigaba cualitativamente sobre "diferentes clases de aire" y Cavendish, por el contrario, gran exponente del trabajo cuantitativo fino y exacto, logró establecer la diferencia entre el "aire fijo" y el "aire inflamable" estableciendo su peso específico. Además, halló que la explosión de una mezcla de dos volúmenes del llamado "aire inflamable" con una de "aire desflogistizado" conduce a la formación de agua comprobando así que el agua era un compuesto de hidrógeno y oxígeno. Con su metódica forma de trabajar logró notar el proceso de fijación del nitrógeno atmosférico y el de producción de ácido nítrico. Además determinó los pesos relativos de potasio y calcio necesarios para neutralizar pesos idénticos de un ácido y le dio el nombre de pesos equivalentes.

Sin embargo, el gigante de esta época podría decirse que fue Lavoisier (8), (9) "el cual nunca concebió a la especulación nada que pudiera decidir el experimento, prestando constante atención al aspecto cuantitativo en sus experiencias" (1). Sus numerosos experimentos sobre calcinación y combustión lo llevaron al conocimiento irrefutable de que la supuesta pérdida del flogisto era en realidad la combinación con un constituyente gaseoso y activo de la atmósfera al que dio el nombre de oxígeno.

## **CIENCIA QUIMICA - INORGANICA** **Estequiometría\*\***

En un tratado publicado en 1789 afirmó Lavoisier (1) "se puede sentar en principio que en toda operación existe igual cantidad de materia antes y después de ella; que la cualidad y cantidad de los principios es la misma y que sólo existen cambios y modificaciones. Sobre este principio se funda todo el arte de hacer experiencias químicas". Desde este momento la Química Inorgánica adquiere el carácter de ciencia exacta.

A finales del siglo, Richter (10) y Proust formulan por primera vez las leyes que sientan las bases de la estequiometría. Son ellas la "Ley de las Proporciones Recíprocas", "mediante la cual se fijan las proporciones ponderables exactas para neutralizar una serie de ácidos por otra de bases", (1) propuesta por Richter y 5 años más tarde en 1799 Proust enunció la "ley de las Proporciones Constantes" la cual dice que un mismo compuesto contiene siempre los mismos elementos combinados en las mismas proporciones ponderables" (1).

Estas leyes abrieron un nuevo horizonte a la Química Analítica y le infundieron el espíritu que permitió su inmenso desarrollo en el siglo XIX. Empero a los químicos en esta época les preocuparon principalmente dos problemas: hallar una clasificación de los elementos conocidos y por otra parte establecer una nomenclatura común.

Respecto a las leyes recién establecidas, John Dalton (11) aplicó en 1801 la concepción atómica propuesta por Newton en 1642 en apoyo de su propia observación de las presiones ejercidas por los gases. Llegó a explicar

según su teoría, "que los átomos simples de un elemento determinado son perfectamente semejantes entre sí en peso y figura; no pueden crearse ni destruirse y se pueden unir con otros átomos simples en proporciones sencillas para formar moléculas" (1).

La teoría de la combustión de Lavoisier y la teoría atómica de la constitución de la materia de Dalton son los dos pilares sobre los que se ha construido toda la teoría de la Química actual.

El desarrollo de la Química Analítica en el transcurso del siglo XIX es tan abundante en descubrimientos y el número de investigadores es tan grande que no es posible tratar con detenimiento cada una de las distintas personalidades, dentro del marco reducido de este resumen histórico. Trataré de presentar únicamente un esbozo de ese inmenso trabajo.

En relación con el problema de clasificación de los elementos según sus propiedades, podemos recordar en primera instancia a Döbereiner (12) quien estableció triadas de elementos en las cuales el elemento intermedio poseía propiedades analíticas también intermedias entre los dos extremos. Posteriormente Newland (13) en 1863 indicó "que si se ordenaran los elementos conocidos en el orden creciente de sus pesos atómicos se da el caso de que varios elementos presentan propiedades similares a los de otros situados siete lugares antes o después de ellos".

Pocos años más tarde, en 1869 el químico ruso Mendeleeff (14), (15), (16) elaboró la misma idea y estableció el famoso sistema periódico de clasificación de los elementos. Acentuó la importancia de la periodicidad en las propiedades y explicó las discrepancias existentes suponiendo lugares vacíos aún, debido a la ausencia de elementos existentes en la naturaleza pero aún no descubiertos. Este sistema periódico de los elementos ha sido perfeccionado y completado posteriormente y se ha conservado como la mejor clasificación general.

En cuanto a nomenclatura, en 1787 fue publicado un nuevo sistema elaborado por los químicos franceses (1) Lavoisier, De Morveau, Berthollet (17) y Fourcroy los cuales vertían al francés los textos latinos y daban denominaciones precisas a algunos compuestos, tales como óxido de plomo, sulfato de barita, ácido sulfúrico; estas denominaciones fueron aceptadas y traducidas a otros idiomas.

Sin embargo, a principios del siglo, Dalton, siguiendo aún la línea de la costumbre alquímica, representó los elementos y los compuestos con símbolos, pero con una diferencia importante: Cada símbolo alquímico representaba una sustancia dada en cantidad indefinida, mientras que los símbolos de Dalton vinieron a representar un átomo simple, o un átomo compuesto (molécula) de dicha sustancia.

Berzelius (18), (28), sustituyó más tarde los símbolos de Dalton por letras, cada una de las cuales sirvió para representar el átomo y desarrolló el simbolismo que permite al químico interpretar en forma sencilla y exacta las transformaciones, sobre todo con las ecuaciones.

Al mismo tiempo que se ventilaban estos asuntos de interés general, los métodos de investigación analítica fundamentados en las leyes recientemente aceptadas ad-

\*\*Finales Siglo XVIII.

quirieron un impulso tal, que prácticamente todo el conocimiento actual en lo que llamamos analítica clásica se lo debemos a este siglo. Tanto la química inorgánica como la naciente Química Orgánica sufrieron este influjo.

A comienzos del siglo se distinguió por sus trabajos en Química Analítica Mineral, Martín Heinrich Klaproth (26), (19), (20), quien perfeccionó la desintegración de los silicatos mediante la fusión con potasa en crisol de plata. Introdujo la desecación y calcinación cuidadosa de los precipitados y la costumbre de dar no solamente los resultados finales de los análisis, sino también las pesadas parciales de los precipitados obtenidos. Con esta manera cuidadosa de operar, tuvo la fortuna de hallar una serie de sustancias fundamentales hasta entonces desconocidas.

Klaproth tuvo como alumno y colaborador directo a Berzelius (24) quien desplegó gran destreza en el análisis cuantitativo tanto inorgánico como orgánico, además de su gran aporte a la nomenclatura. Compuso además un escrito en 1835 sobre los fenómenos enigmáticos de aceleración de procesos químicos por presencia de sustancias en cantidades pequeñas y las cuales aparentemente no participaban en el proceso. A dicho fenómeno le llamó "catálisis".

#### **CIENCIA QUIMICA ORGANICA\*\***

"En 1831 Liebig (21) introdujo métodos experimentales adecuados para determinar la composición porcentual exacta de gran número de sustancias orgánicas y gracias a éste la química orgánica adquirió su carácter de ciencia exacta" (1).

"En 1832 Wohler (22) y Liebig publicaron un estudio en el cual demuestran la existencia de asociaciones comunes de átomos, que llamaron radicales y que podían permanecer inalterados a lo largo de una serie de transformaciones provocadas por medios químicos, en las restantes partes de las moléculas que los contenían" (1).

En 1852 Edward Frankland propuso la teoría de la valencia que designa a cada átomo una cierta capacidad de combinación con los demás átomos, expresable por un número determinado. En este mismo año Kekulé (23) llevó adelante su teoría fundamental sobre la estructura molecular de los compuestos orgánicos. Estableció la tetravalencia del átomo de carbono y la capacidad de este átomo para unirse con otros iguales y formar cadenas.

Casualmente en el mismo año otro químico, Archibald Scott Couper expresaba las mismas ideas en una revista francesa.

#### **ESTEREOQUIMICA**

Los conocimientos físicos empezaron a utilizarse entonces para analizar materiales. El primer experimento de que se tiene noticia fue aquel llevado a cabo por Pasteur en 1848, quien por aplicación de luz polarizada sobre sales de ácido tartárico pudo determinar que en una sola sustancia pueden presentarse dos formas cristalinas que son entre sí como un objeto y su imagen, imposibles de hacer coincidir. A este fenómeno se le dio el nombre

de isomería óptica y fue el comienzo de la estereoquímica.

Empezó entonces una época de síntesis de sustancias nuevas, especialmente aquellas de aplicación útil, época que aún se está viviendo, pero en la cual el pensamiento analítico siempre sigue o antecede al sintético.

El inglés Michael Faraday aportó en este tiempo toda su experiencia al desarrollo de la electroquímica y de los métodos de investigación cuantitativos. Sus leyes sobre la electrólisis publicadas en 1834 fueron muy importantes para el desarrollo ulterior de la Química. Además fijó la nomenclatura de los procesos eléctricos que ha llegado hasta nosotros.

Bunsen (25) quien fue un gran investigador en Química Analítica, estableció en 1859 un nuevo método analítico, el análisis espectral, aprovechando el mechero de gas de su invención. En este empeño le colaboró Gustav Kirchhoff logrando establecer su utilidad para determinar cantidades pequeñísimas de sustancias que por los medios ordinarios no hubieran podido reconocerse lo que condujo al descubrimiento de nuevos elementos y al desarrollo del análisis de indicios.

Averiguó además, la composición del sol y de las "estrellas fijas" lo que hasta entonces se consideraba imposible.

#### **FISICOQUIMICA\*\***

En 1867 Maximilian Guldberg y Peter Waage (26), (27), formulan la ley de acción de masas, fundamento para el cálculo de los equilibrios químicos. Nombres familiares para todo químico son los de Fehling, Liebig (28), Kjeldahl (9), Mohr, Volhard, Nessler, pues todos ellos propusieron diferentes métodos que en el presente son usados como los establecieron en el siglo pasado con ligeras modificaciones. Otros autores tal vez son menos conocidos, es el caso de Frédéric Margueritte (29), quien descubre por primera vez una técnica basada en oxidación reducción, la determinación de hierro con permanganato de potasio, y Frederick Penny quien utiliza para el mismo fin el dicromato de potasio, perfeccionando así la teoría propuesta por Mhor.

Además de métodos idearon la forma del material de vidrio apropiado para cada operación y construyeron la mentalidad de lo que es hoy un laboratorio de análisis químico.

Y así llegamos al umbral del siglo XX, comprobando que gran parte de la historia de la ciencia química, es la historia del continuo perfeccionamiento de los métodos analíticos, a la luz de todas las leyes que se han logrado establecer sobre el comportamiento de las sustancias químicas.

#### **MICROANALISIS**

Comienza a preocupar principalmente el análisis de pequeñas cantidades de sustancia, la determinación cuantitativa de los elementos en indicios y la estructura interna de las sustancias. Denigés (30) inicia el estudio para la determinación de trazas de fosfatos y arseniatos; junto al perfeccionamiento de las técnicas analíticas es-

\*\* 1831.

\*\* Finales Siglo XIX.

tablecidas, el austriaco Fritz Pregl trató de encontrar la forma de aplicar estos métodos cuando se cuenta con una muestra muy pequeña. Por los resultados alcanzados en el establecimiento del microanálisis orgánico se hizo acreedor al premio Nobel de Química en 1923.

### **MÉTODOS FÍSICOS**

El amplio desarrollo de la ciencia física, especialmente en los campos de la óptica, la electricidad y la electrónica han sido de una ayuda enorme en el campo del análisis químico.

Haré un recuento breve de los adelantos con que contamos en el presente (31):

En 1704 Isaac Newton anotó que un rayo de luz blanca se puede dispersar en rayos de luz de diversos colores por medio de un prisma. En 1800 Sir William Herschel descubrió que el espectro del sol se extendía más allá del rojo y en 1835 Melloni estudió el espectro infrarrojo.

Estos estudios a los que se les dio el nombre de Análisis Espectral o Espectroscopía se iniciaron para descubrir las características de las radiaciones luminosas, pero pronto se revelaron como métodos excelentes de análisis químico desde el tiempo de Bunsen (32) cuando se establecieron las interacciones entre la luz y la materia.

Así se ha podido establecer que la absorción de la radiación ultravioleta y visible es conveniente tanto para análisis de sustancias orgánicas como de inorgánicas. La radiación en esta región es de suficiente energía para causar transiciones de electrones de valencia o exteriores. Las bandas de absorción que se obtienen en este análisis son ideales para medidas cuantitativas, pero su aplicación está restringida a un número limitado de grupos funcionales llamados cromóforos. Este es un perfeccionamiento del método colorimétrico que fue propuesto por Nessler.

La absorción de la radiación infrarroja se usa principalmente en la identificación de compuestos orgánicos ya que la frecuencia de esta radiación iguala a la frecuencia de las vibraciones rotatorias y de deformación de las moléculas como son las de tijeras, oscilación, sacudida y torción.

Coblentz, del United States Bureau of Standards, construyó a principios de siglo el primer espectrógrafo infrarrojo y en 1919 Randall e Imes de la Universidad de Michigan obtuvieron el primer espectro que revelaba estructura rotacional. En 1935 quedó establecido el método como herramienta de análisis para aplicaciones industriales.

La espectrografía de masa que fue ideada por Aston en 1910, permite medir la masa atómica de los elementos que constituyen una sustancia, obteniendo el espectro de masa de dicho compuesto. Su utilidad reside en la posibilidad de separar los isótopos de los elementos, resolviendo así la incógnita surgida al examinar muestras de un mismo elemento, pero provenientes de diferentes fuentes geológicas y que mostraban distintos pesos atómicos, lo que permitía obtener fracciones de diferente densidad. Los pioneros de esta investigación fueron T.W. Richards y sus colaboradores en Harvard (33).

Muchos sistemas químicos son fotoluminiscentes, es decir, pueden ser excitados por radiación electromagnética (*U.V.*, ó *R.X.*) como consecuencia vuelven a emitir radiación de la misma longitud de onda o de una longitud de onda modificada. Si el proceso luminescente cesa casi inmediatamente después de suspender la radiación se trata de fluorescencia. En base a esta propiedad descubierta por Röntgen, se desarrolló el método de fluorimetría por los años de 1955. Su uso es limitado, a pesar de ser un método muy sensible, debido al número relativamente pequeño de sustancias que presentan esta propiedad.

La radiación luminosa se dispersa al atravesar un medio transparente que contenga una segunda fase formada por partículas. Esta propiedad ha sido aprovechada para desarrollar dos métodos, la turbidimetría y la nefelometría muy utilizados en análisis de control de aguas.

En 1928, el físico hindú Ráman, descubrió además que en determinadas circunstancias, la longitud de onda de parte de la radiación dispersada por moléculas difiere de la del haz incidente y además que este cambio dependía de la estructura química de la molécula. La espectroscopía Ráman es ahora un útil instrumento para ciertos análisis cuantitativos, y tiene su principal aplicación en estudios estructurales de sistemas orgánicos e inorgánicos.

En 1955 Walsh y Alkemade propusieron en Estados Unidos el estudio de la absorción de energía radiante *U.V.* y visible por átomos neutros en estado gaseoso; así nace el método de absorción atómica de amplio uso en el análisis de elementos metálicos.

En 1969 se estudió la acción de la radiación de radio frecuencia sobre los núcleos que pueden dividirse según sus propiedades magnéticas, dando comienzo al útil método de Resonancia Magnética Nuclear, usado para la determinación de la estructura de especies orgánicas e inorgánicas.

Cuando la radiación de microondas es absorbida por los electrones en un campo magnético, proporciona también información estructural. A este método se le denomina Resonancia Giratoria Electrónica.

### **MÉTODOS QUÍMICOS**

A pesar del auge despertado por la utilización de métodos físicos, la investigación en métodos químicos no se ha dejado de lado pues es innegable que para microanálisis, son éstos los más importantes.

El análisis volumétrico ha tenido dos principales aportes como son: La introducción de acomplejantes y la utilización de solventes no acuosos.

La molécula del ácido etilen diamino tetracético, por su propiedad acomplejante revolucionó las técnicas analíticas de los iones metálicos hacia 1946. El primer trabajo cuantitativo presentado por Schwarzenbach (34) fue la determinación de calcio y magnesio, procedimiento que fue rápidamente adoptado para la determinación de la dureza del agua. Desde entonces la aplicabilidad de esta titulación ha sido extendida a la determinación de aproximadamente 50 elementos.

Otra modalidad muy utilizada actualmente es la valoración de ácidos y bases en solventes no acuosos tales como el etanol y el ácido acético glacial.

Con la obtención de nuevas sustancias por síntesis el campo de la analítica se amplía cada vez más. Es el caso de la tioacetamida, compuesto orgánico que al hidrolizarse deja en libertad gas sulfhídrico y que actualmente se está estudiando por la posibilidad de su utilización en el campo cuantitativo, para reemplazar el incómodo método clásico del burbujeo.

Con el avance en los conocimientos de las propiedades de las sustancias han surgido métodos tales como la cromatografía en la cual se aprovechan los fenómenos de adsorbtividad, capilaridad y solubilidad en sus distintas modalidades, para separar sustancias en cantidades pequeñísimas. Su aplicación en química orgánica y en fitoquímica es muy importante en la actualidad (35).

Para no alargarme más voy a omitir algunos métodos fisicoquímicos para nombrar finalmente como último desarrollo en el tiempo, el análisis por activación que se basa en el hecho de que cuando se bombardean con neutrones los átomos de un elemento, éste se vuelve radiactivo con un tiempo de vida media característico, que medido, puede darnos la respuesta analítica deseada. La cantidad de material empleado en este tipo de análisis es del orden de la diezmillonésima de gramo y día a día se impone en el campo de la Bioquímica.

## EN COLOMBIA

### *Precursores*

En el siglo XVII las Sociedades Científicas Europeas (36) tenían fijos sus ojos en América y se tiene noticia de varias expediciones organizadas para efectuar el inventario de los recursos de estas regiones. A la Nueva Granada vino don Antonio Ulloa (1716-1795), español, quien a su regreso a España en 1748 llevó platino y comprobó que se trataba de un cuerpo simple mediante los conocimientos analíticos con que contaba.

Posteriormente vino el vasco Juan José D. Elhuyar (1754-1796) quien a solicitud de D. José Celestino Mutis, organizó los trabajos de minería y la capacitación de personal en esta rama, en un sitio cercano a Mariquita (Tolima).

El primer laboratorio químico organizado con fines didácticos de que se tenga noticia fue traído al país por Don Jorge Tadeo Lozano (1771-1816) quien estudio química en Madrid y estableció la cátedra en el Colegio Mayor de Nuestra Señora del Rosario. En este colegio le sucedieron en la cátedra de Química Ezequiel Uricoechea (1834-1880) y Liborio Zerda (1830-1919) y en 1858 Vicente Restrepo (1837-1899) quien había estudiado química y mineralogía en París, estableció en Medellín un laboratorio para fundir y ensayar metales.

En los lapsos de las guerras de la Independencia y posteriormente a finales del siglo con motivo de la guerra civil, los estudios elementales de química fueron suspendidos en el nivel de bachillerato; en 1919 Antonio Ma. Barriga Villalba, quien fue discípulo y luego sucesor en la cátedra de Liborio Zerda, logró que estos estudios se reanudaran oficialmente en el programa de secundaria.

En los comienzos del siglo se distinguieron como catedráticos en Química a nivel universitario Francisco Montoya (1850-1922) y Eduardo Lleras Codazzi (1885-1960).

El doctor Montoya cursó carrera de Medicina en la Universidad Nacional, encargándose posteriormente de la cátedra de Química Orgánica. Su interés científico lo llevó a reunir una colección de minerales que se conservó en el Museo de la Salle hasta el 9 de abril de 1948.

El doctor Lleras Codazzi comenzó a trabajar en 1909 como "ensayador" en el Laboratorio Municipal de Bogotá y luego ascendió en 1914 a Químico Toxicólogo; como tal pasó a dirigir el Instituto de Medicina Legal, en donde se constituyó en una autoridad en la materia; dictó durante varios años la cátedra de Química en la Escuela de Cerámica del Colegio Mayor de Cundinamarca y en la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional iniciando a sus alumnos en los rudimentos analíticos.

La Química Analítica es ahora instrumento de trabajo en prácticamente todos los campos de la ciencia. Su influjo en la medicina, la geología, la metalurgia y las tecnologías en general hace de su estudio materia obligada a todos los estudiantes de estas disciplinas.

El estudio de esta materia en nuestro país como campo profesional es relativamente reciente como consecuencia de las circunstancias de nuestro desarrollo; se inició con la llegada del doctor Jorge Ancisar Sordo a la Universidad Nacional, quien viniendo doctorado en Química de Europa, logró interesar a las directivas en tan importante materia.

La primera cátedra de Análisis Cualitativo se dictó como curso regular en la Escuela de Farmacia en el año de 1933, incluyendo los principios básicos como el uso del soplete y la marcha sulfhídrica. Posteriormente se amplió a la cátedra de análisis cuantitativo, y más recientemente aún, por los años 60 se empezaron a conocer los métodos instrumentales. Este desarrollo ha sido acorde a las necesidades del país, puesto que el desarrollo industrial solo se empezó en la década de los 30, y si inicialmente los industriales no le dieron mayor importancia al análisis químico en sus factorías, con el desarrollo posterior que ha impuesto la calidad del producto como factor de precio, el análisis químico ha venido a ser un instrumento importante en el proceso económico del comercio interior y exterior.

Esta necesidad ha impulsado la creación de nuevas cátedras dentro del pensum de formación del Químico como son los Análisis Aplicados, en los cuales se familiariza el futuro profesional en el manejo de las normas internacionales de análisis, y la interpretación de sus resultados en función de la calidad del producto.

### *Laboratorios Actuales*

La amplitud de aplicaciones de este conocimiento y sus necesidades en la sociedad colombiana se hicieron sentir desde comienzos del siglo XX; en 1925 la Nación adquirió un laboratorio fundado en 1917 por los médicos Bernardo Samper y Jorge Martínez, concentrando en esta entidad las consultas en las cuestiones químicas que se presentaban a la Dirección Nacional de Higiene; así mismo se ocupó del análisis de aguas, bebidas alco-



hólicas y algunos alimentos. Simultáneamente existía otro Laboratorio en el que se resolvían los problemas químicos del Ministerio de Industrias y del Departamento de Minas y Petróleos del mismo Ministerio. Este laboratorio fue el inicio del Laboratorio Químico Nacional adjunto actualmente a Ingeominas. Posteriormente se organizaron laboratorios en el Instituto de Investigaciones Tecnológicas, Instituto Colombiano Agropecuario y en la Superintendencia de Industria y Comercio desde donde se ejerce el control analítico de la calidad de muchos productos que se someten a exportación o provienen de la importación, o se dan las bases de desarrollo o de optimización de nuevas industrias.

En la labor analítica al servicio de la patria en las entidades citadas, se han forjado varios de nuestros actuales maestros de los cuales se pueden nombrar como más distinguidos entre otros, a: Antonio María Barriga Villalba, Luis Montoya Valenzuela, Jose Vicente Azcuenaga, Luis Enrique Gaviria Salazar, Bernardo Fajardo Pinzón y Alvaro Mondragón. La labor desarrollada está dando su fruto en la superación de la calidad de los productos nacionales de exportación, consecuencia de la toma de conciencia de la industria química. Además, mediante la Química Analítica enriquecemos cada vez más el conocimiento de nuestros recursos naturales ampliando el horizonte de sus aplicaciones.

## CONCLUSION

Sin lugar a duda podemos afirmar que en química no hay investigación que no incluya una fase analítica de laboratorio y por esta razón, encontramos una enorme producción mundial literaria que en una u otra forma está relacionada con el tema. Así, el lenguaje analítico ha dejado de ser dominio de unos pocos, pues se ha difundido ampliamente con el establecimiento de Normas de Análisis Químico por parte del ICONTEC.

Finalmente podemos ver que la Química Analítica a través de los tiempos ha recorrido un extenso camino: en su infancia seguía ciertas tendencias místicas que poco a poco se fueron volviendo más curiosas; al pasar el tiempo esta curiosidad le permitió explicar muchos fenómenos naturales convirtiéndola en gestora de la moderna ciencia química y en su madurez da su mano y su consejo para el mejor desarrollo y aprovechamiento de los recursos por parte de la humanidad.

Para terminar este viaje a través del tiempo en compañía del pensamiento analítico, quiero rendir un homenaje a los pioneros en este campo de la ciencia, quienes sin más medio que su ingenio y su voluntad debieron llegar a la verdad y sentar las bases para convertir el mito en ciencia.

## BIBLIOGRAFIA

- (1) Read S. "Por la Alquimia a la Química" - Aguilar, 1960.
- (2) J. of. Chem Ed. 32, 253 (1955)
- (3) " " " 37, 594 (1960)
- (4) " " " 38, 106 (1961)
- (5) " " " 39, 356 (1962)
- (6) " " " 37, 506 (1960)
- (7) " " " 39, 123, 644 (1962)
- (8) " " " 31, 413 (1964)
- (9) " " " 34, 502 (1957)
- (10) " " " 5, 785 (1928)
- (11) " " " 39, 264 (1962)
- (12) " " " 27, 4, 176 (1950)
- (13) " " " 26, 9, 491 (1949)
- (14) " " " 34, 331 (1957)
- (15) " " " 37, 625 (1960)
- (16) " " " 42, 388, 675 (1965)
- (17) " " " 39, 384, (1962)
- (18) " " " 27, 2, 68, (1950)
- (19) Lockeman, G. "Historia de la Química" Uteha, 1960.
- (20) J. Chem Ed. 26, 5, 242, (1949)
- (21) " " " 26, 10, 513, (1949)
- (22) " " " 41, 452, (1964)
- (23) " " " 38, 118, (1961)
- (24) " " " 31, 207, (1954)
- (25) " " " 32, 456, (1955)
- (26) " " " 39, 384, (1962)
- (27) " " " 42, 584, (1965)
- (28) " " " 34, 27, (1957)
- (29) " " " 26, 4, 203, (1949)
- (30) " " " 28, 194, (1951)
- (31) Skoog and West "Principles of Instrumental Analysis".
- (32) J. of. Chem Ed. 32, 456, (1955)
- (33) " " " 36, 5, 225, (1959)
- (34) " " " 36, 11, 555, (1959)
- (35) " " " 36, 4, 196, (1959)
- (36) Ramiro Osorio O. Historia de la Química en Colombia Inédito (1978).



# DESHIDROGENASA MALICA EN LAS PRIMERAS ETAPAS DEL DESARROLLO DE *Hyla labialis*

Jaime F. George C., Ph. D. \*

Irma Colmenares de Escamilla

María E. de Carrillo

PONTIFICIA UNIVERSIDAD JAVERIANA

## INTRODUCCION

Uno de los temas de gran interés hoy en día para los científicos es el estudio de las enzimas. Con la invención de la electroforesis, se puso de manifiesto la existencia de varios tipos de enzimas que adoptan más de una forma. Se llaman isoenzimas y presentan entre ellas diferencias en la secuencia de aminoácidos (Latner y Skillen, 1968; Weyer, 1968).

Entre las isoenzimas más conocidas se encuentran las de la dehidrogenasa láctica (LDH), las de la deshidrogenasa del ácido málico (MDH) y las de la deshidrogenasa del ácido glutámico (GDH).

En los mamíferos, la enzima más estudiada ha sido la LDH, la cual se ha presentado en por lo menos cinco formas diferentes de tetrámeros producidas cada una de ellas por la unión de dos monómeros en proporciones diferentes. Uno de los monómeros se presenta más que todo en el tejido del corazón y ha sido denominado "H" y el otro en el músculo estriado y se conoce como "M" (Dixon y Webb, 1964). Asociando estos dos monómeros se puede observar la composición polipeptídica de los cinco tetrámeros así:

H <sub>4</sub>	LDH <sub>1</sub>
H <sub>3</sub> M	LDH <sub>2</sub>
H <sub>2</sub> M <sub>2</sub>	LDH <sub>3</sub>
HM <sub>3</sub>	LDH <sub>4</sub>
M <sub>4</sub>	LDH <sub>5</sub>

(\*) Este trabajo se llevó a cabo mediante una ayuda de Investigación del Fondo Colombiano de Investigaciones y Proyectos Especiales Francisco José de Caldas, COLCIENCIAS.

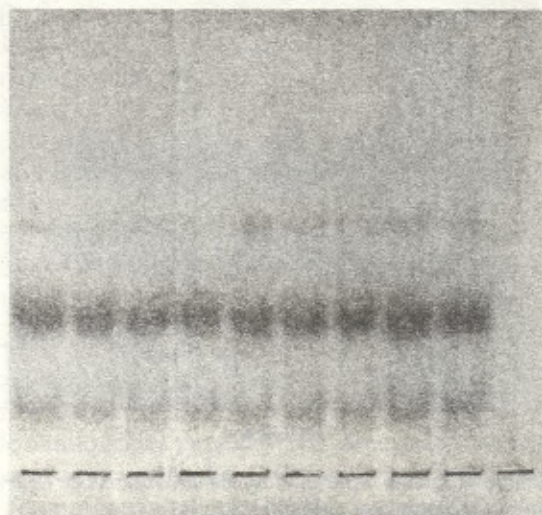


FIGURA 1

Electroferograma representativo de las isozimas de MDH en huevos sin fertilizar.

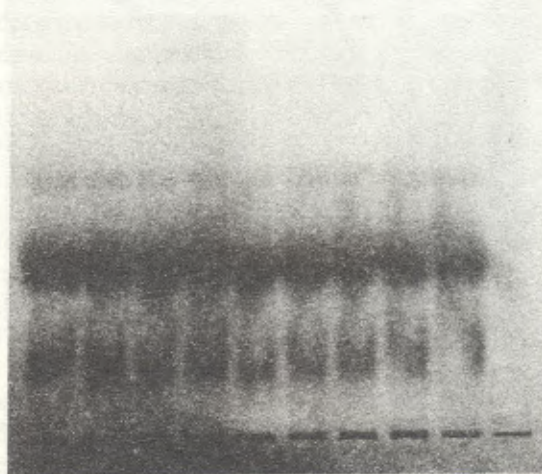


FIGURA 2

Electroferograma representativo de las isozimas de MDH en huevos en primer clivaje (estado 3).



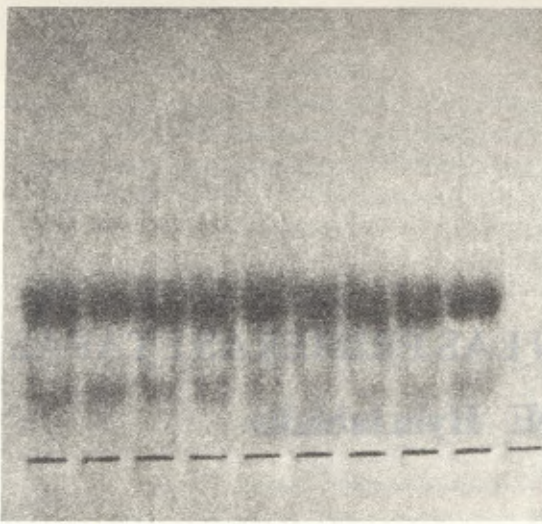


FIGURA 3

Electroferograma representativo de las isozimas de MDH en huevos en segundo clivaje (estado 4).

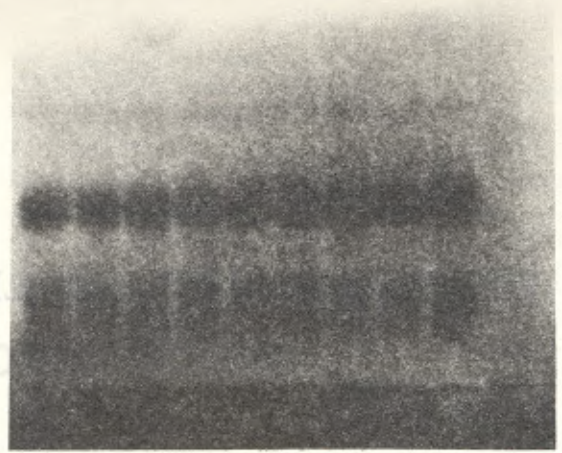


FIGURA 6

Electroferograma representativo de las isozimas de MDH en Gástrula (estado 12).

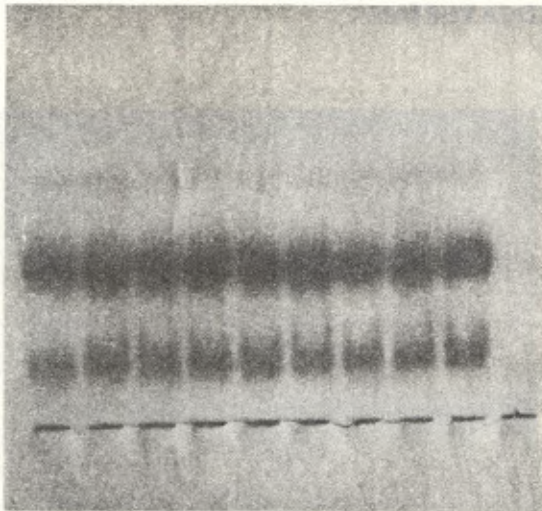


FIGURA 4

Electroferograma representativo de las isozimas de MDH en huevos en tercer clivaje (estado 5).

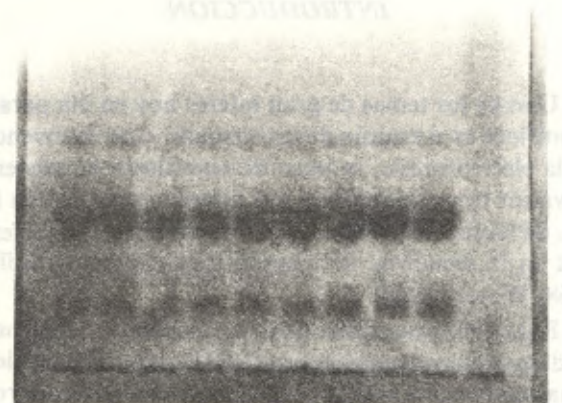


FIGURA 7

Electroferograma representativo de las isozimas de MDH en Néurula (estado 16).

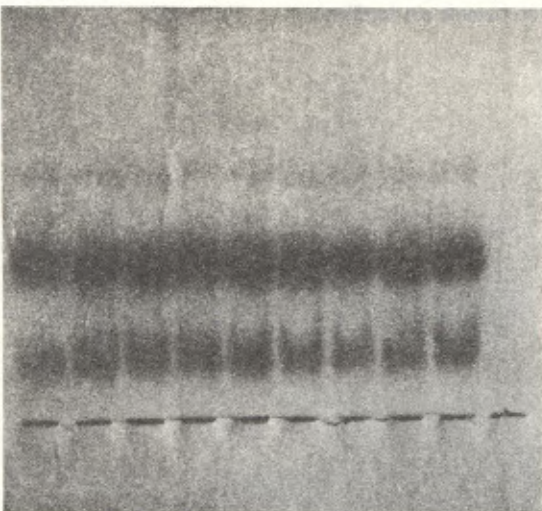


FIGURA 5

Electroferograma representativo de las isozimas de MDH en Blástula (estado 8).

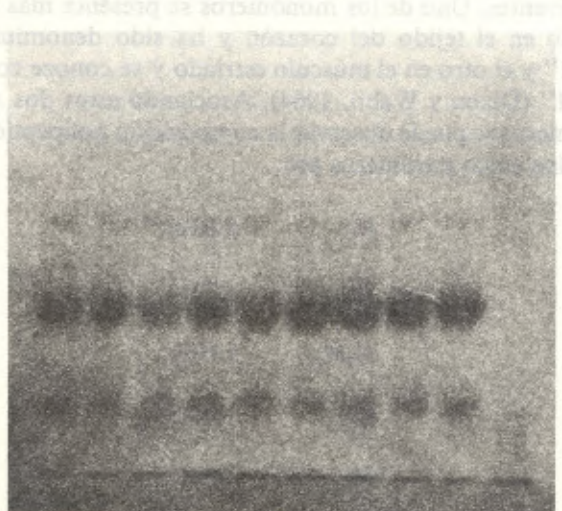


FIGURA 8

Electroferograma representativo de las isozimas de MDH en Botón de Cola (estado 17).



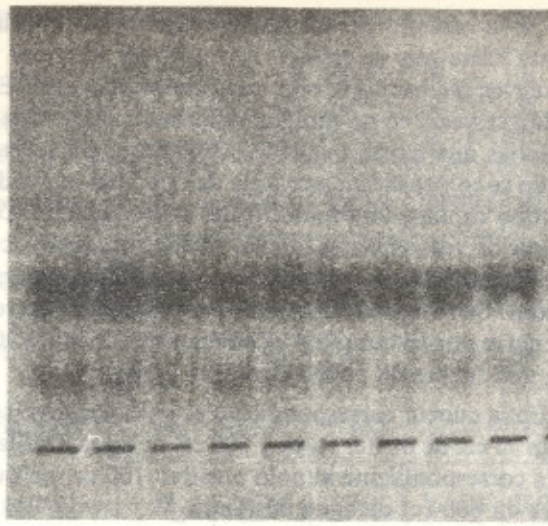


FIGURA 9

Electroferograma representativo de las isozimas de MDH en embriones de 5 mm (estado 20).

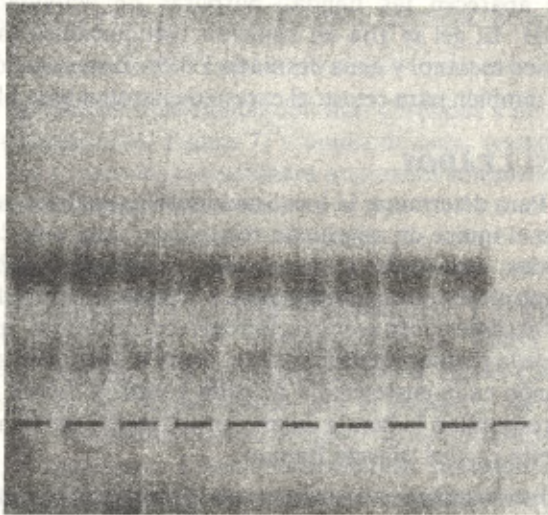


FIGURA 10

Electroferograma representativo de las isozimas de MDH en embriones de 7 mm (estado 21).

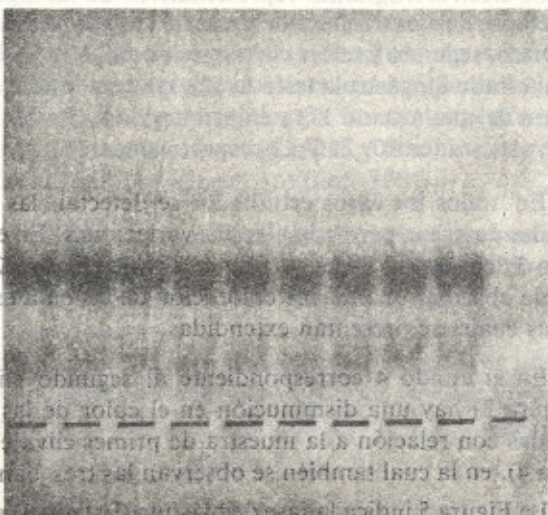


FIGURA 11

Electroferograma representativo de las isozimas de MDH en embriones de 11 mm (estado 22).

Las isoenzimas de la MDH como las de la LDH parecen tener también dos tipos de monómeros organizados en cinco diferentes combinaciones de tetrámeros, los cuales entre otras propiedades difieren en su movilidad electroforética y en su punto isoeléctrico.

La deshidrogenasa del ácido málico es una de las enzimas que actúa en el metabolismo de los carbohidratos. Es una oxidoreductasa que cataliza la interconversión entre el ácido málico y el ácido oxaloacético, usando como coenzima el Dinucleótido de Nicotinamida Adenina (NAD).

Market y Moller en 1959 empleando el método de separación por electroforesis en gel de almidón y trabajando con tejidos frescos de animales encontraron que la MDH se separaba en dos fracciones diferentes. En 1960 Tsao utilizando la misma técnica obtuvo los mismos resultados en varios tejidos de rata. Estos científicos coincidieron en sus investigaciones al encontrar las dos formas diferentes de la enzima MDH sin embargo, ninguno explicó el significado biológico de esta heterogeneidad.

Hallazgos similares fueron reportados por Latner y Skillen en 1962 en espermatozoides humanos, por Englard y Breiger en 1962 en músculo de corazón de buey, por Wiggert y Villee en 1962 en fracciones de corazón, hígado, riñón, pulmón y corteza cerebral de fetos humanos en varios estados de diferenciación y por Grossman, Kaplan y Thorne, en 1963, en el corazón del cerdo. La conclusión a la cual llegaron estos investigadores es que en los tejidos de los vertebrados únicamente se presentan dos bandas con actividad de la enzima MDH, las cuales podían separarse electroforéticamente.

Siegel y Englard en 1962 purificaron la MDH del corazón del buey, cristalizaron la enzima y determinaron su composición de aminoácidos. Posteriormente, Thorne y Cooper (1963) obtuvieron composiciones similares de aminoácidos para la MDH del extracto de células del corazón del pollo. En 1963 Golberg y Cather, encontraron la presencia de tres bandas con actividad de MDH, durante el desarrollo embriológico del caracol *Ilyanasa obsoleta*.

En 1963 Moore y Villee, separaron los blastómeros del erizo de mar *A. punctulata* en el estado de 64 células, mediante tratamientos con tripsina y luego por centrifugación en un gradiente de sucrosa. Hicieron microelectroforesis en disco de policrilamida de macro y micro blastómeros y encontraron que en los macroblastómeros habían dos bandas con la actividad de MDH y en los microblastómeros, tres bandas. Seis horas después de la fertilización los embriones seguían presentando las mismas tres bandas y a las cuarenta y ocho horas se presentaron cuatro bandas con actividad MDH. En huevos sin fertilizar reportaron cinco bandas. Sin embargo, en 1967 Francesco y Villee utilizando el mismo animal, reportaron que antes de la fertilización aparecían ocho bandas; éstas se reducían y cinco minutos más tarde aparecían de nuevo los faltantes. La concentración de esta enzima, detectada por un aumento en la intensidad del color de las bandas, aumentaba noventa minutos después de la fertilización.



Manwell (1966) halló diferencias en la actividad de la MDH en hígado de renacuajo y de rana. En hígado de renacuajo encontró en la zona intermedia de tres a cuatro sub-bandas isozímicas, mientras que en el hígado de la rana las zonas catódica y anódica eran las más marcadas.

En 1971 Pakhomov y Perevozchikov, revelaron la presencia de tres zonas de actividad de MDH en los músculos esqueléticos de pollos en desarrollo. Se encontraron las mismas bandas en los músculos y corazones de los pollos adultos.

En el mismo año Engel, Wolfgang y Wolf, mediante estudios electroforéticos en ratas, anotaron que no había actividad enzimática alguna en los huevos sin fertilizar o en los estados de preimplantación. Después de la implantación observaron por primera vez, un patrón isozímico que aparecía a los diez días, el cual presentaba tres bandas diferentes. Doscientas cuarenta horas después aparecieron cinco bandas con actividad de MDH. La conclusión fue que la MDH aparecía un poco más tarde en el desarrollo.

Los hallazgos descritos motivaron el interés por estudiar las variaciones de esta enzima durante el desarrollo de *Hyla labialis*, una rana muy común en Colombia pero poco conocida biológicamente.

#### MATERIALES Y METODOS

Para estos experimentos se utilizaron los anfibios *Hyla labialis*, descritos por E.R. Dunn en 1944. Las ranas adultas se recolectaron en la Urbanización San José, la cual está situada tres kilómetros al occidente del tercer puente de la autopista norte de Bogotá, Colombia.

Una vez en el laboratorio se seleccionaron los machos y las hembras y se colocaron en recipientes de vidrio a una temperatura entre 8 y 14°C, siendo procesados antes del tercer día de cautiverio.

Para obtener los huevos se utilizó un método de la ovulación inducida (F.J. Ryan y R. Grant, 1940), que consiste en inyectar a la hembra y al macho en la cavidad abdominal cinco pituitarias de *Buffo marinus* maceradas en 0.5 ml. de solución salina al 0.75%.

Después de la inyección se colocó a cada pareja en un frasco y se la aisló en un sitio oscuro para facilitar así el proceso de la ovulación. Los huevos fertilizados se colocaron en cajas de Petri, con 30 ml. de agua fresca y con la ayuda de un microscopio esteroscópico, se separaron las diferentes etapas del desarrollo.

En pequeños tubos de vidrio se colocaron de 100 a 200 huevos en los diferentes estados de desarrollo, hasta llegar al botón de cola. En los embriones de 5mm., 7mm., y 11 mm., solamente se recolectaron sesenta especímenes debido al tamaño de estos.

Los embriones se homogenizaron en 0.2 ml. de solución buffer stock, descrita por Boyer, *et al.* (1963). Esta contiene ácido tricloroacético 0,5 M, ácido bórico 0.02M y TRIS 0.9 M., a un pH final de 8.60. Luego se centrifugaron en una centrífuga clínica a 5.000 rpm durante media hora a 0°C, guardando el sobrenadante.

El gel se prepara mezclando en un erlenmeyer 60 grms. de almidón (Otto Hiller) con 25 cc. de solución Buffer stock y se completa con 475 cc. de agua destila-

da. Se la calienta en un mechero agitándola continuamente hasta que se espesa. Se retira del mechero y se remueven las burbujas con una bomba de vacío. El almidón se vacía en un molde procurando sacar todas las burbujas que hayan quedado. Cuando el gel se ha enfriado se coloca en cada celdilla de éste, con la ayuda de un tubo capilar, una muestra del sobrenadante. Como patrón de referencia se utilizó plasma humano, cuyas isoenzimas han sido ampliamente estudiadas y caracterizadas. Se recubren las celdillas con parafina derretida y se corre por 16 horas a 4°C aplicando 12.5 ma. a 200 v. con una fuente de poder Heathkit 1 pw. 17.

En la cubeta correspondiente al polo negativo se colocan 75 cc. de buffer stock y 600 cc. de agua destilada y en la correspondiente al polo positivo 100 cc. de buffer stock en 600 cc. de agua destilada.

Las tajadas se tiñen, una con naphthol blue black (3.5 gr. en 1 litro de solución blanqueadora) para detectar proteínas en general y la otra con una sal de ácido málico con el colorante NBT para detectar actividad de MDH. Esta última tajada se deja en la oscuridad hasta que aparecen las bandas púrpuras de actividad de MDH. El gel se fija en solución blanqueadora (ácido acético metanol y agua destilada 1:5:5). Esta solución se usa también para retirar el exceso de naphthol blue black.

#### RESULTADOS

Para determinar la localización de las enzimas se obtuvo el índice de migración relativa de cada una de las bandas, este índice corresponde a la relación  $a/b$ , en donde el valor de  $a$  corresponde a la distancia en milímetros desde el punto de iniciación del recorrido de la muestra de la deshidrogenasa málica, hasta el extremo de migración en la parte media de cada banda. El valor de  $b$  corresponde a la banda de mayor migración del control, en este caso el plasma humano.

Las bandas se numeraron así: la banda de migración más anódica se denominó la banda 1. La banda de menor migración anódica se denominó como la banda 3, siendo la banda 2 la intermedia.

La Tabla No. 1, presenta las migraciones de las bandas en los diferentes estados estudiados y las figuras 1 a 11 los electroferogramas representativos de las siguientes etapas del desarrollo: huevos sin fertilizar (estado 1), primero, segundo y tercer clivaje (estados 3, 4 y 5), blástula (estado 8), gástrula (estado 12), neurula (estado 16), botón de cola (estado 17) y embriones de 5, 7 y 11 milímetros (estados 20, 21 y 22 respectivamente).

En todos los casos estudiados se detectan las tres bandas descritas pero con algunas variaciones. En el estado 3, correspondiente al primer clivaje (Figura 2) se puede observar una mayor coloración de las bandas 2 y 3, las cuales se presentan extendidas.

En el estado 4 correspondiente al segundo clivaje (Figura 3) hay una disminución en el color de las tres bandas con relación a la muestra de primer clivaje (Figura 4), en la cual también se observan las tres bandas.

La Figura 5 indica la fase de blástula (Estado 8) en la cual se nota una mayor intensidad de las bandas 2 y 3. Esta se acentúa en la fase de gástrula (Estado 12, Figura 6), notándose además unos límites más claros en cada

Estado		Huevos sin fertilizar	Primer clivaje	Segundo clivaje	Tercer clivaje	Blástula	Gástrula	Néurula	Botón de Cola	Embrión 5 mm.	Embrión 7 mm.	Embrión 11 mm.
Promedio	B <sub>1</sub>	52.30	52.55	50.92	52.05	52.83	55.22	51.94	51.16	53.77	51.05	50.94
Migración	B <sub>2</sub>	34.68	35.33	32.94	33.50	33.92	36.44	33.88	33.55	34.97	34.38	33.66
Real	B <sub>3</sub>	14.94	16.33	13.94	14.55	14.98	17.00	15.72	14.61	15.00	13.99	13.77
Promedio	B <sub>1</sub>	1.136	1.142	1.111	1.135	1.148	1.187	1.134	1.132	1.144	1.114	1.112
Migración	B <sub>2</sub>	0.742	0.768	0.719	0.728	0.737	0.783	0.739	0.732	0.741	0.750	0.734
Relativa	B <sub>3</sub>	0.337	0.355	0.305	0.317	0.325	0.365	0.343	0.318	0.327	0.305	0.300

TABLA 1

Promedios de migración real y migración relativa de las isozimas de MDH en huevos sin fertilizar, primero, segundo y tercer clivaje, blástula, gástrula, néurula, botón de cola, embrión de 5, 7 y 11 mm. de *Hyla labialis*.

una de las bandas. Las bandas son más definidas a nivel neurula (Estado 16, Figura 7) y botón de cola, (estado 17, Figura 8) pero las intensidades de tinción son menores que en la fase de gástrula.

#### DISCUSION

De acuerdo con los trabajos de Mackintosh y Bell en 1963 confirmados por las investigaciones de Dixon y Webb en 1964, tanto la Deshidrogenasa del Acido Láctico como la del Acido Málico son el producto de la unión de dos subunidades diferentes formando varias clases de tetrameros. Estas combinaciones producirían cinco formas isozímicas, las cuales difieren en su movilidad electroforética y punto isoeléctrico, entre otras propiedades, sin embargo para ambas enzimas se han presentado informes de casos en los cuales aparece un número diferente de bandas. Por ejemplo, Vescel y Bearn en 1957, trabajando con plasma humano, demostraron la presencia de tres isozimas de LDH y en 1967 Francesconi y Vilee encontraron ocho bandas con actividad de MDH en los huevos sin fertilizar de *Arbacia punctulata*. Pero parece que el caso más común se relaciona con organismos o tejidos en los cuales aparecen cinco bandas con actividad de LDH y dos bandas con actividad de MDH (Wiggert y Vilee, 1964).

En el presente trabajo los resultados obtenidos en las primeras etapas del desarrollo de *Hyla labialis* utilizando el método de electroforesis en gel de almidón sólo permitieron detectar tres bandas, sin que pueda excluirse la posibilidad de que en cada banda haya más de una. Resultados similares obtuvieron Moore y Vilee (1962) en embriones de erizo de mar con 48 horas de desarrollo.

Si se acepta que la intensidad de la coloración refleja la concentración de la enzima, en la figura 1 correspondiente a huevos sin fertilizar hay una cantidad relativamente baja de la MDH activa, lo cual está de acuerdo

con su bajo consumo de oxígeno observado por George, Escamilla y Manrique en 1979.

Teniendo en cuenta que el número de huevos o embriones utilizados en cada experimento fue el mismo, se podría asumir, que la cantidad de material utilizado por experimento fue constante. Es necesario sin embargo tener en cuenta que no se tomó control de peso seco y que la solubilidad de la enzima en el buffer puede variar en las diferentes etapas del desarrollo. Asumiendo cantidades constantes de material utilizado y juzgando la concentración de enzima por el grado de tinción que se observa en las bandas, se nota que con la fertilización se aumenta la cantidad de MDH y que las bandas B<sub>3</sub> y B<sub>2</sub> no son tan limitadas en estos estados como en los huevos no fertilizados (Figuras 1 a 8). Esta falta de límites podría indicar la presencia de bandas adicionales que podrían relacionarse en alguna forma con el aumento en el metabolismo aeróbico reportado por George, Escamilla y Manrique (1979) después de la fertilización.

Durante los estados 4 y 5 correspondientes al segundo y tercer clivajes (Figuras 3 y 4) se mantienen las concentraciones en las bandas 2 pero disminuyen en las bandas 3. Los autores anteriormente citados observaron que en la gráfica de consumo de oxígeno se nota una cierta nivelación y hasta un descenso que se hace más notorio en el estado de blástula, estado en el cual las bandas de MDH comienzan a presentar una mayor intensidad en la coloración. Esto podría indicar la formación de enzimas en una etapa de preparación para gastrulación etapa en la que hay un aumento repentino en el consumo de oxígeno.

La curva de consumo de oxígeno (George, Escamilla y Manrique, 1979), muestra un punto máximo en el estado de neurula, observación que concuerda con la fuerte tinción que se nota en las bandas de la MDH en este estado (Figura 7). La intensidad de tinción disminuye en el último estado estudiado o sea embrión de 11 mm (figura 11).

Este descenso se puede explicar teniendo en cuenta que el número de embriones utilizado fue aproximadamente la mitad del número de huevos utilizados. Esto se hizo debido a que el exceso de concentración de la enzima hacía perder por sobreposición la resolución de las bandas. Por tanto, se puede asumir que la concentración de MDH, en igual número de especímenes sería en realidad, mayor en el estado de botón de cola, correlacionándola de nuevo con un mayor consumo de oxígeno observado en esta etapa del desarrollo de *Hyla labialis*.

## RESUMEN

Con la técnica de electroforesis Vertical en gel de almidón se estudió la deshidrogenasa málica en los primeros estados de desarrollo de *Hyla labialis*. Aparecieron siempre tres bandas aunque se presentaron variaciones en las concentraciones de las isoenzimas a juzgar por la intensidad de tinción de las mismas. Se discute estas variaciones.

## BIBLIOGRAFIA

- Boyer, S.H., D.C. Fainer and E.J. Watson-Williams. 1963. Lactate dehydrogenase variant from human blood. Evidence for molecular sub-units. *Science*. 141: 642-643.
- Dixon, M. and E.C. Weeb. 1964. *Enzymes*. 2nd. Ed. Logmans. Cree & Co. Ltda. London.
- Dunn, E.R. 1944. Herpetology of the Bogotá Area. *Rev. Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales*, 6, 21, PP: 68-61.
- Engel, Wolfgang and U. Wolf. 1971. Synchronous activation of the alleles coding for the S-form of the NADP- dependent MDH during embryologic development of the mouse. *Humangenetik* 12:2: 162-166.
- Englard, S. and H.H. Breiger. 1962. Beef-Heart Malic dehydrogenases. Preparation and properties of crystalline supernatant Malic dehydrogenase. *Biochem. Biophys. Acta*. 56:571-583.
- Francesconi, R.P. and C.A. Villee. 1967. Changes in the Malic dehydrogenase isoenzymes of *Arbacia* during the early development. *Science* 141: 388-390.
- George, J.F., I. Escamilla y C. Manrique. 1979. Consumo de oxígeno en las primeras etapas del desarrollo de *Hyla labialis*. En publicación.
- Grossman, L., N.O. Kaplan and C.J.R. Thorne. 1963. Studies of the multiple electroforetic forms of pig's MDH. *Biochem. Biophys. Acta*. 73: 193-203.
- Latner, A.L. and A.W. Skillen. 1962. Visual demonstration of isoenzyme activity after starch gel electrophoresis. *Pro. Assoc. Clin. Bioche.* 2:3-5.
- Mackintosh, F.R. and E. Bell. 1963. *Biochem. Biophys. Res. Commun* 27:245. *In: Bell E.* 1969. *Molecular and cellular aspects of development*. A Harper International Edition. New York.
- Manwell, C. 1966. Electrophoresis: Dehydrogenases, esterases, phosphatases and other soluble proteins in the tad pole and adult frog. *Comp. Bioche. Physiol* 17: 805-823.
- Markert, J.C.L. and Moller. F. 1959. Multiple forms of enzymes tissue ontogenetic and species specific patterns. *Ann. N.Y. Acad. Sci.* 451: 753-763.
- Moore, R.O. and C.A. Villee. 1962. Malic Dehydrogenase in separated blastomeres of sea urchin embryos. *Science* 142: 389-390.
- Pakhomov, A.N. and A.P. Perevozchikov. 1971. Electrophoretic studies of the spectrum of the multiple MDH forms during the development of skeletal muscle in chicken. *Vestn. Leningrad. Univ. Ser. Biol.* 26:9: 73-80.
- Ryan, F. and J. Grant. 1940. The stimulus for maturation and for ovulation of the frog's eggs. *Physiol. Zool.* 13:383-389.
- Siegel, L. and B.B. Englard. 1972. *Res. Commun.* 6: 171. *In: Kitto, G.B. and R.G. Lewis,* 1967. Purification and properties of tuna supernatant and Mitochondrial MDH. *Biochem. Biophys. Acta.* 73: 193-203.
- Thorne, C.J. and P.M. Cooper. 1963. *Biochem. Biophys. Acta.* 81: 397. *In: Kitto, G.B.* 1967. Malate dehydrogenase: Purification and properties in Ostrich's heart. *Biochem. Biophys. Acta.* 139: 16-23.
- Tsao, M.U. 1960. Heterogeneity of tissue dehydrogenase. *Arch. Biochem. Biophys.* 90: 234-238.
- Vessel, E.S. and A.G. Bearn. 1957. Localization of a lactic dehydrogenase activity in serum fractions. *Proc. Soc. Exptl. Biol. Med.* 94: 96-99.
- Weyer, E.M. 1968. Multiple molecular forms of enzymes. *Ann. N.Y. Acad. Sci.* 151. Art. 1.
- Wiggert, B.O. and C.A. Villee. 1962. *Science* 138: 509. *In: Moore R. and C.A. Villee.* 1963. Malate Dehydrogenase: Multiple forms in separated blastomeres of sea urchin embryos. *Science* 142: 389-390.
- and C.A. Villee. 1964. Multiple molecular forms of MDH and LDH during development. *J. Biol. Chem* 239: 444-451.

En el presente trabajo se estudió la deshidrogenasa málica en los primeros estados del desarrollo de *Hyla labialis* utilizando el método de electroforesis en gel de almidón. Se permitieron detectar tres bandas, sin que pueda excluirse la posibilidad de que en cada banda haya más de una. Resultados similares obtuvieron Moore y Villee (1962) en embriones de rizo de mar con 48 horas de desarrollo.

Si se acepta que la intensidad de la coloración refleja la concentración de la enzima, en la figura 1 correspondiente a huevos sin fertilizar hay una cantidad relativamente baja de la MDH activa, lo cual está de acuerdo

La curva de consumo de oxígeno (George, Escamilla y Manrique, 1979) muestra un punto máximo en el estado de botón de cola, observación que concuerda con la intensidad de tinción que se nota en las bandas de la MDH en este estado (Figura 7). La intensidad de tinción disminuye en el último estado estudiado o sea embrión de 1 mm (Figura 11).

En el presente trabajo se estudió la deshidrogenasa málica en los primeros estados del desarrollo de *Hyla labialis* utilizando el método de electroforesis en gel de almidón. Se permitieron detectar tres bandas, sin que pueda excluirse la posibilidad de que en cada banda haya más de una. Resultados similares obtuvieron Moore y Villee (1962) en embriones de rizo de mar con 48 horas de desarrollo.

Si se acepta que la intensidad de la coloración refleja la concentración de la enzima, en la figura 1 correspondiente a huevos sin fertilizar hay una cantidad relativamente baja de la MDH activa, lo cual está de acuerdo



# ESTUDIOS ELECTROFORETICOS DE LA HEMOLINFA DE UNA POBLACION DE ESCORPIONES *Tityus colombianus*

JAIME F. GEORGE C. \*

IRMA COLMENARES DE ESCAMILLA

JEANNETTE OSPINA F.

PONTIFICIA UNIVERSIDAD JAVERIANA  
FACULTAD DE CIENCIAS

## INTRODUCCION

Los escorpiones constituyen un grupo relativamente pequeño de animales. Hasta el momento se han descrito aproximadamente 650 especies. Tienen un amplio habitat. Se encuentran en regiones cálidas y desérticas (*Androctonus* sp), frecuentan lugares húmedos como el *Escorpius* spp. o bosques como el *Palamaus* spp. Los escorpiones *Tityus Colombianus* habitan climas fríos y pueden resistir heladas de varias semanas (Vachon, 1953).

La sangre o hemolinfa es un líquido claro, ligeramente amarillo mediante el cual se realizan los intercambios químicos entre los órganos, se transportan hormonas y alimentos desde el intestino y productos de desecho hasta el sistema excretor.

Varios investigadores han utilizado, como se describirá más tarde, las proteínas presentes en la hemolinfa, como un medio para descubrir variaciones intra e inter poblacionales difíciles de detectar morfológicamente. Por otra parte si las proteínas son el reflejo de la constitución genética de un individuo, al estudiar las variaciones que existen en las proteínas se estará detectando indirectamente la constitución genética de ese individuo. Por esta razón las proteínas y sus variaciones se han utilizado ampliamente en el reconocimiento de especies diferentes que morfológicamente parecen similares (Manwell y Baker 1970). Varias publicaciones afirman por ejemplo que las variaciones de los patrones electroforéticos de las proteínas, a través de las distintas especies pueden presentar una base molecular para la determinación de su relación filogenética (Bertini & Cej 1960). Ainfisen (1959) demostró que a pesar de que algunas

proteínas de diferentes especies tienen una función similar, pueden presentar diferencias estructurales que afectan su movilidad.

Estas variaciones se pueden detectar con métodos analíticos apropiados como son los métodos electroforéticos.

Durante algunos años los estudios de las proteínas de insectos se hicieron utilizando técnicas simples de electroforesis en papel y más recientemente en almidón o agar. Las técnicas de agar y almidón, en las cuales la separación aparentemente depende de la interacción con el medio además de la movilidad electroforética (Smithies 1955), dan bandas agudas y en mayor número. Por otra parte, con la caracterización química de las proteínas de la hemolinfa, la electroforesis de microzona ha contribuido a observar que ciertas bandas se colorean selectivamente dependiendo del reactivo, indicando glicoproteínas y lipoproteínas (Aizawa 1957).

Los trabajos más intensivos en fraccionamiento y caracterización física de las proteínas de la hemolinfa de los insectos se han realizado en *Bombyx mori* utilizando tanto métodos de ultracentrifugación como de electroforesis en el aparato de Tiselius. La hemolinfa de la larva presentó tres componentes importantes. El de mayor sedimentación estaba presente en el estado de pupa (Oda 1956).

El aspecto de desarrollo y diferenciación se ha estudiado ampliamente en algunas especies.

Las proteínas de "*Hyalophora cecropia*" y de "*Philotamia cynthia*" por ejemplo, fueron observadas a través del desarrollo (Läuffer 1959) con electroforesis de zona en gel de almidón, para detectar cambios cualitativos y cuantitativos. Los cambios de los constituyentes fueron correlacionados con las funciones de varios órganos y tejidos, particularmente de las glándulas endo-

(\*) Esta investigación fue financiada por COLCIENCIAS y la Facultad de Ciencias de la Pontificia Universidad Javeriana.

crinas, las cuales controlan parcialmente el desarrollo y la síntesis de proteínas.

En análisis electroforético de la hemolinfa durante la diferenciación de las especies de la clase Arácnida del género *Hyalomma*: *H. excavatum* y *H. impeltatum* (Sande y Kardher 1960) se obtuvieron patrones electroforéticos con once fracciones pero con diferencias muy marcadas entre las dos especies. Lo mismo se observa en *Argasidae reflexus* y *A. persicus*. Las proteínas de la hemolinfa del primero se presentan en tres fracciones mientras que las del segundo se presentan en cinco fracciones.

Las proteínas de la hemolinfa de "*Hyalophora cecropia*" se han estudiado como antígenos (Telfer, 1960), utilizando antisueros producidos por conejos y la técnica de difusión en agar. Se observaron nueve bandas de las cuales, siete se presentaron a través de todo el desarrollo; también se observó un aumento cuantitativo de proteínas durante la transformación en adulto.

Investigaciones en algunos insectos han mostrado que cada una de las situaciones fisiológicas se acoplan con un cambio en el tipo de proteína de la hemolinfa. Así, durante la fase de maduración de algunos huevos, aparecen en la hembra proteínas específicas que son absorbidas por los oocitos. Se concluyó que las proteínas de la hemolinfa y las de los oocitos parecían idénticas debido a que la velocidad de migración electroforética era igual. Inmunológicamente son también iguales. (Engelman y Penny, 1966).

Estudios de las proteínas de la hemolinfa durante el ciclo de vida de las reinas adultas de las abejas de la especie "*Bolbys erretris*" separadas con electroforesis en disco en gel de policrilamida, demostraron la presencia de 23 fracciones proteínicas nombradas alfabéticamente (Roseler, 1973). Cada fase de la vida adulta de la abeja está caracterizada por patrones específicos de proteínas de la hemolinfa. Las reinas nuevas tienen una concentración baja de estas proteínas que se va aumentando en los primeros cinco días hasta llegar a un máximo. La alta concentración está probablemente relacionada con la síntesis de reservas para la etapa de hibernación. Durante la primavera los primeros oocitos empiezan a desarrollarse presentándose un aumento en la actividad de las glándulas hipofaríngeas y de las glándulas productoras de cera que alcanzan su máximo desarrollo cuando la reina establece su colmena. Un aumento en la concentración de las proteínas de la hemolinfa es paralela con la puesta de los huevos. La concentración disminuye al mínimo en reinas viejas con ovarios degenerados (Roseler 1973).

Muchos investigadores concluyen que el contenido de proteínas de la hemolinfa fluctúa más ampliamente que los aminoácidos libres y que otros compuestos nitrogenados no proteínicos. Los patrones durante el desarrollo de algunos lepidópteros son muy semejantes, hay un aumento en la concentración en el estado larval, gradual primero y luego rápido en el último instar. Se observaron cambios durante la hilada y en el período de pupa; luego un agudo descenso al desarrollarse la forma adulta. (Florkin 1936; Heller 1930; Drilhon 1946).

El descenso del volumen de la hemolinfa durante el desarrollo del adulto sugiere que las proteínas de ésta

sirven como reserva para la síntesis de proteínas del adulto (Heller 1932). La importancia de la hemolinfa como sustancia de reserva también se ha podido demostrar por cambios durante el período de inanición. Cuando *C. euphorbiae* y *B. morio* o *S. lutoria* se someten a inanición forzada, las proteínas de la hemolinfa descienden notablemente mientras que las sustancias no proteínicas permanecen constantes. Esto presumiblemente refleja la hidrólisis de las proteínas para pasar a aminoácidos y mantener la presión osmótica.

Estudios de la hemolinfa de escorpiones del género *Bothotus* (Buthidae) con electroforesis en disco y realizados por Goyffon (1973), muestran que cada una de las especies posee un electroferograma diferente, aunque con aspectos muy cercanos en *B. franzwernerii* y *B. hontota*, pero netamente diferentes en cada una de las subespecies de *B. franzwernerii* de Marruecos. Las diferencias taxonómicas se distinguen aisladamente por la técnica electroforética y el comportamiento de la banda de movilidad, mientras que en otras familias de la especie están ausentes.

El interés de este trabajo se basa en una población de adultos de escorpiones *Tityus colombianus* (Thorell) pertenecientes a la familia Buthidae, subfamilia Tityinae, descrita en el siglo pasado en base a ejemplares de Bogotá por lo que se pueden considerar como topotipos (Mello, 1945). Estos escorpiones fueron recolectados en la Loma el Patronato situada detrás de Usaquén a unos 12 kilómetros al norte de Bogotá, con el fin de detectar el número de bandas presentes en electroferogramas de la hemolinfa. Se averiguó además las concentraciones de las proteínas detectadas mediante gráficas de integración fotodensitométricas. Un punto interesante es la observación de polimorfismos en la población, el cual se puede aprovechar para estudiar las frecuencias genéticas de las poblaciones y observar los movimientos genéticos entre diferentes poblaciones, proporcionando además una herramienta para el análisis filogenético de la especie.

## MATERIALES Y METODOS

Los escorpiones fueron recolectados a 12 kilómetros al norte de Bogotá en la "Loma de Patronato" detrás de Usaquén, a una altura de 2.725 metros sobre el nivel del mar, cuya temperatura varía entre 10°C y 14°C. La latitud corresponde a 110.464 metros y la longitud a 105.694 metros según la nomenclatura de Gauss y de acuerdo a la planta F-94 del Instituto Geográfico de Agustín Codazzi.

La hemolinfa se extrajo del animal vivo, mediante una punción interdigital por la cara dorsal, entre el quinto y sexto tergo, utilizando una micropipeta de 0.04 a 0.40 mm., de diámetro. A cada espécimen se le colocó una tarjeta que identifica el lugar donde se colectó, el número del espécimen y la fecha de colección. Luego se conservaron en una solución de 280 cc. de agua destilada, 60 cc. de formol al 40%, 20 cc. de ácido acético glacial y 175 cc. de alcohol isopropílico.

Los compuestos de la hemolinfa del escorpión se separaron por el método de electroforesis de microzona que fue inicialmente utilizado por Kohn en 1957 en reemplazo de las electroforesis en papel. Las muestras



de hemolinfa de escorpión se colocaron con el aplicador de muestras (Beckman No. 324399) en la membrana a través de las perforaciones que presentan la cubierta de la celda. Se aplicaron siete muestras de hemolinfa y un patrón de suero humano normal en el que se pudo identificar seis fronteras móviles diferentes, que se designaron como: albúmina, globulinas, alfa 1, alfa 2 y Beta, Fibrinógeno y Gamaglobulina (Arsmtrong et. al 1947).

Para obtener los datos que se presentan se utilizó el sistema de electroforesis de microzona usando el modelo R-110 de Beckman desarrollado por Gebott, 1973, con una fuente Beckman modelo RD-2 duostat a 250 V y 5 MA por 18 minutos a temperatura ambiente. En la microcelda se utilizó buffer B-2 Beckman (Veronal dietilbarbitúrico de sodio).

Una vez corrida la muestra, se retiró la membrana para fijarla y teñirla por 10 minutos con Ponceau -S para observar las bandas y lavarla con ácido acético glacial al 5% en agua destilada. Se deshidrató con alcohol isopropílico al 5% en etanol. La membrana se leyó en un fotodensitómetro de microzona (Beckman Modelo R-110) con registro automático a 520 manómetros.

### RESULTADOS

El análisis de los electroferogramas obtenidos por el método descrito demuestra que la hemolinfa del escorpión *Tityus colombianus*, está compuesta por un número variable de proteínas anódicas que oscila entre 3 y 5, según puede observarse en los electroferogramas y en los trazos densitométricos.

La Figura 1 presenta un electroferograma representativo de las proteínas hemolinfáticas, habiendo colocado en la extrema derecha un patrón humano.

El análisis densitométrico del patrón humano aparece semejante en todos los electroferogramas, caracterizado por cinco bandas bien definidas que corresponden a: Albúminas, Globulinas alfa 1, Globulina alfa 2, Beta globulinas y Gammaglobulinas. Estos patrones corresponden a los obtenidos en trabajos anteriores, lo cual garantiza el desarrollo normal de la electroforesis.

El análisis densitométrico de los electroferogramas muestra que pueden aparecer entre 3 y 5 bandas que representan grupos de proteínas. Por tanto hay bastante variación en las proteínas hemolinfáticas de los miembros de la población (Tabla No. 1).

La banda número 3, corresponde en el patrón humano a las globulinas alfa 1; la número 4, a las globulinas alfa 2; y la número 5 a las beta globulinas. En ninguna de las muestras de hemolinfa estudiadas aparece una sexta banda comparable a las gamma globulinas.

El análisis cuantitativo de los datos densitométricos permite calcular los miligramos de proteína presentes en cada banda, a partir del contenido total de proteínas de la hemolinfa.

La cuantificación de proteínas totales se realizó en la reacción de Biuret, en un fotocolorímetro Leitz, utilizando luz monocromática de 550 manómetros de longitud de onda, a partir de cuatro "pools" de hemolinfa. Los resultados se analizaron según la Ley Colorimétrica de Lambert-Beer.

Los valores promedio de miligramos en cada banda aparecen en la Tabla 2 en la cual se indica también la desviación standard para cada una.

### NUMERO Y PORCENTAJES DE INDIVIDUOS CON LAS DIFERENTES BANDAS PRESENTES

	Número de individuos	% de la población
BANDA 1	45	70.3%
BANDA 2	64	100. %
BANDA 3	64	100. %
BANDA 4	64	100. %
BANDA 5	8	12.5%

TABLA 1

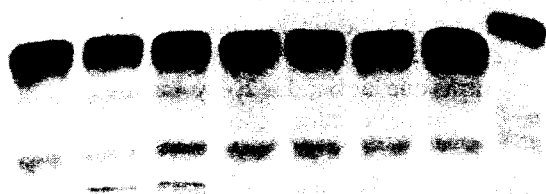


FIGURA 1

Electroferograma representativo de las proteínas hemolinfáticas correspondientes al escorpión *Tityus colombianus*. Colectadas en la Loma El Patronato. Control al extremo derecho.

### MILIGRAMOS DE PROTEINA PRESENTES EN CADA BANDA EN LA HEMOLINFA DE *Tityus colombianus*.

	MILIGRAMOS DE PROTEINAS	
	Desviación Standard	Medida
BANDA 1	0.13	0.14
BANDA 2	0.436	0.55
BANDA 3	0.17	0.32
BANDA 4	0.22	0.55
BANDA 5	0.182	0.305

TABLA 2

### DISCUSION

Tanto la hemolinfa de los invertebrados como la sangre de los animales más avanzados, son el fluido más representativo de cada especie, no sólo por su volumen, sino también por su composición química, sus propiedades osmóticas, por ser en última instancia el medio en el cual se desarrollan los tejidos. Este hecho justifica intentar un conocimiento más profundo y detallado de sus propiedades, y es también por esta razón la tendencia quimiotaxonómica moderna que pretende clasificar

las especies de acuerdo a la composición proteínica de sus fluidos internos. Varios autores, utilizando técnicas de electroforesis en papel, en geles de agar, y en almidón muestran variaciones en el número de bandas presentes en una misma especie, de acuerdo a su estado de desarrollo, a su condición fisiológica, a sus características sexuales, e incluso a su medio ambiente, lo cual dificulta notablemente este tipo de análisis.

Se han reportado diferencias en el número de bandas presentes en machos y hembras de los mosquitos *Culex pipiens* utilizando la técnica de inmunodifusión (Schuman 1973) y en *Drosophila melanogaster* por inmunoelectroforesis. (Robert, 1971). En anfibios, se han determinado variaciones interpoblacionales e intrapoblacionales de las proteínas plasmáticas (George et, al 1975) sin embargo, en la literatura revisada no se encuentra información semejante para el caso de los escorpiones.

Los resultados obtenidos muestran claramente una variación en el número de bandas y por tanto en el número de grupos proteínicos presentes en la hemolinfa de estos escorpiones. Según la Tabla 1, la banda 1, está presente, sólo en un 73.3% de los ejemplares estudiados, mientras que las bandas 2, 3 y 4 aparecen en todos. La banda 5, aparece únicamente en el 12.5% de los individuos.

Por su movilidad electroforética las proteínas que forman la banda 1, podrían denominarse pre-albúminas. Existen varias razones que pueden explicar el hecho de que estas prealbúminas no aparezcan en todos los ejemplares estudiados. En primera instancia, es posible que esta fracción proteínica exista en todos los escorpiones, pero que en algunos se encuentre en una concentración baja, que por este sistema no pueda detectarse. Existe además la posibilidad de que, como en otros casos informados (Fagerhol y Braend, 1965) esta fracción forme algún tipo de complejo con las albúminas de manera que ambas migren juntas, predominando las albúminas.

Se pensó que las bandas 1 y 5 podrían estar en algu-

na forma relacionadas con el sexo, como parece ser en otros casos (Schumann, 1973). Sin embargo, las bandas faltan indistintamente en machos y hembras.

Aparentemente tampoco se puede relacionar con el estado de desarrollo o madurez del animal, porque aunque sobre el ciclo de vida de esta especie se conoce muy poco. De acuerdo a su morfología externa, todos los ejemplares estudiados parecen ser adultos.

Finalmente vale la pena mencionar que varios investigadores (Heller et al 1932) han destacado la importancia de las proteínas hemolinfáticas en la regulación de la concentración de aminoácidos libres, lo que puede ocasionar la conversión de las proteínas en aminoácidos, pudiendo las bandas 1 y 5 en determinados casos ser convertidas a aminoácidos sin que ellos se detecten con el método utilizado.

Atribuir estas variaciones a fenómenos ecológicos parece difícil, ya que toda la población estudiada procede de un área relativamente pequeña y homogénea, en la que aparentemente no hay zonas de transición ecológica.

Es claro sin embargo que, por el método utilizado, aparece un polimorfismo en la población pero para obtener una imagen clara del mismo, es necesario estudiar otras poblaciones y posiblemente utilizar métodos más sensibles como electroforesis en gel de almidón o acrilamida para lograr una mejor resolución de las bandas proteínicas que aparecen en la hemolinfa del escorpión *Tityus colombianus*.

## RESUMEN

Se estudiaron 64 individuos de una población del escorpión *Tityus colombianus* por el método de electroforesis de microzona. Con este sistema se detectaron 3, 4 y 5 bandas anódicas en la hemolinfa de diferentes individuos. La banda No. 1 está presente en el 70.3% de la población, las bandas 2, 3 y 4 aparecen en todos los individuos estudiados y la banda No. 5 aparece en un 12.5% de la población. Se discuten posibles explicaciones a estas variaciones.

## BIBLIOGRAFIA

- AIZAWA, K. 1955. In, Wyatt G.R. 1961. The Biochemistry of insect hemolymph ann. Review of Entomol V: 6p-75.
- ANFISEN, C.E. 1959 The molecular basis of evolution John Wiley Sons, Inc. New York.
- ARMSTRONG H.S. 1947. Electrophoretic patterns of the human plasma Am Chem. Soc. 69: 416.
- BERTINI, F. y J.M. CEI 1960. Observaciones electroforéticas en Seroproteínas de poblaciones argentinas de Bufo arenarum. Rev. Soc. Argentina Biol. 36: 355.
- DRILHON A. 1946. Amino acids in blood Attacus, Lep. Bull. Soc. Chim. Biol. 28: 160-167.
- ENGELMANN F. y PENNY D. 1966. Studies on the endocrine control of metabolism in Leucophaea maderae Science, Wash 165, 407-409.
- FAGERHOL, M.K. y M. BRAEND 1965. Molecular Biology and origin of the species. University of Washington Press. Seattle.
- FLORKIN M. 1936. Chemistry of haemolymph Men Cour Acad Roy Belg 16:69.
- GEBOTT M. 1973. Microzone electrophoresis manual (Beckman). Calif. U.S.
- GEORGE, J. e I. ESCAMILLA. 1975. Estudio de Proteínas sanguíneas en una población de Eleutherodactylus bogotensis. Rev. Acad. Col. Ciencias. XXVI; 37.
- HELLER, J. 1930. Blood metamorphosis Deilephila, Lep Biochem Z. 219: 73-89.
- HELLER, J. 1932. Blood in metamorphosis Biochem Z. 255:205-221.
- LAUFER H. 1959. Studies of change in enzymatic activities of blood proteins in the developing silk moth XI Internacionales Kongress Fur etnologie Wien 1960 Verhan Lugen Band III Symposium 3: Chimie der insekten.
- MANWELL, C. y C. BAKER, 1970. Molecular Biology and the origin of species Univ. of species Univ. of Washington Press Seattle.
- MELLO LEITAO, 1945. Escorpiones Sud Americanos Arq. Mus. Nac. Brasil 40, 1-468.
- ODA 1956 in Wyatt G.R. 1961 the Biochemistry of insect hemolymph Ann Review of Entomol V: 75-102.
- ROBERTS D.B. 1971. Antigens of developing *Drosophila melanogaster*. Nature Lond. 233: 394-397.
- ROSELER P.F. 1973. "Anderungen im Muster Der Haemolymphproteine van Adulten Koniginnen der Hummelart *Bombus Terrestris* J. Insect Physiol Vol. 19 pp. 1.741-1.752.
- SANDE M.V. y D. KARDHER. 1960. Species differentiation of insects by Hemolymph electrophoresis. Science. V. 131 pp. 1.103-1.104.
- SCHUMANN W. 1973. Immunogenetic and electrophoretic studies with extract of different adult culex pipiens strains. Biol. Bull. VII: 206-223.
- SMITHIES O. 1955. In: Wyatt G.R. 1961. The Biochemistry of Insect of Insect hemolymph Ann review of Entomol. V: 6 p. 75-102.
- TELFER W.H. 1960. Biol Bull V: 118 pp. 338-351.
- VACHON M. 1953. The biology of scorpions Endeavour 12: 80-89.

# ASPECTOS DE LA DISTRIBUCION REGIONAL DE ALGAS MARINAS EN LA COSTA ATLANTICA DE COLOMBIA

REINHARD SCHNETTER\*

Botanisches Institut,  
Justus-Liebig-Universität,  
D-6300 Giessen, Alemania

De la flora de algas marinas bentónicas macroscópicas del litoral caribe colombiano se conocen actualmente alrededor de 350 especies (véase SCHNETTER 1976, 1978). El carácter de esta flora en primer lugar es tropical; por ejemplo no se han coleccionado géneros como *Nereia*, *Petalonia*, *Sporochnus* o *Stilophora* que se encuentran en las costas del Golfo de México y de Florida (véase TAYLOR 1928, 1960; EARLE 1969) y que aparentemente requieren para su desarrollo temperaturas inferiores a las que reinan en la Costa Atlántica de Colombia. Sin embargo, el ambiente marino no parece uniforme a lo largo de esta costa; comparando el espectro de especies de algas marinas en sitios diferentes, se pueden observar considerables diferencias. Las últimas en primer lugar se deben a tres complejos de factores ambientales marinos: a la salinidad, a la temperatura y al sustrato. Hay una serie más, de factores tanto bióticos como abióticos (véase KINNE 1970-1972) que no se tocarán aquí, sea que sólo incidan localmente o sea que aparentemente no influyan en mayor grado en la distribución horizontal de especies de algas en el litoral caribe colombiano.

Para algas bentónicas, el factor sustrato es uno de los más decisivos. Sólo muy pocas especies de éstas son capaces de desarrollarse en sustratos movedizos, especialmente si se trata de playas con moderado o fuerte movimiento de agua. Una de esas especies se ve en la figura 1. Se trata de *Gracilaria sjoestedtii* KYLIN, un alga roja que es capaz de fijarse sobre piedras a pesar de que las mismas cambien su posición por la acción del oleaje y además, el talo puede tolerar una cobertura arenosa. *Gracilaria sjoestedtii* se puede encontrar por eso a

veces en playas con arena y piedras, de exposición moderada al movimiento de agua que por lo general no muestran una flora bentónica. Litorales muy pobres en algas en la Costa Atlántica de Colombia, con predominancia de sustratos arenosos, son las siguientes: las playas entre el Cabo de la Vela (Guajira) y las estribaciones de la Sierra Nevada de Santa Marta, la Costa de Salamanca y grandes partes de los litorales suroccidentales. Por el otro lado, en playas rocosas existen condiciones mecánicas favorables para fijación de esporas, zigotes o propágulos de algas y para el desarrollo de los talos de las mismas. Playas rocosas con abundante vegetación de algas se encuentran en la Alta Guajira, en las estribaciones de la Sierra Nevada de Santa Marta y en la playa occidental del Golfo de Urabá; al oeste de Barranquilla hasta el Golfo de Morrosquillo existen por lo menos en ciertas partes playas con sustratos rocosos. Cabe mencionar los arrecifes de corales con sus condiciones especiales, como los de Islas del Rosario, de San Bernardo y de las Islas de San Andrés y Providencia.

La salinidad del agua marina es otro factor importante para las algas. Una reducción de la misma, en comparación con el valor normal en el mar, ocurre en los alrededores de las desembocaduras de ríos. En el nordeste del territorio colombiano los ríos más importantes en este sentido son los que llegan al mar desde la Sierra Nevada de Santa Marta, desde la desembocadura del Río Ranchería cerca de Riohacha y otras entre Riohacha y Ciénaga. El río Magdalena con su desembocadura principal cerca de Barranquilla influye también en la salinidad marina por la conexión entre la Ciénaga Grande de Santa Marta y el mar y por el Canal del Di que que desemboca cerca de Cartagena. Para los litorales occidentales cabe mencionar los ríos Sinú y Atrato.

En los alrededores de las desembocaduras de los ríos, la vegetación de algas marinas es pobre en especies

\* Los trabajos de campo se llevaron a cabo con una ayuda del Fondo Colombiano de Investigaciones Científicas y Proyectos Especiales "FRANCISCO JOSE DE CALDAS", COLCIENCIAS, Bogotá.

sin embargo, algunas pueden ser favorecidas por la salinidad reducida, como especialmente ciertas especies de *Enteromorpha* y *Ulva*; ambos géneros pertenecen a las clorofíceas. El agua de los ríos grandes en muchos casos no sólo influye en la vegetación de algas en las cercanías inmediatas de las desembocaduras, sino que el efecto del agua dulce puede ser observado también a distancias considerables de las mismas. Por corrientes marinas, que vamos a mencionar más tarde, la influencia del río Magdalena se puede notar hasta en la región de Santa Marta. A veces, después de grandes lluvias torrenciales en el interior del país, troncos de árboles pueden ser depositados en aquellas playas.

Respecto a la salinidad hay que tomar en cuenta otro complejo de factores que muestran influencias sobre las algas de la zona intermareal que es periódicamente cubierta y descubierta por el cambio de flujo y reflujo. Plantas que crecen allí deben tolerar salinidades elevadas en áreas o épocas húmedas como consecuencia de las lluvias.

La tasa de las fotosíntesis como la de la respiración y de otros procesos vitales dependen en alto grado de la temperatura. Los valores óptimos varían según la especie. Por lo tanto, la temperatura es un valor sumamente importante para cada planta. La temperatura del agua marina frente a la Costa Atlántica es relativamente constante en los litorales orientales y occidentales, mientras en la parte central, por ejemplo en los alrededores de Santa Marta, se pueden observar oscilaciones estacionales relativamente amplias para una región tropical. En los alrededores de las Islas de San Andrés y Providencia, las temperaturas de las aguas superficiales son de 28° C en agosto y de 27° C en enero, frente a Cartagena los datos respectivos son de 27,5° C y 26° C y frente a la Alta Guajira de 26,5° C y 24,5° C (PERLROTH 1971). Las oscilaciones alcanzan hasta 2° C, los valores absolutos son más bajos en la Guajira que en las partes occidentales (véase figura 5). En los alrededores de Santa Marta, las diferencias entre las temperaturas extremas de las aguas superficiales alcanzan por lo menos el doble, 4° C o más: en el verano (Enero) bajan a 22 - 23° C, mientras durante el invierno (Agosto - Noviembre) suben a 27 - 38° C (PERLROTH 1971; BULA 1977).

¿Cuál es la razón para estas diferencias? Para explicar las mismas hay que tomar en cuenta las corrientes marinas (figura 6). Frente a la costa de la Alta Guajira la Corriente del Caribe fluye hacia el oeste; por la orientación de la costa, esta corriente provoca un afloramiento de aguas de profundidad y por lo mismo se explica el nivel relativamente bajo de las temperaturas de las aguas superficiales. Más al oeste existe entre la corriente del Caribe y el litoral una contracorriente paralela a la costa dirigida hacia el noreste, la Corriente del Golfo de Morrosquillo. Como la última no provoca un afloramiento, las aguas superficiales son relativamente calientes.

Para la explicación de las grandes diferencias de temperatura en la región de Santa Marta, debe tomarse en cuenta la variación estacional de los vientos alisios. La velocidad y la fuerza de la Corriente del Caribe dependen hasta cierto grado de estos vientos procedentes del noreste. Los vientos alisios soplan fuertemente en el

verano y aumentan la velocidad de la corriente mencionada durante los meses de Diciembre hasta Marzo, y como consecuencia, en la mayor parte de esta época la contracorriente no llega hasta Santa Marta (figura 6: I, XII), donde tenemos un afloramiento de agua (figura 5) adicionalmente reforzado por los vientos que caen desde la Sierra Nevada (HERRMANN 1970, SCHNETTER 1970). La temperatura superficial del mar puede bajar a 23° C, según mediciones recientes. Más tarde, la influencia de los vientos alisios se disminuye y la contracorriente puede llegar hasta el Cabo de la Vela (figura 6: VI, VII, X). Bajo estas condiciones de invierno, las temperaturas del mar suben hasta 27° C en los alrededores de Santa Marta. Además, tanto en el curso del verano como especialmente en el invierno, durante algunos días pueden presentarse las condiciones de la estación opuesta, causando cambios de temperatura a corto plazo. En total, el área de las aguas de afloramiento es en el verano mayor que en el invierno: en el invierno se limita a la Alta Guajira, en el verano se extiende hasta Santa Marta (figura 5). Hay que mencionar aquí también que las aguas de afloramiento por lo general son relativamente ricas en nutrientes, pero todavía faltan suficientes datos al respecto para la Costa Atlántica de Colombia.

Las diferentes temperaturas de las distintas áreas influyen hasta cierto grado en la distribución regional de las algas marinas a lo largo del litoral caribe. De las aproximadamente 350 especies de algas bentónicas pertenecientes a las clorofíceas, feofíceas y rodofíceas la mitad se ha encontrado tan irregularmente que no puede tomarse en cuenta fitogeográficamente por el momento. Hacen falta observaciones adicionales. De los taxa que quedan, aproximadamente 90 crecen en toda la costa, 47 sólo se conocen de la región entre Santa Marta y la frontera de Venezuela, mientras 27 se han encontrado sólo en la zona al oeste de Santa Marta, en muchos casos exclusivamente al oeste de Puerto Colombia o solamente en las Islas de San Andrés y Providencia. Entre las últimas predominan las clorofíceas con 17 especies.

De la familia de las Sargassaceae, *Sargassum cymosum* C. AGARDH y *S. filipendula* C. AGARDH crecen en la Guajira y llegan hasta Santa Marta (figura 7). Ambas especies se consideran como típicas también para la zona de aguas de afloramiento frente a la costa venezolana (DIAZ-PIFERRER 1967). Posiblemente, *S. vulgare* C. AGARDH muestra el mismo tipo de distribución, pero los hallazgos colombianos son muy escasos hasta el momento (figura 7).

Es interesante, que el comportamiento estacional de *S. cymosum* en la Guajira es diferente al de la región de Santa Marta: en la Alta Guajira se pueden coleccionar talos bien desarrollados y fértiles durante todo el año, mientras que en el área de Santa Marta los talos bien desarrollados con gametangios se encuentran al comienzo del invierno; después la mayor parte de la planta muere y sólo el háptero y el corto eje principal sobreviven durante el invierno. En el verano siguiente los talos se desarrollan de nuevo. Por otro lado, *Sargassum polyceratium* MONTAGNE (incluyendo la variedad *ovatum* (COLLINS TAYLOR) que crece cerca de Santa Marta en los mismos sitios de *S. cymosum*, no existe en las áreas de las aguas de afloramiento de la Alta Gua-





*Gracilaria sjoestedtii* KYLIN en una playa arenosa con piedras cerca de Camarones, Departamento de la Guajira.

↑ Figura 1.

Asociación de *Turbinaria tricostata* BARTON (por la izquierda) y *Sargassum polyceratum* MONTAGNE var. *ovatum* (COLLINS) TAYLOR (a la derecha); Isla de San Andrés: Johnny Cay.

Figura 2. ↓

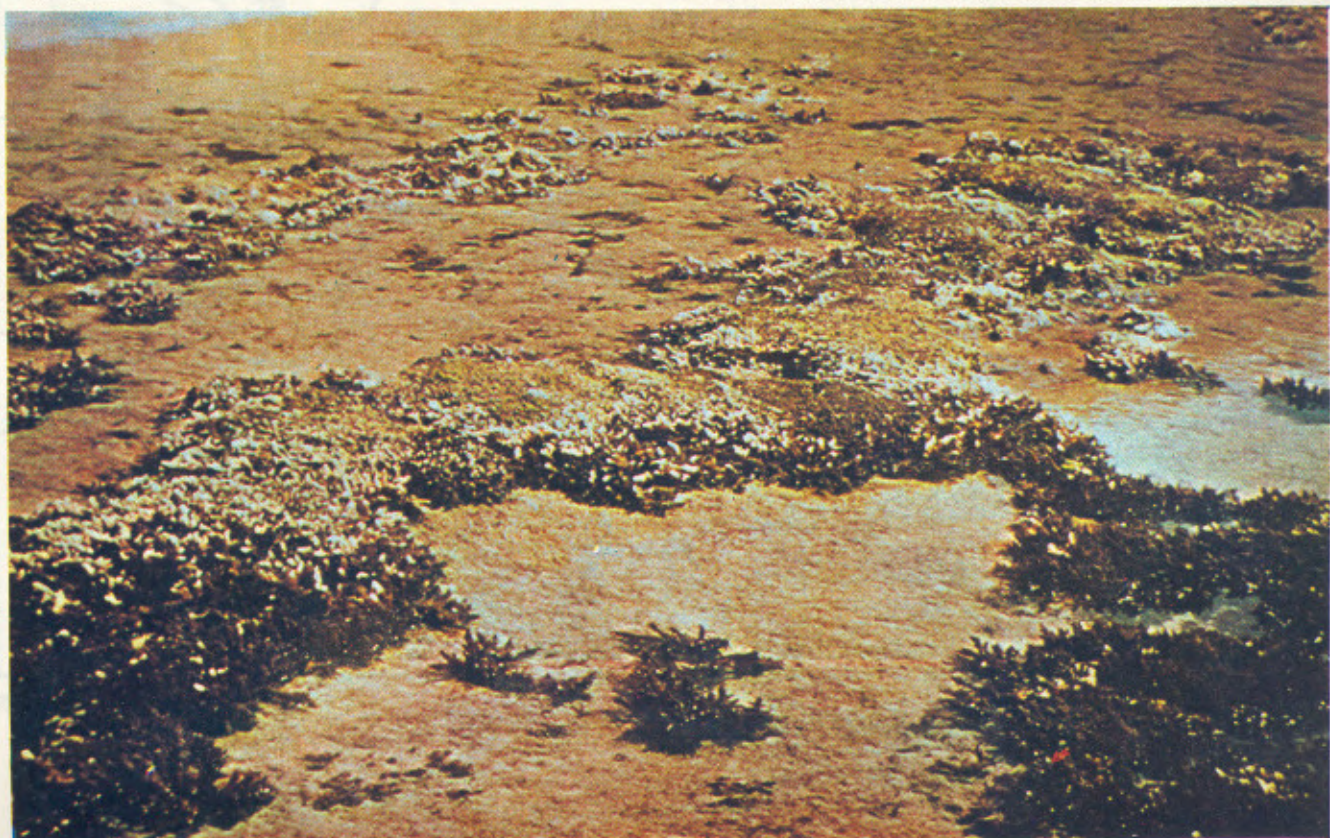






Clorofíceas y rodofíceas (Melobesioideae) en el borde de un arrecife de corales; en el centro del primer plano *Caulerpa racemosa* (FORSSKAL) J. AGARDH var. *uvifera* (TURNER) WEBER-VAN BOSSE; Isla de San Andrés.

Figura 4. ↓



↑ Figura 3.

Talos de *Laurencia papillosa* (FORSSKAL) GREVILLE y *Acanthophora spicifera* (VAHL) BORGESEN del eulitoral, parcialmente dañados (blancos) por un aguacero; época de verano; Ensenada de Neguanje, cerca de Santa Marta, Departamento del Magdalena.



jira. Las especies de *Turbinaria* están limitadas a las áreas con temperaturas superficiales constantemente altas. La asociación de *Sargassum-Turbinaria* es típica para estas áreas (DIAZ-PIFERRER 1970), en sitios de exposición moderada. Por ejemplo, *Sargassum polyceratum* var. *ovatum* puede encontrarse en las playas occidentales de San Andrés expuestas al oleaje fuerte, mientras en las orientales protegidas por los arrecifes, esta variedad ocurre junto con *Turbinaria* (figura 2).

Algunos ejemplos más: Las feofíceas del género *Chnoospora* sólo son conocidas de áreas con aguas de afloramiento; *Chnoospora minima* (HERING) PA-

PENFUSS está limitada a litorales muy expuestos al oleaje. *Padina vickersia* HOYT y probablemente también *P. gymnospora* (KUTZING) VICKERS son ampliamente distribuidas, mientras *P. tetrastromatica* HAUCK crece solamente en la costa de la Guajira y *P. haitiensis* THIVY y *P. sanctae-crucis* BORGESEN hasta el momento sólo se han encontrado en las áreas de los arrecifes de San Andrés y Providencia (figura 7).

Diferencias regionales respecto a su distribución también muestran especies del género *Caulerpa*. *C. mexicana* (SONDER) J. AGARDH y *C. sertularioides* (GMELIN) HOWE crecen en todas partes de la costa.

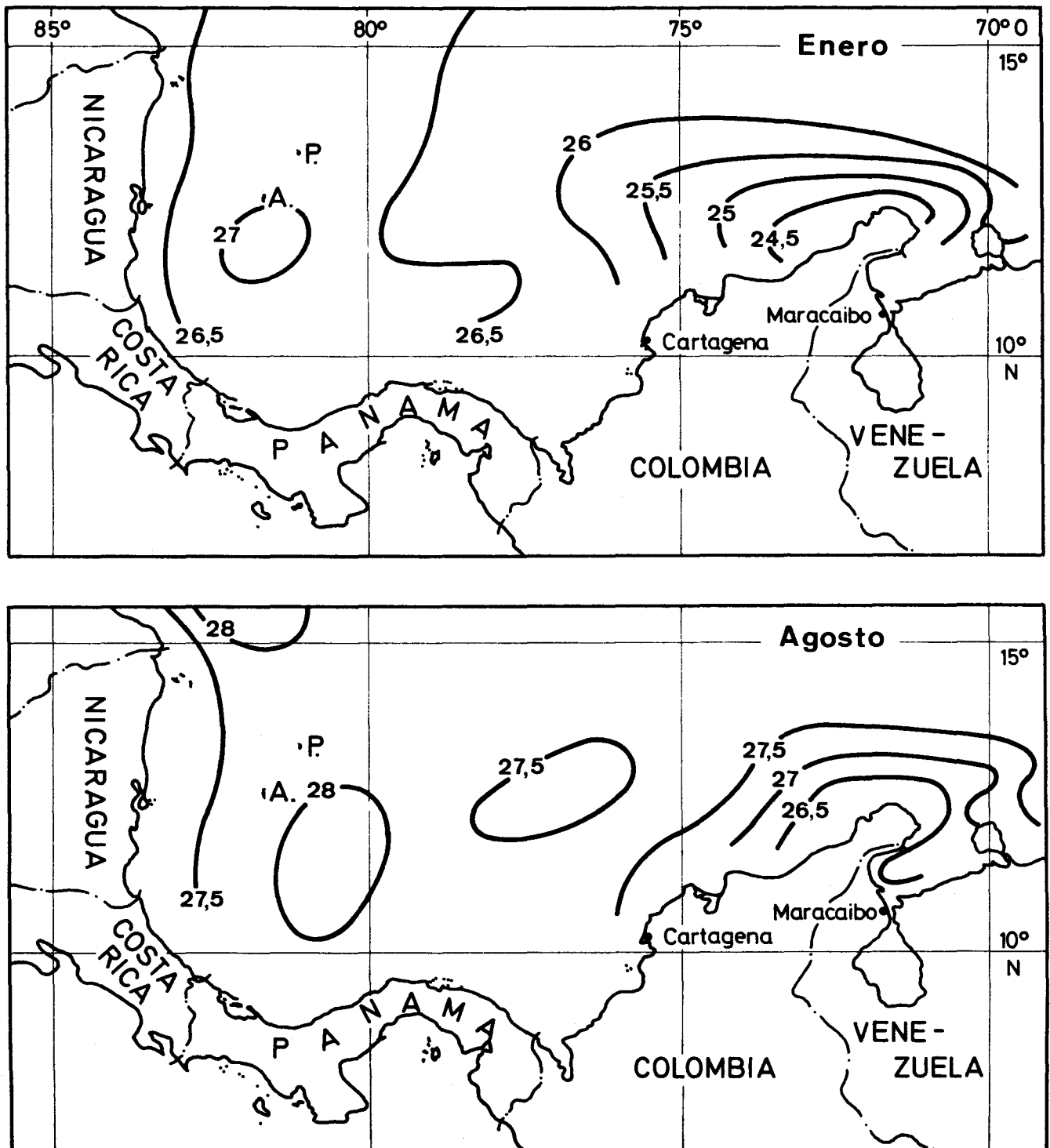


Figura 5.

Temperaturas de las aguas superficiales (en C°) durante los meses de Enero y Agosto, frente a la Costa Atlántica de Colombia (según PERLROTH 1971).

<i>Caulerpa cupressoides</i> var. <i>cupressoides</i>	—	—	—	—
<i>C. cupressoides</i> var. <i>flabellata</i>			—	—
<i>C. cupressoides</i> var. <i>lycopodium</i>		—	—	—
<i>C. cupressoides</i> var. <i>turmeri</i>	—	—	—	—
<i>C. fastigiata</i>		—	—	—
<i>C. mexicana</i>	—	—	—	—
<i>C. microphysa</i>			—	—
<i>C. occidentalis</i>	—	—	—	—
<i>C. peltata</i>		—	—	—
<i>C. prolifera</i>		.....	—	—
<i>C. racemosa</i> var. <i>laetevirens</i>			—	—
<i>C. racemosa</i> var. <i>uvifera</i>	—	—	—	—
<i>C. sertularioides</i>	—	—	—	—
<i>C. taxifolia</i>		—	—	—
<i>C. verticillata</i>		—	—	—
<i>C. vickersiae</i> var. <i>vickersiae</i>			—	—
<i>C. vickersiae</i> var. <i>furcifolia</i>			—	—
<i>Avrainvillea asarifolia</i>		—	—	—
<i>A. geppii</i>			—	—
<i>A. longicaulis</i>	—			
<i>A. rawsoni</i>	—			
<i>Udotea conglutinata</i>	—	—	—	—
<i>U. flabellum</i>	—	—	—	—
<i>U. occidentalis</i>	—	—	—	—
<i>Penicillus capitatus</i>	—	—	—	—
<i>P. dumetosus</i>	—	—	—	—
<i>P. lamourouxii</i>	—	—	—	—
<i>P. pyriformis</i>	—	—	—	—
<i>Halimeda discoidea</i>	—	—	—	—
<i>H. incrassata</i>	—	—	—	—
<i>H. monile</i>	—	—	—	—
<i>H. opuntia</i>	—	—	—	—
<i>H. simulans</i>	—	—	—	—
<i>H. tuna</i>	—	—	—	—
<i>Chnoospora minima</i>			—	—
<i>Ch. implexa</i>			—	—
<i>Padina gymnospora</i>	—	—	—	—
<i>P. haitiensis</i>	—	—	—	—
<i>P. sanctae - crucis</i>	—	—	—	—
<i>P. tetrastromatica</i>	—	—	—	—
<i>P. vickersiae</i>	—	—	—	—
<i>Sargassum cymosum</i>			—	—
<i>S. filipendula</i>			—	—
<i>S. polyceratium</i>	—	—	—	—
<i>S. vulgare</i>	—	—	—	—
<i>Turbinaria tricostata</i>	—	—	—	—
<i>T. turbinata</i>	—	—	—	—

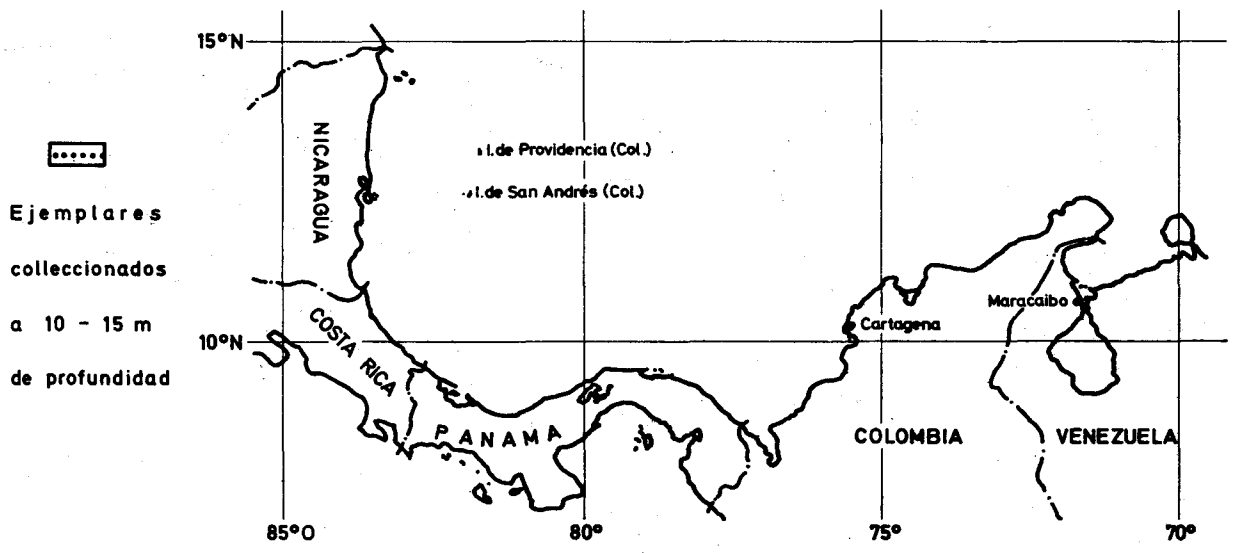


Figura 6.

Distribución regional de especies de clorofceas y feofceas en la Costa Atlántica de Colombia y las Islas de San Andrés y Providencia.



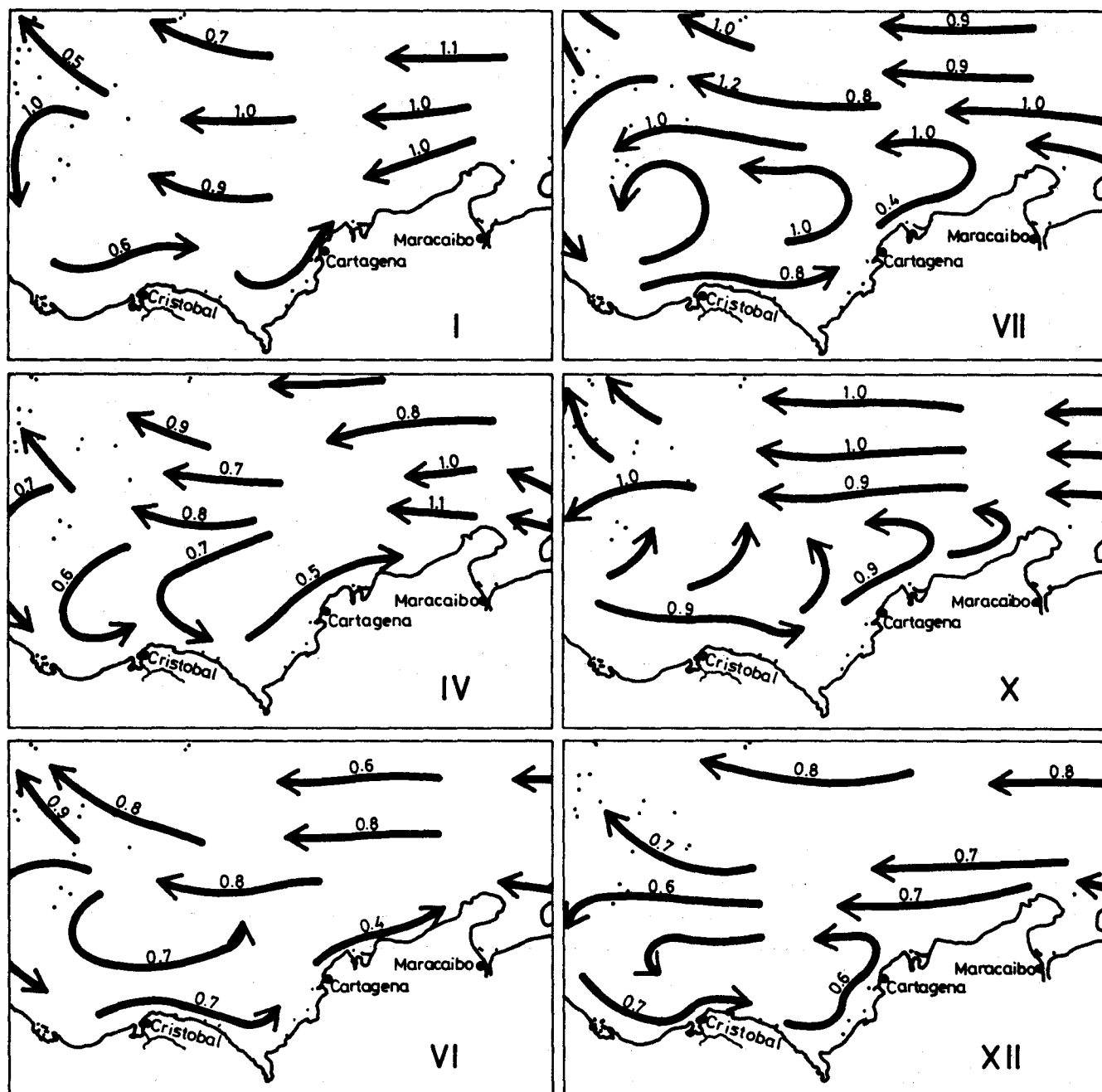


Figura 7.

Direcciones y velocidades (en nudos) en los meses de Enero (I), Abril (IV), Junio (VI), Julio (VII), Octubre (X) y Diciembre (XII), frente a la Costa Atlántica de Colombia y Panamá. (Según U.S. Naval Oceanographic Office 1965 - 1967).

Muy interesante es la distribución regional de *C. racemosa* (FORSSKÅL) J. AGARDH. Las variedades de esta especie aparentemente no pueden tolerar las grandes oscilaciones de temperatura cerca de Santa Marta. La variedad *laetevirens* (MONTAGNE) WEBER-VAN BOSSE crece en la Guajira, a temperaturas relativamente bajas, y en el oeste, vive la variedad *uvifera* (TURNER) WEBER-VAN BOSSE (figura 3) a temperaturas relativamente altas, pero ambas en zonas de poca oscilación térmica estacional (figuras 6 y 7). *Caulerpa prolifera* (FORSSKÅL) LAMOUREUX es conocida como una de las pocas especies de este género, principalmente tropical, que vive en el Mar Mediterráneo. Abunda en ciertos sitios de la Guajira, en la zona intermareal y en el sublitoral superior. La misma especie también se ha encontrado cerca de Santa Marta y Cartagena, pero sólo a 10 - 15 m de profundidad, aparentemente evitando así las cálidas aguas de la superficie (figura 7).

25° C se consideran como temperatura mínima para el desarrollo de los grandes arrecifes de corales. Fuera de las temperaturas altas, los arrecifes ofrecen en sus alrededores sustratos arenosos en sitios muy protegidos como los requieren varias especies de codiáceas de los géneros *Arainvillea*, *Halimeda*, *Penicillus* y *Udotea* indicadas en la figura 7, cuya distribución es principalmente occidental.

He mencionado las condiciones especiales del eulitoral, respecto a extremos valores de salinidad. Considerando, que 20 - 30 mm o más de precipitación por hora no son excepcionales en los aguaceros tropicales, se puede esperar que la sequía o la pluviosidad también influyan en la distribución de especies, así las algas eulitorales no sean muy resistentes contra salinidad elevada o agua dulce.

Para el último caso vale citar un ejemplo. En la re-

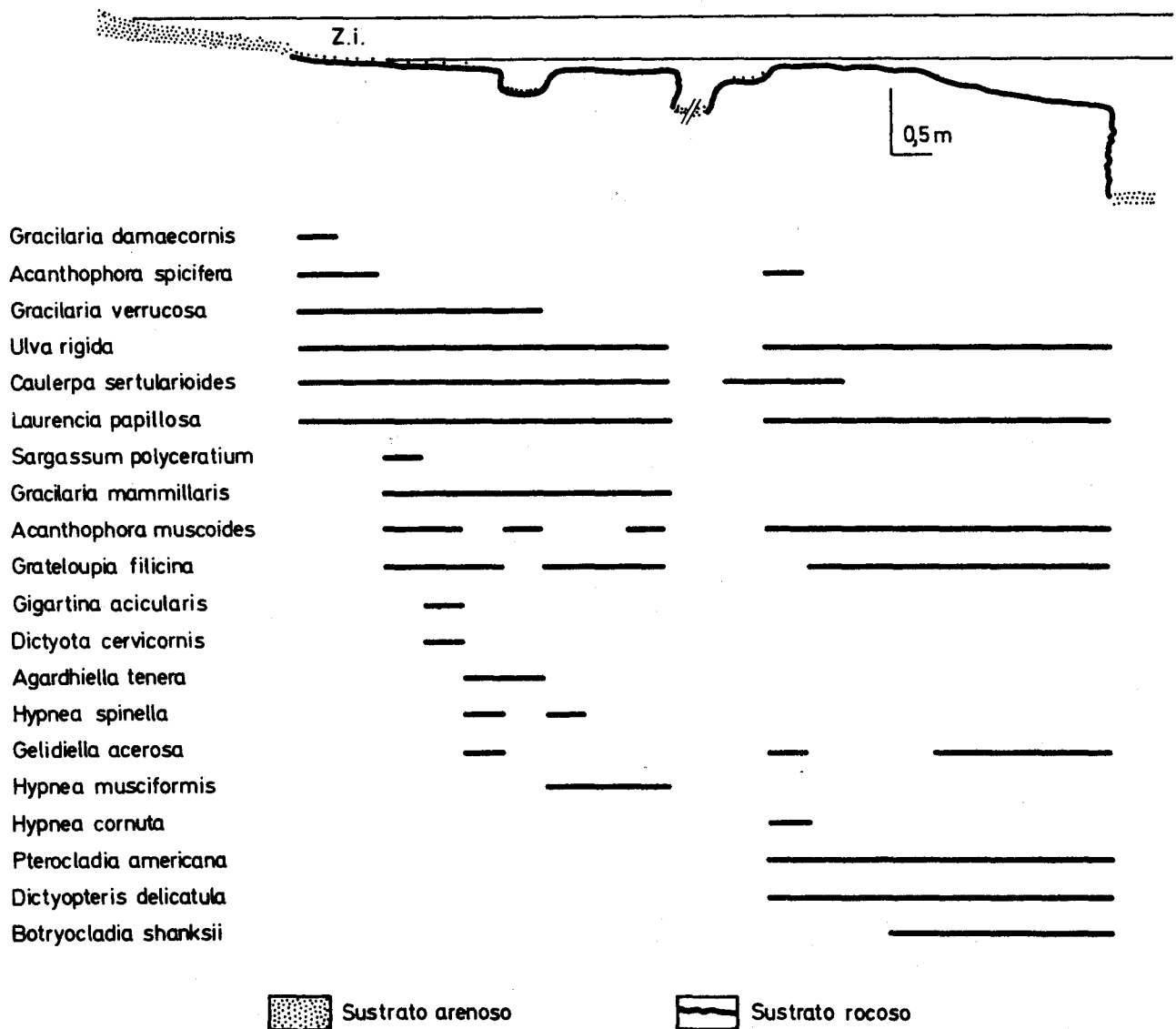
gión de Santa Marta, *Laurencia papillosa* (FORSSKAL) GREVILLE y *Acanthophora spicifera* (VAHL) BORGESEN son especies importantes hasta dominantes en la zona eulitoral de playas rocosas. Ambas especies desaparecen de muchos de estos biótopos durante el invierno y son reemplazadas por *Ulva rigida* C. AGARDH y especies de *Enteromorpha* y *Cladophora*. Durante el verano de 1975 hubo un aguacero excepcional en un día de febrero. La figura 4 muestra una playa protegida en la Ensenada de Neguanje, dos días después del aguacero mencionado: los talos o partes de talos que no se encontraban sumergidos en agua marina durante la caída de la lluvia murieron (véase también SCHNETTER & PANIZZO 1977).

Para tener una idea sobre la resistencia al agua dulce de algunas especies frecuentes, talos de las mismas fueron sumergidos en agua dulce durante tiempos diferentes y después cultivados en agua marina. El resultado muestra el cuadro 1. No en todos los casos se puede relacionar la zonación vertical de las algas con su resistencia al agua dulce. *Gracilaria mamillaris* (MONTAGNE) HOWE pertenece a las especies más resistentes, pero

esta no es típica para la zona eulitoral, posiblemente porque no tiene mucha resistencia a la sequía. *Corallina panizzoi* SCHNETTER & RICHTER sufrió daños después de 5 minutos. Esta especie se desarrolla en el eulitoral sólo en sitios muy expuestos al oleaje; los talos por eso constantemente son lavados por las olas. *Laurencia papillosa* muere después de una exposición de 15 minutos.

*Laurencia papillosa* y especialmente *Acanthophora spicifera* pueden desarrollarse en el eulitoral en la región de Santa Marta en el verano (véase la figura 8). Potencialmente, ambas especies pueden crecer también en sitios siempre sumergidos, pero parece que por competencia de otras algas frecuentemente no abundan en los últimos. En la figura 8 se puede observar que *Acanthophora muscoides* (LINNE) BORY se encuentra a mayor profundidad que las dos especies anteriores.

Respecto a las condiciones especiales que reinan en la zona intermareal o eulitoral, hay que tomar en cuenta que la lluviosidad varía considerablemente a lo largo de la costa. Las precipitaciones en la Guajira en muchos años



Zonación de algas en Punta La Loma cerca de Santa Marta, Departamento del Magdalena. Z. i. zona intermareal, limitada por los promedios de los niveles de flujo y reflujo.

Figura 8.

son inferiores a 500 mm, durante la mayor parte del año reinan condiciones secas, mientras por otro lado, en el Golfo de Urabá las precipitaciones anuales llegan a 2500 mm, y allí una época de verano casi no existe. Algunos datos (según el Banco de la República 1959, Instituto Geográfico "Agustín Codazzi" 1969, SCHNETTER 1970) en detalle:

	Precipitación anual en mm	Meses de sequía
Bahía Honda, Guajira	350	8
Santa Marta	600	6
Barranquilla	900	5
Cartagena	1.000	3
Turbo	2.400	—

Volvamos a la distribución vertical de las dos especies caribes de *Acanthophora* (figura 8): en el eulitoral se puede encontrar *Acanthophora spicifera*, frecuentemente cerca de Santa Marta; mientras que allí, en el sublitoral, crece *A. muscoides*. Coleccionando algas en la parte occidental de la costa se puede observar que *A. spicifera* pertenece a las especies raras o ausentes, no por las temperaturas del agua, sino 1° porque no puede desarrollarse en el eulitoral por las lluvias frecuentes y 2° porque no puede competir bien en el sublitoral con otras especies de algas.

Como conclusión de lo anterior propongo distinguir en la Costa Atlántica de Colombia perteneciente fitogeográficamente a la región tropical del Atlántico occidental (VAN DEN HOEK 1975), tres áreas marinas caracterizadas por la presencia o ausencia de ciertas especies de algas como consecuencia de diferentes regímenes de la temperatura del agua marina y condiciones meteorológicas (precipitaciones).

#### 1o. Area marina de la Guajira

Por aguas de afloramiento durante todo el año, las temperaturas oscilan entre 24,5° y 26,5° C aproximadamente. Por la sequía, en la zona del aulitoral pueden desarrollarse especies con poca tolerancia al agua dulce. Como especies características de la región se consideran *Sargassum cymosum*, *Caulerpa racemosa* var. *laetevirens*, *Acrosorium uncinatum* (TURNER) KYLIN (SCHNETTER & BULA 1978) y *Dictyopteris hoytii* TAYLOR (DIAZ-PIFERRER 1967, SCHNETTER 1978).

#### 2o. Area marina transitoria del Magdalena

Por aguas de afloramiento durante el verano y la influencia de una contracorriente caliente dirigida hacia el este durante el invierno, las temperaturas oscilan entre 23° y 27° C. En el eulitoral especies sensibles al agua dulce sólo pueden desarrollarse en el verano. Varias especies de algas de la anterior y de la siguiente área (como *Sargassum cymosum* y *Sargassum polyceratium*) tienen aquí sus límites de distribución. Aparentemente, otras, como *Caulerpa racemosa*, están ausentes, debido a las considerables variaciones estacionales de la temperatura que alcanzan 4° C en las aguas superficiales.

#### 3o. Area marina de la Costa Atlántica occidental

Por la ausencia de aguas de afloramiento, el nivel de las temperaturas superficiales es alto; las últimas oscilan entre 26° y 28° C. La flora de algas está caracterizada por una serie de especies tropicales en sentido estricto. Géneros y especies importantes son: *Halimeda*, *Penicillus*, *Rhizocephalus*, *Sargassum polyceratium* y *Turbinaria*. Algunos de los mismos pueden desarrollarse bien debido a la presencia de grandes arrecifes de corales (Islas del Rosario, de San Bernardo, de San Andrés, de Providencia) favorecidos por las condiciones térmicas. Las precipitaciones anuales de esta área son mayores que las de las dos anteriores.

Las tres áreas propuestas están separadas por relativamente largas playas muy pobres en algas, que aparentemente actúan como barreras contra la dispersión de ciertas especies. Entre el Cabo de la Vela y Riohacha, las playas son arenosas o fangosas; por la exposición moderada al oleaje, casi no hay algas bentónicas. A pesar de la corriente del Caribe que se dirige hacia el oeste, especies como *Acrosorium uncinatum*, típicas de zonas con aguas de afloramiento, no se han encontrado en el área marina del Magdalena durante la estación favorable a esta especie. Solamente una vez se halló cerca de Santa Marta un talo de *Porphyra umbilicalis* (LINNE) J. AGARDH (GUILLOT & MARQUEZ 1975), abundante en ciertas costas venezolanas con aguas de afloramiento (RODRIGUEZ 1959, DIAZ-FIPERRER 1970).

Entre el área marina del Magdalena y la del oeste de la Costa Atlántica se encuentra la Costa de Salamanca completamente arenosa y hostil a algas bentónicas. Además, las aguas del río Magdalena que frecuentemente corren paralelamente a la costa hacia el este impiden la migración de algas tropicales en el sentido estricto hacia el este durante la estación favorable del invierno.

Cuadro 1. Resistencia al agua dulce de algas marinas de la Costa Atlántica Colombiana. Los números corresponden a los tiempos de exposición en minutos que causan los primeros daños en los talos.

<i>Dictyota jamaicensis</i>	1	<i>Sargassum polyceratium</i>	10	<i>Giffordia mitchellae</i>	30
<i>Asparagopsis taxiformis</i>	1	var. <i>ovatum</i>		<i>Gelidiella acerosa</i>	30
<i>Colpomenia sinuosa</i>	1	<i>Pterocladia pinnata</i>	10	<i>Jania capillacea</i>	30
<i>Caulerpa sertularioides</i>	2	<i>Gracilaria sjoestedtii</i>	10	<i>Centroceras clavulatum</i>	30
<i>Dictyota cervicornis</i>	2	<i>Laurencia obtusa</i>	10	<i>Bryocladia cuspidata</i>	30
<i>Dictyopteris delicatula</i>	2	<i>Grateloupia filicina</i>	15	<i>Gelidiopsis planicaulis</i>	60
<i>Wrangelia argus</i>	2	<i>Gracilaria damaecornis</i>	15	<i>Gymnogongrus tenuis</i>	60
<i>Sargassum cymosum</i>	5	<i>Gracilaria verrucosa</i>	15	<i>Gracilaria mammillaris</i>	60
<i>Corallina panizzoi</i>	5	<i>Bryocladia thyrsgera</i>	15	<i>Gigartina acicularis</i>	60
<i>Hypnea musciformis</i>	5	<i>Acanthophora muscoides</i>	15	<i>Ulva rígida</i>	más de 60
<i>Ralfsia expansa</i>	10	<i>Laurencia papillosa</i>	15	<i>Chaetomorpha media</i>	más de 60
<i>Padina gymnospora</i>	10	<i>Digenia simplex</i>	15	<i>Grateloupia cuneifolia</i>	más de 60
<i>Padina vickersiae</i>	10	<i>Cladophora</i> , 2 especies	30		

Debido a las diferentes condiciones ambientales (valores absolutos de temperatura y sus oscilaciones así como las precipitaciones) la composición florística de algas en las tres áreas propuestas es desigual. Las asociaciones de algas en sitios comparables respecto a los factores ambientales restantes, como a su exposición al oleaje, no necesariamente son iguales. Por cuanto ahora las asociaciones de algas se usan como indicadores para

diferentes tipos de contaminación, un estudio detallado y comparativo de las comunidades de algas todavía no afectadas por influencias antropógenas en las tres áreas marinas parece necesario, no sólo por interés puramente científico, sino también para poder diagnosticar alteraciones desfavorables del ambiente marino oportunamente.

## BIBLIOGRAFIA

- Banco de la República: Atlas de economía colombiana, I. Aspectos físico y geográfico. Bogotá, 1959.
- BULA M., G.: Algas marinas bénticas indicadoras de un área afectada por aguas de surgencia frente a la costa caribe de Colombia. *An. Inst. Inv. Mar. - Punta Betín* 9, 45-71, 1977.
- DIAZ-PIFERRER, M.: Efectos de las aguas de afloramiento en la flora marina de Venezuela. *Carib. J. Sci.* 7, 1-13, 1967.
- DIAZ-PIFERRER, M.: Adiciones a la flora marina de Venezuela. *Carib. J. Sci.* 10, 159-198, 1970.
- EARLE, S.A.: Phaeophyta of the eastern Gulf of México. *Phycologia* 7, 71-254, 1969.
- GUILLOT M., G.H. y G.E. MARQUEZ C.: Estudios sobre los tipos de vegetación marina bentónica en el litoral del Parque Nacional Natural Tayrona, costa caribe colombiana. Tesis, Departamento de Biología, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, 1975.
- HERRMANN, R.: Deutungversuch der Entstehung der "Brisa", eines fohnartigen Fallwindes der nordwestlichen Sierra Nevada de Santa Marta, Kolumbien. *Mitt. Inst. Colombo-Alemán Invest. Cient.* 4, 83-95, 1970.
- HOEK, C. VAN DEN: Phytogeographic provinces along the coasts of the northern Atlantic Ocean. *Phycologia* 14: 317-330, 1975. Instituto Geográfico "Agustín Codazzi": Atlas de Colombia. 2a. Ed. XXVII, 216 pp., Bogotá, 1969.
- KINNE, O. (Editor): Marine ecology. A comprehensive, integrated treatise on life in oceans and coastal waters. I. Environmental factors. Part. 1, I - XIII, 1-681, Part. 2, I - XIII, 682-1.244, Part. 3, I - XIII, 1.245-1.774, Wiley-Interscience, London, 1970, 1971, 1972.
- PERLROTH, I.: Distribution of mass in the near surface waters of the Caribbean. *Sympos. Invest. Resources Caribbean Sea adjac. regions, Willemstad, Curacao*, 18-26 Nov. 1968, pp. 147-152, UNESCO, Paris 1971.
- RODRIGUEZ, G.: The marine communities of Margarita Island, Venezuela. *Bull. mar. Sci. Gulf Caribb.* 9, 237-280, 1959.
- SCHNETTNER, R.: Untersuchungen zum Standortsklima im Trokengebiet von Santa Marta, Kolumbien. *Mitt. Inst. Colombo-Alemán Invest. Cient.* 4, 45-75, 1970.
- SCHNETTNER, R.: Algas marinas de la Costa Atlántica de Colombia. I. Phaeophyceae. 125 p., *Bibliotheca Phycologica* 24, Vaduz, 1976.
- SCHNETTNER, R.: Algas marinas de la Costa Atlántica de Colombia. II. Chlorophyceae. 199 p., *Bibliotheca Phycologica* 42, Vaduz, 1978.
- SCHNETTNER, R. Y G. BULA M.: Rodoficeas nuevas para la Costa Atlántica de Colombia. *An. Inst. Invest. Marinas "Punta de Betín"*, 9, 00 - 00, 1978.
- SCHNETTNER, R. and L. PANIZZO D.: Ecological studies on eulittoral and upper sublittoral Caribbean algal communities near Santa Marta, Colombia. *J. Phycol.* 13 *Suppl.* 61, 1977.
- TAYLOR, W.R.: Marine algae of the eastern tropical and subtropical coasts of the Americas. IX, 870 pp., Univ. Michigan Press, Ann Arbor 1960.
- TAYLOR, W.R.: The marine algae of Florida, with special reference to the Dry Tortugas. *Pap. Tortugas Lab.*, Carnegie Institution, Washington, 25, 1 - 219, 37 pls., 1928.
- U.S. Naval Oceanographic Office: Pilot charts of the North Atlantic Ocean, 1966, 1967. Washington 1965 - 1967.



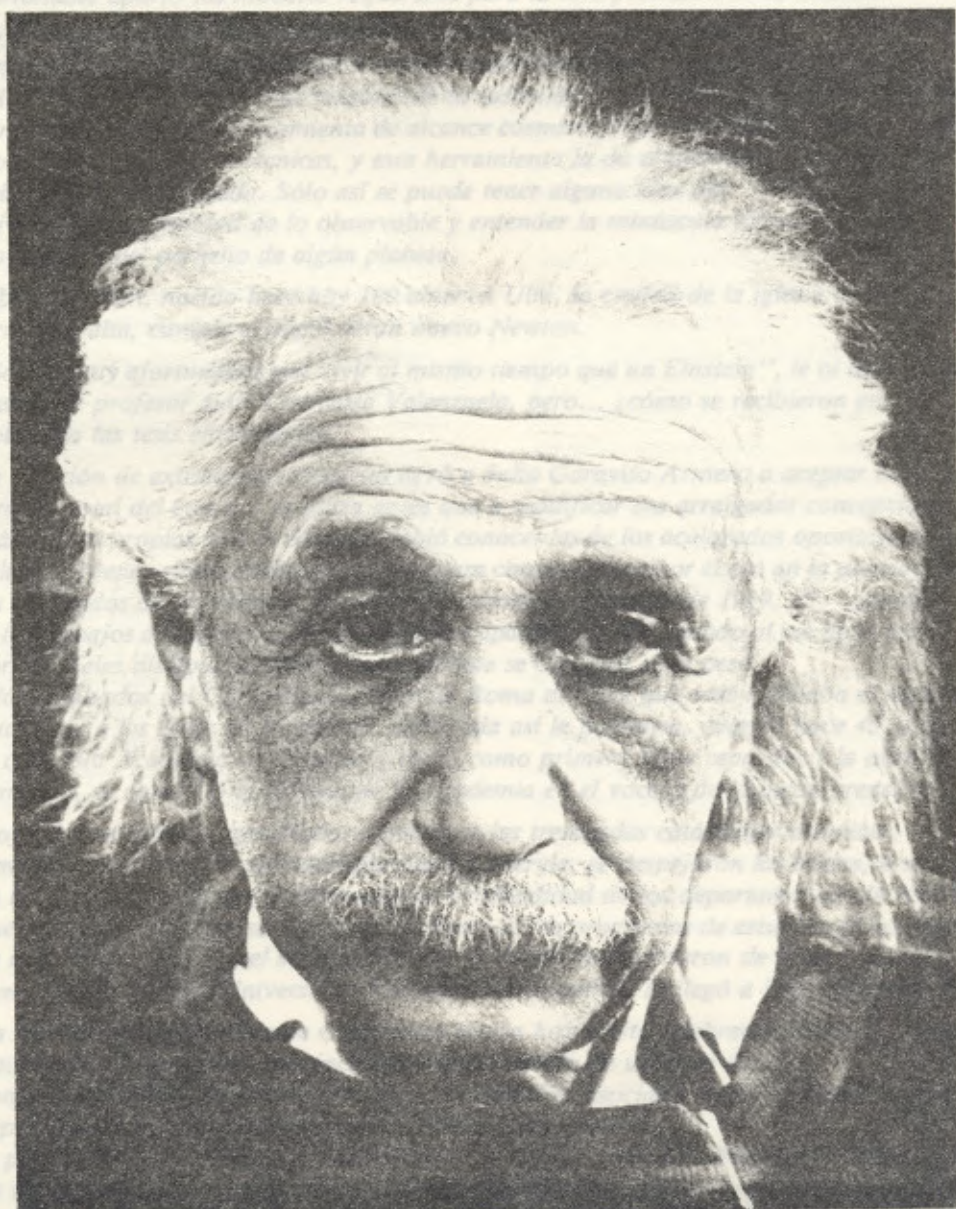
## ***La Academia celebra el Centenario del nacimiento de Albert Einstein (1879 — 1979)***

### *Palabras del Presidente de la Academia*

*La Academia decidió asociarse a las celebraciones que tuvieron lugar a nivel mundial, para honrar la memoria de Albert Einstein, una de las figuras científicas más destacadas del siglo XX, con motivo de haberse cumplido el 14 de marzo pasado, el 100° aniversario de su nacimiento.*

*Para iniciar la Conmemoración de la efemérides, la Academia celebró una sesión solemne el día 14 de marzo de 1979 en la sede de la Biblioteca Nacional.*

*Para abrir la sesión el señor Presidente, Ing. Jorge Arias de Greiff, pronunció las siguientes palabras (Pág. 77):*



## *Palabras del Presidente de la Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, doctor Jorge Arias de Greiff*

*Si desde el siglo XVIII los astrónomos-observadores antes que experimentadores-navegaron con certeza en un inmenso océano de datos, fue porque el marco de la mecánica newtoniana aportó los modelos requeridos para la interpretación de lo medido.*

*Hoy, el desarrollo de los medios de observación, y de la experiencia controlada-no sólo representado en los grandes telescopios clásicos sino en la radioastronomía y los nuevos sensores de la radiación, colocados aún fuera de la atmósfera terrestre-requiere una herramienta de alcance cósmico y al mismo tiempo de una exactitud acorde con las actuales técnicas, y esta herramienta la da el marco conceptual de la Relatividad Generalizada. Sólo así se puede tener alguna idea del universo en la totalidad de lo observable y entender la minúscula discrepancia en el movimiento del perihelio de algún planeta.*

*Albert Einstein, nacido hace hoy 100 años en Ulm, la ciudad de la iglesia con la torre más alta, cumple el papel de un nuevo Newton.*

*“Somos muy afortunados por vivir al mismo tiempo que un Einstein”, le oí decir en alguna clase a mi profesor Julio Carrizosa Valenzuela, pero... ¿cómo se recibieron en Colombia las tesis einsteinianas?*

*La posición de extremada ortodoxia llevó a Julio Garavito Armero a aceptar la tesis del arrastre total del éter por la tierra antes que a modificar sus arraigadas concepciones. Más que las propias tesis de Einstein debió conocer las de los acalorados opositores o celosos colegas. Apenas alcanzó Garavito a vivir para conocer-pero por el eco en la prensa mundial-los resultados de la primera comprobación durante el eclipse de 1919. El cuerpo de los trabajos de Garavito, de tan poderosa apariencia, fue tomado al pie de la letra por sus fieles discípulos; desafortunadamente se dio aquí gran peso a los resultados del Congreso de Física de Roma de 1932 que más reflejaba el rechazo totalitario a las ideas de Einstein y, reforzada así la polémica, cuando hace 45 años se creó esta Academia de Ciencias y tomó como primera tarea reproducir la obra de Garavito, se convirtió la Revista de la Academia en el vocero de la incompreensión.*

*Hoy, el panorama ha cambiado: a partir de las tremendas catástrofes atómicas, y mediante la fórmula que relaciona masa y energía, se despejaron las dudas, y más tarde, en los últimos años, por el desarrollo en profundidad de los departamentos de física de nuestras universidades, sin el factor limitante de los programas de estudios de las facultades de ingeniería, pero con el serio espíritu de trabajo que heredaron de ellas, y me refiero al de la Universidad Nacional de Colombia, se llegó a la comprensión.*

*La Academia Colombiana de Ciencias se asocia hoy a esta celebración mundial y abre con esta sesión un programa que incluye la organización de un ciclo de conferencias ilustrativas de los trabajos de Einstein, asociado a una exposición-ciclo y exposición que serán presentados en el Museo del Espacio-, la participación en seminario que organiza el Departamento de Física de la Universidad de los Andes, y otra sesión solemne para cerrar la celebración. Doy entonces la palabra al profesor Diógenes Campos, Director del Departamento de Física de la Universidad Nacional.*

# ALBERT EINSTEIN: ALGUNOS ASPECTOS EPISTEMOLOGICOS

*Diógenes Campos*

*Departamento de Física  
Universidad Nacional - Bogotá*

## *Resumen:*

*Se presentan algunos aspectos de la epistemología científica de Einstein: Tarea de la ciencia, teorías científicas como creaciones libres del intelecto, relación teoría-experimento, papel de la matemática en las teorías físicas, la "belleza" como principio rector en la búsqueda y selección de teorías físicas.*

## *I. Introducción*

Einstein (1879 - 1955) es considerado uno de los más eminentes físicos de todos los tiempos. Para apreciar plenamente las causas que han convertido a Einstein en una leyenda sería necesario analizar el estado de la física al comenzar nuestro siglo. Esto no es, sin embargo, el objetivo del presente trabajo. La popularidad de Einstein se debe al desarrollo de la teoría de la relatividad (especial y general). Esto, en particular, porque Einstein tuvo para ello que sobreponerse a la rigidez dogmática creada en la física por 250 años de éxitos continuos de la física newtoniana, entre los cuales el más sobresaliente es la descripción de los movimientos planetarios. El trabajo de Einstein en áreas distintas a la relatividad, tales como la física cuántica y la mecánica estadística, fue tan trascendente como los que realizó en torno a la relatividad misma. "Einstein desempeñó un papel excepcional, posiblemente el más relevante, en toda la revolución del pensamiento físico que ocurrió alrededor del primer cuarto de nuestro siglo". El premio Nobel le fue otorgado en 1921 no por sus contribuciones a la relatividad sino por su obra sobre el movimiento Browniano y la teoría cuántica de interacción entre la radiación y la materia. Se dice, con justa razón, que hay muy pocas ideas en la física contemporánea que no sean producto de los trabajos de Einstein.

Los trabajos de Einstein, sus ideas, sus diversos escritos han influido sobre nuestro mundo contemporáneo. Por lo tanto, el interés por su pensamiento respecto a la ciencia, el método científico, la tarea de la ciencia no está ligado a un círculo restringido de especialistas. Sobre estos aspectos quiero referirme en el presente trabajo.

## *II. Einstein: ¿Don Quijote o Sancho Panza?*

"Crear en un mundo externo independiente del sujeto que percibe es la base de toda ciencia natural" (4), afirma Einstein. La tarea de la ciencia está en buscar una explicación de ese mundo tal como él existe y evoluciona independientemente del intelecto humano.

Einstein aprecia que uno sólo puede ganar conocimiento parcial a través de la experimentación (experiencia sensorial). El afirma: "Sin embargo, debido a que la percepción sólo da indirectamente información de ese mundo externo o de la realidad física, nosotros podemos sólo entender esta última por medios especulativos. De esto se sigue que nuestras nociones de la realidad física nunca pueden ser definitivas. Siempre debemos estar dispuestos a cambiar estas nociones -es decir, la estructura axiomática- con el fin de hacer justicia a los datos percibidos de la manera más lógica y perfecta" (4). Para Einstein, "es necesario que el científico ponga sus conceptos en relación con el mundo de la experiencia de modo tan directo y necesario como sea posible" (5). "Pero la teoría no puede ser deducida lógicamente de la experiencia, ella es libremente inventada" (5).

Newton creía que las leyes y los conceptos físicos podían ser deducidos de la experiencia. Einstein, por el contrario, estaba convencido de que tal posición estaba condenada al fracaso y afirmaba que una experiencia dada no podía determinar una estructura lógica que sirviera como su representativo, que la base axiomática de la física teórica debía ser libremente inventada, que los conceptos no son deducidos de la experiencia, y que las teorías científicas son creaciones libres del intelecto. En otras palabras, los físicos para elaborar su ciencia no se limitan a registrar pasivamente datos experimentales sino que construyen un cuadro teórico con ayuda de principios y conceptos elegidos por ellos (5). Por otro lado, Einstein cree que una estructura lógica, no importa que tan deseable pueda ser por otras razones, no se puede considerar como una teoría física válida a menos que esté en concordancia con los resultados experimentales. Por lo anterior, es fácil ver que en Einstein se pueden descubrir tantos aspectos racionalistas como aspectos empiristas (6), y tal como él lo dice, para un científico "una oscilación entre estos extremos es inevitable" (6). Esto equivale a oscilar entre Don Quijote y Sancho Panza.

### III. Elección de Postulados para una teoría física

Einstein concebía la estructura teórica de la física como una vasta red de interrelaciones lógicas todas ellas basadas en conceptos fundamentales o postulados (1). Al igual que en la matemática, estos conceptos, por su naturaleza primaria, juegan un papel central en la física y no se pueden describir o definir en términos más primitivos; ellos forman parte esencial de una teoría y no se pueden modificar sin cambiar la teoría. Por ejemplo, la teoría de la relatividad especial se basa en dos postulados, denominados principio de relatividad y principio de constancia de la velocidad de la luz.

Los postulados constituyen la base axiomática de la física teórica y no se pueden deducir directamente de la experiencia, afirma Einstein. Significa esto, entonces, que la física teórica es pura especulación? No, todo lo contrario. Einstein no cree que podamos arbitrariamente fabricar estos principios básicos con el fin de satisfacer nuestros caprichos. El cree que el científico tiene el deber de establecer una unión con la realidad por una cuidadosa y sagaz elección de estos conceptos teóricos. Nosotros debemos procurar descifrar la naturaleza "real" del mundo físico, no crear algo para satisfacer a priori nuestros deseos y creencias. "La libertad de elección, sin embargo, es de una clase especial; de ninguna manera es similar a la libertad de un escritor de ciencia ficción. Más bien, es similar a la de un hombre entretenido en solucionar un crucigrama bien diseñado. El puede, en verdad, proponer cualquier palabra como solución; pero hay sólo una palabra que realmente soluciona el crucigrama en todas sus formas (8).

### IV. Comparación entre predicciones teóricas y resultados experimentales.

No es fácil para un físico evaluar si los postulados que ha elegido para desarrollar una teoría han sido elegidos, como dice Einstein, de manera cuidadosa y sagaz. Esto sólo se podrá determinar después de un trabajo extenso. Primero, es necesario trabajar dentro de un marco estrictamente teórico y analizar las relaciones lógicas entre los principios. Cuando esto se ha logrado ampliamente tiene el físico la obligación de unir la teoría a la experiencia con el propósito de comparar las predicciones teóricas con los resultados experimentales y así proporcionarle un fundamento estable a la estructura teórica (7). Solo si se hace esto se evita que la teoría sea pura especulación y sólo así se diferencia la fantasía vacía de la verdad científica.

Sólo si la teoría es correcta lógicamente y sus conclusiones están de acuerdo con los hechos observados llega la teoría a ser físicamente aceptable. Como, ciertamente, no todas las conclusiones pueden comprobarse mediante experimento, el científico nunca puede tener la certeza de que la teoría es válida, sino únicamente que puede ser válida y las teorías no pueden verificarse nunca sino que siempre son conjeturas, intentos de captar, o de entender la realidad escondida detrás del mundo fenoménico (11).

Einstein fue siempre fiel a la idea de someter sus teorías a la disciplina de pruebas experimentales rigurosas. Sólo así se puede saber si la elección de postulados ha sido cuidadosa y sagaz pero no se sabrá nunca de manera absoluta si ha sido la más cuidadosa y sagaz posible.

Popper comenta en una entrevista con Whitrow lo siguiente (10): "El (Einstein) se mostraba altamente crítico en relación con sus propias teorías, no solo en el sentido de tratar o de descubrir y señalar sus limitaciones, sino de descubrir en qué condiciones podía considerarse como refutadas por la experimentación". Popper menciona el siguiente ejemplo: "Cuando D.C. Miller, que siempre se había opuesto a Einstein, anunció que tenía pruebas irrefutables contra la relatividad especial, Einstein declaró de inmediato que si esos resultados podían ser comprobados sustancialmente renunciaría a la teoría de la relatividad especial y, con ella, también a la relatividad general".

A pesar de saber que una teoría lógicamente irrefutable podía ser sostenida contra la comprobación experimental desfavorable, no le interesó nunca hacerlo. Como físico Einstein creía en una realidad objetivamente existente y según él mismo "no se conformaba con descubrir algunas ecuaciones que correspondieran a las observaciones, sino que trataba de captar, de entender, esa realidad detrás de los fenómenos" (11). Para eso no había otra posibilidad que someter las teorías al visto bueno de las pruebas experimentales.

Para Einstein, la relación teoría-experimento es importante como criterio para evaluar las teorías. El no estuvo interesado en aplicaciones prácticas o posibles desarrollos tecnológicos de sus descubrimientos. El hizo lo que se denomina investigación básica. Sin embargo, sus investigaciones contribuyeron a lo largo a avances técnicos notables. El ejemplo más conocido es aquel en que Einstein demostró que, si un cuerpo emite energía  $E$  en la forma de radiación, su masa disminuye por una cantidad  $M$  tal que  $E = Mc^2$ , donde  $c$  es la velocidad de la luz. La fórmula permite considerar la materia como energía altamente concentrada y establece que la materia cambia en energía y viceversa. La explosión de la bomba atómica es la más dramática y espectacular comprobación de la fórmula  $E = Mc^2$  que es una consecuencia directa de la teoría de la relatividad especial. Veamos otro ejemplo: Su trabajo sobre la teoría cuántica de la radiación (9) de 1917. Einstein introduce métodos que han estado en uso casi sin cambios desde entonces, aunque la mayoría de quienes los emplean no saben que fue Einstein quien los formuló. En ese trabajo de 1917 Einstein postuló el proceso conocido como emisión estimulada, e infirió las propiedades de este proceso. Es el proceso empleado en el LASER, invento que ha permitido dirigir un rayo de luz a la luna y recibir una respuesta susceptible de detectarse, o hacer un agujero del espesor de un hilo a través de un diamante, o quemar tumores minúsculos en los ojos. Tal cosa estaba latente en la obra de Einstein durante cuarenta años antes de que los físicos apreciaran sus posibilidades. La obra de Einstein, producto de investigación básica, puede contener otros tesoros que todavía permanecen ocultos para nosotros (12).

### V. Papel de la matemática en una teoría física.

Einstein define el dominio de la física "como esa parte de la suma total de nuestro conocimiento que es capaz de ser expresado en términos matemáticos" (13). Esta afirmación hay que tomarla dentro de un contexto ya que sería erróneo afirmar que la física es para



Einstein sólo matemática. Einstein considera que las diferentes teorías científicas, que surgen a través de la evolución de la ciencia, son clasificables en diferentes niveles de abstracción. El nivel de mínima abstracción siendo aquel que está relacionado más directamente con el sentido común. Un nivel dado se obtiene del anterior por un proceso de refinamiento procurando explicar más fenómenos con un número menor de postulados. En el proceso de refinamiento el científico se ve obligado a emplear como herramienta la ciencia de la matemática debido en especial a la coherencia lógica que le es inherente. A medida que el nivel de abstracción aumenta se va haciendo más necesario el uso de la matemática.

Sin embargo, esto no es suficiente para garantizar que una teoría es físicamente satisfactoria. Para que sea verdadera es necesario además que ninguna experiencia la refute y que no sea una teoría pseudo-científica; esto es, una teoría que sólo está construida con cantidades que no son observables.

Ahora bien, durante una era dada (con sus hechos experimentales correspondientes) pueden surgir varias teorías "a consecuencia de que no hay un puente lógico y único entre fenómenos y principios teóricos". Einstein escribe que "la evolución ha demostrado que en cualquier momento dado, entre todas las construcciones teóricas concebibles, una única ha demostrado ser absolutamente superior a todas las demás". Es superior aquella teoría que posee más elegancia y simplicidad lógica. Más aún, "una teoría debe ser internamente consistente y matemáticamente bella para describir propiamente la realidad física" (13). La belleza se reconoce por características supremamente especiales que llaman la atención de los físicos y demandan sin duda alguna su admiración y reconocimiento. En particular, una teoría que permite poner "orden" en nuestras experiencias es una teoría bella. El orden requerido por Einstein no es, sin embargo, aquel que está asociado con un catálogo o

diccionario en el cual no hay coherencia lógica. Por el contrario, orden significa una capacidad para predecir fenómenos completamente nuevos y dar explicación de todas las experiencias disponibles con la ayuda de un mínimo de conceptos primitivos que están mutuamente interrelacionados a través de la teoría.

El mayor elogio de Einstein para un buen trabajo no era que fuera correcto o exacto sino que era hermoso, dice su hijo H.A. Einstein. A su vez comenta Bondi lo siguiente (14): Cuando alguien formulaba alguna sugerencia y Einstein no la encontraba coherente o razonable, él no la contradecía en absoluto, sino que decía únicamente "¡oh, qué feo!". Cuando una ecuación le parecía fea, perdía realmente el interés en ella y no podía entender por qué alguien estaba dispuesto a perder su tiempo en eso. Einstein estaba convencido de que la belleza era un principio rector en la búsqueda de resultados importantes en la física teórica.

#### VI. Referencias

1. Donald L. Reisler, Am. J. Phys. 39, 821-831, July 1971. "The Epistemological basis of Einstein's, Podolsky's and Rosen's objection to Quantum Theory".
2. G.J. Whitrow, *Einstein: el hombre y su obra*, Siglo XXI Editores, S.A., México (1969).
3. Pierre Thuillier, La Recherche 10, 14-22, Janvier (1979) "Le cas Einstein".
4. A. Einstein, *Essays in Science*, translated by Alan Harrin (Philosophical Library, New York, 1934) P. 40.
5. Ver. ref. (3), Pg. 15.
6. Ver. ref. (3), Pg. 17
7. Ver. ref. (1), Pg. 822
8. Ver. ref. (1), Pg. 823
9. Einstein, A. *Physikalische Zeitschrift* 18, 121 (1917)
10. Ver. ref. (2), Pg. 51
11. Ver. ref. (2), Pg. 52
12. Ver. ref. (2), Pgs. 75 y 76
13. Ver. ref. (1), Pg. 824
14. Ver. ref. (2), Pg. 121

# ESPACIO Y TIEMPO EN LA RELATIVIDAD ESPECIAL (\*)

Mauricio García Castañeda

Departamento de Física  
Universidad Nacional de Colombia

De acuerdo con la experiencia de la vida cotidiana, los conceptos de espacio y de tiempo son lo suficientemente claros como para reflexionar profundamente sobre ellos. Más aún, si desprevénidamente se formula la siguiente pregunta a cualquier persona “¿El Espacio y el Tiempo dependen del estado de movimiento del observador?”, se obtendrá un no rotundo. No existen evidencias en nuestro diario vivir, que muestren por ejemplo que dos relojes el uno en movimiento respecto al otro marchen a ritmos diferentes, o que al efectuar mediciones de longitudes se halle que dos cuerpos idénticos resulten de dimensiones distintas si se encuentran en movimiento relativo.

Las anteriores afirmaciones se pueden concretar en la suposición fundamental de la mecánica newtoniana, que dice: “El espacio y el tiempo son absolutos, es decir, independientes del estado de movimiento del observador”.

Además del carácter absoluto de espacio y tiempo existe en la denominada mecánica clásica un Principio de Relatividad, formulado por Galileo, y que puesto en un lenguaje moderno, es el siguiente: “Las leyes de la Física deben ser las mismas en todos los Sistemas Inerciales de Referencia”.

A continuación y para ser consistentes debemos examinar brevemente lo que es un Sistema Inercial de Referencia. Para empezar podemos decir que siempre que efectuamos una medición de alguna característica física, la hacemos (consciente o inconscientemente) respecto a un origen arbitrario. Arbitrariamente también fijamos en el espacio nociones como arriba, derecha, etc. Este conjunto de escogencias junto con el origen mencionado anteriormente constituye lo que se llama un sistema de referencia y es usual que el sistema de referencia adoptado sea un sistema cartesiano  $x, y, z$ .

Ahora bien, tal sistema de referencia es inercial, si en

él una partícula libre de toda influencia o más precisamente libre de fuerzas, conserva su estado de reposo o de movimiento uniforme. En otras palabras se busca que un sistema de referencia tal, el principio de inercia (1o. ley de Newton) se cumpla; de ahí el nombre.

De acuerdo con lo anterior, si un sistema de referencia se mueve con velocidad uniforme respecto a un sistema inercial de referencia, el primero debe ser también un sistema inercial de referencia. Ya podemos entonces examinar más precisamente el Principio de Relatividad de Galileo. Si dos observadores situados en dos sistemas de referencia inercial diferentes estudian determinado fenómeno, ambos deben llegar a concluir exactamente lo mismo.

Un observador (llamémoslo  $O$ ) utilizará 3 variables  $x - y - z$  para fijar coordenadas en el espacio, y utilizará un reloj con el cual medirá tiempos  $t$ , mientras el otro ( $O'$ ) empleará  $x' - y' - z'$  para el espacio y  $t'$  para el tiempo, en su sistema de referencia. Sin pérdida de generalidad supongamos que el observador  $O'$  se mueve en la dirección  $x-x'$  con velocidad  $V$  según se muestra en la siguiente figura.

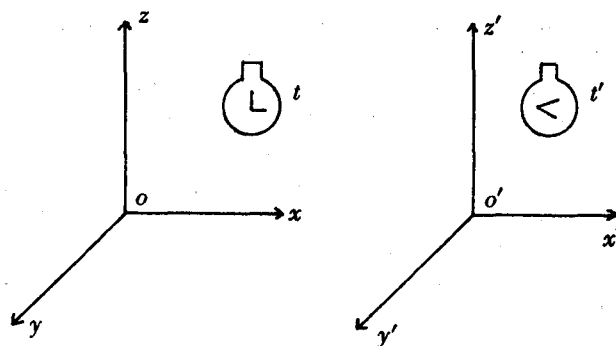


FIGURA No. 1 - Dos observadores  $O$  y  $O'$  en sendos sistemas de referencia inercial.

(\*) Conferencia dictada con motivo del Centenario del Nacimiento de Albert Einstein, en la sesión organizada por la ACADEMIA COLOMBIANA DE CIENCIAS EXACTAS FÍSICAS Y NATURALES y el DEPARTAMENTO DE FÍSICA de la Universidad Nacional de Colombia, el día 14 de marzo de 1979 en las instalaciones de la Biblioteca Nacional de Colombia.

Un ejemplo que puede servir para aclarar la situación es considerar que la caída de un cuerpo es analizada por dos observadores: uno sobre la calle, y otro desde un automóvil que se mueve con velocidad constante (se esta aceptando tácitamente que la tierra es un sistema inercial de referencia).

Si se pregunta a las dos personas cómo fue la trayectoria del cuerpo que cayó, obtendremos dos respuestas aparentemente antagónicas. En efecto: el primero de los observadores asegurará que la piedra sigue una trayectoria recta, mientras que el segundo de ellos asegurará que la trayectoria fue parabólica. Según el principio de Relatividad, el resultado debe ser único. Si el observador O (quien está sobre la calle) de acuerdo a la figura 1. utiliza las siguientes transformaciones:

$$\begin{aligned} x' &= x - Vt & t' &= t \\ y' &= y & z' &= z \end{aligned} \quad (1)$$

(suponiendo que en  $t = t' = 0$  los orígenes de los dos sistemas de referencia coinciden) encontrará que la trayectoria fue parabólica, o si el observador O' (quien se encuentra en el automóvil) de acuerdo a la figura 1. emplea las transformaciones:

$$x = x' + Vt' \quad t = t' \quad z = z' \quad y = y' \quad (2)$$

encontrará que la descripción del otro observador es coherente.

El conjunto de ecuaciones (1) y (2) son las denominadas Transformaciones de Galileo las cuales garantizan que la Mecánica Newtoniana cumpla el principio de Relatividad. Se suele afirmar también que la Mecánica Clásica es *invariante* (que no cambia la forma de las ecuaciones) bajo transformaciones de Galileo.

En la historia del desarrollo de la Física se dio un gran momento de síntesis cuando en la segunda mitad del siglo pasado J. C. Maxwell logró explicar todos los fenómenos hasta entonces estudiados de la electricidad y el magnetismo. En efecto, lo que en la actualidad conocemos por Electrodinámica Clásica está por completo contenida en las ecuaciones de Maxwell. Sin embargo se presentaba un serio inconveniente. A partir de las ecuaciones de Maxwell se puede predecir y explicar el comportamiento de las ondas electromagnéticas a partir de la llamada ecuación de onda, que no resultaba invariante bajo transformaciones de Galileo, y además predecía que el valor de la velocidad de propagación de las ondas electromagnética en el vacío, resultaba ser independiente de la velocidad de la fuente, cosa que claramente contrariaba no solamente el sentido común, sino también el marco teórico de la Física.

En el año de 1905 en un artículo titulado "Sobre la electrodinámica de los cuerpos en movimiento", Albert Einstein, formula lo que hoy en día es conocida como la Relatividad Especial o Restringida con base en sólo 2 postulados, uno de los cuales es novedoso. El primer postulado, es el postulado de Relatividad; "Las leyes de la Física deben ser las mismas en todos los sistemas inerciales de Referencia", en donde por tratarse solo de sistemas inerciales la teoría recibió el apelativo de Restringida o Especial.

El segundo postulado es el de la constancia de la velocidad de la luz; "La velocidad de la luz en el vacío  $c$  es la misma en todos los sistemas inerciales de referencia, independiente del movimiento de la fuente".

La adopción del segundo postulado encierra grandes determinaciones: es aceptar que la electrodinámica descrita con base en las ecuaciones de Maxwell están correctamente formuladas, y que por lo tanto son las transformaciones de Galileo las que son necesario corregir. En consecuencia, la formulación Newtoniana de la Mecánica y toda la Mecánica Clásica debe ser tan sólo una aproximación y por tanto la Cinemática y la Dinámica deben poseer otra forma y tener otro sentido. En particular las variables cinemáticas de espacio y tiempo que sirven para definir otras cantidades como velocidades, aceleraciones, etc., deben sufrir profundas modificaciones.

Veamos las consecuencias del segundo postulado de la Relatividad Especial sobre el espacio y tiempo. La existencia de una velocidad absoluta, la velocidad de la luz, implica casi inmediatamente que ésta sea la máxima velocidad posible en la naturaleza (300.000 Km/seg. aprox.), y por consiguiente, la máxima velocidad de propagación de información, materia, energía, etc.

Este hecho nos induce ni más ni menos, a abandonar la idea de velocidades infinitas de propagación de información. Por tanto cuando existan dos o más observadores separados espacialmente, cualquier suceso que genere uno de ellos necesitará un tiempo distinto de cero para que el resto de observadores se enteren de lo ocurrido.

Este hecho nos induce ni más ni menos, a abandonar la idea de velocidades infinitas de propagación de información. Por tanto cuando existan dos o más observadores separados espacialmente, cualquier suceso que genere uno de ellos necesitará un tiempo distinto de cero para que el resto de observadores se enteren de lo ocurrido.

Por consiguiente, el concepto de simultáneo (o simultaneidad), pierde su carácter absoluto y se torna Relativo al observador particular. Realmente un suceso simultáneo (temporal o espacialmente) para un observador, puede no serlo para otro observador en movimiento relativo respecto al primero. Podemos analizar los siguientes ejemplos sencillos. Supongamos que una persona sobre la calle golpeó las palas de las manos dos veces. El asegurará que esos encuentros tuvieron simultaneidad espacial pues fueron hechos EN EL MISMO PUNTO DEL ESPACIO, aun cuando no exista simultaneidad temporal. Sin embargo, para cualquier otro observador que se mueva relativamente respecto al primero los dos sucesos no serán simultáneos ni espacial ni temporalmente. Este resultado no es del todo sorprendente. Tomemos ahora el siguiente caso: el mismo observador golpea al mismo tiempo (simultáneamente) sus manos contra el suelo (obviamente en dos sitios distintos), para el otro observador tampoco existirá simultaneidad temporal. (Eventualmente podría existir simultaneidad espacial).

Al tomar el tiempo asiladamente, obtenemos uno de los resultados más sorprendentes de la Relatividad Especial (no entraremos a derivaciones formales, más bien, enunciaremos el resultado), respecto al sentido común o a la experiencia cotidiana.

Al mirar de nuevo la figura 1. supongamos que el observador O mide de alguna manera tiempos (utilizando un reloj, contando pulsos de su corazón, por medio

de rayos de luz, etc.), de tal manera que O y el instrumento están en reposo el uno respecto al otro. Sea to el tiempo medido por O. Si el observador O' se mueve con velocidad v respecto a O el MEDIRA UN TIEMPO t dado por

$$t = t_0 / \sqrt{1 - v^2/c^2}$$

Como es de esperarse v siempre es menor que c y por tanto

$$1 / \sqrt{1 - v^2/c^2}$$

es siempre mayor que 1. Entonces t es mayor que to. Este resultado muestra cómo el tiempo es relativo al observador y se denomina DILATACION TEMPORAL. Se puede interpretar lo anteriormente expuesto diciendo que los relojes en movimiento andan más despacio, dilatando el tiempo. Es importante aclarar que este resultado es, primero: INDEPENDIENTE del mecanismo del reloj. Se pueden emplear varios métodos para medirlo, y segundo, que este resultado es COMPLETAMENTE SIMETRICO, es decir, que si O' es quien hace las mediciones en reposo respecto a su método para medir tiempos, entonces O medirá el tiempo dilatado si la velocidad relativa sigue siendo v.

Se puede observar también que el resultado de la dilatación temporal solo depende del cuadrado de la velocidad relativa y no de la dirección de tal movimiento. (Al fin y al cabo el espacio es homogéneo e isotrópico).

Lo discutido anteriormente sirve para definir el denominado TIEMPO PROPIO. Cuando se mide la evolución de determinado proceso físico, si el observador y el asunto investigado se encuentran en reposo el uno respecto al otro, se habrá medido el TIEMPO PROPIO de tal proceso.

Pasemos ahora a discutir el efecto que sobre el espacio tiene el 2o. postulado de la Relatividad Especial.

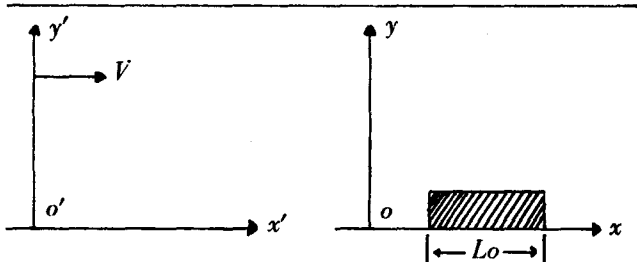


Fig. 2. - Medición de la longitud de una barra por dos observadores O y O' en movimiento relativo con velocidad uniforme v.

De acuerdo a la figura 2. se tiene un observador O que mide la longitud PROPIA de una barra Lo (es decir el observador O y la barra están en reposo el uno respecto al otro), y el observador O' se mueve con velocidad

uniforme v respecto a O. O' va a encontrar la siguiente medición para la barra:

$$L = L_0 \sqrt{1 - v^2/c^2}$$

es decir contraída un factor  $\sqrt{1 - v^2/c^2}$  que es menor que 1.

Este resultado se conoce como la CONTRACCION DE LAS LONGITUDES O CONTRACCION DE LORENTZ-FITZGERALD, establecido a finales del siglo pasado por Lorentz y Fitzgerald para intentar explicar los resultados negativos del experimento de Michelson y Morley. Sin embargo, en ese momento no se conocía realmente el origen de tan "misteriosa contracción". Hoy se entiende que este efecto se debe a la constancia de la velocidad de la luz.

Podemos discutir ahora, por qué no son observables en la vida cotidiana tales efectos, y por qué estos resultados chocan con el sentido común. Tanto en la dilatación del tiempo como en la contracción de las longitudes interviene el factor  $\sqrt{1 - v^2/c^2}$ . Solamente en aquellas circunstancias en que la velocidad involucrada sea grande y se pueda comparar con la velocidad de la luz, se apreciarán estos resultados relativistas. En lo cotidiano las velocidades son del orden de los kilómetros por hora, cifras que son muy pequeñas comparadas con c. En estos casos  $v^2/c^2$  tienden a cero y por tanto  $\sqrt{1 - v^2/c^2}$  tiende a 1. Así  $t = t_0$ ;  $L = L_0$ , es decir, se obtienen los resultados clásicos sobre el carácter absoluto del espacio y el tiempo.

Para finalizar esta introducción a la cinemática Relativista, basta mencionar cuáles son las transformaciones que permiten pasar de un sistema inercial de Referencia a otro de tal manera que la Física resulta invariante y que además posea intrínsecamente el 2o. Postulado de la Relatividad. Tales transformaciones reciben el nombre de Transformaciones de Lorentz, y de acuerdo a la figura 1. se escriben como:

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \gamma' = \gamma; z' = z; t' = \frac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

es interesante notar que en el caso de velocidades pequeñas v comparadas con c, de una manera espontánea se llega de nuevo a las transformaciones de Galileo, es decir, la reproducción del conocimiento clásico de la mecánica newtoniana, descripción aproximada de los fenómenos mecánicos en la naturaleza, pero lo suficientemente precisa en nuestro mundo, un mundo cuyo dominio de velocidades es bien pequeño comparado con la velocidad de la luz.

## BIBLIOGRAFIA

1. The Principle of Relativity, H.A. Lorentz, A. Einstein, H. Minkowsky, H. Weyl. Dover, 1952.
2. Einstein's Theory of Relativity. Max Born, Dover, 1962.
3. Conceptos de Relatividad y Teoría Cuántica. Robert Resnick. Limusa, 1976.
4. J. Ewert, M. García. Conferencias Físicas IV, Departamento de Física, Universidad Nacional, 1979.

# MI ENCUENTRO CON EINSTEIN

Por **JORGE ANCIZAR-SORDO, Ph. D.**

Miembro de Número de la Academia Colombiana  
de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales

Como se aproxima la celebración del centenario del nacimiento de Albert Einstein, en Ulm (Alemania) el 14 de marzo de 1879, he creído interesante agregar a las numerosas anécdotas de este sabio, y como modesto homenaje a su memoria, una que me concierne directamente y que muestra algunos rasgos de su extraordinaria personalidad. El miércoles 15 de mayo de 1940, a las 2 y 30 p.m., tenía lugar, en Constitution Hall de Washington, una sesión especial de la Sección de Ciencias Físicas y Químicas del Octavo Congreso Científico Americano, reunido en esa ciudad del 10 al 18 de mayo de 1940, bajo los auspicios del Gobierno de los Estados Unidos de América. En dicha sesión debía dictar una conferencia Albert Einstein, entonces Profeso de Matemáticas del Institute for Advanced Study de la Universidad de Princeton, en Princeton, Estado de New Jersey, sobre "Considerations Concerning the Fundaments of Theoretical Physics" ("Consideraciones concernientes a los fundamentos de la física teórica" (1).

En la primera fila del Constitution Hall tomamos asiento el doctor Lyman J. Briggs, Director del National Bureau of Standards, Presidente de la Sección de Ciencias Físicas y Químicas; el doctor Eugene C. Crittenden, Subdirector del National Bureau of Standards, Secretario de la Sección, y el autor de este artículo, Relator de la misma Sección, quedando a su derecha un asiento libre para el Conferencista. Cuando entró Einstein, después de saludar a los doctores Briggs y Crittenden, quienes ya lo conocían, me fue presentado a mí y se sentó a mi derecha. Mientras llegaba el momento de abrir la sesión y de que el doctor Briggs presentara en público a Einstein, se inició con mi ilustre vecino un diálogo muy cordial. Einstein me preguntó acerca de mi país de origen y de mis antecedentes profesionales. Al contestarle que era colombiano y que mi formación universitaria había tenido lugar en Suiza hasta culminar con el doctorado en química en la Universidad de Friburgo, continuó interrogándome acerca de mis profesores, y, al recordar que algunos de ellos habían sido conocidos y amigos suyos durante su permanencia en Suiza, tanto como funcionario de la Oficina Federal de Patentes en Berna, como Profesor de la Escuela Politécnica Federal

de Zurich, la conversación tomó mayor interés. El me dijo con cuánto placer recordaba esa época y cómo le agradaría hablar conmigo de esos tiempos pasados. Entonces me pidió que fuera a su hotel esa noche, al terminar las labores del Congreso. Con la natural expectativa y el mayor interés, salí antes de que terminara la recepción ofrecida esa tarde, como culminación del programa del día, por el Subsecretario Auxiliar de Estado, Señor Adolf A. Berle, Jr. y la señora de Berle en "Woodley", y me dirigí a toda prisa al hotel donde se hospedaba Einstein, que, si mi memoria no me engaña era el Hotel Hamilton, para dar cumplimiento a su cita. En la recepción me dijeron que el Profesor debía estar en su habitación porque la llave no se encontraba en su apartado, y que me anunciarían por teléfono. Varias llamadas que se hicieron con tal fin resultaron infructuosas. Definitivamente no contestaban de la habitación. Desilusionado de no haber podido celebrar la tan deseada entrevista, me marché, pensando que ese sabio distraído había olvidado la cita y sabe Dios dónde estaría, a pesar de la afirmación de los empleados de su hotel.

Dos días después tuve una prueba de la sencillez y la exquisita cortesía de este grande hombre cuando recibí en el Hotel Washington la carta que él me dirigió al cuidado del National Bureau of Standards, puesta al correo en Princeton, New Jersey, el 16 de mayo de 1940 a las 8 p.m., y que, con orgullo, reproduzco en este artículo.

Princeton 16. 5. 40.

Lieber Herr Dr. Sordo

Es ist mit Ihrem Vortrag bei mir ein  
Hugendeb passiert, bei dem ich mich mit  
allem Recht auf "frühere Jugend" berufen  
kann. Ich war nämlich, genau wie die vorerwähnte  
Stunde in nicht aufnehmbare Weise im  
Angebot einer festgehaltenen, wodurch sich meine  
schlechte Zuneigung vergrößerte.

Insoweit ich hoffe, dass diese Zusammenkunft  
tadellos durchgeführt werden kann, da ich  
mit freundlichen Grüßen

Albert Einstein

INTERNATIONAL  
POSTAL UNION  
OFFICE OF STAMPS  
UNITED STATES



(1) Proceedings of the Eighth American Scientific Congress, Volume VII, Physical and Chemical Sciences. Department of State, Washington, 1942, pp 19-27.

Facsimil de la carta de Einstein

*Su traducción, no literal, para hacerla más castiza, es la siguiente:*

*"Princeton, 16. V. 40.*

*"Muy distinguido Señor Dr. (Anczar) Sordo:*

*"Me sucedió un percance con el recibimiento de usted en mi hotel, por lo cual, con todo el derecho, me excuso por "fuerza mayor". Yo me encontraba exactamente a la hora convenida, retenido de manera urgente en el baño, así que dejé de recibir su llamada.*

*"Deseario que ese encuentro pueda ser recuperado, quedo, con amistosos saludos,*

*Suyo*

*A. EINSTEIN".*

*De la conversación que sostuve con Einstein antes e instantes después de su conferencia, me quedó la impresión indeleble de su sencillez; de "la luz angelical que brotaba de sus ojos", como dijera de él Salvador de Madariaga; de la mirada del hombre lleno de saber y de experiencia, y, al mismo tiempo, de esa sonrisa que brotaba directamente del corazón y que inspiraba admiración y afecto.*