



ISSN 0370-3908 · eISSN 2382-4980

Revista de la Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales





ISSN 0370-3908 • eISSN 2382-4980

Revista de la Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales

Vol. 49 • Número 192 • Págs. 465-696 • Julio - Septiembre de 2025 • Bogotá - Colombia

Comité editorial

Editora

Elizabeth Castañeda, Ph. D., editora jefe
Investigadora emérita del Instituto
Nacional de Salud, Bogotá, Colombia

Grupo de apoyo

Marta Renza, correctora de estilo
Johanna Morales, diagramadora
Bibiana Dimate, Publindex
Pablo Alexander Tenjo, asistente técnico

Asistente editorial

Carolina Acosta

Editores asociados

Ciencias Biomédicas

- Luis Fernando García, M.D., M. Sc.
Profesor emérito, Universidad de Antioquia,
Medellín, Colombia
- Gustavo Adolfo Vallejo, Ph. D.
Universidad del Tolima, Ibagué, Colombia
- Juanita Ángel, Ph. D.
Pontificia Universidad Javeriana,
Bogotá, Colombia
- Manuel Franco, Ph. D.
Pontificia Universidad Javeriana,
Bogotá, Colombia
- Alberto Gómez, Ph. D.
Pontificia Universidad Javeriana,
Bogotá, Colombia
- John Mario González, Ph. D.
Universidad de los Andes, Bogotá, Colombia
- María Mercedes Zambrano, Ph. D.
Corpogen, Bogotá, Colombia
- Juan G McEwen, Ph. D.
Universidad de Antioquia, Medellín, Colombia

Ciencias del Comportamiento

- Guillermo Páramo, M.Sc.
Universidad Nacional de Colombia,
Bogotá, Colombia
- Ana María Groot de Mahecha, M. Sc.
Universidad Nacional de Colombia,
Bogotá, Colombia

- Fernando Cárdenas, Ph. D.
Universidad de los Andes, Bogotá, Colombia

Ciencias Físicas

- Pedro Fernández de Córdoba, Ph. D.
Universidad Politécnica de Valencia, España
- Diógenes Campos Romero, Dr. rer. nat.
Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, Colombia
- Román Eduardo Castañeda, Dr. rer. nat.
Universidad Nacional, Medellín, Colombia
- María Elena Gómez, Ph. D.
Universidad del Valle, Cali
- Gabriel Téllez, Ph. D.
Universidad de los Andes, Bogotá, Colombia
- Jairo Roa-Rojas, Ph. D.
Universidad Nacional de Colombia,
Bogotá, Colombia
- Ángela Stella Camacho Beltrán, Dr. rer. nat.
Universidad de los Andes, Bogotá, Colombia
- Edgar González, Ph. D.
Pontificia Universidad Javeriana, Bogotá, Colombia
- Rafael Julián González Hernández, Ph. D.
Universidad del Norte, Barranquilla, Colombia
- Carlos Duque, Ph. D.
Universidad de Antioquia, Medellín, Colombia
- Camilo Younes, Ph. D.
Universidad Nacional de Colombia,
Manizales, Colombia

Ciencias Naturales

- ④ José Luis Fernández Alonso, Ph. D.
Real Jardín Botánico, Consejo Superior de
Investigaciones Científicas, Madrid, España
- ④ Jaime Cantera, Doctorat d'Etat
Universidad del Valle, Cali, Colombia
- ④ Gabriel Roldán, Dr. rer. nat.
Universidad Católica de Oriente, Rionegro, Antioquia, Colombia
- ④ Sandra Baena Garzón, Ph. D.
Pontificia Universidad Javeriana, Bogotá, Colombia
- ④ Néstor Hernando Campos Campos, Ph. D.
Universidad Nacional de Colombia, Sede Caribe, Colombia
- ④ Martha Patricia Ramírez Pinilla, Ph. D.
Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, Colombia
- ④ Jairo Castaño-Zapata, Ph. D.
Universidad de Caldas, Manizales, Colombia
- ④ Juan Manuel Díaz Merlano, Ph. D.
Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, Colombia
- ④ Gerardo A. Aymard C, Ph. D.
Universidad Nacional de los Llanos Ezequiel Zamora, Venezuela
- ④ Néstor Julio García, Ph. D.
Pontificia Universidad Javeriana, Bogotá, Colombia
- ④ Arturo Acero, Ph. D.
Universidad Nacional de Colombia, Santa Marta, Colombia
- ④ Elizabeth Hodson de Jaramillo, Ph. D.
Pontificia Universidad Javeriana, Bogotá, Colombia
- ④ John Donato, Ph. D.
Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, Colombia
- ④ Martha R. Campos, M. Sc.
Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, Colombia
- ④ Carolina Romero, M. Sc.
Herbarium, Missouri Botanical Garden, Estados Unidos
- ④ Eduardo Flórez, Ph. D.
Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, Colombia
- ④ Silvia Villabona, Ph. D.
Universidad Católica de Oriente, Rionegro, Antioquia, Colombia
- ④ Natalia Ocampo Peñuela, Ph. D.
Universidad de California, Santa Cruz, Estados Unidos
- ④ María Eugenia-Morales, Ph. D.
Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia,
Tunja, Colombia

Ciencias Químicas

- ④ Sonia Moreno Guaqueta, Ph. D.
Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, Colombia
- ④ Myriam Sánchez de Gómez, Ph. D.
Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, Colombia
- ④ Fernando Martínez, Docteur en Chimie
Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, Colombia

- ④ Luis Fernando Echeverry, Ph. D.
Universidad de Antioquia, Medellín, Colombia
- ④ Carmenza Duque Beltrán, Ph. D.
Universidad Nacional de Colombia,
Bogotá, Colombia

Ciencias de la tierra

- ④ Carlos Alberto Jaramillo Muñoz, Ph. D.
Smithsonian Tropical Research Institute, Panamá
- ④ José Daniel Pabón, Ph. D.
Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, Colombia
- ④ Alexander Correa, Ph. D.
Instituto de Geología, Universidad Nacional
Autónoma de México, Mexico
- ④ Camilo Montes, Ph. D.
Universidad del Norte, Barranquilla, Colombia
- ④ Germán Bayona, Ph. D.
Corporación Geológica Ares, Bogotá, Colombia
- ④ Hernando Dueñas Jiménez, Ph. D.
BIOSS SAS, Antioquia, Colombia
- ④ Natalia Hoyos, Ph. D.
Universidad del Norte, Barranquilla, Colombia
- ④ Camila Martínez, Ph. D.
Universidad Eafit, Medellín, Colombia
- ④ Monica Carvalho, Ph. D.
University of Michigan, Estados Unidos
- ④ Oris Rodríguez-Reyes, Ph. D.
Universidad de Panamá
- ④ José Gregorio Portilla, Ph. D.
Observatorio Astronómico Nacional de Colombia,
Bogotá, Universidad Nacional, Colombia
- ④ Santiago Vargas-Dominguez, Ph. D.
Observatorio Astronómico Nacional de Colombia,
Bogotá, Universidad Nacional, Colombia

Matemáticas

- Jorge Ivan Cossio Betancur, Ph. D.
Universidad Nacional, Medellín, Colombia
- ④ Luis Español González, Ph. D.
Universidad de la Rioja, España
- ④ Luis Carlos Arboleda, Doctor
Universidad del Valle, Cali, Colombia
- ④ Clara Elena Sánchez, Ph. D.
Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, Colombia
- Fernando Zalamea Traba, Ph. D.
Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, Colombia
- ④ Carlos Enrique Mejía, Ph. D.
Universidad Nacional, Medellín, Colombia
- ④ Francisco Marcellán, Ph. D.
Escuela Politécnica Superior, Madrid, España
- ④ Fernando León Saavedra, Ph. D.
Universidad de Cádiz, España

Comité científico internacional

- Carlos Jiménez, Ph. D.
Universidad de La Coruña, España
- Wolfgang Gieren, Ph. D.
Universidad de Concepción, Chile
- Alfonso Castro, Ph. D.
Harvey Mudd College, Claremont, CA, EEUU
- Rodolfo Castillo, Ph. D.
Fort Lauderdale, Florida, EEUU
- José Rubens Pirani Ph. D.
Universidade de São Paulo, Brazil
- Federico Ardila, Ph. D.
San Francisco State University, San Francisco, CA, EEUU
- Juan Alfredo Tirao, Ph. D.
Academia Nacional de Ciencias Córdoba, Argentina
- Pedro Romero, Ph. D.
Instituto Ludwig de la Universidad de Lausana en Suiza
- Ulrich Paessler, Ph. D.
Academia de Ciencias de Berlín-Brandenburgo, RFA
- Maria Sagrario Millán, Ph. D.
Universidad Tecnológica de Tarrasa, España
- Zbigniew Jaroszewicz
Centro de Fotónica Aplicada, Instituto Tele y Radiotécnico, Instituto Nacional de Telecomunicaciones, Polonia
- José Luis Moran López, Dr. rer. nat.
Academia Mexicana de Ciencias, México
- Jean-Pierre Galaup
Universidad de París Saclay, Francia
- Helena Nader, Ph. D.
Academia Brasileira de Ciencias, Brasil
- Roberto JJ Williams, Ph. D.
Academia Nacional de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Argentina
- Walter Fernández Rojas, Ph. D.
Presidente Academia Nacional de Ciencias, Costa Rica
- Alex Held, Ph. D.
Commonwealth Scientific and Industrial Research Organisation (CSIRO), Australia
- Rafael Radi, M.D.
Academia de Ciencias de Uruguay

Reseñada en los siguientes índices nacionales e internacionales:

Dialnet	Online Computer Library Center (OCLC)	Web of Sciences (WoS)
DOAJ	Publindex, Colciencias	Zentralblatt für Mathematik
Emerging Sources Citation Index (ESCI)	SCOPUS	
Latindex	SciELO, Colombia	

Publindex, Minciencias (convocatoria 910 de 2021), categoría C

Periodicidad: trimestral
Fecha de inicio: 1936

Esta publicación se ha financiado mediante la transferencia de recursos del Gobierno Nacional a la Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. La Academia no es responsable de las opiniones aquí expresadas.

Reservados todos los derechos. El contenido de la presente publicación no puede ser reproducido, ni transmitido por ningún procedimiento electrónico, mecánico, incluyendo fotocopia, grabación magnética, ni registrado por ningún sistema de recuperación de información, en ninguna forma, ni por ningún medio, sin la previa autorización por escrito del titular de los derechos de explotación de la misma.

Cualquier forma de reproducción, distribución, comunicación pública o transformación de esta obra solo puede ser realizada con la autorización previa de la Academia Colombiana de Ciencias Exactas Físicas y Naturales.



Nuestra portada

Se presenta una composición de imágenes que ilustran la morfología vegetativa y reproductiva de *Philodendron asplundii* Croat & M.L. Soares en el estado de Pará, Amazonia oriental, Brasil. Se destacan las nervaduras en la superficie abaxial de la lámina foliar y los catáfilos que forman una red de fibras, así como las inflorescencias en preantesis y en antesis, y la infrutescencia con detalles de las bayas y un corte transversal del fruto que revela los lóculos.

Fotografías por Ana Laura da Silva Luz.

Ver artículo: da Silva-Luz AL, dos Anjos-Souza MF, Villela Antolin-Barberena FF. Expansion of the distribution range and ecological niche modeling of *Philodendron asplundii* (Araceae) in South America. Revista de la Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. 49(192):546-555, julio-septiembre de 2025. doi: <https://doi.org/10.18257/raccefyn.3095>



ISSN 0370-3908 · eISSN 2382-4980

Revista de la Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales

Vol. 49 · Número 192 · Págs. 465-696 · Julio - Septiembre de 2025 · Bogotá - Colombia

Contenido - Contents

Ciencias Físicas
Physical Sciences

[Artículo original](#)

Un análisis de las primeras observaciones astronómicas realizadas en el Observatorio Astronómico de Santafé de Bogotá

An analysis of the first astronomical observations made at the Astronomical Observatory of Santafé de Bogotá

J. Gregorio Portilla 471

[Artículo original](#)

Modelos de media móvil integrada autorregresiva de la radiación solar global en el distrito San Jerónimo de Andahuaylas, Perú

ARIMA models of global solar radiation in the San Jerónimo de Andahuaylas district, Perú

Reynaldo Ricardo Quispe-Infantes 486

[Artículo original](#)

Modelización matemática para la predicción y disminución del ruido vehicular en entornos urbanos

Mathematical modeling for the prediction and mitigation of vehicular noise in urban environments

Javier Alcázar, Sandra Campuzano 501

[Artículo original](#)

La teoría de cuerdas y la AdS/CFT: dos formalismos en proceso de construcción

String theory and AdS/CFT: two formalisms in progress

Andrés Felipe Beltrán, Servio Tulio Pérez-Merchancano, Luz Elena Bolívar-Marinez 513

[Original article](#)

Study of the structural and optical properties of CuInSe₂ thin films obtained by RF sputtering as a function of the deposition temperature

Estudio de las propiedades estructurales y ópticas de películas delgadas de CuInSe₂ obtenidas mediante pulverización catódica por radiofrecuencia en función de la temperatura de depósito

Jorge Montes-Monsalve, Roberto Bernal-Correa, Arturo Morales-Acevedo, Álvaro Pulzara-Mora 532

**Ciencias
Naturales**
Natural Sciences

Original article

Expansion of the distribution range and ecological niche modeling of *Philodendron asplundii* (Araceae) in South America

Expansión del rango de distribución y modelamiento del nicho ecológico de *Philodendron asplundii* (Araceae) en América del Sur

Ana Laura da Silva-Luz, Mateus Felipe dos Anjos-Souza, Felipe Fajardo Villela Antolin-Barberena 546

Original article

Reproductive biology of *Macrobrachium amazonicum* (Heller, 1862) (Crustacea: Decapoda, Palaemonidae) from the mouth and lower Amazon River regions, Brazil

Biología reproductiva de *Macrobrachium amazonicum* (Heller, 1862) (Crustacea, Decapoda, Palaemonidae) en la desembocadura y las regiones bajas del río Amazonas, Brasil

Sting Silva Duarte, Jô de Farias Lima, Sheyla Regina Marques Couceiro 556

Revisión tema

Teorías evolutivas en los cursos de Zoología y en los discursos de fin de periodo académico en la Universidad Nacional de Colombia, 1868-1875

Evolutionary theories in the zoology courses and end-of-year speeches at Universidad Nacional de Colombia, 1868-1875

Xavier Marquínez-Casas, Joao Muñoz-Durán, William Usaquén-Martínez 568

Artículo original

Estado de conservación de la familia Sphagnaceae en Cuba bajo perspectivas de cambio climático

Conservation status of the Sphagnaceae family in Cuba under climate change perspectives

Rogelio Roberto Muñoz-Li, Asiel Cabrera Guerreo, Ramón Salazar Quevedo, Abdiel Jover Capote 584

Original article

Mangroves: coastal vegetation and marine influence in La Caimanera wetland (Sucre) during the last 6000 years

Manglares: vegetación costera e influencia marina en la ciénaga La Caimanera (Sucre) durante los últimos 6000 años

Julián Beltrán-P., Alexis Jaramillo-J., J. Orlando Rangel-Ch. 602

Artículo original

Análisis de la influencia del eclipse solar anular del 14 de octubre del 2023 en la variación de la gravedad vertical medida con un gravímetro CG-5

Analysis of the influence of the October 14, 2023, annular solar eclipse on the variation of vertical gravity measured with a CG-5 gravimeter

Laura Daniela Jiménez-Prada, Bryan Steven Reina-Mejía, Luis Hernán Ochoa-Gutiérrez 618

Artículo original

Una generalización del método de Newton-Kantorovich

A generalization of the Newton-Kantorovich method

Guillermo Albuja-Proañón, Miguel Murillo 629

Artículo original

La espiral de Arquímedes y los problemas clásicos de la geometría griega

The Archimedean spiral and the classical problems of Greek geometry

J.M. Ayerbe Toledano 645

**Ciencias
de la Tierra**
Earth Sciences

Matemáticas
Mathematics

Club de revistas/Journal club

Una comunidad microbiana definida reproduce los atributos de la fermentación del chocolate de sabor fino

A defined microbial community reproduces attributes of fine flavour chocolate fermentation

María Mercedes Zambrano, Ph. D. 673

Comentario bibliográfico/Bibliographic commentary

¿Infracciones a la Misión Médica o crímenes de lesa humanidad contra los trabajadores de salud?

Violations of the Medical Mission or crimes against humanity against health workers?

Fernando de la Hoz Restrepo, MD. PH.D. 675

Las plantas nos miran

Plants watch us

Carlos Alberto Parra Osorio 677

Carta a la editora/Letter to the Editor

1900-1925: La ruptura de la Física

1900-1925: The breakdown of physics

Román Castañeda 679

Enfoque y alcance

Focus and scope 684

Artículo original

Un análisis de las primeras observaciones astronómicas realizadas en el Observatorio Astronómico de Santafé de Bogotá

An analysis of the first astronomical observations made at the Astronomical Observatory of Santafé de Bogotá

 J. Gregorio Portilla

Observatorio Astronómico Nacional, Facultad de Ciencias, Universidad Nacional de Colombia, sede Bogotá, Bogotá, D.C., Colombia

Resumen

Este artículo contiene una descripción y un análisis de varias observaciones astronómicas realizadas en el observatorio astronómico de la Expedición Botánica en Santafé de Bogotá entre abril y septiembre de 1804. Consisten fundamentalmente en observaciones del Sol para efectos de determinar, presumiblemente, el grado de adelanto o atraso de un cronómetro y un reloj de péndulo. Otras fueron destinadas a la medición de la declinación magnética. También se observaron emersiones e inmersiones de los satélites de Júpiter con el objeto de refinar la longitud geográfica del lugar de la observación. Aunque todas estas observaciones se han atribuido al ingeniero militar Vicente Talledo, aquí se sugiere, con base en un escrito de Francisco José de Caldas, que fueron realizadas por Manuel Álvarez de Eulate.

Palabras clave: Observaciones del Sol, cronómetro; Reloj de péndulo; Vicente Talledo, Manuel Álvarez de Eulate.

Abstract

This article contains a description and analysis of several astronomical observations made at the astronomical observatory of the Botanical Expedition in Santafé de Bogotá between April and September 1804. They consisted primarily of solar observations, presumably to determine the time deviation of a chronometer and a pendulum clock. Others were intended for measuring magnetic declination. Additionally, emersions and immersions of Jupiter's satellites were observed to refine the geographic longitude of the observation site. Although all these observations have been attributed to the military engineer Vicente Talledo, it is suggested here, based on a text by Francisco José de Caldas, that they were carried out by Manuel Álvarez de Eulate.

Keywords: Sun observations, chronometer; Pendulum clock; Vicente Talledo, Manuel Álvarez de Eulate.

Introducción

Con numerosos años ya al frente de la Expedición Botánica del virreinato de la Nueva Granada, el gaditano José Celestino Mutis (1732-1808) aprovechó la efervescencia despertada por la visita a Santafé de Bogotá de los expedicionarios europeos Alexander von Humboldt (1769-1859) y Aimé Bonpland (1773-1858) en 1801, y decidió erigir, en el solar de la Casa de la Botánica, una edificación dedicada expresamente a la observación astronómica. Tal decisión era de algún modo razonable para alguien que, como Mutis, ostentaba también el título de Astrónomo Real y que, además, ya contaba con el hombre joven idóneo para hacerse cargo de las observaciones: un miembro de la Expedición recién nombrado, quien se hallaba en la Presidencia de Quito por motivos personales, y cuya

Citación: Gregorio Portilla J. Un análisis de las primeras observaciones astronómicas realizadas en el Observatorio Astronómico de Santafé de Bogotá. Revista de la Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. 49(192):471-485, julio-septiembre de 2025. doi: <https://doi.org/10.18257/raccefyn.3195>

Editor: Santiago Vargas Domínguez

***Correspondencia:**

autor de correspondencia;
correo@correo.edu.co

Recibido: 10 de abril de 2025

Aceptado: 22 de mayo de 2025

Publicado en línea: 19 de agosto de 2025



Este artículo está bajo una licencia de Creative Commons Reconocimiento-NoComercial-Compartir Igual 4.0 Internacional

experticia astronómica había recibido cálidos elogios del mismo Humboldt: Francisco José de Caldas (1768-1816). Haber erigido el Observatorio poco después de la visita de los expedicionarios europeos lo convirtió en el primero en ser construido en el continente americano (y aún existe), siendo el más meridional y con mayor altura existente en el mundo por aquel entonces y, por extensión, la primera construcción pensada con el propósito de realizar una actividad científica en la zona geográfica que, con el correr del tiempo, llegó a bautizarse como Colombia. El tiempo de su construcción estuvo comprendido entre el 24 de mayo de 1802 y el 20 de agosto de 1803 (Caballero, 1946). Aspectos relacionados con la planeación del edificio y su diseño arquitectónico pueden encontrarse tanto en Londoño & Morales (2007) como en González (2003).

Por su prolongada estadía en la Presidencia de Quito, Caldas desarrolló aún más su pasión por el estudio de la botánica, aunque siguió realizando algunas observaciones astronómicas de distinta índole. Desde la distancia Caldas estaba informado de los avances de la construcción del Observatorio, pero supuso que quien se haría cargo de las observaciones sería Mutis apoyado por algunos de sus discípulos (Caldas, 2016). El payanés llegó a Santafé en diciembre de 1805, casi 30 meses después de concluida la construcción del observatorio, para enterarse que Mutis lo encargaba de la parte astronómica de la Expedición. Caldas emprendió la tarea, aunque en su correspondencia privada evidenció que tal decisión no fue de su agrado (Caldas, 2016).

Caldas no estrenó la edificación. El Archivo General de la Nación (AGN) contiene documentos que evidencian que entre abril y septiembre de 1804 se hicieron observaciones astronómicas en Santafé de Bogotá. En ellos no quedó consignado el nombre de quienes las realizaron, ni el sitio exacto donde se hicieron. Puesto que tales documentos están mezclados con otros relacionados con actividades astronómicas, así como con algunas cartas dirigidas a Caldas, es de suponer, por lógica, que tales observaciones se hayan realizado en el observatorio. Arias de Greiff (1993) se pregunta si la persona responsable de las observaciones fue el ingeniero militar español Vicente Talledo y Rivera (1758-1820), ya que éste fue comisionado por el Virrey Antonio José Amar y Borbón (1742-1819) para la elaboración de varios mapas en el territorio de la Nueva Granada. Para Mejía (2021), en su extensa investigación sobre Talledo, no hay duda: el ingeniero valenciano fue el responsable de las observaciones.

El registro de dichas observaciones astronómicas conservado en el AGN constituye una valiosa pieza documental que no ha sido suficientemente valorada y estudiada y cuyo examen hubiera permitido evidenciar cómo las personas encargadas de la realización de los mapas de la época realizaban las observaciones, ejecutaban los cálculos de astronomía de posición y recurrían a distintas estrategias para efectos de sincronizar los relojes, hallar declinaciones magnéticas y longitudes geográficas, todo para efectos del perfeccionamiento cartográfico de una región en específico.

En este contexto la presente comunicación tiene por objeto hacer un análisis de las observaciones astronómicas supuestamente realizadas por Talledo. Se comienza por hacer un comentario de los registros existentes de las coordenadas geográficas de Santafé; luego se desglosa el conjunto de observaciones según el orden en que se realizaron, y a continuación se explica la manera como se procedió en los cálculos para efecto de la calibración de los relojes y la determinación de la declinación magnética y de la longitud geográfica. Por último, se ofrece un argumento que cuestiona la autoría de tales observaciones por parte de Talledo.

El conocimiento de las coordenadas geográficas

Antes de describir las observaciones objeto de este trabajo, conviene hacer un comentario con relación a los valores de las coordenadas geográficas que el observador adoptó para hacer los cálculos pertinentes. La latitud de Santafé de Bogotá fue pobremente estimada en los dos primeros siglos de su fundación. En el influyente texto de astronomía *Cronología y repertorio de la razón de los tiempos*, (Zamorano, 1594) le asigna a “Bogotá” un valor

de latitud de 2° N. Casi un siglo después, en 1696, Sánchez de Cozar (1634-?), sacerdote de origen indígena nacido en la actual población de San Gil (departamento de Santander), redactó un tratado de astronomía siguiendo una estructura parecida a la de Zamorano, pero en él le asignó un valor de latitud de 3° N a Bogotá (**Portilla & Moreno**, 2019); se desconoce, sin embargo, el procedimiento o la forma en que llegó a ese valor y el de otras poblaciones de la actual Colombia, en particular si se tiene en cuenta la muy escasa actividad cartográfica que se adelantó en esos años (**Rozo**, 1952). Ya para finales del siglo XVIII se tuvo una mejor aproximación. De acuerdo con **Humboldt & Oltmanns** (1810), geógrafos de la talla de Rigobert Bonne (1727-1794), Jean Baptiste Bourguignon d'Anville (1697-1782) y Joseph Vaissète (1685-1785) estimaron el valor de la latitud (norte) de Santafé en 4°18', 4°8' y 4°10', respectivamente. Los mismos autores señalan que José Celestino Mutis (1732-1808), quien no era estrictamente astrónomo, aunque ostentaba el título de Astrónomo Real, obtuvo un valor más próximo al verdadero, igual a 4°30'0" N. Este mismo valor (al minuto) fue el que asignó para la ciudad Manuel del Socorro Rodríguez (1758-1819) en el número 256 del *Papel periódico de Santafé de Bogotá* (PPSB) correspondiente al 12 de agosto de 1796 (**Rodríguez**, 1796); sin embargo, cinco años antes, en ese mismo periódico, un calculista presuntamente identificado como Joseph García de la Guardia (1770-1815), asignó en sus cálculos de las "afecciones astronómicas" un valor de latitud de 4°35' N (**Portilla**, 2023). Al parecer, tales valores no fueron extensamente divulgados, de manera que el *Connaissance des Temps* (CdT) en sus emisiones anuales de la época incluye en la tabla de coordenadas geográficas a Cartagena de Indias, Caracas, Panamá, Portobello, Guaira, Guayaquil y Quito, poblaciones pertenecientes al Virreinato de la Nueva Granada, pero, sorprendentemente, omite la capital. En su conocida expedición al continente americano, Alexander von Humboldt realizó en Santafé observaciones del paso por el meridiano de varias estrellas entre el 9 de julio y el 9 de agosto de 1801, llegando a un valor para la latitud de 4°35'48" N. Es posible que el sitio escogido para tal labor haya sido el jardín de la Casa de la Botánica, por su espacio amplio y protegido de curiosos, pues anotó que el sitio estaba "peu éloigné" (no muy lejos) de la Plaza Mayor (**Humboldt & Oltmanns**, 1810). Como veremos más adelante, tres años después el observador redactor de las observaciones que nos ocupan, adoptó como latitud del sitio de sus observaciones la correspondiente a 4°35'38" N, pero se ignora si ese valor lo determinó él mismo a partir de observaciones astronómicas o lo redujo basado en el valor de Humboldt. Finalmente, y solo como punto de referencia, en 1807 Caldas reportó una latitud para el observatorio de 4°36'06" N basado en "numerosas alturas meridianas del Sol y las estrellas" (**Caldas**, 1966).

En relación con la longitud, la incertidumbre en el valor fue todavía mayor. **Zamorano** (1598) asigna un valor en tiempo igual a 4^h52^m (73°0' al oeste) con respecto al meridiano de Sevilla. Sánchez de Cozar adoptó este mismo valor (**Portilla & Moreno**, 2019). Los ya comentados Bonne, d'Anville y Vaissète asignaron los valores de 75°55', 76°03' y 72°02', respectivamente, al oeste con respecto al meridiano del observatorio de París (**Humboldt & Oltmanns**, 1810). Mediante la observación de un eclipse de un satélite joviano, Mutis, comparando una medida realizada por Jorge Juan (1713-1773) desde Cádiz, determinó un valor de 75°43' también con relación al observatorio de París (**Humboldt & Oltmanns**, 1810); sin embargo, esta información no deja de despertar suspicacias, pues implica que tanto Mutis (en Santafé) como Juan (en Cádiz) observaron el mismo fenómeno astronómico. Además, eso solo pudo haber ocurrido a partir de febrero de 1761, cuando Mutis arribó a Santafé (**Schumacher**, 1984), y tampoco hay registros de que Juan, por sus múltiples ocupaciones y constantes cambios de radicación, haya realizado observaciones astronómicas en Cádiz entre esa fecha y 1773, año de su deceso (**Lafuente & Sellés**, 1988; **Sanz**, 1774). En el ya mencionado No. 256 del PPSB, **Rodríguez** (1796) anotó 303°35' al este del meridiano de Tenerife (es decir, 56°25' al oeste), lo que, si se tiene en cuenta la longitud de esta isla con relación al observatorio de París (19°0' oeste, dato del CdT), significa un valor de longitud igual a 75°25' oeste con respecto al meridiano de este último observatorio, pero como ninguna de las fuentes especifica un sitio en Tenerife, cuyo ancho

alcanza a cubrir unos 50', dicha medida dice poco. Humboldt, a partir de la lectura de su cronómetro y de medidas de distancias lunares, obtuvo un valor de longitud para Santafé de 76°34'8" al oeste del meridiano del observatorio de París. El valor que se adoptó como longitud del sitio para las observaciones que aquí examinamos es igual a 68°3'10" al oeste del meridiano del observatorio de San Fernando. Si se tiene en cuenta que este se encuentra al oeste del observatorio de París en 8°37'30" (dato del CdT), se tendrá que el valor es de 76°40'40" con respecto a París. Como referencia, Caldas obtuvo 4^h32^m14^s=68°3'10" (oeste de San Fernando), o sea, 76°41'0" (oeste de París) (Caldas, 1966).

Los documentos

Hoy los documentos que aquí se estudian y que contienen el registro de observaciones astronómicas realizadas en Santafé de Bogotá entre abril y septiembre de 1804, se encuentran bajo custodia del AGN con el título "Autógrafos Don José de Caldas", código de referencia ASUNTOS-IMPORTANTES: SAA-I.2,3,D.9. Como ya se dijo, están en desorden y mezclados con diversos documentos de distinta índole, muy posiblemente originados en la misma época, y entre ellos es posible distinguir correspondencia dirigida a Francisco José de Caldas y asuntos propios de la Casa de la Expedición Botánica. Son hojas libres (escritas tanto en el recto como en el verso) de un tamaño aproximado de 30 cm de altura por 20,5 de ancho. La **Tabla 1** contiene los distintos tipos de observaciones (y su utilización) en función de los días en que se realizaron.

En ninguna de las hojas se consigna el propósito de fondo de las observaciones, ni el nombre de su redactor. Tampoco hay una descripción de los instrumentos astronómicos utilizados (presumiblemente un sextante u octante para las observaciones del Sol y un telescopio, posiblemente un refractor, para la observación de los satélites de Júpiter). Tampoco hay ningún indicio del tipo y la casa constructora de los tres relojes con que se contaba más allá de las palabras "cronómetro", "péndulo" y "solar". La **Figura 1** muestra ejemplos de esos instrumentos, pero muy probablemente no corresponden a los relojes que efectivamente el observador utilizó, dada la amplia variedad de modelos que existían en la época.

El conjunto de datos existente se puede dividir en dos fases. La primera, comprendida entre el 17 de abril y el 29 de junio, constituye más de las tres cuartas partes de las observaciones y se distingue por conservar en cada reporte del día una estructura ordenada y sistemática de los datos de inicio, los cálculos y los resultados. Se trata del registro de la altura del Sol para un instante de tiempo tomado con un cronómetro. En casi la totalidad de este conjunto se observa la siguiente distribución (**Figura 2**): en el lado superior derecho se aprecia la corrección instrumental por semidiámetro y por refracción como también la interpolación para obtener la declinación solar en ese instante a partir de datos tomados del *Almanaque Náutico y Efemérides Astronómicas* (ANEA) del observatorio de la isla de León (Cádiz). A la izquierda se aprecia la resolución del triángulo esférico a través de logaritmos para la obtención del ángulo horario del Sol en el instante en cuestión y el valor de la ecuación del tiempo (ET) para el instante de la observación (ver la siguiente sección para una explicación más completa), con el fin de hallar el tiempo solar medio, comparar con una lectura previa del cronómetro y determinar el adelanto de este instrumento y su grado de movimiento diario. Se aprecia también, en la parte central, el cálculo de la hora aparente en el meridiano de referencia (la "isla de León") para efectos de poder realizar las interpolaciones. En la **Figura 3** se presenta una descripción más completa de algunos de los cálculos. La parte inferior de las hojas se reserva para los datos del registro del reloj de péndulo y, en pocas ocasiones, la determinación del error asociado al reloj solar y datos de la determinación del azimut del Sol para calcular la declinación magnética y la observación de los satélites de Júpiter a efectos de determinar la longitud.

Algo debió ocurrir después del 29 de junio, pues pasado más de mes y medio se inicia una segunda fase en la que hay sistematicidad, pero no al nivel observado en la primera fase, la cual se inicia el 17 de agosto y va hasta el 5 de septiembre. En esta segunda fase no parece seguirse una estructura rigurosa (no hay indicación de que se haya corregido

Tabla 1. Observaciones astronómicas comprendidas entre el 17 de abril y el 5 de septiembre de 1804 en Santafé de Bogotá. Las observaciones del Sol se realizaron para determinar el adelanto o atraso de tres relojes (cronómetro, péndulo y de sol), así como para determinar la declinación magnética del lugar. La observación de las inmersiones y emersiones de los satélites de Júpiter se realizaron para refinar el valor de la longitud del lugar. No se incluye la observación del eclipse de Sol del 4 de agosto.

Mes	Día	Observación del Sol				Inmersión y emersión de los satélites de Júpiter
		Cronómetro	Péndulo	Solar	Declinación magnética	
Abril	17	X				
Abril	27	X	X			
Abril	29	X	X			
Mayo	01	X	X			
Mayo	08	X	X			
Mayo	13	X	X			
Mayo	16	X	X			
Mayo	18	X	X			
Mayo	20	X	X			
Mayo	22	X	X		X	
Mayo	26	X	X		X	
Mayo	28	X	X			
Mayo	29	X	X		X	X
Junio	01	X	X			
Junio	05	X	X		X	
Junio	10	X	X			
Junio	12	X	X			X
Junio	13	X	X			
Junio	15	X	X	X		
Junio	19	X	X	X		
Junio	23	X	X	X		
Junio	25	X	X			
Junio	28	X	X			X
Junio	29	X	X			
Julio	05	X				
Julio	14					X
Julio	21					X
Agosto	06					X
Agosto	16	X	X			X
Agosto	17	X	X			
Agosto	18	X	X			
Agosto	19	X				
Agosto	29	X	X			
Septiembre	03			X†		
Septiembre	04	X	X			
Septiembre	05	X	X	X†		

† El reloj de sol se utilizó como instrumento para aplicar el método de alturas iguales.



Figura 1. Instrumentos de medida del tiempo de finales del siglo XVIII y comienzos del XIX. Izquierda: cronómetro de la casa John Arnold & Sons; centro: reloj de péndulo de Graham; derecha: reloj de sol universal de Dollond.

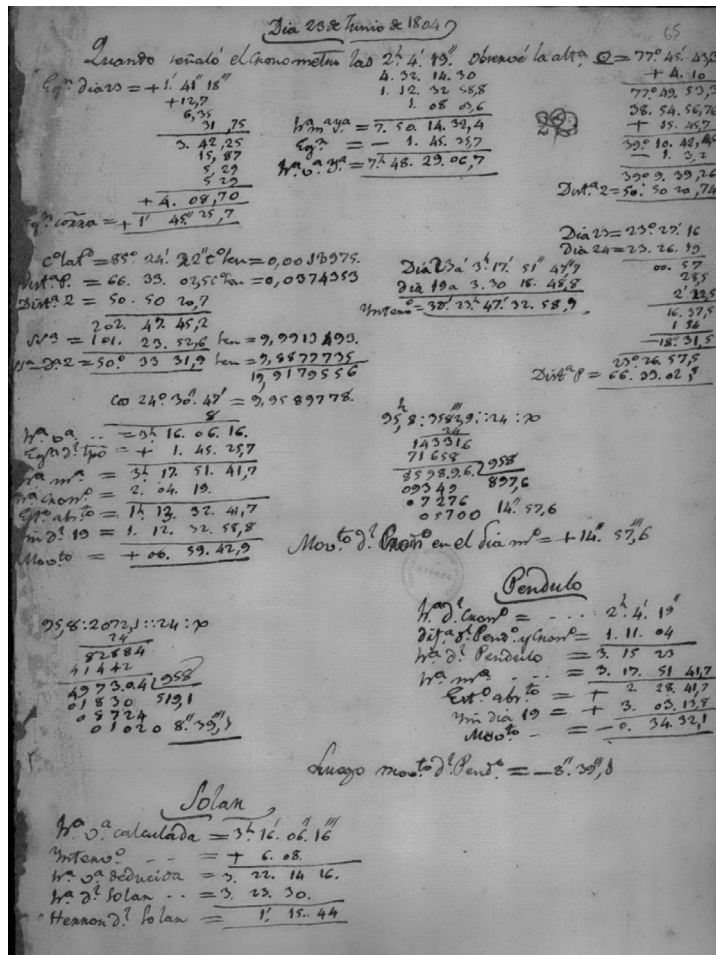


Figura 2. Datos consignados de la observación del Sol correspondiente al 23 de junio de 1804. La mayor parte del espacio está dedicada a conocer el estado absoluto del cronómetro y su movimiento. La parte inferior tiene por objeto determinar el avance del péndulo y la parte inferior izquierda, el error asociado al reloj solar.

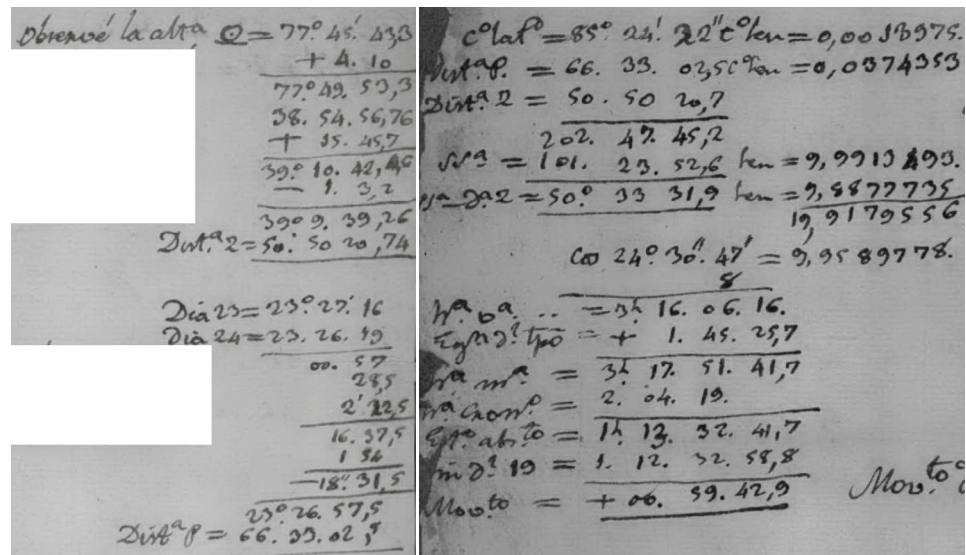


Figura 3. Imágenes de sectores específicos de la hoja de observación del 23 de junio. Izquierda: a la observación de la altura del Sol respecto a su limbo inferior se le aplica la corrección instrumental y a continuación se la divide por dos; luego añade la corrección por semidiámetro y resta la corrección por refracción; con ello obtiene la altura corregida y seguidamente determina el complemento, esto es, la distancia cenital. Un poco más abajo anota los datos de declinación solar para los días 23 y 24 e incluye unos cálculos para interpolar el dato en el instante de la observación; a continuación, calcula el complemento de la declinación (codeclinación), que el observador anota como distancia al polo. Derecha: los valores del complemento de la latitud, la codeclinación y la distancia cenital se suman para hallar el valor de $2p$ y luego p , esto es, la semisuma (ver ecuación 3); luego halla el valor de $p-z_c$; a la derecha de estos datos se ven los valores en logaritmos. A continuación hace el cálculo del lado derecho de la ecuación (2) y halla el antilogaritmo; el semiángulo hallado es multiplicado por $2/15$ ($8/60$) para convertirlo en unidades de tiempo: ese es el ángulo horario del sol verdadero, el cual es convertido a tiempo solar medio a través de la ecuación del tiempo. A este último le resta el tiempo dado por el cronómetro en el momento de la observación, obteniendo así el estado absoluto del cronómetro. El dato del estado absoluto del cronómetro de la última observación (la del 19 de junio) permite obtener el movimiento del cronómetro.

por el error instrumental, y en lo que respecta al valor del avance diario del cronómetro, hay pocos valores referidos), lo que sugiere que el observador estaría en una tónica más de ensayo y de ejercicio. En la documentación existente se distinguen cuatro páginas que no obedecen a la estructura que exhiben las demás y que contienen datos distribuidos en desorden, pero que indican que entre las dos fases se efectuaron varias observaciones astronómicas en los días 5, 14 y 21 de julio y 6 y 16 de agosto, principalmente de los satélites de Júpiter.

En las hojas es muy frecuente encontrar espacios reservados para la realización de las interpolaciones, así como el cálculo de simples reglas de tres, realizadas usualmente con logaritmos. No está de sobra comentar que en su gran mayoría los datos de toma de tiempo vienen expresados hasta en terceros (""), lo que se extiende también a los cálculos subsecuentes tanto de tiempo como de grados.

Las observaciones del Sol

Como ya se dijo, la gran mayoría de las observaciones consiste en la medición de la altura del Sol en un instante de tiempo determinado con el propósito principal de hallar el estado de la lectura de un cronómetro, un reloj de péndulo y, en menor medida, un reloj solar. El término estado se refiere a qué tanto se adelantaban o atrasaban el cronómetro y el reloj de péndulo, así como el error asociado al reloj solar. Además, varias observaciones de la altura

del Sol se destinaron a la medición de la declinación magnética del lugar. El observador realizó las medidas siempre después de transcurrido el mediodía. Llamamos d al día de la observación que nos ocupa. Al tomar el valor de la distancia cenital (o de su complemento, la altura) registró el tiempo que mostraba el cronómetro, dato que llamaremos t .

El ángulo horario del sol verdadero, H_{\odot} , lo determinó a través de la relación entre las coordenadas horizontales y las coordenadas ecuatoriales horarias:

$$\cos H_{\odot} = \frac{\cos z_c - \cos \delta_c \cos \varphi_c}{\sin \delta_c \sin \varphi_c}, \quad (1)$$

donde z_c representa la distancia cenital del Sol ($z_c = 90 - h_c$, siendo h_c la altura corregida; ver más adelante), φ_c la colatitud ($\varphi_c = 90 - \varphi$, donde φ es la latitud del lugar de la observación) y δ_c la codeclinación ($\delta_c = 90 - \delta_{\odot}$, donde δ_{\odot} es la declinación del Sol en el momento de la observación). Dada la dificultad que entrañaba para los calculistas hacer multiplicaciones y divisiones, el cálculo de H_{\odot} se hizo mediante el uso de logaritmos, como es evidente en la secuencia de los cálculos que el observador ejecutó empleando la siguiente expresión:

$$\log \cos \left(\frac{H_{\odot}}{2} \right) = \frac{1}{2} [\log \sin p + \log \sin(p - z_c) - \log \sin \delta_c - \log \sin \varphi_c], \quad (2)$$

donde

$$p = \frac{z_c + \delta_c + \varphi_c}{2}, \quad (3)$$

ecuación ésta a la que es fácil llegar a partir de la (1) a través del uso de varias identidades trigonométricas y aplicando el logaritmo a ambos lados (ver por ejemplo **Portilla, 2020**) para la deducción de la ecuación en términos de $\sin(H/2)$.

En cuanto a la ecuación (2), que es la que permite conocer el valor del tiempo astronómico para contrastarlo con el tiempo de la lectura t del cronómetro (ver a la derecha de la **Figura 3**), varias consideraciones se desprenden para los tres ángulos involucrados: la altura, la declinación y la latitud, las cuales se describen a continuación.

La altura. El valor que el observador anotó para la altura del Sol, que llamaremos h' , es primeramente corregido por el error instrumental (I), para lo cual tomó a lo largo del tiempo los siguientes valores: +4'20", +3'50" y +4'10" hasta el 29 de junio; a partir de esa fecha no parece explícitamente que haya utilizado alguna cifra para la realización de tal corrección. En los documentos existentes no hay una alusión clara al procedimiento utilizado para llegar a esos valores. El valor de la altura, ya corregido instrumentalmente, lo dividió por dos, hecho que sugiere que, para la medición de este ángulo, recurrió al uso de un horizonte artificial, el cual se lograba armar, por ejemplo, disponiendo de una cubeta que contuviera azogue, y utilizando como instrumento de observación muy probablemente un octante o sextante (**Portilla, 2020**). El valor de la altura, ya dividido por dos, fue luego sometido a dos correcciones sucesivas para obtener un valor corregido de la distancia cenital (z_c) que luego se utilizaron en la ecuación (1) o la (2): semidiámetro solar (SD) y refracción atmosférica (R) (ver a la izquierda de la **Figura 3**). En cuanto al semidiámetro, se desprende por la notación empleada y por la adición del valor, que la observación del Sol se hizo con respecto al limbo inferior, de manera que fue necesario adicionar el valor del radio solar aparente para especificar el centro del astro rey. El valor del semidiámetro fue tomado del *Almanaque Náutico y Efemérides Astronómicas* (ANEA) elaborado por el Observatorio Real de la isla de León (Cádiz), el cual casi siempre se debió interpolar, pues en dicho almanaque se encuentran esos valores a intervalos de seis días. Por último, el observador corrigió por refracción atmosférica. Todo parece indicar que utilizó los valores de la tabla de refracción existente en el ANEA. Si bien es cierto que los valores que anotó para corregir el dato de la altura del Sol (previamente corregido por semidiámetro) no coinciden con los de dicha tabla (teniendo en cuenta las interpolaciones), curiosamente el valor que anotó, comparado con el que se infiere de la tabla, es casi siempre inferior, alrededor de los 7", con independencia del valor de la altura. Al parecer, el observador era consciente de que a medida que la altura del sitio de observación aumenta con respecto al nivel del mar, el efecto de la refracción disminuye, pero no es claro el criterio mediante el cual adoptó ese valor constante. Pese a esto, es evidente, por la magnitud del valor que

adoptó, que, o bien no disponía de una tabla de refracciones para la “zona tórrida”, como la reportada por Bouguer (ver, por ejemplo, **Juan & De Ulloa, 1748**), o sencillamente ignoraba que a altitudes tan elevadas como las de Santafé o Quito, el efecto de la refracción se reduce significativamente.

La declinación. Los valores de la declinación del Sol fueron tomados del ANEA y en ellos se aprecia que el observador realizó la interpolación para hallar el valor de ese ángulo en el tiempo de la observación (ver a la izquierda de la **Figura 3**); para ello calculó el tiempo solar verdadero en el observatorio de San Fernando en Cádiz (t_{SF}) a partir de la diferencia en longitud entre los dos meridianos, que tomó, como anotamos atrás, en $68^{\circ}3'10''$. Es importante comentar que en la determinación de t_{SF} el observador utilizó los datos de Δ_{t-1} y N_{t-1} (ver más adelante el significado de estos valores) hallados en un día anterior (que designaremos $d-1$) a la observación que nos ocupa.

La latitud. Tal y como se anotó arriba, el valor que el observador adoptó para la latitud del lugar de la observación fue $\varphi = 4^{\circ}35'38''$ N. Habiendo determinado el valor del ángulo horario del Sol (H_{\odot}), esto es, del tiempo solar verdadero, el observador procedió a transformarlo a tiempo solar medio (\bar{H}_{\odot}) a través de:

$$\bar{H}_{\odot} = H_{\odot} \pm ET, \tag{4}$$

donde ET es, como ya anotamos, la ecuación del tiempo, para lo cual hay que tener en cuenta si la corrección es positiva o negativa (dato que se encuentra en la penúltima columna de los datos del Sol para cada mes del ANEA) y proceder a la interpolación; para ello hay que hallar el tiempo que debe existir en el meridiano de referencia. De nuevo, el dato requerido de t_{SF} para realizar la interpolación depende de los datos obtenidos en el día $d-1$.

El valor de \bar{H}_{\odot} es, entonces, la hora solar media del lugar de la observación, a la cual denominaremos t_a , es decir que $\bar{H}_{\odot} = t_a$, donde el subíndice a enfatiza el hecho de que es la hora local solar media obtenida astronómicamente. Recordemos que t es el tiempo que registra el cronómetro; por lo tanto, de contar con un cronómetro ideal (sin atrasos o adelantos y debidamente sincronizado), que marque la hora solar media del lugar, se tendría $t_a = t$. Infortunadamente ese no era el caso. Los cronómetros, y más los de la época que nos atañe, se desfasaban de lo que teóricamente deberían arrojar debido a factores tales como al funcionamiento irregular de la mecánica interna, las condiciones climáticas imperantes, el movimiento externo del soporte, etc., de manera que el usuario se veía abocado a determinar, en un momento conveniente, no solo qué tan desfasado estaba el reloj, sino cuál era la tasa de desfase en el día de la observación, pues esta última no es constante. Si se conocen estos dos valores, es posible corregir la lectura del cronómetro e inferir cuál es el valor que debe arrojar si se tratara de un cronómetro perfecto (**Figura 4**).

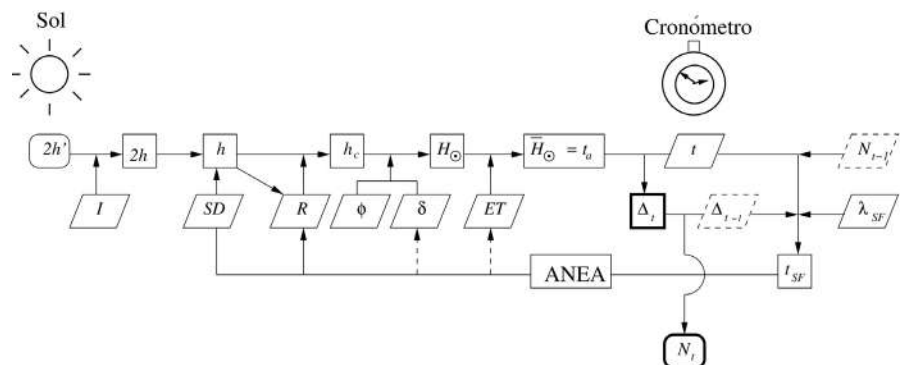


Figura 4. Descripción del procedimiento realizado por el observador para determinar el desfase del cronómetro. Los datos fundamentales de entrada son el valor de la lectura aparente del Sol ($2h'$) registrado por el instrumento de observación y el correspondiente instante de tiempo registrado por el cronómetro (t). Los datos fundamentales de salida son el estado absoluto del cronómetro (Δ_t) y el movimiento diario del mismo (N_t). Los datos en líneas segmentadas refieren a los mismos datos, pero hallados en un día anterior. Los símbolos que se muestran se explican en el texto principal.

A la diferencia entre el tiempo calculado a partir de la observación solar y la lectura del cronómetro, esto es, $t_a - t = \Delta t$, se le llama “estado absoluto del cronómetro” correspondiente al día d en que se realiza la observación. Tal valor indica, en tiempo medio, el estado de atraso o adelanto del tiempo que arroja el cronómetro con respecto a la hora “real” en el instante preciso de la observación, lo cual, por supuesto, solo es válido en el momento en que se ha observado el Sol, digamos que a media tarde; pero, como la idea es observar varias horas después otro fenómeno celeste, como, por ejemplo, un eclipse de Luna o las inmersiones o emersiones de los satélites de Júpiter, se hace necesario conocer qué tanto se está desfasando el cronómetro por cada día transcurrido, de manera que sea posible calcular cuántos segundos de desfase pueden existir en unas pocas horas de diferencia. Para ello se recurre al conocimiento del estado absoluto del cronómetro la última vez que se realizó una observación del Sol anterior al día pertinente ($d-1$), valor que llamaremos Δ_{t-1} . La diferencia entre estos dos valores, esto es, $\Delta_t - \Delta_{t-1}$, permite calcular a través de una simple regla de tres la tasa en segundos en que se va desfasando el cronómetro por cada día transcurrido (el “movimiento del cronómetro”), valor que llamaremos N_t . Para efectos de contar con un valor lo más exacto posible de $t_a = \bar{H}_\odot$ para el día d que nos ocupa, el observador utilizó el valor de la observación previa del estado absoluto (Δ_{t-1}) junto con el valor de la tasa diaria de desfase de ese día, que llamaremos N_{t-1} (los cuales son datos independientes de la observación del día d y se derivan de la observación realizada en el día $d-1$, aunque pocas veces el observador derivó el valor con observaciones de N_{t+1} , esto es, con datos de la observación solar del día siguiente), para calcular la hora solar verdadera en el meridiano de referencia, en este caso en el observatorio de San Fernando, t_{SF} , a través de la longitud entre ambos lugares (λ_{SF}). El valor de t_{SF} permitió, entonces, interpolar en el ANEA para obtener los valores de EE y δ_\odot correspondientes al día d , tal y como se señaló atrás.

En su conjunto, las observaciones del Sol permitieron determinar que el principal instrumento utilizado para medir el tiempo, es decir el cronómetro, se atrasaba en promedio unos 34 segundos por día, aunque en algunos días llegó a ser de 15 segundos y en otros de 63 segundos, de manera que el estado absoluto de dicho instrumento pasó de $0^h24^m41^s$ en el 10 de abril a $1^h49^m24^s$ el 5 de septiembre. Con relación al péndulo, el observador procedió también a registrar la lectura que arrojaba este instrumento en el momento de la observación del Sol; unos instantes antes comparaba las lecturas del cronómetro y el péndulo para registrar la diferencia entre ambos instrumentos, diferencia necesaria para determinar el tiempo marcado por el péndulo en el momento de la observación solar. De ese modo, era posible determinar el desfase diario por día de ese instrumento conociendo el tiempo solar medio t_a inferido de la observación del Sol. Así, el observador pudo establecer que el péndulo en ocasiones se atrasaba y en otras se adelantaba unos pocos segundos, sin exceder nunca el valor de 22.

Por último, unas palabras para las lecturas del “solar”. Ignoramos el tipo de reloj solar que el observador utilizó, de manera que solo podemos especular sobre su naturaleza. Es posible que se tratara de un reloj solar de tipo universal, bastante utilizado en esta época por viajeros, marinos y científicos, pues, además de su portabilidad, la inclinación del gnomon podía ajustarse según la latitud del lugar. El observador utilizó el reloj en cinco ocasiones: tres en junio y dos en septiembre. En junio lo utilizó para determinar el error asociado a ese reloj solar. Para ello, al cabo de unos pocos minutos de realizar la observación de la altura del Sol, anotó la hora dada simultáneamente por el reloj solar y por el cronómetro (este dato solo aparece explícitamente en la hoja del 15 de junio, en el extremo superior derecho); con ello supo la diferencia de tiempo entre las dos lecturas del cronómetro, lo que el observador llamó “intervalo”. Puesto que conocía la hora solar verdadera (H_\odot) en el momento de la primera observación, adicionó el “intervalo” para obtener dicha hora en el momento de la lectura del reloj solar y comparó estos valores para inferir el error asociado al reloj solar. En las observaciones de septiembre, el observador utilizó el reloj de sol como instrumento de referencia para aplicar el método de alturas iguales y así obtener un valor

alternativo del estado absoluto del cronómetro. Para ello registró en el cronómetro los dos tiempos correspondientes a las alturas iguales (antes y después de la culminación del Sol), cuyo promedio debía corresponder al valor de la culminación del Sol ($12^{\text{h}}0^{\text{m}}0^{\text{s}}$) en la hora solar verdadera; al tener en cuenta la ecuación del tiempo de ese día, pudo convertir a hora solar media e inferir el estado absoluto del cronómetro para el instante en cuestión comparando con la lectura del instrumento.

La determinación de la declinación magnética

El observador también aprovechó varias observaciones del Sol para determinar la declinación magnética de Santafé con cuatro observaciones realizadas a finales de mayo e inicios de junio de 1804 (**Tabla 2**). Para ello debió contar con una brújula, de manera que, en algunas de sus observaciones, a los pocos minutos de haber realizado la observación solar para verificar el estado del cronómetro, realizó otra en donde tomó la altura del Sol y leyó con la brújula simultáneamente el ángulo de azimut (A_{\odot}^m) existente entre el norte magnético y la vertical del Sol. Con ello, al determinar la altura del Sol (y corregir por el error instrumental, por semidiámetro y por refracción), procedió a calcular su azimut a través de la ecuación:

$$\cos A_{\odot} = \frac{\cos \delta_c - \cos \varphi_c \cos z_c}{\sin \varphi_c \sin z_c} \quad (5).$$

Como antes, el observador realizó el cálculo con la versión de la anterior expresión en términos de logaritmos:

$$\log \cos \left(\frac{A_{\odot}}{2}\right) = \frac{1}{2} [\log \sin p + \log \sin(p - \delta_c) - \log \sin z_c - \log \sin \varphi_c],$$

donde p está dada por la ecuación (3). El dato de azimut del Sol inferido con la brújula fue contrastado con el valor obtenido astronómicamente, de manera que la diferencia de estos azimuts ($A_{\odot}^m - A_{\odot}$) correspondiera a la diferencia angular entre el norte magnético y el norte astronómico, esto es, la declinación magnética.

Curiosamente, en la primera medición y cálculo de la declinación magnética, realizada el 22 de mayo, se encuentra el único dibujo que el observador tuvo a bien realizar. En él se aprecia un círculo en el que describe los puntos cardinales (N, E, S, O) y señala con una flecha la dirección que arroja la brújula, marcada en los extremos con las letras n y s , y desplazada ligeramente a la derecha de la línea NS.

El procedimiento realizado para la determinación de la declinación magnética es virtualmente idéntico al que utilizaban los marinos de la época siguiendo los manuales de navegación; el término utilizado por la marinería era “variación de la aguja” o “variación magnética” (Juan, 1757).

Las observaciones de los satélites jovianos

La segunda clase de observaciones que incluye el documento bajo estudio consiste en las emersiones o inmersiones de los satélites de Júpiter para efectos de la refinación del valor de la longitud del lugar. En la **Tabla 3** se muestra el conjunto de observaciones dedicadas al registro de los tiempos de inmersión o emersión de los satélites jovianos junto con los correspondientes valores de longitud del lugar de la observación con respecto al meridiano

Tabla 2. Valores de la declinación magnética obtenidos a partir de la diferencia de azimuts solares

Mes	Día	Declinación magnética (E)
Mayo	22	07°47'50"
Mayo	26	06°47'50"†
Mayo	29	06°48'44"
Junio	05	06°58'36"

† El dato no viene acompañado por los cálculos.

Tabla 3. Emersiones e inmersiones de los satélites de Júpiter observados en Santafé de Bogotá. Los valores de longitud están respecto al oeste del observatorio de la isla de San Fernando.

Mes	Día	Satélite	Tipo	Longitud geográfica calculada (de Santafé)
Mayo	29	1 (Ío)	Emersión	67°53'19.94''
Junio	12	1 (Ío)	Emersión	67°56'26.18''
Junio	28	1 (Ío)	Emersión	67°53'40.30''
Julio	14	1 (Ío)	Emersión	67°10'15.00''†
Julio	21	1 (Ío)	Emersión	66°27'54.75''†
Agosto	6	1 (Ío)	Emersión	65°49'40.25''†
Agosto	16	3 (Ganímedes)	Inmersión	67°32'07.05''†
Agosto	16	3 (Ganímedes)	Emersión	67°37'13.65''†

† El dato está expresado en el documento en unidades de tiempo.

de la isla de San Fernando. En todos los casos el observador utilizó el cronómetro para registrar el tiempo del fenómeno, el que, por supuesto, debió ser corregido por el estado absoluto y la tasa diaria de desfase del cronómetro para ese día, lo que implicaba hacer el cálculo del desfase existente entre el tiempo de la última observación del Sol (o la próxima) y el tiempo de la observación del fenómeno. Este valor de tiempo se pasó luego a tiempo solar verdadero utilizando el valor de la ecuación del tiempo, dato que el observador calculó por interpolación a partir de los datos consignados en el ANEA, obteniendo así el tiempo solar verdadero de la aparición del fenómeno para alguien situado en Santafé de Bogotá (t_{SB}). Luego, con el valor consignado en el ANEA del tiempo solar verdadero del fenómeno en la isla de San Fernando (t_{SF}), infirió inmediatamente el valor de la longitud entre los dos meridianos (λ_{SB}):

$$\lambda_{SB} = t_{SF} - t_{SB}$$

Por último, el observador registró la fase final de un eclipse total de Sol que se vio como parcial desde Santafé. En una de las hojas que se comentan, con datos consignados en desorden correspondientes a fechas entre julio y agosto, el observador anotó que el 4 de agosto a las 21^h37^m0^s sucedió el fin del eclipse. Ese instante corresponde a 09^h37^m0^s del día 5 (al medir el tiempo desde medianoche). Suponemos, como es lo más obvio, que dicho tiempo lo tomó del cronómetro; si adoptamos como estado absoluto el de ese instrumento para el día 6 de agosto a 1^h38^m0^s, inferimos que la hora solar media para Santafé era 11^h15^m0^s, lo que apenas representa una diferencia en exceso de 6^m27^s con relación al tiempo calculado por la página www.eclipsewise.com para Bogotá.

Análisis

Una inspección atenta de algunas de las hojas permite inferir que es muy posible que hayan existido varias hojas adicionales que hoy están perdidas. En la página en que se describe la observación solar del 17 de abril (la fecha más temprana de la que tenemos información completa) sabemos que el observador también hizo una observación solar el día 15 de abril (dato necesario, como hemos visto, para hallar tanto Δ_t como N_t); además, en una de las páginas en la que mencionó (de forma un tanto desordenada) las observaciones de los satélites de Júpiter en los días 14 y 21 de julio y 6 de agosto, se encuentra un valor para el 10 de abril que parece ser el estado absoluto del cronómetro en aquel momento, lo que implica que también realizó una observación solar ese día. Curiosamente, en ningún lado se encuentra que se hayan realizado medidas para la determinación de la latitud, así como de la altura con respecto al nivel del mar, aun

cuando se supone que el observatorio de Mutis contaba con el instrumental para ello, lo que probablemente no se juzgó necesario y sugiere que el interés era fundamentalmente determinar el estado de funcionamiento de los relojes.

En cuanto al valor que se obtuvo de la declinación magnética en Santafé, cuyo promedio fue de $6^{\circ}51'43''$ E, exceptuando el dato del 22 de mayo (por apartarse notablemente de los restantes), este es consistente con el que obtuvo Humboldt tres años antes: $7^{\circ}35'$ E (**Humboldt & Oltmanns**, 1810). No está de más añadir que el valor de la declinación magnética continuó disminuyendo lentamente a lo largo de los siglos XIX y la primera mitad del XX y pasó ya a una dirección hacia el oeste a finales de la década de los años 70 del siglo XX (**Garavito**, 1988). En el presente es de $8^{\circ}31'$ oeste.

Con relación a la longitud, el valor promedio de los datos que se obtuvo (no teniendo en cuenta los valores del 21 de julio y del 6 de agosto, por apartarse de forma notoria de los restantes) fue de $67^{\circ}40'30.35''$ oeste, esto es, unos $22'40''$ más bajo comparado con el valor que el observador tenía como referencia para sus cálculos de interpolación a partir de los datos del ANEA. Hay una nota en la hoja de observaciones del 12 de junio en el que comenta el valor de la longitud que debió asignar Humboldt para Santafé en el mapa del río Magdalena que entregó al Virrey en 1801.

Para finalizar, examinaremos específicamente el registro de la emersión del primer satélite de Júpiter registrada el 28 de junio. El observador anotó la hora solar verdadera en Santafé en el momento de la emersión después de todo el proceso de calibración del cronómetro; el valor fue de $9^{\text{h}}2^{\text{m}}6^{\text{s}}19,87^{\text{t}} = 9^{\text{h}}2^{\text{m}}6,33^{\text{s}}$ (la t se refiere a los terceros). Lo interesante del asunto es que a mediados de 1810, a manera de ejemplo Caldas refiere en la Memoria 7 de la continuación del Semanario del Nuevo Reino de Granada (que fungió como preliminares del Almanaque de 1811) que él observó una emersión del primer satélite el 28 de junio de 1804 desde Quito, el cual midió en $8^{\text{h}}44^{\text{m}}39,06^{\text{s}}$, al explicar cómo se puede determinar la latitud entre dos observadores por medio de la observación simultánea de los satélites de Júpiter. Comenta, además, que en Santafé se realizó la misma observación por parte de “Mutis asociado a D. Manuel Álvarez” (**Caldas**, 1966; **Portilla**, 2020), quienes obtuvieron como tiempo de emersión las $9^{\text{h}}17^{\text{m}}6,30^{\text{s}}$. Sin embargo, cuando se establece la diferencia de ambos tiempos para determinar la longitud, se obtiene $0^{\text{h}}17^{\text{m}}27,24^{\text{s}}$ en lugar de $0^{\text{h}}32^{\text{m}}27,24^{\text{s}}$, lo que podría interpretarse como un error de naturaleza tipográfica. Sin embargo, el primer dato debe ser el correcto, porque Caldas lo escribe dos veces, de lo que se infiere que alguno de los dos tiempos que dan origen a la diferencia es el que está mal escrito. Si suponemos que en realidad el tiempo de Mutis y su asociado fue $9^{\text{h}}2^{\text{m}}6,30^{\text{s}}$, entonces sí se obtiene la diferencia que Caldas calculó. Como se ve, este valor de tiempo es prácticamente idéntico al que obtuvo el observador, lo que difícilmente puede interpretarse como una simple coincidencia y apunta a que el valor que refiere Caldas como tiempo de emersión de lo medido en Santafé es el que aparece registrado para el 28 de junio en el documento que nos ocupa.

Es entendible que Caldas mencione primero a Mutis, dando a entender que era éste quien estaba al frente de la observación, pero es dudoso que haya sido el responsable de esta y todas las demás (así como de su registro), no solo por lo avanzado de su edad sino porque la letra con que fueron redactadas no parece corresponder a la del gaditano. Es razonable suponer que Caldas colocó a Mutis en esa situación de preeminencia en razón de que el observatorio era, al fin y al cabo, de su propiedad y había que resaltar ante los santafereños la figura del ilustre botánico que, como se dijo, también ostentaba el cargo de Astrónomo Real. Por una carta de José Ignacio de Pombo (1761-1815) dirigida a Mutis con fecha del 20 de junio de 1804 sabemos que el primero, quien residía en Cartagena de Indias, estaba al tanto de las labores que “hacen Talledo y Álvarez sobre el plano de Humboldt” (**Hernández de Alba**, 1983). Pero lo curioso es que Caldas, en la memoria referida, ignore por completo el nombre de Talledo, pues mediando apenas seis años entre las observaciones referidas y la redacción de la Memoria 7, debió saber quiénes estuvieron tras esas primeras observaciones y quiénes no.

Ahora bien, es casi seguro que el nombre de “Manuel Álvarez” corresponda a Manuel Álvarez de Eulate, piloto español del cual, lamentablemente, existe escaso registro documental. **Mejía** (2021) lo menciona en varias ocasiones describiéndolo como un amigo íntimo de Talledo; su condición de piloto de la Armada del Rey lo sitúa como alguien lo suficientemente curtido en materia de observación astronómica como para haber sido nombrado profesor de la Escuela Náutica y Matemáticas de Cartagena de Indias en 1810 por iniciativa de José Ignacio de Pombo (**Martínez**, 2023; **Lucena**, 1990).

Un dato adicional. En su diario personal Humboldt se refirió a la reacción de las autoridades virreinales ante el mapa que él elaboró del río Magdalena y de la decisión de proceder a levantar un mapa semejante por parte de ingenieros españoles para verificar su exactitud. Escribió que “se encargó (enero de 1804) a un ingeniero (catalán) Talledo, muy ignorante y hablador, se dice, para que examinara mi mapa y el río, acompañado de un piloto de la expedición del señor Fidalgo (quien debía encargarse de las observaciones astronómicas.)” (**Humboldt**, 1982). Infortunadamente, Humboldt ignoraba, al parecer, el nombre del “piloto”, pero de tales palabras se infiere que éste (y no Talledo) era el encargado de las observaciones astronómicas. Todo lo anterior sugiere que las observaciones que han sido objeto del presente estudio bien pudieron haber sido realizadas por Manuel Álvarez de Eulate y no por Vicente Talledo, considerado hasta ahora responsable de las mismas.

Conclusiones

El propósito de esta comunicación fue examinar el contenido de una documentación que contiene el registro de observaciones astronómicas que constituyen, hasta donde sabemos, las primeras que se llevaron a cabo en el Observatorio Astronómico Nacional, sede Histórica. En su gran mayoría son observaciones del Sol realizadas en horas de la tarde para efectos de conocer el estado absoluto de dos relojes: un cronómetro y un reloj de péndulo. El cronómetro evidenció un atraso diario de 34 segundos en promedio, si bien en algunos días fue de 15 y en otros de 63 segundos. Así mismo, el reloj de péndulo mostró un error de pocos segundos en adelante o en atraso con respecto al cronómetro, que no excedió los 22 segundos.

También se estableció la presencia de un reloj solar que fue utilizado, en dos ocasiones, como herramienta en la técnica de alturas iguales. Otras observaciones del Sol se dedicaron a la determinación de la declinación magnética del lugar, obteniendo un valor promedio de 6°51'43" E. También se realizaron mediciones para determinar la hora solar verdadera de algunas inmersiones y emersiones de los satélites de Júpiter con el objeto de refinar el valor de la longitud de Santafé de Bogotá, obteniéndose un valor promedio igual a 67°40'30,35" oeste con relación al meridiano de San Fernando en Cádiz. Es probable que esas determinaciones del estado de los instrumentos para medición del tiempo hayan sido útiles en la elaboración del mapa del río Magdalena que adelantaban Vicente Talledo y Manuel Álvarez de Eulate. Sin embargo, un comentario de Caldas realizado en el año de 1810 sobre el instante del registro de la emersión de un satélite de Júpiter en Santafé y sobre quienes lo realizaron, ignora el nombre de Talledo, lo que sugiere que quien realizó las observaciones astronómicas fue Álvarez de Eulate.

Agradecimientos

El autor desea expresar su más sincero agradecimiento al profesor José Antonio Amaya, quien hizo llamar la atención, a través de una comunicación escrita, sobre la existencia y contenido de la documentación aquí analizada. Igualmente agradece las sugerencias provenientes de los árbitros anónimos que permitieron mejorar la versión original de este escrito.

Conflicto de intereses

El autor declara no tener ningún conflicto de intereses.

Referencias

- Arias de Greiff, J.** (1993). *La astronomía en Colombia*. Colección Pérez-Arbeláez No. 8, Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales.
- Caballero, J. M.** (1946). *Particularidades de Santafé*. Prensas de la Biblioteca Nacional.
- Caldas, F. J.** (1966). *Obras completas de Francisco José de Caldas*, Universidad Nacional de Colombia.
- Caldas, F. J.** (2016). *Cartas de Caldas Ilustradas*, Universidad Distrital Francisco José de Caldas/Asociación de amigos de la Casa Museo Caldas/Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales.
- Garavito, C.** (1988). Variación del campo magnético terrestre en Bogotá, desde 1801 hasta 1988. *Boletín de la Sociedad Geográfica de Colombia*, 39, 1-7.
- Humboldt, A. & Oltmanns, J.** (1810). *Voyage de Humboldt et Bonpland, quatrième partie. Astronomie. Deuxième Volume*. J. H. Stone.
- Juan, J. & De Ulloa, A.** (1748). *Observaciones astronómicas y físicas hechas de orden de S. Mag. en los reynos del Perú*. Madrid, Juan de Zúñiga.
- González, D. M.** (2003). *El Observatorio Astronómico de Santa Fe de Bogotá*. Universidad Sergio Arboleda.
- Hernández de Alba, G.** (1983). *Archivo epistolar del sabio naturalista Don José Celestino Mutis*. Editorial Presencia, Ltda.
- Humboldt, A.** (1982). *Alexander von Humboldt en Colombia, extractos de sus diarios*. Publicismo y Ediciones.
- Juan, J.** (1757). *Compendio de Navegación para el uso de los caballeros guardias-marinas*, Edición del 2021, Editorial Maxtor.
- Lafuente, A. & Sellés, M.** (1988). *El observatorio de Cádiz*. Instituto de Historia y Cultura Naval, Madrid.
- Londoño, R. J. & Morales, A.** (2007). *Observatorio Astronómico de Bogotá, Pedes in Terra ad Sidera Visum*, Ediciones Uniandes.
- Lucena, M.** (1990). Ciencia y crisis política: la doble creación de la Escuela Náutica de Cartagena de Indias (1810-1822), *Revista de Historia Naval*, No. 30, 31-38.
- Martínez, A.** (2023). *La batalla decisiva; la gesta del gran almirante José Padilla que condujo a la libertad de América del Sur; 200 años de la Batalla Naval del lago de Maracaibo*. Armada Nacional de la República de Colombia.
- Mejía, S.** (2021). *Cartografía e Ingeniería en la era de las Revoluciones-Mapas y obras de Vicente Talledo y Rivera en España y el Nuevo Reino de Granada (1758-1820)*. Ministerio de Defensa. Secretaría General Técnica.
- Portilla, J. G. & Moreno, F.** (2019). Un manuscrito de finales del siglo XVII: primera manifestación de un estudio astronómico y cronológico autóctono en territorio neogranadino. *Revista de la Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales*, 43, 255-272. <https://doi.org/10.18257/raccefyn.884>
- Portilla, J. G.** (2020). *Firmamento y atlas terrestre: la astronomía que practicó Francisco José de Caldas*. Universidad Nacional de Colombia.
- Portilla, J. G.** (2023). Información astronómica en la primera publicación periódica del Nuevo Reino de Granada. *Revista de la Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales*, 47, 822-836. <https://doi.org/10.18257/raccefyn.2016>
- Rodríguez, M.** (1796). *Papel Periódico de la Ciudad de Santafé de Bogotá*. https://catalogoenlinea.bibliotecanacional.gov.co/client/es_ES/search/asset/118304/ y <https://babel.banrepcultural.org/digital/collection/p17054coll26/id/596>
- Rozo, D.** (1952). Historia de la cartografía de Colombia. *Boletín de la Sociedad Geográfica de Colombia*, 4, 1-13.
- Sanz, M.** (1774). *Breve noticia de la vida del Excmo. Sr. D. Jorge Juan y Santacilia, reducida a los hechos de sus Comisiones, Obras y Virtudes, que a instancia de sus Apasionados, presenta al Público su Secretario D. Miguel Sanz, Oficial segundo de la Contaduría principal de Marina*. Madrid, Imprenta Real de la Gazeta, 1774, Alicante, Universidad de Alicante (2013).
- Schumacher, H. A.** (1984). *Mutis, un forjador de la cultura*. Empresa Colombiana de Petróleos, Bogotá.
- Zamorano, R.** (1594). *Cronología y repertorio de la razón de los tiempos*. Imprenta de Rodrigo Cabrera, Sevilla.

Artículo original

Modelos de media móvil integrada autorregresiva de la radiación solar global en el distrito San Jerónimo de Andahuaylas, Perú

ARIMA models of global solar radiation in the San Jerónimo de Andahuaylas district, Perú

Reynaldo Ricardo Quispe-Infantes

Departamento Académico de Ciencias Básicas, Universidad Nacional José María Arguedas, Andahuaylas, Perú

Resumen

El distrito de San Jerónimo de Apurímac presenta una elevada radiación solar que afecta las actividades agrícolas, ganaderas y mineras. Si se tiene un pronóstico confiable, es posible aumentar la producción y el nivel socioeconómico. En este estudio se elaboraron y compararon modelos de media móvil autorregresiva (*Autoregressive Integrated Moving Average*, ARIMA) de la radiación solar global (RSG) en el distrito de San Jerónimo con los datos de las estaciones meteorológicas de la Universidad Nacional José María Arguedas (UNAJMA) y de la Administración Nacional de Aeronáutica y del Espacio de Estados Unidos (NASA). Se hizo un estudio experimental aplicado de enfoque cuantitativo y nivel descriptivo propositivo con una muestra de 1.037 datos históricos de RSG registrados desde el 1 de enero de 2022 hasta el 2 de noviembre de 2024 mediante observación con un sensor de luz en la estación terrestre y técnicas documentales de datos recolectados del satélite geoestacionario operacional ambiental (*Geostationary Operational Environmental Satellite*, GOES) en la estación espacial (**POWER**, 2024). Se aplicaron pruebas de normalidad gráfica, la Q-Q normal, la de Dickey-Fuller, pruebas de estacionariedad, la de Levene y la de D'Agostino, gráficas de autocorrelación simple (*autocorrelation function*, ACF) y parcial para el cálculo de retrasos, y el criterio de información de Akaike (*Akaike information criterion*, AIC) para la elección del mejor modelo. Se obtuvieron modelos predictivos de RSG, ARIMA (3,0,2) y (5,0,4) precisos en las estaciones NASA y UNAJMA. Se obtuvieron modelos ARIMA(3,0,2) para la estación NASA y ARIMA(5,0,4) para la estación UNAJMA, con valores de error absoluto medio (*mean absolute error*, MAE), error porcentual absoluto medio (*mean absolute percentage error*, MAPE) y la raíz del error cuadrático medio (*root mean squared error*, RMSE) de 0,290; 5,211% y 0,384, respectivamente, en el primer caso; y de 0,610; 10,623% y 0,702, en el segundo. Todos estos permitieron pronosticar la RSG en el distrito de San Jerónimo desde el 3 hasta el 12 de noviembre de 2024.

Palabras clave: Modelos autorregresivos; radiación solar; estacionariedad; pronósticos; autocorrelaciones.

Abstract

The San Jerónimo de Apurímac district experiences high solar radiation, which impacts agricultural, livestock, and mining activities. A reliable forecast would increase production and socioeconomic status. Here, we developed and compared autoregressive moving average (ARIMA) models of global solar radiation (GSR) for the San Jerónimo district using the meteorological data from the stations at the José María Arguedas National University (UNAJMA) and the USA National Aeronautics and Space Administration (NASA). We conducted an applied experimental research with a quantitative approach and a propositional descriptive level, with a sample of 1,037 historical RSG data recorded from January 1, 2022, to November 2, 2024 at the ground station using a light sensor and at the space station through documentary techniques of the data from the geostationary operational environmental satellite (GOES) (**POWER**, 2024). The following normality tests were applied: normal, Q-Q plot, Dickey-Fuller Test, stationarity tests, Levene and D'Agostino tests, simple autocorrelation (ACF) and partial ACF plots for calculating delays, and the Akaike information criterion (AIC) likelihood

Citación: Quispe-Infantes RR. Modelos de media móvil integrada autorregresiva de la radiación solar global en el distrito San Jerónimo de Andahuaylas, Perú. Revista de la Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. 49(192):486-500, julio-septiembre de 2025. doi: <https://doi.org/10.18257/raccefyn.3206>

Editor: Santiago Vargas Domínguez

***Correspondencia:**

Reynaldo Ricardo Quispe Infantes;
rrquispe@unajma.edu.pe

Recibido: 22 de abril de 2025

Aceptado: 21 de junio de 2025

Publicado en línea: 19 de agosto de 2025



Este artículo está bajo una licencia de Creative Commons Reconocimiento-NoComercial-Compartir Igual 4.0 Internacional

for choosing the best model. ARIMA(3,0,2) models were obtained for the NASA station and ARIMA(5,0,4) for the UNAJMA station, with mean absolute error (MAE), mean absolute percentage error (MAPE), and root mean squared error (RMSE) values of 0.290; 5.211% and 0.384, respectively, in the first case; and 0.610; 10.623% and 0.702, in the second. Which allowed forecasting the RSG in the district of San Jerónimo from November 3 to 12, 2024.

Keywords: Autoregressive models; solar radiation; stationarity; forecasts; autocorrelations.

Introducción

Los modelos de media móvil integrada autorregresiva (ARIMA) son muy importantes para la revisión de la radiación solar global (RSG) (Odejobi *et al.*, 2024) y para su pronóstico (Ismail *et al.*, 2021; Kim *et al.*, 2022; Melquiádes *et al.*, 2022), al igual que los implementados con redes neuronales (Garg *et al.*, 2020; Nugroho *et al.*, 2024a; Meng *et al.*, 2023; Nugroho *et al.*, 2024) o híbridas (Jaihuni *et al.*, 2020; Guermoui *et al.*, 2020). El conocimiento de la RSG tiene impacto en la previsión de la energía solar (Salman *et al.*, 2024; Mughal *et al.*, 2022; Saxena *et al.*, 2024) y su uso (Tarmanini *et al.*, 2023; Atique *et al.*, 2020; Basmadjian *et al.*, 2021; Kurniadi *et al.*, 2024; Sedai *et al.*, 2023), así como para la generación de energía fotovoltaica (Ahmed *et al.*, 2020; Fan *et al.*, 2022) y de potencia solar fotovoltaica (Mellit *et al.*, 2020; Z. F. Liu *et al.*, 2021; Mohamed *et al.*, 2022).

Antecedentes

En 11 estados de la península de Malasia se han empleado modelos ARIMA de pronóstico de la radiación solar diaria. Los datos se recopilaron del visor del Power Data Access proporcionado por el sitio web de la Administración Nacional de Aeronáutica y del Espacio de Estados Unidos (NASA) a lo largo de casi diez años, desde el 1 de enero de 2009 hasta el 31 de agosto de 2019 (3.895 observaciones por estado). Mediante la metodología de Box y Jenkins se analizó la estacionariedad de los datos y se generó el modelo ARIMA (1, 1, 2) para Pulau Pinang, Perak, Kuala Lumpur, Negeri Sembilan, Melaka, Pahang, Terengganu; el ARIMA (2, 1, 1) para Kedah y Selangor, y el ARIMA (1, 1, 3) para Johor y Kelantan. Los modelos demostraron una precisión RSME de 1,00, 1,02, 0,93, 1,05, 1,00, 1,12, 1,22, 0,98, 1,11, 1,15, 1,20 y una precisión MAE de 0,77, 0,80, 0,73, 0,82, 0,78, 0,85, 0,93, 0,75, 0,88, 0,90, 0,90 para cada estado, lo que indica que los valores pronosticados tendían a los reales (Ismail *et al.*, 2021).

En otro estudio se desarrolló un modelo de pronóstico de irradiancia solar horizontal global (*Global Horizontal Irradiance*, GHI) y uno de irradiancia normal directa (*Direct Normal Irradiance*, DNI) a corto plazo, con el fin de usar la energía solar en el mercado de comercio de energía en Daejeon, Corea del Sur. Los datos se recogieron desde las 18:45 del 21 de enero de 2019 hasta las 23:45 del 31 de diciembre de 2021 (tres años y un minuto) y se desarrolló un modelo ARIMA (4, 1, 2) a partir de datos de GHI de 15 a 75 minutos, un modelo de media móvil integrada autorregresiva estacional (*seasonal autoregressive integrated moving average*, SARIMA) (1, 0, 2)(0, 1, 0) de 90 a 120 minutos y sus errores de evaluación RMSE (Kim *et al.*, 2022).

Por otro lado, en la región de la meseta Qinghai-Tíbet se construyó un modelo ARIMA de predicción de radiación promedio a ultracorto plazo, uno de bosque aleatorio (*random forest model*, RF) y uno de memoria a corto-largo plazo (*long short-term memory*, LSTM) para los 10 minutos siguientes. Se usaron los datos de un radiómetro de cuatro componentes MR-60 del Observatorio Atmosférico de Yangbajing con rango espectral de 285 a 3.000 nm utilizando la unidad W/m², y un muestreo con una frecuencia de un minuto durante 366 días, desde el 1 de junio de 2019 hasta el 31 de mayo de 2020. Los resultados mostraron que la precisión de los modelos RF y LSTM fue superior al ARIMA por influencia del tamaño muestral en cada estación: primavera (1980, 4356, 3564), verano (4752, 2772, 2772), otoño (3564, 4752, 3564) e invierno (3168, 4752, 3168). Para una misma estación y horizonte, el modelo RF tuvo mayor precisión de RMSE que el ARIMA, de 65,6–258,3 W/m², e inferior al de LSTM en 3,7–83,3 W/m² (Meng *et al.*, 2023).

En Bhadla, Jodhpur (India), se hizo la predicción de la radiación solar mediante un análisis comparativo de diferentes modelos estadísticos: el de Markov, el ARIMA y un modelo de red neuronal artificial (*artificial neural network*, ANN), con datos recogidos en el periodo 2010–2014. Además, de una comparación gráfica entre la radiación solar observada y pronosticada para los días 31 de enero y 20 de mayo de 2014, con el fin de evaluar su desempeño. Las medidas del RMSE, el error porcentual absoluto medio (*mean absolute percentage error*, MAPE) y el error medio absoluto (*mean absolute error*, MAE) mostraron que el modelo de Markov fue mejor que los otros para las zonas estudiadas (**Garg et al.**, 2020).

La predicción de RSG traza el camino para una planificación y gestión de las reservas en las latitudes medias del hemisferio norte y del hemisferio sur debido a la naturaleza esporádica de la energía solar. Existen varios modelos para dicha predicción: los generadores de imágenes del cielo, que proporcionan un valor de la raíz del error cuadrático medio normalizado (nRMSE) del 6 % al 9 % durante 30 minutos, y la técnica de imágenes satelitales con un RMSE de 61,28 W/m² a 346,05 W/m² para cuatro horas de predicción. También están los modelos de mesoescala de predicción numérica del tiempo (*numerical weather prediction*, NWP), que proporcionan un RMSE de 411,6 W/m² durante los tres días previos a la previsión con una resolución espacial de 50 km, y el de aprendizaje automático (*machine learning*, ML), que ofrece resultados precisos hasta con un día de antelación y un RMSE en el rango de 0,1170 W/m² a 93,04 W/m² (**Tarmanini et al.**, 2023).

En otro proyecto se planteó la técnica de pronóstico de radiación solar como ayuda al operador del sistema de la red durante su planificación a través de un análisis de datos de mediciones directas obtenidas de indonesiasolarmap.com y la colaboración de la Asociación de Energía Solar de Indonesia (AESI) y la compañía Perseroan Terbatas (PT) Synkrona Enjiniring Nusantara de Yogyakarta en la isla de Java, Indonesia. Los datos utilizados son mediciones a lo largo de un año (de enero de 2022 a enero de 2023), tomadas en intervalos de una hora desde las 7 am hasta las 5 pm. Los resultados evidenciaron que el modelo de pronóstico LSTM fue más preciso que el de redes neuronales recurrentes (*recurrent neural networks*, RNN) y el ARIMA, con valores de RMSE, MAPE, MAE y coeficiente de determinación (R²) de 33,01 W/m², 7,72 %, 24,51 W/m² y 0,96, respectivamente. El cielo parcialmente nublado, nublado o lluvioso tuvo menor rendimiento predictivo que el soleado o despejado (**Nugroho et al.**, 2024).

En algunos casos, como en la Universidad Nacional de Gyeongsang, en Jinju, República de Corea del Sur, los modelos de previsión independientes fueron insuficientes, por lo que se propuso un modelo híbrido parcialmente ajustado (*partially adjusted hybrid model*, PAHM), el cual utilizó el modelo de unidades recurrentes cerradas (*bidirectional gated recurrent unit*, BiGRU) y el ARIMA para predecir la irradiación solar en intervalos de 5 y 60 minutos, con una validación cruzada de 11 pasos clasificados según sus costos computacionales; se utilizaron datos de registros de radiación solar correspondientes a un período de 32 meses a partir de marzo de 2017, de las 05:00 a las 19:00, con 174.914 y 14.756 registros para períodos de cinco minutos y una hora, respectivamente. Los modelos individuales BiGRU y ARIMA obtenidos superaron el modelo PAHM y el clásico en las predicciones de cinco minutos. Sin embargo, el PAHM fue 5 % más preciso que el clásico en 60 minutos en promedio, y la eficiencia computacional del modelo BiGRU fue mejor (**Jaihuni et al.**, 2020).

La predicción de radiación global horizontal (GHI) cumple un papel importante en la contaminación del aire y el calentamiento global y es un parámetro determinante en la producción de energía solar de sistemas fotovoltaicos, la cual está determinada por la posición solar y la presencia de nubes. Dado que esto último es difícil de modelar, en una estación meteorológica de Turín (Italia) se propuso una metodología de pronóstico horizontal de corto (15 min a 60 min) y mediano plazo (60 a 120 min). Se utilizó una muestra de seis años de mediciones de GHI dividida en años para el entrenamiento (2010-2014) y un año para la prueba (2015), con 175.296 y 35.038 datos y muestreos cada 15 minutos. Se

diseñaron, optimizaron y compararon las siguientes redes neuronales: una autorregresiva no lineal (*non-linear autoregressive*, NAR), una prealimentada (*feedforward*, FFNN), una LSTM y una red de estado de eco (*echo state network*, ESN), con lo que mejoró el preprocesamiento para el índice de cielo despejado (Aliberti *et al.*, 2021).

La energía solar fotovoltaica (PV) es utilizada por agricultores en regiones agrícolas con climas áridos, como Hail, Arabia Saudita, para bombear agua de pozos profundos, por lo que su predicción es un factor que afecta la eficiencia y la confiabilidad del diseño de un sistema de bombeo fotovoltaico de agua. Allí se recopilaron 6.205 datos de irradiación horizontal global para el entrenamiento y 1.096 para la prueba en el periodo 2000-2019. Los modelos fueron el de predicción inteligente autorregresivo persistente (*smart persistence forecast autoregressive*, AR), el de ANN, el AR de orden 2, el AR de orden 3, y el de ANN de orden 2, con indicadores de rendimiento MAPE (%) de 7,027, 7,047, 6,739, 6,943, 6,712 y 6,707 (Boubaker *et al.*, 2021).

Otro caso en Java y Bali permite ver cómo la predicción precisa de la radiación solar a corto plazo es esencial en la planificación energética de la red y la política de transición energética del gobierno de Indonesia. Por ello se propuso un modelo LSTM basado en mediciones de radiación solar durante 1,5 años para pronosticar la radiación horaria de un día posterior. Los resultados obtenidos se compararon con los modelos ARIMA y RNN. El modelo LSTM resultó ser el más preciso, con un RMSE de 25,56 W/m², un MAPE de 7,27 % y un R² de 0,99; sus valores de predicción fueron buenos en la estación seca, con un MAPE de 13,99 %, en tanto que en la estación lluviosa el MAPE fue de 34,04 % (Nugroho *et al.*, 2024).

Sin embargo, la selección del modelo incorrecto, o la presencia de fluctuaciones aleatorias en las series de radiación solar, podrían provocar un bajo rendimiento predictivo. Por ello, para pronosticar la radiación solar entre las 6:00 y las 18:00 en cuatro ciudades importantes de Brasil, Florianópolis, Fortaleza, Salvador y São Paulo, se propuso un modelo denominado HetDS (*heterogeneous ensemble dynamic selection*), basado en los métodos ARIMA, de regresión de soporte vectorial (*support vector regression*, SVR), de red neuronal de perceptrón multicapa (*multilayer perceptron*, MLP), de máquina de aprendizaje extremo (*extreme learning machine*, ELM), de red de creencia profunda (*deep belief network*, DBN), de RF y de refuerzo de gradiente (*gradient boosting*, GB). El modelo HetDS (3,20) alcanzó una precisión de RMSE igual a 0,0931, MAPE igual a 19,87, y de MAE igual a 0,0643 para la serie de Florianópolis (Santos *et al.*, 2022).

Por otro lado, los altos niveles de radiación solar constituyen un factor importante en la radiación solar ultravioleta (UV), a la cual están expuestos los trabajadores de limpieza en vías públicas del distrito de Los Olivos de la capital de Perú. En ese contexto, se hizo un estudio de tipo cualitativo con enfoque no experimental. Las mediciones se realizaron el 20 de febrero del 2022 desde las 11 hasta las 13 horas utilizando un medidor ultravioleta A (UVA), uno ultravioleta C (UVC), y la combinación de UVA y UVB en un rango de intensidad de hasta 40 mW/cm², obteniéndose valores entre 57,1 y 71 W/cm², que luego se compararon con la normativa internacional (Borda-Luna & Lahura-Albujar, 2022).

Dado que el distrito de San Jerónimo, de la provincia de Andahuaylas, departamento de Apurímac, en la Cordillera de los Andes, se encuentra a una altitud elevada y a una baja latitud, sus niveles de radiación solar son altos y afectan las actividades de los agricultores, los ganaderos y los mineros, lo que se refleja en su baja producción socioeconómica.

Frente a este problema, se propuso la elaboración y comparación de modelos de predicción de la radiación solar global de corto alcance utilizando los datos de una estación meteorológica terrestre y una estación de datos en línea provenientes del GOES (POWER, 2024), con el objeto de proveer a los habitantes del distrito valores confiables de radiación solar que les permitan planificar adecuadamente sus actividades agrícolas y ambientales para mejorar su producción y nivel socioeconómico y en la idea e contribuir al desarrollo de los primeros lineamientos de generación y utilización de la energía fotovoltaica en una red eléctrica de energía renovable no contaminante.

Modelos de media móvil integrada autorregresiva

El modelo ARIMA esta constituido por tres partes: el componente autorregresivo (AR), que hace que la variable de estudio regrese a sus valores anteriores, la media móvil (MA), que representa el error de regresión como una combinacional lineal de valores de error en intervalos de tiempo pasado, y el integrado (I), que es el número de veces de diferenciación. ARIMA (p, d, q) es un modelo ARIMA no estacional, donde p es el orden de retardo, d es el orden de diferenciación y q es el orden de la media móvil. Las limitaciones de este modelo dependen de los valores de la variable de estudio y funciona mejor cuando trabaja con gran cantidad de datos (Dimri et al., 2020).

En un modelo de media móvil integrada autorregresiva, el valor futuro de una variable se asume como una función lineal de varias observaciones pasadas y errores aleatorios (Quispe & Huamani, 2024). Es decir, el proceso subyacente que genera la serie temporal tiene la siguiente forma:

$$y_t = \theta_0 + \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \dots + \phi_p y_{t-p} + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2} - \dots - \theta_q \varepsilon_{t-q}, \quad (1)$$

donde y_t y ε_t son el valor real y el error aleatorio en el período t , respectivamente; ϕ_i ($i = 1, 2, \dots, p$) y θ_j ($j = 0, 1, 2, \dots, q$) son parámetros del modelo, y p y q a menudo se denominan órdenes del modelo. Los errores aleatorios, ε_t , se supone que están distribuidos de forma independiente e idéntica con una media de cero y una varianza constante de σ^2 (Zhang, 2003). En una serie de tiempo es posible generar modelos ARIMA a partir de las funciones de autocorrelación y parciales propuestas por Box y Jenkins, que se basan en la coincidencia entre el patrón de autocorrelación empírica y el teórico (Box & Pierce, 1970). Sin embargo, los modelos ARIMA (p,q,d) está limitados a patrones lineales, no estacionales, cuyo rendimiento depende del ruido de la serie (Kontopoulou et al., 2023).

La radiación solar global

Toda la radiación solar que ingresa a la atmósfera de la Tierra tiene los siguientes componentes: radiación dispersada, absorbida, reflejada al espacio y la que pasa directamente (Figura 1). La RSG es la suma de la radiación solar difusa (Mutombo & Numbi, 2022) y la directa que llega a la superficie (Blal et al., 2020).

Existen varios modelos predictivos de RSG en la superficie horizontal que trabajan con datos meteorológicos como la temperatura, la humedad relativa (Mirzabe et al., 2022) y la duración de la exposición solar (Makade et al., 2021; Reynaldo & Verónica, 2024), los cuales poseen un comportamiento no estacionario, lo que se debe a la variedad de las condiciones atmosféricas. Estos datos son medidos por diferentes estaciones terrestres

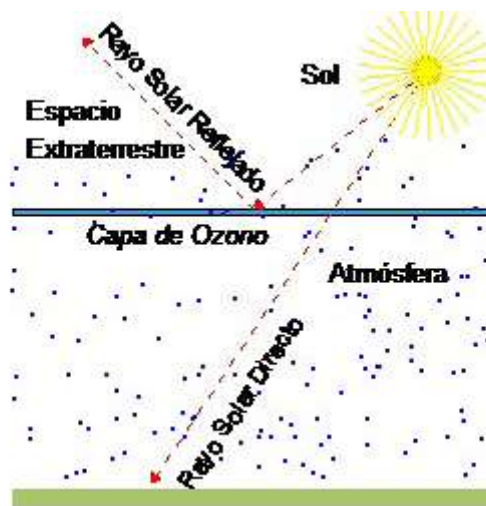


Figura 1. Componentes de la radiación global (Iqbal, 1983)

o espaciales, como el GOES. Los métodos para realizar pronósticos de RSG a corto y mediano plazo son importantes para abordar los problemas de las redes de energía fotovoltaica (Hassan *et al.*, 2022).

Métricas de precisión

Las métricas de precisión miden las diferencias entre los n valores de las observaciones reales z_t y los pronosticados por el modelo de pronóstico \hat{z}_t (Hwang, 2024).

La raíz del error cuadrático medio (RMSE),

$$RMSE = \sqrt{\frac{\sum_{t=1}^n (z_t - \hat{z}_t)^2}{n}} \quad (2)$$
 (Chandra & Sahu, 2024) se utiliza comúnmente en pronósticos, climatología y análisis de regresión para verificar resultados experimentales (Sahinli, 2020).

El error absoluto medio (MAE), $MAE = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n |z_t - \hat{z}_t|$ (Mani *et al.*, 2022) (3)

El error porcentual absoluto medio (MAPE), $MAPE = \frac{100}{n} \sum_{t=1}^n \left| \frac{z_t - \hat{z}_t}{z_t} \right|$ (4)

Los valores de rango MAPE: <10 %, 10-20 %, 20-50 %, >50 %, corresponderían a un desempeño de predicción alto, bueno, razonable e impreciso, respectivamente (Quartey-Papafio *et al.*, 2021).

Materiales y métodos

Ubicación del área de estudio

La estación meteorológica de la Universidad Nacional José María Arguedas, distrito de San Jerónimo, provincia de Andahuaylas del Departamento de Apurímac en Perú, se ubica en las coordenadas $-13,6653^\circ$ de latitud y $-73,3485^\circ$ de longitud, a los 3.039 m de altitud (Figura 2a). Está rodeada de montañas en el valle del río Chumbao y en ella se han realizado observaciones de variables climatológicas desde 2018.

Descripción experimental

El equipo experimental (Figuras 2b, 2c) esta compuesto por un sensor de luz DAVIS que captura los rayos solares en el rango espectral de 280 a 3.000 nm y está conectado a una computadora. La unidad de medición fue W/m^2 ; se hicieron muestreos cada 10 minutos entre las 00:00 y las 24:00. Se obtuvieron 144 muestras por día y los valores de la serie temporal de radiación solar global se procesaron en kW/m^2d , promediados en periodos de un día. Para el análisis se obtuvieron 1.037 datos, desde el 1 de enero de 2022 hasta el 2 de noviembre de 2024, y se descartaron los valores atípicos dada su inconsistencia.



Figura 2. a) Ubicación del distrito de San Jerónimo dentro del departamento de Apurímac. b) y c) Estación meteorológica UNAJMA

Datos del satélite geoestacionario

El estudio utilizó, asimismo, el conjunto de datos de radiación solar global (RSG) obtenido del satélite GOES (**POWER**, 2024), que está a una elevación de 3.209,1 m en la estación meteorológica de la NASA. A través de su plataforma se obtuvieron 1.037 datos de alta resolución en línea, lo que constituye un tamaño muestral que permitió encontrar un patrón en la serie para la ubicación del área de estudio.

Métodos

La investigación se hizo en el laboratorio de experimentación de física 2 de la Universidad Nacional José María Arguedas (UNAJMA) en un ambiente controlado. Se trabajó con los datos experimentales de la estación UNAJMA, y, mediante la técnica de revisión documental y fichas de registros como instrumento de recolección de datos, se creó una base de datos en hojas de EXCEL y lenguaje de programación R Versión (10.0). Se aplicó un enfoque cuantitativo, de nivel descriptivo propositivo y diseño longitudinal, con datos históricos de RSG. Se evaluó y analizó la eficacia de la predicción a corto plazo; el tamaño muestral fue preponderante en el margen de error de las pruebas estadísticas aplicadas. La variable temporal d (día) y la RSG se establecieron como independiente y dependiente, respectivamente.

Las etapas de estimación de los modelos ARIMA de RSG (**Figura 3**) garantizaron una representación adecuada de las diferentes condiciones de su variabilidad de la siguiente manera:

- Se determinaron los valores atípicos mediante un diagrama de cajas y un histograma en el lenguaje de programación R, los cuales se filtraron para luego volver a aplicar el diagrama de cajas y el histograma sin dichos valores atípicos.
- Se graficó la serie temporal de ambas estaciones (NASA y UNAJMA).
- Se hicieron pruebas de normalidad y estacionariedad: el gráfico Q-Q normal y las pruebas de Dickey-Fuller, Levene y D’Agostino. Dado que los datos satisfacían las pruebas de normalidad y estacionariedad, el orden de diferenciación de los datos fue $d=0$.
- Se obtuvieron las gráficas de ACF y de ACF parcial para determinar los retrasos y los modelos ARIMA.
- Se tomó en cuenta la estimación de máxima verosimilitud, el AIC, el AICc o el criterio de información bayesiano (BIC), para elegir el mejor modelo.

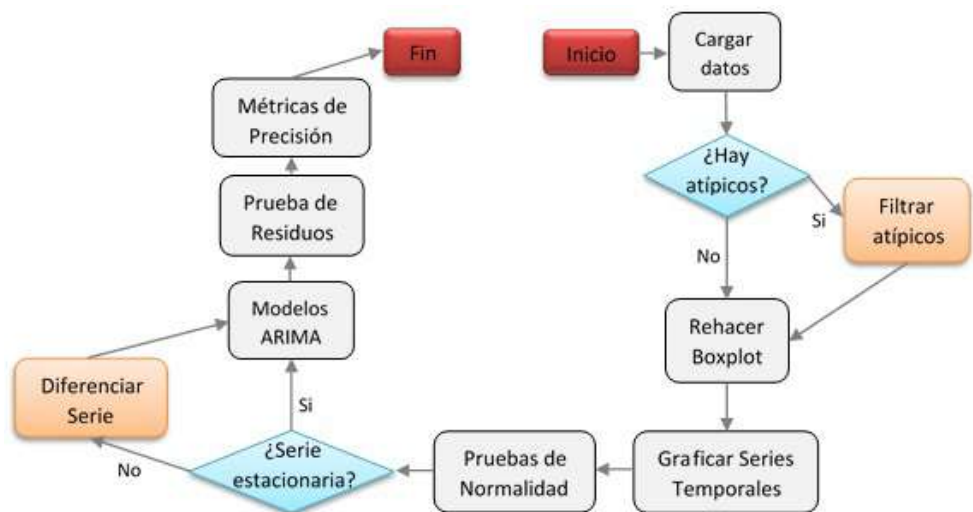


Figura 3. Etapas de estimación de los modelos ARIMA de pronóstico de radiación solar global, 2024

- Se aplicó la prueba de Kwiatkowski-Phillips-Schmidt-Shin (KPSS) para todos los modelos de las series de datos de radiación solar global de las estaciones, con el fin de evaluar la estacionaridad de los residuos generados.
- Se aplicaron las métricas de precisión MAE, MAPE y RMSE.

Se sugiere obtener datos experimentales de radiación solar global de las estaciones meteorológicas del Gobierno Regional de Apurímac (GORE) y el Servicio Nacional de Meteorología e Hidrología (SENAMHI) en diferentes localizaciones de la región de Apurímac para analizar el potencial de pronóstico en la previsión solar.

Resultados

En la **Figura 4a** se observan los diagramas de cajas de las estaciones NASA y UNAJMA para la muestra, incluidos los valores atípicos de RSG y en la **Figura 4b** los diagramas de cajas para la muestra sin valores atípicos de la RSG de la estación:

- NASA, con $5.361 \text{ Wm}^{-2}\text{d}^{-1}$ de promedio, en un intervalo de $[3.110; 7.710] \text{ Wm}^{-2}\text{d}^{-1}$.
- UNAJMA, con $5.248 \text{ Wm}^{-2}\text{d}^{-1}$ de promedio, en un intervalo de $[2.521; 8.050] \text{ Wm}^{-2}\text{d}^{-1}$.

La estación NASA presentó radiación solar global ligeramente más alta, en promedio, que la estación UNAJMA. La **Figura 4c** muestra los cambios que experimentó la radiación solar global a través de los días para el periodo desde el 1 de enero de 2022 hasta el 2 de noviembre de 2024 en las estaciones NASA y UNAJMA, localizadas en el distrito San Jerónimo de la provincia de Andahuaylas.

La **Figura 4e** muestra las gráficas Q-Q normal. En las dos estaciones la serie temporal tuvo una tendencia de distribución lineal, lo que confirmó que los datos satisfacían una distribución normal.

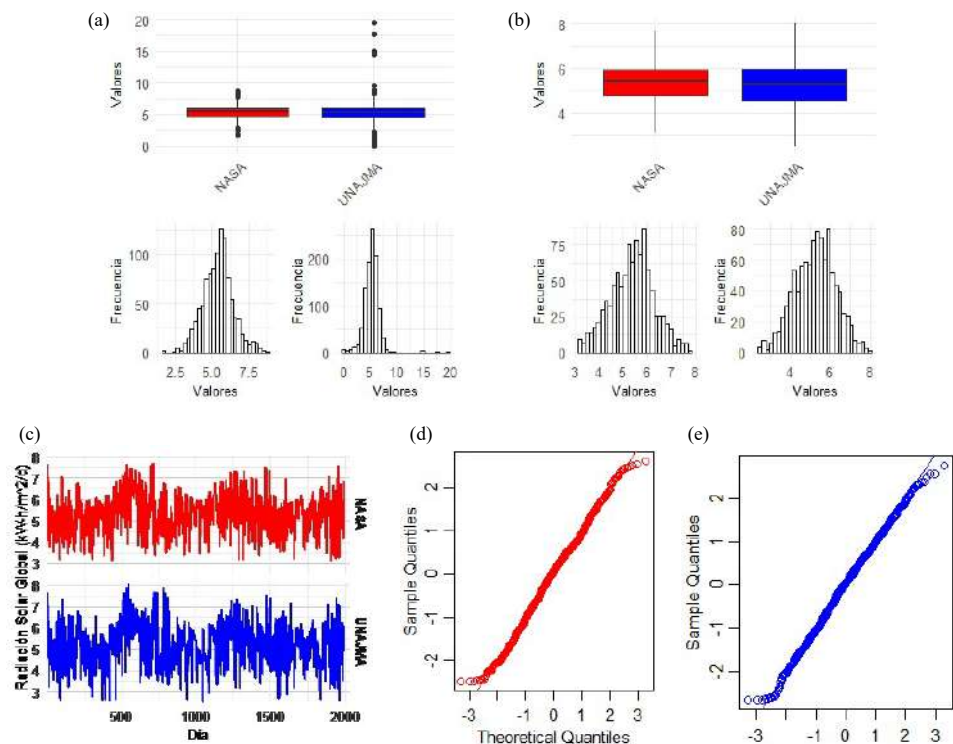


Figura 4. Diagrama de cajas para las estaciones NASA y UNAJMA. **a)** Con valores atípicos. **b)** Sin valores atípicos. **c)** Variación de la radiación solar global en función de la variación de los días. Gráfico Q-Q normal para **d)** NASA y **e)** UNAJMA en R

La **Tabla 1** muestra las siguientes pruebas estadísticas en las dos estaciones: Dickey-Fuller, con un valor t superior a los del valor crítico tau en valor absoluto, lo que demostró la inexistencia de una raíz unitaria de comportamiento estacionario. La prueba de Levene, con un $Pr < 0,05$, demostró la homogeneidad de varianzas, por lo que no se requirió ninguna diferenciación, y la prueba de D’Agostino, con un $Pr > 0,05$, demostró que la serie respondía a una distribución normal.

En la **Figura 5a** se visualizan las siguientes gráficas para la estación NASA:

- La gráfica ACF, con 31 retrasos que escapan del rango de confiabilidad. Se construyeron modelos MA(q) para $q=1, 2, \dots, 31$.
- La gráfica de la función de la autocorrelación parcial (PACF), con 30 retrasos que escapaban del rango de confiabilidad. Se construyeron modelos AR(p), para $p=1, 2, \dots, 30$.
- Se generaron 930 combinaciones del modelo ARMA (p, q) con una diferenciación de $d=0$.

Tabla 1. Pruebas estadísticas para la serie temporal en R

Pruebas de estacionariedad y normalidad			
Prueba de Dickey-Fuller			
Estación	Estimación estándar	valor t	Pr(> t)
NASA	-0,017078	-2,949	0,00326
UNAJMA	-0,025400	-3,621	0,000309
Valores críticos de tau1 para estadísticas de prueba			
	1pct	5pct	10pct
	-2,58	-1,95	-1,62
Prueba de asimetría de D’Agostino			
Estación	Sesgo	Z	p
NASA	-0,085628	-1,11216	0,2661
UNAJMA	-0,11363	-1,47102	0,1413
Prueba de Levene			
	Estación	Valor F	Pr(>F)
	NASA	3,322	6,638e-06
	UNAJMA	3,8435	0,0001663

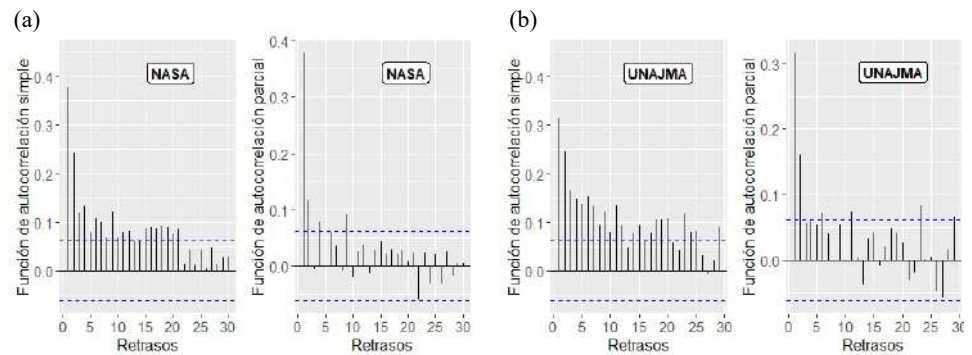


Figura 5. ACF y ACF parcial en R para la estación **a)** NASA y **b)** UNAJMA en el distrito de San Jerónimo de la provincia de Andahuaylas

En la **Figura 5b** para la estación UNAJMA se visualiza:

- La gráfica ACF, con 30 retrasos que escapaban del rango de confiabilidad. Se construyeron modelos MA(q), con q=1, 2, ..., 30.
- La gráfica PACF, con 29 retrasos que escapaban del rango de confiabilidad. Se construyeron modelos AR(p), para p=1, 2, ..., 29.
- Se generaron 930 combinaciones ARMA (p, q) con una diferenciación de d=0.

Estimación de modelos de predicción

Modelo de predicción elegido

En la **Tabla 2** se ven los siguientes datos para las estaciones NASA y UNAJMA:

- Los coeficientes del modelo de predicción ARIMA (p,d,q) de RSG mediante el criterio de máxima verosimilitud del AIC o el BIC.
- Una tendencia de estacionariedad residual de la serie temporal mediante la prueba Kwiatkowski-Phillips-Schmidt-Shin (KPSS) > 0,05.

Tabla 2. Parámetros del código auto.arima en R

Modelo ARIMA		
Coeficientes	NASA ARIMA (3,0,2)	UNAJMA ARIMA (5,0,4)
ar1	0,6865	0,1350
s.e.	0,1469	0,7625
ar2	0,5553	0,4882
s.e.	0,1757	0,1145
ar3	-0,2603	0,8159
s.e.	0.0465	0,3079
ar4	-	-0,3877
s.e.	-	0,7108
ar5	-	-0,0777
s.e.	-	0,1995
ma1	-0,3638	0,1067
s.e.	0,1480	0,7627
ma2	0,1382	-0,3477
s.e.	-	0,3286
ma3	-	-0,8394
s.e.	-	0,1866
ma4	-	0,2021
s.e.	-	0,7452
σ^2	0,6733	0,8927
AIC	2453,13	2728,73
AICc*	2453,24	2729
BIC	2487,49	2782,68
KPSS(p)	0,084093	0,1
MAE	0,290	0,610
MAPE	5,211 %	10,623 %
RMSE	0,384	0,702

*AICc: criterio de información de Akaike de segundo orden

Los valores de las métricas de precisión MAE, MAPE y RMSE fueron menores para la estación NASA que para la UNAJMA, lo que evidenció el mejor desempeño de la primera en su modelo de predicción de radiación solar global.

Valores de los modelos de predicción

En la **Figura 6** se presenta una comparación de la serie temporal de RSG desde el 3 al 12 de noviembre de 2024 entre:

- La estación NASA y UNAJMA, con similitud entre sus valores.
- El modelo ARIMA(3,0,2) de la estación NASA y el modelo ARIMA(5,0,4) de la estación UNAJMA, en el cual los valores de predicción de NASA fueron ligeramente superiores a los de UNAJMA.
- La estación NASA y su modelo ARIMA(3,0,2), en el cual se aprecia similitud entre sus valores.
- La estación UNAJMA y su modelo ARIMA(5,0,4), en el cual se aprecia similitud entre sus valores.

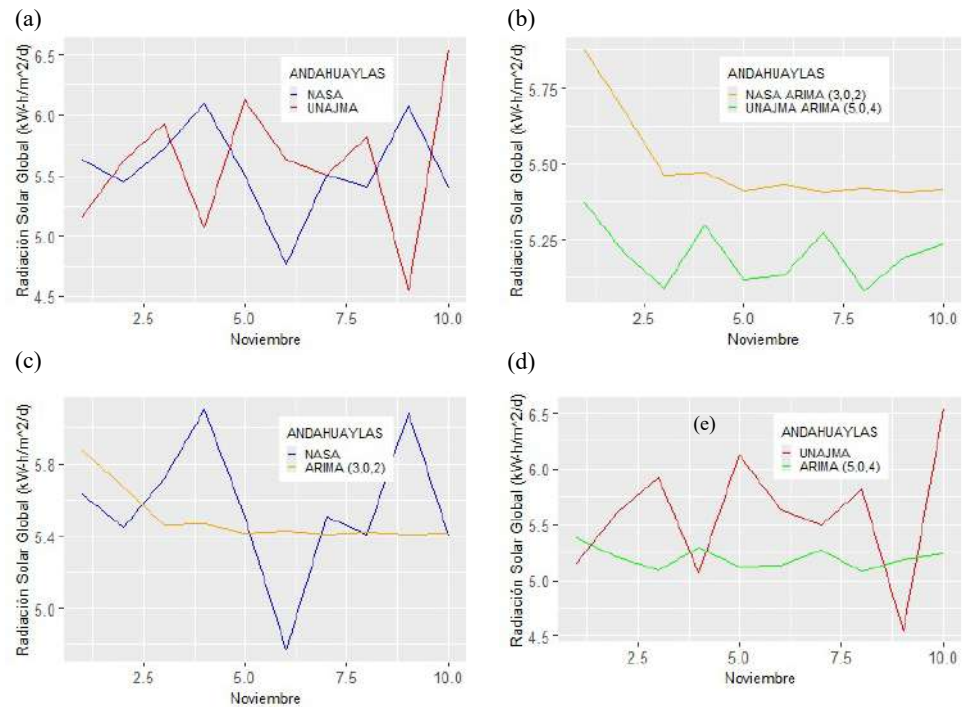


Figura 6. Comparación entre los valores de RSG de: **a)** estación NASA y estación UNAJMA. **b)** Modelos ARIMA. **c)** Estación NASA y su modelo ARIMA (3,0,2). **d)** Estación UNAJMA y su modelo ARIMA (5,0,4) en R, desde el 3 al 12 de noviembre de 2024, distrito de San Jerónimo, provincia de Andahuaylas

Discusión

San Jerónimo (Andahuaylas) está a más de 2.800 metros sobre el nivel del mar (m s.n.m), lo que le otorga una ventaja en radiación solar frente a lugares cerca del nivel del mar como Kedah (*Ismail et al., 2021*), Yogyakarta (*Nugroho et al., 2024a*), Java-Bali (*Nugroho et al., 2024b*), Fortaleza (*Santos et al., 2022*) y Jinju (*Jaihuni et al., 2020*). La altitud influye en la radiación solar, y por eso San Jerónimo y Qinghai-Tíbet (*Meng et al., 2023*) reciben más radiación que lugares como Fortaleza (*Santos et al., 2022*) o Kedah (*Ismail et al., 2021*). Sin embargo, su ubicación tropical andina implica variabilidad climática y nubosidad frecuente, lo que modera la radiación solar global.

En los modelos ARIMA de nuestro estudio se trabajó con datos en línea de la estación meteorológica de la NASA (**POWER**, 2024), como los empleados en los 11 estados de la península de Malasia (**Ismail et al.**, 2021). Por otro lado, también se trabajó con datos medidos en la estación UNAJMA mediante un sensor de luz DAVIS de rango espectral de 280 a 3000 nm. La unidad fue W/m² a diferencia de los modelos ARIMA, RF, LSTMA empleados en la región de la meseta Qinghai-Tíbet, los cuales recurrieron a un radiómetro de cuatro componentes MR-60 en el Observatorio Atmosférico de Yangbajing y rango espectral de 285 a 3000 nm; la unidad fue W/m² (**Meng et al.**, 2023).

Los mejores modelos obtenidos en NASA ARIMA (3,0,2) y UNAJMA ARIMA (5,0,4) en San Jerónimo de Andahuaylas tuvieron un orden de diferenciación de $d=0$, al igual que la radiación solar normal directa (DNI) ARIMA (5, 0, 0) en Daejeon, Corea del Sur; sin embargo, su tamaño muestral fue ligeramente inferior (**Kim et al.**, 2022).

La precisión del modelo ARIMA (3,0,2) obtenido para la estación NASA con un MAPE igual a 5,21 % fue mayor que la obtenida con el LSTM MAPE de 7,72 % en Yogyakarta, isla de Java, Indonesia. Sin embargo, la precisión del modelo ARIMA (5,0,4) obtenida para la estación UNAJMA MAPE, de 10,62 %, fue inferior (**Nugroho et al.**, 2024a).

Por otro lado, la precisión del modelo ARIMA (3,0,2) obtenida en la estación NASA con un MAPE de 5,21 %, fue mayor que la obtenida con los modelos AR, ANN, autorregresivo de orden 2, autorregresivo de orden 3, y de red neural artificial de orden 2, con MAPE (%) de 7,027, 7,047, 6,739, 6,943, 6,712 y 6,707 en Hail, Arabia Saudita. Sin embargo, la precisión del modelo ARIMA obtenida en la estación UNAJMA con un MAPE igual a 10,62 % fue inferior (**Boubaker et al.**, 2021).

Para la obtención de los modelos ARIMA, se trabajó con una muestra de 1.037 datos recogidos desde el 1 de enero de 2022 hasta el 2 de noviembre de 2024, que fue inferior en comparación a la que se trabajó en Hail, Arabia Saudita, donde se recopiló 6.205 datos de irradiación horizontal global para el entrenamiento y 1.096 para la prueba en el periodo 2000-2019. Sin embargo, el modelo ARIMA (3,0,2) obtenido para la estación NASA, demostró mayor precisión, con un MAPE igual a 5,21 %, que los modelos en Hail, con valores de MAPE (%) de 7,027, 7,047, 6,739, 6,943, 6,712, 6,707 (**Boubaker et al.**, 2021).

Conclusiones

En este estudio se obtuvo un único modelo ARIMA (3,0,2) para la estación meteorológica NASA y un modelo ARIMA (5,0,4) para la estación meteorológica UNAJMA en la ubicación de San Jerónimo, Andahuaylas, Apurímac (Perú). Los dos modelos fueron lineales, ya que se logró modelar las series temporales de la radiación solar global. A partir de los modelos ARIMA generados, se obtuvieron valores de predicción de la RSG de corto plazo en San Jerónimo. Dichos valores fueron confiables debido a la precisión a partir de los MAE, MAPE y RMSE. Los valores de predicción de RSG generados por el modelo ARIMA (3,0,2) de la estación NASA fueron ligeramente más precisos, con un MAE igual a 0,290, un MAPE igual a 5,211 %, y un RMSE de 0,384, que los del modelo ARIMA (5,0,4) de la estación UNAJMA con un MAE de 0,611, un MAPE de 10,624 % y un RMSE de 0,703. Con base en este estudio de predicción de radiación solar global de corto plazo, se pueden replicar los modelos ARIMA en diferentes lugares de la región de Apurímac, de manera que sus autoridades puedan emitir alertas a los habitantes para que adopten medidas de protección de la piel cuando los niveles de radiación solar global sean elevados. Además, los agricultores y ganaderos podrían planificar sus actividades de forma que puedan aumentar su producción y mejorar su nivel socioeconómico. Los métodos y resultados del estudio pueden servir para futuras investigaciones relacionadas con la energía de la red eléctrica y la generación y utilización de la energía fotovoltaica, sobre todo en lugares donde los niveles de radiación solar global son altos.

Agradecimientos

El autor desea agradecer a la Universidad Nacional José María Arguedas (UNAJMA) por el acceso a la estación meteorológica UNAJMA.

Conflicto de intereses

El autor declara que no tiene ningún interés financiero en competencia ni relaciones personales conocidas que pudieran influir en el trabajo presentado en este artículo.

Referencias

- Ahmed, R., Sreeram, V., Mishra, Y., Arif, M. D.** (2020). A review and evaluation of the state-of-the-art in PV solar power forecasting: Techniques and optimization. In *Renewable and Sustainable Energy Reviews* (Vol. 124). Elsevier Ltd. <https://doi.org/10.1016/j.rser.2020.109792>
- Aliberti, A., Fucini, D., Bottaccioli, L., Macii, E., Acquaviva, A., Patti, E.** (2021). Comparative Analysis of Neural Networks Techniques to Forecast Global Horizontal Irradiance. *IEEE Access*, 9, 122829-122846. <https://doi.org/10.1109/ACCESS.2021.3110167>
- Atique, S., Noreen, S., Roy, V., Bayne, S., MacFie, J.** (2020). Time series forecasting of total daily solar energy generation: A comparative analysis between ARIMA and machine learning techniques. *IEEE Green Technologies Conference, 2020-April*, 175-180. <https://doi.org/10.1109/GreenTech46478.2020.9289796>
- Basmadjian, R., Shaafeyoun, A., Julka, S.** (2021). Day-ahead forecasting of the percentage of renewables based on time-series statistical methods. *Energies*, 14(21), 7443. <https://doi.org/10.3390/en14217443>
- Blal, M., Khelifi, S., Dabou, R., Sahouane, N., Slimani, A., Rouabhia, A., Ziane, A., Neçaibia, A., Bouraiou, A., Tidjar, B.** (2020). A prediction model for estimating global solar radiation and evaluation meteorological effect on solar radiation potential under several weather conditions at the surface of Adrar environment. *Measurement: Journal of the International Measurement Confederation*, 152, 107348. <https://doi.org/10.1016/j.measurement.2019.107348>
- Borda-Luna, B. E. & Lahura-Albujar, N. E.** (2022). Riesgos a exposición de radiación solar a trabajadores de limpieza pública, Lima (Perú). *Yotantsipanko*, 2(2). <https://doi.org/10.54288/yotantsipanko.v2i2.22>
- Boubaker, S., Kamel, S., Kolsi, L., Kahouli, O.** (2021). Forecasting of One-Day-Ahead Global Horizontal Irradiation Using Block-Oriented Models Combined with a Swarm Intelligence Approach. *Natural Resources Research*, 30(1), 1-26. <https://doi.org/10.1007/s11053-020-09761-w>
- Box, G. E. P. & Pierce, D. A.** (1970). Distribution of Residual Autocorrelations in Autoregressive-Integrated Moving Average Time Series Models. *Journal of the American Statistical Association*, 65 (332), 1509-1526. <https://doi.org/10.2307/2284333>
- Chandra, R. P. & Sahu, B. P.** (2024). Time Series Modeling and Forecasting of Finger Millet Cultivation Area, Production and Productivity in Chhattisgarh, India: The Box Jenkins Methodology. *Asian Research Journal of Agriculture*, 17(4), 18-30. <https://doi.org/10.9734/arja/2024/v17i4494>
- Dimri, T., Ahmad, S., Sharif, M.** (2020). Time series analysis of climate variables using seasonal ARIMA approach. *Journal of Earth System Science*, 129(1), 149. <https://doi.org/10.1007/s12040-020-01408-x>
- Fan, G.-F., Wei, H.-Z., Chen, M.-Y., Hong, W.-C.** (2022). Photovoltaic Power Generation Forecasting Based on the ARIMA-BPNN-SVR Model. *Global Journal of Energy Technology Research Updates*, 9, 18-38. <https://doi.org/10.15377/2409-5818.2022.09.2>
- Fara, L., Diaconu, A., Craciunescu, D., Fara, S.** (2021). Forecasting of Energy Production for Photovoltaic Systems Based on ARIMA and ANN Advanced Models. *International Journal of Photoenergy*, 2021, 6777488. <https://doi.org/10.1155/2021/6777488>
- Garg, S., Agrawal, A., Goyal, S., Verma, K.** (2020, December 16). *Day ahead solar irradiance forecasting using different statistical techniques*. 9th IEEE International Conference on Power Electronics, Drives and Energy Systems, PEDES 2020. <https://doi.org/10.1109/PEDES49360.2020.9379907>
- Guermoui, M., Melgani, F., Gairaa, K., Mekhalfi, M. L.** (2020). A comprehensive review of hybrid models for solar radiation forecasting. *Journal of Cleaner Production*, 258, 120357. <https://doi.org/10.1016/j.jclepro.2020.120357>

- Hassan, M. A., Al-Ghussain, L., Ahmad, A. D., Abubaker, A. M., Khalil, A.** (2022). Aggregated independent forecasters of half-hourly global horizontal irradiance. *Renewable Energy*, 181, 365-383. <https://doi.org/10.1016/j.renene.2021.09.060>
- Hwang, E.** (2024). Improvement on Forecasting of Propagation of the COVID-19 Pandemic through Combining Oscillations in ARIMA Models. *Forecasting*, 6(1), 18-35. <https://doi.org/10.3390/forecast6010002>
- Iqbal, M.** (1983). The solar constant and spectral distribution. *An Introduction to Solar Radiation* (pp. 43-58). Academic Press. <https://doi.org/10.1016/B978-0-12-373750-2.50008-2>
- Ismail, M. T., Shah, N. Z. A., Karim, S. A. A.** (2021). Modeling solar radiation in peninsular Malaysia using arima model. *Green Energy and Technology* (pp. 53-71). Springer Science and Business Media Deutschland GmbH. https://doi.org/10.1007/978-981-15-9140-2_3
- Jaihuni, M., Basak, J. K., Khan, F., Okyere, F. G., Arulmozhi, E., Bhujel, A., Park, J., Hyun, L. D., Kim, H. T.** (2020). A partially amended hybrid Bi-Gru—ARIMA model (PAHM) for predicting solar irradiance in short and very-short terms. *Energies*, 13(2), 435. <https://doi.org/10.3390/en13020435>
- Kim, D., Kim, Y., Kim, C., Kim, H., Lee, Y.** (2022). Development of Short-term Solar Irradiance Forecasting Model Using ARIMA and Seasonal ARIMA in Daejeon. *Journal of the Korean Solar Energy Society*, 42(6), 105-114. <https://doi.org/10.7836/kses.2022.42.6.105>
- Kontopoulou, V. I., Panagopoulos, A. D., Kakkos, I., Matsopoulos, G. K.** (2023). A Review of ARIMA vs. Machine Learning Approaches for Time Series Forecasting in Data Driven Networks. *Future Internet*, 15 (8), 255. <https://doi.org/10.3390/fi15080255>
- Kurniadi, A. P., Aimon, H., Salim, Z., Ragimun, Sonjaya, A., Setiawan, S., Siagian, V., Nasution, L. Z., Nurhidajat, R., Mutaqin, Sabtohad, J.** (2024). Analysis of Existing and Forecasting for Coal and Solar Energy Consumption on Climate Change in Asia Pacific: New Evidence for Sustainable Development Goals. *International Journal of Energy Economics and Policy*, 14(4), 352-359. <https://doi.org/10.32479/ijeeep.16187>
- Liu, Z. F., Luo, S. F., Tseng, M. L., Liu, H. M., Li, L., Hashan Md Mashud, A.** (2021). Short-term photovoltaic power prediction on modal reconstruction: A novel hybrid model approach. *Sustainable Energy Technologies and Assessments*, 45, 101048. <https://doi.org/10.1016/j.seta.2021.101048>
- Makade, R. G., Chakrabarti, S., Jamil, B.** (2021). Development of global solar radiation models: A comprehensive review and statistical analysis for Indian regions. *Journal of Cleaner Production*, 293, 126208. <https://doi.org/10.1016/j.jclepro.2021.126208>
- Mani, G., Joshi Kumar, V., Stonier, A. A.** (2022). Prediction and forecasting of air quality index in Chennai using regression and ARIMA time series models. *Journal of Engineering Research (Kuwait)*, 10(2 A), 179-194. <https://doi.org/10.36909/jer.10253>
- Mellit, A., Pavan, A. M., Ogliaeri, E., Leva, S., Lughi, V.** (2020). Advanced methods for photovoltaic output power forecasting: A review. *Applied Sciences (Switzerland)*, 10(2), 487. <https://doi.org/10.3390/app10020487>
- Melquíades, T. F., Diniz, F. F., Nunes, A. M. M., Martins, J. M., Santos Júnior, E. P., Coelho Junior, L. M.** (2022). Previsão da radiação solar global em João Pessoa, Paraíba, Brasil: Uma aplicação dos modelos da família ARIMA. *Concilium*, 22(3), 213-224. <https://doi.org/10.53660/clm-197-214>
- Meng, H., Wu, L., Li, H., Song, Y.** (2023). Construction and Research of Ultra-Short Term Prediction Model of Solar Short Wave Irradiance Suitable for Qinghai–Tibet Plateau. *Atmosphere*, 14(7), 1150. <https://doi.org/10.3390/atmos14071150>
- Mirzabe, A. H., Hajiahmad, A., Keyhani, A., Mirzaei, N.** (2022). Approximation of daily solar radiation: A comprehensive review on employing of regression models. *Renewable Energy Focus*, 41, 143-159. <https://doi.org/10.1016/j.ref.2022.02.003>
- Mohamed, M., Mahmood, F. E., Abd, M. A., Chandra, A., Singh, B.** (2022). Dynamic Forecasting of Solar Energy Microgrid Systems Using Feature Engineering. *IEEE Transactions on Industry Applications*, 58(6), 7857-7869. <https://doi.org/10.1109/TIA.2022.3199182>
- Mughal, S. N., Sood, Y. R., & Jarial, R. K.** (2022). Design and optimization of photovoltaic system with a week ahead power forecast using autoregressive artificial neural networks. *Materials Today: Proceedings*, 52, 834-841. <https://doi.org/10.1016/j.matpr.2021.10.223>
- Mutombo, N. M. A. & Numbi, B. P.** (2022). The Development of ARIMA Models for the Clear Sky Beam and Diffuse Optical Depths for HVAC Systems Design Using RTSM: A Case Study of the Umlazi Township Area, South Africa. *Sustainability (Switzerland)*, 14(6), 3662. <https://doi.org/10.3390/su14063662>

- Nugroho, M. V., Mardiansah, F., Pratama, T. O., Fikriyadi, Z. A., Dianti, D. V., Prastawa, A.** (2024a). A Comparative Study of the Effect of Weather Conditions on Solar Irradiance Forecasting Using Various Methods in Yogyakarta, Indonesia. *Journal of Physics: Conference Series*, 2828(1), 012028. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/2828/1/012028>
- Nugroho, M. V., Prastawa, A., Mardiansah, F., Rezavidi, A., Fudholi, A., Odejobi, O. A., Alawode, K. O., Lawal, M. O.** (2024b). Efficient method for forecasting solar irradiance - a review. *Fudma Journal of Sciences*, 8(6), 285-298. <https://doi.org/10.33003/fjs-2024-0806-2786>
- Palaloi, S.** (2024). A stacked LSTM model for day-ahead solar irradiance forecasting under tropical seasons in Java-Bali. *International Journal of Power Electronics and Drive Systems*, 15(3), 1878-1891. <https://doi.org/10.11591/ijped.v15.i3.pp1878-1891>
- POWER.** (2024). *POWER Data Access Viewer*. NASA Langley Research Center. <https://power.larc.nasa.gov/data-access-viewer/>
- Quispe, R. & Huamani, R.** (2024). Autoregressive Models for Forecasting Wind Speed in the Rural Area of Socabaya, Peru, 2022. *Revista Politecnica*, 54(1), 7-14. <https://doi.org/10.33333/rp.vol54n1.01>
- Quartey-Papafio, T. K., Javed, S. A., Liu, S.** (2021). Forecasting cocoa production of six major producers through ARIMA and grey models. *Grey Systems*, 11(3), 434-462. <https://doi.org/10.1108/GS-04-2020-0050>
- Reynaldo, Q. & Verónica, J.** (2024). Use of Unrestricted Minimization of a Spectral Function to Estimate the Visible Zone in Matlab 19.0. *Revista Politecnica*, 54(1), 87-96. <https://doi.org/10.33333/rp.vol54n1.09>
- Şahinli, M. A.** (2020). Potato Price Forecasting with Holt-Winters and ARIMA Methods: A Case Study. *American Journal of Potato Research*, 97(4), 336-346. <https://doi.org/10.1007/s12230-020-09788-y>
- Salman, D., Direkoglu, C., Kusaf, M., Fahrioglu, M.** (2024). Hybrid deep learning models for time series forecasting of solar power. *Neural Computing and Applications*, 36(16), 9095–9112. <https://doi.org/10.1007/s00521-024-09558-5>
- Santos, D. S. de O., de Mattos Neto, P. S. G., de Oliveira, J. F. L., Siqueira, H. V., Barchi, T. M., Lima, A. R., Madeiro, F., Dantas, D. A. P., Converti, A., Pereira, A. C., de Melo Filho, J. B., Marinho, M. H. N.** (2022). Solar Irradiance Forecasting Using Dynamic Ensemble Selection. *Applied Sciences (Switzerland)*, 12(7), 3510. <https://doi.org/10.3390/app12073510>
- Saxena, N., Kumar, R., Rao, Y. K. S. S., Mondloe, D. S., Dhapekar, N. K., Sharma, A., Yadav, A. S.** (2024). Hybrid KNN-SVM machine learning approach for solar power forecasting. *Environmental Challenges*, 14, 100838. <https://doi.org/10.1016/j.envc.2024.100838>
- Sedai, A., Dhakal, R., Gautam, S., Dhamala, A., Bilbao, A., Wang, Q., Wightington, A., Pol, S.** (2023). Performance Analysis of Statistical, Machine Learning and Deep Learning Models in Long-Term Forecasting of Solar Power Production. *Forecasting*, 5(1), 256–284. <https://doi.org/10.3390/forecast5010014>
- Tarmanini, C., Sarma, N., Gezegin, C., & Ozgonenel, O.** (2023). Short term load forecasting based on ARIMA and ANN approaches. *Energy Reports*, 9, 550-557. <https://doi.org/10.1016/j.egy.2023.01.060>
- Zhang, G. P.** (2003). Time series forecasting using a hybrid ARIMA and neural network model. *Neurocomputing*, 50, 159-175. [https://doi.org/10.1016/S0925-2312\(01\)00702-0](https://doi.org/10.1016/S0925-2312(01)00702-0)

Artículo original

Modelización matemática para la predicción y disminución del ruido vehicular en entornos urbanos

Mathematical modeling for the prediction and mitigation of vehicular noise in urban environments

 Javier Alcázar*,  Sandra Campuzano

Ingeniería Ambiental, Facultad de Ciencias e Ingeniería FACI, Universidad Estatal de Milagro (UNEMI), Milagro, Ecuador

Resumen

El ruido vehicular representa una fuente significativa de contaminación acústica en entornos urbanos que afecta la salud y el bienestar de los habitantes. Este estudio propone un modelo matemático para predecir y mitigar los niveles de ruido vehicular, integrando variables claves como el volumen, la velocidad y la composición del tráfico. La metodología incluyó la recolección de datos en cuatro puntos de la ciudad de Milagro, Ecuador, y el análisis mediante las herramientas QGIS y MATLAB, bajo el estándar RLS 90/DIN con ecuaciones de regresión lineal. Se estimó una reducción del 15 % del ruido con la implementación de barreras acústicas. El modelo demostró una mayor precisión y replicabilidad comparado con estudios previos. En cuanto a limitaciones del estudio, se reconoce la omisión de factores como la vegetación y las condiciones meteorológicas. El modelo puede contribuir a diseñar políticas públicas de planificación urbana y control de la contaminación acústica.

Palabras clave: Contaminación acústica; Ruido ambiental; Modelización matemática; Tráfico urbano; Medición del ruido.

Abstract

Vehicular noise is a significant source of noise pollution in urban environments, affecting the health and well-being of the inhabitants. Here, we propose a mathematical model to predict and mitigate vehicular noise levels, integrating key variables such as traffic volume, speed, and composition. The methodology included data collection at four points in the city of Milagro, Ecuador, and analysis using QGIS and MATLAB tools under the RLS 90/DIN standard with linear regression equations. We estimated a 15% noise reduction with the implementation of noise barriers. The model showed greater accuracy and replicability compared to previous studies. We acknowledge the omission of factors such as vegetation and meteorological conditions as limitations of the study. The model can contribute to the design of public policies on urban planning and noise pollution control.

Keywords: Acoustic pollution; Environmental noise; Mathematical modeling; Urban traffic; Noise measurement.

Introducción

El ruido, un fenómeno omnipresente en la vida moderna, se define como cualquier sonido no deseado que genere perturbación o afecte negativamente a los seres humanos, los animales y los dispositivos tecnológicos (Epstein, 2020). En los entornos urbanos, el tráfico vehicular, las construcciones y las actividades industriales representan las principales fuentes de contaminación acústica (Masum *et al.*, 2021; in general, city dwellers experienced moderately high noise with an average noise level of 75 dBA exceeding the limit values set by the Department of Environment (DoE Montes *et al.*, 2023), en tanto que en zonas rurales este problema puede estar asociado al uso de maquinarias agrícolas o eventos naturales (Olczak *et al.*, 2023). En el interior de las edificaciones

Citación: Alcázar J & Campuzano S. Modelización matemática para la predicción y disminución del ruido vehicular en entornos urbanos. Revista de la Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. 49(192):501-512, julio-septiembre de 2025. doi: <https://doi.org/10.18257/raccefyn.3175>

Editor: Elizabeth Castañeda

***Correspondencia:**

Javier Alcázar; jalcazare@unemi.edu.ec

Recibido: 11 de marzo de 2025

Aceptado: 7 de julio de 2025

Publicado en línea: 19 de agosto de 2025



Este artículo está bajo una licencia de Creative Commons Reconocimiento-NoComercial-Compartir Igual 4.0 Internacional

los electrodomésticos, los sistemas de climatización y los equipos electrónicos también contribuyen a un ambiente sonoro que, en muchos casos, puede ser perturbador (Farooqi *et al.*, 2022).

El ruido se mide en decibeles (dB), una unidad logarítmica que expresa el nivel de presión sonora (Casali, 2021). Dependiendo de sus características, el ruido puede ser continuo, intermitente o impulsivo, lo que determina su impacto sobre la salud y el bienestar de las personas (Yadav *et al.*, 2025). Diversos estudios han demostrado que la exposición prolongada a altos niveles de ruido puede generar efectos adversos como estrés, trastornos del sueño, problemas de concentración y enfermedades cardiovasculares (Zaman *et al.*, 2022; Krittanawong *et al.*, 2023; Sivakumaran *et al.*, 2022).

Para abordar esta problemática es fundamental desarrollar modelos matemáticos que permitan comprender, predecir y mitigar la contaminación acústica. Existen diversos enfoques para la modelación del ruido vehicular, entre ellos los modelos empíricos, basados en datos observacionales (Nourani *et al.*, 2020; Bramich *et al.*, 2022; Alam *et al.*, 2020), los modelos físicos, que consideran principios fundamentales de propagación del sonido (Saakian, 2020), y los modelos estadísticos, que emplean técnicas de aprendizaje automático para detectar patrones en los datos (Lakshmanan *et al.*, 2020). Cada uno de estos enfoques tiene ventajas y limitaciones, pero su integración puede proporcionar predicciones más consistentes y adaptables a diferentes contextos urbanos.

En este estudio nos propusimos desarrollar un modelo matemático para predecir y gestionar los niveles de ruido vehicular en entornos urbanos, tomando en cuenta variables como el volumen de tráfico, la velocidad de los vehículos y la composición del flujo vehicular. Este modelo permite evaluar estrategias de mitigación, como la instalación de barreras acústicas, y contribuye al diseño de políticas públicas enfocadas en la reducción de la contaminación acústica.

La importancia del estudio radica en la necesidad de generar herramientas eficaces para abordar el problema del ruido en ciudades en constante crecimiento. A través de una metodología integral que combina modelos matemáticos y análisis de datos utilizando *software* especializado, se busca proporcionar una solución que no solo sea precisa y adaptable, sino que tenga un impacto positivo en la calidad de vida de los habitantes y en el desarrollo sostenible de las ciudades.

Metodología

Estructura del diseño experimental

El diseño experimental se estructuró en dos fases principales. En la primera se estudió la zona de medición, analizando el comportamiento del tráfico en los cuatro puntos seleccionados. En la segunda fase, los datos se procesaron con el programa MATLAB, analizando las variables relevantes e implementando un modelo matemático basado en el RLS 90/DIN.

El modelo desarrollado permitió determinar si los niveles de ruido en cada punto de medición se encontraban dentro del límite permisible establecido en la normativa vigente. En caso de que los niveles superaran el umbral de 55 dB(A) en zonas residenciales, el modelo propuso la implementación de barreras acústicas, con una reducción estimada del 15 % en los niveles de ruido.

Materiales

Se utilizó un sonómetro SC310 para registrar los niveles de ruido y un contador de vehículos para determinar la cantidad y el tipo de tráfico en la zona. Se trabajó con datos previamente recolectados que incluían variables de ruido y tráfico. Por último, se empleó el *software* MATLAB para el desarrollo del modelo matemático y el análisis de datos, en tanto que QGIS se utilizó para georreferenciar la zona de estudio.

El sonómetro SC310 se calibró antes de cada jornada de medición conforme al protocolo del fabricante, utilizando el calibrador acústico de referencia. El modelo se validó mediante comparación cruzada entre las predicciones y los valores independientes observados que no se utilizaron en el entrenamiento.

Ubicación geográfica

Las mediciones se tomaron en la Avenida 17 de Septiembre del Cantón Milagro, Ecuador, en cuatro puntos estratégicos (**Figura 1**). El punto 1 se ubicó junto al Supermercado Mayorista “Devies”, en una zona comercial con alto flujo vehicular. El punto 2 se localizó en la intersección Luz de América, cerca de la empresa CNEL. El punto 3 se situó a 50 metros de la primera entrada del estacionamiento de la UNEMI, capturando así el tráfico universitario. El punto 4 se estableció frente a la Asociación de Voluntariado AVINFA, una zona con tránsito constante. Las mediciones se realizaron durante 10 días, del 25 de noviembre al 4 de diciembre de 2015, en distintos momentos del día (mañana, mediodía y tarde).

Base de datos

Se recolectaron 109 registros distribuidos entre los cuatro puntos de medición. Estos datos incluyeron información sobre el tráfico vehicular, la superficie de la calzada (asfalto) y las características del flujo vehicular (transporte público, carros grandes, carros livianos y motocicletas). La recolección de datos se hizo con un sonómetro y un sistema de conteo de vehículos, registrando el número de vehículos por hora y su composición, lo que permitió detectar los patrones de tráfico y su impacto en los niveles de ruido.

Análisis de datos

El análisis de datos se centró en el establecimiento del número de vehículos por punto de medición y la relación entre la composición del tráfico y los niveles de ruido. Se adoptó una metodología de observación en la que cada punto era evaluado por más de una hora garantizando la precisión en la recolección de los datos. Se hicieron cálculos específicos para estimar el impacto del tráfico en el nivel de ruido considerando tres periodos horarios (mañana, mediodía y tarde).

Modelo matemático

Este se desarrolló utilizando MATLAB y se basó en la predicción del nivel de ruido vehicular en función de la composición y el volumen del tráfico, utilizando la ecuación 1.

$$LMELD = L_0 + \alpha * F_v + \beta * F_c - (Barrera * 15),$$



Figura 1. Zona de estudio

donde L_{MELD} es el nivel de ruido estimado en dB(A), L_0 es el nivel de ruido de base, α es el coeficiente de influencia del volumen de tráfico, β es el coeficiente de influencia de la composición del tráfico, F_v es el factor de volumen de tráfico, F_c es el factor de composición del tráfico y (Barrera-15) representa la reducción del 15 % en caso de existir barreras acústicas.

La ecuación completa utilizada en el modelo fue la siguiente:

$$L_{MELD} = L_0 + \alpha * [10 * \log_{10} N_{total}] + \beta * [3N_{tp} + 2N_{cg} + N_{cl} + 1,5N_m] / N_{total} - (B_{arrera} * 15),$$

donde N_{total} es la suma de todos los vehículos, N_{tp} es el número de vehículos de transporte público, N_{cg} es el número de carros grandes, N_{cl} es el número de carros livianos y N_m es el número de motocicletas.

Los coeficientes 3, 2, 1 y 1,5 ponderan la contribución de cada tipo de vehículo al ruido.

Cálculo del factor de volumen de tráfico

El factor de volumen de tráfico F_v se calculó con la ecuación 3:

$$F_v = 10 \cdot \log_{10} (\max(n_{total})),$$

lo que evita errores en el cálculo cuando el número total de vehículos es cero.

Cálculo del factor de composición de tráfico

Para conocer el impacto relativo de los diferentes tipos de vehículos en el nivel de ruido, se utilizó la ecuación 4:

$$F_c = 3 * n_{tp} + 2 * n_{cg} + 1 * n_{cl} + 1,5 * n_m$$

Regresión lineal para la predicción de los niveles de ruido

Se implementó un modelo de regresión lineal para predecir los niveles futuros de ruido utilizando la ecuación 5:

$$y = m \times x + b,$$

donde y es el nivel de ruido estimado, x es el índice de la medición, m es la pendiente de la regresión y b es la intersección con el eje y .

Para un mejor ajuste, se aplicó la regresión ajustada $y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + e_i$, donde β_0 es la intersección de la línea de regresión, β_1 es la pendiente ajustada y e es el término de error.

Resultados

Nivel de ruido vehicular

Los resultados obtenidos del modelo de predicción del nivel de ruido vehicular en MATLAB permitieron el análisis del impacto del tráfico en los distintos puntos de medición. El modelo tuvo como principal objetivo calcular el nivel de ruido considerando el volumen y la composición del tráfico y utilizando coeficientes calibrados entregados previamente.

En el modelo de MELD se obtuvieron dos tipos de resultados: por un lado, el estudio sin barrera (**Figura 2a**), y por el otro, un estudio con barrera (**Figura 2b**) en el cual se puede visualizar la cantidad de datos que cumplían o no con el máximo límite permisible de ruido.

En el análisis sin barrera, al procesar la base de datos en MATLAB mediante el modelo matemático, se identificaron 109 registros correspondientes a los cuatro puntos de estudio. Los resultados mostraron los niveles de dB presentes y permitieron evidenciar que la mayoría de los valores se clasifican como “No permisibles” en comparación con los catalogados como “Permisibles”. El nivel de ruido en la zona de estudio, determinado a partir del flujo de vehículos, fue de 62,55 dBA, lo que excedía el límite establecido. Además, la línea de predicción para futuros años se mantenía en ese límite, a menos que se adoptara un plan para la reducción de ruido en la zona.

En el estudio con barrera se pudo observar que los límites no permisibles, visibles en color rojo, correspondían a 16 datos superiores a 55dB; otros 93 datos fueron inferiores o iguales a 55dB y aparecen en color verde, es decir, correspondieron al límite permisible.

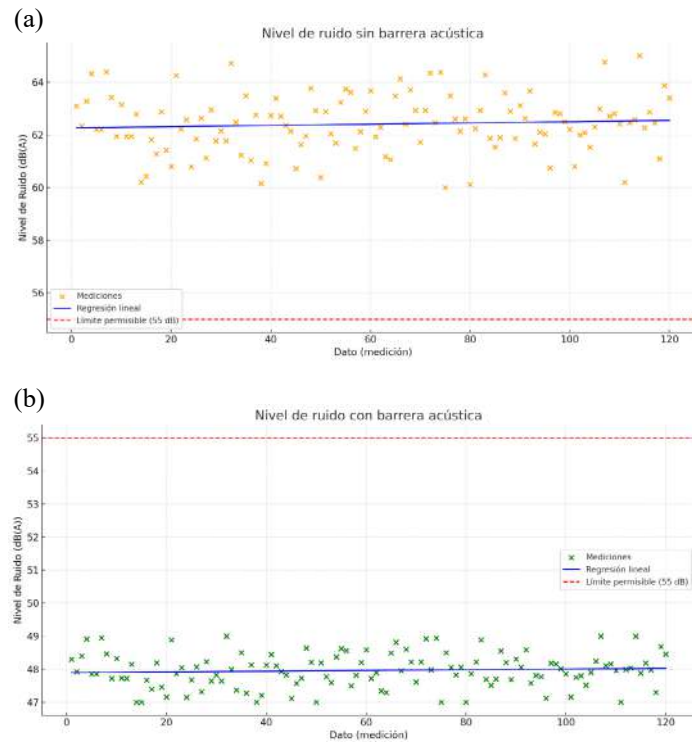


Figura 2. a) Nivel de ruido vehicular sin barrera, b) Nivel de ruido vehicular con barrera

Además, se visualiza una línea de regresión y una de predicción, la cual es muy diferente a la de la **Figura 2a**, lo que indica que los límites se mantuvieron en el rango permisible a la largo de esta prolongación, pues la línea se mantuvo dentro de los 48 dB debido a que se implementó la barrera del 15 %. Se debe tener en cuenta que el porcentaje de la barrera redujo el ruido vehicular, lo que arrojó un total de 86,24 % de permisibilidad en la zona de estudio.

Niveles de dBa en cada punto de interés

En el punto 1 (**Figura 3a**) se registraron 28 datos, 25 de los cuales estaban dentro del rango del límite permisible. Esta reducción se debió a la implementación de las barreras acústicas, lo que resultó en un porcentaje de permisibilidad de 85,71 % y una predicción estimada de 10 años con 62,16 dB(A) debido a la larga duración del periodo asignado. En el punto 2 se recolectaron 26 datos, 22 de ellos dentro del rango del límite permisible. Esta reducción se debió a la implementación de las barreras acústicas, lo que dio un porcentaje de permisibilidad de 85,19 % y una predicción estimada de 10 años con 47,72 dB(A) debido a la larga duración del periodo asignado (**Figura 3b**).

En el punto 3 (**Figura 3c**) se registraron 27 datos, 24 de ellos dentro del rango del límite permisible, reducción que se debió a la implementación de las barreras acústicas, lo que resultó en un porcentaje de permisibilidad de 85,19 % y una predicción estimada de 10 años con 39,40 dB(A) debido a la duración del periodo asignado. Por último, en el punto 4 se obtuvieron 28 datos, 25 de ellos dentro del rango del límite permisible. Aquí también la reducción se debió a la implementación de las barreras acústicas que permitieron un porcentaje de permisibilidad de 89,29 % y una predicción estimada de 10 años con 47,96 dB(A) debido a la duración del periodo asignado (**Figura 3d**).

En la **Tabla 1** se muestran los resultados estadísticos para cada punto de interés. Los datos indican una tendencia estable en los niveles de ruido en los distintos puntos evaluados, con diferencias mínimas en las medidas centrales y de dispersión. Sin embargo,

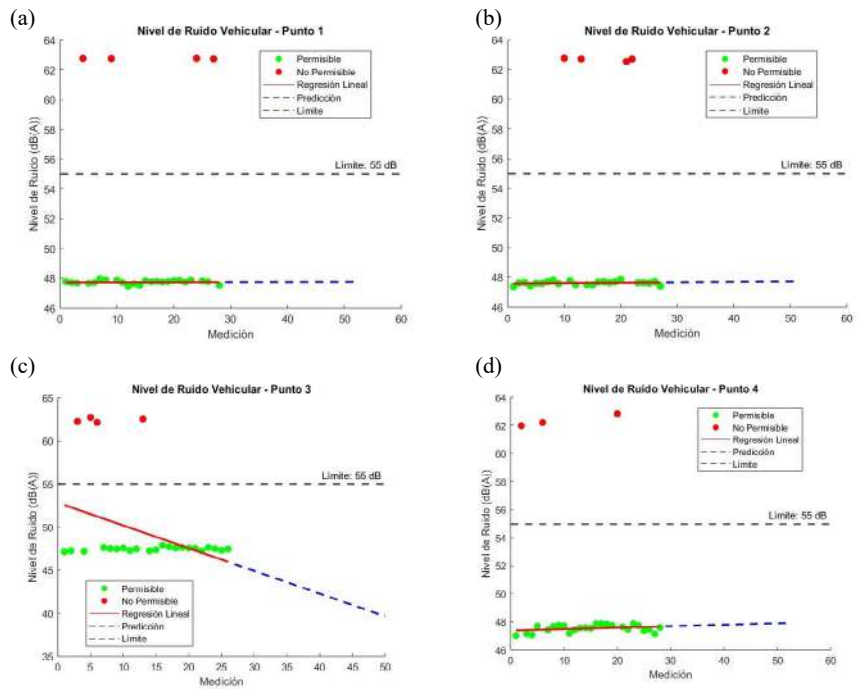


Figura 3. a) Nivel de ruido vehicular del punto 1, b) Nivel de ruido vehicular del punto 2, c) Nivel de ruido vehicular del punto 3, d) Nivel de ruido vehicular del punto 4

Tabla 1. Estadísticas de medición de ruido para cada punto

Punto de medición	Media (dB(A))	Desviación estándar (dB(A))	Máximo (dB(A))	Mínimo (dB(A))	Porcentaje de mediciones permisibles (%)
Punto 1	62,88	5,34	64,89	62,46	85,71
Punto 2	62,86	5,45	64,76	62,39	85,19
Punto 3	62,76	5,51	64,72	62,13	84,62
Punto 4	62,13	4,67	64,83	62,03	89,29

el punto 4 destaca por tener la menor media, la menor variabilidad y el mayor porcentaje de mediciones dentro de los límites permisibles, lo que sugiere un entorno acústico relativamente más favorable en comparación con los otros puntos.

En la **Tabla 2** se presentan el error cuadrático medio (MSE) y la raíz del error cuadrático medio (RMSE) obtenidos en el modelo de regresión lineal, con valores que oscilaron entre 1,03 y 1,33 para el MSE, y entre 1,01 y 1,44 para el RMSE. Estos resultados indican que el modelo predijo los niveles de ruido con una desviación relativamente baja. Cabe destacar que el desempeño del modelo propuesto fue superior al reportado por **Yu et al.** (2024), cuyo modelo alcanzó un MSE de 1,54 y un RMSE de 2,50, y al de **Bravo-Moncayo et al.** (2023), que obtuvo un MSE de 1,65 y un RMSE de 2,74.

En la **Figura 4** se demuestra que la implementación del modelo matemático fue efectiva, ya que se logró representar los niveles de ruido de los 109 datos correspondientes a los cuatro puntos de interés. Se encontró que los vehículos de mayor tamaño en esta zona son los carros livianos, seguidos de las motos, las cuales generan la mayor parte del ruido vehicular. La barrera acústica fue eficaz como lo demostró el estudio con barrera, con un resultado de 47,60 dBa en la zona, en tanto que en el estudio sin barrera fue de 62,55 dBa, lo que conllevó una reducción media de 14,96 dBa.

Tabla 2. Tabla de errores estadísticos

Punto	MSE	RMSE
Punto 1	1,17	1,08
Punto 2	1,03	1,15
Punto 3	1,46	1,01
Punto 4	1,33	1,44

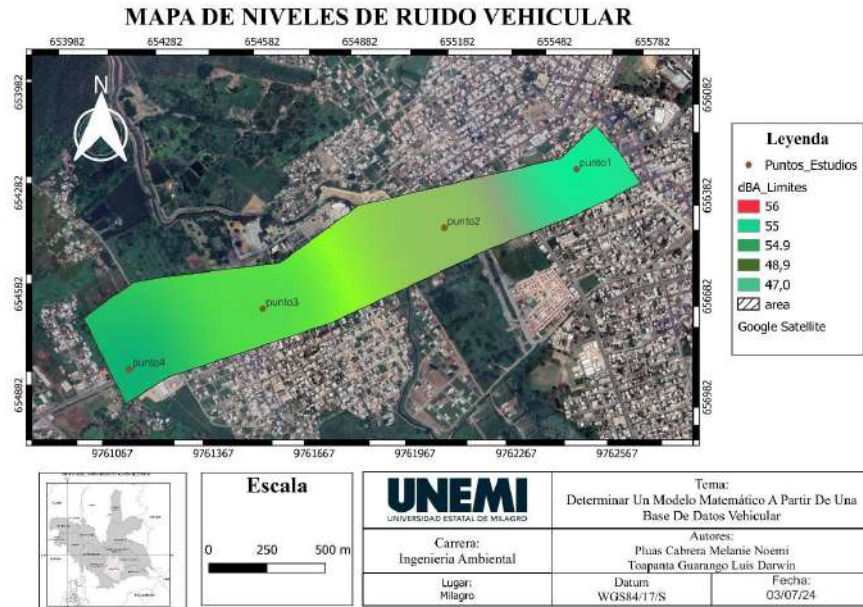


Figura 4. Mapa de niveles de ruido vehicular

Discusión

El modelo matemático desarrollado para el análisis del ruido vehicular ha demostrado ser una herramienta efectiva para la evaluación del impacto acústico en zonas urbanas. A través del análisis de los datos de tráfico, se pudo establecer que los niveles de ruido en el área de estudio superaban los límites máximos permisibles establecidos en las normativas ambientales. Para abordar esta problemática, se implementó en el modelo el uso de barreras acústicas, lo que permitió una reducción significativa del ruido estimado.

Estos hallazgos son relevantes, ya que evidencian la eficacia de las barreras acústicas como una medida de mitigación viable. En términos de implicaciones prácticas, la reducción del ruido no solo contribuye al cumplimiento de las regulaciones ambientales, sino que también mejora la calidad de vida de los residentes al disminuir la exposición a niveles de ruido perjudiciales. Esto es crucial en contextos urbanos donde el tráfico vehicular es una fuente constante de contaminación acústica que afecta la salud pública al incrementar el estrés y otros problemas asociados con la exposición prolongada al ruido.

La comparación de estos resultados con los de otros estudios similares revela que el tráfico vehicular es una de las principales fuentes de contaminación acústica en áreas urbanas densamente pobladas (Yang *et al.*, 2020; Amoatey *et al.*, 2020; Partheeban *et al.*, 2021; Reche *et al.*, 2022; Montes *et al.*, 2023; Rey *et al.*, 2020; Ibili *et al.*, 2022; Munir *et al.*, 2021; Gilani & Mir, 2021). Los estudios en diferentes ciudades han demostrado que la instalación de barreras acústicas puede reducir significativamente los niveles de ruido (He *et al.*, 2021; Fediuk *et al.*, 2021; Kumar *et al.*, 2020; Liu *et al.*, 2023), aunque

la magnitud de la reducción varía dependiendo del material, la altura y la ubicación de las barreras (Laxmi *et al.*, 2022; Hansen & Hansen, 2021; Lázaro *et al.*, 2022; Lee *et al.*, 2021; Owolabi *et al.*, 2024). En este sentido, los resultados obtenidos en el presente estudio son consistentes con la literatura existente y confirman la efectividad de estas estrategias de mitigación.

En estudios previos se ha demostrado que la efectividad de las barreras acústicas puede optimizarse mediante el uso de materiales innovadores y técnicas de diseño avanzadas (Gao *et al.*, 2022; Liao *et al.*, 2021; Fediuk *et al.*, 2021). Asimismo, investigaciones recientes han explorado el uso de materiales porosos, paneles vegetales y diseños curvos o estratificados que pueden mejorar la absorción y dispersión del sonido, logrando una reducción aún mayor del ruido ambiental (Amran *et al.*, 2021; Sharma *et al.*, 2023; Bakker *et al.*, 2023; Yan *et al.*, 2023; Feng & Liu, 2025). También se ha documentado que la combinación de barreras acústicas con otras estrategias, como pavimentos fonoabsorbentes y regulaciones de velocidad vehicular, puede potenciar los efectos positivos en la disminución del ruido en entornos urbanos (Garg, 2022; Mikhailenko *et al.*, 2022; Ahac *et al.*, 2021; Li *et al.*, 2023; Kumar & Chowdary, 2024; Oquendo-Di Cosola *et al.*, 2022). En este sentido, el presente estudio refuerza la evidencia científica sobre la importancia de las barreras acústicas como herramienta eficaz de mitigación y sugiere que futuras investigaciones podrían enfocarse en la integración de múltiples enfoques para maximizar la reducción del ruido vehicular en distintas condiciones urbanas.

Sin embargo, es importante reconocer algunas limitaciones del estudio. En primer lugar, el modelo utilizado se basa en estimaciones matemáticas y datos recolectados en condiciones específicas, por lo que su aplicabilidad podría variar en otros entornos urbanos con diferentes características de tráfico y disposición geográfica. Además, el estudio no consideró otros factores que podrían influir en los niveles de ruido, como la absorción acústica de los edificios o la vegetación circundante, lo que podría mejorar la precisión del modelo en futuras investigaciones.

A pesar de dichas limitaciones, nuestro estudio contribuye al análisis del ruido vehicular y su gestión mediante modelos matemáticos, proporcionando una base para la implementación de estrategias de control acústico en entornos urbanos. Los resultados obtenidos pueden servir como referencia para el diseño de políticas públicas orientadas a reducir la contaminación acústica y mejorar la calidad de vida en comunidades afectadas por altos niveles de ruido vehicular. Además, abre la posibilidad de futuras investigaciones que integren nuevas tecnologías y enfoques en la mitigación del impacto acústico en zonas urbanas.

A diferencia de los enfoques tradicionales, nuestro modelo combina QGIS para la georreferenciación espacial y MATLAB para el análisis matemático, lo que mejora la capacidad predictiva frente a metodologías que no integran componentes espaciales. Comparado con los modelos de Yu *et al.* (2024), basado en redes neuronales convolucionales, y Bravo-Moncayo *et al.* (2023), que aplica técnicas geoestadísticas, nuestro enfoque destaca por su facilidad de replicación, bajo requerimiento computacional y alta precisión (con un MSE entre 1,03 y 1,33, frente a 1,54 y 1,65, respectivamente). Esta hibridación lo convierte en una herramienta accesible y efectiva para municipios con recursos limitados.

Además de las limitaciones mencionadas, el estudio no consideró factores ambientales como la presencia de vegetación, de los edificios cercanos o la topografía, los cuales pueden alterar la propagación del sonido. Tampoco se incluyeron condiciones meteorológicas (viento, humedad, temperatura) que podrían influir en la absorción o refracción del ruido. Estas variables podrían incorporarse en futuras investigaciones para afinar la precisión del modelo.

Conclusiones

El modelo matemático desarrollado para el análisis del ruido vehicular ha demostrado ser una herramienta valiosa para la evaluación y gestión del impacto acústico en entornos urbanos. A partir del análisis de los datos de tráfico, se logró identificar los niveles de ruido

que sobrepasaban el límite máximo permisible de 55 dB en zona residencial según el Libro V del Texto Unificado de Legislación Secundaria del Ministerio del Ambiente (TULSMA), por lo que en el mismo modelo se implementó el uso de barreras acústicas reduciendo el ruido estimado en un 15 %.

Los vehículos livianos y las motocicletas fueron las principales fuentes de ruido; en el análisis de datos se destacó que los resultados en los niveles de ruido sin ninguna intervención se situaron en un promedio de 62,55 dB(A), mientras que la instalación de barreras acústicas logró reducir estos niveles a 47,60 dB(A), evidenciando una disminución significativa de aproximadamente 14,96 dB(A).

Esta reducción en los niveles de ruido no solo refleja la eficacia de las barreras acústicas como medida de mitigación, sino que también subraya la importancia de implementar estrategias de control del ruido vehicular en áreas urbanas densamente pobladas, es decir, los beneficios de tales intervenciones van más allá de la simple reducción de decibelios. La exposición al ruido es un problema de salud pública, por lo que las recomendaciones del estudio deben tomarse en cuenta para reducir el estrés y las enfermedades relacionadas con el ruido, aumentando la calidad de vida de los residentes.

La integración de herramientas como el QGIS y el MATLAB representa un valor añadido, pues permiten un análisis geoespacial detallado y una modelación cuantitativa precisa. Este enfoque híbrido fortalece la aplicabilidad del modelo en contextos urbanos reales, facilitando su replicación y adaptación en otras ciudades.

El modelo constituye una herramienta práctica para las autoridades locales interesadas en formular regulaciones urbanas basadas en la evidencia técnica. Su aplicación puede sustentar decisiones sobre diseño de infraestructuras urbanas, zonas de amortiguamiento acústico o planificación de tráfico orientadas a reducir la exposición al ruido y mejorar la calidad de vida.

Contribución de los autores

Javier Alcázar: conceptualización, desarrollo del modelo matemático y redacción del documento. Sandra Campuzano: recopilación de datos, análisis de resultados y revisión final del manuscrito.

Conflicto de intereses

Los autores declaran no tener ningún conflicto de intereses.

Referencias

- Ahac, M., Ahac, S., Lakušić, S. (2021). Long-Term Sustainability Approach in Road Traffic Noise Wall Design. *Sustainability*, 13(2), 536. <https://doi.org/10.3390/su13020536>
- Alam, P., Ahmad, K., Afsar, S. S., Akhtar, N. (2020). Noise Monitoring, Mapping, and Modelling Studies – A Review. *Journal of Ecological Engineering*, 21(4). <https://doi.org/10.12911/22998993/119804>
- Amoatey, P., Omidvarbona, H., Baawain, M. S., Al-Mayahi, A., Al-Mamun, A., Al-Harthy, I. (2020). Exposure assessment to road-traffic noise levels and health effects in an arid urban area. *Environmental Science and Pollution Research*, 27(28), 35051-35064. <https://doi.org/10.1007/s11356-020-09785-y>
- Amran, M., Fediuk, R., Murali, G., Vatin, N., Al-Fakih, A. (2021). Sound-Absorbing Acoustic Concretes: A Review. *Sustainability*, 13(19), 712. <https://doi.org/10.3390/su131910712>
- Bakker, J., Lugten, M., Tenpierik, M. (2023). Applying vertical greening systems to reduce traffic noise in outdoor environments: Overview of key design parameters and research methods. *Building Acoustics*, 30(3), 315-338. <https://doi.org/10.1177/1351010X231171028>
- Bramich, D. M., Menéndez, M., Ambühl, L. (2022). Fitting Empirical Fundamental Diagrams of Road Traffic: A Comprehensive Review and Comparison of Models Using an Extensive Data Set. *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*, 23(9), 14104-14127. <https://doi.org/10.1109/TITS.2022.3142255>

- Bravo-Moncayo, L., Garzón, C., Chávez, M., Pavón-García, I., Lucio-Naranjo, J.** (2023). Spatial assessment of traffic noise using hybrid machine learning and geostatistical techniques: A case study in Cuenca, Ecuador. *Sustainability*, 15(10), 10020. <https://doi.org/10.3390/su151010020>
- Casali, J. G.** (2021). Sound and Noise: Measurement and Design Guidance. En *Handbook of Human Factors and Ergonomics* (pp. 457-493). John Wiley & Sons, Ltd. <https://doi.org/10.1002/9781119636113.ch18>
- Epstein, M. J.** (2020). *Sound and Noise: A Listener's Guide to Everyday Life*. McGill-Queen's Press - MQUP.
- Farooqi, Z. U. R., Ahmad, I., Ditta, A., Ilic, P., Amin, M., Naveed, A. B., Gulzar, A.** (2022). Types, sources, socioeconomic impacts, and control strategies of environmental noise: A review. *Environmental Science and Pollution Research*, 29(54), 81087-81111. <https://doi.org/10.1007/s11356-022-23328-7>
- Fediuk, R., Amran, M., Vatin, N., Vasilev, Y., Lesovik, V., Ozbakkaloglu, T.** (2021). Acoustic Properties of Innovative Concretes: A Review. *Materials*, 14(2), 398. <https://doi.org/10.3390/ma14020398>
- Feng, Z. & Liu, Y.** (2025). The latest research status of porous sound-absorbing materials. *Journal of Polymer Engineering*, 45(3), 207-225. <https://doi.org/10.1515/polyeng-2024-0211>
- Gao, N., Zhang, Z., Deng, J., Guo, X., Cheng, B., Hou, H.** (2022). Acoustic Metamaterials for Noise Reduction: A Review. *Advanced Materials Technologies*, 7(6), 2100698. <https://doi.org/10.1002/admt.202100698>
- Garg, N.** (2022). Environmental Noises Control Strategies. En N. Garg (Ed.), *Environmental Noise Control: The Indian Perspective in an International Context* (pp. 277-344). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-030-87828-3_7
- Gilani, T. A. & Mir, M. S.** (2021). A study on the assessment of traffic noise induced annoyance and awareness levels about the potential health effects among residents living around a noise-sensitive area. *Environmental Science and Pollution Research*, 28(44), 63045-63064. <https://doi.org/10.1007/s11356-021-15208-3>
- Hansen, C. H. & Hansen, K. L.** (2021). *Noise Control: From Concept to Application* (2.^a ed.). CRC Press. <https://doi.org/10.1201/9780429428876>
- He, W., He, K., Zou, C., Yu, Y.** (2021). Experimental noise and vibration characteristics of elevated urban rail transit considering the effect of track structures and noise barriers. *Environmental Science and Pollution Research*, 28(33), 45903-45919. <https://doi.org/10.1007/s11356-021-14015-0>
- Ibili, F., Adanu, E. K., Adams, C. A., Andam-Akorful, S. A., Turay, S. S., Ajayi, S. A.** (2022). Traffic noise models and noise guidelines: A review. *Noise & Vibration Worldwide*, 53(1-2), 65-79. <https://doi.org/10.1177/09574565211052693>
- Krittanawong, C., Qadeer, Y. K., Hayes, R. B., Wang, Z., Virani, S., Zeller, M., Dadvand, P., Lavie, C. J.** (2023). Noise Exposure and Cardiovascular Health. *Current Problems in Cardiology*, 48(12), 101938. <https://doi.org/10.1016/j.epcardiol.2023.101938>
- Kumar, B. S. & Chowdary, V.** (2024). Railway Noise Pollution in Urban Environments. En N. Garg, C. Gautam, S. Rab, M. Wan, R. Agarwal, & S. Yadav (Eds.), *Handbook of Vibroacoustics, Noise and Harshness* (pp. 1-38). Springer Nature. https://doi.org/10.1007/978-981-99-4638-9_2-1
- Kumar, S., Xiang, T. B., Lee, H. P.** (2020). Ventilated acoustic metamaterial window panels for simultaneous noise shielding and air circulation. *Applied Acoustics*, 159, 107088. <https://doi.org/10.1016/j.apacoust.2019.107088>
- Lakshmanan, V., Robinson, S., Munn, M.** (2020). *Machine Learning Design Patterns*. O'Reilly Media, Inc.
- Laxmi, V., Thakre, C., Vijay, R.** (2022). Evaluation of noise barriers based on geometries and materials: A review. *Environmental Science and Pollution Research*, 29(2), 1729-1745. <https://doi.org/10.1007/s11356-021-16944-2>
- Lázaro, J., Pereira, M., Costa, P. A., Godinho, L.** (2022). Performance of Low-Height Railway Noise Barriers with Porous Materials. *Applied Sciences*, 12(6), 2960. <https://doi.org/10.3390/app12062960>
- Lee, H. P., Lim, K. M., Kumar, S.** (2021). Noise assessment of elevated rapid transit railway lines and acoustic performance comparison of different noise barriers for mitigation of elevated railway tracks noise. *Applied Acoustics*, 183, 108340. <https://doi.org/10.1016/j.apacoust.2021.108340>



- Li, M., Yuan, M., Li, J., Li, Y., Zhou, W., Zu, Y.** (2023). Research and application of combined noise reduction method by using noise reducing pavement and noise barrier. *INTER-NOISE and NOISE-CON Congress and Conference Proceedings*, 268(8), 253-259. https://doi.org/10.3397/IN_2023_0053
- Liao, G., Luan, C., Wang, Z., Liu, J., Yao, X., Fu, J.** (2021). Acoustic Metamaterials: A Review of Theories, Structures, Fabrication Approaches, and Applications. *Advanced Materials Technologies*, 6(5), 2000787. <https://doi.org/10.1002/admt.202000787>
- Liu, D., Wang, C., González-Libreros, J., Tu, Y., Elfgrén, L., Sas, G.** (2023). A review on aerodynamic load and dynamic behavior of railway noise barriers when high-speed trains pass. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, 239, 105458. <https://doi.org/10.1016/j.jweia.2023.105458>
- Masum, M. H., Pal, S. K., Akhie, A. A., Ruva, I. J., Akter, N., Nath, S.** (2021). Spatiotemporal monitoring and assessment of noise pollution in an urban setting. *Environmental Challenges*, 5, 100218. <https://doi.org/10.1016/j.envc.2021.100218>
- Mikhailenko, P., Piao, Z., Kakar, M. R., Bueno, M., Athari, S., Pieren, R., Heutschi, K., Poulikakos, L.** (2022). Low-noise pavement technologies and evaluation techniques: A literature review. *International Journal of Pavement Engineering*, 23(6), 1911-1934. <https://doi.org/10.1080/10298436.2020.1830091>
- Montes, D., Barrigón, J. M., Rey-Gozalo, G.** (2023). Effects of noise on pedestrians in urban environments where road traffic is the main source of sound. *Science of Total Environment*, 857, 159406. <https://doi.org/10.1016/j.scitotenv.2022.159406>
- Munir, S., Khan, S., Nazneen, S., Ahmad, S. S.** (2021). Temporal and seasonal variations of noise pollution in urban zones: A case study in Pakistan. *Environmental Science and Pollution Research*, 28(23), 29581-29589. <https://doi.org/10.1007/s11356-021-12738-8>
- Nourani, V., Gökçekuş, H., Umar, I. K.** (2020). Artificial intelligence based ensemble model for prediction of vehicular traffic noise. *Environmental Research*, 180, 108852. <https://doi.org/10.1016/j.envres.2019.108852>
- Olczak, K., Penar, W., Nowicki, J., Magiera, A., Kłoczek, C.** (2023). The Role of Sound in Livestock Farming—Selected Aspects. *Animals*, 13(14), 2307. <https://doi.org/10.3390/ani13142307>
- Oquendo-Di Cosola, V., Olivieri, F., Ruiz-García, L.** (2022). A systematic review of the impact of green walls on urban comfort: Temperature reduction and noise attenuation. *Renewable and Sustainable Energy Reviews*, 162, 112463. <https://doi.org/10.1016/j.rser.2022.112463>
- Owolabi, O., Lodico, D., Butterfield, E., Shokouhian, M., Abiodun, P., Darko, C., Duru, C.** (2024). *Effectiveness of Short Solid Barriers to Reduce Noise Generated by Different Types of Highway Vehicles*. <https://rosap.ntl.bts.gov/view/dot/79847>
- Partheeban, P., Karthik, K., Navin Elamparithi, P., Somasundaram, K., Anuradha, B.** (2021). Urban road traffic noise on human exposure assessment using geospatial technology. *Environmental Engineering Research*, 27(5), 210249-0. <https://doi.org/10.4491/eer.2021.249>
- Reche, C., Tobias, A., Viana, M.** (2022). Vehicular Traffic in Urban Areas: Health Burden and Influence of Sustainable Urban Planning and Mobility. *Atmosphere*, 13(4), 598. <https://doi.org/10.3390/atmos13040598>
- Rey, G., Suárez, E., Montenegro, A. L., Arenas, J. P., Barrigón, J. M., Montes, D.** (2020). Noise Estimation Using Road and Urban Features. *Sustainability*, 12(21), 217. <https://doi.org/10.3390/su12219217>
- Saakian, A.** (2020). *Radio Wave Propagation Fundamentals, Second Edition*. Artech House.
- Sharma, S., Sudhakara, P., Singh, J., Singh, S., Singh, G.** (2023). Emerging progressive developments in the fibrous composites for acoustic applications. *Journal of Manufacturing Processes*, 102, 443-477. <https://doi.org/10.1016/j.jmapro.2023.07.053>
- Sivakumaran, K., Ritonja, J. A., Waseem, H., AlShenaibar, L., Morgan, E., Ahmadi, S. A., Denning, A., Michaud, D. S., Morgan, R. L.** (2022). Impact of Noise Exposure on Risk of Developing Stress-Related Health Effects Related to the Cardiovascular System: A Systematic Review and Meta-Analysis. *Noise and Health*, 24(114), 107. https://doi.org/10.4103/nah.nah_83_21
- Yadav, D., Garg, N., Gautam, C., Agarwal, R., Yadav, S.** (2025). Noise Pollution: The Silent Intruder to Health and Well-Being. En N. Garg, C. Gautam, S. Rab, M. Wan, R. Agarwal, & S. Yadav (Eds.), *Handbook of Vibroacoustics, Noise and Harshness* (pp. 1185-1203). Springer Nature. https://doi.org/10.1007/978-981-97-8100-3_63

-
- Yan, S., Yuan, L., Wang, C., Diao, Q., Ren, X., Pan, X., Su, W., Chang, L., Zou, H., Shi, X., Lin, B.** (2023). A modular design approach for porous green sound-absorbing concrete for the noise barrier on high-speed railway. *Journal of Building Engineering*, 77, 107543. <https://doi.org/10.1016/j.jobe.2023.107543>
- Yang, W., He, J., He, C., Cai, M.** (2020). Evaluation of urban traffic noise pollution based on noise maps. *Transportation Research Part D: Transport and Environment*, 87, 102516. <https://doi.org/10.1016/j.trd.2020.102516>
- Yu, W., Jang, J.-C., Zhu, Y., Peng, J., Yang, W., Li, K.** (2024). Enhanced estimation of traffic noise levels using minute-level traffic flow data through convolutional neural network. *Sustainability*, 16(14), 6088. <https://doi.org/10.3390/su16146088>
- Zaman, M., Muslim, M., Jehangir, A.** (2022). Environmental noise-induced cardiovascular, metabolic and mental health disorders: A brief review. *Environmental Science and Pollution Research*, 29(51), 76485-76500. <https://doi.org/10.1007/s11356-022-22351-y>

Artículo original

La teoría de cuerdas y la AdS/CFT: dos formalismos en proceso de construcción

String theory and AdS/CFT: two formalisms in progress

Andrés Felipe Beltrán,  Servio Tulio Pérez-Merchancano*,  Luz Elena Bolívar-Marinez

Departamento de Física, Universidad del Cauca, Sede Tulcán, Popayán Colombia

Resumen

Las teorías del modelo estándar (ME) y de la relatividad general (RG) no proporcionan todas las respuestas a los problemas que actualmente se plantean en la física teórica de altas energías. No obstante, la teoría de cuerdas constituye un marco teórico muy fértil donde es posible encontrar varias respuestas y construir una física que trascienda el modelo estándar. Además, dicha teoría es la candidata más convincente para convertirse en la teoría cuántica de la gravedad. Hacemos aquí una primera aproximación a la teoría de cuerdas bosónicas incluyendo algunos resultados importantes incorporados a los agujeros negros en el contexto de la dualidad holográfica.

Palabras clave: Modelo estándar; Relatividad general; Dualidad holográfica; Teoría de cuerdas; Teoría cuántica de la gravedad; Teoría de cuerdas bosónicas.

Abstract

The theories of the Standard Model (SM) and general relativity (GR) do not provide all the answers to the problems that are currently posed in high-energy theoretical physics. However, string theory constitutes a very fertile theoretical framework where it is possible to find answers and build physics beyond the standard model. Furthermore, it is the most compelling candidate to become the quantum theory of gravity. Here we present a first approach to bosonic string theory, showing some important results incorporated into black holes in the context of holographic duality.

Keywords: Standard Model; General relativity; Holographic duality; String theory; Quantum theory of gravity; Bosonic string theory.

Introducción

Para la comprensión básica de la teoría de cuerdas se hace obligatorio entender otros tópicos de la física que son muy relevantes y que han marcado un desarrollo notable de las ciencias como lo son: la física de partículas, la teoría clásica de campos, relatividad, etc. Así por ejemplo, en la física de partículas es preciso una introducción básica del modelo estándar (*SM*). Si bien hay varias razones para creer que dicho modelo es sólo el límite de baja energía de una teoría más fundamental, el *SM* ha sido probado con éxito con un nivel impresionante de precisión y proporciona en la actualidad la mejor comprensión fundamental de la fenomenología de la física de partículas. La perspectiva que aquí se asume no es de carácter histórico, sino la de resumir de manera precisa la percepción actual de este campo de la física, marcando en forma concisa los principales preliminares teóricos necesarios para dar sentido al desarrollo formal de la teoría de cuerdas. Se espera que este trabajo sea útil para el personal con conocimientos técnicos y para aquellos que les guste estar familiarizados con la temática.

Los principales ingredientes del *SM* son quarks, leptones y fuerzas. Las partículas involucradas se caracterizan por su espín, su masa y los números cuánticos (cargas) que determinan sus interacciones. El contenido de fermiones ($\text{espín} = 1/2$) se organiza en tres familias con

Citación: Beltrán AF, *et al.* La teoría de cuerdas y la AdS/CFT: dos formalismos en proceso de construcción. Revista de la Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. 49(192):513-531, julio-septiembre de 2025. doi: <https://doi.org/10.18257/raccefyn.3149>

Editor: Jairo Roa Rojas

***Correspondencia:**

Servio Tulio Pérez-Merchancano;
pbeltranro@unicauca.edu.co

Recibido: 14 de enero de 2025

Aceptado: 1 de agosto de 2025

Publicado en línea: 8 de agosto de 2025



Este artículo está bajo una licencia de Creative Commons Reconocimiento-NoComercial-Compartir Igual 4.0 Internacional

números cuánticos idénticos y masas diferentes. Las familias más pesadas son inestables y se descomponen en una más ligera, que constituye la mayor parte de la materia ordinaria. Los cuatro fermiones de cada familia se distinguen por sus cargas bajo interacciones fuertes y electromagnéticas. Dos de ellos son quarks, que están cargados bajo las interacciones fuertes, y dos son leptones, que no lo están. Los dos quarks tienen cargas electromagnéticas $2/3$ (quarks “arriba”) y $-1/3$ (quarks “abajo”) respectivamente, y los dos leptones tienen cargas -1 (leptones cargados o “abajo”) y 0 (neutrinos, o leptones “arriba”, en unidades en las que la carga del electrón es -1).

Los neutrinos son peculiares desde dos puntos de vista, que pueden estar teóricamente relacionados: son neutros tanto en las interacciones fuertes como en las electromagnéticas (aunque sienten interacciones débiles) y son al menos seis órdenes de magnitud más ligeros que todos los demás fermiones *SM*. Las masas de los fermiones *SM* abarcan un rango que va desde las masas de neutrinos *sub-eV* hasta el límite de $1,710^2 \text{ GeV}$ [1]. Presentan una estructura bastante peculiar, estando las masas de las diferentes familias separadas jerárquicamente. Cada fermión está asociado a dos llamadas quiralidades. La quiralidad se conserva para los fermiones sin masa, en cuyo caso la quiralidad coincide con la helicidad. Por eso a las dos posibles quiralidades se les llama zurdo y diestro. Desde un punto de vista teórico, la quiralidad, por definición, distingue las dos representaciones irreducibles del grupo de Lorentz que pueden usarse para describir fermiones de espín $1/2$. Los fermiones masivos cargados están necesariamente descritos por dos componentes de diferentes quiralidades combinados en lo que se llama espinor de Dirac. En cuanto a los neutrinos, hasta ahora sólo se ha observado la quiralidad zurda. Esto puede entenderse elegantemente en términos de los números cuánticos de un posible componente diestro, pero el argumento va más allá del alcance de este documento.

Las interacciones en el *SM* están asociadas al intercambio de cuatro bosones vectoriales (espín = 1). El fotón media las interacciones electromagnéticas, los gluones, las interacciones fuertes, las interacciones débiles *Z* y *W*. El fotón y los gluones no tienen masa, mientras que el *Z* y el *W* son masivos, razón por la cual las interacciones débiles lo son a baja energía (son suprimidas por potencias de $E = MZ; W$, donde *E* es la energía del proceso). A pesar de su debilidad, dan lugar a etiquetas distintivas porque violan la paridad *P*, la conjugación de carga *C*, su combinación *CP*, la inversión temporal *T* y el número de familia, que son simetrías de las interacciones electromagnéticas y fuertes. En particular, la descomposición de familias más pesadas en familias más ligeras se debe a interacciones débiles.

La descripción realizada anteriormente se genera a una energía relativamente baja y se conoce desde hace mucho tiempo antes de que se inventara el *SM*. La descripción *SM* se vuelve necesaria cuando se consideran procesos que involucran energías más altas. La transición del régimen “efectivo” de baja energía al régimen *SM* tiene lugar alrededor de la escala electrodébil $v \approx 174 \text{ GeV}$. Por encima de esta escala, la naturaleza exhibe un mayor grado de simetría. Las interacciones electromagnéticas y débiles se vuelven indistinguibles y se unifican en la interacción “electrodébil”. Los componentes quirales zurdos de los fermiones ascendentes y descendentes también se vuelven indistinguibles y se unifican en dobletes electrodébiles. La escala electrodébil es donde se rompe esa “electrodebilidad”. Junto con la *QCD* y la escala de Planck, es una de las escalas fundamentales de la naturaleza conocidas en la actualidad. El mecanismo por el cual se rompe la simetría electrodébil está bien establecido, también experimentalmente, y se denomina ruptura espontánea de simetría. Es a través de tal mecanismo que los fermiones y los bosones de calibre masivos adquieren una masa proporcional a la escala electrodébil. Sin embargo, aún no se sabe cuál es el mecanismo que desencadena la ruptura espontánea. El *SM* codifica la opción más simple (tanto desde el punto de vista de la consistencia teórica como fenomenológica): el mecanismo de Higgs [2]. Tal mecanismo postula la existencia de un campo de espín = 0, el campo de Higgs. A diferencia de todos los demás campos, que requieren energía para activarse,

el campo de Higgs está “encendido” incluso en el estado fundamental, donde impregna el espacio-tiempo. Es a través de sus interacciones con el campo de Higgs que las partículas masivas SM adquieren sus masas, proporcionales al acoplamiento con el Higgs. La identificación del mecanismo responsable de la ruptura de la simetría electrodébil y la estabilidad de la escala débil respecto a la escala de Planck son dos cuestiones centrales en la física de partículas actual y son dos de las misiones más importantes del *LHC*.

Uno de los resultados más impactantes en teoría de cuerdas es quien da nombre a este documento. Conocido también como la dualidad gauge/gravedad, correspondencia holográfica, dualidad holográfica o AdS/CFT. A continuación se pretende enseñar algunos principios básicos de la geometría del espacio anti-de Sitter, de las teorías cuánticas de campos conformes, se incluye una formulación pedagógica de la conjetura de Maldacena y algunas de sus aplicaciones más importantes.

Desarrollo Teórico

Espacio anti-de Sitter

Antes de entender exactamente qué es el espacio anti-de Sitter, es necesario describir un poco la teoría de la relatividad general. La relatividad general puede ser vista como la teoría gauge de las transformaciones locales de coordenadas. Esta teoría se fundamenta en el *principio de equivalencia*, el cual establece que la física debe ser independiente de la elección de un sistema de coordenadas; este hecho ya está en la dinámica newtoniana, donde la masa inercial de una partícula es igual a su masa gravitacional.

Otra versión del principio de equivalencia, que es el *principio de equivalencia débil*, puede ilustrarse con un experimento mental debido a Einstein. Suponiendo a un observador dentro de una caja, entonces dicho observador no debería ser capaz de distinguir entre la aceleración gravitacional y la inercial mediante experimentos locales, es decir, si la caja es lo suficientemente pequeña, ningún observador podría distinguir entre estos dos tipos de aceleración. Dicho de otra manera, el principio establece que los efectos de una aceleración y un campo gravitacional uniformes son indistinguibles localmente. Por otra parte, según el *principio de equivalencia fuerte* se concluye que las partículas se mueven a lo largo de las geodésicas de una variedad espaciotemporal \mathcal{M} con curvatura, sin importar la naturaleza de las partículas bajo consideración. En este sentido, la gravedad es equivalente a la curvatura del espaciotiempo (**Lust y Vleeshouwers**, 2018).

La relatividad general describe el universo como un espaciotiempo clásico \mathcal{M} con $d - 1$ dimensiones espaciales y una dimensión temporal (**Bousso**, 2002). Matemáticamente, \mathcal{M} es una variedad pseudoriemanniana cuya forma está descrita por la métrica g_{ab} , con signatura de Lorentz $(-, +, \dots, +)$. En un sistema de coordenadas (x^0, \dots, x^{D-1}) , la distancia invariante ds entre dos puntos infinitesimalmente cercanos está dada por

$$ds^2 = g_{ab}(x^0, \dots, x^{D-1}) dx^a dx^b,$$

donde se asume el convenio de suma de Einstein. Por ejemplo, para el espaciotiempo plano de la relatividad especial (el espacio de Minkowski en $d = 4$) la métrica tiene la forma:

$$\begin{aligned} ds^2 &= -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \\ &= -dt^2 + dr^2 + r^2 d\Omega^2, \end{aligned}$$

dada en coordenadas cartesianas y esféricas, respectivamente. Otro ejemplo es el agujero negro de Schwarzschild de masa M , descrito por la métrica

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2.$$

El horizonte del agujero negro, $r = 2M$, es una hipersuperficie regular, aunque no puede verse explícitamente en estas coordenadas, existe una singularidad en $r = 0$ (Bousso, 2002).

El *espaciotiempo anti-de Sitter* (AdS) es una solución máximamente simétrica de las ecuaciones de Einstein para un universo vacío con constante cosmológica negativa. Matemáticamente se expresa a partir de la ecuación de campo de Einstein:

$$R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}R + \Lambda g_{ab} = 8\pi G T_{ab}, \quad (1)$$

siendo $R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}R \equiv G_{ab}$ el tensor de Einstein, g_{ab} la métrica del espaciotiempo, Λ la constante cosmológica y T_{ab} el tensor de energía-momento; asociado a la materia que se puede acoplar al campo gravitatorio. La ecuación de Einstein relaciona entonces la geometría del espaciotiempo con su contenido de materia. Las soluciones de vacío son aquellas donde $T_{ab} = 0$. Así, la ecuación de Einstein se reduce a:

$$G_{ab} + \Lambda g_{ab} = 0. \quad (2)$$

Un subconjunto de estas soluciones de vacío son las soluciones máximamente simétricas, siendo máximamente simétrico el espaciotiempo que admite un número máximo de generadores de simetría. Estas soluciones considerando los distintos valores de la constante cosmológica son las siguientes (Blau, 2023)

- $\Lambda = 0 \rightarrow$ Minkowski.
- $\Lambda > 0 \rightarrow$ de Sitter.
- $\Lambda < 0 \rightarrow$ anti-de Sitter.

Particularmente, el espaciotiempo anti-de Sitter tiene curvatura negativa y, cuando tiene dimensión $d + 1$, su métrica puede escribirse como (Maldacena, 2014)

$$ds^2 = L^2 \left[-(r^2 + 1) dt^2 + \frac{dr^2}{r^2 + 1} + r^2 d\Omega_{d-1}^2 \right]. \quad (3)$$

Dentro de las aplicaciones hechas para la correspondencia AdS/CFT, es útil expresar la métrica del espaciotiempo anti-de Sitter en un sistema de coordenadas conocido como el parche de Poincaré:

$$ds^2 = L^2 \frac{-dt^2 + d\vec{x}_{d-1}^2 + dz^2}{z^2}. \quad (4)$$

Las propiedades de la geometría del espacio anti-de Sitter se alejan mucho de la geometría euclídeana. Una representación bidimensional euclídeana usual del espacio AdS es el *disco de Poincaré*, también conocido como geometría de Lobachevsky, con quien comparte gran parte de sus propiedades (Edelstein y Giribet, s.f.). El espacio AdS es un claro ejemplo de espacio hiperbólico, esto es, de un espacio con curvatura constante negativa.

Existe una representación del disco de Poincaré hecha por el artista M. C. Escher, *Circle Limit III*, el lector interesado puede apreciar dicha representación artística para ganar cierta intuición; en ella los peces se hacen cada vez más pequeños e infinitos a medida que se acercan a la frontera del disco. Según este punto de vista, el disco es finito, pero aun así los peces se hacen cada vez más pequeños cerca del borde, de manera que se acercan a la frontera siempre sintiéndola infinitamente lejos.

El espaciotiempo anti-de Sitter puede verse como una pila de estos discos de Poincaré, conformando un cilindro sólido, exactamente como en la figura 1, y donde la dirección temporal corre a lo largo de su eje. De este modo, existe otra forma de representar el espaciotiempo

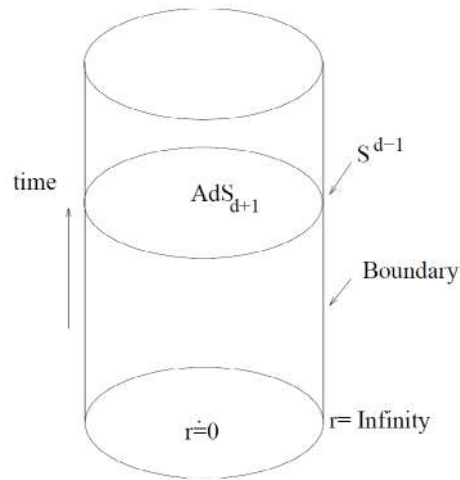


Figura 1. Diagrama de Penrose del espacio anti-de Sitter (Maldacena, 2014).

AdS_{d+1} , se consigue mediante su diagrama de Penrose. Pese a ser el espacio AdS espacialmente infinito en su extensión, puede definirse una frontera sobre el infinito. La frontera contiene la dirección temporal y una esfera S^{d-1} , el diagrama se observa en la figura 1.

Teniendo en cuenta la métrica dada en (4), entonces la frontera conforme del espacio AdS está en $z = 0$, descrita en las coordenadas de Poincaré. Las geodésicas del espacio AdS presentan comportamientos distintos según sea la masa de la partícula viviendo en dicho espacio. Así, los fotones que viajan desde un punto fijo del espacio AdS, a lo largo de la dirección z hacia la frontera en $z = 0$, retornan desde la frontera al punto de partida en un tiempo finito. Por el contrario, una partícula masiva con energía finita no alcanzará la frontera —alcanzar la frontera del espacio requeriría una energía infinita— pero retorna como si se tratase de un búmeran. El comportamiento de las geodésicas en el espacio AdS se observa en la figura 2.

Teoría cuántica de campos conforme

Las teorías de campos clásicas sin parámetros dimensionales son invariantes de escala. Un ejemplo sencillo es la teoría del campo escalar con un único término de interacción:

$$S = \int dx^4 \left(\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{\lambda}{4!} \phi^4 \right),$$

esta acción es invariante bajo el escalamiento simultáneo con un factor específico, de las coordenadas espaciotemporales y el campo, de la forma

$$\phi(x) \rightarrow \lambda^\Delta \phi(\lambda x), \tag{5}$$

donde Δ se conoce como la dimensión de escalamiento del campo, en este caso $\Delta = 1$. La misma teoría no es invariante bajo la transformación (5) si se agrega un término de masa:

$$S = \int dx^4 \left(\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \right) - \frac{\lambda}{4!} \phi^4.$$

Otro ejemplo de una teoría de campos clásicamente invariante de escala es la teoría de Yang-Mills acoplada a fermiones sin masa y a escalares. En todas las teorías invariantes de

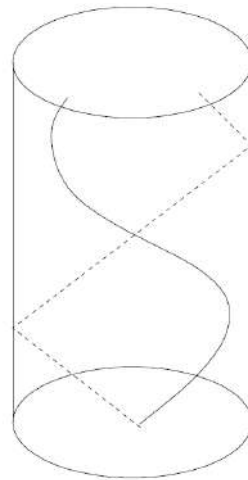


Figura 2. Las geodésicas para partículas sin masa (representadas con la línea punteada) alcanzan la frontera en el infinito y retornan en un tiempo finito. Las geodésicas con masa no alcanzan la frontera, puesto que necesitarían una energía infinita para hacerlo. (Maldacena, 2014).

escala en su versión clásica, tal invarianza de escala se ve violada al incluir correcciones cuánticas (Zaffaroni, 2000). Sin embargo, existen ejemplos de teorías cuánticas de campos con invarianza de escala exacta, son las descritas brevemente en esta sección, y tienen la particularidad de ser teorías muy útiles en el contexto de la correspondencia AdS/CFT.

Las teorías cuánticas de campos con simetría conforme (CFT), son teorías donde, además de presentar simetría de Poincaré, también existe la invarianza bajo *dilataciones* de la forma

$$x^{\mu'} = \lambda x^{\mu},$$

y transformaciones especiales conformes

$$x^{\mu'} = \frac{x^{\mu} + a^{\mu} x^2}{1 + 2a_{\nu} x^{\nu} + a^2 x^2}.$$

Estas transformaciones tienen como generadores a D , generador de la dilatación, y a K_{μ} , generador de la transformación especial conforme. Junto con los generadores de Poincaré P_{μ} , generador de traslaciones, y $J_{\mu\nu}$, generador de las transformaciones de Lorentz, integran el grupo conforme $SO(d, 2)$ del espacio de Minkowski de dimensión d (Harlow, 2018).

La invarianza bajo transformaciones de escala típicamente implica —bajo condiciones leves— también invarianza bajo el grupo de transformaciones conformes, donde estas reescalan las longitudes pero preservan los ángulos entre vectores. Es posible construir las corrientes asociadas con las transformaciones conformes como

$$J_{\mu} = T_{\mu\nu} \delta x^{\nu},$$

donde $T_{\mu\nu}$ es el tensor de energía-momento, expresión que puede obtenerse a partir del teorema de Noether. La conservación de la corriente correspondiente a las traslaciones requiere de la conservación del tensor de energía-momento, es decir:

$$\partial^{\mu} T_{\mu\nu} = 0,$$

y la conservación de la corriente correspondiente a las transformaciones de Lorentz se cumple si $T_{\mu\nu}$ es simétrico. La corriente para la dilatación $J_{\mu} = T_{\mu\nu} x^{\nu}$ se conserva si

$$\partial^{\mu} (T_{\mu\nu} x^{\nu}) = T^{\nu}_{\nu} \equiv 0.$$

Así, la condición para la invarianza de escala consiste en que el tensor de energía-momento sea sin traza. Entonces, se puede notar que en una teoría invariante de Poincaré e invariante de escala —con un tensor de energía-momento conservado simétrico y sin traza— las corrientes conformes se conservan:

$$\partial^\mu (T_{\mu\nu}v^\nu) = \partial^\mu T_{\mu\nu}v^\nu + T_{\mu\nu}\partial^\mu v^\nu = \frac{1}{2}T^{\mu\nu} (\partial_\mu v_\nu + \partial_\nu v_\mu) = \frac{1}{D}\partial^\tau v_\tau T^\mu_\mu \equiv 0.$$

Las condiciones sobre la traza y la propiedad de simetría del tensor de energía-momento se pueden cumplir en la mayoría de las teorías de campos clásicas y cuánticas. Pese a que existan algunos pocos contraejemplos, se puede asumir que las teorías invariantes de escala poseen también la invarianza conforme completa (Zaffaroni, 2000).

Específicamente en una teoría cuántica, la invarianza conforme es violada al introducir una *escala de renormalización*. Por ejemplo, en una teoría de Yang-Mills pura, que es invariante de escala a nivel clásico, el acoplamiento gauge viene dado según la escala de energía de la teoría¹, y se introduce además un parámetro dimensional ocasionado por el proceso cuántico llamado transmutación dimensional (DT, por sus siglas en inglés). De manera que el tensor de energía-momento en su versión cuántica pierde la propiedad de ser sin traza, perdiendo también la teoría su simetría de invarianza de escala, y por tanto, la simetría conforme.

Un ejemplo estándar de teoría cuántica de campos con simetría conforme es la teoría $\mathcal{N} = 4$ super-Yang-Mills, teoría que está involucrada en la correspondencia AdS/CFT.

La correspondencia

En 1997 surgió una conexión fascinante entre dos tipos muy distintos de teorías. En un lado de esta correspondencia estaban las teorías gauge cuánticas; similares a las que describen las fuerzas fuerte y electrodébil, las cuales rigen la naturaleza en las escalas microscópicas de la física de partículas y del otro lado de la correspondencia se encontraban las teorías de gravedad, cuya fuerza gobierna la naturaleza en las escalas macroscópicas de la cosmología y los agujeros negros. En este intervalo de tiempo, se descubrió que dentro de la teoría de cuerdas existían objetos cuya descripción venía dada por campos gauge en cierto límite, y por la gravedad en un límite diferente.

El límite en el cual la descripción mediante la gravedad es adecuada corresponde al límite donde la teoría gauge se convierte en fuertemente acoplada. La correspondencia *AdS/CFT*, o dualidad *gauge/gravedad*, afirma que estas dos descripciones son equivalentes para todos los valores del acoplamiento gauge, aunque por lo general, un único lado de la correspondencia es manejable. En acoplamiento débil, la teoría gauge está bajo control perturbativo, mientras que los grados de libertad gravitacionales duales se acoplan a la construcción completa de las excitaciones de la cuerda y no pueden tratarse clásicamente. Por el contrario, en acoplamiento fuerte, los grados de libertad de la teoría gauge no tienen un tratamiento perturbativo, y se reorganizan en una descripción dual en términos de la gravedad clásica (Probst, 2018).

La correspondencia *AdS/CFT* explota el hecho de que el grupo de isometrías del espacio anti-de Sitter en $d + 1$ dimensiones es idéntico al grupo conforme en el espacio de Minkowski en d dimensiones. La correspondencia *AdS/CFT* establece lo siguiente: toda la física en un espacio asintóticamente AdS puede ser descrita por una *CFT* local que “vive” sobre su frontera (Maldacena, 2014). Aunque se dice que la teoría de campos se define sobre

¹En las teorías clásicas de campos, la constante de acoplamiento (denotada comúnmente como g) corresponde a una constante adimensional. Sin embargo, bajo el proceso de cuantización, esta “constante” va a depender de la escala de energía del proceso en consideración, escala conocida como la escala del *grupo de renormalización* (RG, por sus siglas en inglés).

la frontera de AdS, realmente, describe toda la física ocurriendo dentro del espacio AdS. Entonces, cuando se piensa en la imagen de AdS, no es correcto considerar simultáneamente una teoría de campos adicional viviendo en la frontera (**Aharony, Gubser, Maldacena, Ooguri, y Oz**, 2000).

Una forma más general de exponer la correspondencia es la siguiente:

*Cualquier teoría cuántica de campos conforme que vive en $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^{d-1}$ es equivalente a una teoría de la gravedad cuántica en un espacio asintóticamente $AdS_{d+1} \times M$, siendo M una variedad compacta (**Harlow**, 2018).*

El ejemplo más famoso y estudiado de esta correspondencia fue el propuesto por Juan Maldacena en (**Maldacena**, 1999). Este ejemplo relaciona una teoría de supercuerdas Tipo IIB en el espacio $AdS_5 \times S^5$ con una teoría de super-Yang-Mills $\mathcal{N} = 4 SU(N)$ en $d=4$. Note que la teoría de gravedad cuántica se relaciona con una teoría que vive en un espaciotiempo sin gravedad y en una dimensión menor. Algunos ejemplos (**Giribet**, 2023) de la correspondencia se listan a continuación:

- Supercuerdas Tipo IIB en $AdS_5 \times S^5$ en $d=4$. \longleftrightarrow $\mathcal{N} = 4$ super-Yang-Mills $SU(N)$
- Supercuerdas Tipo IIB en $AdS_3 \times S^3 \times \mathbb{T}^4$ \longleftrightarrow producto simétrico de CFTs.
- Supercuerdas Tipo IIA en $AdS_4 \times \mathbb{C}P^3$ \longleftrightarrow $\mathcal{N} = 6$ super-Chern-Simons $SU(N) \times SU(M)$ en $d = 3$.

Para el ejemplo dado originalmente por Maldacena, existe una especie de diccionario entre los parámetros de cada una de las teorías involucradas en la correspondencia. La teoría gauge posee dos parámetros adimensionales g_{YM} y N . Una combinación de ambos da lugar al acoplamiento de 't Hooft: $\lambda \equiv g_{YM}^2 N$. Técnicamente, la teoría gauge tiene ahora dos parámetros adimensionales independientes g_{YM} y λ .

Por otro lado, la teoría de cuerdas en $AdS_5 \times S^5$ tiene un acoplamiento adimensional g_s y dos parámetros dimensionales: la escala de longitud de la cuerda $\ell_s = \sqrt{\alpha'}$, y el radio del espacio AdS representado por L en las ecuaciones (3) y (4). Así, la teoría de cuerdas tiene dos parámetros adimensionales: g_s y L/ℓ_s .

Los parámetros de la teoría gauge y de la teoría de cuerdas están relacionados de la siguiente forma:

$$g_{YM}^2 = 2\pi g_s,$$

$$\lambda = \frac{1}{2} \frac{L^4}{\alpha'^2}.$$

De acuerdo con la versión más fuerte de la correspondencia AdS/CFT, se conjetura que la dualidad entre la teoría gauge supersimétrica $SU(N)$, y la de supercuerdas de Tipo IIB se debe mantener para cualquier valor de N y g_s . Esto implicaría que la teoría $\mathcal{N} = 4$ super-Yang-Mills es exactamente equivalente a la teoría de supercuerdas Tipo IIB $AdS_5 \times S^5$. Sin embargo, en la actualidad es imposible comprobar esta forma de la correspondencia, puesto que no existe todavía una formulación cuántica consistente a nivel no perturbativo de la teoría de cuerdas, y particularmente para espaciotiempos curvos (**Erdmenger**, 2018).

En la forma débil de la correspondencia AdS/CFT, se conjetura que es solamente válida en el límite de Maldacena: $N \rightarrow \infty$ y λ muy grande. Así, en su versión débil relaciona la supergravedad clásica con la teoría $\mathcal{N} = 4$ super-Yang-Mills en acoplamiento fuerte y $N \rightarrow \infty$. De manera que:

$$\left(\begin{array}{l} \lambda \rightarrow \infty \\ N \rightarrow \infty \end{array} \right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{l} g_s \rightarrow 0 \\ \alpha' \rightarrow 0 \end{array} \right).$$

Claramente se observa que la correspondencia AdS/CFT provee una dualidad de acoplamiento débil/fuerte. La correspondencia es una dualidad en el sentido usual, es decir, cuando un lado de la correspondencia está débilmente acoplado, entonces la descripción dual del otro lado está fuertemente acoplada.

Una forma de ver una interpretación matemática de la correspondencia se consigue al estudiar las simetrías del espacio AdS. Considerando, por ejemplo, la métrica del espaciotiempo AdS_5 en coordenadas de Poincaré:

$$ds^2 = \left(\frac{r}{L}\right)^2 (-dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2) + L^2 \frac{dr^2}{r^2},$$

este espaciotiempo tiene simetría $SO(4, 2)$, de gran importancia física. La métrica tiene invarianza de Poincaré $ISO(3, 1)$ en $x^\mu = (t, x, y, z)$, que corresponde a la simetría de Poincaré de la teoría de campos dual en el espaciotiempo de 4 dimensiones. Así, x^μ se interpreta como las coordenadas espaciotemporales de la teoría de campos conforme. Análogamente, para el espaciotiempo AdS_{d+2} , d representa el número de dimensiones espaciales de la teoría gauge.

La métrica del espacio AdS_5 también es invariante bajo las transformaciones de escala

$$x^\mu \rightarrow ax^\mu, \quad r \rightarrow \frac{1}{a}r,$$

bajo este escalamiento, r se transforma como la energía conjugada a t . Esta es una razón del porqué la teoría de campos conforme es cuatridimensional, mientras que la teoría de gravedad tiene cinco dimensiones. La coordenada r tiene una interpretación como la escala de energía de la teoría sin gravedad. Así, por ejemplo, la teoría $\mathcal{N} = 4$ super-Yang-Mills tiene esta invarianza de escala, mientras que la invarianza es vista geoméricamente dentro de la teoría de gravedad (Natsuume, 2015).

El hecho de que la teoría de campos viva en un espacio de dimensión menor está en acuerdo con especulaciones hechas acerca de la gravedad cuántica. Desde el punto de vista histórico, rondaba sobre la década de los noventa una idea no muy bien establecida conocida actualmente como *principio holográfico*. Tal principio fue desarrollado por 't Hooft ('t Hooft, 1993) y Susskind (Susskind, 1995), sugiriendo que las teorías de gravedad cuántica deben ser holográficas, es decir, la física en cierta región puede ser descrita sin perder información por una teoría en la frontera. El principio holográfico surge como resultado del estudio de la termodinámica de los agujeros negros.

Stephen Hawking y Jacob Bekenstein demostraron a mediados de los 70 que los agujeros negros se comportan como objetos termodinámicos con temperaturas $T_H = \hbar c^3 / 8\pi kGM$, con M la masa del agujero negro, emitiendo radiación de Hawking, y también tienen una entropía dada por (6), donde se considera el área de su horizonte de eventos. Esto implica que eventualmente irradiará su energía, perdiendo masa en el proceso conocido como evaporación de Hawking. Dada la evaporación de Hawking, existe una paradoja en torno a la descripción cuántica de lo ocurrido con la información al caer dentro de un agujero negro, pareciera posible lanzar estados cuánticos puros dentro de un agujero negro y obtener en cambio estados mixtos/térmicos, aparentemente violando la propiedad de unitariedad y resultando en una pérdida de información —esta es la paradoja de pérdida de información en agujeros negros. Hawking creía que este análisis demostraba que la mecánica cuántica es violada por agujeros negros en evaporación. Al asignar una entropía a los agujeros negros, se deduce que deben tener asociados un conjunto de microestados, convirtiéndose así en un reto para las teorías cuánticas de la gravedad obtener tales microestados, compatibles con lo propuesto por Bekenstein (Rikles, 2014).

Según el límite de Bekenstein, la máxima entropía dentro de una región del espacio está dada por

$$S_{\text{máx}} = \frac{\text{Área}}{4G_N}, \quad (6)$$

donde el área corresponde a la de la frontera de dicha región. Suponiendo un estado con una entropía mayor que $S_{\text{máx}}$, entonces se puede mostrar que tal estado viola la segunda ley de la termodinámica. Este límite para la entropía implica que el número de grados de libertad dentro de alguna región crece como el área de su frontera y no como el volumen de la región dada; en las teorías cuánticas de campos típicas este comportamiento no es posible. Intentar entender este comportamiento conduce al principio holográfico antes mencionado, según el cual, dentro de una teoría cuántica de la gravedad, toda la física dentro de un volumen dado puede ser descrita en términos de una teoría sobre la frontera que tiene menos de un grado de libertad por área de Planck, satisfaciendo el límite de Bekenstein. Como es sabido, en la correspondencia AdS/CFT se está describiendo la física dentro del seno del espacio AdS mediante una teoría de campos con una dimensión menos viviendo sobre la frontera, en este sentido, es una realización del principio holográfico (**Aharony y cols.**, 2000).

Actualmente, la correspondencia presenta varias extensiones y generalizaciones. Una de ellas es la exploración de la posibilidad de una correspondencia dS/CFT. La dualidad dS/CFT relaciona una teoría de cuerdas en un espaciotiempo *de Sitter* de dimensión d con una teoría de campos conforme euclidiana sobre una esfera de dimensión $(d - 1)$, tal correspondencia se entiende mucho menos. Sin embargo, una de las motivaciones para dicha correspondencia es la evidencia experimental de una constante cosmológica positiva, es decir $\Lambda > 0$, sugiriendo que el universo se está acercando a una cosmología de Sitter en el futuro lejano. Esta correspondencia podría ser relevante en el universo muy temprano (**Becker, Becker, y Schwarz**, 2006).

Existe mucha evidencia de la validez de la correspondencia AdS/CFT, pese a que aún siga presentando la condición de conjetura. Se puede pensar en el problema de la construcción de una prueba matemáticamente rigurosa de la correspondencia, pero no existe aún para formular tal prueba, otra forma de ofrecer una definición completa de lo que es la teoría de cuerdas. Se ha asumido la conjetura como correcta, considerando que hasta ahora no ha llevado a contradicciones o paradojas. Por ejemplo, en el caso de cuatro dimensiones, las teorías gauge duales se definen sin ambigüedad, por lo tanto, la dualidad puede ser tomada como la definición de la teoría de cuerdas para la clase de configuraciones de fondo donde se aplica. Se puede tener la esperanza de que algún día se encuentre una formulación completamente independiente de la teoría de cuerdas, así sería mejor formulado el objetivo de probar la correspondencia AdS/CFT (**Becker y cols.**, 2006).

D3-branas y la conjetura de Maldacena

Un escenario en el cual ha sido posible probar la efectividad de la teoría de cuerdas es el de los agujeros negros. Es bien sabido que un agujero negro corresponde a una región del espaciotiempo en donde la gravedad es tan fuerte que incluso la luz no puede escapar de ella. Si la teoría de cuerdas continúa con su propósito de reconciliar la relatividad general con la mecánica cuántica, debería ser capaz de explicar la termodinámica de estos objetos astronómicos.

Así, pasos se han dado en esta dirección con el desarrollo hecho por Strominger y Vafa (**Strominger y Vafa**, 1996) en 1996, cuando encontraron que, al suponer los agujeros negros como compuestos por cuerdas, era posible conseguir un resultado para su entropía similar a (6). Siendo este el primer cálculo para la entropía de Bekenstein mediante el conteo de sus estados cuánticos, uno de los mayores avances luego del descubrimiento de las

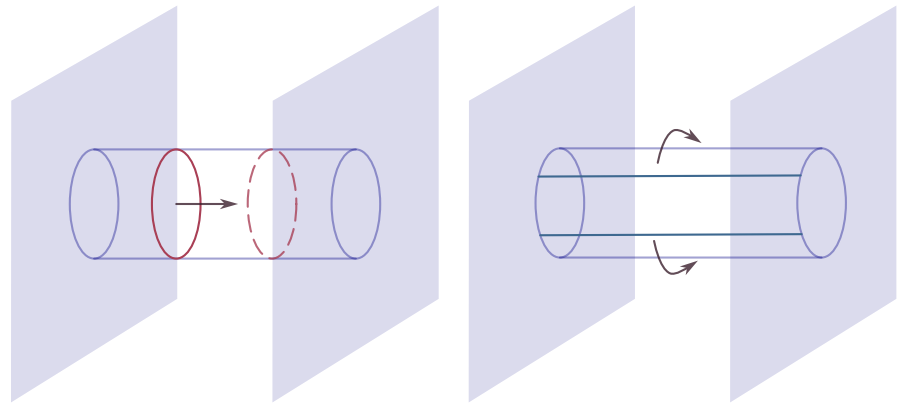


Figura 3. Representación esquemática de la dualidad entre cuerdas abiertas y cerradas. Del lado izquierdo se muestra el intercambio de una cuerda cerrada entre dos D-branas, del lado derecho se muestra un proceso equivalente que corresponde al intercambio de cuerdas abiertas (Edelstein y Giribet, s.f.).

D-branas. Aunque la situación considerada para el cálculo es altamente ideal, ya que se estudian agujeros negros con un valor grande de carga eléctrica y viviendo en un espaciotiempo de cinco dimensiones; muy diferentes a los que se observan en el universo. A pesar de esto, su entropía es también proporcional al área del horizonte de eventos. Tales agujeros negros son soluciones relativamente sencillas de las ecuaciones de la teoría de cuerdas con cinco de sus diez dimensiones compactificadas (Edelstein y Giribet, s.f.). Este cálculo necesita la existencia de D-branas dentro de la teoría, y es relevante ante la paradoja de la pérdida de información (Rickles, 2014).

Varios físicos siguieron el camino trazado por Strominger y Vafa, entre ellos Curtis Callan y Juan Maldacena, quienes hicieron un análisis similar para el caso con agujeros negros de Reissner-Nordström no extremales. Esta clase de ideas, combinadas con la noción de utilizar el límite para valores grandes de N D-branas coincidentes con descripciones duales, da origen a la que puede considerarse como la tercera revolución de supercuerdas. En este sentido, puede verse condensada en la correspondencia AdS/CFT gran parte de los desarrollos hechos durante esta revolución, lo que es lo mismo, es una consecuencia del conjunto de conceptos como dualidades y teoría M, agujeros negros y D-branas.

Las D-branas codifican las descripciones duales que la teoría de cuerdas lleva dentro de su formulación matemática, es decir, se cuenta con dos maneras distintas pero equivalentes para describir la misma física. Uno de los ejemplos representativos de esta propiedad se encuentra en la interacción entre dos D-branas. Si se considera, por ejemplo, la situación en que estos objetos intercambian cuerdas entre sí, entonces la fuerza que una D-brana ejerce sobre la otra puede representarse mediante el intercambio de una cuerda cerrada propagándose entre ellas, como se observa al lado izquierdo de la figura 3.

Dada la simetría de dualidad, el mismo proceso de interacción también puede verse como el intercambio de un par de cuerdas abiertas (con sus extremos atados a las D-branas) propagándose alrededor de la región que trazaría la cuerda cerrada, como se observa del lado derecho de la figura 3. Ambas descripciones son matemáticamente equivalentes. El primer caso involucra un intercambio de gravitones, mientras que en el segundo no aparecen, teniendo en cuenta la ausencia de estados correspondientes al gravitón en el espectro de cuerdas abiertas. Esto puede dar la sensación de la posibilidad de construir una teoría cuántica de la gravedad sin gravitones, y de esta forma una teoría con gravedad puede ser equivalente a una teoría gauge sin gravedad (Edelstein y Giribet, s.f.).

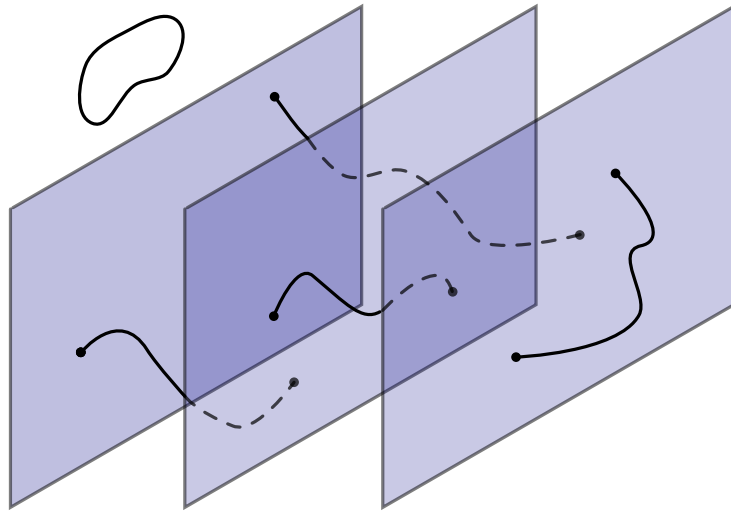


Figura 4. Conjunto de D-branas, con una cuerda abierta sobre la misma superficie y las tres restantes estiradas entre dos D-branas paralelas, como se observa en la figura, las cuerdas cerradas pueden propagarse libremente.

En el límite a bajas energías de las teorías de cuerdas se pueden encontrar solitones² correspondientes a soluciones de agujeros negros. Existe además la posibilidad de construir cierto tipo de agujeros negros como configuraciones de D-branas coincidentes. La dualidad descrita en el párrafo anterior —conocida también como dualidad entre cuerdas abiertas y cerradas o dualidad agujero negro/D-brana— es la base para la correspondencia AdS/CFT.

Considerando un conjunto de D3-branas paralelas, se puede demostrar que para cada par de ellas sus interacciones son nulas, puesto que la atracción gravitatoria es compensada con la repulsión debida a otros campos ante los cuales presentan carga. Esta condición de nulidad en la interacción se garantiza siempre y cuando las D3-branas se mantengan paralelas, tal arreglo permite alejar o acercar las D3-branas de manera arbitraria. En la figura 4 se observa un conjunto de D3-branas paralelas con los diferentes tipos de cuerdas posibles. Dentro de las cuerdas abiertas están aquellas con ambos extremos sobre una misma brana, y las que tienen cada extremo atado a una brana distinta. También es posible la existencia de cuerdas cerradas propagándose libremente, con la posibilidad de alejarse de todas las D3-branas a la vez.

En el mínimo nivel de energía, las cuerdas abiertas con extremos sobre dos D3-branas distintas, presentan estados con una masa que es proporcional al estiramiento de la cuerda, esto como consecuencia de su tensión intrínseca. Así, su masa puede aumentar o disminuir según se alejen o se acerquen las D3-branas. Por otra parte, las cuerdas abiertas con ambos extremos sobre la misma D3-brana dan lugar a partículas sin masa, situación donde pueden contraerse hasta tener tamaño nulo. Finalmente, las cuerdas cerradas viajan libremente, se perciben como un espaciotiempo plano en 10 dimensiones. En principio, las cuerdas abiertas y cerradas interactúan mutuamente (Edelstein y Giribet, s.f.).

Se supone ahora que el conjunto de N D3-branas se acerca de manera que sean coincidentes,

²Los solitones se definen como soluciones localizadas, no singulares e independientes del tiempo, de las ecuaciones del movimiento clásicas con energía finita en una teoría de campos. En un espaciotiempo de dimensión D , dichas soluciones se conocen como p -brana si están localizadas en $D - 1 - p$ coordenadas espaciales e independientes de las restantes p coordenadas, donde $p < D - 1$. Por ejemplo, el caso $p = 0$ (0-brana) tiene característica de partícula puntual y también es llamada agujero negro; con $p = 1$ se tiene una cuerda; el caso $p = 2$ se conoce como membrana.

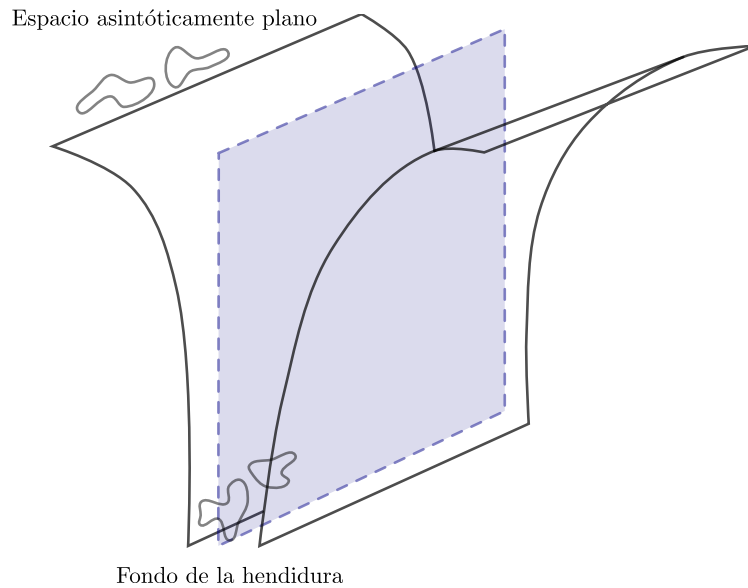


Figura 5. El conjunto de D3-branas deforma el espaciotiempo, y la conjetura de Maldacena asume que es intercambiable por el campo gravitacional generado por el conjunto (Edelstein y Giribet, s.f.).

esto es, se encuentren en el mismo lugar del espacio. Esto sugiere que todas las partículas, derivadas de las excitaciones de cuerdas abiertas con extremos en distintas D3-branas, experimentan una pérdida de masa, producto de tal acercamiento. De manera esquemática, la descripción de este sistema está dada por:

$$S = S_{\text{cuerdas abiertas en } N \text{ D3-branas}} + S_{\text{cuerdas cerradas lejanas}} + S_{\text{interacción}}, \quad (7)$$

donde la S se refiere a “sistema”. Teniendo en cuenta que las D3-branas son hipersuperficies con masa, y como su tamaño es infinito, entonces el conjunto de D3-branas de este tipo se puede interpretar como un objeto de gran peso deformando el espaciotiempo, comportándose esencialmente como un agujero negro. En la figura 5 se representa de forma muy simplificada la situación, donde se observa que el espaciotiempo de diez dimensiones de la teoría —dibujado en líneas de color negro— sufre una marcada hendidura en el lugar donde están superpuestas las N D3-branas —representadas en azul con líneas punteadas— y lejos de este lugar, es plano, dada la débil influencia gravitacional.

Un paso importante dentro de la *conjetura de Maldacena* consiste en considerar solamente el campo gravitacional generado por el conjunto de D3-branas, es decir, eliminando las D3-branas y dejando en su lugar al campo gravitacional promedio (conocido como una *brana negra*). Dados sus aspectos gravitacionales, este objeto ahora pertenece a una teoría de cuerdas cerradas. Alexander Polyakov se refirió a esta maniobra hábil de cambiar la descripción con D-branas a una descripción gravitacional como sigue: “un poco como sustituir el famoso gato por su sonrisa” (Rickles, 2014), probablemente refiriéndose al gato de Cheshire de la obra de Lewis Carroll, *Las aventuras de Alicia en el país de las maravillas*.

Al haber eliminado las D3-branas en la descripción del sistema (7), se tiene entonces un sistema de cuerdas cerradas moviéndose bajo la influencia de la geometría del espaciotiempo. La mecánica cuántica impone a las D3-branas una forma de carga repartida a lo largo de toda su extensión tridimensional, generando campos similares al electromagnético. Así, el arreglo de D3-branas tiene carga N , mostrando que a nivel microscópico su descripción

viene dada en términos de un número N de D3-branas, cada una de las cuales presenta una unidad de la carga fundamental. Considerando que existen seis direcciones transversales —las D3-branas dejan un rastro cuadrimensional cuando se mueven dentro de un espaciotiempo de diez dimensiones— y como las seis direcciones transversales se pueden representar como el conjunto de todas las posibles esferas de dimensión cinco, entonces quedan así encerradas las N unidades de la “carga eléctrica generalizada” poseídas por las D3-branas. En analogía con el campo electromagnético, se dice que las esferas encierran N unidades de flujo (**Edelstein y Giribet**, s.f.).

La nueva configuración (representada en la figura 5) tiene solamente cuerdas cerradas vi-viendo en un espaciotiempo curvo, donde existen cuerdas cerradas en el fondo de la hendidura (con campo gravitatorio fuerte) y otras cuerdas cerradas muy lejos de la misma. En este caso, también es posible la interacción entre ambas, es decir, las cuerdas pueden entrar o salir de la hendidura. Representando esquemáticamente esta situación, se tiene el sistema:

$$S = S_{\text{cuerdas cerradas en hendidura} \& N \text{ flujos}} + S_{\text{cuerdas cerradas lejanas}} + S_{\text{interacción}} \cdot \quad (8)$$

Tal sistema es equivalente al representado en (7). Pese a que los términos de interacción en (7) y (8) aparentemente tengan una interpretación distinta, en el caso en que la longitud de la cuerda es arbitrariamente pequeña ambos términos son insignificantes. Maldacena anticipó las profundas consecuencias a las que se llega si se supone adicionalmente que el número de las D3-branas es muy grande. Además, si se considera la longitud de la cuerda como infinitesimal, entonces los sistemas descritos se parecen a las teorías de partículas y campos basadas en objetos puntuales.

Dentro de la descripción de las cuerdas abiertas para el sistema, el primer término en (7), hacer infinitesimal el tamaño de las cuerdas lleva a simplificaciones — la teoría de cuerdas produce un resultado preciso para la dinámica de cuerdas abiertas con extremos en las N D3-branas: se trata de la teoría ya nombrada en este capítulo, la teoría super-Yang-Mills $\mathcal{N} = 4$, prima cercana de la cromodinámica cuántica. Así, la descripción de la dinámica de las D3-branas puede estar dada por el mismo tipo de teorías usadas para describir la física de partículas. Sin embargo, dicha teoría se trata de una extensión supersimétrica de la teoría de Yang-Mills, con la máxima supersimetría posible, hecho bastante alejado de la fenomenología, debido a la falta de evidencia experimental precisa para la supersimetría. A pesar de ser de la misma clase que la cromodinámica cuántica, la teoría es demasiado simétrica como para ser compatible con el universo observable.

Continuando con la descripción de los términos dentro del sistema (7), la contribución de las cuerdas cerradas se simplifica a gravitones propagándose libremente en un espaciotiempo plano. También, el término de interacción (en principio el más complejo del sistema) se ve eliminado totalmente.

Se puede resumir el sistema S en (7), considerando las suposiciones de que la longitud de la cuerda es infinitamente pequeña y el número de D3-branas es muy grande, de la forma:

$$S = S_{\text{super-Yang-Mills } \mathcal{N}=4} + S_{\text{gravitones libres}} \cdot \quad (9)$$

Las cuerdas cerradas se mueven en la geometría mostrada de forma esquemática en la figura, dicho límite hace muy estrecha la hendidura y con una profundidad grande. De tal manera que las pequeñas cuerdas cerradas quedan atrapadas en el fondo, con nula probabilidad de escapar de la hendidura y también es cero la probabilidad de que una cuerda cerrada se adentre en la hendidura. Así, el término de interacción no figura en el sistema 9.

El primer término del sistema, referenciado como (8), caracteriza el movimiento de las pequeñas cuerdas cerradas en la hendidura. Esta hendidura adopta una geometría específica,

conocida como el espacio anti-de Sitter en cinco dimensiones, previamente mencionado; las cinco dimensiones restantes están compactificadas en una esfera, donde las N unidades de carga descritas en esta sección quedan encerradas por aquella 5–esfera. El segundo término corresponde a las pequeñas cuerdas cerradas que viven en una geometría plana, considerando que la curvatura solo se presenta en la región de la hendidura. Así, el sistema resulta:

$$S = S_{\text{gravedad en AdS \& N flujos}} + S_{\text{gravitones libres}}, \quad (10)$$

donde el primer término corresponde a una teoría de supergravedad obtenida como el límite a bajas energías de la teoría de supercuerdas Tipo IIB. Los sistemas (9) y (10) son los mismos, son dos descripciones alternas de un mismo conjunto de N D3-branas paralelas. Por lo tanto, se pueden “igualar” los sistemas (9) y (10), tras cancelar los términos de gravitones libres, se llega a la igualdad:

$$S_{\text{gravedad en AdS \& N flujos}} = S_{n=4 \text{ SYM}},$$

denotada simbólicamente como:

$$\text{AdS} = \text{CFT}. \quad (11)$$

Todo lo anterior ha permitido una revisión intuitiva de la correspondencia AdS/CFT, en particular, los casos propuesto originalmente por Maldacena. A continuación se presentan algunas aplicaciones donde es útil esta teoría.

Aplicaciones

La característica más útil de la correspondencia es el hecho de que se traduce el régimen fuertemente acoplado, o no perturbativo, de una teoría cuántica de campos a una teoría de la gravedad débilmente acoplada. Los cálculos convencionales en teoría cuántica de campos dependen de una expansión perturbativa en términos de una constante de acoplamiento (denotada generalmente por g) suficientemente pequeña. Este enfoque a nivel perturbativo, permite describir las interacciones electrodébiles, la cromodinámica cuántica con libertad asintótica a altas energías y gran parte de los sistemas de la materia condensada. Por ejemplo, los conductores fuertemente correlacionados, superconductores estándar tipo BCS, cadenas de espín, etc.

Sin embargo, el enfoque perturbativo falla en el acoplamiento fuerte, y por lo tanto, no es adecuado para dar razón a muchos problemas abiertos en sistemas cuánticos fuertemente interactuantes: como lo son la cromodinámica cuántica a escalas de energía bajas o intermedias, el plasma de quarks y gluones, y los metales extraños en sistemas de materia condensada. La correspondencia AdS/CFT simplifica de gran manera dichos cálculos en acoplamiento fuerte. Pero teniendo en cuenta que involucra teorías poco realistas, a lo sumo puede ser útil como un modelo de prueba para los sistemas fuertemente acoplados del mundo real (Probst, 2018). A continuación, se presentan las descripciones de dos aplicaciones de la correspondencia:

- El *plasma de quarks y gluones* es un nuevo estado de la materia que pudo ser generado experimentalmente en el año 2000, mediante la colisión a muy altas energías de iones pesados —iones de oro en el caso del RHIC (Relativistic Heavy Ion Collider), operado por el laboratorio nacional de Brookhaven, en Nueva York. Se usan iones de plomo en el experimento Alice que se realiza en las instalaciones del LHC. En estos experimentos se hacen chocar los núcleos de frente, viajando a velocidades muy

cercanas a la de la luz. La colisión produce una pequeña región del espacio donde la temperatura resulta casi un millón de veces la temperatura del núcleo de sol, es decir, del orden de 10^{13}K . Así, cada uno de los quarks y gluones presentan una gran cantidad de energía.

La cromodinámica cuántica por medio del fenómeno de *desconfinamiento* predice que los quarks y gluones se comportan como si estuvieran libres de toda interacción, siempre y cuando estén a energías lo suficientemente altas. Para estos experimentos se esperaba observar algo similar a un plasma gaseoso de quarks y gluones, donde luego de la colisión se dispersaran en todas las direcciones, porque si su interacción es muy pequeña, entonces cada partícula saldría despedida en alguna dirección aleatoria e independiente de las demás (**Edelstein y Giribet**, s.f.).

Pero, lo que se observa realmente en los experimentos de colisión de iones pesados es algo diferente a lo esperado. El plasma de quarks y gluones se comporta como un líquido fuertemente interactuante y de muy baja viscosidad. Los físicos de partículas tuvieron grandes dificultades para describir este comportamiento inesperado. Sin embargo, Policastro, Son y Starinets (**Policastro, Son, y Starinets**, 2001) usaron la correspondencia AdS/CFT para explicarlo, aprovechando el hecho de que a altas temperaturas las teorías $\mathcal{N} = 4$ super-Yang-Mills y la cromodinámica cuántica son similares.

El valor que se calcula para la relación entre la viscosidad η y la densidad de entropía s , relación que en unidades de \hbar/k_B , toma el valor $1/4\pi$ en una clase amplia de sistemas holográficos, es ampliamente diferente al calculado mediante las teorías débilmente acopladas, está muy cerca del valor experimental observado en el plasma de quarks y gluones (**Probst**, 2018), considerando que las medidas en el RHIC favorecen un valor pequeño, $\eta/s \leq 0,25$, es así que el valor de $\eta/s = 1/4\pi \simeq 0,08$ obtenido mediante la dualidad gauge/gravedad está en total acuerdo con dicho acotamiento (**Ammon y Erdmenger**, 2015). El valor tan pequeño para η/s indica que el plasma de quarks y gluones es el fluido más fuertemente acoplado conocido hasta el momento.

Otra característica importante del plasma de quarks y gluones, es el fenómeno de *termalización*. Cuando los iones pesados colisionan, se forma un estado de no equilibrio, que luego se relaja a un estado de equilibrio térmico. Existen distintos modelos dentro de la dualidad holográfica para describir este fenómeno. Una posibilidad consiste en considerar ondas de choque colisionantes dentro de la teoría dual gravitacional. y otra posibilidad consiste en estudiar el colapso de una capa de materia y la formación de un agujero negro en el espacio asintóticamente AdS. Esta es un área de la investigación bastante amplia, cuyos resultados obtenidos recientemente implican que para los sistemas fuertemente acoplados el tiempo de relajación es muy corto (**Ammon y Erdmenger**, 2015).

- Existe una combinación particular de las áreas de la física: materia condensada, gravedad, teoría de cuerdas y la teoría cuántica de campos. Dicha interfase de áreas tan variadas ha sido posible gracias a la dualidad holográfica, en este caso particular nombrado como la correspondencia AdS/CMT (**Hartnoll, Lucas, y Sachdev**, 2018) (donde CMT hace referencia a Condensed Matter Theory). AdS/CMT es el estudio de sistemas de materia condensada sin quasipartículas, ofreciendo modelos sin una descripción basada en las quasipartículas, y en las que aun así los cálculos controlados se pueden realizar.

Dentro de la física del estado sólido, los *metales extraños* exhiben una fase metálica de la materia que no está bien descrita por la teoría del líquido de Fermi propuesta por Landau, la cual trata con pequeñas perturbaciones en torno al mar de Fermi. Este

modelo es ampliamente exitoso para los metales ordinarios, pero falla en materiales con orden topológico no perturbativo, es decir, en los metales extraños. Los metales extraños exhiben un orden topológico en el sentido de que su estado fundamental tiene un entrelazamiento de largo alcance (correspondiente a una fase topológica de la materia). Así, en lugar de estar descritos por la teoría de líquido de Fermi, tienen una mejor descripción en la versión de la dualidad holográfica con aplicaciones a la materia condensada, la dualidad AdS/CMT.

Conclusiones

En física teórica, regularmente se encuentran nuevos resultados importantes al percibir de que dos conceptos diferentes están relacionados entre sí en un nivel profundo y fundamental. Ejemplos de tales relaciones son las dualidades que relacionan dos teorías cuánticas aparentemente diferentes entre sí afirmando que las teorías son en realidad equivalentes. En particular, los espacios de Hilbert y la dinámica de las dos teorías coinciden. Desde un punto de vista matemático, esto significa que las teorías son idénticas. Sin embargo, desde un punto de vista físico, sus descripciones pueden diferir; por ejemplo, puede haber diferentes funciones lagrangianas para las dos teorías. Los ejemplos de dualidad mencionados en este trabajo tocan las teorías cuánticas de campos entre sí o relacionan las teorías de cuerdas. La correspondencia *AdS/CFT*, sin embargo, es un nuevo tipo de dualidad que conecta una teoría cuántica de campos en el espaciotiempo plano con una teoría de cuerdas. Esto es particularmente notable dado que actualmente la teoría de cuerdas es un candidato muy prometedor para una teoría consistente de la gravedad cuántica. A primera vista, la teoría cuántica de campos en el espaciotiempo plano no parece ser una teoría de la gravedad cuántica. Sin embargo, la correspondencia *AdS/CFT*, al ser una dualidad, implica que las dos teorías son equivalentes. Esto explica por qué en la actualidad muchos científicos piensan que la correspondencia *AdS/CFT*, es uno de los descubrimientos más apasionantes de la física teórica moderna de las últimas dos décadas.

Así mismo, la correspondencia *AdS/CFT* es una construcción importante del principio holográfico, donde se establece que en una teoría gravitacional, el número de grados de libertad aumentan significativamente permitiendo ampliar el estudio en el espacio tiempo de Minkowski. En este caso, la teoría de la gravedad cuántica involucrada en la correspondencia *AdS/CFT* se define en una variedad de la forma $AdS \times X$, donde *AdS* es el espacio Anti-de Sitter y *X* es un espacio compacto. En este caso, la teoría cuántica de campos se define en el límite conforme de este espacio Anti-de Sitter.

Particularmente, la correspondencia *AdS/CFT* es un ejemplo de una dualidad de acoplamiento fuerte-débil. Si la teoría de campo está fuertemente acoplada, la teoría de la gravedad dual es clásica y débilmente curvada. Por esa razón, la correspondencia *AdS/CFT* es un formalismo prometedor para el estudio de teorías de campos fuertemente acoplados. Ciertas cuestiones como los cálculos de las funciones de correlación y el estudio de anomalías dentro de las teorías cuánticas de campos fuertemente acopladas se vuelven computacionalmente manejables en el lado de la gravedad y también se tornan conceptualmente más claras.

Agradecimientos

Los autores agradecen a las vicerrectoría de investigaciones (VRI) y administración de la Universidad del Cauca por el financiamiento parcial para desarrollar este trabajo de investigación a través del proyecto de investigación ID 5937.

Contribución de los autores

La concepción, redacción y enfoque de esta revisión corresponden a los autores de esta contribución.

Conflicto de intereses

Los autores declaran no tener conflicto de intereses.

Referencias

- Aharony, O., Gubser, S. S., Maldacena, J., Ooguri, H., y Oz, Y.** (2000, enero). Large n field theories, string theory and gravity. *Physics Reports*, **323**(3–4), 183–386. Descargado de [http://dx.doi.org/10.1016/S0370-1573\(99\)00083-6](http://dx.doi.org/10.1016/S0370-1573(99)00083-6) doi: 10.1016/S0370-1573(99)00083-6
- Ammon, M., y Erdmenger, J.** (2015). *Gauge/gravity duality: Foundations and applications*. Cambridge University Press.
- Becker, K., Becker, M., y Schwarz, J. H.** (2006). *String theory and m-theory: A modern introduction*. Cambridge University Press. doi: 10.1017/CBO9780511816086
- Blau, M.** (2023). *Lecture Notes on General Relativity*. Descargado de <http://www.blau.itp.unibe.ch/GRlecturenotes.html>
- Bousso, R.** (2002, agosto). The holographic principle. *Reviews of Modern Physics*, **74**(3), 825–874. Descargado de <http://dx.doi.org/10.1103/RevModPhys.74.825>
- Edelstein, J., y Giribet, G.** (s.f.). *Cuerdas y supercuerdas* (R. Coleccionables, Ed.).
- Erdmenger, J.** (2018). *Introduction to gauge/gravity duality (tasi lectures 2017)*.
- Giribet, G.** (2023). *Introduction to ads/cft*. Descargado de https://youtu.be/D_tH0hMS-VE?si=0ju15b-kMwcwPnSB
- Harlow, D.** (2018). Tasi lectures on the emergence of the bulk in ads/cft.
- Hartnoll, S. A., Lucas, A., y Sachdev, S.** (2018). *Holographic quantum matter*.
- Lust, D., y Vleeshouwers, W.** (2018). *Black hole information and thermodynamics*.
- Maldacena, J.** (1999). The large- n limit of superconformal field theories and supergravity. *International Journal of Theoretical Physics*, **38**(4), 1113–1133. Descargado de <http://dx.doi.org/10.1023/A:1026654312961> doi: 10.1023/a:1026654312961
- Maldacena, J.** (2014). *The gauge/gravity duality*.
- Natsuume, M.** (2015). *Ads/cft duality user guide*. Tokyo: Springer Japan. Descargado de <https://doi.org/10.1007/978-4-431-55441-7>
- Policastro, G., Son, D. T., y Starinets, A. O.** (2001, agosto). Shear viscosity of strongly coupled $n=4$ supersymmetric yang-mills plasma. *Physical Review Letters*, **87**(8), . Descargado de <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.87.081601> doi: 10.1103/physrevlett.87.081601
- Probst, J.** (2018). *Applications of the gauge/gravity duality*. Springer Cham. doi: <https://doi.org/10.1007/978-3-319-93967-4>
- Rickles, D.** (2014). *A brief history of string theory* (1.^a ed.). Springer Berlin, Heidelberg. doi: <https://doi.org/10.1007/978-3-642-45128-7>
- Strominger, A., y Vafa, C.** (1996). Microscopic origin of the bekenstein-hawking entropy. *Physics Letters B*, **379**(1), 99-104. Descargado de <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0370269396003450> doi: [https://doi.org/10.1016/0370-2693\(96\)00345-0](https://doi.org/10.1016/0370-2693(96)00345-0)

- Susskind, L.** (1995, noviembre). The world as a hologram. *Journal of Mathematical Physics*, **36**(11), 6377–6396. Descargado de <http://dx.doi.org/10.1063/1.531249> doi: 10.1063/1.531249
- 't Hooft, G.** (1993). *Dimensional reduction in quantum gravity*.
- Zaffaroni, A.** (2000, septiembre). Introduction to the ads-cft correspondence. *Classical and Quantum Gravity*, **17**(17), 3571. Descargado de <https://dx.doi.org/10.1088/0264-9381/17/17/306>

Original article

Study of the structural and optical properties of CuInSe₂ thin films obtained by RF sputtering as a function of the deposition temperature

Estudio de las propiedades estructurales y ópticas de películas delgadas de CuInSe₂ obtenidas mediante pulverización catódica por radiofrecuencia en función de la temperatura de depósito

✉ Jorge Montes-Monsalve^{1,*}, ✉ Roberto Bernal-Correa², ✉ Arturo Morales-Acevedo³,
✉ Álvaro Pulzara-Mora⁴

¹Dirección Académica, Universidad Nacional de Colombia, Sede de La Paz, La Paz, Cesar, Colombia

²Instituto de Estudios de la Orinoquia, Universidad Nacional de Colombia, Arauca, Colombia

³Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, Departamento de Ingeniería Eléctrica-SEES, Ciudad de México, México

⁴Laboratorio de Nanoestructuras Semiconductoras, Universidad Nacional de Colombia, Sede Manizales, Colombia

Abstract

The formation of a copper-deficient surface layer is a common phenomenon in CuInSe₂ thin films, typically arising in deposition processes that involve multiple steps, such as thermal treatment and post-selenization. Here, we studied the radio-frequency magnetron sputtering film deposition from a CuInSe₂ target. Substrate temperature varied between 50 and 400°C. X-ray photoelectron spectroscopy (XPS) confirmed the persistent presence of a Cu-deficient surface layer across all deposition temperatures. Films grown below 200°C were amorphous and Cu-deficient, while at 200°C and above, the films exhibited a transition to a polycrystalline chalcopyrite structure, as evidenced by X-ray diffraction (XRD). The crystallite size for the polycrystalline films deposited at 200°C and 400°C was approximately 10–12 nm. Energy dispersive spectroscopy (EDS) revealed a progressive decrease in copper content from ~20 at.% at 50–200°C to ~16 at.% at 400°C, while indium remained nearly constant and selenium increased slightly from 50 at.% to 56 at.% with increasing temperature. UV-Vis spectroscopy showed that the optical bandgap (E_g) decreased from 1.2 eV at 50°C and 1.15 eV at 100°C to approximately 0.95–0.94 eV at 200°C and 400°C. Our results provide valuable insights into the effect of substrate temperature on CuInSe₂ thin films, contributing to the ongoing efforts to optimize their properties for photovoltaic and optoelectronic applications.

Keywords: Copper indium selenide; Thin film; X-ray photo-electron spectroscopy; Raman spectroscopy; X-ray diffraction; Optoelectronic; Photovoltaic.

Resumen

La formación de una capa superficial deficiente en cobre es una característica común en las películas delgadas de CuInSe₂, especialmente en procesos de deposición que implican múltiples etapas, como el tratamiento térmico y la pos-selenización. Estudiamos aquí la deposición de películas delgadas de CuInSe₂ mediante pulverización catódica por magnetron de radiofrecuencia a partir de un blanco monofásico, variando la temperatura del sustrato entre 50 y 400 °C. La espectroscopía de fotoelectrones de rayos X (XPS) confirmó la presencia persistente de una capa superficial pobre en Cu en todas las temperaturas de deposición. Las películas depositadas por debajo de 200 °C resultaron amorfas y con deficiencia de cobre, mientras que a 200 °C y temperaturas superiores las películas mostraron una transición hacia una estructura policristalina tipo calcopirita, como lo evidenció la difracción de rayos X (XRD). Los tamaños de cristalito para las películas policristalinas depositadas

Citation: Montes-Monsalve J, *et al.* Study of the structural and optical properties of CuInSe₂ thin films obtained by RF sputtering as a function of the deposition temperature. Revista de la Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. 49(192):532-545, julio-septiembre de 2025. doi: <https://doi.org/10.18257/raccefyn.3225>

Editor: Gabriel Téllez Acosta

***Corresponding autor:**
Jorge Montes-Monsalve;
jimontesm@unal.edu.co

Received: May 27, 2025

Accepted: July 8, 2025

Published on line: August 25, 2025



This is an open access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution License.

a 200 °C y 400 °C fueron de aproximadamente 10–12 nm. El análisis mediante espectroscopía de dispersión de energía de rayos X (EDS) reveló una disminución progresiva en el contenido de cobre, de ~20 % at. entre los 50 °C y los 200 °C a ~16 % at. a los 400 °C, en tanto que el contenido de indio se mantuvo casi constante y el de selenio aumentó ligeramente de 50 % at. a 56 % at. con el incremento de la temperatura. La espectroscopía UV-Vis mostró que el valor de la banda prohibida óptica (E_g) disminuyó de 1,2 eV a 50 °C y 1,15 eV a 100 °C hasta aproximadamente 0,95–0,94 eV a 200 °C y 400 °C. Los resultados aportan información relevante sobre el papel de la temperatura del sustrato en la deposición de películas delgadas de CuInSe₂, lo que contribuye a los esfuerzos actuales por mejorar su desempeño en aplicaciones fotovoltaicas y optoelectrónicas.

Palabras clave: Seleniuros de cobre e indio; Película delgada; Espectroscopia de fotoelectrones de rayos X; Espectroscopia Raman; Difracción de rayos X; Optoelectrónica; Fotovoltaica.

Introduction

Chalcogenide materials belong to a significant family of semiconductors extensively used in photovoltaic and optoelectronic devices (Kim *et al.*, 2021; Torres *et al.*, 2018). Over several decades, there has been intensive research to explore their unique properties and improve their manufacturing methods (Chauhan *et al.*, 2018; Cheng *et al.*, 2017; Hodes & Cahen, 1986; Migliorato *et al.*, 1975; Thomere *et al.*, 2022). These materials have gained significant attention due to their versatile applications and their potential for high-efficiency solar energy conversion (Green *et al.*, 2024; Jošt *et al.*, 2022; Nanayakkara *et al.*, 2017; Solhtalab *et al.*, 2022; Wi *et al.*, 2018). Conventional silicon-based photovoltaic technology, while widely used, faces challenges such as high energy-intensive crystallization and purification processes, making it expensive and less sustainable (Chauhan *et al.*, 2018). This has driven a shift towards second-generation solar cells based on heterojunction thin films, which offer cost-effectiveness and improved efficiency. Among the alternative materials explored, copper-based chalcopyrite compounds, such as CuInSe₂, have emerged as one of the most promising candidates for thin-film solar cells, particularly as an absorber layer in tandem solar cells where it can serve as the bottom junction (Muzzillo *et al.*, 2018; Sadono *et al.*, 2018; Stanbery *et al.*, 2021; Wang *et al.*, 2022).

CuInSe₂ is a ternary semiconductor of the I-III-VI₂ family, where I = Cu/Ag, III = In/Ga/Al, and VI = Se/S/Te, which exhibits a direct bandgap of approximately 1.05 eV, a high optical absorption coefficient ($>10^5$ cm⁻¹), excellent thermal stability, and superior conversion efficiency (Hodes & Cahen, 1986; Migliorato *et al.*, 1975). Furthermore, CuInSe₂-based solar cells offer exceptional long-term stability, making them viable for commercial applications (Thomere *et al.*, 2022). To enhance their photovoltaic performance, research efforts have focused on optimizing their electrical and optical properties through various deposition techniques, including metal-organic chemical vapor deposition, chemical bath deposition, chemical spray pyrolysis, co-evaporation, sputtering, atomic layer deposition, close-spaced vapor transport, and molecular beam epitaxy (Li *et al.*, 2022; Wang *et al.*, 2022; Stanbery *et al.*, 2021; Li *et al.*, 2021; Sadono *et al.*, 2018; Cheng *et al.*, 2017). However, these methods often require expensive equipment and extreme processing conditions, limiting their scalability.

Electrodeposition has also been explored as a low-cost route for CuInSe₂, offering room-temperature processing and compositional control without vacuum equipment (Hodes & Cahen, 1986; Chandran *et al.*, 2028). Although alternative routes like one-step and two-step electrodeposition are known, here we highlight radio-frequency magnetron sputtering, which provides better thickness uniformity and is more compatible with large-area manufacturing. Alkali- and transition-metal doping of CuInSe₂ can further tailor electrical or optical properties, for example, Li/Na improve carrier concentration, while Zn or Rb enhance grain growth and defect passivation (Sharma *et al.*, 2023; Malitckaya *et al.*, 2017), but here we focused exclusively on undoped films grown by RF magnetron sputtering. A comprehensive discussion of doped systems lies outside the scope of this work, but we cited key references for completeness.

Exceeding the photovoltaic performance beyond the single-junction Shockley-Queisser limit can be achieved using tandem solar cell structures, which employ two light-absorbing layers. Mathematical modeling suggests that, in a two-terminal tandem configuration under AM1.5 illumination, the top cell should have a bandgap (E_g) between 1.6 and 1.8 eV, while the bottom cell should have an E_g between 0.95 and 1.1 eV (Fan *et al.*, 2011). CuInSe₂ (CIS) is a strong candidate for the bottom cell due to its bandgap of 1.0–1.04 eV (Chauhan *et al.*, 2018; Hodes & Cahen, 1986). The highest efficiency reported for CIS solar cells currently stands at 15% (Migliorato *et al.*, 1975). To further improve efficiency, Ga alloying has been used to form Cu(InGa)Se₂ (CIGS), with most high-efficiency devices featuring Ga/(Ga+In) concentrations of ~20–30% (Thomere *et al.*, 2022). However, this increases the bandgap above 1.1 eV, deviating from the optimal range for tandem solar cells. Consequently, alternative strategies for enhancing CIS-based solar cells with minimal Ga content are required.

Here, we focused on the synthesis and comprehensive characterization of CuInSe₂ thin films using RF magnetron sputtering at substrate temperatures ranging from 50°C to 400°C. Identifying the optimal temperature for high-quality CuInSe₂ formation is crucial, as it directly influences the film's structural, optical, and electronic properties. Our findings indicated that 200°C represents a critical threshold, as films deposited at this temperature exhibit a well-defined polycrystalline structure with minimal micro-strain, a dense morphology, and an ideal stoichiometry suitable for photovoltaic applications. Below 200°C, the films remain amorphous with poor crystallinity, while above 200°C, an increase in defect states and Cu deficiency affects the material's characteristics. By analyzing the optical, morphological, structural, and compositional properties of the films, we aimed to evaluate their potential applications beyond solar cells. Our results provide valuable insights into the effect of substrate temperature on CuInSe₂ thin films, contributing to the ongoing efforts to optimize their properties for photovoltaic and optoelectronic applications while emphasizing the importance of achieving high-quality film formation at relatively low deposition temperatures.

Experimental details

The thin CIS films were deposited at substrate temperatures ranging from 50°C to 400°C using a V4 magnetron sputtering system on soda-lime glass substrates. Before deposition, the glass substrates were sequentially cleaned in an ultrasonic bath using acetone, ethanol, and deionized water for 10 minutes each, and then dried with high-purity nitrogen gas. This cleaning process ensures the removal of organic contaminants and promotes better film adhesion. The films were sputtered from a commercial single-phase CuInSe₂ target in an Ar⁺ atmosphere, at a working pressure of 0.7 Pa and a radio-frequency (RF) power of 35 W for 60 minutes. These deposition parameters were selected based on prior optimization experiments with Cu-based chalcopyrite materials, which showed that this pressure–power combination ensures a stable plasma, good uniformity, and minimal target damage while promoting adequate control over the film growth rate and phase composition.

We studied the following substrate temperatures: 50°C, 100°C, 200°C, and 400°C. We determined film thicknesses by profilometry with the following average values: 170 nm at 50°C, 240 nm at 100°C, 240 nm at 200°C, and 160 nm at 400°C. These thickness variations are attributed to the combined effects of adatom mobility and surface re-sputtering, which are known to increase with temperature in RF-sputtered systems. The deposited layers were characterized using various analytical techniques: X-ray diffraction (XRD); structural characterization was conducted using a Panalytical X'Pert MRD and MRD (XL) diffractometer operated at room temperature and equipped with a Cu K α radiation source ($\lambda = 1.540562 \text{ \AA}$) at 30 kV and 15 mA, within a 2θ range of 20° to 60°. For Raman spectroscopy, the measurements were performed in backscattering geometry under normal incidence using a Raman Dilor XY LabRAM spectrometer. The system included an Olympus BX40 microscope with focusing capabilities of 10X, 20X, 50X, and 100X. Three

excitation laser wavelengths were used: 432 nm (blue), 532 nm (green), and 632 nm (red). For X-ray photoelectron spectroscopy (XPS), the surface composition analysis was carried out using a Thermo Scientific KAlpha X-Ray photoelectron spectrometer system equipped with an Al K α X-ray source (1486.6 eV) and a base pressure of approximately 10⁻⁹ Pa.

Depth profiling was performed through superficial attrition with Ar⁺ ions at 3 kV. The relative atomic percentages of each element were quantified with the CASA XPS software employing a Lorentzian-Gaussian model for peak fitting. The optical properties of thin films were evaluated using a JASCO V-670 spectrometer, which operates in the ultraviolet to near-infrared (UV–NIR) range. Transmittance spectra were recorded and used to calculate the absorption coefficient based on the film thickness values obtained by profilometry. The optical bandgap energy (E_g) was extracted from Tauc plots assuming a direct allowed transition by extrapolating the linear portion of the $(\alpha h\nu)^2$ vs $h\nu$ curves. For the scanning electron microscopy (SEM), the morphological observation was conducted using a JEOL JSM7000 FE-SEM microscope with the following specifications: Resolution: 1.0 nm at 15 kV, 1.3 nm at 1 kV (GB), and 0.8 nm at 30 kV (SEM); accelerating voltage range: 100 V to 30 kV; magnification range: 25X to 1,000,000X. We took SEM images from the surface of each film to determine the morphology and analyze variations in relation to deposition parameters.

Results

X-ray analysis

The XRD measurements for each of the deposited films are shown in **Figure 1**. The films deposited at 50°C and 100°C exhibited amorphous characteristics, indicating a lack of long-range crystallinity. However, at 200°C and 400°C, the films transitioned into a structured form, demonstrating the development of a polycrystalline phase. A clear polycrystalline trend was observed, with three primary diffraction planes identified, two of which exhibited irregular shapes and low intensity, while the third presented a more distinct peak. The three diffraction planes were oriented at 2θ values of 26.64° (112), 44.20° (204/220), and 52.35° (116/321). These reflections correspond to CuInSe₂ with a tetragonal chalcopyrite structure, as verified in the JCPDS database card No. 089-5649, which confirmed that the deposited films maintained the expected crystallographic structure of the CuInSe₂ target material.

The crystallite size for the samples deposited at 200 °C and 400 °C was calculated and found to be approximately 10–12 nm. This indicates a moderate degree of grain growth as the deposition temperature increases, which plays a crucial role in determining the structural and optoelectronic properties of the films.

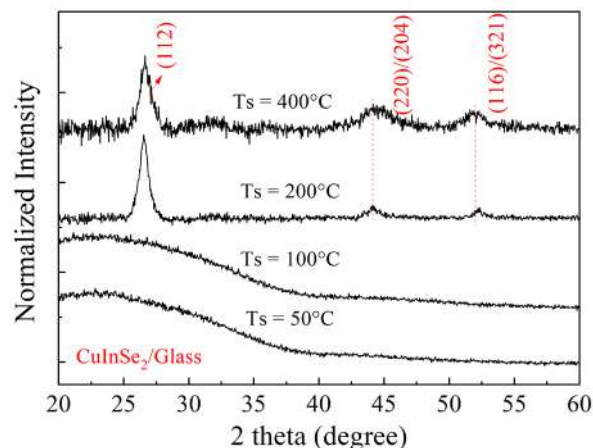


Figure 1. XRD of the CuInSe₂ deposited to Ts between 50 °C – 400 °C.

Raman analysis

A comparative analysis of the Raman spectra obtained from the deposited films at different substrate temperatures (**Figure 2**) revealed the presence of distinct optical vibrational modes. The main vibrational mode was observed at 173–176 cm^{-1} , while additional acoustic modes E and B₂ appeared at 211 cm^{-1} and 226 cm^{-1} , respectively. These vibrational features are consistent across all the analyzed films.

To assess the amount of material probed by the Raman laser, the penetration depth (δ) of the laser should be estimated using the following equation:

$$\delta = \lambda / 4\pi k, \quad (1)$$

where λ represents the laser excitation wavelength and k is the extinction coefficient associated with the imaginary part of the complex refractive index $\hat{n} = n + ik$. For CIGS thin films, **Shafarman *et al.*** have reported k -values within the energy range of 0.75 – 4.6 eV at room temperature (**Paulson *et al.*, 2003**). Based on ellipsometry measurements at specific wavelengths (500 nm and 1500 nm), a 632 nm excitation laser corresponds to an energy of 1.96 eV and an extinction coefficient of 0.45. By applying equation (1), the penetration depth was determined at 112 nm. Given that the film thickness varies depending on the substrate temperature, the laser penetrated more than 50% of all deposited films, ensuring a strong interaction with a significant volume of the material.

Upon closer examination of the spectra, at approximately 150 cm^{-1} , a weak Raman signal can be attributed to Cu-deficient CuInSe₂ structures, specifically ordered vacancy compounds (OVC) such as CuIn₃Se₅. This suggests that Cu-deficient phases are present on the film surface. However, while copper deficiency does not inherently imply an excess of selenium, in CuInSe₂-based photovoltaic devices, ‘Cu-deficient and Se-rich’ conditions are deliberately engineered to stabilize beneficial secondary phases such as CuIn₃Se₅, suppress the formation of selenium vacancies, and optimize both the band gap and p-type conductivity. This compositional strategy is crucial for achieving conversion efficiencies exceeding 20% in CIGS solar cells (**Ishizuka *et al.*, 2022**). Additionally, we evaluated the full-width at half maximum (FWHM) as a function of the deposition temperature. Across most temperatures, the FWHM remained around 19 a.u., except for the film deposited at 400 °C, which exhibited a slightly broader value of 22 a.u., an increase that is not particularly significant. The A₁ vibrational mode showed a shift from 176 cm^{-1} at 50 °C to 173 cm^{-1} at

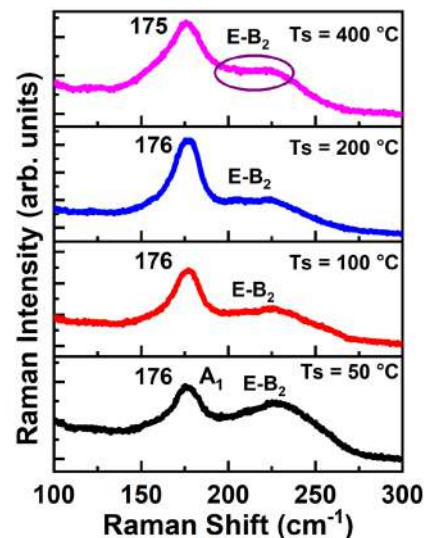


Figure 2. Raman spectra of the different samples deposited on glass substrates by RF magnetron sputtering at different substrate temperatures 50 °C- 400 °C.

400°C, a trend that has been previously reported in chalcopyrite-type materials. This shift has been attributed to changes in stoichiometry due to Cu vacancies, leading to the possible formation of CuIn_{1.5}Se₂ and CuIn₃Se₅ (Maeda *et al.*, 2016; Xu *et al.*, 2004).

Previous studies have demonstrated that the broadening of the A₁ mode is not solely due to the presence of the weak signal around 150 cm⁻¹, but also to additional minor peaks observed in Raman spectra. We did not detect these peaks clearly in this study, but they have been linked to point defects and micro-stress effects induced by increasing deposition temperatures. Such structural modifications further confirm the strong dependence of CuInSe₂ film properties on substrate temperature.

EDS and SEM analysis

Energy dispersive spectroscopy (EDS) measurements were done to determine the elemental composition of the deposited films and verify whether the Cu deficiency contributed to the weak Raman signal observed at 150 cm⁻¹. The semi-quantitative analysis of a 0.5 μm² area (Table 1) provided insights into the elemental distribution at different substrate temperatures.

For films deposited at substrate temperatures between 50°C and 200°C, the atomic percentage of Cu remained approximately 20%. However, as the temperature increased to 400°C, the Cu content decreased to 16%. A similar trend was observed for In, but with minimal variation, fluctuating by only 2%, which falls within the instrumental error margin. The Se content, on the other hand, increased slightly with temperature, rising from 50% at 50°C to 56% at 400°C. This behavior suggests that the deficiency of Cu atoms led to an increase in Se concentration, as confirmed later by the XPS analysis, which indicated the presence of Se-Se bonds and SeO₂ formations. We believe these changes were responsible for the weak Raman signals at 150 cm⁻¹ and the Raman shift from 176 cm⁻¹ to 173 cm⁻¹, observed at higher deposition temperatures.

Besides the EDS analysis, we took scanning electron microscopy (SEM) images to examine the surface morphology of the films. The SEM images were captured at three different scales: 5 μm (magnification: 20Kx), 1 μm (magnification: 80Kx), and 500 nm (magnification: 150Kx) (Figure 3). The results indicated that the film deposited at 200°C exhibited distinct morphological characteristics compared to those deposited at other temperatures.

Films deposited at temperatures other than 200°C exhibited a smooth, compact, and uniform surface across the analyzed area, with no significant morphological variations. However, at 200°C, the surface morphology was noticeably different, characterized by a denser, rougher, and more granular texture. This suggested that 200°C was a critical threshold where CuInSe₂ thin films developed an optimal polycrystalline structure, affecting both their structural and optical properties.

XPS analysis

X-ray photoelectron spectroscopy (XPS) measurements were done to analyze the chemical composition, bonding states, and elemental depth distribution of the deposited CuInSe₂ thin films. The peak intensity in the XPS spectra indicated the relative surface concentration of elements, while the binding energy positions provided insights into their chemical states. Each element exhibited distinct electronic transitions when excited by X-rays.

Table 1. Elemental analysis of thin films as a function of temperature

Ts °C	Cu (at. %)	In (at. %)	Se (at. %)
50	21	29	50
100	19	27	54
200	21	26	53
400	16	28	56

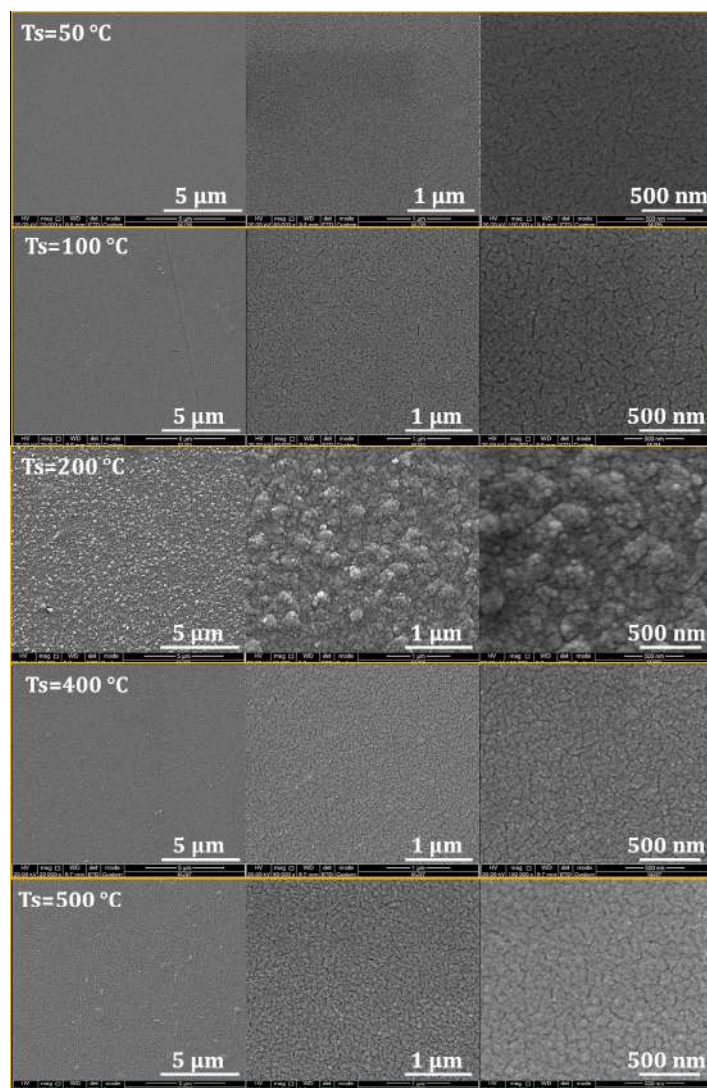


Figure 3. SEM-micrographs for the samples deposited at different substrate temperatures (50 °C, 100 °C, 200 °C, 400 °C, and 500 °C), and magnifications of 20,000X, 80,000X and 150,000X

Specifically, for Cu2p, the relevant transitions were Cu2p_{s/2} and Cu2p_{3/2}; for In3d, they were In3d_{s/2} and In3d_{3/2}, and for Se3d, the key transition was Se3d_{s/2} (Wanger, 1979). To evaluate the reliability of the atomic percentage results derived from XPS, we considered the main sources of instrumental and methodological uncertainty: (i) repeatability of the measurements ($\leq 1\%$ absolute); (ii) nominal accuracy from the RSF-based quantification method ($\pm 1\%$ absolute); (iii) error propagation through the relative sensitivity factor model ($\sim 2\%$), and (iv) signal variability induced by surface roughness and sputtering (estimated at $\sim 3\%$). The combined uncertainty was estimated by quadratic addition to be $\approx 4.1\%$, which we rounded to a conservative value of $\pm 5\%$. This value was represented in the form of error bars in the atomic composition plots by the XPS spectra of the analyzed films presented in Figure 4, divided into four sections:

- **Figure 4(a):** The Cu2p transitions Cu2p_{s/2} and Cu2p_{3/2}, associated with CuInSe₂, exhibited binding energies around 931.9 eV and 932.3 eV, respectively (Wanger, 1979; Sobol, 2021). The intensity variations of these peaks correlated with the Cu composition as a function of substrate temperature.

- **Figure 4(b):** The In3d transitions In3d_{5/2} and In3d_{3/2} corresponded to CuInSe₂, with peaks appearing at approximately 444.7 eV (Wanger, 1979). The chemical composition of In was analyzed as a function of the deposition temperature.
- **Figure 4(c):** The Se3d_{3/2} transition was observed at 54 eV, corresponding to CuInSe₂, along with a secondary Se-Se bond at 55.1 eV (Wanger, 1979).

The right-hand side of **Figure 4** illustrates the atomic percentage evolution with substrate temperature; we applied the $\pm 5\%$ relative uncertainties only in these plots, as they derived from semi-quantitative RSF-based compositional analysis. No uncertainty estimation was applied to the peak fitting as such, which is used for qualitative interpretation of chemical states.

The obtained XPS values for Cu, In, and Se were consistent with values previously reported in the literature. However, slight variations in binding energies suggest oxidation effects, leading to the formation of In₂O₃ (indium oxide), SeO₂ (selenium oxide), and CuO (copper oxide). These oxidation states depend on substrate temperature. The presence of SeO₂ was predominantly detected in films deposited at 50°C to 200°C, indicating that selenium oxidation occurred primarily at low deposition temperatures (Wanger *et al.*, 1979). As the temperature increased, SeO₂ presence diminished, suggesting that higher temperatures reduce oxidation effects. Conversely, CuO formation was notable at 200°C, coinciding with the temperature at which the highest Cu content was observed in the deposited films. Additionally, at 100 °C, some Cu(0) (zero-valence state) bonds were detected (Wanger *et al.*, 1979). However, at other temperatures, the presence of Cu(0) or CuO remained unclear. Consequently, these contributions were not considered in peak fitting using the Lorentzian-Gaussian model, though their presence cannot be completely ruled out.

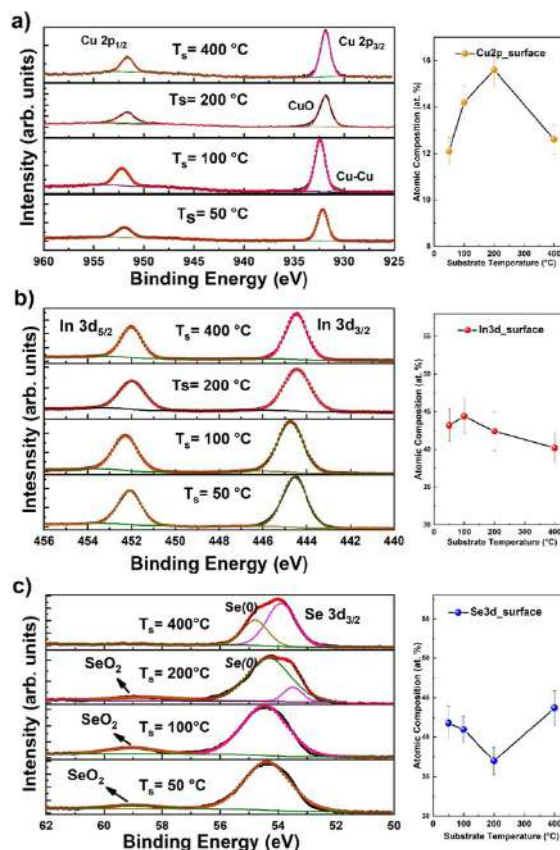


Figure 4. Fitted XPS Cu 2p, In 3d, and Se 3d spectra for the different films. On the right side, the concentration of Cu, In, and Se is observed as a function of the substrate temperature.

The comparison of EDS and XPS compositions revealed disparities in absolute atomic percentages because EDS probes the bulk whereas XPS is surface-sensitive. However, the trends remained consistent within the $\pm 5\%$ uncertainty window: Cu increased up to $\sim 16\%$ at 200°C , then decreased; In remained stable around 40% , and Se content increased from 41% at 50°C to 44% at 400°C .

To further investigate the elemental distribution within the film depth, depth profiling was performed using Ar^+ ion sputtering. The depth profile spectra in **Figure 5** show elemental composition trends from the film surface (left) to a maximum etching time of 40 seconds (right). Due to the short etching duration, the depth profile primarily captured near-surface elemental variations. A clear Cu deficiency trend was observed across different depths, reinforcing the hypothesis that Cu vacancies increase with deposition temperature, affecting the overall stoichiometry of the CuInSe_2 thin films.

UV-Vis analysis

The optical properties of the deposited CuInSe_2 films were assessed by measuring transmittance in the UV-visible and near-infrared ranges. The optical bandgap energy (E_g) was determined as a function of substrate temperature (**Figure 6**). The calculated E_g values were:

- 1.2 eV for $T_s = 50^\circ\text{C}$
- 1.15 eV for $T_s = 100^\circ\text{C}$
- 0.95 eV for $T_s = 200^\circ\text{C}$
- 0.94 eV for $T_s = 400^\circ\text{C}$

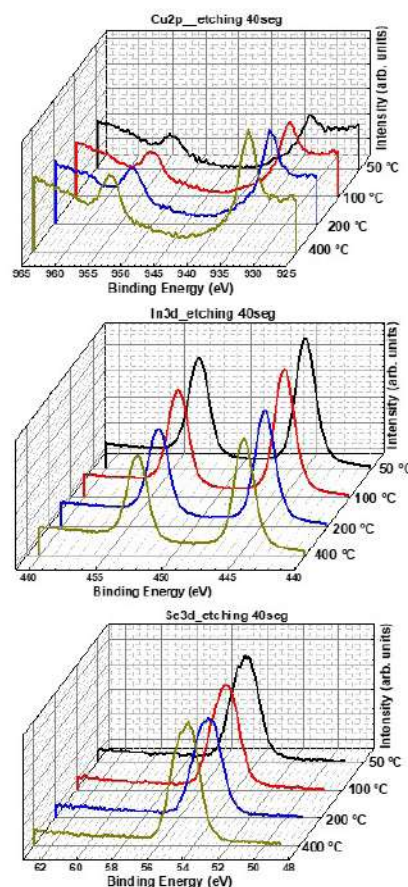


Figure 5. Cu 2p, In 3d, and Se 3d XPS spectra on the etched CIS thin films

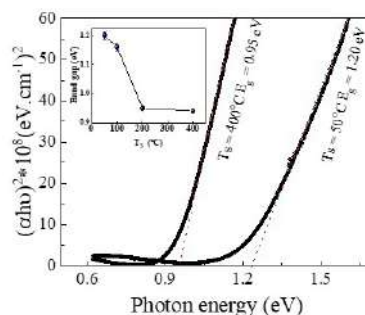


Figure 6. Tauc Plots of $(\alpha \cdot hv)^2$ vs hv for the co-sputtered samples at 50°C and 400°C. The inset shows the behavior of the bandgap as a function of the substrate temperature.

To assess the accuracy of the extracted E_g values, we conducted an uncertainty analysis. The main sources of error included the spectral resolution of the JASCO V-670 spectrometer (± 1 nm), the selection of the linear fitting region in the Tauc plot, and the reproducibility across repeated measurements. Considering these contributions, we estimated a conservative standard deviation of ± 0.03 eV for all E_g values that are displayed in the inset of the figure. Bandgap differences greater than 0.05 eV were considered significant within this error margin. The results indicated that E_g remained constant for deposition temperatures above 200°C, while a slight variation was observed at 50°C and 100°C. The difference at 50°C may be attributed to the amorphous nature of the film, as confirmed by XRD analysis, where a lack of crystallinity was observed.

Despite the presence of oxides and structural defects acknowledged throughout the study, the measured E_g values aligned with those reported in the literature for CuInSe₂ (Neumann, 1986). This suggested that the ternary compound was successfully deposited, even with the Cu deficiency (Zhang *et al.*, 1998). Previous reports indicated that E_g values between 1.2 eV and 1.3 eV are typical for Cu-deficient compounds such as CuIn₃Se₅ and CuIn₅Se₈ (Maeda *et al.*, 2016) and reported, besides, a phase mixture where the Cu-poor phase (ordered defect compound, ODC) forms on the film surface, while CuInSe₂ remains in the bulk (Fan *et al.*, 2011; Maeda *et al.*, 2016). This observation supports the elemental composition obtained in this study, reinforcing the conclusion that the deposited films corresponded to CuInSe₂ with an intrinsic Cu deficiency that led to the generation of Cu vacancies (VCu) on the surface. Recent first-principles simulations (Mahraj *et al.*, 2024) using DFT with the modified Becke–Johnson potential (mBJ) provide valuable insights into the electronic and optical structure of CuInSe₂ and related chalcopyrite compounds. Their calculations show that the upper valence band is dominated by Cu 3d orbitals, while the conduction band edge mainly consists of In 5s and Se 4p states. This electronic structure explains the strong direct transitions observed near the Γ point, resulting in high absorption coefficients ($\sim 10^5$ cm⁻¹) in the visible range—in good agreement with our experimental UV–Vis data. Moreover, their analysis highlights how structural distortions (e.g., anion displacement) and Cu-vacancy formation can reduce the bandgap by introducing localized band-tail states. This supports our interpretation that, despite the formation of Se-rich phases or Cu-deficient surface layers, the observed optical bandgap ($E_g \approx 0.94$ – 1.20 eV) remained consistent with theoretical bulk values, since the main transitions were governed by the defect-tolerant Cu-d–Se-p hybridized states.

We concluded that the substrate temperature directly influenced the Cu content in the films. Higher deposition temperatures led to an increase in Cu vacancies (V_{Cu}) on the material’s surface, as confirmed by the XPS analysis. However, despite the Cu deficiency, the optical bandgap (E_g) remained unaffected by the temperature variation. This finding suggests that the electronic structure of CuInSe₂ was preserved, even when Cu vacancies were present, reinforcing its stability and applicability in photovoltaic and optoelectronic devices.

Finally, the experimental results obtained in this study provide valuable insights into the effect of substrate temperature on the structural, morphological, optical, and compositional properties of CuInSe₂ thin films. It has been demonstrated that the substrate temperature plays a crucial role in controlling crystallinity, elemental distribution, and defect formation, ultimately influencing the film's behavior in photovoltaic and optoelectronic applications. A key observation from the XRD and Raman analyses is the transition from an amorphous structure at low temperatures (50°C and 100°C) to a well-defined polycrystalline phase at 200°C and above. This transition was accompanied by an increase in crystallite size, indicating improved structural order. However, films deposited at 400°C exhibited an increase in Cu vacancies, as evidenced by XPS and EDS measurements, leading to a slight shift in Raman vibrational modes and the formation of minor defect states. Substrate temperature had a strong impact on the structure, morphology, roughness, and optical properties of CuInSe₂ films. Some studies report that films deposited at 200°C exhibit optimal phase formation, surface morphology, and roughness, leading to superior electrical and optical performance (Yan *et al.*, 2011).

The UV-Vis analysis confirmed that the optical bandgap (E_g) remained stable for films deposited at temperatures above 200°C, with a slight deviation at lower temperatures due to amorphous content and structural disorder. Notably, despite the presence of Cu vacancies, the bandgap remained within the expected range for CuInSe₂, reinforcing its stability as a semiconductor material. Surface morphology, as observed in SEM images, revealed that films deposited at 200°C exhibited a dense, compact, and uniform grain structure, distinguishing them from those deposited at other temperatures. Films deposited at higher temperatures showed increased surface roughness, likely due to enhanced atomic mobility and Cu depletion, which may introduce additional defect states impacting electrical properties. These findings emphasize the importance of achieving high-quality CuInSe₂ film formation at relatively low deposition temperatures. The optimal substrate temperature of 200°C ensured a well-defined polycrystalline structure, minimal defect formation, and an ideal balance of composition and morphology. This makes CuInSe₂ an excellent candidate for photovoltaic absorbers in thin-film solar cells in tandem configurations, as well as for applications in optoelectronic devices where precise control over structural and electronic properties is required.

To conclude, our study contributes to the ongoing efforts to optimize CuInSe₂ deposition processes, providing a deeper understanding of how substrate temperature influences film formation. Future research should explore electrical transport properties, defect engineering strategies, and potential passivation techniques to further enhance the material's efficiency and stability in energy conversion technologies.

A possible limitation of the study is the surface sensitivity of XPS (~5–10 nm), which may over-emphasize Cu-vacancy formation and oxide species confined to the outermost layers while under-representing bulk composition. Complementary depth-profiling or hard-XPS measurements would help disentangle true bulk stoichiometry from surface artifacts. In addition, alkali-metal passivation, particularly in-situ or post-deposition Na incorporation, is known to decrease grain-boundary recombination and stabilize Cu-poor surfaces in chalcopyrite. Future experiments combining controlled Na doping, soft anneals, and in-depth chemical profiling will be essential to optimize both the electronic quality and long-term stability of RF-sputtered CuInSe₂ absorber layers.

Conclusions

Systematic variation of the substrate temperature during RF magnetron sputtering from a single-phase CuInSe₂ target revealed a critical threshold around 200°C: only above this point did the adatom mobility become high enough to promote long-range diffusion, grain coalescence, and the emergence of a well-defined chalcopyrite lattice. Films grown at $\geq 200^\circ\text{C}$ showed polycrystalline domains (10–12 nm), minimal micro-stress, and a dense surface free of inter-granular voids, making them promising absorber layers for photovoltaic or other optoelectronic devices.

At higher temperatures, however, differential atomic mobility and surface re-sputtering favored the preferential loss of Cu species, increasing the concentration of Cu vacancies (V_{Cu}) at the film surface, as confirmed by the progressive Cu depletion detected by XPS. Despite this surface Cu deficiency, the optical band-gap ($E_g \approx 0.94 - 1.20$ eV) remained essentially unchanged within the ± 0.03 eV experimental uncertainty, suggesting that V_{Cu} states induce only shallow band-tailing rather than a shift in the fundamental gap.

Raman spectroscopy supports this interpretation: the dominant A1 mode of CuInSe₂ was present at all temperatures, whereas the weak 150 cm⁻¹ signal associated with ordered-vacancy compounds became slightly more pronounced at $\geq 200^\circ\text{C}$, in agreement with an increased V_{Cu} population. Overall, the data indicated that atomic-scale transport processes at elevated substrate temperatures simultaneously enhanced crystallinity and promoted Cu-vacancy formation, defining an optimal growth window near 200°C that balanced structural quality with compositional integrity.

Acknowledgements

The authors would like to thank Dr. S. Velázquez for XPS measurements and A. Tavira-Fuentes, G. Casados-Cruz, M. Galván, and G. López Fabián of SEES-CINVESTAV-IPN for the different characterizations of the films. A. Pulzara expresses gratitude to the FCEN for granting the sabbatical year.

Author contributions

J.I.M-M: Methodology, validation, formal analysis, investigation, data curation, writing of original draft, review & editing, visualization, and conceptualization; R.B-C: Methodology, validation, visualization in structure presented in previous formal analysis, writing of original draft; A. M-A: Methodology, validation, formal analysis, investigation, conceptualization, writing of original draft, review and editing, supervision; A. P-M: Conceptualization, methodology, validation, formal analysis, resources, writing of original draft, writing review and editing, project administration, funding acquisition.

Conflicts of interest

The authors declare that they have no competing financial interests or personal relationships that could have influenced the work reported in this paper.

References

- Chandran R. & Mallik A.** (2018). Electrodeposition of near stoichiometric CuInSe₂ thin films for photovoltaic applications. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*, 338, 012018. <https://doi.org/10.1088/1757-899X/338/1/012018>
- Chauhan S.M., Chaki S.H., Deshpande M.P., Malek T.J., Tailor J.P.** (2018). Thermal Decomposition Study on CuInSe₂ Single Crystals. *International Journal of Thermophysics*, 39, 18. <https://doi.org/10.1007/s10765-017-2341-4>
- Cheng K.W., Jhang H.J., Li C.T., Ho K.C.** (2017). Solution-growth-synthesized Cu (In,Ga) Se₂ nanoparticles in ethanol bath for the applications of dye-sensitized solar cell and photoelectrochemical reaction. *Journal of the Taiwan Institute of Chemical Engineers*, 74, 136-145. <https://doi.org/10.1016/J.JTICE.2017.02.010>
- Cheng Y.S., Wang N.F., Tsai Y.Z., Lin J.J., Houg M.P.** (2017). Investigation of CuInSe₂ nanowire arrays with core-shell structure electrodeposited at various duty cycles into anodic alumina templates. *Applied Surface Science*, 396, 631-636. <https://doi.org/10.1016/J.APSUSC.2016.10.207>
- Fan P., Liang G.X., Cai X.M., Zheng Z.H., Zhang D.P.** (2011). The influence of annealing temperature on the structural, electrical and optical properties of ion beams sputtered CuInSe₂ thin films. *Thin Solid Films*, 519, 5348-5352. <https://doi.org/10.1016/J.TSF.2011.02.036>
- Green M.A., Dunlop E.D., Yoshita M., Kopidakis N., Bothe K., Siefer G., Hao X., Jiang J. Y.** (2024). Solar cell efficiency tables (Version 60). *Progress in Photovoltaics: Research and Applications*, 33, 3-15. <https://doi.org/10.1002/pip.3867>

- Hodes G. & Cahen D. (1986). Electrodeposition of CuInSe₂ and CuInS₂ films. *Solar Cells*, 16, 245-254. [https://doi.org/10.1016/0379-6787\(86\)90088-8](https://doi.org/10.1016/0379-6787(86)90088-8)
- Ishizuka S., Nishinaga J., Beppu K., Maeda T., Aoyagi F., Wada T., Yamada A., Chantana J., Nishimura T., Minemoto T., Monirul Islam M., Sakurai T., Terada. (2022). Physical and chemical aspects at the interface and in the bulk of CuInSe₂-based thin-film photovoltaics. *Journal Physical Chemistry Chemical Physics*, 24, 1262. <https://doi.org/10.1039/D1CP04495H>
- Jošt M., Köhnen E., Al-Ashouri A., Bertram T., Tomšič Š., Magomedov A., Kasparavicius E., Kodalle T., Lipovšek B., Getautis V., Schlattmann R., Kaufmann C.A., Albrecht S., Topič M. (2022). Perovskite/CIGS Tandem Solar Cells: From Certified 24.2% toward 30% and beyond. *ACS Energy Letters*, 7, 1298-1307. <https://doi.org/10.1021/acsenergylett.2c00274>
- Kim S.T., Yoo J.S., Lee M.W., Jung J.W., Jang J.H. (2022). CuInSe₂-Based Near-Infrared Photodetector. *Applied Science*, 12, 92. <https://doi.org/10.3390/APP12010092>
- Li L., Chen Y., Lv Z., Yin N.Q., Li S., Wang K., Li P. (2022). In situ one-step synthesis of CuInS₂ thin films with different morphologies and their optical properties. *Journal of Materials Science: Materials in Electronics*, 33, 2995-3001. <https://doi.org/10.1007/S10854-021-07499-6>
- Li L., Li M., Li P. (2021). Cu (In,Ga)S₂ nanowire arrays: Self-templated synthesis and application for photoelectrochemical water splitting. *Materials Characterization*, 172, 110900. <https://doi.org/10.1016/J.MATCHAR.2021.110900>
- Mahraj I. & Ptok A. (2024). First-principles investigations of structural, electronic and optical properties of ternary chalcopyrite semiconductors CuInY₂. (Y = S, Se and Te). *Computational Condensed Matter*, 40. E 00935. <https://doi.org/10.1016/j.cocom.2024.e00935>
- Malitckaya M., Komsa H., Havu V., Puska M. J. (2017). Effect of Alkali Metal Atom Doping on the CuInSe₂-Based Solar Cell Absorber. *The Journal of Physical Chemistry C*, 121, 29, 15516-15528. <https://doi.org/10.1021/acs.jpcc.7b03083>
- Maeda T., Gong W., Wada T. (2016). Crystallographic and optical properties and band structures of CuInSe₂, CuIn₃Se₅, and CuIn₃Se₈ phases in Cu-poor Cu₂Se-In₂Se₃ pseudo-binary system. *Japanese Journal of Applied Physics*, 55, 04ES15. <https://doi.org/10.7567/JJAP.55.04ES15>
- Migliorato P., Shay J.L., Kasper H.M. (1975). Electrical properties and luminescence of CuInSe₂. *Journal of Electronic Materials*, 4, 209-222. <https://doi.org/10.1007/BF02655402>
- Muzzillo C.P., Li J.V., Mansfield L.M., Ramanathan K., Anderson T.J. (2018). Surface and bulk effects of K in highly efficient Cu_{1-x}K_xInSe₂ solar cells. *Solar Energy Materials and Solar Cells*, 185 45-53. <https://doi.org/10.1016/J.SOLMAT.2018.05.013>
- Nanayakkara S.U., Horowitz K., Kaneve A., Woodhouse M., Basore P. (2017). Evaluating the economic viability of CdTe/CIS and CIGS/CIS tandem photovoltaic modules. *Progress in Photovoltaics*, 25, 271-279. <https://doi.org/10.1002/PIP.2849>
- Neumann H. (1986). Optical properties and electronic band structure of CuInSe₂. *Solar Cells*, 16, 317-333. [https://doi.org/10.1016/0379-6787\(86\)90092-X](https://doi.org/10.1016/0379-6787(86)90092-X)
- Paulson P.D., Birkmire R.W., Shafarman W.N. (2003). Optical characterization of CuIn_{1-x}Ga_xSe₂ alloy thin films by spectroscopic ellipsometry. *Journal of Applied Physics*, 94, 879-888. <https://doi.org/10.1063/1.1581345>
- Sadono A., Hino M., Nakada K., Yamada A. (2018). Effect of an additional Cu-deficient layer deposition on alkali treated Cu(In,Ga)Se₂ solar cells deposited at low temperature. *Solar Energy Materials and Solar Cells*, 184, 67-72. <https://doi.org/10.1016/J.SOLMAT.2018.04.030>
- Sharma S., Khan K., Soni M., Ahuja U., Soni A., Sahariya J. (2023). Investigation of electronic and optical properties of alkali atom doped CuInSe₂ using density functional theory. *Physica Scripta*, 98 085927. <https://doi.org/10.1088/1402-4896/ace489>
- Sobol P.E., Nelson A.J., Schwerdtfeger C.R., Stickle W.F., Moulder J.F. (2021). Single Crystal CuInSe₂ Analysis by High Resolution XPS. *Surface Science Spectra*, 1 393-397. <https://doi.org/10.1116/1.1247638>
- Solhtalab N., Mohammadi M.H., Eskandari M., Fathi D. (2022). Efficiency i m p r o v e m e n t of half-tandem CIGS/perovskite solar cell by designing nano-prism nanostructure as the controllable light trapping. *Energy Reports*, 8, 1298-1308. <https://doi.org/10.1016/J.EGYR.2021.12.038>
- Stanbery B.J., Abou-Ras D., Yamada A., Mansfield L. (2021). CIGS photovoltaics: reviewing an evolving paradigm. *Journal of Physics D: Applied Physics*, 55, 173001. <https://doi.org/10.1088/1361-6463/AC4363>
- Thomere A., Barreau N., Stephant N., Guillot-Deudon C., E. Gautron, Caldes M.T., Lafond A. (2022). Formation of Cu(In,Ga)S₂ chalcopyrite thin films following a 3-stage co-evaporation process. *Solar Energy Materials and Solar Cells*, 237, 111563. <https://doi.org/10.1016/J.SOLMAT.2021.111563>

- Torres-Jaramillo S., Morales-Acevedo A., Bernal-Correa R., Pulzara-Mora A.** (2018). Optimizing two and four-terminal CuGaSe₂/CuInGaSe₂ tandem solar cells for achieving high efficiencies. *Optik*, 175, 71-77. <https://doi.org/10.1016/j.ijleo.2018.08.124>
- Wang C., Zhuang D., Zhao M., Li Y., Tong H., Wang H., Wei J., Gong Q.** (2022). High-performance sub-micron CIGSSe solar cells optimized for sodium doping by adjusting diffusion barriers. *Chemical Engineering Journal*, 439, 135713. <https://doi.org/10.1016/j.cej.2022.135713>
- Wanger C. D., Riggs W. M., Davis L. E., Moulder J. F., Muilenberg G. E.** (1979). Handbook of X-ray Photoelectron Spectroscopy, Perkin-Elmer Corp., Physical Electronics Division, Eden Prairie. <https://doi.org/10.1002/SIA.740030412>
- Wi J.H., Han W.S., Lee W.J., Cho D.H., Yu H.J., Kim C.W., Jeong C., Yun J.H., Kim C.I., Chung Y.D.** (2018). Spectral Response of CuGaSe₂/Cu(In,Ga)Se₂ Monolithic Tandem Solar Cell with Open-Circuit Voltage over 1 V. *IEEE Journal of Photovoltaics*, 8, 840-848. <https://doi.org/10.1109/JPHOTOV.2018.2799168>
- Xu C.M., Xu X.L., Xu J., Yang X.J., Zuo J., Kong N., Huang W.H., Liu H.T.** (2004). Composition dependence of the Raman A1 mode and additional mode in tetragonal Cu-In-Se thin films. *Semiconductor Science and Technology*, 19 1201. <https://doi.org/10.1088/0268-1242/19/10/006>
- Yan Z., Ji X, Li M., Mi Y.** (2011). Effect of substrate temperature on properties of CuInSe₂ thin films deposited by magnetron sputtering. *Advanced Materials Research*, 287-290, 2131-2135. <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/AMR.287-290.2131>
- Zhang S.B., Wei S., Zunger A.** (1998). Defect physics of the CuInSe₂ chalcopyrite semiconductor. *Physical Review B*, 57, 9642-9656. <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.57.9642>

Highlights

- CuInSe₂ single target and unique step deposition to obtain CuInSe₂
- Structure, morphology, optical, and surface analysis have been made to understand the film's nature.
- The XPS and Raman measurements revealed clearly the effect Cu deficient composition has on a surface independent of substrate temperature and the nature of the thin films.
- In the process to deposit a thin film, the temperature below 200°C generated amorphous material with Cu-deficient content.
- Despite the lack of Cu atoms in the films deposited in this study, it has been shown that E_g does not seem to depend on a deposition temperature above 200°C.

Original article

Expansion of the distribution range and ecological niche modeling of *Philodendron asplundii* (Araceae) in South America

Expansión del rango de distribución y modelamiento del nicho ecológico de *Philodendron asplundii* (Araceae) en América del Sur

✉ Ana Laura da Silva-Luz^{1,*}, ✉ Mateus Felipe dos Anjos-Souza²,
✉ Felipe Fajardo Villela Antolin-Barberena^{1,2}

¹ Programa de Pós-Graduação em Ciências Biológicas - Botânica Tropical, Instituto de Ciências Agrárias, Universidade Federal Rural da Amazônia, Belém, Pará, Brasil/ Coordenação de Botânica, Museu Paraense Emílio Goeldi, Belém, Pará, Brasil

² Núcleo de Pesquisas em Epífitas (Nupéfita), Universidade Federal Rural da Amazônia, Capitão Poço, Pará, Brasil

Abstract

Philodendron (Araceae) is one of the richest ornamental genera in the Neotropics, comprising over 600 species. Here, we report the expansion of the eastern distribution of *Philodendron asplundii* with a new record from the Brazilian state of Pará. We present a detailed morphological description and images of *P. asplundii*, an updated distribution map, and the results of the ecological niche modeling of the species based on bioclimatic data and the Maxent, Bioclim, Random Forest and Support Vector Machine algorithms (Ensemble Model). *Philodendron asplundii* occurs in Brazil, Colombia, Ecuador, French Guiana, Perú, and Venezuela. The ecological niche model indicated that *P. asplundii* has a higher probability of distribution in the northern region of South America, mainly in the central and northwestern part of the Amazon. The model also suggested high habitat suitability in Ecuador's areas of Andean forests, and in Northern Guyana. These suitable areas for the occurrence of *P. asplundii* are located in regions with high risk of forest cover loss due to anthropogenic activities. Thus, conservation plans are necessary to avoid the loss of appropriate habitats for the species.

Keywords: Aroids; eastern Amazon; ecological niche; nomadic climber; species distribution modeling; tropical forests.

Resumen

Con más de 600 especies, *Philodendron* (Araceae) es uno de los géneros ornamentales más ricos del Neotrópico. Reportamos la expansión de la distribución oriental de *Philodendron asplundii* con un nuevo registro en el estado brasileño de Pará. Presentamos una descripción morfológica detallada e imágenes de *P. asplundii*, un mapa de distribución actualizado y los resultados del modelado del nicho ecológico de la especie basado en datos bioclimáticos y en los algoritmos Maxent, Bioclim, Random Forest y Support Vector Machine (Ensemble Model). *Philodendron asplundii* está presente en Brasil, Colombia, Ecuador, Guayana Francesa, Perú y Venezuela. El modelo de nicho ecológico indicó que *P. asplundii* tiene una mayor probabilidad de distribución en la región norte de Sudamérica, principalmente en la parte central y noroccidental de la Amazonía. Sugirió, asimismo, una gran idoneidad de hábitat en áreas de bosques andinos en Ecuador, y en el norte de Guyana. Las áreas señaladas como adecuadas para *P. asplundii* se ubican en regiones con alto riesgo de pérdida de cobertura forestal debido a actividades antropogénicas. Por ello se requieren planes de conservación que eviten la pérdida de hábitats apropiados para la especie.

Palabras clave: aroides; Amazonía Oriental; nicho ecológico; trepadora nómada; modelado de distribución de especies; bosques tropicales

Citation: da Silva-Luz AL, *et al.*
Expansion of the distribution range
and ecological niche modeling of
Philodendron asplundii (Araceae) in
South America. Revista de la Academia
Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas
y Naturales. 49(192):546-555, julio-
septiembre de 2025. doi: <https://doi.org/10.18257/raccefyn.3095>

Editor: Carolina Romero

***Corresponding autor:**
Ana Laura da Silva-Luz;
ana_lauraluz@hotmail.com

Received: October 28, 2024

Accepted: July 14, 2025

Published on line: August 19, 2025



Este artículo está bajo una licencia de
Creative Commons Reconocimiento-
NoComercial-Compartir Igual 4.0
Internacional

Introduction

The Araceae is the third largest family of monocotyledons in the world, with more than 3,600 species distributed in 143 genera (POWO, 2024). It has a cosmopolitan distribution, with wide occurrence in humid tropical forests, especially in South America and Central America, where about two-thirds of the species show high rates of endemism (e.g., 50% in Costa Rica and 95% in Panamá) (Croat, 2019; Croat & Oriz, 2020; POWO, 2024). The morphological diversity of the family is attributed to the different sizes of the individuals and leaves, the varied life forms (floating aquatic, terrestrial, arborescent herbs, epiphytes, and nomadic climbers) and the numerous strategies of pollination and fruit dispersal (Croat & Oriz, 2020; Haigh *et al.*, 2020).

Among the Neotropical genera of Araceae, *Philodendron* Schott is one of the most remarkable, with 621 species, standing out for the abundance of individuals in the sites where they occur (Canal *et al.*, 2018; Croat & Oriz, 2020; POWO, 2024; Sakuragui *et al.*, 2024). Plants of the genus are widely used for ornamental purposes due to the morphological characteristics of the leaves (conspicuous size and shape), ease of cultivation, and tolerance to indoor environments (Klanrit *et al.*, 2023). Although abundant and economically important, it is estimated that at least half of the *Philodendron* species are yet to be discovered due to collection gaps in regions of South America (Croat & Oriz, 2020).

During vascular epiphytes inventories in the Eastern Amazon, we found an individual of *Philodendron asplundii* Croat & M. L. Soares in the Brazilian municipality of Capitão Poço, in the northeastern region of the state of Pará. This species occurs in a wide range of elevations and vegetation types in tropical moist forests and premontane wet forests in South America (Croat & Shah, 2001). It differs from other *Philodendron* species by its network of fibrous cataphylls and leaf blades with prominent primary veins (Croat & Shah, 2001; Croat *et al.*, 2019). We report here the first record of *P. asplundii* from Pará, expanding its distribution in Brazil, particularly to Eastern Amazon. We also assessed the potential distribution of the species using models to identify the environmental factors determining the spatial distribution of *P. asplundii* in South America.

Materials and methods

Part of the *P. asplundii* individual found in Capitão Poço was collected in September 2023, and the remaining part in April 2024. For species identification, we performed the morphological analyses of fresh and dry materials using a stereoscopic microscope, and we consulted the species' protolog (Croat & Shah, 2001), the identification key of *Philodendron* from Brazil (Sakuragui *et al.*, 2024), and an expert in the Araceae family (see Acknowledgments). The collected materials were herbarized according to Fidalgo and Bononi (1989) and deposited in the MG herbarium (acronym according to Thiers, 2024). We present a morphological description of *P. asplundii* based on the material collected in Pará and photographs of the specimen, highlighting the diagnostic morphological characteristics of the species (Figure 1).

We collected the information on the occurrence of the species from Gbif (<https://www.gbif.org/>), Jabot (<http://jabot.jbrj.gov.br/>), Refflora (<https://refflora.jbrj.gov.br/refflora/>), and Specieslink (<https://specieslink.net/search/>) databases to generate a distribution map and model the potential distribution of *P. asplundii*. We removed duplicate data, data with no available coordinates, and data with imprecise coordinates, such as those of institutions or municipality centroids, as they could bias the model (Zizka *et al.*, 2019). With the aid of the R packages spThin and CoordinateCleaner, we identified 214 records of *P. asplundii* with valid coordinates out of the 1,260 records found in the abovementioned databases (Aiello-Lammens *et al.*, 2019; Zizka *et al.*, 2019).

We used a set of 19 bioclimatic variables related to temperature and precipitation with a resolution of 10 arc-minutes (Bio1 to Bio19) and elevation information from the World Clim platform (<https://www.worldclim.org/>) for *P. asplundii* ecological niche modeling, establishing South America as a cutout.

To avoid multicollinearity and select the most appropriate predictors, we performed a variance inflation factor (VIF) test to select uncorrelated variables ($VIF < 10$) and avoid instability in model performance (Naimi & Araújo, 2016). This procedure resulted in the selection of seven bioclimatic variables: Bio2 (mean diurnal range), Bio3 (isothermality), Bio4 (temperature seasonality), Bio9 (mean temperature of driest quarter), Bio15 (precipitation seasonality), Bio18 (precipitation of warmest quarter), and Bio19 (precipitation of coldest quarter). Given that genus *Philodendron* species tend to be influenced by elevation, we also included the variable elevation in the models (Canal et al., 2019). We used the Maximum Entropy (MAXENT) (Phillips et al., 2006), Bioclim (Busby, 1991), Random Forest (Prasad et al., 2006), and Support Vector Machine (Guo et al., 2009) algorithms to test the distribution models. To evaluate the performance of the models, we used the area under the curve (AUC) and true skill statistic (TSS) parameters (Allouche et al., 2006; Phillips et al., 2006; Mateo et al., 2011). We calibrated 70% of the training points and 30% of the testing points. From these algorithms, we created an ensemble model by combining the results of individual algorithm models (with a weighted average method to reduce the prediction error and the uncertainty of model selection) (Dormann et al., 2018).

All modeling processes were implemented in R 4.3.0 (R CORE TEAM, 2024) using the “ggspatial”, “sdm”, “raster”, “terra”, and “tidyverse” packages (Naimi & Araújo, 2016; Dunnington et al., 2023; Hijmans et al., 2023; Wickham, 2023; Hijmans et al., 2024). The occurrence and modeling maps were processed in the QGIS software, version 3.22.5.

Results

Taxonomy

Philodendron asplundii Croat & M. L. Soares. Novon 11: 381, 2001.

Figure 1.

TYPE: ECUADOR, Napo: vicinity of Baeza, 2,500 m, 19-XII-1979, T.B. Croat 49444 (holotype: MO-2737423-24, digital image!; isotypes: COL, F2308832, INPA272128, K501952, M198999, NY191178, digital image!, QCA, QCNE, US3648011, barcode 01105803, digital image!).

Nomadic climber herb; root ca. 11–15 × 0.2–0.3 cm, reddish when young. Cataphylls 10.4–28.4 cm long, reddish-green when young, brown when mature, forming a persistent network of fibers; stem with internodes 3–10 cm long, internodes generally shorter on shoots with inflorescence; profiles 9.5–11.2 × 0.5–3.3 cm, persistent, reddish when young and brown when senescent, triangular, apex rounded; leaf petiole 36–47 cm long; leaf blade 56–65 × 26–30 cm, when fresh dark green on the adaxial surface and light green on the abaxial surface, lanceolate to oblong, base slightly cordate, apex acuminate, primary veins light green and prominent, lateral, extending to the leaf margin, secondary veins prominent and tertiary veins weakly visible; inflorescence 1 per leaf, axillary and concentrated on the apical leaves; peduncle 5.3–11.3 cm long; spathe 12.5–14.5 × 3.5 cm, light green, with discrete cream-colored veins at the base, constricted, enveloping the spadix; spadix 11.9–14 cm long, cream in pre-anthesis and brown in anthesis; sterile male zone ca. 2.6 × 1.3 cm, cream; fertile male zone ca. 3.2 × 1.7 cm, cream; female zone ca. 3.5 × 2.5 cm, greenish-cream; apical staminode 2–3 mm long, intermediate staminode 3–4 mm long, gynoeceum 0.5–1.2 × 0.3–1.1 mm, yellowish, ovoid; ovary yellowish, 4–7 locules, placentation axillary; infructescences with yellowish, polyspermous berries.

New record. Examined material: BRAZIL, Pará, Capitão Poço, Caranandeuá, 50 m, 1°40'14.3"S, 47°02'48.4"W, riparian forests in Açu stream, 05-III-2024, fl, fr, A. L. S. Luz & M. F. S. Souza 118 (MG).

Philodendron asplundii was found in riparian forests on the banks of the Açu stream, 50 m.a.s.l., in the village of Caranandeuá, approximately 11 km from the municipal headquarters of Capitão Poço, Pará. Only one isolated and large individual of *P. asplundii* was observed, occurring as a nomadic climber, approximately 2.5–3 m above the ground,

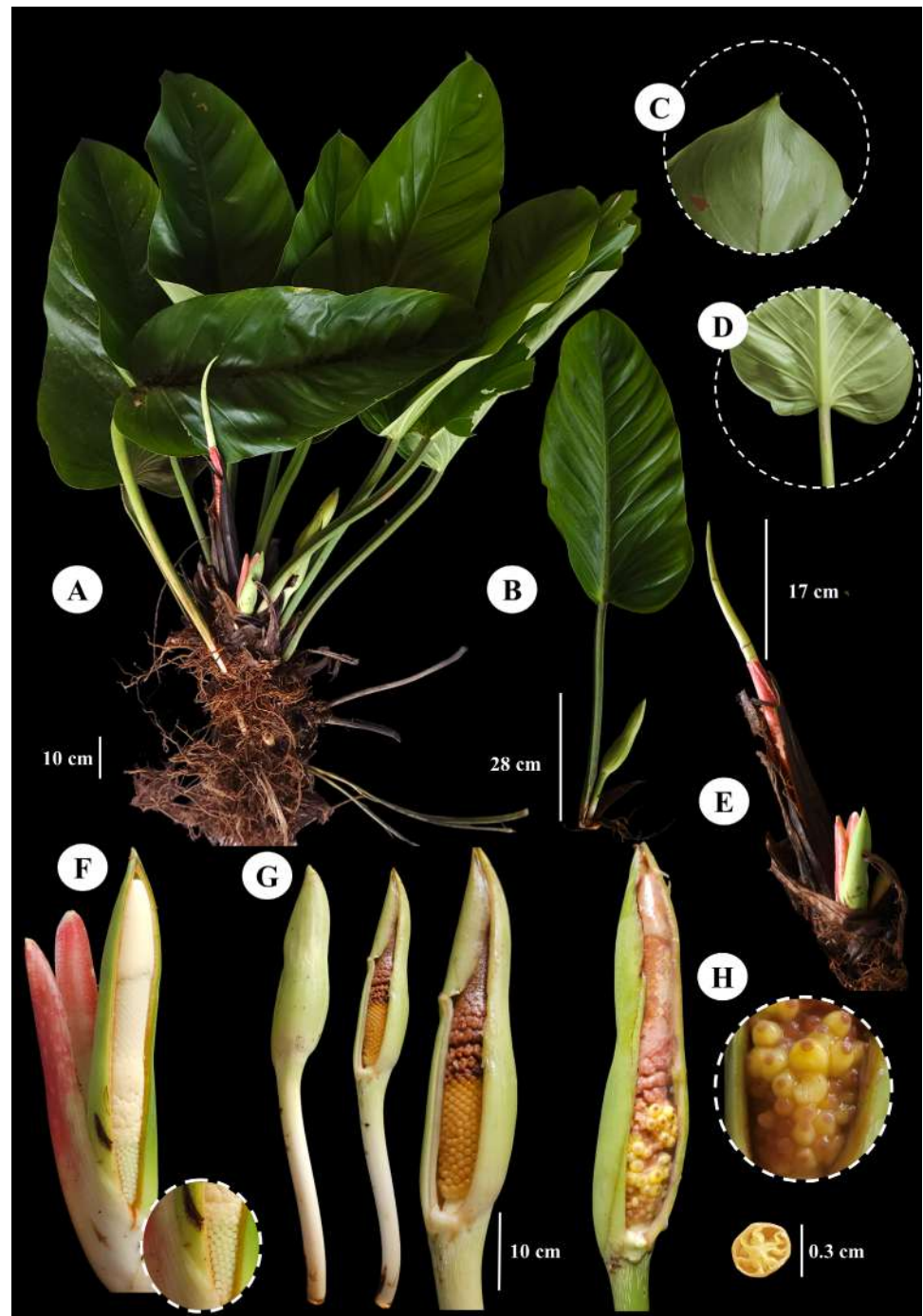


Figure 1. *Philodendron asplundii* Croat & M.L.Soares in the state of Pará, Eastern Amazon, Brazil. **A.** Habit. **B.** Leaf with floral sympodium. **C.** Abaxial surface of the leaf blade, highlighting the apex. **D.** Abaxial surface of the leaf blade, highlighting the base. **E.** Young leaf. **F.** Inflorescence in pre-anthesis. **G.** Inflorescence in anthesis. **H.** Infructescence with details of the berries and cross-section of the fruit showing the locules. Photographs by Ana Laura da Silva Luz

in a humid site exposed to the sun on the bank of the watercourse. The local vegetation consists of floodplain forest with dense stands of buriti palm (*Mauritia flexuosa* L. f. – Arecaceae) and agropastoral crops in the surrounding areas.

Ecological niche modeling

Philodendron asplundii occurs in Brazil, Colombia, Ecuador, French Guiana, Perú, and Venezuela (Figure 2). In Brazil, the species had only been recorded before in the states of Amazonas and Amapá. With the present record, the eastern distribution of the species was expanded, with an occurrence record now also in the state of Pará (Figure 2).

For *P. asplundii* niche modeling, the Maxent and Random Forest algorithms had the best performances, with AUC and TSS > 0.9 (Table 1), that is, the distribution patterns generated by the model agreed with most of the observed data. The Bioclim algorithm had the lowest performance. In general, the bioclimatic variables related to temperature and precipitation had a greater contribution than elevation in the models with different algorithms. The predictors with the greatest contribution to the models were the variables Bio15 (seasonality of precipitation) and Bio3 (isothermality), responsible for the variation in the amount of precipitation and in temperatures throughout the year,

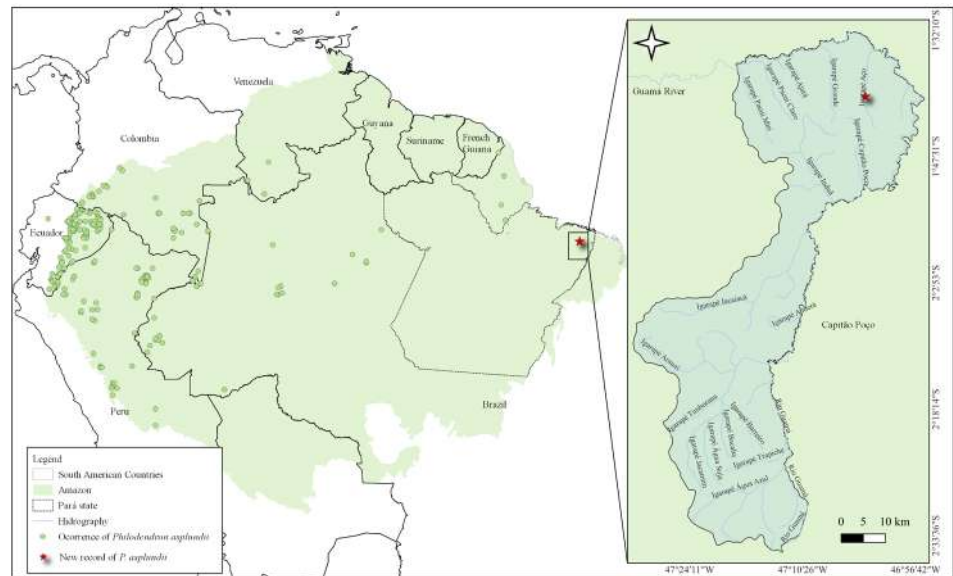


Figure 2. Location map of the new record of *Philodendron asplundii* Croat & M.L.Soares in the municipality of Capitão Poço, state of Pará, Eastern Amazon, Brazil. Map prepared by Ana Laura da Silva Luz.

Table 1. Performance metrics and percentage contribution of bioclimatic variables (based on AUC metrics) in the ecological niche modeling of *Philodendron asplundii* Croat & M.L.Soares

Algorithm	AUC	TSS	Variable contribution (%)							
			Bio2	Bio3	Bio4	Bio9	Bio15	Bio18	Bio19	Elevation
BIO	0.78	0.56	0.3	2.9	34.9	6.8	35.4	0.9	1.1	6.8
MAX	0.95	0.79	30.3	45.1	36.1	20.1	41	15.1	0.2	15.4
RF	0.94	0.76	0.7	2.1	2.2	1.3	5.1	1.2	1.1	1.3
SVM	0.91	0.71	11.9	38.2	6.2	17.6	96.7	16.2	42	15

AUC: area under the curve, TSS: true skill statistic, BIO: Bioclim, MAX: Maxent, RF: Random Forest, SVM: Support Vector Machine. Bioclimatic variables: mean diurnal range (Bio2), isothermality (Bio3), temperature seasonality (Bio4), mean temperature of driest quarter (Bio9), precipitation seasonality (Bio15), precipitation of warmest quarter (Bio18), and precipitation of coldest quarter (Bio19)

respectively. The relative importance of the variables followed this order: Bio15>Bio3>Bio4>Bio9>Bio19>Bio2>Elevation>Bio18. Among the variables with the greatest contribution to the model, isothermality (Bio3) varied between 80% and 90%, indicating that suitable habitats for the species present large thermal variation throughout the year (response curves in Supplementary material, **Figure 1S**, <https://www.raccefyn.co/index.php/raccefyn/article/view/3095/4574>). Lower seasonality in precipitation (Bio15) and temperature (Bio4) also contributed to the occurrence of the species. The precipitation ranges of the warmest and coldest quarters varied from 400 to 600 mm and 600 to 800 mm, respectively, while the elevation of 0-1,500 m proved to be suitable for the occurrence of *P. asplundii*.

In general, *P. asplundii* ecological niche model was consistent with the known distribution of the species (**Figure 3**). The distribution map generated based on the averages of the models (ensemble) showed that *P. asplundii* has a higher probability of distribution in the northern region of South America, with the central and northwestern part of the Amazon being the areas with the highest probability of occurrence of the species. The model also suggested a high habitat suitability in Ecuador, coinciding with areas of Andean forests.

Northern Guyana and the Colombian Western Andes were also suitable areas for the occurrence of the species, but there are no records of *P. asplundii* in these regions until now. Among the known areas of occurrence of the species in Brazil, the model predicted a low probability of occurrence in the state of Amapá. In the state of Pará, only a small region presented suitable habitats for the establishment of the species, which converges with the area of the new occurrence.

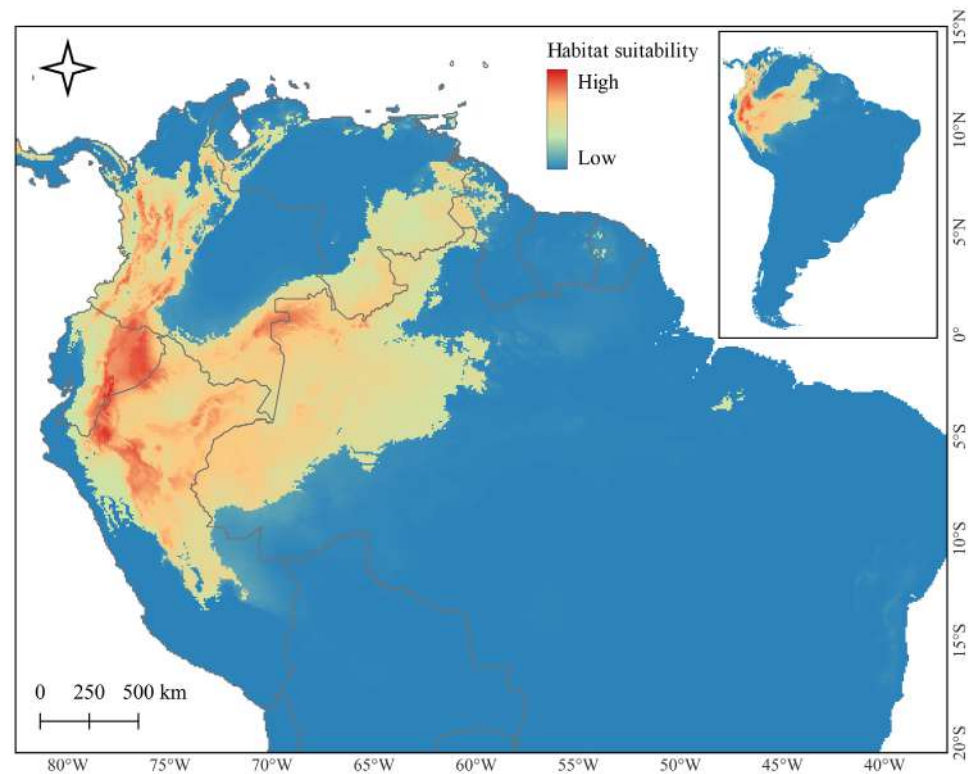


Figure 3. Distribution model of *Philodendron asplundii* Croat & M.L.Soaes in South America. Warmer colors indicate a higher probability of occurrence of the species. Map prepared by Ana Laura da Silva Luz

Discussion

Philodendron asplundii was first collected in 1929, but only in 2001, it was described. It is recognized mainly by the stem covered by cataphylls forming a network of fine, dense, and persistent fibers, and by the narrow leaf blades with prominent primary veins (visible in fresh and dry materials) (Croat & Shah, 2001; Beltrán *et al.*, 2019). The shape and size of leaf blades are highly variable. However, leaf venation patterns are consistent and, therefore, reliable diagnostic characters for the identification of *P. asplundii* (Croat & Shah, 2001). Overall, the morphology of the newly collected specimen is in line with the species circumscription. Nonetheless, it is noteworthy that we observed only one inflorescence per leaf axil in the Pará specimen, whereas the type specimen has up to eight inflorescences per leaf axil. We recorded the species at a low altitude (50 m.a.s.l.), out of the elevation range reported by Croat and Shah (2001), which was 150 to 2,500 m.a.s.l. These morphological and altitudinal variations may reflect intraspecific differences of *P. asplundii* populations in the Amazon. *Philodendron asplundii* can be confused with *Philodendron colombianum* R.E.Schult., but the former has larger leaf blades (vs. smaller ones) and inflorescences with more elongated spathe tubes (vs. shorter and globular ones) (Croat & Shah, 2001).

Philodendron asplundii was found in riparian forests, in a region characterized by a high number of freshwater courses regionally known as *igarapés* (meaning “canoe path” in Tupi), which are part of the Guamá River drainage system (Cordeiro *et al.*, 2017; Rede Amazônia Sustentável, 2024). *Igarapés* are the headwaters of micro-basins that flow into rivers and the Amazon basin, with large areas of riparian forests and high species diversity (Rede Amazônia Sustentável, 2024). These ecosystems are under pressure and have their integrity affected by human activities that cause the loss of vegetation for agricultural and pastoral purposes and the opening of primary and secondary roads (Leal *et al.*, 2017; Faria *et al.*, 2024).

The bioclimatic variables used in the *P. asplundii* ecological niche model showed that seasonality in temperature and precipitation is important for the distribution of the species. However, large changes in temperature and precipitation patterns observed from 1985 to 2021 in the Amazon as a consequence of deforestation may have affected water availability and altered the hydrological cycle of the region (Moreira, 2024). Furthermore, significant loss of abundance and richness of tree species are expected in the Amazon (Gomes *et al.*, 2019) due to climate change, which may also impact the distribution of *P. asplundii* since it is a nomadic climber.

The ecological niche model of *P. asplundii* was consistent with Andean forest areas. Such mountainous areas in the Andes provide important habitats for species of the Araceae family, mainly at elevations between 1,000 and 1,500 m (Kessler, 2001; Leimbeck *et al.*, 2004; Croat, 2019), as indicated by the present distribution models of *P. asplundii*. Furthermore, the model showed the possible occurrence of the species in Guyana and western Colombia, suggesting the need for continued collections of aroids in South America.

We found *P. asplundii* at low altitudes. Other *Philodendron* species also occur in lowland forests, lower mountain ranges, and mid-elevations of higher mountains in the Amazon (Canal *et al.*, 2019), such as *P. prancei* Croat, which is found in terra firme forests below 150 m.a.s.l. (Croat *et al.*, 2019). We suggest further investigations to better understand the circumscription of *Philodendron* species from low altitudes in the Amazon and to explore the possibility that *P. asplundii* represents a species complex.

Conclusion

The areas indicated as suitable for the occurrence of *P. asplundii* are located in regions under high risk of forest cover loss due to anthropogenic activities. Furthermore, the new record in this study comes from a permanent preservation area (riparian forest). This points to the need for conservation plans to avoid the loss of suitable habitats of the species, mainly in the Eastern Amazon.

Supplementary information

See the supplementary information in <https://www.raccefn.co/index.php/raccefn/article/view/3095/4574>

Acknowledgments

ALSL thanks the CAPES for the Doctoral scholarship awarded (88887.680100/2022-00). This study was financed in part by the Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Finance Code 001. We thank the Instituto Chico Mendes de Conservação da Biodiversidade (ICMBio, SISBio) for the authorization to collect botanical material for activities with scientific purposes. We also thank Gustavo Reis de Brito, Raimundo Luiz Morais de Sousa, and Wesley Gabriel Cunha Aguiar for their assistance in processing the data, Karena Pimenta for her assistance in the taxonomic identification of the species, and Lisi Alvarenga for revising the English language.

Author contributions

ALSL, FFVAB and MFAS conceived and designed the study. ALSL performed the analyses. ALSL and MFAS contributed to data acquisition and interpretation. ALSL and FFVAB wrote the manuscript with the help of MFAS. All authors contributed to the discussion, review, and approval of the final manuscript.

Conflicts of interest

The authors declare that they have no conflict of interest.

References

- Aiello-Lammens, M.E., Boria, R.A., Radosavljevic, A., Vilela, B., Anderson, R.P., Bjornson, Bjornson, R.R., Weston, S. (2019). spThin: functions for spatial thinning of species occurrence records for use in ecological models. <https://cran.r-project.org/web/packages/spThin/index.html>
- Allouche, O., Tsoar, A., Kadmon, R. (2006). Assessing the accuracy of species distribution models: prevalence, kappa and the true skill statistic (TSS). *Journal of Applied Ecology*, 43, 1223-1232. <https://doi.org/10.1111/j.1365-2664.2006.01214.x>
- Beltrán, J.J.P., Prasca, D.C., Croat, T.B. (2019). A New Species of *Philodendron* (Araceae) from Sucre Department, Colombia. *Novon*, 27(1), 33-37. <https://doi.org/10.3417/2019325>
- Busby, J.R. (1991). Bioclim, a Bioclimatic Analysis and Prediction System. In: Margules, C.R., Austin, M.P., (Eds.). *Nature Conservation, Cost Effective Biological Surveys and Data Analysis*. (pp. 64-68). CSIRO.
- Canal, D., Köster, N., Celis, M., Croat, T.B., Borsch, T., Jones, K.E. (2019). Out of Amazonia and back again: historical biogeography of the species-rich Neotropical genus *Philodendron* (Araceae). *Annals of the Missouri Botanical Garden*, 104(1), 49-68. <https://doi.org/10.3417/2018266>
- Canal, D., Köster, N., Jones, K.E., Korotkova, N., Croat, T.B., Borsch, T. (2018). Phylogeny and diversification history of the large Neotropical genus *Philodendron* (Araceae): Accelerated speciation in a lineage dominated by epiphytes. *American Journal of Botany*, 105, 1035-1052. <https://doi.org/10.1002/ajb2.1111>
- Cordeiro, I.M.C.C., Rangel-Vasconcelos, L.G.T., Schwartz, G., Oliveira, F.A. (2017). *Nordeste Paraense: panorama geral e uso sustentável das florestas secundárias*. EDUFRA.
- Croat, T.B. (2019). Araceae, a family with great potential. *Annals of the Missouri Botanical Garden*, 104(1), 3-9. <https://doi.org/10.3417/2018213>
- Croat, T.B. & Ortiz, O.O. (2020). Distribution of Araceae and the diversity of life forms. *Acta Societatis Botanicorum Poloniae*, 89, 1-23. <https://doi.org/10.5586/asbp.8939>
- Croat, T.B. & Shah, A. (2001). New Amazonian taxa of *Philodendron* (Araceae). *Novon*, 11(4), 381-388.
- Croat, T.B., Mines T.E., Kostelac, C.V. (2019). A review of *Philodendron* subg. *Philodendron* (Araceae) from South America with the descriptions of 22 new species. *Webbia*, 74(2), 193-246. <https://doi.org/10.1080/00837792.2019.1660559>

- Dormann, C.F., Calabrese, J.M., Guillera-Arroita, G., Matechou, E., Bahn, V., Bartoń, K., Beale, C.M., Ciuti, S., Elith, J., Gerstner, C., Guelat, J., Keil, P., Lahoz-Monfort, J.J., Pollock, L.J., Reineking, B., Roberts, D.R., Schröder, B., Thuiller, W., Warton, D.I., Wintle, B.A.,... Hartig, F.** (2018). Model averaging in ecology: a review of Bayesian, information-theoretic, and tactical approaches for predictive inference. *Ecological Monographs*, 88(4), 485-504. <https://doi.org/10.1002/ecm.1309>
- Dunnington, D., Thorne, B., Hernangómez, D.** (2023). Ggspatial: spatial data framework for ggplot2. <https://cran.r-project.org/web/packages/ggspatial/index.html>
- Faria, A.P.J., Ligeiro, R., Calvão, L.B., Giam, X., Leibold, M.A., Juen, L.** (2024). Land use types determine environmental heterogeneity and aquatic insect diversity in Amazonian streams. *Hydrobiologia*, 851, 281–298. <https://doi.org/10.1007/s10750-023-05190-x>
- Fidalgo, O. & Bononi, V.L.R.** (1989). *Técnicas de coleta, preservação e herborização de material botânico*. Instituto de Botânica.
- Gomes, V.H.F., Vieira, I.C.G., Salomão, R.P., ter Steege, H.** (2019). Amazonian tree species threatened by deforestation and climate change. *Nature Climate Change*, 9, 547-553. <https://doi.org/10.1038/s41558-019-0500-2>
- Guo, X., Yuan, Z., Tian, B.** (2009). Supplier selection based on hierarchical potential support vector machine. *Expert Systems with Applications*, 36, 6978-6985. <https://doi.org/10.1016/j.eswa.2008.08.074>
- Hagh, A.L., Gibernau, M., Maurin, O., Bailey, P., Carlsen, M.M., Hay, A., Leempoel, K., McGinnie, C., Mayo, S., Morris, S., Pérez-Escobar, O.A., Yeng, W.S., Zuluaga, A., Zuntini, A.R., Baker, W.J.; Forest, F.** (2023). Target sequence data shed new light on the infrafamilial classification of Araceae. *American Journal of Botany*, 110(2), e16117. <https://doi.org/10.1002/ajb2.16117>
- Hijmans, R.J., Bivand, R., Dyba, K., Pebesma, E., Sumner, M.D.** (2024). Terra: spatial data analysis. <https://cran.r-project.org/web/packages/terra/index.html/>
- Hijmans, R.J., Eten, J. van, Sunner, M., Boston, D., Bevan, A., Bivand, R., Busetto, L., Canty, M., Fasoli, B., Forrest, D., Ghosh, A., Golicher, D., Gray, J., Greenberg, J.A., Hiemstra, P., Hingee, K., Ilich, A., Institute for Mathematics Applied Geosciences, Karney C., Mattiuzzi, M., ... Hijmans, R.J.** (2023). Raster: geographic data analysis and modeling. Version 2.5-8. <https://CRAN.R-project.org/package=raster/>
- Kessler, M.** (2001). Patterns of diversity and range size of selected plant groups along an elevational transect in the Bolivian Andes. *Biodiversity and Conservation*, 10, 1897-1921. <https://doi.org/10.1023/A:1013130902993>
- Klanrit, P., Kitwetcharoen, H., Thanonkeo, P., Thanonkeo, S.** (2023). In vitro propagation of *Philodendron erubescens* ‘Pink Princess’ and ex vitro acclimatization of the plantlets. *Horticulturae*, 9, 688. <https://doi.org/10.3390/horticulturae9060688>
- Leal, C.G., Barlow, J., Gardner, T.A., Hughes, R.M., Leitão, R.P., Nally, R.M., Kaufmann, P.R., Ferraz, S.F.B., Zuanon, J., Paula, F.R., Ferreira, J., Thomson, J.R., Lennox, G.D., Dary, E.P., Röpke, C.P., Pompeu, P.S.** (2017). Is environmental legislation conserving tropical stream faunas? A large-scale assessment of local, riparian and catchment-scale influences on Amazonian fish. *The Journal of Applied Ecology*, 55(3), 1312-1326. <https://doi.org/10.1111/1365-2664.13028>
- Leimbeck, R.M., Valencia, R., Balslev, H.** (2004). Landscape diversity patterns and endemism of Araceae in Ecuador. *Biodiversity and Conservation*, 13, 1755-1779. <https://doi.org/10.1080/00837792.2019.1646465>
- Mateo, R.G., Felicísimo, A.M., Munoz, J.** (2011). Species distributions models: A synthetic revision. *Revista Chilena de Historia Natural*, 84(2), 217-240. <https://doi.org/10.4067/S0716-078X2011000200008>
- Moreira, R.M.** (2024). Trends and correlation between deforestation and precipitation in the Brazilian Amazon Biome. *Theoretical and Applied Climatology*, 155, 3683-3692. <https://doi.org/10.1007/s00704-024-04838-5>
- Naimi, B. & Araújo, M.B.** (2016). Sdm: a reproducible and extensible R platform for species distribution modelling. *Ecography*, 39(4), 368-375. <https://doi.org/10.1111/ecog.01881>
- Phillips, S.J., Anderson, R.P., Schapire, R.E.** (2006). Maximum entropy modeling of species geographic distributions. *Ecological Modelling*, 190, 231-259. <https://doi.org/10.1016/j.ecolmodel.2005.03.026>
- POWO.** (2024). Plants of the World Online. Facilitated by the Royal Botanic Gardens, Kew. <http://www.plantsoftheworldonline.org/>

- Prasad, A.M., Iverson, L.R., Liaw, A.** (2006). Newer classification and regression tree techniques: Bagging and Random Forests for ecological prediction. *Ecosystems*, 9, 181-199. <https://doi.org/10.1007/s10021-005-0054-1>
- R Core Team.** (2024). R: A language and environment for statistical computing. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. <https://www.R-project.org/>
- Rede Amazônia Sustentável.** 2024. Policy brief: igarapés. https://ras-network.org/wp-content/uploads/2020/11/RAS_Igarapes_WEB.pdf
- Sakuragui, C.M., Calazans, L.S.B., Soares, M.L., Mayo, S.J., Ferreira, J.B.** (2024). *Philodendron* in Flora e Funga do Brasil. Jardim Botânico do Rio de Janeiro. <https://floradobrasil.jbrj.gov.br/FB5015/>
- Thiers, B.** (2024). Index Herbariorum: A global directory of public herbaria and associated staff. New York Botanical Garden's Virtual Herbarium. <http://sweetgum.nybg.org/science/ih/>
- Wickham, H.** (2023). tidyverse: easily install and load the 'tidyverse'. <https://doi.org/10.32614/CRAN.package.tidyverse>
- Zizka, A., Silvestro, D., Andermann, T., Azevedo, J., Ritter, C.D., Edler, D., Farooq, H., Herdean, A., Ariza, M., Scharn, R., Svantesson, S., Wengstrom, K., Zizka, V., Antonelli, A.** (2019). CoordinateCleaner: Standardized cleaning of occurrence records from biological collection databases. *Methods Ecology Evolution*, 10, 744-751. <https://doi.org/10.1111/2041-210X.13152>

Original article

Reproductive biology of *Macrobrachium amazonicum* (Heller, 1862) (Crustacea: Decapoda, Palaemonidae) from the mouth and lower Amazon River regions, Brazil

Biología reproductiva de *Macrobrachium amazonicum* (Heller, 1862) (Crustacea, Decapoda, Palaemonidae) en la desembocadura y las regiones bajas del río Amazonas, Brasil

✉ Sting Silva Duarte^{1,*}, ✉ Jô de Farias Lima², ✉ Sheyla Regina Marques Couceiro³

¹ PPGbio, Universidade Federal do Amapá – UNIFAP, Macapá, Amapá, Brazil

² Empresa Brasileira de Pesquisa Agropecuária, Embrapa Amapá, Macapá, Amapá, Brazil

³ Laboratório de Ecologia e Taxonomia de Invertebrados Aquáticos - LETIA, Instituto de Ciências e Tecnologia das Águas - ICTA, Universidade Federal do Oeste do Para – UFOPA, Santarém, Pará, Brazil

Abstract

Reproductive biology studies are crucial for understanding ecological and behavioral processes and establishing pillars for the sustainable exploitation of species of economic interest. Our study encompasses the general aspects of *Macrobrachium amazonicum* reproductive biology in two important artisanal fishing areas: the mouth and lower sections of the Amazon River, located in the Brazilian states of Amapá and Pará, respectively. We captured 6,796 prawns, 4,163 females and 2,633 males, using 20 artisanal traps known locally as *matapi*. Our results showed that the reproductive peaks in both areas coincide with the rainy season in the Amazon (November 2017 to April 2018). Recruitment peaks were observed in July, both in the mouth and the lower Amazon regions. The average standard length of the females captured in the Amazon mouth was 56.85 ± 11.34 mm and 43.57 ± 10.48 mm in the lower Amazon section. There was a positive correlation between fecundity and female size in the regions. The average egg production was 3.026 ± 1.169 at the mouth and 1.346 ± 434 in the lower section. The reproductive investment average of the species was 11.05% (± 1.66) at the mouth and 12.67% (± 2.55) in the lower region. The mouth and lower Amazon River regions are favorable areas for the reproduction of *M. amazonicum*, as they attract females of all sizes.

Keywords: Reproduction of palaemonids; Fertility of the Amazonian prawn; Sexual maturity.

Resumen

Los estudios de biología reproductiva son cruciales para comprender los procesos ecológicos y comportamentales de las especies y para el establecimiento de las bases de la explotación sostenible de especies de interés económico. En este estudio cubrimos los aspectos generales de la biología reproductiva de *Macrobrachium amazonicum* en dos importantes áreas de pesca artesanal de este camarón en la desembocadura y el bajo río Amazonas en los estados de Amapá y Pará, respectivamente. Se capturaron 6.796 camarones, 4.163 hembras y 2.633 machos, utilizando 20 trampas artesanales conocidas localmente como *matapi*. Los resultados demostraron que los picos reproductivos en ambas áreas coincidieron con la temporada de lluvias en la Amazonía (noviembre de 2017 a abril de 2018). Se observaron picos de reclutamiento en julio tanto en la desembocadura como en la región del bajo Amazonas. En la desembocadura la longitud estándar promedio de las hembras fue de $56,85 \pm 11,34$ mm y en el bajo Amazonas, de $43,57 \pm 10,48$ mm. Hubo una correlación positiva entre la fecundidad y el tamaño de la hembra en ambas regiones. La producción promedio de huevos fue de 3.026 ± 1.169 en la desembocadura y de 1.346 ± 434 en el bajo Amazonas. El promedio de

Citation: Silva Duarte S, *et al.* Reproductive biology of *Macrobrachium amazonicum* (Heller, 1862) (Crustacea: Decapoda, Palaemonidae) from the mouth and lower Amazon River regions, Brazil. Revista de la Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. 49(192):556-567, julio-septiembre de 2025. doi: <https://doi.org/10.18257/raccefyn.3230>

Editor: Arturo Acero

***Corresponding autor:**

Sting Silva Duarte;
stingduarte@gmail.com

Received: May 29, 2025

Accepted: August 5, 2025

Published on line: August 28, 2025



This is an open access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution License.

la inversión reproductiva de la especie fue del 11,05% ($\pm 1,66$) en la desembocadura y del 12,67% ($\pm 2,55$) en el bajo Amazonas. Las regiones de la desembocadura y el bajo Amazonas son áreas favorables para la reproducción de *M. amazonicum*, ya que atraen hembras de todos los tamaños.

Palabras clave: Reproducción de palemónidos; Fertilidad del camarón amazónico; Madurez sexual.

Introduction

The environment is determining for species population characteristics, as it results in behavioral and biological differences associated with the availability of resources (Bentes *et al.*, 2016), which determine population sizes by acting directly on the fertility and fecundity rates of the species (Silva, 2011).

Studying the reproductive biology of the prawn provides information on reproductive strategies, sexual maturity, reproductive investment, and the number of eggs produced by the females, which is crucial to evaluate the reproductive potential, as it provides data useful in the establishment of appropriate management strategies, the conservation and rational exploitation of natural stocks, and avoiding the depletion risks (Flexa *et al.*, 2005). *Macrobrachium amazonicum* (Heller, 1862) is a prawn of great scientific and commercial interest (Silva *et al.*, 2007), which is widely consumed in the Amazon region. There are two types of populations related to the environment of occurrence: a) populations that inhabit rivers, freshwater lakes, and streams with no contact with the coast, and b) populations living in estuarine regions that depend on brackish water to complete their life cycle (Moraes-Valenti & Valenti, 2010).

In general, the populations of *M. amazonicum* are characterized by having a continuous reproductive activity, with ovigerous females all year round (Sampaio *et al.*, 2007). However, generalizations can lead to unsustainable exploitation of the species on a local or regional scale. For example, signs of *M. amazonicum* overfishing have been registered in several Amazon regions, such as the Guarujá Bay, in Pará (Lucena-Fredou *et al.*, 2010), the Bragança Peninsula, in northeast Pará (Freire *et al.*, 2012), and in the mouth of the Amazon River in Amapá (Lima *et al.*, 2014). In this context, our study addresses the reproductive biology (reproductive period, sexual maturity, fecundity, and reproductive investment) of *M. amazonicum* in two important areas of artisanal shrimp fishing in the mouth and lower sections of the Amazon River in the Brazilian states of Amapá and Pará.

Materials and methods

Study area

The study area comprises the regions of Mazagão (00°15'39.9"S and 51°20'42.3"W) located on the mouth of the Amazon River in the state of Amapá, and the Ilha das Marrecas in the lower Amazon River, state of Pará (02°12'19.3"S and 54°46'17.9"W) (Figure 1). These regions have two distinct climatic periods: the rainy period, between January and June, and the dry period, from July to December, which coincide with floods and high waters, and ebb and low waters in the Amazon River, respectively, and change the environment depending on the flood pulse. In addition to the effect of the flood pulse resulting from the rains, Mazagão also has a daily influence of the tide, given its proximity to the sea.

Specimen collection and rainfall data

M. amazonicum specimens were collected monthly from May 2017 to April 2018, using twenty artisanal traps called *matapi* (cylindrical creel made by hand using vines and palm trees from the Amazon floodplain, 50 cm long, 25 cm in diameter and a 5 mm-distance between splints) baited with *Orbignya speciosa* flour (babassu) and tied with a rope at a depth of one meter (De Araújo *et al.*, 2014) in the Amazon River at dusk (5:30 pm) for a period of 12 h (Lima *et al.*, 2016). The captured specimens were properly labeled and preserved in plastic bags containing hydrated ethyl alcohol (70%).

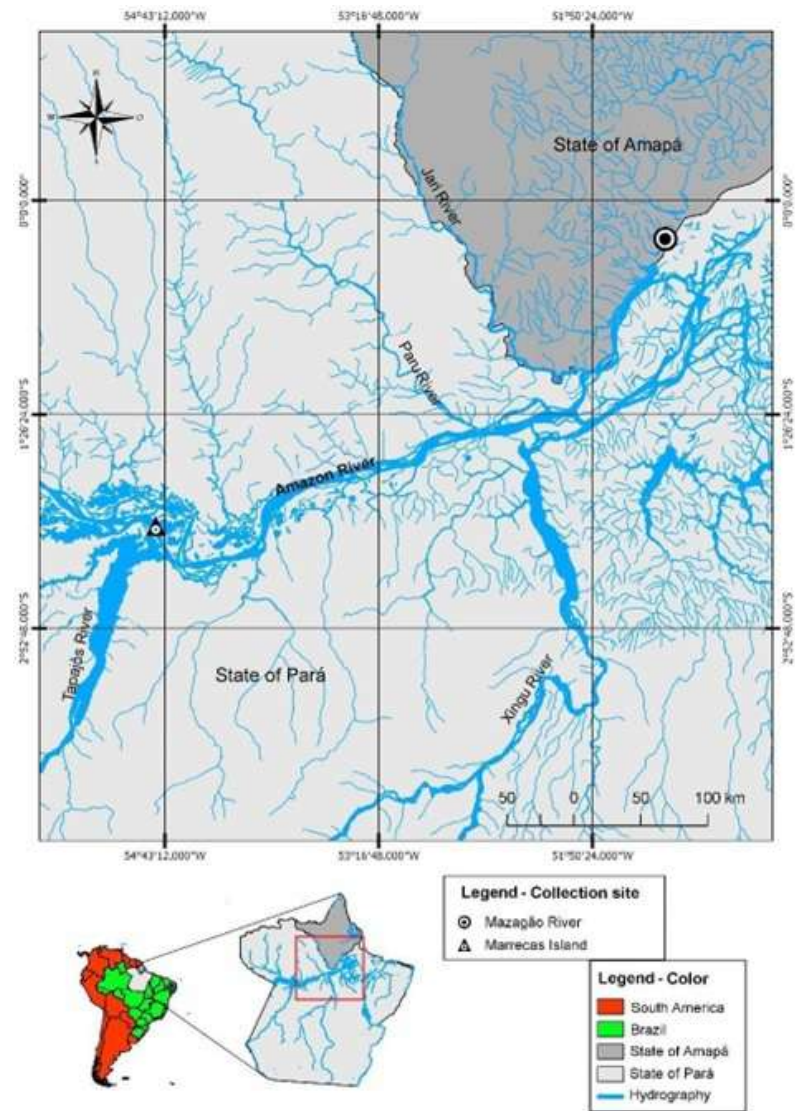


Figure 1. Location of *Macrobrachium amazonicum* capture areas in the mouth and lower Amazon between May 2017 and April 2018. (●) Mazagão, (▲) Ilha das Marrecas

Laboratory analysis

In the laboratory, we made the taxonomic identification, sexing, and biometrics of the prawns. For the taxonomic identification, we followed **Melo** (2003). Sexing was determined based on the presence or absence of the male appendix observed in the endopod of the second pair of pleopods of each prawn. Biometrics included standard length - SL (distance measured between the base of the eyeball and the tip of the telson given in mm) (**Lima et al.**, 2014) measured using an analog caliper (125MEB-6/200, Starfer Itu -Sp, 0.05 mm accuracy) and the total wet mass (g) (TM) a semi-analytical digital scale (AD 330, Mars, 0.001 g accuracy, Santa Rita do Sapucaí-MG, Brazil). The prawns were classified in the following categories: adult males, adult ovigerous and non-ovigerous females, and juveniles. Males and females smaller than the smallest ovigerous female found were considered young (**De Almeida Melo et al.**, 2022), and those with a size equal to or greater than the smallest ovigerous female were considered adult (**Duarte et al.**, 2025; **Lima et al.**, 2014).

Reproductive aspects

The reproductive period was determined by the occurrence of ovigerous females and recruitment by the presence of young specimens. To determine the length of the first individual maturation, we considered the length of classes between the ovigerous females. We determined the standard length of sexual maturity by analyzing 50% of the ovigerous females. Fecundity was recorded by direct egg counting of 30 ovigerous females randomly selected, considering the integrity of the eggs. Females' egg masses were carefully removed under a dissecting binocular stereo microscope (K 400L, Motic, Causeway Bay, Hong Kong), and the eggs in each mass were counted. Egg development stages were classified according to **Wehrmann** (1990): Stage I: freshly extruded eggs, uniform yolk, no visible eye pigment; Stage II: barely visible eye pigments, and Stage III: eyes clearly visible and fully developed.

To determine the egg volume, we separated 10 eggs from each ovigerous female to measure the length (longest axis) and width (shortest axis) under a compound binocular microscope equipped with a calibrated eye micrometer. The volume of the eggs was calculated using the **Wehrmann** (1990) formula:

$$V = \pi * l * h * (h)^2,$$

where "l" is length; "H" width in mm, and $\pi = 3.14$.

Reproductive investment (RI) was estimated by dividing the egg mass dry weight by the female's dry weight and multiplying by 100 to obtain percentage values (**Hines**, 1982). For this calculation, we used only the dry weight of females with IN-stage eggs and their egg mass, as suggested by **Zimmermann et al.** (2015). Then, we conducted a linear regression analysis between RI and SL, also relating TM to SL (**Lima et al.**, 2014; **Rodrigues et al.**, 2025).

Statistical analysis

To check the differences in the monthly abundance of ovigerous and non-ovigerous females between the study areas, we applied a t test (**Zar**, 1999), and to verify if there were differences in the average volume of eggs in each of the three embryonic stages, we used the Mann-Whitney test (U) after checking data normality and homoscedasticity with the Kolmogorov-Smirnov and Bartlett tests (**Ayres et al.**, 2007).

We used linear regressions at each embryonic stage to describe the relationship between fecundity and female length (LF), and to analyze the relationship between RI and female total length (TL), and the relationship between total wet mass (TM) and standard length (SL). All statistical analyses were performed using the Biostat 5.0 software with $\alpha = 0.05$ (**Ayres et al.**, 2007).

Results

For the study, we captured 6,796 *M. amazonicum* specimens from two regions: Ilha das Marrecas and Mazagão. The number of individuals collected in Mazagão exceeded that of Ilha das Marrecas, with females outnumbering males in both locations. The proportion of ovigerous females was significantly higher in Mazagão compared to Ilha das Marrecas ($P < 0.05$). While a considerable number of ovigerous females were found in both regions, Mazagão presented a greater prevalence.

The size of females (standard length, SL) captured in Mazagão ranged from 10.07 to 98.99 mm, with an average of 56.85 ± 11.34 mm. In Ilha das Marrecas, the females had a SL of 9.40 to 92.98 mm, with an average of 43.57 ± 10.48 mm, i.e., the size of females in Mazagão was larger than that of females in Ilha das Marrecas. The biometric relationships between the total wet mass (TM) and the standard length (SL) of both sexes in both areas were statistically significant (**Figure 2**).

Among the females captured in both areas, 37.73% carried eggs in their abdomen and 62.86% did not (**Table 1**). In Mazagão, we found more standard-length class ovigerous females. In both study regions, the highest number of juvenile prawns was observed in the

standard-length class (30.4 to 38.4 mm) (**Table 1**). Only 0.31% of ovigerous females in Mazagão and Ilha das Marrecas showed distribution in the standard length class 38.4 to 46.4 mm (**Table 1**), suggesting that the first gonadal maturation of females in *M. amazonicum* populations in both areas occurs with this length.

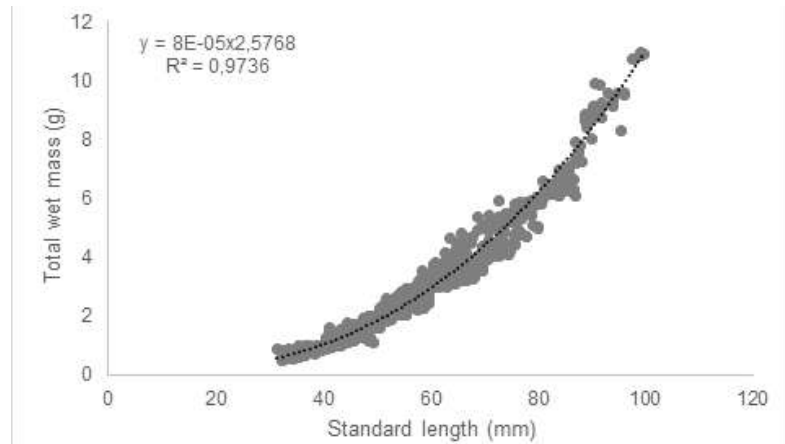


Figure 2. Biometric proportions (standard length and total wet mass) between *M. amazonicum* males and females sampled in Mazagão and Ilha das Marrecas between May 2017 to April 2018

Table 1. Frequency of *M. amazonicum* distribution according to the standard-length classes captured in Mazagão and Ilha das Marrecas between May 2017 and April 2018. M - Mazagão, I.M - Ilha das Marrecas

Standard length classes (SL, mm)	Site	Adults						Juveniles				Total	
		Males		Non-ovigerous females		Females ovigerous		Males		Females			
		N	%	N	%	N	%	N	%	N	%	N	%
30.4-- 38.4	M	0	0.00	2	0.05	0	0.00	70	0.49	123	1.63	109	0.54
	I.M	0	0.00	1	0.04	0	0.00	134	3.01	235	6.04	370	0.04
38.4-- 46.4	M	537	13.26	220	5.43	9	0.22	7	0.17	14	0.35	773	19.09
	I.M	9	0.39	2	0.09	2	0.09	83	3.56	132	5.66	96	4.12
46.4-- 54.4	M	768	18.97	652	16.10	168	4.15	34	0.84	0	0.00	1622	40.06
	I.M	173	7.42	578	24.79	174	7.46	0	0.00	86	3.69	925	39.67
54.4-- 62.4	M	253	6.25	332	8.20	366	9.04	0	0.00	0	0.00	951	23.49
	I.M	270	11.58	382	16.38	204	8.75	0	0.00	0	0.00	856	36.71
62.4-- 70.4	M	80	1.98	89	2.20	131	3.24	0	0.00	0	0.00	300	7.41
	I.M	122	5.23	67	2.87	34	1.46	0	0.00	0	0.00	223	9.56
70.4-- 78.4	M	30	0.74	8	0.20	10	0.25	0	0.00	0	0.00	48	1.19
	I.M	30	1.29	17	0.73	25	1.07	0	0.00	0	0.00	72	3.09
78.4-- 86.4	M	9	0.22	35	0.86	67	1.65	0	0.00	0	0.00	111	2.74
	I.M	1	0.04	67	2.87	90	3.86	0	0.00	0	0.00	158	6.78
94.4-- 102.4	M	57	1.41	45	1.11	120	2.96	0	0.00	0	0.00	222	5.48
	I.M	1	0.04	20	0.86	89	3.82	0	0.00	0	0.00	1	0.04
Total	M	1734	42.82	1383	34.15	871	21.52	70	1.50	123	1.97	4132	100
	I.M	606	25,98	1134	48,62	708	26,50	123	3,55	235	9,39	2664	100

In Mazagão, non-ovigerous females and juvenile shrimps capture rates were higher in the summer (July to October, 2017) than in the winter period (December 2017, January, February, and April 2018) in places where ovigerous females were more abundant. In Ilha das Marrecas, non-ovigerous females and juvenile shrimps were more abundant in June, July, and October 2017. On the other hand, ovigerous females were abundant in the rainy season (November 2017 to April 2018). Juvenile shrimps were found almost all year round, but the capture peak in absolute and percentage terms was observed in June and July in Mazagão and in June, August, September, October, and March in Ilha das Marrecas, with 35 to 60.45% capture of juveniles (**Figure 3 A-B**).

The average number of eggs observed in ovigerous females in Ilha das Marrecas was 1.346 ± 434 , lower than the average number of 3.026 ± 1.169 eggs recorded for ovigerous females in Mazagão, showing statistical differences for the quantity of eggs ($t = 5.38$; $P < 0.001$). The linear regression for the number of eggs was positive for standard-length females in every stage of embryonic development ($p < 0.001$), which indicated an increase in fecundity with growth of ovigerous females (**Figure 4 A-B**). The linear correlations between egg volumes in stages I, II, and III were not positive for standard-length females (**Figure 4 C-D**), indicating that female size directly influenced egg dimensions.

The average volume of *M. amazonicum* eggs varied statistically among embryonic development stages in both study areas ($U = 44.04$, $p = < 0.001$). However, comparing the volume of each embryonic stage (I, II, and III) between the areas, Ilha das Marrecas showed a higher average for Stage I (304 ± 156) than Mazagão (35.65 ± 11.07) ($t = 55.00$; $P = < 0.001$). For Stage II, Ilha das Marrecas also had a higher average egg volume ($478 \pm$

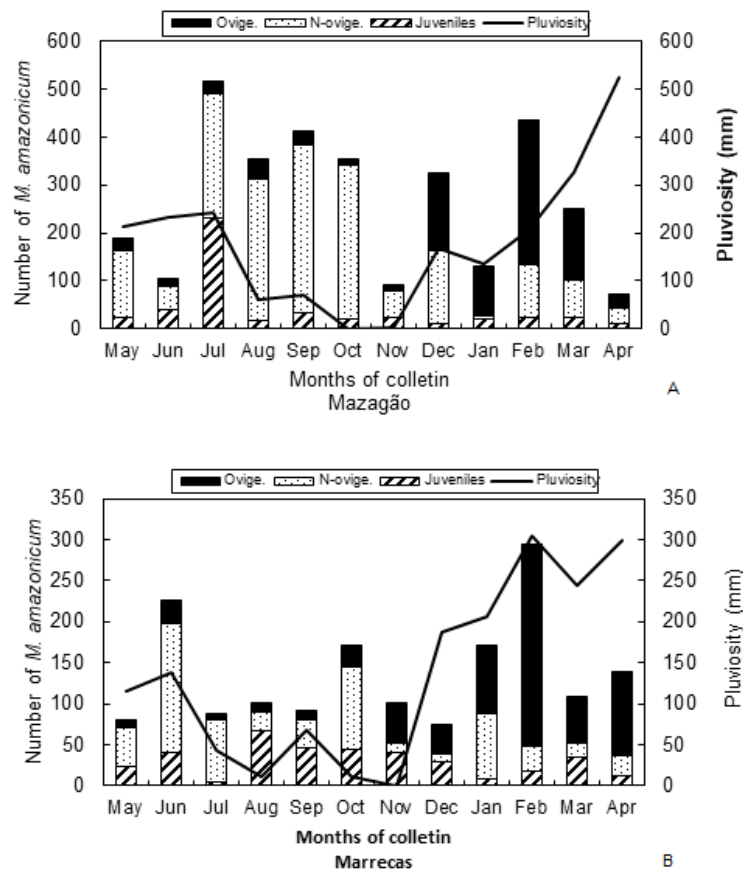


Figure 3. Distribution of the absolute frequency of ovigerous, non-ovigerous, and juvenile *M. amazonicum* females sampled in Mazagão and Ilha das Marrecas between May 2017 to April 2018

183) than Mazagão (45.29±22,93) ($t = 175.00$; $P < 0.001$). In Stage III, the average egg volume in Mazagão (39.03 ± 4.83) was significantly lower than that observed in Ilha das Marrecas (643 ± 197) ($t = 28.00$; $P < 0.001$), which indicated that ovigerous females from Ilha das Marrecas produced a considerably larger volume of eggs compared to those from Mazagão (Table 2).

As for *M. amazonicum* reproductive investment (R.I.) and SL, there was no significant relationship ($P = 0.89$), which indicated that the RI was not determined by the female length (Figure 5). Females captured in Mazagão converted an average of 11.05% (± 1.66 g) of their body weight for egg production, while those captured in Ilha das Marrecas converted an average of 12.67% (± 2.55 g).

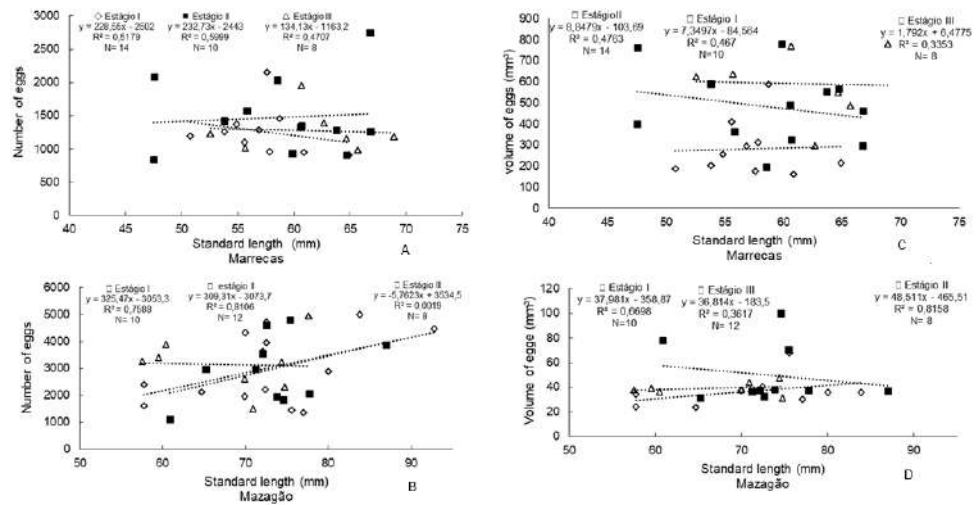


Figure 4. Relationship between fecundity and standard-length females for each of the three *M. amazonicum* embryonic stages captured in Mazagão and Ilha das Marrecas between May 2017 to April 2018. **A-B.** Standard length (mm) and number of eggs; **C-D.** Standard length (mm) and volume of eggs

Table 2. Average, minimum, and maximum values of egg volume (mm³) in the three embryonic development stages of *Macrobrachium amazonicum* captured in Mazagão and Ilha das Marrecas between May 2017 and April 2018

Internship eggs	Site	N	Egg average volume (mm ³)	± SD	Minimum	Maximum
I	M	10	35.65	11.07	23.69	67.86
II	M	12	45.29	22.93	20.08	99.62
III	M	8	39.03	4.83	31.31	47.44
Internship eggs	Site	N	Egg average volume (mm ³)	± SD	Minimum (mm ³)	Maximum (mm ³)
I	I.M	14	304	156	163	620
II	I.M	10	478	183	194	778
III	I.M	8	643	197	297	995

M: Mazagão, IM: Ilha das Marrecas, N: number of shrimps; SD: standard deviation

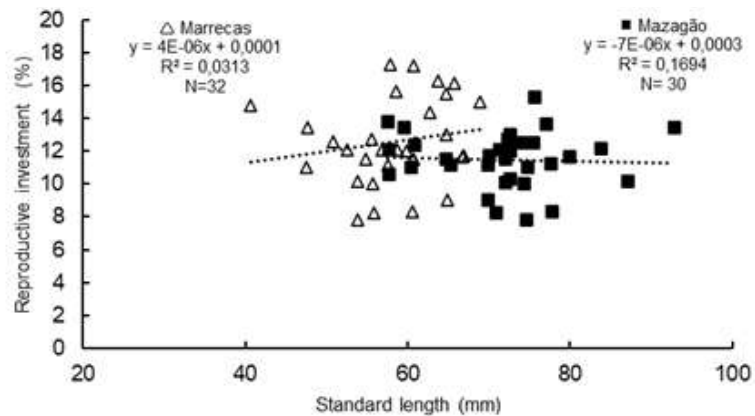


Figure 5. Relationship between *M. amazonicum* standard length (mm) and reproductive investment, considering all stages of embryonic development of eggs captured in Mazagão and Ilha das Marrecas between May 2017 and April 2018

Discussion

Macrobrachium amazonicum ovigerous females were captured throughout the study period in Mazagão and Ilha das Marrecas, indicating a continuous reproductive cycle within the population. This reproductive characteristic is common for the species' healthy populations in several Brazilian regions (Silva *et al.*, 2002; Sampaio *et al.*, 2007; Bentes *et al.*, 2011; Lima *et al.*, 2013). It is highly probable that *M. amazonicum* individual females undergo multiple cycles of maturation, spawning, and recovery throughout the year (Silva *et al.*, 2002). Such a pattern was observed in the present study, with ovigerous and juvenile females found in every month of the sampling period.

Regarding female standard length, the largest specimen was captured in Mazagão. This difference in length may be associated with the proximity of the Mazagão region to the mouth of the Amazon River in an area of intense tidal activity and daily transport of organic matter, which may be contributing to an 'enrichment' of this region and the subsequent improvement of nutritional conditions for female growth. Thus, the standard length of females collected in Mazagão was similar to that reported in studies involving other estuarine areas in the Amazon region (Freire *et al.*, 2012; Hayd & Anger, 2013; Duarte *et al.*, 2025). Likewise, the females collected in Ilha das Marrecas had similar lengths to those collected in sweet water systems (Silva & Sampaio, 2004; Silva, 2011).

The peak of *M. amazonicum* reproductive activity occurred during the winter season in Mazagão and Ilha das Marrecas (Figure 4 A–B), indicating a reproductive pattern influenced by the regional rainfall regime. In the Amazon region, ovigerous females are also most abundant during the rainy period, similar to our study (Silva *et al.*, 2005; Silva *et al.*, 2007; Bentes *et al.*, 2011). In contrast, no relationship with rainfall was seen among the populations from the Jaguaribe River in northeastern Brazil collected by Sampaio *et al.* (2007), indicating an atypical behavior of this species in the region, probably due to the locally arid climate. These variations suggest that while *M. amazonicum* exhibits rainfall-linked reproductive seasonality in Amazonian ecosystems, this pattern may be modulated by local environmental conditions, reinforcing the species' ecological plasticity across different hydrographic basins.

In our study, we found that only 1,579 females carried eggs in their abdomen. However, ovigerous females were recorded throughout the entire year, indicating a continuous reproductive cycle for *M. amazonicum* populations in both Mazagão and Ilha das Marrecas. The size of the gonads' first maturation was established for 30.4 to 38.4 mm standard-length class females in both areas. These values are notably lower than those

reported for other locations such as Combú Island, Icoaraci District, Arapiranga Island, and Mosqueiro Island, where the size at first maturation was estimated in 55.7 mm (Azevedo, 2004; Bentes *et al.*, 2016; Freire *et al.*, 2012; Lima *et al.*, 2014; Sampaio *et al.*, 2007). The gonadal maturation in young individuals is common in *M. amazonicum* prawns (Bentes *et al.*, 2016; Lima *et al.*, 2014), and reflects an adaptation of the species to environmental conditions to optimize the maintenance of the population.

Early gonadal maturation in young individuals is a common trait in *M. amazonicum* (Bentes *et al.*, 2016; Lima *et al.*, 2014) and is generally considered an adaptive strategy that enhances reproductive success under variable or unstable environmental conditions. The lower maturation sizes observed in this study may reflect specific ecological pressures or differences in habitat productivity in Mazagão and Ilha das Marrecas. This plasticity in reproductive parameters reinforces the ecological adaptability of *M. amazonicum*, enabling it to maintain viable populations across diverse environments with varying degrees of environmental stress and resource availability.

The highest fecundity among prawn species of the *Macrobrachium* genus has been reported in *M. rosenbergii* (De Man, 1879) and *M. carcinus* (Linnaeus, 1758), with females capable of producing between 14,000 and 242,000 eggs per spawning event (Lara & Wehrtmann, 2009). In the present study, fecundity in *M. amazonicum* increased with female size, demonstrating a significant positive linear relationship between standard length and egg number. This pattern has also been described for *M. amazonicum* (Medina *et al.*, 2008; Silva, 2011), *M. acanthurus* (Valenti *et al.*, 1989; Tamburus *et al.*, 2012), *M. olfersi* (Mossolin & Bueno, 2002), and *M. carcinus* (Lara & Wehrtmann, 2009), indicating that this correlation is a general reproductive trait of the *Macrobrachium* genus.

Regarding the number of eggs, the minimum and maximum fecundity recorded for *M. amazonicum* were 1,099 to 5,011 eggs in Mazagão and 833 to 2,748 eggs in Ilha das Marrecas, showing that females in these regions can keep high population densities throughout the year. Females' fecundity in estuarine (Mazagão-AP) and continental (Ilha das Marrecas-PA) regions was higher than the fecundity recorded for females of the same species in the Tucuruí Hydroelectric Reservoir, Pará (Silva *et al.*, 2005), and Vigia city in Pará (Silva *et al.*, 2002), and similar to the monthly average of females captured in the Jaguaribe River, Ceará (Silva *et al.*, 2004).

As for the volume of eggs, Ilha das Marrecas (continental) had a larger volume than that observed in Mazagão (estuary), demonstrating the standard characteristics of the reproduction of *M. amazonicum*, since continental water specimens generally present an abbreviated larval development and a reduced number of eggs but of great volume in response to an environment poor in nutrients. Coastal species have a greater quantity of eggs, smaller in volume, and their complete metamorphosis of planktonic zoea larvae occurs in the brackish waters of the estuaries (Williamson, 1972; Magalhães, 1985; Walker, 1992). This combination of traits exemplifies the genus' evolutionary adaptation to diverse environmental conditions.

Differences in maximum reproductive yield in crustacean species are related to the disparity in female length, biotic or abiotic factors, such as egg size, latitudinal and seasonal variations, and habitat adaptation (Mantelatto & Fransozo, 1997) that may influence the reproductive investment. In our study, medium-length *M. amazonicum* females converted 5.7 - 24.58% of body weight for egg production in Mazagão and 3.5 - 21.35% in Ilha das Marrecas. These values are close to the 15-31% observed for *M. carcinus* (Lara & Wehrtmann, 2009), the 14-30% for *M. acanthurus* (Anger & Moreira, 1998), the 4-17% for *M. hainanense* (Mantel & Dudgeon, 2005), and the 7 to 38% for *M. olfersi* (Anger & Moreira, 1998), indicating that reproductive performance is variable in species of the genus *Macrobrachium*. In addition, the present study showed that the reproductive investment of *M. amazonicum* in Mazagão and Ilha das Marrecas was not related to female length, since different-length females were able to reproduce (Mantel & Dudgeon, 2005; Lara & Wehrtmann, 2009).

Mazagão (estuary) and Ilha das Marrecas (continental) are favorable areas for the reproduction of *M. amazonicum*, since they attract females of all sizes. However, due to the existence of variations between estuarine and continental *M. amazonicum* populations in terms of structure, size, fecundity, and fertility, there is a need to establish different management measures, including adjustments in fishing equipment and the definition of minimum catch size for *M. amazonicum* in Mazagão and Ilha das Marrecas, according to the peculiarities of each region. Additionally, the values in the present study evidenced that the females captured in Mazagão and Ilha das Marrecas can be potential breeding stock for aquaculture.

Acknowledgments

To the Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) for the Master's scholarship granted to the first author. To the Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) for the financial support (process No. 407698/2013-2, process No. 444367/2014-4, 405234/2024-4, and Fapeap: call 003/2022-# 193). To the Empresa Brasileira de Pesquisa Agropecuária for structural and logistical support for data analysis.

Author contributions

SRMC, SSD: Conceptualization; **SRMC, SSD, JdFL:** Methodology; **SSD:** Software; **JdFL, SRMC:** Validation; **SSD, JdFL, SRMC:** Investigation; **SSD, JdFL, SRMC:** Resources; **SSD, JdFL:** original draft preparation; **SRMC, SSD, JdFL:** Manuscript review and editing. All authors read and agreed on the final version of the manuscript.

Conflicts of interest

The authors declare no conflicts of interest.

References

- Anger, K. & Moreira, G.** (1998). Morphometric and reproductive traits of tropical caridean shrimps. *Journal of Crustacean Biology*, 18, 823-838.
- Ayres, M., Ayres Jr., M., Ayres, D. L., Santos, A. de A. S.** (2007). BioEstat-aplicações estatísticas nas áreas das ciências bio-médicas (5th ed.). Embrapa Amazônia Oriental (CPATU).
- Azevedo, E. F.** (2004). Biologia reprodutiva do camarão regional *Macrobrachium amazonicum* (Heller, 1862) (Decapoda; Palaemonidae), na ilha do Combu (Belém, PA). Trabalho de conclusão de curso. Universidade Federal do Pará, 89p.
- Bentes, B.S., Martinelli, J.M., Souza, L.S., Cavalcante, D.V., Almeida, M.C., Isaac, V.J.** (2011). Spatial distribution of the Amazon river prawn *Macrobrachium amazonicum* (Heller 1862) (Decapoda, Caridea, Palaemonidae) in two perennial creeks of an estuary on the northern coast of Brazil (Guajará Bay, Belém, Pará). *Brazilian Journal of Biology*, 71, 925-935.
- Bentes, B. S., Silva, J. C. S., Martinelli-Lemos, J. M., Nahum, V. J. I.** (2016). Abundância e relações morfométricas do camarão-da-amazônia *Macrobrachium amazonicum* (Heller, 1862) (Decapoda, Palaemonidae) em um estuário amazônico-costa norte do Brasil. *Biota Amazônia*, 6(4), 1-9.
- De Araújo, M. V. L. F., de Araújo Silva, K. C., Silva, B. B., da Silva Ferreira, I. L., Cintra, I. H. A.** (2014). Pesca e procedimentos de captura do camarão-da-Amazônia à jusante de uma usina hidrelétrica na Amazônia brasileira. *Biota Amazonia*, 4(2), 102-112.
- De Almeida Melo, O., da Silva, L. M. A., de Farias Lima, J., Silva, S. L. F., Sousa, P. H. C., Duarte, S. S., Cintra, I. H. A.** (2022). Estrutura populacional do camarão-da-Amazônia *Macrobrachium amazonicum* (Heller 1862) na foz do Rio Amazonas. *Brazilian Journal of Animal and Environmental Research*, 5(1), 490-511.
- Duarte, S. S.; Lima, F. L., Couceiro, R. G.** (2025). Population structure of freshwater prawn *Macrobrachium amazonicum* (Crustacea, Palaemonidae) in two regions of the Amazon River, Brazil. *Revista de Biologia Tropical*, 73(1), e4ahgnf87-e4ahgnf87.
- Flexa, C. E., Silva, K. C. A., Cintra, I. H. A.** (2005). Morfometria do camarão-canela, *Macrobrachium amazonicum* (Heller, 1862), no município de Cametá-Pará. *Boletim Técnico-Científico do Cepnor*, 5(1), 41-54.

- Freire, J.L., Marques, C.B., Silva, B.B.** (2012). Estrutura populacional e biologia reprodutiva do camarão-da-Amazônia *Macrobrachium amazonicum* (Heller, 1862) (Decapoda: Palaemonidae) em um estuário da região Nordeste do Pará, Brasil. *Brazilian Journal of Aquatic Science and Technology*, 16(2), 65-76.
- Hayd, L. & Anger, K.** (2013). Reproductive and morphometric traits of *Macrobrachium amazonicum* (Decapoda Palaemonidae) from the Pantanal, Brazil, suggests initial speciation. *Revista Biología Tropical*, 61, 39-57
- Lara, L.R. & Wehrtmann I.S.** (2009). Reproductive biology of the freshwater shrimp *Macrobrachium carcinus* (L.) (Decapoda: Palaemonidae) from Costa Rica, Central America. *Journal of Crustacean Biology*, 29, 343-349.
- Lima, J.F., Silva, T.C., Silva, L.M.A., García, J.S.** (2013). Brachyuran crustaceans from the bycatch of prawn fisheries at the mouth of the Amazon River. *Acta Amazonica*, 43, 93-100.
- Lima, J. F.** (2014). Viabilidade de matapis adaptados com diferentes espaçamentos entre talas sobre a captura do camarão-da-amazônia (*Macrobrachium amazonicum* Heller, 1862) no estuário do Rio Amazonas. Macapá: Embrapa Amapá, 2014. <http://www.infoteca.cnptia.embrapa.br/infoteca/handle/doc/984373>
- Lima J. F., García J. S., Silva T. C.** (2014). Natural diet and feeding habits of a freshwater prawn (*Macrobrachium carcinus*: Crustacea, Decapoda) in the estuary of the Amazon River. *Acta Amazonica*, 44, 235-244.
- Lima, J.F., Cintra, I. H.A., Bastos, A. M., Damasceno, L. F., Montagner, D., Varela E. S.** (2016). Caracterização do sistema pesqueiro de produção do camarão-da-Amazônia no Estuário Amazônico. *Embrapa Amapá Documentos*, 95.
- Lucena-Frédou, F., Rosa Filho, J. S., Silva, M. C. M., Azevedo, E. F.** (2010). Population dynamics of the river prawn *Macrobrachium amazonicum* (Heller, 1862) (Decapoda, Palaemonidae) on Combú island (Amazon estuary). *Crustaceana*, 83(3), 277-290.
- Magalhães, C.** (1985). Desenvolvimento larval obtido em laboratório de palaemonídeos da Região Amazônica. I. *Macrobrachium amazonicum* (Heller, 1862) (Crustacea, Decapoda). *Amazoniana*, 9(2), 247-274.
- Mantelatto, F.L.M. & Fransozo, L.** (1997). Fecundity of the crab *Callinectes ornatus* Ordway, 1863 (Decapoda, Brachyura, Potunidae) from the Ubatuba region, São Paulo, Brazil. *Crustaceana*, 70, 214-226.
- Mantel, S.K. & Dudgeon, D.** (2005). Reproduction and sexual dimorphism of the palaemonid shrimp *Macrobrachium hainanense* Hong Kong streams. *Journal of Crustacean Biology*, 25, 450-459.
- Melo, A.G.** (2003). *Manual de identificação dos Crustacea Decapoda de água doce do Brasil*. São Paulo. Loyola/Museu de Zoologia, USP.
- Medina, J.C.P., Severeyn Y.G., Severeyn, A.F.H.** (2008). Aspectos reproductivos del camarón *Macrobrachium amazonicum* (Heller) en la zona de Nazaret, San Rafael de El Moján, Lago de Maracaibo, Venezuela. *Ciencia*, 16, 402-408.
- Mossolin, E.C. & Bueno, S.L.S.** (2002). Reproductive biology of *Macrobrachium olfersi* (Decapoda, Palaemonidae) in São Sebastião, Brazil. *Journal of Crustacean Biology*, 22, 367-376.
- Moraes-Valenti, P. & Valenti, W.C.** (2010). Culture of the Amazon River prawn *Macrobrachium amazonicum*. In: New, M.B.; Valenti, W.C.; Tidwell, J.H.; D'abramo, L.R.; Kutty, M.N. *Freshwater prawns: biology and farming*. Oxford Wiley-Blackwell.
- Rodrigues, L. R., da Costa, J. R. P., de Andrade, L. S.** (2025). Fecundidade e Sucesso Competitivo de *Macrobrachium* spp. que Cohabitam em Ambientes de Represamento. *Ensaio e Ciência: Ciências Biológicas, Agrárias e da Saúde*, 29(1), 247-261
- Sampaio, C.M.S., Silva, R.R., Santos, J.A., Sales, S.P.** (2007). Reproductive cycle of *Macrobrachium amazonicum* females (Crustacean, Palaemonidae). *Brazilian Journal of Biology*, 67, 551-559.
- Silva, K.C.A., Souza, R.A.L., Cintra, I.H.A.** (2002). Camarão-cascudo *Macrobrachium amazonicum* (Heller, 1862) (Crustacea, Decapoda, Palaemonidae) no município de Vigia, Pará, Brasil. *Boletim Técnico-Científico do CEPNOR*, 2, 41-73.
- Silva, R.R. & Sampaio, C.M.S.** (2004). Ciclo reprodutivo de fêmeas de *Macrobrachium amazonicum* (Crustacea, Palaemonidae). In: Abstracts of AquaCiência 2004, Vitória, p. 382. Jaboticabal, Sociedade Brasileira de Aqüicultura e Biologia Aquática.
- Silva, K.C.A., Cintra, I.H.A., Muniz, A.P.M.** (2005). Aspectos bioecológicos de *Macrobrachium amazonicum* (Heller, 1862) a jusante do reservatório da hidrelétrica de Tucuruí, Pará. *Boletim Técnico-Científico do CEPNOR*, 5, 55-71.

- Silva, M.C.N., Frédou, F.L., Souto-Filho, J.** (2007). Estudo do crescimento do camarão *Macrobrachium amazonicum* (Heller, 1862) da Ilha de Combú, Belém, Estado do Pará, Amazonia. *Ciência e Desenvolvimento*, 2, 85-104.
- Silva, B.B.** (2011). *Ecologia, pesca e dinâmica populacional do camarão-da-Amazônia – Macrobrachium amazonicum (Heller, 1862) (Decapoda: Palaemonidae) capturado na região das ilhas de Belém-Pará, Brasil*. Tese de Doutorado, Universidade Federal do Pará.
- Tamburus, A.F., Mossolin, E.C., Mantelatto, F.L.** (2012). Populational and reproductive aspects of *Macrobrachium acanthurus* (Wiegmann, 1836) (Crustacea: Palaemonidae) from North Coast of São Paulo State, Brazil. *Brazilian Journal of Aquatic Science and Technology*, 16, 9-18.
- Valenti, W.C., Cardoso, J., V. Lobão.** (1989). Fecundidade em *Macrobrachium acanthurus* (Wiegmann, 1836) do Rio Ribeira de Iguape (Crustacea, Decapoda, Palaemonidae). *Revista Brasileira de Zoologia*, 6, 9-15.
- Walker, I.** (1992). Life history traits of shrimps (Decapoda, Palaemonidae) of Amazonian Inland waters and their phylogenetic interpretation. *Studies on Neotropical Fauna and Environment*, 2-3(27), 131-143.
- Wehrmann, I.S.** (1990). Distribution and reproduction of *Ambidexter panamense* and *Palaemonetes schmittii* in Pacific Costa Rica (Crustacea, Decapoda). *Revista de Biología Tropical*, 38, 327-329.
- Williamson, D. L.** (1972). Larval development in a marine and freshwater species of *Macrobrachium* (Decapoda, Palaemonidae). *Crustaceana*, 3(23), 282-298.
- Zar, J.H.** (1999). *Biostatistical analysis*. Prentice-Hall.
- Zimmermann, U., Carvalho, F.L., Mantelatto, F.L.** (2015). The reproductive performance of the Red-Algae shrimp *Leander paulensis* (Ortmann, 1897) (Decapoda, Palaemonidae) and the effect of post-spawning female weight gain on weight-dependent parameters. *Brazilian Journal of Oceanography*, 63(3), 207-216.

Revisión tema

Teorías evolutivas en los cursos de Zoología y en los discursos de fin de periodo académico en la Universidad Nacional de Colombia, 1868-1875

Evolutionary theories in the zoology courses and end-of-year speeches at Universidad Nacional de Colombia, 1868-1875

✉ Xavier Marquínez-Casas^{1,*}, ✉ Joao Muñoz-Durán¹, ✉ William Usaquén-Martínez²

¹ Departamento de Biología, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, Colombia

² Instituto de Genética, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, Colombia

Resumen

La fundación de la Universidad Nacional de los Estados Unidos de Colombia en 1868 ocurrió una década después de la publicación de *El origen de las especies* de Darwin (1859). En la Escuela de Ciencias Naturales, Fidel Pombo dictó cursos de Zoología entre 1868 y 1873, y sus estudiantes Emilio Álvares y José Vicente Rocha escribieron discursos de final de año lectivo. Otros estudiantes y profesores también escribieron discursos en diferentes contextos. Examinando el programa de la asignatura y los discursos quisimos responder las siguientes preguntas: ¿las enseñanzas zoológicas de Pombo se enmarcaban en la tradición biológica moderna de interpretación de la naturaleza en el contexto de las ideas predarwinianas de transformación de las formas de vida surgidas durante el siglo XIX, o de la teoría de la evolución por selección natural de Darwin y Wallace? y ¿los discursos de los estudiantes y profesores mostraban tendencias creacionistas o evolucionistas? El análisis de las fuentes históricas permitió concluir que el curso de Zoología de Fidel Pombo siguió directamente el sistema de clasificación de Cuvier o, indirectamente, el libro *Lecciones de Historia Natural* de su discípulo Louis Doyère. Aunque Cuvier pertenece a la escuela francesa predominantemente catastrofista y esencialista, se infiere de algunos discursos estudiantiles que se discutieron otros autores transformistas como Buffon, Lamarck o Geoffroy. Otros discursos de estudiantes revelan una visión positivista, pero fundamentalmente creacionista. El profesor de moral Enrique Cortés es el primer académico en citar a Darwin en un texto publicado en Colombia; no obstante, su pensamiento es spenceriano.

Palabras claves: Creacionismo; Enrique Cortés; Evolucionismo; Fidel Pombo; Transformismo.

Abstract

The Universidad Nacional de los Estados Unidos de Colombia was founded in 1868, a decade after the publication of Darwin's *On the Origin of Species by Means of Natural Selection, or the Preservation of Favoured Races in the Struggle for Life* (1859). At the School of Natural Sciences, Fidel Pombo taught zoology courses between 1868 and 1873, and his students Emilio Álvares and José Vicente Rocha wrote end-of-year speeches. Other students and teachers also prepared speeches in different contexts. Based on the courses' syllabus and the speeches, we considered the following questions: Could Pombo's zoological teachings be framed within the modern biological tradition, or did he conceive nature within the background of the pre-darwinian evolutionary ideas that emerged during the 19th century, or within the theory of evolution by natural selection proposed by Darwin and Wallace?, and did the speeches of the students and teachers express creationist or evolutionist tendencies? The analysis of historical sources allowed us to conclude that Fidel Pombo's zoology class followed directly Cuvier's classification system, or, indirectly, the book *Lessons in Natural History*, written by his disciple Louis Doyère. Although Cuvier belongs to the catastrophic and essentialist French school, it can be inferred from the student speeches that other transformist authors

Citación: Marquínez-Casas X, et al. Teorías evolutivas en los cursos de Zoología y en los discursos de fin de periodo académico en la Universidad Nacional de Colombia, 1868-1875. Revista de la Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. 49(192):568-583, julio-septiembre de 2025. doi: <https://doi.org/10.18257/raccefn.3161>

Editor: Martha Patricia Ramírez

***Correspondencia:**

Xavier Marquínez-Casas;
xmarquinez@unal.edu.co

Recibido: 9 de febrero de 2025

Aceptado: 12 de agosto de 2025

Publicado en línea: 29 de agosto de 2025



Este artículo está bajo una licencia de Creative Commons Reconocimiento-NoComercial-Compartir Igual 4.0 Internacional

such as Buffon, Lamarck, and Geoffroy were discussed in Pombo's courses. Other student speeches manifested a positivist, but fundamentally creationist vision. Enrique Cortés, a professor of morals, was the first Colombian academic to quote Darwin, but his thinking is nonetheless Spencerian.

Keywords: Creationism; Enrique Cortés; Evolutionism; Fidel Pombo; Transformism.

Introducción

El estudio sobre la introducción y recepción del darwinismo en Iberoamérica se remonta a 1972 (Glick, 1974) y ha continuado desde entonces (Glick, 1982; Glick *et al.*, 1999; Argüeta, 2009, Orozco, 2010, Barahona, 2012, Ruiz *et al.*, 2015, entre otros). El darwinismo ingresó en nuestro medio asociado frecuentemente al positivismo de tinte lamarckiano y spenceriano, lo que desde el inicio generó álgidos debates con los creacionistas. Pioneros del darwinismo fueron Fritz Müller en Brasil desde 1864 y Felipe Poey en Cuba desde 1869 (Glick, 1982; Glick *et al.*, 1999), Eduardo Ladislao Holmberg desde 1875 en Argentina (Orozco, 2010), Justo Sierra desde 1881 en México (Ruiz *et al.*, 2015) y Belisario Díaz Romero desde 1892 en Bolivia (Argüeta, 2009), para mencionar solo algunos.

En comparación con otros países latinoamericanos, los pioneros del darwinismo en Colombia aparecieron relativamente tarde. Aunque las primeras menciones del trabajo de Darwin en Colombia aparecieron durante los años setenta del siglo diecinueve y se hicieron más frecuentes en los ochenta, la mayoría de estos autores interpretaron de manera errada la teoría de la evolución por selección natural. Una de las confusiones más frecuentes consistió en referirse al fenómeno evolutivo como un proceso direccional en el que las especies eran cada vez más complejas y perfectas, culminando con la aparición de nuestra propia especie.

Orozco (2010) plantea cómo Colombia, a diferencia de otros países latinoamericanos, “no tuvo un precursor del darwinismo y no hubo una persona específica que lo defendiera, siendo realmente sus contradictores quienes lo dieron a conocer”. Por su parte, Olga Restrepo, pionera en el estudio de la recepción del darwinismo en Colombia, adopta en sus obras un enfoque de tipo histórico, sociológico y cultural (Restrepo, 1993), y presenta el darwinismo, no como una teoría simplemente aceptada o rechazada, sino como un terreno de discusión, interpretación y adaptación por parte de diversos actores con diferentes agendas políticas, pedagógicas o religiosas (Restrepo, 2007). En cuanto a la recepción, Restrepo destaca a Juan de Dios Carrasquilla, quien en su ensayo *Del influjo de las ciencias naturales en la civilización y el progreso* (1888) hizo una “viva defensa del darwinismo que integra perfectamente los argumentos centrales de una teoría científica” (Restrepo, 1995b). Carrasquilla distinguió claramente las concepciones evolutivas de Lamarck, Cuvier y Darwin, y explicó el surgimiento de la teoría de la evolución por selección natural en el contexto del fijismo europeo, reconociendo, además, la contribución independiente de Alfred Russell Wallace (Carrasquilla, 1988). Nosotros destacamos, además, a Carlos Arturo Torres, quien en su ensayo *Diletantismo científico* (1898) demostró un conocimiento profundo de las obras de Darwin, Huxley, Haeckel y Spencer, diferenciando el darwinismo del positivismo spenceriano y corrigiendo interpretaciones erróneas comunes en el pensamiento colombiano de la época.

En lo tocante a los profesores y cursos de la naciente Universidad Nacional de los Estados Unidos de Colombia, Restrepo y Becerra (1995b) afirmaron que

una década después de la primera comunicación de Darwin y Wallace sobre la teoría de la evolución por selección natural [...] ya se habían introducido temas que muestran algún conocimiento de la cuestión en varios de los programas de la Escuela de Ciencias Naturales.

En Restrepo y Forero (1995a) y Restrepo (1995) se señala que el contenido del curso de Zoología de Pombo culmina con el estudio de la “zoología filosófica”, y trata sobre “el plan jeneral de la naturaleza en la organización animal” y de los “diferentes

instintos de los animales en lo que hace referencia a la conservación del individuo i de la especie, i de la relación del animal para con sus compañeros”. Al interpretar los programas, **Restrepo y Becerra** (1995) afirmaron que los profesores de la Escuela de Ciencias Naturales enseñaban temas evolutivos controversiales y simpatizaban con las ideas expresadas por **Darwin** (1859) en *El origen de las especies*, aunque también señalaron que “El capítulo final [del Programa de Zoología] y los temas desarrollados tal vez hicieran mayor referencia a Lamarck que a Darwin, lo cual no deja de ser interesante” (**Restrepo & Becerra**, 1995b).

En un escrito previo (**Marquínez et al.**, 2022b) demostramos cómo en el capítulo sobre geografía de las plantas del curso de botánica de **Francisco Bayón** (1868), se aborda el origen de las especies vegetales, pero planteado desde una perspectiva biogeográfica influida por Augustin Pyramus de Candolle y no en clave darwiniana. Por su parte, el curso de geología y paleontología elaborado por **José María González** (1871) se inscribe dentro de la escuela catastrofista y esencialista de Cuvier y de su discípulo Alcide d’Orbigny.

Aquí nos propusimos analizar en detalle el contenido y el contexto evolucionista del curso de Zoología de **Pombo** (1868). Para ello revisamos el programa de dicho curso y determinamos sus posibles fuentes primarias, y evaluamos algunos de los discursos que los estudiantes debían dar al final del año académico en torno a las asignaturas cursadas, con especial énfasis en dos de ellos dedicados a la asignatura de zoología escritos por **Álvares** (1868) y **Rocha** (1868). También analizamos el discurso del profesor **Cortés** (1872), el cual es probablemente el primer texto en el que se menciona explícitamente a Charles Darwin en Colombia (**Restrepo**, 1995a). La pregunta específica que nos planteamos fue qué teorías creacionistas o evolucionistas (catastrofismo, lamarckismo, darwinismo, etc.), subyacen en el curso de Zoología de Fidel Pombo, así como en algunos discursos estudiantiles y el escrito por **Enrique Cortés** (1872).

La filosofía zoológica de Pombo (1868)

Teorías evolutivas previas al curso de Zoología de Fidel Pombo

Las primeras concepciones del fenómeno evolutivo se inspiraron en la idea de la cadena del ser de Aristóteles. Esta concepción hizo parte central de la primera teoría formal de la evolución propuesta por Jean Baptiste Lamarck, profesor de zoología del Museo de Historia Natural de París, en *Philosophie Zoologique* (**Lamarck**, 1809). Según Lamarck, la naturaleza genera espontáneamente formas simples que a través de transformaciones sucesivas originan formas más complejas y perfectas, culminando con la especie humana. Su mecanismo se sustentaba en la acción de los fluidos internos que moldean las partes dúctiles de los organismos y en el efecto complementario del uso, el desuso y la herencia de caracteres adquiridos (**Lamarck**, 1809).

Otros naturalistas del Museo de Historia Natural de París defendieron la transmutación de las especies. Desde una perspectiva deísta, George Louis Leclerc, Conde de Buffon, sostuvo que las especies se originaron de manera independiente en moldes de arcilla gracias a la acción del calor de la tierra primigenia y a las fuerzas de atracción que actuaron sobre las moléculas orgánicas dando lugar a los primeros seres vivos (**Mayr**, 1982; **Appel**, 1987; **Caponi**, 2010). Estas especies “nobles”, originadas en el hemisferio norte, se desplazaron hacia los trópicos con el posterior enfriamiento del planeta y allí fueron modificadas mediante un proceso de degeneración, dando origen a nuevas especies (**Mayr**, 1982; **Rostand**, 1985; **Appel**, 1987; **Caponi**, 2010). **Étienne** Geoffroy Saint Hilaire, por su parte, vislumbró el mecanismo de selección natural al argumentar que los cambios ambientales afectan el desarrollo embrionario de los seres organizados, modificando su estructura y, por lo tanto, su funcionamiento y hábitos de vida. Si estas modificaciones resultan en efectos deletéreos, los seres que las expresan perecen y son reemplazados por otros cuyas modificaciones se ajustan a las nuevas condiciones ambientales. Geoffroy afirmó que los diferentes estados de desarrollo embrionario por los que transcurre una especie representan formas animales más simples con las que están relacionados evolutivamente. También

intuyó el concepto de homología al argumentar que los rasgos comunes entre diferentes especies constituyen evidencia de un proceso de transmutación y la existencia de ancestros comunes (**Geoffroy**, 1829; **Mayr**, 1982; **Rostand**, 1985; **Appel**, 1987).

En contraste, Georges Cuvier, paleontólogo y anatomista comparado del mismo Museo, gran defensor del fijismo, argumentó desde una perspectiva esencialista y teleológica que los grupos zoológicos actuales habrían sido creados de manera independiente; que cada especie fue creada con un propósito particular y cada órgano para cumplir una función especial; que la estructura de los organismos refleja la función que deben cumplir; que la semejanza entre especies resulta de necesidades “adaptativas” similares, y que las funciones comunes y su sucesión en diferentes capas estratigráficas no implican ancestría compartida o transmutación. Cuvier objetó cualquier idea de evolución argumentando que las especies son armónicas desde el punto de vista funcional y estructural, por lo tanto, no podrían sobrevivir si alguno de sus rasgos esenciales fuera modificado de manera sustancial. Cuvier también refutó la idea lamarckiana de cambio gradual y continuo al señalar la ausencia de formas intermedias entre los principales grupos taxonómicos de plantas y animales. Rechazó, asimismo, la idea de evolución hacia mayores niveles de perfección al afirmar que los organismos son una combinación de estructuras simples y complejas (**Cuvier**, 1829; **Mayr**, 1982; **Rostand**, 1985; **Appel**, 1987; **Rudwick**, 1997).

Cuvier también documentó períodos repentinos de extinción de faunas locales asociados con terremotos, erupciones volcánicas, inundaciones y cambios climáticos (**Cuvier**, 1812, 1826, 1829; **Mayr**, 1982; **Rostand**, 1985; **Appel**, 1987; **Rudwick**, 1997). Estas observaciones conforman la base de lo que se conoce como la escuela catastrofista, que es contraria a la noción de evolución gradual, con lo que reforzó la noción fijista de primera mitad del S XIX.

La perspectiva lamarckiana del fenómeno evolutivo fue retomada en Inglaterra por Robert Chambers en *Vestiges of the natural history of creation and other evolutionary writings* (**Chambers**, 1844) y por Herbert Spencer en el campo de las ciencias sociales y humanas. Este último resulta de particular relevancia, pues sus ideas fueron comúnmente amalgamadas con las Darwin. **Spencer** (1857) propuso la existencia de leyes naturales inmutables, entre ellas la del cambio evolutivo; parafraseando a Lamarck, en su ensayo *Progress: its law and cause* propuso que existe una direccionalidad del proceso de cambio hacia mayores niveles de complejidad, heterogeneidad, integralidad y perfección. Para Spencer la evolución de lo humano también está impulsada por las leyes del uso y el desuso, y por la herencia de caracteres adquiridos. Unos años después, en *First principles* (**Spencer**, 1863) planteó que la selección natural influye en el éxito relativo de las sociedades humanas. Esta aproximación, conocida como “darwinismo social”, tuvo una amplia aceptación entre mediados de la década de 1860 y finales del siglo XIX. Spencer acuñó la expresión “supervivencia del más apto”, término que Alfred Russel Wallace, en carta fechada el 2 de julio de 1866, sugirió a Darwin para que la empleara en nuevas ediciones de su obra, con el fin de con mayor claridad el concepto de selección natural (carta disponible en <https://www.darwinproject.ac.uk/letter/DCP-LETT-5140.xml>).

La publicación de *El origen de las especies* (1859) desafió profundamente las concepciones fijistas y teleológicas predominantes hasta mediados del siglo XIX. La obra fue rápidamente traducida a varios idiomas europeos. La primera traducción al español, realizada por Enrique Godínez, solo apareció en 1877 y se basó en la sexta edición (darwin-online.org.uk). Esta demora contribuye a explicar la recepción tardía y parcial del darwinismo en Colombia.

Breve reseña de Fidel Pombo Rebolledo (1837- 1901)

Fidel Pombo hacía parte de la aristocracia criolla, era hijo del político y diplomático Lino Pombo y hermano menor del poeta Rafael Pombo. Estudió en el Colegio de San Bartolomé y en el Colegio Militar, donde comenzó estudios de ingeniería y matemáticas; posteriormente cursó Ingeniería en la Escuela Científica de Sheffield de la Universidad

de Yale, de la que se graduó en 1858. Posteriormente viajó y vivió en Londres; en 1867 regresó de Europa, fundó una librería en Bogotá y se incorporó como profesor de geometría, mineralogía y zoología en la Universidad Nacional de los Estados Unidos de Colombia, siendo uno de los fundadores de la Academia de Ciencias en 1872 (**Museo Nacional**, 2013). **García** (1955) señala que cuando iniciaba sus estudios a comienzos de los años 80 del siglo XIX, solo existían cuatro librerías en Bogotá, una de ellas, la de Fidel Pombo, especializada en “ciencias exactas – teóricas y aplicadas- y de ciencias físicas y naturales”. Lo anterior habla de su carácter erudito y bibliófilo. Pombo fue curador del gabinete de mineralogía del Museo Nacional cuando este estuvo en las instalaciones de la Escuela de Ciencias Naturales (1870-1874). Posteriormente fue director del Museo Nacional desde 1885 hasta su muerte en 1901, donde desplegó una labor para hacerlo crecer estimulando donaciones, valiéndose de la prensa como órgano de difusión y la ayuda de sus vínculos familiares y científicos (**Pérez**, sin fecha).

Programa de zoología de Pombo (1968)

El programa de zoología de **Pombo** (1868) contiene unas “nociones preliminares” y tres temas principales: zoología fisiológica, zoología descriptiva y zoología filosófica. El programa parece seguir el primer volumen de *Lecciones de Historia Natural* de **Doyère** (1847), traducido del francés al español por Lucas Tornos (**Figura 1S**, <https://www.raccefyn.co/index.php/raccefyn/article/view/3161/4576>). Se examinaron otras posibles fuentes alternas como el volumen *Elementos de Zoología* de Laureano **Pérez-Arcas** (1861), el cual tiene alguna afinidad en contenidos, aunque el orden de los temas es bastante diferente. No se observó ninguna relación con el sistema de clasificación de mamíferos propuesto por Lucian **Bonaparte** (1841).

El programa de **Pombo** (1868) y el texto de **Doyère** (1847) comienzan con unas nociones preliminares relativas a la división en los tres reinos clásicos según el sistema natural de Linnaeus. La diferencia entre los reinos que allí se argumenta es reminiscente de las ideas de Aristóteles en su tratado *Sobre el alma*: los minerales no viven, los vegetales viven, pero ni sienten, ni se mueven, y los animales viven, sienten y se mueven por libre voluntad, pero carecen de un alma inmortal, excepto el hombre (**Blainville**, 1822). Estas ideas también aparecen en el discurso de 1868 de Rocha, discípulo de Pombo:

Mui pronto este hombre se formará una idea general de la materia animada i la distinguirá fácilmente de la materia inanimada. Poco tiempo después distinguirá la materia animada de la materia vegetativa i encontrará tres grandes divisiones en el espectáculo armonioso de la naturaleza, que son el reino animal, el vegetal i el mineral (**Rocha**, 1868).

Tanto en el texto de **Doyère** (1847) como en el programa de **Pombo** (1868), se registran en el campo de la zoología fisiológica las funciones de la vida vegetativa (nutrición, digestión, circulación, respiración, calor animal y reproducción) y las de la vida animal (sistema nervioso, sensibilidad y los cinco sentidos). El organismo animal es la organización en acción, o sea, el conjunto de los órganos y de sus funciones.

La zoología descriptiva de **Pombo** (1868) y de **Doyère** (1847) siguen el programa de Cuvier: los caracteres sobre los que deben establecerse las divisiones de este reino son los de las funciones animales, es decir, las sensaciones y el movimiento, porque hacen del ser un animal y, además, establecen su grado de animalidad. El corazón y los órganos de la circulación son una especie de centro para las funciones vegetativas, así como el cerebro y el tronco del sistema nervioso lo son para las funciones animales.

A partir de estas consideraciones, Cuvier establece cuatro ramas o tipos cuyas divisiones responden a ligeras modificaciones dadas por el desarrollo o el aumento de algunas partes, sin modificar la esencia del plan. Estas son las cuatro ramas: vertebrados, articulados, anélidos y zoófitos. A manera de ejemplo, los vertebrados se caracterizan por tener un esqueleto interno y por la ubicación del sistema nervioso en posición dorsal respecto del sistema digestivo.

Pombo (1868) señaló que seguía el “sistema de Cuvier con las modificaciones más notables que se han introducido”, seguramente basado directa o indirectamente en la obra *Regne animal distribué d’après son organisation*, puesto que su programa, así como el libro de Dóyere, se ciñen estrictamente al sistema de clasificación animal de **Cuvier** (1829). En **Doyère** (1847) se discuten algunos conceptos teniendo en cuenta otros autores (Buffon, Geoffroy y Blainville, pero no Lamarck), y estas serían las modificaciones más notables que cita Pombo. Por otra parte, el libro de Doyère contiene una geografía de los animales que no está presente en el programa de Pombo, en cambio, éste presenta una breve “zoología filosófica”:

Nociones sobre el plan general de la naturaleza en la organización animal – Consideraciones generales sobre los diferentes instintos de los animales en lo que hace referencia a la conservación del individuo i de la especie, i de las relaciones del animal con sus compañeros” (**Pombo**, 1868).

Las temáticas generales de zoología filosófica son desarrolladas en los dos discursos de los alumnos Emilio Álvares y José Vicente Rocha, que eran requisito para aprobar la “clase elemental de Zoología”, y debían ser leídos públicamente al terminar el curso.

El plan de la naturaleza: discurso de Emilio Álvares (1868)

En el inicio del discurso, **Álvares** (1868) nos habla de la época anterior a la aparición de los primeros seres organizados:

los tiempos primitivos de la creación, en que la tierra, después de haber sido un inmenso globo líquido, presentó en su superficie una corteza sólida, formada por la parte mas exterior de su masa enfriada por la irradiación hacia los espacios celestes.

Álvares parece hacer referencia a **Buffon** (1778), quien planteó por primera vez una visión histórica de la naturaleza. Buffon pensaba que si la tierra se había originado como una bola de fuego, podría calcular el tiempo requerido para su enfriamiento, así que experimentó con esferas de hierro candente y luego escaló sus datos a una esfera del tamaño de la tierra; posteriormente planteó composiciones más realistas y, finalmente, calculó que la tierra tendría al menos 75.000 años (**Gould**, 2014). Buffon estableció siete épocas que corresponderían a los siete días de la creación en el Génesis.

Posteriormente, **Álvares** (1868) señaló cómo surgieron los diferentes organismos sobre la tierra:

Puede decirse casi con seguridad, que las criptógamas formaron el primer organismo viviente sobre la tierra, que todavía estaba temblorosa y se resentía de las tormentosas catástrofes que por ella cordilleras i mares de lava o de lodo, no podían desarrollarse i vivir sino plantas que como las criptogamas, parece que se alimentaran con el jugo de las rocas [...] Cuando comenzaron a desprenderse de las primeras flores que abrian sus corolas al mundo, gratos i fragantes perfumes que formaban el primer himno de gracias, el primer incienso que la naturaleza ofrecía a su Creador; fué entónces, que aparecieron los primeros animales, para presentarse despues i en último lugar el hombre, rei de lo creado i para el cual parece que Dios se hubiera esmerado en formar tanta maravilla (**Álvares**, 1868).

Hasta este punto, se trata de un creacionismo por épocas, siguiendo la línea de las criptógamas, plantas con flores, animales y el hombre. Se trata de uno de los temas centrales cuyo germen está en Aristóteles y que resurge en los siglos XVII y XVIII: la gran cadena del ser. Es un relato histórico, creacionista, aunque no con la temporalidad del génesis; también es teleológico, pues remite a una causa final, la creación del hombre.

En seguida se propone la idea de grandes catástrofes sucesivas en la fauna, antes del surgimiento del hombre, de las cuales tenemos noticia por sus restos fósiles, lo que responde a la visión del catastrofismo de Cuvier y de su alumno Orbigny:

Antes del hombre el universo vió aparecer muchas especies distintas de animales cuyas especies, primitivamente creadas, fueron desapareciendo sucesivamente, i hoy no tenemos noticias de ellas sinó por sus restos fósiles encontrados en el seno de la tierra. Después de esta sucesión de especies animales, la tierra llegó a un estado adecuado para que el hombre pudiera habitarla (Álvares, 1868).

A continuación, sin embargo, Álvarez (1868) plantea el debate entre Cuvier y otros naturalistas del siglo XIX. Cuvier se consideraba completamente empirista y prevenía constantemente de los peligros del razonamiento *a priori* y de la especulación alejada del examen de los hechos positivos; por su parte, otros pensadores como Lamarck, Geoffroy y Blainville, los dos primeros transformistas y el último antievolucionista, creían que era imposible arribar al conocimiento verdadero por simple inspección de los hechos. Se requerían “Principios”. Para determinar qué hechos serían relevantes, las deducciones *a priori* no presentarían peligro para la ciencia si después eran corroboradas por el examen detallado de los hechos (Appel, 1980).

Según Álvarez (1868), la zoología, además de su componente descriptivo,

alza su vuelo atrevido hasta las rejiones mas elevadas, en donde permanecen velados los secretos del Omnipotente, sus invariables principios [...] Los conocimientos que se tienen hoy, sobre los principios que han servido al Omnipotente en la creación de los animales, el plan que ha seguido en la creación de todos ellos, i las armonias orgánicas que en la serie animal se encuentran....

Dos grandes sistemas de clasificación animal se confrontaban en la escuela francesa de mediados del siglo XIX. El primero, de Cuvier, el fundador de la anatomía comparada, se basaba en la organización interior de los seres como se vio anteriormente (Cuvier, 1829), y el segundo, propuesto por Blainville, se basaba en los caracteres externos (Blainville, 1822; Appel, 1980), lo que Álvarez (1868) retoma así: “Cuando se examina con una sola ojeada toda la escala de los animales se ve que no hai nada mas variado, “tanto en las formas exteriores, como en la organización interior”.

En seguida se plantea que algunos seres, como el hombre, presentan

un tipo perfecto de organización, funciones muy complicadas i órganos especiales para cada una de las funciones. Otros, como los infusorios, presentan una organización que se podría llamar degradada, las funciones confundidas entremezcladas las unas con las otras, los órganos poco multiplicados; en una palabra, encontramos “seres perfectos y seres imperfectos”.

Álvares (1868) también se pregunta:

¿Cómo es que la naturaleza ha marchado en la formación de su obra? – ¿Habrá comenzado por el ser mas perfecto, por el hombre, i habrá ido degradando su “tipo”, su creación para formar el infusorio? – O ¿habrá comenzado por el menos perfecto de los seres animados, i por mejoras, por perfeccionamientos hechos a su obra habrá podido elevarse hasta el ser inteligente i libre que Linneo ha llamado Homo sapiens? – Esto parece ser lo más probable.

George Louis Leclerk, conde de Buffon, creía que las primeras especies, a las que llamó nobles, experimentaron un transformismo por degeneración a medida que colonizaban nuevas regiones alejadas de los centros de origen. A partir de los fósiles que estudió, consideraba que los seres creados en las primeras edades de la tierra eran perfectos y que se transformarían por degeneración en formas cada vez más imperfectas. Lamarck (1809), en cambio, mostró cómo las clases zoológicas pueden seguir un orden incremental de perfección, direccionalidad del cambio que explicó a partir de sus ideas del uso y el desuso y la herencia de caracteres adquiridos. Sin embargo, en ninguna parte del discurso de Álvarez se menciona a Lamarck, tampoco en los textos de los autores consultados por Pombo, siendo un *autor ignorado por sus contemporáneos* (Appel,

1980). Álvares y Pombo, consideraban que el orden en que la naturaleza ha marchado corresponde al perfeccionamiento de los tipos y, a continuación, examinaron los principios que la naturaleza ha seguido para perfeccionar su obra.

El primer principio propuesto es el de la “división del trabajo”: en los seres menos perfectos, que ocupan un lugar inferior en la serie animal, “su organización es mucho más simple, sus órganos son menos numerosos, menos variados, y sus funciones por consiguiente son ejecutadas con menos perfección”. En los más perfectos, como el hombre, la naturaleza

ha dado a cada acto especial de las funciones de la vida un órgano particular; ha hecho del organismo un inmenso taller, en donde cada obrero está encargado de un trabajo especial, el cual ejecuta con puntualidad y exactitud, pues no tiene otra cosa que distraiga su atención. La acción unánime y regular de estos obreros infatigables, la marcha perfecta de esta máquina viviente, constituye la vida de un organismo completo - Para no citar más que un ejemplo veamos el movimiento en los animales superiores - El cerebro produce la excitación, da la *orden*; el cerebelo la regulariza; el nervio la trasmite, el músculo la ejecuta. Ved aquí cuatro órganos distintos concurrir para producir una sola acción; pero por la multiplicación de estos órganos la acción es perfecta (Álvares, 1868).

Este principio es fundamental en el fijismo de Cuvier, si todos los órganos están perfectamente adaptados y cumplen una función precisa, cualquier cambio en el diseño de uno de ellos sería fatal para el organismo, pues destruiría su armonía funcional. Para explicar la diversidad de los organismos animales, Cuvier acepta la diferencia en perfección entre las diferentes clases de la organización animal, pero no acepta que existan formas intermedias entre las clases, rechazando la gran cadena del ser, por lo que cada una de las clases correspondería a una creación independiente. Así, Álvares y Pombo consideran, siguiendo a Cuvier, que

no parece cierto que la naturaleza haya tomado un solo tipo para la creación de los animales. Por el contrario, parece que se deja ver en ellos, que se han formado varios tipos, aunque en pequeño número; y es viendo las cosas de esta manera que se ha llegado a la división de los animales en cuatro brazos o tipos principales- vertebrados, articulados, moluscos y zoófitos.

El segundo principio que menciona Álvares entra, hasta cierto punto, en contraposición con el primero:

Otro de los principios que se dejan percibir en el plan de la naturaleza para formar los animales, es la “tendencia a la uniformidad”. Este es uno de los puntos más bellos y de más alta importancia, pues por el análisis completo de él se puede trazar, en cierto modo, el camino seguido por el grande artífice en la creación de la serie animal. Si tomamos dos animales muy distantes por su organización, un mamífero y un zoófito, por ejemplo, es difícil a primer aspecto determinar las analogías que presentan y hacen notar la tendencia a la uniformidad de organización. Pero si abrazamos de una sola mirada toda la serie animal; si marchamos de la clase superior hasta la inferior, pasando en revista todos los seres que las componen, tendremos que convenir que, aunque en la serie entera haya animales muy distintos unos de otros, considerados en masa tienen grandes analogías, viéndose en ellos que la naturaleza ha tomado un pequeño número de órganos, los cuales ha modificado para cada animal, según los usos que en él debían llenar. Esto es lo que ha hecho a muchos zoólogos decir que los animales forman una escala no interrumpida de seres, y que todos están organizados conforme a un tipo único más o menos modificado (Álvares, 1868).

Geoffroy de Saint Hilaire introdujo en la zoología francesa el concepto de homología, el cual fue redefinido en la biología postdarwiniana, y que, inicialmente, se entendía como afinidad estructural y posicional, algunas veces oculta, entre huesos y otros elementos

corporales al comparar diferentes grupos de animales. **Geoffroy** (1829) reconoció una cierta constancia en el número y disposición relativa de los huesos del esqueleto entre las cuatro clases de vertebrados. Posteriormente quiso ampliar este concepto a la organización interna de organismos pertenecientes a los invertebrados, buscando un *bauplan*, o unidad de tipo. Como Cuvier consideraba que cada tipo correspondía a un plan de creación independiente, se generó un agrio debate entre Geoffroy y Cuvier, el cual ha sido analizado a fondo por **Appel** (1987).

Blainville en cambio mantuvo una posición intermedia entre la continuidad del plan morfológico de Geoffroy y la discontinuidad de los tipos propuestos por Cuvier. Para ello, en su clasificación definió series jerárquicas de subreinos, tipos, clases, etc. Cada grupo debía considerarse como un todo para determinar la superioridad o inferioridad relativa respecto a otro grupo. Pero, ¿cuáles eran los criterios para juzgar la superioridad en las series superiores de clasificación? Blainville definía a los animales como seres organizados que poseen sensibilidad y movimiento, pero carentes de un alma inmortal. Entre más capacidad de sentir y de moverse tuviera un animal, más alto sería el nivel en la serie o escala, siendo los órganos del sistema nervioso el criterio más importante.

Una vez ordenadas las series, **Álvares** (1868) reconoce que:

Se encuentran sin embargo en algunos tipos anomalías, si se puede decir así, que hacen que una clase marche paralelamente a otra, como puede verse en los vertebrados i en los articulados, en los cuales hai clases que podrían marchar paralelamente a los mamíferos i a los insectos. Es por esto que algunos zoólogos en lugar de asemejar el reino animal a una escala no interrumpida de seres [la gran cadena del ser, Charles Bonnet], lo comparan a un rio, que estrecho i débil al principio de su curso, aumenta después su caudal avanzando hacia el mar, sin arrastrar siempre todas sus aguas por el mismo lecho; sino que a veces se divide en brazos que, o se vuelven a reunir inmediatamente, o siguen separados hasta mas adelante, perdiéndose adelante en la arena, para reaparecer mas allá y seguir adelante su camino.

Lamarck (1809) diría que, luego de hacer grandes esfuerzos por ordenar cada una de las series o tipos siguiendo una escala de perfección, existían aún muchos grupos que no podían localizarse adecuadamente sin interrumpir la continuidad de las series, por ejemplo, ¿dónde colocar a las ballenas en una serie de mamíferos? Si el único factor fuera la tendencia inherente de la naturaleza a una mayor perfección, contaríamos con series perfectas; sin embargo, un segundo factor, el poder adaptativo del ambiente sobre los animales, a través de sus necesidades, originaría anomalías en las series. **Blainville** (1822) propone un concepto similar: las anomalías se darían no por el perfeccionamiento o degeneración en la serie, sino por haberse adaptado a vivir y atrapar sus presas en un determinado ambiente; en este sentido, Blainville considera a los cetáceos, por ejemplo, como edentados anormales, o al lémur volador como una anomalía de los primates (**Appel**, 2014).

Por último, **Álvares** (1868) concluye que

Estos cuatro tipos así por la naturaleza tomados [los tipos propuestos por Cuvier] i modificados para la formación de cada especie o de cada familia animal, según las costumbres, el jénero de vida i los medios en el que el animal debió desarrollarse, han formado el cuadro completo que la mano de Dios a trazado ante el universo.

En general, el texto de **Álvares** hace un recorrido por la zoología europea, principalmente la francesa, de la primera mitad del siglo XIX. Su pensamiento es creacionista, aunque por momentos reemplaza a Dios por la naturaleza y los principios que esta ha seguido en la creación de los animales, así que no es un creacionismo de tiempos bíblicos, sino histórico, en el sentido de reconocer un tiempo profundo en el origen de las especies. Más allá del empirismo estricto, reconoce la necesidad de descubrir o reconocer unos principios para entender la zoología y entre ellos incluye el de “división del trabajo”

y el de “uniformidad”; posteriormente acepta los cuatro tipos o ramas de Cuvier en la organización de los organismos, aunque manteniendo la idea de series de perfección en cada rama, en el sentido de Blainville. Finalmente, para explicar las anormalidades en las series de perfección admite el efecto transformador de las costumbres, el género de vida y los medios en que el animal debió desarrollarse, concepto que pudo ser tomado de Lamarck directamente o, con mayor probabilidad, de Blainville. El texto fluctúa entre el creacionismo y el transformismo, entre la unidad de plan de Geoffroy y los tipos de Cuvier. Sin embargo, en todos los casos es predarwiniano.

El paradigma fijista del instinto: discurso de José Vicente Rocha (1868)

El breve programa de filosofía zoológica de Pombo hace énfasis en lo que hoy denominaríamos etología animal: “Consideraciones generales sobre los diferentes instintos de los animales en lo que hace referencia a la conservación del individuo i de la especie, i de las relaciones del animal con sus compañeros”. La parte central del discurso de su alumno **Rocha** (1868) hace una reflexión histórica de las ideas sobre el instinto y la inteligencia en los animales:

Buffon concede a los animales la vida i el sentimiento lo mismo que Descartes i les concede también la conciencia de su existencia actual; pero les niega el pensamiento, la reflexión, la memoria o conciencia de lo pasado i la facultad, de comparar sensaciones o de tener ideas. Reaumur lo mismo que Buffon confunde el instinto con la inteligencia i no creyendo negar sino la inteligencia Buffon niega hasta el instinto; i Reaumur les concede hasta la inteligencia no creyendo concederles sino el instinto. Jorje Leroy confunde también lo mismo que Buffon i Condillac el instinto con la inteligencia. Busca el orijen de los instintos particulares de los animales en alguna circunstancia general de sus facultades ordinarias: derivando la industria de la debilidad, la sociabilidad del temor, el instinto de hacer provisiones del hambre precedentemente sentida, i llega hasta decir que los viajes de las aves son el fruto de una instrucción que se perpetúa de raza en raza.

A continuación hace algunas reflexiones acerca de las industrias (construcción de nidos, madrigueras y otras estructuras) y de la sociabilidad en algunos animales, y continúa así su argumento:

Lo que importa es buscar los límites que separan el instinto de la inteligencia; los límites que separan la inteligencia del hombre de la de los animales. Poseyendo estos límites, la cuestión tan largo tiempo debatida de la inteligencia de los animales tomará un nuevo aspecto. [...]

Los animales no tienen instrucción ninguna de por sí, todo lo que el animal hace lo hace por instinto i sin haberlo aprendido. ¿Quién enseña al gusano de seda a formar su capullo? No puede haber visto a sus parientes porque una generación no ve a la otra [...]. ¿Quien no conoce el bello arquitecto de las abejas?, Allí reina una orden i método admirable, siempre rejidas por las mismas leyes” (**Rocha**, 1868).

Si contrastamos estos párrafos con la definición que George Cuvier da sobre instinto (tomado de **Martínez**, 1994), rápidamente concluimos que este es el autor seguido por Pombo en su programa de zoología y por Rocha en su discurso:

Existe en gran número de animales, una facultad diferente de la inteligencia; es aquella llamada instinto. Ésta les hace producir ciertas acciones activas necesarias a la conservación de la especie, pero a menudo totalmente extrañas a la necesidad aparente de los individuos, a veces también muy complicadas y que, si debieran ser atribuidas a la inteligencia, supondrían una previsión y conocimiento infinitamente superiores a aquellos que se pueden admitir en las especies que la ejecutan. Las acciones producto del instinto no son tampoco el efecto de la imitación, pues los individuos que las

practican no las han visto hacer nunca a otros [...]. Son tan claramente propiedad de la especie, que todos los individuos las ejecutan de la misma manera sin perfeccionarlas en nada.

Cuvier ejemplifica esto último con las abejas, quienes construyen “desde el comienzo del mundo edificios muy ingeniosos”, señalando a continuación que las abejas y avispa solitarias forman estos nidos complicados

para depositar en ellos sus huevos. Sale de este huevo un gusano, que nunca ha visto a su madre, que no conoce nada de la estructura de la prisión donde esta encerrado y que, una vez metamorfoseado, construye sin embargo una perfectamente semejante para su propio huevo.

De nuevo aquí Cuvier muestra un pensamiento creacionista. La idea fijista del instinto es más moderada en su hermano Frederick Cuvier, quien dice, por ejemplo:

El carácter de invariabilidad que se ha dado a las acciones del instinto no debe ser tomado en un sentido completamente absoluto. El animal conserva siempre el ejercicio de sus sentidos, el grado de inteligencia que le es propio y emplea ambos de la manera más favorable en la acción instintiva en la que esta siendo llevado. (Tomado de **Martínez**, 1994).

Evidentemente, las ideas planteadas son completamente opuestas a la visión que establece Darwin sobre el instinto animal al final del capítulo VIII de *El origen de las especies* (1859):

He intentado demostrar que los instintos varían ligeramente en estado natural. Nadie discutirá que los instintos son de importancia suma para todo animal. Por consiguiente, no existe dificultad real en que, cambiando las condiciones de vida, la selección natural acumule hasta cualquier grado ligeras modificaciones de instinto que sean de algún modo útiles.

En relación con el estudio de los instintos y la inteligencia, Pombo reconoce parcialmente un debate que surgió en el siglo XIX y que sería el núcleo de lo que más adelante conformaría la disciplina que llamamos etología. Sin embargo, desconoce posiciones evolucionistas de este debate, entre ellas las de Geoffroy de Saint-Hilaire y la del propio Charles Darwin.

Creacionismo o evolucionismo en otros discursos estudiantiles

En su tercer año en la Escuela de Ciencias Naturales, **Michelsen-Uribe** (1870) hace un sentido elogio de las enseñanzas recibidas porque están

fundadas en la minuciosa observación de los hechos más comunes, dan la razón y explican la causa de los continuos fenómenos que nos presenta el universo y que “tienen por objeto el sostenimiento de la creación”, la naturaleza es el verdadero libro de la sabiduría.

De la zoología y la botánica dijo:

El hombre creado para gobernar i gozar de la naturaleza, no se contentó con admirar asombrado la obra portentosa del Creador. Quiso conocer los animales, estudiarlos detenidamente y observar el provecho que podía sacar del conocimiento [...] reconoció luego que entre los vegetales unos le dan suaves y sabrosos alimentos, otros le ayudan a soportar las contrariedades de la vida.

Sobre la geología y mineralogía afirmó:

Elevado sobre el resto de la creación, enorgullecido por su poder, asombrado con los frutos de su perseverante trabajo, no satisfecho con conocer a fondo lo que lo rodea,

sediento de ciencia, esculco con avidez el suelo que lo sostiene, escudriñó en un momento lo que gastó siglos en formarse, rectificó lo que su inteligencia había previsto, i no dejó a la naturaleza ni los secretos que ocultaba en las entrañas de la tierra.

Sobre la agricultura planteó que esta

debe llamar con preferencia la atención i el estudio el naturalista colombiano; cuando esta ciencia haya perfeccionado los procedimientos para elaborar la superficie de nuestro territorio, i haya enseñado a nuestros agricultores a ahorrar esfuerzos i a multiplicar los dones de la naturaleza, es que conviene penetrar en la espesura de nuestros bosques para sacar las preciosidades que encierran i extender a ellos nuestras poblaciones.

Luego de su recorrido por la Escuela de Ciencias Naturales, Michelsen-Uribe cuenta ya con un pensamiento utilitarista, convencido de las posibilidades del progreso y de la ciencia, pero sigue siendo creacionista:

La ciencia fue i es el elemento indispensable [del] progreso. Hombres como Cavendish, Priestley, Dalton, Newton, Lavoisier, Berthollet, Gay-Lussac, Wollaston, Audibon i Franklin, han hecho en silencio, i paso a paso, por la prosperidad de su patria, mas que Wellington, Napoleon i Washington. Gracias a ello la ciencia cuenta en el número de sus inteligentes obreros, a los príncipes Carlos L. Bonaparte i Max de Neuwied, a los condes de Dundonald, de Buffon i de Lacepedé, a los barones Cuvier i de Humboldt i otros cuya lista numerosa seria largo i cansado recitaros.

Entre los hombres de ciencia que cita están franceses, ingleses y algunos americanos, cita a Cuvier y a Buffon, pero no a Lamarck, Geoffroy o Darwin, es decir, a ningún evolucionista.

Otros discursos de estudiantes indican permanentemente un pensamiento creacionista y deísta en los estudiantes de la Universidad Nacional: “Desde que el hombre fue creado ha sido incansable en la indagación de la verdad; ella ha sido siempre el ídolo de sus sueños de bienestar” (López, 1870). “El grande autor de la naturaleza, que es portentosa obra de la creación todo lo formó perfecto i armónico, se reservó, si pudo decirlo, la organización del hombre para demostrar su infinita sabiduría” (Herrera, 1873). “El hombre fue creado después de todos los otros seres, i su frente estaba adornada con la corona del poder; el mundo entero había de ser su habitación; i los innumerables seres organizados estaban sometidos a su voluntad” (Useche, 1868).

La naturaleza se animó desde que la tierra comenzó a moverse: el movimiento presidió a la vida del hombre, i cuando este abrió los ojos al mundo, lleno de admiración debió encontrar, por donde quiera que los dirija, al movimiento como la base de todo [...] Su existencia, en efecto, fue posterior a la del mundo entero, al cual venia a servir como de coronamiento (Aparicio, 1868).

“La necesidad de un Ser supremo la sentimos i reconocemos, contemplando uno cualquiera de los seres de la creación: nuestra imaginación se confunde i un abismo nos aterra al querer investigar la intima naturaleza de las cosas” (Garcés, 1870).

Está bien reconocido que todo lo creó Dios antes que al hombre, pues al abrir este los ojos al mundo se encontró rodeado de cuanto podía necesitar: es indudable que los animales le precedieron; que tenían organización i vida propia... (Pareja, 1870).

Casi todos los discursos mostraron una visión deísta, creacionista y generalmente relacionada con una serie lineal en la que el hombre ocupaba la posición más elevada entre los animales y seres vivos. En ningún discurso se nombra la palabra evolución o transmutación al hablar de los seres vivos. Solo en un caso se plantea al hombre como un “noble” animal y no como un producto de la creación:

¿Que es el hombre? Las ciencias naturales, que han tomado este noble animal para analizarlo escrupulosamente, desde la posición vertical que ocupa, i que le es privativa, hasta encontrar en la economía de su cerebro las aptitudes propias para el

pensamiento i su desarrollo como para el uso de la palabra, aptitudes que no presenta ningún animal, no obstante la semejanza de organización de algunos de estos con el hombre; las ciencias naturales, digo, contestarán un día satisfactoriamente aquella pregunta, que a las generaciones que quedan hacen constantemente las generaciones que se van (**Angulo**, 1870).

Evolucionismo moral: el “spencerismo” de Enrique Cortés

Debemos cerrar comentando que, tal como señala **Restrepo** (1995), Enrique Cortés, profesor de la Universidad Nacional y catedrático de moral, es el primer académico en mencionar a Darwin en Colombia, en su discurso de cierre del año lectivo 1872:

El reino animal presenta una sucesion tan continuada i una escala tan distinta de organizaciones cada vez mas perfecta, hasta llegar al hombre, que ha encontrado entre los sabios la atrevida teoría de Mr. Darwin, por la cual el desarrollo i perfeccionamiento de los individuos son fenómenos pertenecientes tambien a la vida colectiva. Según el, la lei de la “eleccion natural” i de la concurrencia vital presiden a la formación i aparicion de mas perfectos jéneros i de nuevas i mas maravillosas especies; coronamiento de las cuales es la especie humana, que ha hecho su aparición de mil sucesivas transformaciones, en escala ascendente; siendo el hombre el mas avanzado esponente i el mas sorprendente desarrollo de la fuerza progresiva de la vida en la superficie de nuestro globo (**Cortés**, 1872).

Sin embargo, el propósito de Cortés no es analizar aspectos del mundo biológico, sino defender la reforma educativa instruccional recién aprobada en 1870. Por ello, acto seguido, **Cortés** (1872) menciona a Herbert Spencer:

Finalmente, esta misma teoría del desarrollo progresivo acaba de producir en Inglaterra un nuevo sistema de filosofía moral i ética, llamado la “teoría de la evolución moral”, cuyo atrevido espositor es Mr. Herbert Spencer, i según la cual los sistemas filosóficos i morales se circunscriben i deben obedecer al estado de desarrollo i adelanto en que se encuentra el espíritu humano. O mejor dicho, que la filosofía moral es una ciencia que jamas alcanzará sus últimos linderos, asi como no puede jactarse de alcanzarlos ninguna ciencia positiva.

Demos señalar que existen claras diferencias entre las teorías de Darwin y Spencer: Darwin trataba de definir una ley que permitiera entender el origen y evolución de las especies biológicas, en tanto que Spencer buscaba una ley universal que diera cuenta de la evolución de las sociedades y de la moral. La novedad del trabajo de Darwin consistió en proponer un mecanismo para el proceso evolutivo, la selección natural, en tanto que Spencer fundamentó sus ideas en la “supervivencia del más apto”. La teoría de la selección natural no es teleológica, en tanto que la ley de Spencer sí busca establecer una ley progresiva.

Cortés (1872) continúa su discurso afirmando:

Sea cual fuere la última verdad acerca de estas varias teorías, lo cierto es que el espíritu humano está acercándose visiblemente al descubrimiento de una gran lei universal, que lleva por tipo distintivo el desarrollo i por fin la unidad. Por lo demás, la historia del hombre no es otra cosa que una continua labor de desarrollo en un sendero ascendente no interrumpido.

Conclusiones

Los profesores de las diferentes cátedras de la Escuela de Ciencias Naturales que analizamos aquí tuvieron como fuentes primarias textos franceses o españoles (**Marquínez et al.**, 2022a, 2022b, esta investigación). La zoología de **Pombo** (1868) tuvo como fuente a **Doyère** (1847), alumno de George Cuvier, ambos adscritos a la escuela francesa, principalmente catastrofista y esencialista.

Aunque en el curso de Zoología de Fidel Pombo, al igual que en los cursos de Botánica y de Geología y Paleontología (Marquinez, 2022b), se discutieron temas referentes al origen y transformación de las especies, las ideas correspondían a autores transformistas franceses como Jean Baptiste Lamarck o Étienne Geoffroy, o a autores fijistas como Cuvier y Blainville, sin ninguna referencia a las propuestas de evolución por selección natural de Charles Darwin.

Los alumnos de los diversos cursos de la Escuela de Ciencias Naturales en sus discursos de cierre de año lectivo manifestaron visiones progresistas y positivistas, pero fundamentalmente creacionistas. Enrique Cortés (1872), profesor de moral, es el primer académico que cita a Darwin en un texto publicado en Colombia, sin embargo, por sus propósitos, sus argumentos, sus conclusiones y su pensamiento no se le puede calificar como darwinista en el sentido biológico y sí claramente como spenceriano.

Información suplementaria

Ver la información suplementaria en <https://www.raccefyn.co/index.php/raccefyn/article/view/3161/4576>

Agradecimientos

Los autores expresan su más sincero agradecimiento al Departamento de Biología y al Instituto de Genética de la Universidad Nacional de Colombia. Esta investigación fue posible gracias al apoyo ofrecido por la Universidad Nacional de Colombia a través del proyecto de investigación “Recepción del darwinismo en Colombia - una mirada histórica desde la biología” (Código Hermes: 57437). También al proyecto “Mutis, Rother y Pérez-Arbeláez: Un encuentro entre la arquitectura y la biodiversidad andina” (Código Hermes: 47265).

Contribución de los autores

XMC: concepción, diseño y dirección de la ejecución del trabajo, revisión de la literatura, escritura del documento, participación en reuniones de discusión y análisis, redacción del artículo y revisión crítica de su contenido. **JMD:** concepción y diseño del trabajo, revisión de literatura, participación en reuniones de discusión y análisis, revisión crítica y aportes al contenido del artículo. **WUM:** concepción y diseño del trabajo, revisión de la literatura, participación en reuniones de discusión y análisis, revisión crítica y aportes al contenido del artículo.

Conflicto de intereses

Los autores declaran que no tienen conflictos de intereses.

Referencias

- Álvarez, E. (1868). Zoología [Discurso]. En: E.R. Zea, C. H. Sánchez, y G.A.S. Carrero (2017, pp. 63-71). *Universidad, Cultura y Estado, Tomo I*. Universidad Nacional de Colombia.
- Angulo, L. (1870) Zoología [Discurso]. *Anales de la Universidad Nacional de los Estados Unidos de Colombia*, 4(24), 483-484.
- Appel, T. A. (1980). Henri de Blainville y la serie animal: una cadena de seres del siglo XIX. *Revista de Historia de la Biología*, 13(2), 291-319.
- Appel, T. A. (1987) *The Cuvier-Geoffroy debate: French biology in the decades before Darwin*. Oxford University Press.
- Aparicio, A. (1968). Sobre Fisiología [Discurso]. *Anales de la Universidad Nacional de los Estados Unidos de Colombia*, 1(4), 353-356.
- Argüeta, A. (2009). *El darwinismo en Iberoamérica. Bolivia y México*. Madrid: Consejo Superior de Investigaciones Científicas.
- Barahona, A. (2012). La introducción del Darwinismo y las ideas de la herencia de los médicos en México a finales del siglo XIX. En: *Darwin y el evolucionismo contemporáneo* (Martínez J. y Ponce de León, A. coord.) México: Siglo XXI.
- Bayón, F. (1868). Escuela de Ciencias Naturales. Programa de Botánica. *Anales de la Universidad Nacional de los Estados Unidos de Colombia*, 1(3), 291-295.

- Blainville, H. M. D.** (1822). *De l'organisation des animaux, ou, Principes d'anatomie comparée: Contenant la morphologie et l'aistésologie (Vol. 1)*. Levrault.
- Bonaparte, C. L. A.** (1841). *New systematic arrangement of vertebrated animals*. R. Taylor.
- Buffon, G. L. L. C.** (1778). *Historie naturelle, générale et particulière: Contenant les époques de la nature*. De l'Imprimerie royale.
- Caponi, G.** (2010). *Buffon*. Universidad Autónoma Metropolitana.
- Carrasquilla R. M.** (1882). La Ciencia Cristiana. *El Repertorio Colombiano*, 9(53), 352-361.
- Chambers, R.** (1844). *Vestiges of the natural history of creation and other evolutionary writings*. The University of Chicago Press.
- Cortes, E.** (1872). Discurso. *Anales de la Universidad Nacional de los Estados Unidos de Colombia*, 6(48), 562-590.
- Cuvier, G.** (1812). *Recherches sur les ossemens fossiles de quadrupèdes: où l'on rétablit les caractères de plusieurs espèces d'animaux que les révolutions du globe paroissent avoir détruites*. Deterville.
- Cuvier, G.** (1826). *Discours sur les révolutions de la surface du globe, et sur les changemens qu'ells ont produit dans le règne animal. Troisième édition française*. Chez G. Dufour et Ed. d'Ocagne
- Cuvier, G.** (1829). *Le règne animal distribué d'après son organisation: Les mammifères et les oiseaux (Tome 1)*. Deterville.
- Darwin, C.** (1859). *On the origin of species by means of natural selection, or the preservation of favoured races in the struggle for life*. John Murray.
- Díaz, S.** (2012). Comentarios acerca de la recepción de la teoría de Charles Darwin en Colombia. *Revista de la Academia Colombiana de Ciencias*, 36(138), 79-92.
- Doyère, L. M. F.** (1847). *Lecciones de historia natural*. La ilustración.
- Garcés, M.** (1870). Sobre matemáticas [Discurso]. *Anales de la Universidad Nacional de los Estados Unidos de Colombia*, 3(13), 45-46.
- García-Ortíz, L.** (1955). Las viejas librerías de Bogotá. *Boletín de Historia y Antigüedades*, 33(385), 21-38.
- Geoffroy, S. H.** (1829). *Cours de l'histoire naturelle des mammifères*. Picho et Didier.
- Glick, T. F.** (1974). *The comparative Reception of Darwinism*. Austin, University of Texas Press.
- Glick, T. F.** (1982). *Darwin en España*. Barcelona, Ed. Península.
- Glick, T. F., Ruiz, R., Puig S. M. A. (eds.)** (1999). *El Darwinismo en España e Iberoamérica*. Aranjuez: Doce Calles / UNAM / CSIC.
- González, J. M.** (1871). Programa de la clase de Jeología i Paleontología. *Anales de la Universidad Nacional de los Estados Unidos de Colombia*, 5(34-35), 512-521.
- Herrera, J. D.** (1873). Patología general [Discurso]. *Anales de la Universidad Nacional de los Estados Unidos de Colombia*, 7(60), 565-569.
- Gould, S. J.** (2014). El hombre que inventó la historia natural. *Revista de economía institucional*, 16(31), 341-358.
- Lamarck, J. B.** (1809). *Philosophie zoologique*. Duminil-Lesueur.
- López, M. M.** (1870). Sobre geometría [Discurso]. *Anales de la Universidad Nacional de los Estados Unidos de Colombia*, 4(24), 470-471.
- Orozco-Gómez, M.** (2010). La influencia del darwinismo en Iberoamérica. *TRIM: revista de investigación multidisciplinar*, (1), 29-49
- Marquínez, X., Muñoz-Durán, J., Usaqué, W.** (2022a). Teoría celular en los cursos de botánica de Francisco Bayón en la Universidad Nacional de Colombia (1868-1875). *Acta Biológica Colombiana*, 27(2), 292-302.
- Marquínez X, Muñoz-Durán J, Usaqué, W** (2022b). Teorías evolutivas en los cursos de botánica, geología y paleontología en la Universidad Nacional de Colombia (1868-1875). *Acta Biológica Colombiana*, 27(3), 449-457.
- Martínez, J.** (1984). Sobre el instinto. El paradigma fixista del instinto frente a la revolución darwiniana. *Revista de filosofía Diánoia*, 30, 137-154.
- Mayr, E.** (1982). *The growth of biological thought*. Harvard University Press.
- Mora L.A.** (2011). La literatura de ideas en Carlos Arturo Torres Peña. *Cuestiones de Filosofía*, 13, 11- 36.
- Museo Nacional** (2013). Pieza del mes de mayo 2013. Última actualización: 2018-10-23 17:23:52 http://www.museonacional.gov.co/colecciones/Pieza_del_mes/colecciones-pieza-del-mes-2013/Paginas/Pieza-del-mes-de-mayo-de-2013.aspx

- Orozco-Gómez, M.** (2010). La influencia del darwinismo en Iberoamérica. *TRIM: revista de investigación multidisciplinar*, 1, 29-49
- Pareja, M. R.** (1870). Escuela de medicina [Discurso]. *Anales de la Universidad Nacional de los Estados Unidos de Colombia Escuela de Medicina*, 3(13), 53-59.
- Pérez-Arcas, L.** (1861). *Elementos de zoología*. Gabriel Alhambra.
- Pérez, A. C.** (2018). Museo Nacional. *Cuadernos de curaduría n° 3*. Sin fecha. Última actualización: 2018-09-25 22:35:37 <http://www.museonacional.gov.co/Publicaciones/cuadernos-de-curaduria/Paginas/cuadernos-de-curaduria-03.aspx>
- Pombo, F.** (1868). Escuela de ciencias naturales. Programa de Zoolojía. *Anales de la Universidad Nacional de los Estados Unidos de Colombia*, 1 (3), 296-300.
- Restrepo, O.** (1993). Naturalistas, saber y sociedad en Colombia, En: Restrepo, O., Arboleda L.C.; Bejarano, J.A. (Eds.). *Historias social de las ciencias. Historia natural y ciencias agropecuarias 3*, Instituto Colombiano para el Desarrollo de la Ciencia y la Tecnología Francisco José de Caldas.
- Restrepo, O.** (1995). El darwinismo en Colombia. Visiones de la naturaleza y la sociedad. *Acta Biológica Colombiana*, 14(5), 23-40.
- Restrepo, O. & Becerra, D.** (1995a). El darwinismo en Colombia. Naturaleza y sociedad en el discurso de la ciencia. *Revista Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales*, 19(74), 547-568.
- Restrepo, O. & Becerra, D.** (1995b). ‘Lectio, disputatio, dictatio’ en el nombre de la ciencia: una polémica evolucionista en Colombia. *Historia Crítica*, 10, 73-88.
- Restrepo, O.** (2007). Evolución, darwinismo y religión: debates, estereotipos y fronteras móviles. En: Tejeiro, C.; Sanabria, F., Beltrán, W.M. (eds.). *Creer y poder hoy*. Bogotá: Universidad Nacional de Colombia, Facultad de Ciencias Humanas.
- Rocha, J. V.** (1868). El Instinto de los animales [Discurso]. En: E.R. Zea, C. H. Sánchez, y G.A.S. Carrero (2017, pp. 59-62). *Universidad, Cultura y Estado, Tomo I*. Universidad Nacional de Colombia.
- Rostand, J.** (1985). *Introducción a la historia de la biología*. Planeta-Agostini.
- Rudwick, M. J. S.** (1997). *Georges Cuvier, fossil bones, and geological catastrophes: New Translations and Interpretations of the Primary Texts*. The University of Chicago Press.
- Ruiz R., Noguera R., Rodríguez J.M.** (2015). *Darwin en (y desde) México*. Siglo XXI - UNAM.
- Salazar, C. G.** (2011). Carlos Arturo Torres E Idola Fori. *Revista de Derecho Principia Iuris*, 16, 27-38.
- Spencer, H.** (1863). *First Principles*. Williams and Norgate.
- Spencer, H.** (1857). Progress: its law and cause. *Humboldt Library of Popular Science Literature*, 17, 233-285.
- Torres, C.A.** (1898). Dilettantismo Científico. *Boletín Cultural y Bibliográfico*, 4(7), 569-576
- Michelsen-Urbe, M.** (1870). Escuela de Ciencias Naturales [Discurso]. *Anales de la Universidad Nacional de los Estados Unidos de Colombia*, 3(13), 49-53.
- Useche, F.** (1868). Sobre Matemáticas [Discurso], *Anales de la Universidad Nacional de los Estados Unidos de Colombia*, 1(4), 34

Artículo original

Estado de conservación de la familia Sphagnaceae en Cuba bajo perspectivas de cambio climático

Conservation status of the Sphagnaceae family in Cuba under climate change perspectives

✉ Rogelio Roberto Muñoz-Li^{1,*}, ✉ Asiel Cabrera Guerreo², ✉ Ramón Salazar Quevedo²,
✉ Abdiel Jover Capote²

¹ Instituto para el Estudio de la Biodiversidad de Invertebrados, Facultad de Ciencias Naturales, Universidad Nacional de Salta, Argentina

² Facultad de Ciencias Naturales y Exactas, Departamento de Biología y Geografía, Universidad de Oriente, Santiago de Cuba, Cuba

Resumen

La familia Sphagnaceae tiene diez especies registradas en Cuba, todas categorizadas como “Amenazadas” en la Lista Roja de la flora de Cuba. Sin embargo, esta clasificación es preliminar y aún no existen criterios suficientes para establecer una categoría siguiendo las directrices de la IUCN. En este trabajo se utilizan los modelos de nicho climático generados con Maxent para evaluar el estado de conservación de estas especies en el contexto del cambio climático. Se utilizaron los criterios A y B de la Lista Roja de Especies Amenazadas y se estimaron las zonas prioritarias para su conservación utilizando el paquete redlistr en el *software* R. Dos de las especies de *Sphagnum* evaluadas cumplen con los criterios suficientes para ser asignadas a una categoría de amenaza. Aunque dichas especies tienen un buen grado de protección en el Sistema Nacional de Áreas Protegidas, existen zonas prioritarias para la conservación fuera de sus límites. El estado de conservación de la familia Sphagnaceae en Cuba se ve afectado por el efecto del cambio climático. En este contexto, las zonas más elevadas de los sistemas montañosos del oriente cubano pueden funcionar como refugios climáticos para estos briófitos.

Palabras clave: Briófitos; Distribución de especies; Especies amenazadas; Modelos de nicho climático; IUCN.

Abstract

The Sphagnaceae family has ten species recorded in Cuba. All of them are categorized as Threatened in the Red List of the Cuban Flora. However, this is a provisional categorization, and there are not enough criteria to establish a category according to IUCN guidelines. Here, we used climate niche models generated with Maxent to assess the conservation status of these species in the context of climate change. We applied criteria A and B of the Red List of Threatened Species. We estimated the priority areas for the conservation of these bryophytes with the redlistr package for R software. Two of the *Sphagnum* species evaluated meet enough criteria to be categorized as threatened. Although the Sphagnaceae are protected by the National System of Protected Areas, there are priority areas for their conservation beyond those boundaries. Their conservation status in Cuba is affected by the effects of climate change. The highest mountain systems in eastern Cuba may act as climatic refuges for these bryophytes.

Keywords: Bryophytes; Species distribution; Threatened species; Climate niche models; IUCN.

Citación: Muñoz-Li RR, *et al.*
Estado de conservación de la familia Sphagnaceae en Cuba bajo perspectivas de cambio climático. Revista de la Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. 49(192):584-601, julio-septiembre de 2025. doi: <https://doi.org/10.18257/raccefyn.319a9>

Editor: Luz Esperanza Guerra González

***Correspondencia:**
Rogelio Muñoz-Li;
rogelio.munoz@conicet.gov.ar

Recibido: 8 de abril de 2025

Aceptado: 14 de agosto de 2025

Publicado en línea: 29 de agosto de 2025



Este artículo está bajo una licencia de Creative Commons Reconocimiento-NoComercial-Compartir Igual 4.0 Internacional

Introducción

Cuba posee la mayor diversidad biológica de las Antillas en el Caribe. La flora del archipiélago está representada por más de 6.600 especies, entre las cuales destacan las gimnospermas, con 19 especies y 63,2 % de endemismo, y las angiospermas, con 6.542 especies y 52,6 % de endemismo (Capote *et al.*, 2011; Greuter & Rankin, 2016). Sin embargo, el país no está exento de los efectos del cambio climático y, por su condición insular, es vulnerable a ellos, lo que exige la evaluación continua del estado de la diversidad biológica y la determinación de los factores que inciden en su conservación y uso sostenible.

Los briófitos son componentes fundamentales de los bosques tropicales, pues tienen una gran diversidad, biomasa y conjunto de funciones ecológicas (Glime, 2017). Los musgos pueden reflejar el efecto del cambio climático de forma más rápida que las plantas vasculares debido a que son poiquilohidros y no pueden regular el contenido hídrico, sino que dependen completamente de la cantidad de agua disponible en el ambiente, lo que los convierte en excelentes bioindicadores para el monitoreo ambiental (Hao & Chu, 2022).

La familia Sphagnaceae Dumort. es una familia monogénica (*Sphagnum* L.) con cerca de 300 especies descritas alrededor del mundo, de las cuales aproximadamente 160 se encuentran en el Neotrópico (Costa, 2020). Su distribución corresponde fundamentalmente a lugares húmedos, pobres en nutrientes y humedales ácidos que van desde las zonas cercanas al nivel del mar hasta altitudes por encima de los 3.000 metros (Seppelt, 2012).

Cuba es uno de los países de las Antillas Mayores con mayor diversidad de musgos. Su distribución se concentra principalmente en las zonas montañosas del país, teniendo mayor representatividad en el territorio oriental (Motito & Potrony, 2010). La familia Sphagnaceae se encuentra distribuida en zonas de arenas cuarcíticas de Pinar del Río y la Isla de la Juventud, así como en las partes más altas y húmedas de las montañas orientales (Sierra de Nipe, Alto de Iberia, Pico Bayamesa, Pico Turquino y Gran Piedra) (Motito & Rivera, 2017).

En el país se han reportado diez especies de *Sphagnum*: *S. henryense* Warnst., *S. imbricatum* Hornsch. ex Russ., *S. macrophyllum*, *S. magellanicum* Brid., *S. meridense* (Hampe) Müll. Hal., *S. palustre* L., *S. perichaetiale* Hampe, *S. portoricense*, *S. recurvum* P. Beauv. y *S. strictum* Sull. (González-Torres *et al.*, 2016; Motito & Potrony, 2010). Todas las especies de la familia presentes en Cuba se encuentran reportadas en la lista roja de la flora cubana bajo la categoría preliminar de “Amenazadas” (González-Torres *et al.*, 2016), la cual es una categoría nacional que se otorga cuando se cumple el criterio preliminar del especialista del grupo. Las especie(s) en cuestión se podrían asignar a una de las categorías de amenaza establecidas por la Unión Internacional para la Conservación de la Naturaleza (IUCN), pero aún no se cuenta con los criterios que esta exige (González-Torres *et al.*, 2016).

La capacidad predictiva de los modelos de distribución de especies (MDE) empleados para proyectar el espacio geográfico-ecológico en el pasado y en el futuro incluye nuevas técnicas y herramientas de análisis de los problemas concernientes a la conservación de la biodiversidad bajo una perspectiva de cambio climático (Plissock & Fuentes-Castillo, 2011). Los MDE permiten establecer una asociación entre las observaciones georreferenciadas de la presencia o abundancia de las especies y los factores o variables predictoras ambientales, tales como el clima, el suelo y la topografía, entre otros (Pearson, 2007). Su uso hace posible crear representaciones cartográficas del espacio geográfico y su idoneidad para la presencia de una especie en función de las variables vigentes actualmente y bajo posibles escenarios de cambio climático, lo que permite establecer áreas prioritarias de conservación de las especies pertinentes (Burneo & Benítez, 2020).

El objetivo del presente trabajo fue evaluar el estado de conservación de las especies de la familia Sphagnaceae presentes en Cuba a partir de modelos de nicho climático, y proponer su actualización a nivel nacional siguiendo las directrices de la IUCN.

Materiales y métodos

Datos de distribución y selección de las variables predictoras

La presencia de las especies de *Sphagnum* se verificó a partir de datos del herbario del Centro Oriental de Ecosistemas y Biodiversidad (BSC) de Santiago de Cuba. Además, se revisó el repositorio digital que contiene los registros del Herbario de la Academia de Ciencias del Instituto de Ecología y Sistemática (HAC) y el Herbario del Jardín Botánico Nacional Johannes Bisse de la Universidad de la Habana (HAJB) (Greuter & Rankin, 2023; Regalado *et al.*, 2010). Solo el Herbario del Centro Oriental de Ecosistemas y Biodiversidad contaba con registros georreferenciados para las especies de *Sphagnum*. Se revisó la literatura científica publicada hasta la fecha utilizando el programa Publish or Perish v.8 (Harzing, 2010) y el motor de búsqueda de Google Scholar, y también se buscó en la base de datos Global Biodiversity Information Facility (GBIF, 2022; Ramírez *et al.*, 2022; Solomon & Stimmel, 2021). Se buscaron registros de todas las especies de *Sphagnum* reportadas en el país: *S. henryense* Warnst., *S. imbricatum* Hornsch. ex Russ., *S. macrophyllum* Bernh. ex Brid., *S. magellanicum* Brid., *S. meridense* (Hampe) Müll. Hal., *S. palustre* L., *S. perichaetiale* Hampe, *S. portoricense* Hampe, *S. recurvum* P. Beauv. y *S. strictum* Sull.

Se utilizaron 20 variables predictoras, de las cuales 19 son variables bioclimáticas que representan tendencias anuales, estacionalidad y factores ambientales limitantes o extremos, en tanto que la restante corresponde a un modelo digital de elevación, es decir, se trata de una variable topográfica. Todas ellas se obtuvieron de la base de datos WorldClim con una resolución espacial de 30 arcsec (aproximadamente 0,83 km²) (Fick & Hijmans, 2017). Antes de la selección de estas variables se construyeron modelos preliminares usando las capas de altura de dosel y de formaciones vegetales. Sin embargo, los resultados no representaron una contribución importante en cuanto a la altura de dosel, en cambio, las variables relacionadas con las precipitaciones, la temperatura y la elevación lograron capturar de mejor manera el efecto de las formaciones vegetales. Dada la pérdida de información al usar esta variable categórica (formaciones vegetales), se decidió no utilizarla.

El número de variables utilizadas en los modelos finales se redujo mediante dos filtros. En el primero, mediante una correlación de Spearman efectuada con el paquete Hmisc del *software* R (Harrell, 2019; R Core Team, 2020), se eliminaron aquellas variables que mostraron un alto grado de correlación ($> 0,7$ o $< -0,7$) para evitar la redundancia espacial que pudieran tener. En el segundo, se calculó el factor de inflación de la varianza (*variance inflation factor*, VIF) en el paquete HH del *software* R (Heiberger, 2018; R Core Team, 2020) para eliminar la multicolinealidad entre las variables restantes, asumiendo que si el VIF era mayor a 5, las variables perturbarían el modelo y harían difícil el establecimiento de un conjunto óptimo de factores ambientales explicativos (Mateo *et al.*, 2011).

Después de aplicar ambos filtros, se agregaron aquellas capas consideradas importantes en la ecología de las especies de *Sphagnum*. Para los escenarios de cambio climático se usaron las mismas variables bioclimáticas en tres escenarios futuros construidos por el modelo GISS-E2-1-H (NASA/GISS, 2018). Se eligieron escenarios de baja (SSP126), media (SSP370) y alta emisión (SSP585) de gases de efecto invernadero en dos periodos de tiempo: 2040-2060 y 2080-2100, los cuales están preestablecidos en la base de datos WorldClim (Fick & Hijmans, 2017). La variable de elevación se mantuvo por considerar que no variaba considerablemente en el periodo evaluado como para influir de manera diferente en los modelos obtenidos. Todos estos datos se descargaron con la misma resolución espacial que las variables utilizadas para la modelación de la actualidad.

Elaboración de los modelos de distribución de especies

Para generar los MDE se utilizó el método de máxima entropía en el programa Maxent, el cual muestra la distribución más cercana a la homogeneidad (situación de entropía máxima en la que todos los valores tienen la misma probabilidad de ocurrir), pero restringiéndola según la información biológica disponible y las condiciones ambientales del área de

estudio (Elith *et al.*, 2011). Se eligió este algoritmo debido a que produce modelos bastante robustos con pocos registros de presencia y es especialmente eficaz para datos relativos únicamente de presencia (Pearson *et al.*, 2006).

La configuración de salida de los modelos se realizó con la función logística por la facilidad con la que permite interpretar los resultados. Este formato proporciona una estimación de la probabilidad de presencia entre 0 y 1, donde 1 representa la máxima probabilidad y 0 la probabilidad nula. Para evitar el sobreajuste se utilizó un valor de regularización de 2,0 siguiendo las sugerencias de Radosavljevic y Anderson (2014). Se hizo una prueba *jackknife* y se construyeron curvas de respuesta que permitieran evaluar la importancia de cada variable utilizada. Los modelos actuales se proyectaron a escenarios climáticos de los periodos comprendidos entre los años 2040 y 2060, y los años 2080 y 2100. Con el fin de facilitar la evaluación del estado de conservación, los modelos obtenidos para los escenarios actuales y los futuros se convirtieron en mapas binarios de presencia-ausencia utilizando el umbral de 10 percentiles de los datos de entrenamiento.

Para hacer el ‘remuestreo’ y obtener resultados más robustos, se realizaron 100 réplicas con el método de *bootstrap*, las cuales se promediaron para obtener el modelo final. Para validar los MDE se calculó el valor del área bajo la curva (AUC) de la característica operativa del receptor (ROC), considerado un método estándar para evaluar la precisión de los modelos predictivos de distribución. Se considera que un valor de AUC superior a 0,7 corresponde a un buen ajuste del modelo, mientras que valores de 0,5 señalan resultados inadecuados, ya que la predicción sería similar a la obtenida por un análisis realizado al azar (Pearce & Ferrier, 2000). Los mapas finales de distribución potencial se construyeron a partir de estos modelos con el *software* QGIS (QGIS Development Team, 2022).

Evaluación del estado de conservación: tasa de cambio, extensión de presencia y área de ocupación

La evaluación del estado de conservación a nivel nacional de las especies de *Sphagnum* se hizo según las directrices y criterios de la Lista Roja de la IUCN. Con base en la disponibilidad de los datos de distribución se evaluaron los criterios A y B (IUCN, 2012a, 2012b, 2019; Rodríguez *et al.*, 2015). El criterio B se refiere a la distribución geográfica representada como extensión de presencia (B1) y área de ocupación (B2) (IUCN, 2012a, 2012b, 2019; González-Torres *et al.*, 2016), los cuales se calcularon a partir de los MDE. El criterio A se evaluó como la reducción del tamaño de la población que se proyecta alcanzar en diez años en concordancia con una reducción del área de ocupación (A3c). Con el fin de estimar fluctuaciones extremas o la reducción continua de esta medida, se calculó el porcentaje de pérdida del área de ocupación para periodos de 50 y 100 años. Para ello se utilizó el paquete *redlistr* del *software* R (Lee *et al.*, 2019; R Core Team, 2020).

Además, se comparó la extensión de la presencia en cada periodo de tiempo modelado para determinar si existían fluctuaciones extremas o disminución continua en este parámetro. El número de localidades se basó en el número de registros de presencia siempre que estuvieran separados por más de 1 km². En los casos en que la evaluación basada en los criterios sugirió una categoría diferente, se eligió la categoría de mayor amenaza. Para las especies que no poseían datos suficientes para establecer los MDE, se sugirió la categoría de “Datos insuficientes” (DD) (IUCN, 2012a, 2012b).

El paquete *redlistr* utilizado para la evaluación del estado de conservación se basa en cuatro familias de funciones: 1) la tasa de cambio, que brinda medidas o estimaciones del grado de cambio en la distribución de las especies en un período de tiempo específico, permitiendo utilizar el criterio A para la evaluación de especies en peligro; 2) la extensión de presencia, que calcula dicha medida mediante un polígono convexo mínimo, pudiéndose evaluar el criterio B1; 3) también se puede calcular el área de ocupación usando una cuadrícula con un tamaño específico para evaluar el criterio B2, en este caso, el tamaño de celda usado para determinar el área de ocupación fue de 1 Km², de esta forma se evitó sobrestimar este parámetro al obtener las medidas de modelos y no de puntos de presencia, y (4) la incertidumbre geométrica se emplea para asegurarse de que el área de ocupación calculada sea la mínima posible (Lee *et al.*, 2019).

Riqueza de especies y zonas prioritarias para la conservación

A partir de los mapas binarios obtenidos con el umbral de presencia de 10 percentiles de los datos de entrenamiento se construyeron mapas de riqueza de especies para el escenario actual y para posibles escenarios de cambio climático usando el método de ensamblaje de modelos (*stacking*) (Fuentes *et al.*, 2019). Este consiste en la sumatoria ponderada de los mapas binarios de presencia-ausencia de cada especie para generar un mapa en el que cada píxel posee un valor correspondiente a la riqueza de especies.

Para establecer las zonas prioritarias de conservación, se determinaron aquellas más expuestas a los efectos del cambio climático, dirigiendo el análisis hacia las áreas que poseían más de tres especies. Para ello se superpuso a los mapas de riqueza una retícula que dividió el área en 460 celdas hexagonales de aproximadamente 100 km². El tamaño de celda se eligió mediante la herramienta de estadística zonal de QGIS, seleccionando la media de los píxeles internos como estadístico a calcular, de manera que facilitara la visualización de las áreas (Fuentes *et al.*, 2019). Para cada celda se determinó un índice que describe los cambios relativos en el número de especies, el cual se interpretó como un indicador de la posible exposición al cambio climático (Fuentes *et al.*, 2019).

El índice de exposición se calculó a partir de la riqueza de especies en la actualidad y la proyectada en los tres escenarios de emisión para el periodo comprendido entre los años 2080 y 2100 con la herramienta estadística zonal de QGIS (QGIS Development Team, 2022) y siguiendo la propuesta de Fuentes *et al.* (2019) calculada como:

$$\text{Exposición} = -1 \times \left(\frac{\text{riqueza futura} - \text{riqueza actual}}{\text{riqueza actual}} \right) \times 100.$$

Se superpuso un mapa del Sistema Nacional de Áreas Protegidas de Cuba (SNAP) con los mapas de exposición, con el fin de evaluar el grado de protección brindado por el SNAP a las áreas más expuestas al cambio climático. Este fue descargado de la Base de Datos Mundial de Áreas Protegidas (*World Database on Protected Areas, WDPA*) (UNEP-WCMC & IUCN, 2023).

Resultados

Importancia de las variables predictoras

Las variables predictoras seleccionadas después de aplicar los dos filtros fueron la temperatura media anual, el rango diurno de temperatura, la temperatura estacional, la precipitación del mes más húmedo y la estacionalidad de las precipitaciones. Además, se agregaron la elevación y la precipitación anual por considerarse importantes en la distribución de los musgos Sphagnaceae. Las variables de mayor importancia en los modelos generados para los diferentes escenarios climáticos y periodos de tiempo fueron la elevación, las dos variables estacionales (estacionalidad de las precipitaciones y temperatura estacional), la media del rango diurno de temperatura y un factor limitante (precipitación del mes más húmedo) (Tabla 1).

Las variables con mayor ganancia al ser empleadas de forma aislada, con más información útil por sí mismas y, por lo tanto, con mayor porcentaje de contribución, fueron la estacionalidad de las precipitaciones (para *Sphagnum macrophyllum* Bernh. ex Brid. y el periodo comprendido entre los años 2080-2100 de *S. perichaetiale*); la elevación (*S. meridense* y *S. palustre* en el periodo entre 2080-2100); la media del rango diurno de la temperatura (*S. palustre* entre 2040-2060); la precipitación del mes más húmedo (*S. perichaetiale* entre 2040-2060), y la temperatura estacional (*S. recurvum*).

Por otra parte, se determinó un grupo de variables que de ser eliminadas disminuirían la ganancia en los modelos obtenidos, y que poseía más información útil que ninguna otra variable utilizada. Este grupo incluía la media del rango diurno de temperatura (*S. macrophyllum* y *S. palustre*), la temperatura estacional (*S. meridense* y *S. recurvum*) y la estacionalidad de las precipitaciones (*S. perichaetiale*).

Tabla 1. Porcentaje de contribución de las variables predictoras utilizadas en la modelación de cinco especies de *Sphagnum* en Cuba. Bio1: Temperatura media anual. Bio2: Rango diario de temperatura. Bio4: Temperatura estacional. Bio12: Precipitación anual. Bio13: Precipitación del mes más húmedo. Bio15: Estacionalidad de las precipitaciones. Elv: elevación. Los mayores valores de contribución aparecen en negrita

Especies	Variables predictoras						
	Elv.	Bio1	Bio2	Bio4	Bio12	Bio13	Bio15
<i>Sphagnum macrophyllum</i> Bernh. ex Brid.	29,8	0,4	17,6	1,5	1,3	4,1	45,4
<i>Sphagnum meridense</i> (Hampe) Müll. Hal.	57,9	4,0	3,0	32,1	1,6	0,6	0,8
<i>Sphagnum palustre</i> L.	2,8	14,6	22,4	22,5	5,9	28,8	3,0
<i>Sphagnum perichaetiale</i> Hampe	30,2	7,4	4,5	3,5	4,8	17,7	31,9
<i>Sphagnum recurvum</i> P. Beauv.	26,8	0,1	1,6	69,3	0,3	0,1	1,8

Modelos de nicho climático

Se obtuvieron 43 registros georreferenciados de la familia Sphagnaceae en Cuba que correspondían a las provincias de Pinar del Río, Isla de la Juventud, Holguín, Santiago de Cuba y Guantánamo (**Tabla S1**, <https://www.raccefyn.co/index.php/raccefyn/article/view/3199/4575>). De las diez especies de la familia registradas, solo cinco contaban con registros suficientes para realizar los MDE. No se encontraron datos suficientes para *S. henryense*, *S. imbricatum*, *S. magellanicum*, *S. portoricense* y *S. strictum*.

Todos los modelos realizados predijeron adecuadamente las zonas climáticamente idóneas para las cinco especies. Los modelos de tres de ellas mostraron una excelente capacidad de predicción, con valores de AUC de $0,986 \pm 0,01$; aquellos para las dos especies restantes mostraron valores de AUC de entre 0,745 y 0,863, lo que sugiere que son modelos con buen poder predictivo (**Tabla 2**).

En general, el nicho ambiental de las especies estudiadas posee gran afinidad con los sistemas montañosos del oriente cubano, con los mayores valores de probabilidad de presencia en las zonas más elevadas de la Sierra Maestra y el grupo montañoso Nipe-Sagua-Baracoa (**Figura 1**). Únicamente *S. palustre* mostró mayor idoneidad de hábitat en las regiones central y occidental del país (**Figura 1**). Por otra parte, los modelos para los escenarios futuros mostraron una pérdida progresiva de las áreas más idóneas, acrecentada por el rigor de los escenarios para la mayoría de las especies (**Figura 1**).

Tabla 2. Valores de área bajo la curva (AUC) obtenidos para los modelos de nicho climático de cinco especies de la familia Sphagnaceae en Cuba en los períodos comprendidos entre los años 2040 y 2060 y 2080 y 2100

Especies	Valores de AUC	
	2040-2060	2080-2100
<i>Sphagnum macrophyllum</i> Bernh. ex Brid.	0,987 ± 0,007	0,982 ± 0,01
<i>Sphagnum meridense</i> (Hampe) Müll. Hal.	0,976 ± 0,012	0,980 ± 0,009
<i>Sphagnum palustre</i> L.	0,863 ± 0,082	0,850 ± 0,08
<i>Sphagnum perichaetiale</i> Hampe	0,745 ± 0,07	0,761 ± 0,067
<i>Sphagnum recurvum</i> P. Beauv.	0,994 ± 0,004	0,997 ± 0,004

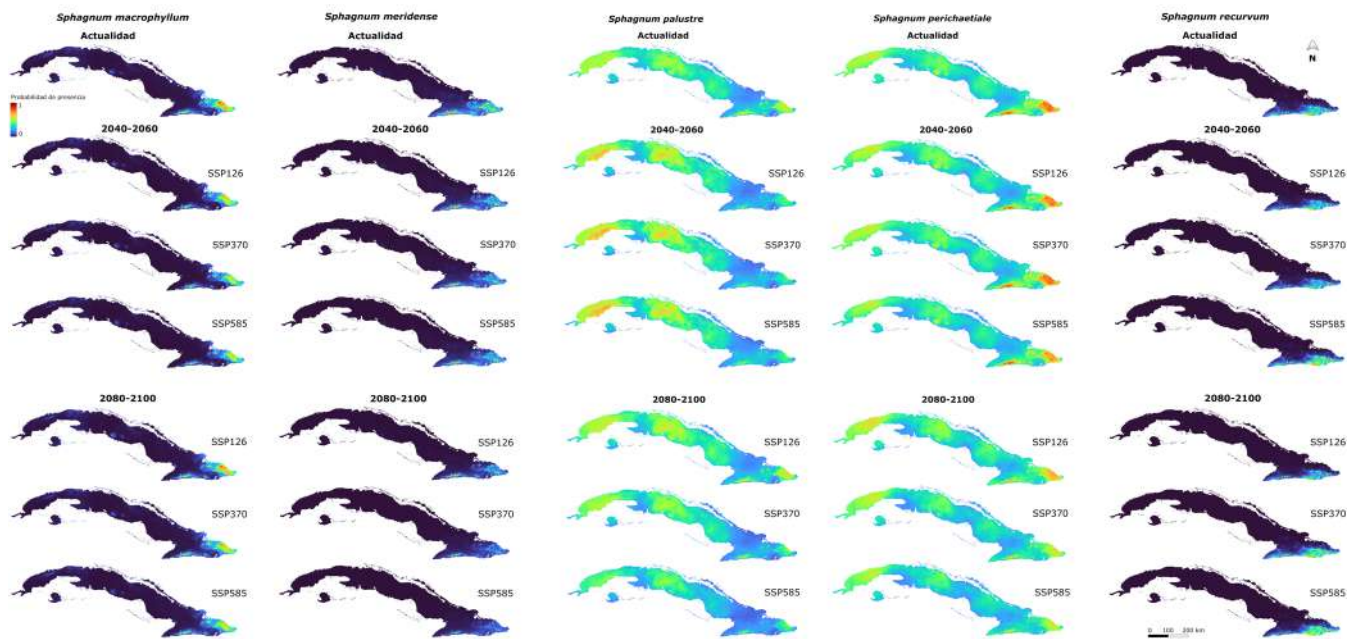


Figura 1. Distribución potencial de cinco especies de la familia Sphagnaceae en Cuba en la actualidad y en diferentes escenarios de cambio climático para los periodos comprendidos entre los años 2040 y 2060 y 2080 y 2100

Estado de conservación: extensión de presencia y área de ocupación (criterio B) y reducción del tamaño poblacional proyectado para los siguientes diez años (criterio A)

De acuerdo con el criterio B, la única especie que cumple con los requisitos para ubicarla en una de las categorías de amenaza es *S. recurvum*. Los valores señalaron que esta especie se encuentra en peligro (EN), pero los MDE correspondientes a los escenarios del cambio climático sugirieron que *S. meridense* y *S. palustre* podrían verse afectadas por este criterio en el futuro.

Los valores más bajos de extensión de presencia y área de ocupación se observaron para *S. recurvum* tanto en la actualidad como en los escenarios climáticos futuros, manteniéndose en alguna categoría de amenaza en todos los modelos realizados (Tablas 3 y 4). Esta especie se encuentra en menos de cinco localidades, y en el escenario de baja emisión disminuyó su rango de distribución en términos tanto de extensión de presencia como de área de ocupación, por lo que su disminución proyectada es continua en ambos parámetros.

Según el criterio B, *S. meridense* no posee valores para asignarla a alguna categoría de amenaza en la actualidad. Sin embargo, muestra valores propios de la categoría vulnerable (VU) en el periodo comprendido entre los años 2080 y 2100 en los escenarios de media y alta emisión atendiendo al subcriterio B1 (Tabla 3). En cuanto al subcriterio B2, los valores obtenidos correspondieron a la categoría VU en los escenarios de emisión media y alta entre los años 2040 y 2060, y en los de emisión baja y media para los años 2080 a 2100 (Tabla 4), pero para el escenario de alta emisión de los años 2080 a 2100, los valores la colocan en la categoría EN. Esta especie se distribuye en diez localidades y presenta una disminución proyectada continua tanto del área de ocupación como de la extensión de presencia.

Por su parte, *S. palustre* cumple con los valores que, según el subcriterio B2, responden a la categoría VU en el periodo de tiempo comprendido entre los años 2080 y 2100 (Tabla 4). Esta especie se encuentra en cinco localidades y su área de ocupación también disminuyó de manera continua en los escenarios proyectados. Las especies restantes no mostraron valores de extensión de presencia y área de ocupación que las ubicaran en alguna de las categorías de amenaza establecidas por la IUCN en ninguno de los modelos realizados.

Tabla 3. Valores de extensión de presencia en km² obtenidos a partir de los modelos de nicho climático de cinco especies de la familia Sphagnaceae en Cuba para la actualidad y bajo posibles escenarios del cambio climático.

	<i>S. macrophyllum</i> Bernh. ex Brid.	<i>S. meridense</i> (Hampe) Müll. Hal.	<i>S. palustre</i> L.	<i>S. perichaetiale</i> Hampe	<i>S. recurvum</i> P. Beauv.	
Actualidad	95 465,77	27 350,08	281 198,5	388 568,6	8571,29*	
SSP126	93 615,95	24 267,05	209 221,3	384 337,8	7498,13*	
2040-2060	SSP370	93 105,19	24 206,47	296 348,5	381 766,2	4712,23*
	SSP585	93 083,51	24 260,03	296 198,6	371 282,6	14 602,82*
	SSP126	101 409,3	22 700,98	304 089,5	389 639,9	6433,25*
2080-2100	SSP370	96 554,24	19 948,24*	281 445,3	384 281,0	11 742,96*
	SSP585	94 927,59	14 904,1*	191 092,2	377 311,5	10 173,07*

*: Valor que ubica a la especie en alguna categoría de amenaza

Tabla 4. Valores de área de ocupación en km² obtenidos a partir de los modelos de nicho climático de cinco especies de la familia Sphagnaceae en Cuba para la actualidad y bajo posibles escenarios del cambio climático.

	<i>S. macrophyllum</i> Bernh. ex Brid.	<i>S. meridense</i> (Hampe) Müll. Hal.	<i>S. palustre</i> L.	<i>S. perichaetiale</i> Hampe	<i>S. recurvum</i> P. Beauv.	
Actualidad	2703	4692	16 639	58 033	141 *	
SSP126	2426	2103	20 888	54 649	84*	
2040-2060	SSP370	2134	1654*	23 163	52 618	37*
	SSP585	2108	1976*	22 345	47 944	373*
	SSP126	3261	1261*	22 093	56 722	54*
2080-2100	SSP370	3223	609*	13 092	43 661	182*
	SSP585	2794	299*	1547*	35 625	231*

*: Valor que ubica a la especie en alguna categoría de amenaza

La aplicación del criterio A, cuantificado como la pérdida de área de ocupación, sitúa únicamente a *S. meridense* bajo una categoría de amenaza. Esta especie mostró una pérdida proyectada de más del 30 % de su área de ocupación para un periodo de 10 años, lo que hace que cumpla con los requisitos para entrar en la categoría VU (Tabla 5). Esta pérdida de área de ocupación es continua y se incrementa con el rigor de los escenarios, llegando a superar el 80 % en 50 años. Por su parte, *S. palustre* mostró valores muy cercanos a los establecidos para las categorías de amenaza, con una pérdida de más del 25 % de su área de ocupación dentro de los próximos 10 años (Tabla 5).

Según los resultados obtenidos de la evaluación, se sugiere asignarle una categoría de amenaza a *S. meridense* (VU) y a *S. recurvum* (EN), y tratar a *S. palustre* como “Casi amenazada” (NT) porque, aunque por el momento no cumple con los criterios para incluirla dentro de alguna categoría, está próxima a cumplirlos. Del mismo modo, se propone la categoría de “Preocupación menor” (LC) para *S. macrophyllum* y *S. perichaetiale* (Tabla 6). Las especies restantes no cuentan con datos suficientes para ser categorizadas, por lo que se propone la categoría DD (Tabla 6).

Tabla 5. Porcentaje de pérdida o ganancia de área de ocupación para las especies de *Sphagnum* en Cuba extrapolado a periodos de 10, 50 y 100 años.

10 años					
Escenarios	<i>S. macrophyllum</i> Bernh. ex Brid.	<i>S. meridense</i> (Hampe) Müll. Hal.	<i>S. palustre</i> L.	<i>S. perichaetiale</i> Hampe	<i>S. recurvum</i> P. Beauv.
SSP126	2,47	-15,69	3,75	-0,30	-11,72
SSP370	2,31	-11,30	-3,07	-3,63	3,37
SSP585	0,43	-30,06*	-26,55	-6,14	6,62
50 años					
SSP126	12,96	-56,93*	20,21	-1,45	-46,38*
SSP370	12,10	-55,78*	-14,25	-16,67	17,78
SSP585	2,17	-82,88*	-78,19*	-26,86	37,22
100 años					
SSP126	27,20	-81,45*	43,83	-2,89	-70,79*
SSP370	25,31	-92,70*	-26,46	-30,57*	38,71
SSP585	4,34	-97,07*	-95,24*	-46,51*	88,31

*: Valor que ubica a la especie en alguna categoría de amenaza

Tabla 6. Categorías y criterios de amenaza para las especies de la familia Sphagnaceae que habitan en Cuba.

Especies	Cat. Ac.	Cat. S.	C. A.
<i>S. henryense</i> Warnst.	Amenazada (preliminar)	DD	-
<i>S. imbricatum</i> Hornsch. ex Russ.	Amenazada (preliminar)	DD	-
<i>S. macrophyllum</i> Bernh. ex Brid.	Amenazada (preliminar)	LC	-
<i>S. magellanicum</i> Brid.	Amenazada (preliminar)	DD	-
<i>S. meridense</i> (Hampe) Müll. Hal.	Amenazada (preliminar)	VU	A3c
<i>S. palustre</i> L.	Amenazada (preliminar)	NT	Próxima a cumplir
<i>S. perichaetiale</i> Hampe	Amenazada (preliminar)	LC	-
<i>S. portoricense</i> Hampe	Amenazada (preliminar)	DD	-
<i>S. recurvum</i> P. Beauv.	Amenazada (preliminar)	EN	B1ab (i, ii)+2ab (i, ii)
<i>S. strictum</i> Sull.	Amenazada (preliminar)	DD	-

Cat. Ac.: categoría actual en la lista roja de la flora de Cuba; Cat. S.: categoría sugerida para la lista roja de la flora de Cuba; C. A.: criterios de amenaza

Riqueza de especies y áreas prioritarias para la conservación

Los mapas de riqueza potencial generados a partir de los MDE mostraron que las áreas de mayor riqueza de especies se encuentran en la región oriental del país, principalmente asociadas a ecosistemas de montaña. Bajo los distintos escenarios de cambio climático, se observó una disminución de estas zonas, la cual se incrementaba con el rigor de los escenarios. La pérdida en el número de especies se asoció a las zonas de menor altitud, mientras que en las zonas más elevadas se observó una ganancia. Sin embargo, en el modelo correspondiente al escenario SSP126 para el periodo comprendido entre los años 2080 y 2100, se observó un incremento del número de especies tanto en zonas bajas como elevadas.

Entre las áreas de mayor riqueza de especies, las más expuestas al cambio climático son aquellas al este de la región oriental de Cuba, sobre todo en las provincias de Holguín, Guantánamo y el sureste de Santiago de Cuba. Al superponer el mapa de SNAP y los mapas de exposición, se vio que la mayor parte de las áreas de alta exposición al cambio climático se encuentran en el interior de áreas protegidas. Sin embargo, también existen zonas por fuera de estos límites donde los valores de riqueza disminuyen en el futuro (**Figura 2**).

En el escenario de baja emisión se observó una ganancia en cuanto al número de especies en la mayoría de las áreas de mayor riqueza. Sin embargo, en los escenarios de emisión media y alta, los valores de exposición fueron elevados y la riqueza de especies disminuyó de forma considerable, excepto en las áreas protegidas correspondientes a los Parques Nacionales Turquino y Pico La Bayamesa, donde aumentó la riqueza en todos los escenarios.

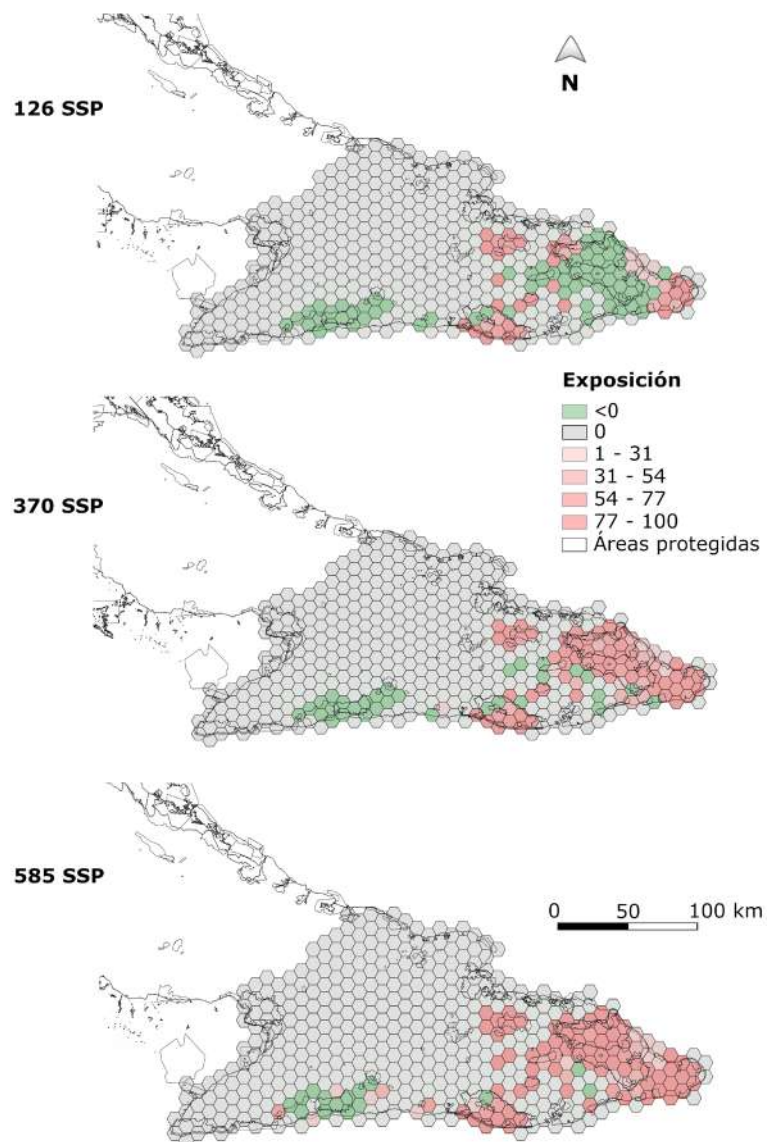


Figura 2. Porcentaje de exposición al cambio climático bajo diferentes escenarios en las zonas de mayor riqueza de especies de Sphagnaceae en Cuba y superposición del SNAP. Los valores negativos indican un aumento de la riqueza de especies en esas zonas.

Las áreas protegidas que incluían las zonas de mayor riqueza de especies de la familia Sphagnaceae fueron las Áreas Protegidas de Recursos Manejados (APRM) Reserva de la Biosfera Baconao y Reserva de la Biosfera Cuchillas del Toa; los Parques Nacionales Turquino, Pico Bayamesa y Alejandro de Humboldt; el Paisaje Natural Protegido Gran Piedra, y la Reserva Ecológica El Gigante.

Por fuera de las áreas protegidas también se detectaron zonas con un elevado número de especies que presentaron una mayor vulnerabilidad en escenarios futuros, específicamente en los márgenes sureste y suroeste de la APRM Reserva de la Biosfera Cuchillas del Toa, el este del Parque Nacional Pico La Bayamesa y el oeste del Parque Nacional Pico Cristal.

Discusión

Modelos de nicho climático de Sphagnaceae en Cuba

Los modelos realizados con pocos registros de presencia implican el reto de obtener resultados robustos con la mayoría de los algoritmos. Sin embargo, Maxent ha demostrado poseer una gran capacidad predictiva con hasta cinco registros de presencia (Pearson *et al.*, 2006). La distribución geográfica de un taxón responde a procesos complejos en que intervienen diversos factores, entre ellos, un sinnúmero de aspectos abióticos, relaciones bióticas entre los organismos y características ecológicas de las especies cuya área de distribución se está modelando (Ríos-Muñoz *et al.*, 2021).

En este estudio no se contemplaron variables bióticas ni las posibles barreras que limitan la dispersión de los musgos evaluados. Por ello la distribución real de éstos puede ser menor que la mostrada en los mapas de idoneidad climática generados. Estas limitaciones son inherentes al proceso de modelado y difícilmente pueden evitarse (Mateo *et al.*, 2011), sin embargo, las especies de *Sphagnum* suelen mostrar una distribución muy cercana a la obtenida en los modelos de su nicho climático. Esto se debe a que raramente se ven afectadas por presiones bióticas como las enfermedades o la herbivoría. Además, la producción de esporas y su gran capacidad de dispersión les permiten ocupar la mayor parte de su nicho climático (Campbell *et al.*, 2021). Es necesario añadir que en Cuba nunca se ha reportado la presencia de esporófitos y se piensa que la principal vía de dispersión es la vegetativa, asociándose su presencia en el archipiélago a la dispersión a través de aves (zoocoria) y la influencia de eventos meteorológicos extremos (Motito, 2012), por lo que la validación de la presencia de estas especies en las zonas climáticamente idóneas determinadas, es un paso clave en la toma de decisiones para su conservación.

Las áreas climáticas idóneas, con valores altos de probabilidad de presencia de estas especies, se encontraron principalmente en zonas húmedas de pluvisilvas y bosques nublados que se caracterizan por altos niveles de biodiversidad (Fuentes *et al.*, 2019; Reyes, 2011-2012), lo que se explica porque los sitios de gran altitud pueden funcionar como refugios de la biota, ya que suelen ser los que retienen la mayor cantidad de especies y son idóneos desde una perspectiva de cambio climático y, por lo tanto, son regiones de gran importancia para la conservación de la biodiversidad (Mancina *et al.*, 2022; Fuentes *et al.*, 2019).

Los organismos que habitan en las cimas de las montañas (como es el caso de la mayoría de las especies *Sphagnum* evaluadas, las cuales están asociadas a altas elevaciones) pueden ser más susceptibles al cambio climático. Sin embargo, con el aumento de la temperatura, las especies que habitan en zonas menos elevadas tienden a incrementar su rango altitudinal, lo que explicaría que la mayor probabilidad de presencia se dirija hacia estas zonas (Fuentes *et al.*, 2019).

En los escenarios futuros del cambio climático se observó una disminución de las áreas climáticamente idóneas para, por lo menos, un modelo en todas las especies estudiadas. La mayoría de las áreas con valores máximos de probabilidad de presencia se mantuvieron, pero reduciendo los valores de probabilidad de presencia en el futuro. Estos resultados coinciden con los encontrados por Zanatta *et al.* (2020), que indican que los briófitos, a pesar de poseer una gran capacidad de dispersión, no se encuentran totalmente adaptados para seguir el ritmo del cambio climático en las próximas décadas.

En este contexto, las especies deben aclimatarse, adaptarse, cambiar su rango de distribución, o extinguirse. A pesar de que muchas ya se están adaptando, su habilidad para hacerlo suficientemente rápido aún no es clara (Corlett & Westcott, 2013). La mayor pérdida de probabilidad de presencia se evidenció para el período comprendido entre los años 2080 y 2100 y se acrecentó con el rigor de los escenarios. Resultados similares se encontraron en estudios sobre el efecto del cambio climático en turberas y hábitats dominados por *Sphagnum*, donde se observó una pérdida de idoneidad en latitudes bajas y un desplazamiento de las zonas idóneas hacia el norte de la distribución de dichos briófitos en el futuro (Xiao-Ying *et al.*, 2022).

A pesar de que la pérdida de idoneidad climática fue predominante, *S. macrophyllum*, *S. palustre* y *S. recurvum* mostraron un aumento de su área de ocupación en algunos de los escenarios, lo que se explicaría por la creación de nuevas áreas climáticamente adecuadas como resultado de cambios en el régimen de precipitaciones, factor que afecta la disponibilidad de agua y puede posibilitar que algunas zonas desarrollen las características ambientales necesarias para la existencia de estos musgos. Los modelos de nicho climático realizados para cuatro especies de *Sphagnum* en Norteamérica mostraron que el calentamiento global podía verse equilibrado efectivamente por el incremento esperado de las precipitaciones en algunas zonas debido a un aumento en la productividad de los briófitos en ellas (Oke & Hager, 2017).

La mayor contribución en los modelos realizados fue aportada por variables relacionadas con la distribución altitudinal de estos briófitos, la disponibilidad estacional de las precipitaciones y la variación de la temperatura. Los musgos de turbera pueden verse afectados por un sinnúmero de factores ambientales, aunque los requerimientos de las especies varían atendiendo a la región geográfica donde se encuentren (Gunnarsson, 2005).

La mayoría de las investigaciones realizadas hasta el momento, coinciden en que la disponibilidad de agua es el factor más influyente en la distribución de estos musgos. Dicho componente está estrechamente relacionado con la estacionalidad de las precipitaciones, la evaporación y el nivel del manto freático. Las especies de *Sphagnum* no poseen raíces ni tejidos vasculares, por lo que el transporte de agua es completamente dependiente del efecto capilar pasivo (Li *et al.*, 2019). Tales características los hacen particularmente sensibles a la sequía (Li *et al.*, 2019). Además, la disponibilidad de agua está relacionada con la temperatura, ya que su aumento provoca el incremento de las tasas de evaporación y disminuye el contenido de agua en la superficie de los briófitos afectando directamente las tasas de fotosíntesis y respiración (Rastogi *et al.*, 2020).

Por otra parte, se destaca una relación directa entre la idoneidad del hábitat y el aumento de la elevación en la mayoría de las especies. Los valores más altos de idoneidad coinciden con las áreas de mayor altitud y pluviosidad en la región oriental de Cuba. A esto debe añadirse la presencia de formaciones vegetales que mantienen una elevada humedad relativa durante todo el año, como son la pluvisilva montana y los bosques nublados típicos y superiores (Reyes, 2011-2012), lo que corresponde al hábitat de las especies de *Sphagnum* en zonas tropicales, asociado, en general, a las altas elevaciones (Gates, 1915).

Estado de conservación de la familia Sphagnaceae en Cuba

Los musgos *Sphagnum* constituyen el componente fundamental de los ecosistemas de turberas. Se estima que almacenan entre un quinto y un tercio del carbono orgánico del suelo a nivel global, por lo que juegan un papel importante en los ciclos de carbono y, por ello, en la regulación del clima del planeta (Ciais *et al.*, 2013). Desde una perspectiva de cambio climático, los aumentos en la temperatura y los cambios en la disponibilidad de agua podrían producir un aumento en las tasas de descomposición de las turberas, convirtiéndolas de almacenamiento de carbono a fuente, incrementando así el cambio climático (Norby *et al.*, 2019).

En regiones tropicales, estos musgos rara vez se encuentran formando grandes extensiones de turberas, lo cual los hace más vulnerables a la hora de enfrentar amenazas para su conservación. Esto, unido a la presencia en las regiones tropicales y subtropicales de la mayor diversidad genética del género, hace que estas zonas posean gran importancia en su conservación (Michaelis, 2012).

El conocimiento del estado de conservación de los musgos *Sphagnum* que habitan en Cuba había permitido, hasta la fecha, evaluarlos preliminarmente como amenazados (González-Torres *et al.*, 2016). La disponibilidad de datos georreferenciados sobre su distribución y el uso de técnicas de modelado de nicho climático permiten sugerir una categoría de amenaza nacional para dos de las diez especies evaluadas. Los métodos utilizados cumplen con las pautas de la IUCN, con lo que se minimizaron las inconsistencias que pudieran surgir del uso de métodos o rutinas de análisis no estandarizados al evaluar los criterios de la Lista Roja (Lee *et al.*, 2019).

Muchas plantas amenazadas son conocidas en unas pocas localidades, por lo que su evaluación bajo los criterios de la IUCN se basa en un pequeño número de registros presentes en colecciones (Rivers *et al.*, 2011). Sin embargo, el uso de los modelos de nicho climático y la inferencia a partir de estos del área de ocupación y la extensión de presencia, arroja un resultado más representativo de la distribución real de estas especies que el proveniente de los registros de presencia únicamente (Sérgio *et al.*, 2007; Syfert *et al.*, 2014).

La distribución es un aspecto clave para la conservación de la biodiversidad, ya que subyace en el contexto en que se planean o implementan acciones de conservación (Villero *et al.*, 2017). En este sentido, se tuvieron en cuenta los criterios A y B contenidos en las directrices de la IUCN (IUCN, 2012), ambos estrechamente relacionados con la distribución geográfica de las especies.

A pesar de que solo dos de los musgos evaluados cumplen con los requisitos para una categoría de amenaza, se observó una disminución continua de la extensión de presencia o del área de ocupación en cuatro de ellos, lo que coincide con el efecto potencial del cambio climático sobre la distribución de las especies de *Sphagnum* y se traduce en una pérdida de las áreas climáticamente idóneas, llegando a una reducción de más del 30 % del área de ocupación en *S. meridense*.

Se evidenció una relación entre el estado de conservación y el cambio climático proyectado en el futuro, con una reducción del área de ocupación y la extensión de presencia que se acrecentó con el rigor de los escenarios climáticos en la mayoría de las especies, lo que refleja su efecto en los cambios en el intervalo de distribución de *Sphagnum*, investigado por primera vez en este estudio en zonas tropicales, y con anterioridad, en zonas de latitudes bajas (Antala *et al.*, 2022; Xiao-Ying *et al.*, 2022).

Los valores más altos de riqueza de especies se asociaron a las zonas montañosas debido a que son regiones con gran disponibilidad de agua por las elevadas precipitación y humedad relativa durante todo el año. Los mayores valores de exposición al cambio climático son afines con el mapa del SNAP, lo que sugiere un buen grado de protección. Sin embargo, existen zonas que quedan fuera de los límites de las áreas protegidas y que se exponen a una elevada pérdida potencial de especies proyectada en el futuro.

Debe añadirse que el análisis de exposición se centró en las zonas de mayor riqueza de *Sphagnum*, las cuales corresponden a lugares de elevada biodiversidad dentro de Cuba según estudios similares sobre la riqueza potencial del país en escenarios de cambio climático (Mancina *et al.*, 2022). Sin embargo, fuera de éstas existen áreas donde se pierde la totalidad de los *Sphagnum* evaluados.

Por otra parte, el APRM Reserva de la Biosfera Cuchillas del Toa y el Parque Nacional Alejandro Humboldt son las áreas protegidas donde se proyecta la mayor pérdida de especies bajo escenarios de cambio climático, a pesar de cubrir grandes extensiones con altos valores de riqueza de *Sphagnum*. En los Parques Nacionales Turquino y Pico La Bayamesa se observó, en cambio, un mayor incremento, es decir, están menos expuestas.

Podría considerarse que esto constituye una contradicción, ya que ambas regiones se encuentran en dos de los sistemas montañosos cubanos con mayor elevación y se esperaría un aumento del intervalo altitudinal de estos briófitos como resultado del cambio climático y del aumento de la idoneidad en estas áreas (**Fuentes et al.**, 2019). Sin embargo, a pesar de ser zonas montañosas, son climáticamente diferentes, pues se encuentran en regiones diferentes. El APRM Reserva de la Biosfera Cuchillas del Toa y el Parque Nacional Alejandro Humboldt se encuentran al nordeste de la región oriental de Cuba, en la cordillera Nipe-Sagua-Baracoa, donde se presenta un clima tropical húmedo; por otra parte, los Parques Nacionales Turquino y Pico La Bayamesa se ubican al sur, en la Sierra Maestra, donde el clima es templado cálido (**ONU**, 2015).

Las especies de *Sphagnum* pueden crecer de forma favorable en ambos climas, aunque, prefieren regiones húmedas y frescas. La alta humedad relativa y las constantes precipitaciones que ocurren en los climas tropicales húmedos, favorecen el desarrollo de estos briófitos, pero las temperaturas son más elevadas que en los climas templados cálidos. En el contexto del cambio climático, con aumentos proyectados en las temperaturas, esta podría ser una causa de la pérdida de especies en estas regiones (**Centella et al.**, 1999).

Las variables bioclimáticas utilizadas en los MDE están en correspondencia con las diferencias descritas para estos tipos de clima, en consecuencia, se observan los mayores valores en las medias de la temperatura y la precipitación anual para la región de Nipe-Sagua-Baracoa, con una estacionalidad de las precipitaciones más marcada y temperaturas más bajas en la Sierra Maestra (**CBC BIOATLAS**, 2021). Aunado a esto está el hecho de que la Sierra Maestra es la única zona de Cuba donde se pueden encontrar bosques nublados.

Los bosques nublados son una formación vegetal que se desarrolla como vegetación zonal por encima de los 1.500 m s.n.m. y recibe la influencia diaria de las precipitaciones horizontales (nieblas y nubes bajas), que puede paliar el efecto estacional de las precipitaciones (**Reyes**, 2011-2012), provocando que el interior del bosque tenga las condiciones de humedad necesaria para el desarrollo óptimo de estos musgos. La forma en que la riqueza de especies se comporta en estas regiones debe considerarse en el diseño de las estrategias de manejo y conservación de las especies de la familia Sphagnaceae en Cuba.

Por otra parte, si bien existe una buena protección de las especies de *Sphagnum* en el SNAP, la mayoría de las zonas con valores altos de riqueza están expuestas al cambio climático, incluidas aquellas en el interior de las áreas protegidas. Esto evidencia la necesidad de tomar medidas para la conservación de los briófitos y solucionar las problemáticas relativas a la conservación de la biodiversidad en las áreas protegidas más expuestas, ya que al ser unidades de conservación donde la protección y el manejo de los recursos ecosistémicos es planificada, constituyen zonas importantes para la adaptación y el incremento de la resiliencia de las especies ante el cambio climático. Así, la protección de los hábitats en el interior de las áreas protegidas es una medida esencial para la conservación de la biodiversidad (**Mancina et al.**, 2022).

Las problemáticas más recurrentes en el manejo y la conservación de los recursos en las áreas protegidas de Cuba son el deficiente funcionamiento de las juntas administrativas y la pobre coordinación entre los diferentes sectores interesados en el uso de los recursos; la extracción y el comercio ilegal de plantas; el cambio del uso del suelo debido a actividades agropecuarias; la proliferación de especies exóticas e invasoras, y el desconocimiento del estado de las poblaciones de la flora y la fauna endémicas bajo amenaza (**Guarat-Planche et al.**, 2021).

En la monografía publicada por **Mancina et al.** (2022) sobre la biodiversidad de Cuba en el contexto del cambio climático se mencionan dos líneas para el establecimiento de áreas prioritarias de conservación. La primera está dirigida a las zonas de alta exposición al cambio climático y la segunda a aquellas regiones que constituyen refugios climáticos claves para la conservación debido a su capacidad para retener la mayor cantidad de especies bajo escenarios climáticos cambiantes.

En este estudio se identificaron los dos tipos de zonas en regiones que poseen una gran riqueza potencial de *Sphagnum*. Por lo que se sugiere tener en cuenta ambas alternativas y destinar esfuerzos para planificar y llevar a cabo acciones que contribuyan a la adaptación y mitigación de los efectos del cambio climático en la conservación de estos briófitos y contemplen el enfoque preventivo y también la creación de nuevas instancias de conservación para garantizar la protección de las zonas prioritarias que se encuentran más allá de los límites de las áreas protegidas.

Si bien el cambio climático puede ser una de las principales causas de la desaparición de estas especies en regiones de latitudes bajas (Xiao-Ying *et al.*, 2022), deben considerarse otros aspectos que pueden estar afectando su conservación. En Cuba existe una creciente pérdida de la calidad del hábitat por las presiones antrópicas que inciden en el cambio del uso de los suelos y la introducción de especies exóticas e invasoras, sobre todo en ecosistemas de montañas. Esto, unido al aumento de la temperatura, la sequía y la frecuencia de eventos meteorológicos extremos, atenta contra la conservación de estas especies amenazadas.

Conclusiones

La categorización de las especies de *Sphagnum* que habitan en Cuba sugiere que enfrentan un riesgo de extinción debido a la disminución de sus poblaciones y la reducción de los hábitats adecuados. La mayoría de las zonas de mayor riqueza se encuentran expuestas al cambio climático, incluso aquellas dentro de las áreas protegidas. Las regiones montañosas del sureste de Cuba constituyen importantes refugios climáticos para estas especies, por lo que se sugiere integrar estos resultados en los planes de manejo adaptativo del SNAP.

Se recomienda priorizar políticas de manejo adaptativo en los ecosistemas de montaña, sobre todo en aquellas zonas con altitudes inferiores a los 1.500 m s.n.m., las cuales están más expuestas al cambio climático. Una opción para esto es considerar proyectos de adaptación basada en ecosistemas, de manera que se potencie tanto el desarrollo de las comunidades rurales como el manejo de áreas boscosas amenazadas con vistas a disminuir la conversión del uso de los suelos y la proliferación de especies exóticas e invasoras, así como favorecer el intercambio entre actores dentro y fuera de las áreas protegidas. Se sugiere redefinir las áreas protegidas que presenten zonas de alta exposición adyacentes para incluirlas en los planes de manejo y monitoreo. Por otra parte, es necesario propiciar la conectividad entre regiones que constituyen refugios climáticos de estas especies, con el fin de reducir los impactos en cuanto a la pérdida de riqueza específica y garantizar la continuidad de procesos ecológicos entre ecosistemas prioritarios para Sphagnaceae.

Material suplementario

Ver material suplementario en <https://www.raccefyn.co/index.php/raccefyn/article/view/3199/4575>

Agradecimientos

A Idea Wild por su apoyo logístico. A Yusdiel Torres por sus comentarios y sugerencias sobre los métodos utilizados. A Ángel Motito por su ayuda con los registros georreferenciados. A Yoandri Suárez por su constructiva revisión del manuscrito. A Claudia Sanjuan por su ayuda en la edición de las figuras. A los revisores anónimos y el editor de la revista por sus sugerencias que permitieron elevar la calidad del manuscrito.

Contribución de los autores

RRML y **AJC**: conceptualización; **RRML** y **ACG**: visualización; **RRML**, **ACG** y **RSQ**: curación de los datos y *software*; **AJC**: supervisión. Todos los autores contribuyeron a la metodología, la redacción y la revisión del manuscrito.

Conflicto de intereses

Los autores declaran no tener conflictos de intereses.

Referencias

- Antala, M., Juszczak, R., Tol, C. V. D., Rastogi, A.** (2022). Impact of climate change-induced alterations in peatland vegetation phenology and composition on carbon balance. *Science of the Total Environment*, 827, 154-294. <https://doi.org/10.1016/j.scitotenv.2022.154294>
- Burneo, M. & Benítez, Á.** (2020). Distribución potencial y áreas prioritarias para la conservación de briófitos en Ecuador. *Bosques Latitud Cero*, 10(1), 1-13.
- Caluff, M.** (2020). *CUBA: Herbario del Jardín de los Helechos BSC-Bryophyta*. Centro Oriental de Ecosistemas y Biodiversidad. Santiago de Cuba.
- Campbell, C., Granath, G., Rydin, H.** (2021). Climatic drivers of *Sphagnum* species distributions. *Frontiers of Biogeography*, 13(4). <https://doi.org/10.21425/F5FBG51146>
- Capote, R. P., Arenal, I. M., Suárez, A. G.** (2011). Conservación de la biodiversidad cubana y cambio climático en el archipiélago cubano. *Revista Anales de la Academia de Ciencias de Cuba*, 1(1), 1-25.
- CBC BIOATLAS.** (2021). Reporte automático sobre Área Protegida de Recursos Manejados Cuchillas del Toa, Parque Nacional Pico La Bayamesa y Parque Nacional Turquino. <https://maps.cbcbio.org/>
- Centella, A., Gutiérrez, T., Limia, M., Jaspe, R. R.** (1999). Climate change scenarios for impact assessment in Cuba. *Climate Research*, 12(2-3), 223-230. <https://doi.org/10.3354/CR012223>
- Ciais, P., Sabine, C., Bala, G., Bopp, L., Brovkin, V., Canadell, J., Heimann, M.** (2013). Carbon and other biogeochemical cycles. En: Stocker, T., Qin, D., Plattner, G. K., Tignor, M., Allen, S., Boschung, J., Nauels, A., Xia, Y., Bex, V., Midgley, P. (eds.) *Climate change 2013: The physical science basis. Contribution of working group I to the fifth assessment report of the intergovernmental panel on climate change* (pp. 465-570). Cambridge University Press.
- Corlett, R. T. & Westcott, D. A.** (2013). Will plant movements keep up with climate change? *Trends in Ecology & Evolution*, 28(8), 482-488. <https://doi.org/10.1016/j.tree.2013.04.003/>
- Costa, D. P.** (2020). Sphagnaceae. En: BFG. 2021. *Flora do Brasil 2020*. Jardim Botânico do Rio de Janeiro.
- Elith, J., Phillips, S. J., Hastie, T., Dudík, M., Chee, Y. E., Yates, C. J.** (2011). A statistical explanation of MaxEnt for ecologists. *Diversity and Distributions*, 11(1), 43-57. <https://doi.org/10.1111/j.1472-4642.2010.00725.x/>
- Fick, S. E., Hijmans, R. J.** (2017). WorldClim 2: new 1km spatial resolution climate surfaces for global land areas. *International Journal of Climatology*, 37(12), 4302-4315. <https://doi.org/10.1002/joc.5086/>
- Fuentes-Marrero, I. M., González-Oliva, L., Baró-Oviedo, I., González-González Echevarría, M. T., Mancina-González, C. A.** (2019). Efecto potencial del cambio climático sobre la distribución de plantas asociadas a bosques húmedos del oriente de Cuba. *Acta Botánica Cubana*, 218(2), 160-170.
- Gates, F. C.** (1915). A Sphagnum Bog in the Tropics. *Journal of Ecology*, 3(1), 24-30. <https://doi.org/10.2307/2255294/>
- GBIF.** (2022). Global Biodiversity Information Facility. <http://www.gbif.org/>
- Glime, J. M.** (2017). Introduction. En: Glime, J. M. (ed.) *Bryophyte ecology* (pp. 1-10). Michigan Tech Open Access Publications.
- González-Torres, L. R., Palmarola, A., Oliva, L. G., Bécquer, E. R., Testé, E., Barríos, E.** (2016). Lista roja de la flora de Cuba. *Bissea*, 10, 1-352.
- Greuter, R. & Rankin, R.** (2023). Base de Datos de especímenes de la Flora de Cuba – con mapas de distribución. Versión 16.0. <https://ww3.bgbm.org/FloraOfCuba/>
- Guarat-Planche, R. F., Begué-Quiala, G., Zabala-Lahitte, B., Pérez-Trejo, H. M., Maury-Russo, O., Ramírez-González, D., Santana-González, A.** (2021). *Plan de Manejo Parque Nacional Alejandro de Humboldt, Quinquenio 2021-2025*. Unidad de Servicios Ambientales Alejandro de Humboldt. CITMA.
- Gunnarsson, U.** (2005). Global patterns of *Sphagnum* productivity. *Journal of Bryology*, 27(3), 269-279. <https://doi.org/10.1179/174328205X70029/>
- Hao, J. & Chu, L. M.** (2022). Responses of terrestrial mosses to simulated climate change in a secondary evergreen broad-leaved forest in southern China. *Rournal of Forestry Research*, 2022, 1-12.
- Harrell, F. E.** (2019). Package ‘Hmisc’. CRAN2018 2019: 235-236. <https://hbiostat.org/R/Hmisc/>
- Harzing, A.W.** (2010). *The publish or perish book*. Tarma Software Research Pty Limited.
- Heiberger, R.** (2018). Package ‘HH’. <https://cran.irsn.fr/web/packages/HH/HH.pdf/>

- IUCN. (2012a). *IUCN Red List Categories and Criteria, version 3.1, second edition*. Gland and Cambridge.
- IUCN. (2012b). *Directrices para el uso de los criterios de la Lista Roja de la UICN a nivel regional y nacional, versión 4.0*. Gland y Cambridge. http://www.iucnredlist.org/documents/redlist_cats_crit_en.pdf
- IUCN. (2019). *Guidelines for Using the IUCN Red List Categories and Criteria, version 14*. Standards and Petitions Committee.
- Lee, C. K. F., Keith, D. A., Nicholson, E., Murray, N. J. (2019). Redlistr: tools for the IUCN Red Lists of ecosystems and threatened species in R. *Ecography*, 42(5), 1050-1055. <https://doi.org/10.1111/ecog.04143/>
- Li, T.-T., Wang, Z. X., Bu, G. J., Lin, L. Q., Lei, Y., Liu, C. Y., Yang, L. F., Zheng, C. L. (2019). Effects of microtopography and water table on *Sphagnum palustre* L. in subtropical high mountains and implications for peatland restoration. *Journal of Bryology*, 41(2), 121-134. <https://doi.org/10.1080/03736687.2019.1601446/>
- Mancina, C. A., Vega-Catalá, C., Domínguez, S. L., Marrero, I. F., Hernández, M. B., Quinta, M. H., Perdomo, H. M. D., Álvarez, M. P., Hernández-Prado, R., Gandía, A. C., Arcila, R. F., Rossell, A. G., Raola, B. N., Gómez-Hechavarría, J. L., Sánchez-Losada, M., Pérez, K. V., Barrios, D., Verdecia, R., Prieto, R. O., Martínez, A. M., Gutiérrez, P. A., González, M. T. (2022). *El cambio climático y la biodiversidad en Cuba: Impactos, adaptación y áreas prioritarias para la conservación*. Editorial AMA.
- Mateo, R. G., Felicísimo, A. M., Muñoz, J. (2011). Modelos de distribución de especies: Una revisión sintética. *Revista Chilena de Historia Natural*, 84, 908-922. <https://doi.org/10.1111/j.1654-1103.2010.01198.x/>
- Michaelis, D. (2012). World of *Sphagnum* – Distribution Pattern as a Reflection of Ecology and Taxonomy. Proceedings of the 14th International Peat Congress. International Peatland Society. Stockholm, Sweden.
- Motito, Á. & Potrony, M. (2010). Diversidad de musgos en Cuba Oriental. *Rodriguésia*, 61(3), 383-404.
- Motito, Á. & Rivera, Y. (2017). Briofitas. En: Mancina, C. A. y Cruz, D. D. (ed.) *Diversidad biológica de Cuba: métodos de inventario, monitoreo y colecciones biológicas* (pp. 119-133). Editorial AMA.
- NASA/GISS. (2018). *E2. 1G model output prepared for CMIP6 ISMIP6*. Earth System Grid Federation.
- Norby, R. J., Childs, J., Hanson, P. J., Warren, J. M. (2019). Rapid loss of an ecosystem engineer: *Sphagnum* decline in an experimentally warmed bog. *Ecology and Evolution*, 9(22), 12571-12585. <https://doi.org/10.1002/ece3.5722/>
- Oke, T. A. & Hager, H. A. (2017). Assessing environmental attributes and effects of climate change on *Sphagnum* peatland distributions in North America using single- and multi- species models. *PLoS ONE*, 12(4). <https://doi.org/10.1371/journal.pone.0175978/>
- ONU. (2015). *Segunda Comunicación Nacional a la Convención Marco de las Naciones Unidas sobre Cambio Climático*. La Habana, Cuba.
- Pearce, J. & Ferrier, S. (2000). Evaluating the predictive performance of habitat models developed using logistic regression. *Ecological Modelling*, 133(3), 225-245. [https://doi.org/10.1016/S0304-3800\(00\)00322-7/](https://doi.org/10.1016/S0304-3800(00)00322-7/)
- Pearson, R. G., Raxworthy, C. J., Nakamura, M., Peterson, A. T. (2006). Predicting species distributions from small numbers of occurrence records: a test case using cryptic geckos in Madagascar. *Journal of Biogeography*, 34(1), 102-117. <https://doi.org/10.1111/j.1365-2699.2006.01594.x/>
- Pearson, R. G. (2007). Species' distribution modelling for conservation educators and practitioners. Synthesis. *American Museum of Natural History*, 50, 54-89.
- Plissock, P. & Fuentes-Castillo, T. (2011). Modelación de la distribución de especies y ecosistemas en el tiempo y en el espacio: una revisión de las nuevas herramientas y enfoques disponibles. *Revista de Geografía Norte Grande*, 48, 61-79.
- QGIS Development Team. (2022). *QGIS Geographic Information System*. Open Source Geospatial Foundation Project. <https://qgis.org/>
- Radosavljevic, A., Anderson, R. P. (2014). Making better Maxent models of species distributions: complexity, overfitting and evaluation. *Journal of Biogeography*, 41, 629-643. <https://doi.org/10.1111/jbi.12227>

- Ramírez, J., Watson, K., Thiers, B., Mcmillin, L. (2022). The New York Botanical Garden Herbarium (NY). Version 1.45. <https://doi.org/10.15468/6e8nje>
- Rastogi, A., Antala, M., Gąbka, M., Rosadziński, S., Stróżecki, M., Brestic, M., Juszczak, R. (2020). Impact of warming and reduced precipitation on morphology and chlorophyll concentration in peat mosses (*Sphagnum angustifolium* and *S. fallax*). *Scientific Reports*, 10(8592), 1-9. <https://doi.org/10.1038/s41598-020-65032-x>
- R Core Team. (2020). *R: A language and environment for statistical computing*. R Foundation for Statistical Computing. <http://www.R-project.org/>
- Regalado, L., Ventosa, I., Morejón, R. (2010). Revisión histórica de los herbarios cubanos con énfasis en las series de especímenes. *Revista del Jardín Botánico Nacional de la Universidad de La Habana*, 29, 99-136. <https://ww3.bgbm.org/FloraOfCuba>
- Reyes, O. J. (2011-2012). Clasificación de la vegetación de la Región Oriental de Cuba. *Revista del Jardín Botánico Nacional*, 32, 59-71.
- Ríos-Muñoz, C. A., Vega-Flores, M., Vega-Flores, K. M., Hernández-Rubio, S., Espinosa-Martínez, D. V. (2021). Del concepto a su aplicación: El proceso del modelado de nichos ecológicos y sus algoritmos. *Revista Latinoamericana de Herpetología*, 4(1), 11-25.
- Rivers, M. C., Taylor, L., Brummitt, N. A., Meagher, T. R., Roberts, D. L., Lughadha, E. N. (2011). How many herbarium specimens are needed to detect threatened species? *Biological Conservation*, 144, 2541-2547. <https://dx.doi.org/10.1016/j.biocon.2011.07.014>
- Rodríguez, J. P., Keith, D. A., Rodríguez-Clark, K. M., Murray, N. J., Nicholson, E., Regan, T. J., Miller, R. M., Barrow, E. G., Bland, L. M., Boe, K., Brooks, T. M., Oliveira-Miranda, M. A., Spalding, M., Wit, P. (2015). A practical guide to the application of the IUCN Red List of Ecosystems criteria. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London B*, 370, 20140003. <http://dx.doi.org/10.1098/rstb.2014.0003>
- Seppelt, R. D. (2012). *Sphagnaceae*. Australian Mosses Online 52. https://www.anbg.gov.au/abrs/Mosses_online/Sphagnaceae.pdf
- Sérgio, C., Figueira, R., Draper, D., Menezes, R., Sousa, A. J. (2007). Modelling bryophyte distribution based on ecological information for extent of occurrence assessment. *Biological Conservation*, 135, 341-351. <https://doi.org/10.1016/j.biocon.2006.10.018/>
- Solomon, J. & Stimmel, H. 2021. *Tropicos Specimen Data*. Missouri Botanical Garden. Occurrence dataset.
- Syfert, M. M., Joppa, L., Smith, M. J., Coomes, D. A., Bachman, S. P., Brummitt, N. A. (2014). Using species distribution models to inform IUCN Red List assessments. *Biological Conservation*, 177, 174-184. <http://dx.doi.org/10.1016/j.biocon.2014.06.012/>
- UNEP-WCMC, IUCN. (2023). *Protected Planet: The World Database on Protected Areas (WDPA)*. UNEP-WCMC and IUCN. <https://www.protectedplanet.net/>
- Villero, D., Pla, M., Camps, D., Ruiz-Olmo, J., Brotons, L. (2017). Integrating species distribution modelling into decision-making to inform conservation actions. *Biodiversity and Conservation*, 26, 251-271. <https://doi.org/10.1007/s10531-016-1243-2>
- Weston, D. J., Timm, C. M., Walker, A. P., Gu, L., Muchero, W., Schmutz, J., Shaw, A. J., Tuskan, G. A., Warren, J. M., Wulschleger, S. D. (2015). *Sphagnum* physiology in the context of changing climate: emergent influences of genomics, modelling and host-microbiome interactions on understanding ecosystem function. *Plant, Cell and Environment*, 38, 1737-1751. <https://doi.org/10.1111/pce.12458>
- Xiao-Ying, M., Hao, X., Zi-Yin, C., Lei, S., Rui-Liang, Z. (2022). Will climate change cause the global peatland to expand or contract? Evidence from the habitat shift pattern of *Sphagnum* mosses. *Global Change Biology*, 28(21), 6419-6432. <https://doi.org/10.1111/gcb.16354>
- Zanatta F., Engler, R., Collart, F., Broennimann, O., Mateo, R. G., Papp, B., Muñoz, J., Baurain, D., Guisan, A., Vanderpoorten, A. (2020). Bryophytes are predicted to lag behind future climate change despite their high dispersal capacities. *Nature Communications*, 11(1), 5601. <https://doi.org/10.1038/s41467-020-19410-8>

Original article

Mangroves: coastal vegetation and marine influence in La Caimanera wetland (Sucre) during the last 6000 years

Manglares: vegetación costera e influencia marina en la ciénaga La Caimanera (Sucre) durante los últimos 6000 años

✉ Julián Beltrán-P., ✉ Alexis Jaramillo-J., ✉ J. Orlando Rangel-Ch.*

Instituto de Ciencias Naturales, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá

Abstract

We recovered a 7.25 m sediment core from the center of La Caimanera wetland (department of Sucre, 9°24'11.88"N 75°37'52.39"W) using a Russian probe. We sent samples from different depths for radiocarbon dating (C14 by AMS at the University of Colorado, USA). We characterized the main sediment components (minerals, organic matter), micro-stratigraphy (organic matter classes), moisture variations (%), organic and inorganic carbon, and palynological associations. We linked these to the current types of vegetation in the wetland and its surroundings. In the paleoenvironmental reconstruction, two well-defined and contrasting periods were observed, as follows: between the beginning or base of the sediment column analyzed (at 725 cm, 6185 years BP, and at the upper middle part, 175 cm, 2142 years BP), the environment was that of a continental freshwater wetland, including all the phases of the hydric ecological series (aquatic vegetation, marsh vegetation, floodplain vegetation with *Symmeria paniculata* forests, and mainland forests of *Mabea montana*, *Spondias mombin*, and *Anacardium excelsum*). The mineral fraction dominated the sediment, while peat and plant remains predominated inside the organic fraction of continental origin. Towards the upper part of the core, a transition towards a brackish environment was evident, related to the greatest expression of marine components (shells). In the last 1000 years BP, the mangrove (*Rhizophora mangle*) grew vigorously, and the high representation of mollusk shells and crustacean remains consolidated at a sedimentation rate (accretion) of 1.14 cm/year; this marked marine influence could not be correlated with changes in sea level documented for the Colombian Caribbean.

Keywords: Mangroves; neotropical estuaries; microstratigraphy; coastal paleoenvironments; paleoecology.

Resumen

Con una sonda rusa se recuperó un núcleo de sedimento de 7,25 metros en el centro de la ciénaga La Caimanera, Sucre (9°24'11,88" N 75°37'52,39" O). Se enviaron muestras de varios intervalos de profundidad para datación radiocarbónica (C14 by AMS, University of Colorado, USA). Se caracterizaron los componentes principales del sedimento (minerales, materia orgánica), la microestratigrafía (clases de materia orgánica), las variaciones de humedad (%), el carbono orgánico e inorgánico y las asociaciones palinológicas. En la reconstrucción paleoambiental se diferenciaron dos épocas bien definidas y contrastantes, así: entre el inicio o base de la columna de sedimento analizada (725 cm, 6185 años AP, y la parte media superior, 175 cm, 2142 años AP) el ambiente era de ciénaga continental de agua dulce, con todas las fases que incluye la serie hídrica (vegetación acuática, de pantano, de planicie de inundación con los bosques de *Symmeria paniculata* y los bosques de tierra firme de *Mabea montana*, *Spondias mombin* y *Anacardium excelsum*). En el sedimento dominaba el componente mineral y en el componente orgánico de origen continental, las turbas y los restos vegetales. Hacia la parte superior hubo transición hacia un ambiente salobre y la mayor expresión de componentes de origen marino (conchas). En los últimos 1000 años AP

Citation: Beltrán-P. J, et al. Mangroves: coastal vegetation and marine influence in La Caimanera wetland (Sucre) during the last 6000 years. Revista de la Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. 49(192):602-617, julio-septiembre de 2025. doi: <https://doi.org/10.18257/racefyn.3179>

Editor: Jaime Ricardo Cantera

***Corresponding autor:**
J. Orlando Rangel-Ch.;
jorangelc@unal.edu.co

Received: March 12, 2025

Accepted: August 30, 2025

Published on line: September 11, 2025



This is an open access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution License.

se desarrolló vigorosamente el manglar (*R. mangle*) y se consolidó una marcada representación de conchas de moluscos y restos de crustáceos, con una tasa de sedimentación (acreción) de 1,14 cm/año; la marcada influencia marina no se logró correlacionar con los cambios en el nivel del mar documentados para el Caribe colombiano.

Palabras clave: manglares; estuarios neotropicales; microestratigrafía; paleoambientes costeros; paleoecología.

Introduction

In the coastal areas of the Colombian Caribbean, numerous marshes (swamp areas) protected by coastal cordons are affected by fluvial-marine dynamics, as is the case with La Caimanera wetland, where strips of natural mangrove vegetation persist. Such a condition makes these environments an ideal setting for detecting the effects related to sea level fluctuations (marine transgressions or regressions), the variations in aspects of the geomorphology and sedimentation of the basin, and other events associated with the evolution of the territory.

Among the palaeoecological contributions on mangroves and their relationship with sea level fluctuations and the subsequent changes in the Colombian Caribbean coastline we can mention those of **Urrego, et al.** (2013) and **Díaz** (2016) in La Guajira; **Van der Hammen & Noldus** (1984), **Vélez, et al.** (2014), and **Betancurt** (2019) in the Ciénaga Grande de Santa Marta, and **García, et al.** (2022) in the Tayrona National Natural Park in the department of Magdalena, and **Castaño, et al.** (2010), **Palacios, et al.** (2012), and **Rodríguez** (2011) in the Cispatá Bay (department of Córdoba).

In our biostratigraphic study of a sediment column, we characterized palynological associations and substrate conditions, as well as their relationship to external influences (channel flow, sea level, and precipitation). We sought to detect changes at different levels: biological (vegetation succession), climatic (precipitation fluctuations), and stratigraphic (sedimentation). This information is essential for comparing our results with those from other Caribbean areas and consolidating our understanding of the paleoecological history of these coastal environments.

Study area

La Caimanera wetland is located in the Gulf of Morrosquillo, Colombian Caribbean region, department of Sucre (9° 24' 39" N, 75° 37' 44" W). There, the water surface covers approximately 192 ha, with the flood plain reaching up to 2200 ha; the main body is connected to the sea by a permanent water channel. Some streams and temporary channels, such as San Antonio, Petaca, Escobalito, La Lata, and Amansaguapos, flow into the wetland (**Figure 1**). As of the second half of the last century (1950), the construction of land roads between Coveñas and Tolú has impacted this natural area, reducing the original extension covered by the mangrove (**Moré-Sierra, 2025**).

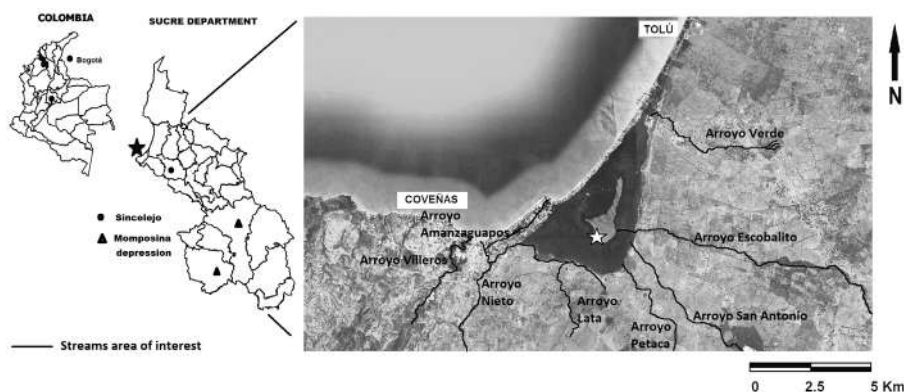


Figure 1. Location of La Caimanera wetland. Modified from Google maps

Two distinct environments are seen in the study area: the estuarine and the dry land zone. The vegetation of the estuarine-mangrove zone (Cortés & Rangel-Ch., 2023) belongs to the phytosociological class *Rhizophoretea mangle* and the order *Rhizophoro manglis-Laguncularietalia racemosae*, with two phytosociological formations or alliances: *Lagunculario racemosae-Rhizophorion manglis*, which groups the *Lagunculario racemosae-Conocarpodetum erecti* associations established near the beach limit, and the dry land vegetation of the tropical forest. Another typical mangrove is the *Lagunculario racemosae-Rhizophoretum manglis* association, where *Avicennia germinans* appears as dominant, and the monospecific mangrove of the *Rhizophoretum manglis* association is related to intervention processes (selective logging). The *Lagunculario racemosae-Avicennion germinantis* alliance is also present in the basin with the *Avicennion germinantis-Rhizophoretum manglis* associations and the monospecific mangroves of *Avicennietum germinantis* in areas with intervention traces (urbanization).

The dry and semi-humid tropical forest vegetation (rainfall amounts to 1800 mm per year) in the area belongs to the *Cratevo tapiae-Spondiadetea mombinis* class, common in areas surrounding the Caribbean wetlands in the departments of Magdalena, Cesar, and Córdoba (Rangel-Ch. & Suárez, 2022). It groups the phytosociological formations or alliances dominated by *A. excelsum* (*Erythroxylo amazonici-Anacardion excelsi*) with others, such as *Astronio graveolentis-Guazumetum ulmifoliae*, established near the channels and water currents in which *S. mombin*, *Astronium graveolens*, *Brownea ariza*, and *Cavanillesia platanifolia* are frequent, while *Tabebuia rosea*, *Myrospermum frutescens*, and *Uribea* cf. *tamarindoides* have lower coverage values. *Bursero simaroubae-Poulsenietum armatae* forests, dominated by *Bursera simarouba*, *Handroanthus chrysanthus*, and *S. mombin*, are also present, accompanied by *Ficus*, *Sapium*, *Cassia*, *Cecropia*, *Byrsonima*, and *Myrcia* species.

In the Caribbean wetlands ecological hydric series, among the marsh vegetation, there are communities dominated by *Thalia geniculata* and *Polygonum caucanum*, which reach their greatest coverage and vigor during high water periods. In the floodplain that circles like a belt the wetland, low scrub forests dominated by *S. paniculata* (*Symmerio paniculatae-Tabebuietum roseae*) are established. There, *Samanea saman*, *Phyllanthus elsiae*, *Bactris guineensis*, *Coccoloba densifrons*, *C. obtusifolia*, *A. graveolens*, *Crateva tapia*, *Ceiba pentandra*, and *Alchornea castanaefolia* are among the accompanying species. These forests adjacent to the wetland complexes are subject to water level variations and can be flooded at certain times of the year. In the larger plains, during the dry season (low water level), shrubby vegetation grows dominated by *Ambrosia peruviana*, with accompanying species such as *Solanum campechiensis* and *Heliotropium indicum* (Cortés & Rangel-Ch., 2023).

Methodology

Sampling

We recovered a 7.25-meter core from the center of the wetland (9°24'11.88" N 75°37'52.39" W) using a Russian probe during the high water season. We made the lithological characterization and stored the cores in PVC tubes (50 cm long, 5 cm diameter), labeled them (location, date, and depth), and transported them to the Palynology Laboratory at the Institute of Natural Sciences, National University of Colombia in Bogotá, where they were stowed in a refrigerator until processing. We sent several samples (from different depths) to the University of Colorado (USA) for Carbon 14 dating (C-14 by AMS, Accelerator Mass Spectroscopy). We made quantitative sedimentological-microstratigraphic analyses to estimate the mineral fraction and carbon content due to loss of mass by calcination loss on ignition (LOI, 105-550-950°) (Santisteban *et al.*, 2004) and qualitative (visual estimation) ones to differentiate mineral and organic components (continental-marine), according to García-M. *et al.* (2022).

For the palynological analysis, we processed 3 cm³ samples of sediment at 6 cm intervals along the entire column. The physicochemical analysis followed the guidelines of the Palynology and Paleoecology laboratory at the Institute of Natural Sciences, National University of Colombia (García-M. *et al.*, 2022). The final extraction of pollen was done by flotation (zinc chloride, ZnCl₂) with a density of 1.96 g/ml. One or two drops of glycerin were added to the final residue, which was then placed in the oven at 40°C for 24 hours, and then the slides were mounted using glycerinated gelatin as a support. The palynological analysis was performed with an optical microscope. We counted 300 pollen grains, also including spores of ferns, fungi, and other palynomorphs in the count. For the palynological determination, we used pollen atlases (Roubik & Moreno, 1991; Herrera & Urrego, 1996; Fernández & García, 2008) and reference collections from the palynology library of the Palynology Laboratory of the Institute of Natural Sciences, National University of Colombia.

According to Rangel and Suárez (2022) and Cortés and Rangel (2023), the palynomorphs of the “sum of pollen” group were segregated into phytocological groups, as follows:

Mangrove: *R. mangle*, *A. germinans*, *Conocarpus erectus*, and *Acrostichum aureum*.

Aquatic marsh: *Pontederia* (*Eichhornia*) *crassipes*, *Typha dominguensis*, *Eclipta prostrata*, *Scoparia dulcis*, and *Cyathula*, *Sagittaria*, *Paspalum*, *Hydrocotyle*, Cyperaceae, Amaranthaceae, and *Althernanthera* species.

Playón: Sand beach (playón) *A. peruviana* and *Solanum* and *Cestrum* species.

Lowland plain forest: *S. paniculata*, *Euphorbia hirta*, *Bombacopsis quinata*, *Iriartea deltoidea*, *T. rosea*, *Allophylus occidentalis*, *M. frutescens*, *Lonchocarpus sericeus*, *A. excelsum*, *S. mombin*, *B. simarouba*, *C. platanifolia*, *Pouteria*, *Senna*, *Urbea* cf. *tamarindoides*, *M. montana*, *Acalypha villosa*, and *Sapium*, *Cassia*, *Eugenia*, *Myrcia*, *Byrsonima*, *Ficus*, *Euphorbia*, *Protium*, *Acacia*, *Cecropia*, *Miconia*, *Paullinia*, and *Warszewiczia* species.

Other palynomorphs, fern, and fungal spores, together with *Hippomane mancinella*, *Ludwigia helminthorrhiza*, *T. geniculata*, *P. caucanum*, *H. indicum*, *Phyllanthus*, *Casearia*, *Macfadenya*, *Malphigia glabra*, *Faramea*, with very low relative frequency values, were grouped under the heading of elements not included in the pollen sum.

We constructed general and ecological diagrams with detailed counts using the Tilia program, version 2.0.4.

Results

Dating - sedimentation

Figure 2A shows the chronological sequence according to depth. Radiocarbon dating yielded the following results: at a depth of 80 cm, the calibrated age was 70+/-30 BP and the sedimentation rate, 1.14 cm/year; at 295 cm, the calibrated age was 4760+/-40 BP and the sedimentation rate, 0.046 cm/year, and at 657 cm, the calibrated age was 5960+/-40 BP and the sedimentation rate, 0.3 cm/year. The estimated age of the base was 6185 years BP.

Stratigraphy

Quantitative analysis

Figures 2B and 3A show the general description of the sediment column and the curves for organic carbon, inorganic carbon, total carbon, residual moisture, and mineral fraction according to the quantitative analysis. Table 1S, <https://www.raccefn.co/index.php/raccefn/article/view/3179/4585>, shows the values according to the subzones.

The variation along the column showed the following:

Organic carbon (LOI 550°C). The highest average value (13.26%) was found in subzone IIa, the lowest (6.64%) in subzone Ic. The minimum extreme value (0.02%) was found in subzone Ib, and the maximum extreme (48.22%) in subzone Ia.

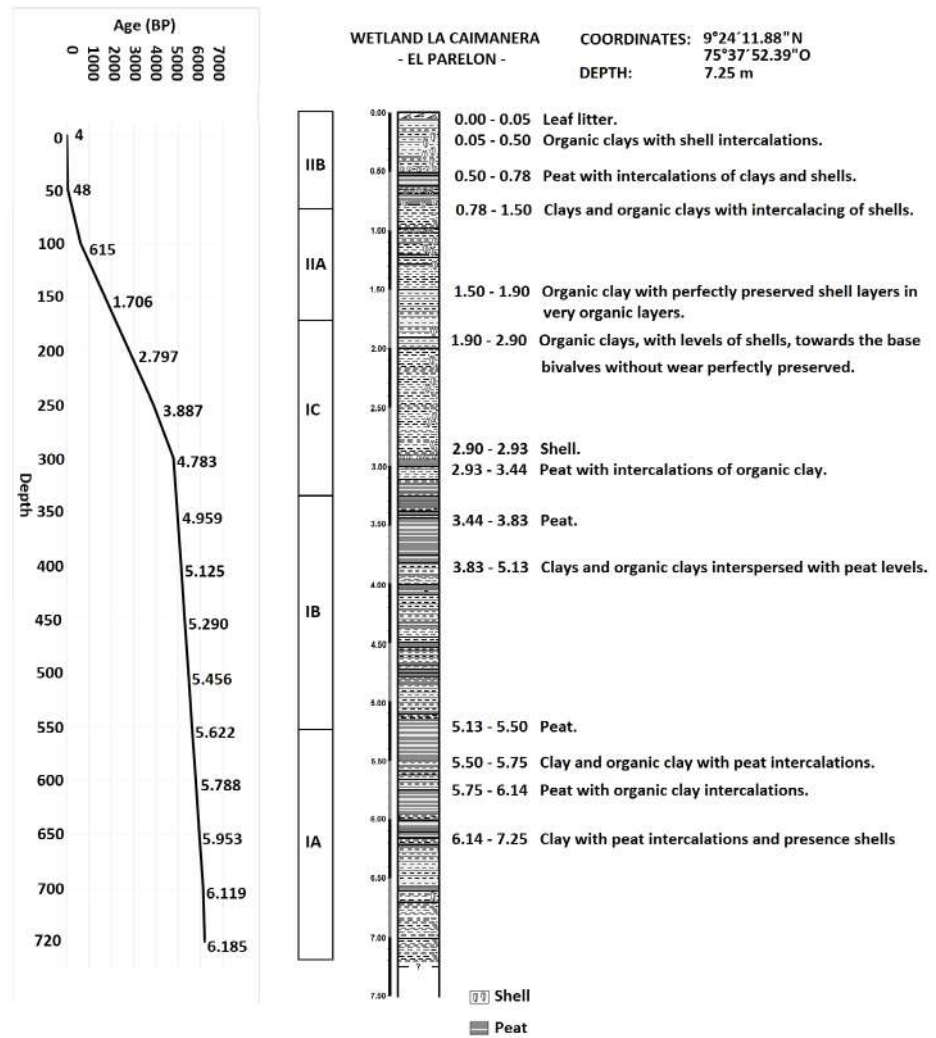


Figure 2. A. Age vs depth curve. B. Stratigraphy

Inorganic carbon (LOI 950°C). The highest average value (18.66%) was found in subzone Ic, and the lowest (11.58%) in subzone Ib. The lowest extreme value (0.05%) was found in subzone Ib, and the highest (24.24%) in subzone Ia.

Total carbon. The highest average value (28.42%) was found in subzone IIA, and the lowest (21.90%) in subzone Ib. The lowest extreme value (2.33%) was found in subzone Ib, and the highest (48.77%) in subzone Ia.

Residual moisture (LOI 105°C). The highest average value (16.11%) was found in subzone Ib, and the lowest (1.46%) in subzone Ic. The lowest extreme value (0.03%) was found in subzone Ic, and the highest (82.30%) in subzone Ib.

Mineral fraction. The highest average value (73.24%) was found in subzone Ic, and the lowest (62.01%) in subzone Ib. The minimum (11.52%) and maximum (96.69%) extreme values were found in subzone Ib.

Qualitative analysis

Mineral component. Figure 4 shows the variation of the mineral fraction along the column (differentiated phenocrystals and fine undifferentiated phenocrystals) and the integrated organics. The mineral fraction (especially fine undifferentiated phenocrystals) predominated with an average value of 63% and a maximum expression of 77% in

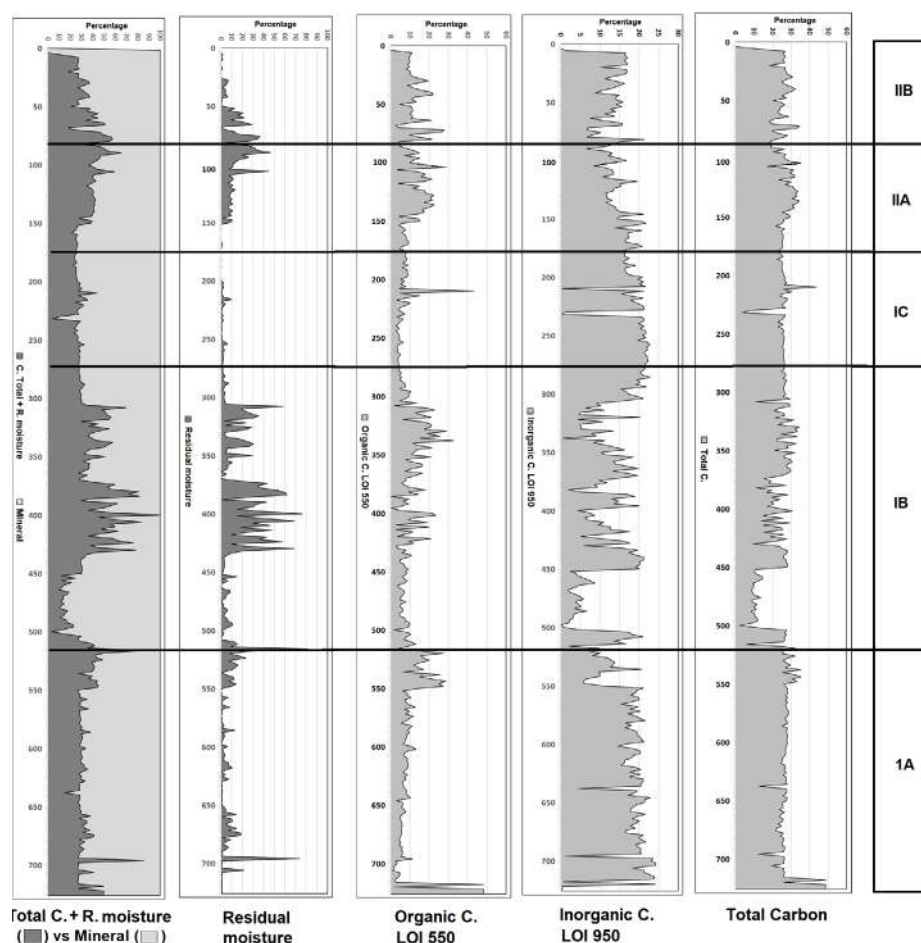


Figure 3. Quantitative analysis. **A.** Carbon content and mineral fraction. **B.** Carbon percentage (LOI 550). **C.** Inorganic carbon percentage (LOI 950). **D.** Total carbon.

subzone Iia and a minimum of 53% in subzone Ib (Table 2S, <https://www.raccefyn.co/index.php/raccefyn/article/view/3179/4585>). Among phenocrystals, there was a significant presence of iron oxide, ferromagnesians, anhydrite, feldspars, and sulfides. Malachite, rhodochrosite, calcite, sulfur, and halite, together with quartz, rock fragments, and other salts, were gathered in the “other mixed phenocrystals” group. The highest value in the phenocrystals group was in subzone Ia with 31.5%, while the lowest was in subzone Ib with 17.2%; anhydrite predominated in subzone Ia with 4.3%; iron oxides in subzone Iia with 3.4%; sulfides reached the highest value (4.1%) in subzone Iia, and ferromagnesians in subzones Iia and Iib with 2%.

Organic component. The average value was 37%, reaching its maximum expression in subzone Ib (47%) and the minimum one in Iia (23%). We registered the highest average value (40.9%) of marine component (shells) in subzone Ic and the lowest (5.5%) in Ia. In terms of peat, the highest value (26.7%) was registered in subzone Ib, and the lowest (1.6%) in Iib. The highest level of coal (5.3%) was found in subzone Ia, and the lowest (1%) in Iia, while it was not found in Iib. Organic remains (seeds, wood, tissues) reached the highest average value (11.7%) in subzone Ib and the lowest (3.6%) in Iia. The column showed a clear segregation in terms of the origin of the organic components, as follows: between the base, 725-290 cm, the continental ones dominated, and from there to the top (0 cm) the marine ones, except for the section 128-118 cm, where the continental component predominated.

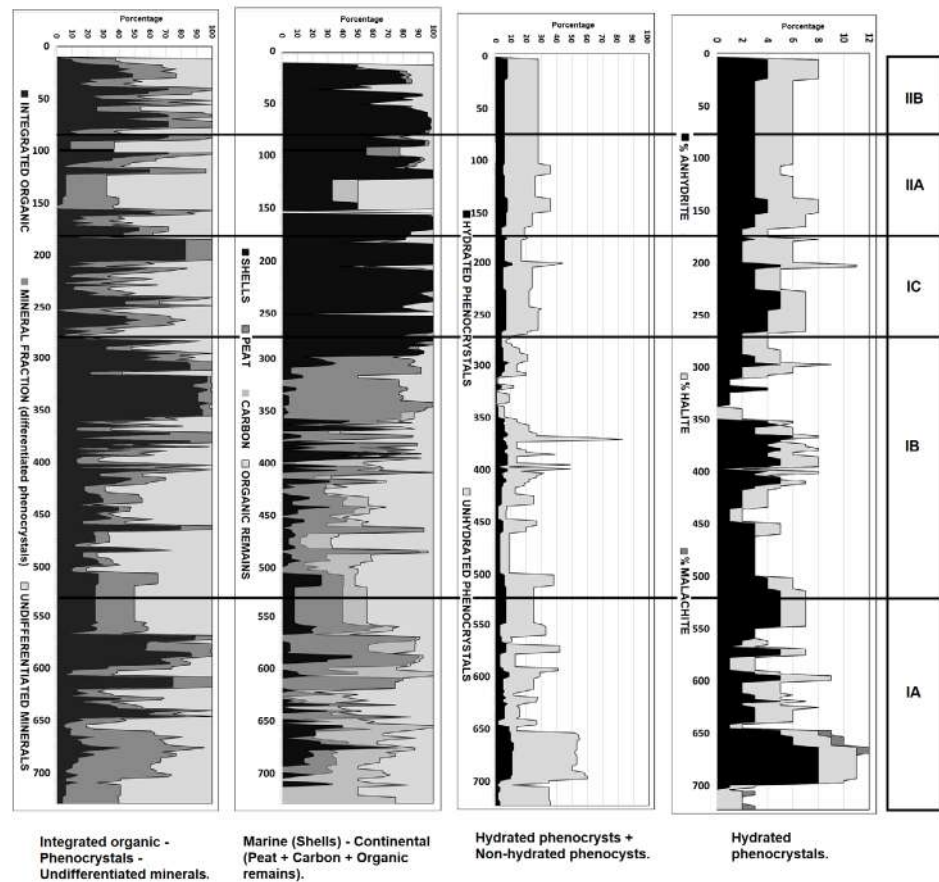


Figure 4. Organic components and mineral fraction of the sediment (qualitative, percentage estimated by using a stereoscope)

Palynological diagrams (changes in vegetation).

Two global trends in the vegetation of the site can be distinguished in the general diagram (Figure 5). Between the base, 727 cm and 175 cm, continental wetland conditions predominated, and estuary elements (mangroves) were absent. From 175 cm onwards, we recorded the presence of elements associated with the mangroves.

The segregation based on the predominance of one type of vegetation in the zonation showed the following:

Zone I. Depth 725-175 cm. Approximate age, 6185-2142 years BP. This is the typical setting of a composite zonation in a freshwater wetland surrounded by a lowland plain forest vegetation, whose representation in the palynological spectrum predominated. Based on the values of the ecological groups and the dominant species, it is feasible to consider the following zonation:

Subzone Ia: Depth 725-525 cm. Approximate age, 6185-5522 BP. It is characterized by the dominance of plain forest representation, particularly by the mainland forest, with *M. montana* (4-17%), *A. villosa* (1-7%), *S. mombin* (1-11%), *L. sericeus* (1-13%), *Ficus* sp. (1-9%), *Miconia* sp. (5-20%), and *Warszewiczia* (1-9%). In the flooded forest, *S. paniculata* (common name “freshwater mangrove”, 2-11%) and *B. quinata* (1-13%) were present with important values. The values of the aquatic-swamp group characterized the subzone, with the species associated with the water mirror, such as *Sagittaria* sp. (1-18%), *Hydrocotyle* sp. (2-5%), and *Paspalum* sp. (1-13%), reaching the highest representation. In the swamp group, *S. dulcis* (1-13%), Cyperaceae (1-6%), and *T. dominguensis* (1-7%) showed high

values. Among the elements of the sand beach, *Solanum* sp. (4-20%) predominated, and among the elements not included (Figure 6A), the records of warty and psilate triletes had values close to 20%.

Subzone Ib: Depth 525-275 cm. Approximate age, 5522-4323 BP. Plain forests continued to dominate, particularly the terra firme forest with *Uribea* cf *tamarindoides* (1-9%), *Acacia* sp. (1-7%), and *I. deltoidea* (1-11%), which replaced the dominance of *M. montana* (1-3%). *S. paniculata* (1-16%) representation in the flooded forest persisted. The

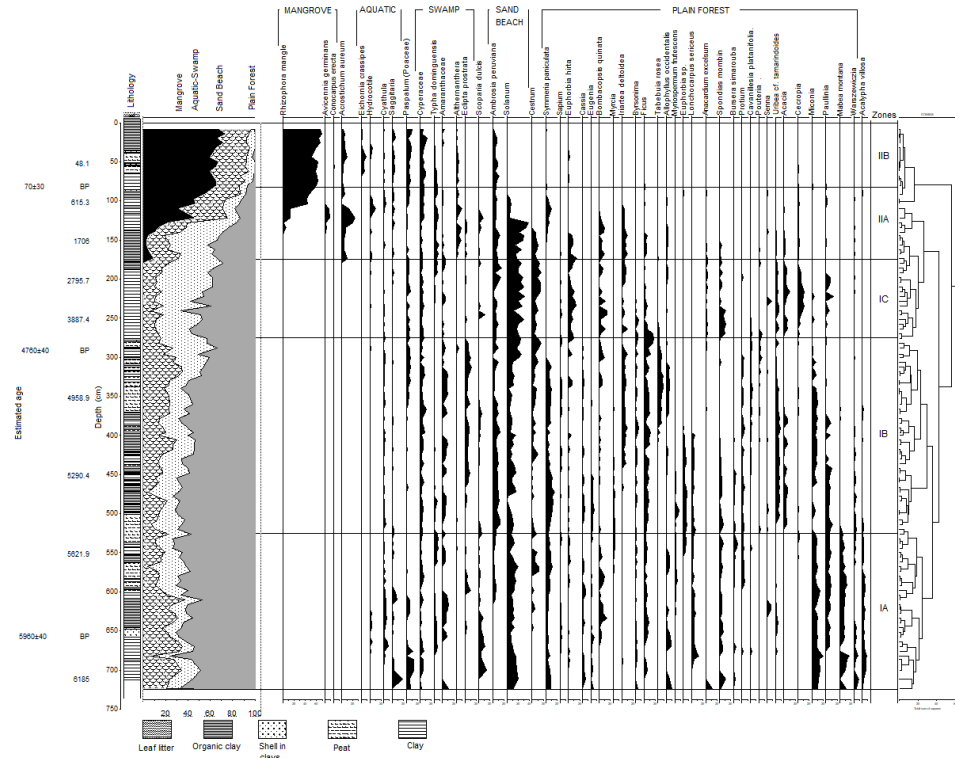


Figure 5. General palynological diagram elements included in the pollen sum

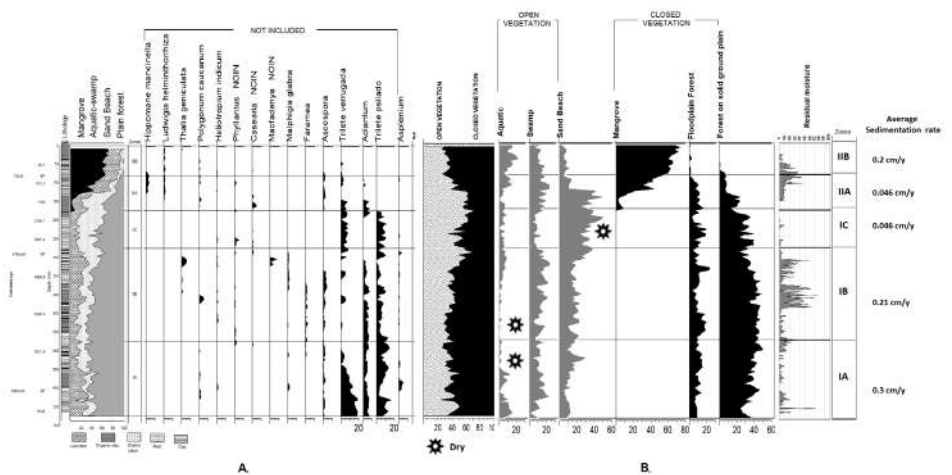


Figure 6. A. Palynological diagram of “not included” elements. B. Ecological segregation between open and closed vegetation

values reached by the swamp elements were the highest of the whole diagram, especially those of Cyperaceae (1-11%), Amaranthaceae (1-10%), and *E. prostrata* (1-13%). The values of species associated with the water mirror, such as *Sagittaria* sp. (1-3%) and *Hydrocotyle* (1-2%), decreased. Among the sand beach elements, besides *Solanum* sp. (2-26%), *A. peruviana* (2-13%) was important. Among the “not included” elements, trilete psilado and *Adiantum* records were important, as well as *T. geniculata*, *P. caucanum*, *Phyllanthus* sp., and *M. glabra*.

Subzone Ic: Depth, 275-175 cm. Approximate age, 4323-2142 B.P. Here, plain forest representation decreased, particularly due to the absence of records of *S. paniculata*. Instead, *E. hirta* increased (2-15%). The terra firme forest representation also decreased, and now, it is represented by *S. mombin* (2-12%), *Acacia* sp. (1-11%), *A. excelsum* (1-4%), and *Cecropia* sp. (1-11%). The values of the species associated with the water mirror increased, particularly those of *Paspalum* sp. (1-7%) and *Hydrocotyle* sp. (1-4%). Wetland representation decreased due to the low values of Amaranthaceae (2-5%), *E. prostrata* (1-3%), and *T. dominguensis* (1-6%). The subzone is characterized by the increase in the values of species typical of sandy beaches, such as *Solanum* sp. (11-32%), *A. peruviana* (1-15%), and *Cestrum* sp. (4-17%). Among the “not included” elements, psilate and warty trilete records were significant.

Zone II. Depth, 175-0 cm. Approximate age, 2142-present. This zone reflects an estuarine environment with an initial phase of low mangrove representation that ultimately becomes dominant. Based on the values of the ecological groups and the dominant species, it is feasible to consider the following zoning:

Subzone IIa: Depth, 175-80 cm. Approximate age, 2142-70 B.P. Plain forest representation strongly decreased, especially due to the low values of the terra firme forest of *Cecropia* sp. (1-2%), *Acacia* sp. (1-3%), *Uribea* cf. *tamarindoides* (1-2%), and *Ficus* sp. (1-6%). The representation of *I. deltoidea* increased (4-11%), and that of *A. excelsum* remained the same (1-2%). In the flooded forests, *B. quinata* (2-10%) and *S. paniculata* (1-11%) records were significant in the final area of the subzone. The values of species associated with the water mirror increased, particularly those of *Hydrocotyle* sp. (1-11%) and *Sagittaria* sp. (1-4%), but decreased for *Paspalum* sp. (1-6%). The representation of the swamp increased, especially with *T. dominguensis* (1-9%), Amaranthaceae (1-2%), *E. prostrata* (1-4%), and *S. dulcis* (1-8%). The representation of the sand beach remained up to the middle part of the subzone, decreasing towards the end with *Solanum* (40-5%). The subzone evidences the beginning of low records for those elements associated with the mangrove, such as *A. aureum* (3-25%) and *A. germinans* (2-9%). *R. mangle* was recorded for the first time (1-47%). Among the “not included” elements, *Casearia* and *Adiantum* spores records were significant.

Subzone IIb: Depth, 80-0 cm. Approximate age, 70-present. The representation of mangroves predominated, especially due to *R. mangle* recorded values (50-70%); *C. erectus* (1%) and *A. aureum* (1-10%) were also found, while *A. germinans* was not recorded. The values of the species associated with the water mirror increased, particularly those of *Sagittaria* sp. (1-6%), *Paspalum* sp. (4-11%), and *Eichhornia crassipes* (1-9%) appeared. The representation of the swamp decreased with *T. dominguensis* (1-6%) and *Alternanthera* sp. (1-5%). The representation of the sand beach with *A. peruviana* (2-11%) decreased drastically, and the records of *Solanum* sp. (1%) and *Cestrum* sp. practically disappeared. The decrease in the representation of lowland forests was accentuated by the low values of *S. paniculata* (1%) and the absence of *B. quinata* in the flooded forests, while the terra firme forests were scarcely represented by *Cecropia* sp. (1-2%), which practically disappeared towards the end. The subzone is characterized by the predominance of mangroves. Among the “not included” elements, *H. mancinella* and *L. helminthorrhiza* records were significant.

Changes in vegetation dominance (physiognomy)

According to the general palynological diagram and to the segregation of the phytoecological groups (**Figure 6B**), in subzones Ia and Ib, the representation of closed vegetation predominated (flooded and terra firme forests); the poor representation of the aquatic group in some subzone Ia sections (500-430 cm) is quite peculiar, and it

is related to the low values of residual water in the sediment. In subzones Ic and IIa, the representation of open vegetation increased due to the high values of sand beach elements, which reached their highest values in Ic, while the value of residual water in the sediment was the lowest of the entire column. In subzone IIb, the closed vegetation dominated, represented by mangroves, as the representation of the forests of the plain decreased drastically. This, together with the increase in residual water, is associated with the consolidation of the mangrove environment. In brief, during periods of low expression of aquatic vegetation and high expression of sand beach vegetation, the residual water values decrease, a condition that is associated with the decrease of the water column in the basin of the wetland, either due to a decrease in the flow of the tributaries or due to low values in local and regional precipitation.

Palynological associations in the sediments and affinities with current vegetation types

Table 1 describes the palynological associations based on the pollen spectra in the sediment by subzones and the floristic affinity with current vegetation types. The correspondences between the types of tropical dry forests, such as those dominated by *M. montana*, *S.*

Table 1. Relationship between palynological associations detected in the sediment analysis and similar current vegetation types (Caimanera wetland)

Sub-zones	Dominant taxa in sediments and pollen zones	Vegetation types in the Caribbean (Cortés & Rangel, 2023; Rangel-Ch. & Suárez, 2022)
Ia	<i>Mabea montana</i>	Forests dominated by <i>Mabea montana</i> in very humid sites around wetlands in the Caribbean
Ia	<i>Lonchocarpus sericeus</i>	Forests dominated by <i>Lonchocarpus</i> species (<i>L. fendleri</i> , <i>L. punctatum</i>), common in hills and dry and stony sites in La Guajira and Cesar
Ib	<i>Tabebuia rosea</i>	<i>Tabebuia rosea</i> , dominant in floodplain forests around Caribbean wetlands such as the <i>Phyllantho elsiae-Tabebuia roseae</i> formation (alliance), and in humid flat areas such as the <i>Tabebuia roseae-Samaneaetum saman</i> forests
Ib	<i>Protium</i> sp.	<i>Protium</i> species, particularly <i>P. heptaphyllum</i> , dominant in forests and low terraces in very humid locations such as southern Córdoba in the Caribbean
Ib, Ic	<i>Uribea</i> cf. <i>tamarindoides</i>	Characteristic dominant species in the forests of the <i>Erythroxilo amazonici-Anacardion excelsi</i> alliance of the <i>Spondiadio mombinis-Anacardietalia excelsi</i> order and the <i>Cratevo tapiae-Spondiadia mombinae</i> class. These forests are established in flat areas along streams and channels (riverine vegetation).
Ia, Ic	<i>Spondias mombin</i>	Dominant species with a wide distribution in different types of vegetation, from forests such as those of the <i>Cratevo tapiae-Spondiadia mombinis</i> class established around the wetland; mixed palm groves such as those of the <i>Spondiadio mombinis-Attaleetea butyraceae</i> class, dominant in the plains and terraces around the Caribbean wetland, particularly the Cesar wetlands. Also dominant in dry areas, where it is associated with typical species of very dry tropical forests such as those of the <i>Spondiadio mombinis-Handroanthetea ochracei</i> class.
Ib, Ic, IIa	<i>Symmeria paniculata</i>	Dominant in the tall scrub forests such as the <i>Symmerio paniculatae-Tabebuia roseae</i> association around the Caribbean wetland
IIb	<i>Rhizophora mangle</i> y <i>Avicennia germinans</i>	<i>Rhizophora mangle</i> is a characteristic species of the <i>Rhizophoretea mangle</i> class. It includes various types of mangroves, such as the <i>Avicennio germinantis-Rhizophoretum manglis</i> association, in locations with high salinity.
Ic, IIa	<i>Ambrosia peruviana</i> y <i>Solanum</i> sp.	Characteristic dominant species of the <i>Heliotropio indici-Solanion campechiense</i> formation, with maximum expression in the <i>Ambrosietum peruviana</i> association, dominant in the sand beaches of the Caribbean wetland
Ic, IIa	<i>Anacardium excelsum</i>	Dominant in several types of vegetation with wide distribution in the Caribbean, such as the forests grouped in the <i>Huro crepitantis-Anacardietalia excelsi</i> order on terraces-hills in dry areas, and in the <i>Spondiadio mombinis-Anacardietalia excelsi</i> order in flat, humid sites.

mombin, *A. excelsum*, and *Protium heptaphyllum*, are very important, and the distribution area of most of them concentrates in the Caribbean wetlands. The sediments also reflect the presence of tall forest scrublands dominated by *S. paniculata* on the flood plain and the *A. peruviana* and *Solanum* sp. (*Solano campechiensis-Ambrosietum peruviana*) scrubs dominating the sand beaches during low water periods. Among the mangrove types, some are dominated by *R. mangle* and *A. germinans* (*Avicennio germinantis-Rhizophoretum manglis*) and are associated with salinity conditions in the water column.

Paleoenvironmental reconstruction

Zone I. (725-175 cm) Approximate age, 6185-2142 years BP. The paleo-environment was a freshwater wetland with the characteristic zonation of the hydric ecological series: from rooted-emergent aquatic vegetation (*Sagittaria - Hydrocotyle*) and swamps with plant communities such as *T. dominguensis* and Cyperaceae species “grasslands”, to the lowland with *S. paniculata* flooded forests and the dry tropical forest formations (terra firme) dominated by *M. montana* and *S. mombin*. According to the zonation of the palynological diagram, the following is the environment reconstruction in the subzones (**Figure 7**):

Subzone Ia. (725-525 cm) Approximate age, 6185-5522 BP. The wetland reached its greatest surface area and water volume; the aquatic vegetation was represented by *Sagittaria* and *Hydrocotyle* species; the grassland by *Paspalum* sp., and the swamp vegetation by dense formations of *T. dominguensis*, where Cyperaceae species and *S. dulcis* predominated. On the plain, in flooded areas, *S. paniculata* tall scrub forests were established, and on dry-land forests, *S. mombin* and *M. montana* dominated. Compared to current climate conditions in the study area, this was a period with slightly higher precipitation values.

Subzone Ib. (525-275 cm). Approximate age, 5522-4323 BP. In the wetland, the water surface was reduced, and swamp vegetation coverage increased, showing its maximum development. The representation of the *S. paniculata* flooded forest was maintained. The area covered with mixed palm groves dominated by *I. deltoidea* increased, replacing the *M. montana* forests (terra firma), and the sand beach vegetation increased its representation. Compared to the previous subzone, it was a period with less precipitation.

Subzone Ic. (275-175 cm). Approximate age, 4323-2142 BP. The surface area with water mirror and areas covered with swamp vegetation, *S. paniculata* flooded forests, and terra firme forests of *A. excelsum* and *S. mombin* decreased. The sand beach vegetation with *A. peruviana* and *Solanum* sp., spread over these areas. As in the previous subzone, it was a period with low precipitation values.

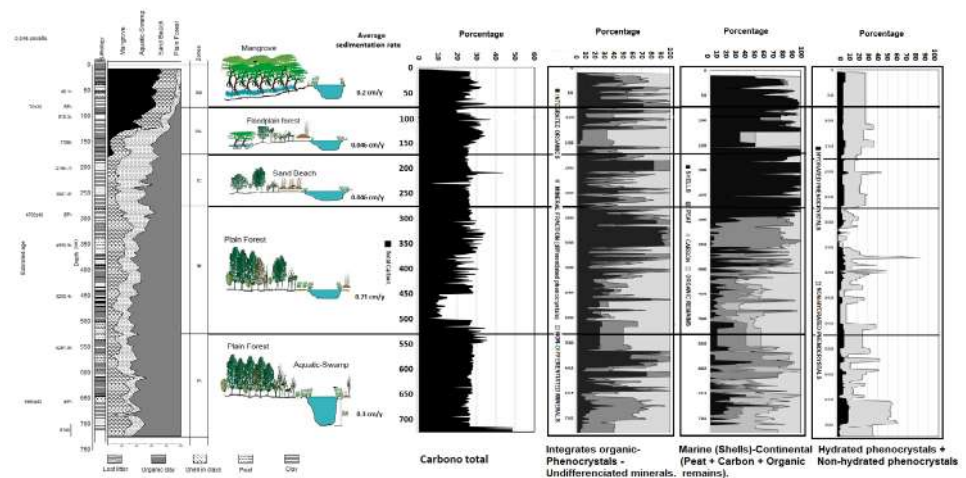


Figure 7. Paleoenvironmental reconstruction: changes in vegetation, carbon content, organic components, and mineral fraction

Zone II. (175-0 cm). Approximate age, 2142-present. In the lower part (IIa), a paleoenvironment landscape of freshwater wetland persisted with emergent rooted aquatic vegetation (*Sagittaria - Hydrocotyle*); in the swamp, plant communities such as the *T. dominguensis* and Cyperaceae and *Alternanthera* species “grasslands” were established. *A. aureum*, *C. erectus*, and *A. germinans* records indicate an increase in the marine influence. The representation of the sand beach increased, and that of the dry-land forest decreased drastically. In the upper part (IIb), mangrove dominance is evident. The following is the environment reconstruction in the subzones:

Subzone IIa. (175-80 cm). Approximate age, 2142-70 BP. The surface area with a water mirror (aquatic vegetation) increased; the areas covered with swamp vegetation and the *S. paniculata* floodplain forest also increased; the extension of the dry land vegetation decreased and was replaced by the mixed *I. deltoidea* palm grove. The representation of the sand beach remained high. The precipitation was slightly higher compared to the previous subzone.

Subzone IIb. (80-0 cm). Approximate age 70-present. It reflects an estuarine wetland with typical mangrove vegetation dominated by *R. mangle*. Although brackish water conditions predominated, the representation of aquatic vegetation was maintained, but that of the swamp and sand beach decreased. The representation of forests on the flood plain and dry lands was very scarce. Precipitation conditions were similar to the present, but greater than those of the previous subzone.

Discussion

Sedimentation rate

Two contrasting environments were differentiated in the sediment column and the palynological diagram (**Figure 5**): between 725-175 cm (subzones Ia, Ib, Ic), the palynological spectra showed a continental wetland environment (without mangroves), and between 175-0 cm (subzones IIa and IIb), an estuary (marine) environment with mangroves.

The sedimentation rate in subzone Ia (725-525 cm) was 0.3 cm/year, and 0.21 cm/year in subzone Ib (525-275 cm). These values surpassed the limit (0.038-0.10 cm/year) for wet periods (maximum level in the water column). In subzone Ic (275-175 cm), according to **Lazala et al.** (2010), the value of 0.046 cm/year was quite close to the variation limits in the Caribbean wetlands for dry periods (0.011-0.037 cm/year).

In subzone IIa (175-80 cm), with a mangrove in a regular state of development, the sedimentation rate of 0.046 cm/year was below the limit (0.09-0.12 cm/year) proposed by **Rangel-Ch.** (2024) for mangroves' degree of development (vigor) in the Colombian Caribbean.

In subzone IIb (80-0 cm), characterized by a vigorous mangrove development according to the palynological diagram (**Figure 5**), the sedimentation rate (accretion) was 1.14 cm/year, a value that follows the pattern of vigorous mangrove development in the Colombian Caribbean (0.52-1.14 cm/year).

The sediment column reflects two contrasting environments in sedimentation rates and the establishment of the vegetation dominant formations in the basin and surrounding areas. The lower part of the diagram depicts a freshwater wetland environment with no seawater input. Sedimentation rates fluctuated between 0.3 and 0.21 cm/yr. In the freshwater wetland-mangrove transition phase (subzone Ic), the sedimentation rate was close to the variation limits for “dry” periods in the Caribbean wetlands. In the upper part, the sedimentation rate in an estuarine environment was 1.14 cm/yr, which reflects the marine influence and a vigorous mangrove development influencing substrate accretion through the production and accumulation of organic matter and the retention of mineral elements (**Krauss et al.**, 2014).

Quantitative analysis: mineral and organic fractions (carbon)

The mineral fraction predominated throughout the column; the highest average (73.24%) was found in subzone Ic, and the lowest one (62.01%) in subzone Ib. The minimum (11.52%) and maximum (96.69%) extreme values were found in subzone Ib.

The highest values of carbon content were reached in subzone Ia. Except for sections with low values and an extreme minimum of 2.33%, in subzone Ib, the behavior of the curve was very similar. The inorganic carbon values were higher than those of organic carbon, particularly in subzones Ia and Ic. However, the mineral fraction domain was differentiated by sections: between 544-504 cm, the upper part of subzone Ia, and the lower part of Ib, the representation of total carbon increased, with an average of 27% and a maximum of 35.5% at 538 cm. In the section at 428-306 cm and in the middle and upper parts of subzone Ib, the total carbon average value increased to 25%, with a maximum of 34.4% at 330 cm. In the section at 146-6 cm, upper part of subzones IIa and IIb, the average value of total carbon was 27%, with a maximum of 36.9% at 104 cm.

In summary, the average values of organic carbon (6.64 to 13.26%) were lower than those of inorganic carbon (11.58 to 18.66%), and total carbon fluctuated between 21.9 and 28.42, with sections in which its representation increased (544-504 cm, 428-306 cm).

As for residual water, the highest expression (16.11%) was reached in the lower part of subzone Ib. The lowest value (1.46%) was found in subzone Ic, probably related to the disappearance of aquatic vegetation representation.

Qualitative analysis

Here, the mineral fraction also predominated along the column. The organic fraction (continental and marine) had a high representation in subzone Ib, section 350-312 cm, with an average of 94%, and in subzone Ic, section 200-180, with an average of 83%. In the marine component (shells), the maximum value was reached in subzone Ic, and a very low value in Ia. In the continental component, peat and organic remains showed the highest value in subzone Ib. A clear segregation was evident: between the base and 725-290 cm, the dominance of continental organic components was evident, and from there to the top (0 cm), the marine component dominated, represented by mollusc shells (*Anomalocardia brasiliensis* and *Mytilopsis salleri*) and crustacean remains (*Balanus* species). In the mineral fraction, the group of undifferentiated fines predominated, while in the phenocrystals, anhydrite predominated with a higher value in subzone Ia; iron oxides, sulfides, and ferromagnesian reached a higher representation in subzone IIa. The hydrated phenocrystals (anhydrite, halite, and malachite) registered a higher value in sections of subzones Ia, Ib, and Ic (**Figure 4**), related to the low representation of aquatic elements in the palynological diagram. Phenocrystals (hydrated + non-hydrated) showed higher values in some sections of sub-zones Ia, Ib, and Ic; the values of hydrated phenocrystals, such as anhydrite, halite, and malachite, were very significant. These periods with higher values are related to periods in which the water level in the basin decreased (drought).

Paleoenvironmental changes and their relationship with other areas of the Colombian Caribbean

The oldest records reporting the presence of mangrove vegetation in coastal wetlands are those of Navío Quebrado (La Guajira) and Boca de López I (**Figure 8**). In Ostional (Córdoba), La Caimanera (Sucre), and Neguanje (Magdalena), mangrove records begin approximately at 1200 years BP. The changes detected show the following patterns: between 6500-4400 years BP, the oldest record of Navío Quebrado (La Guajira) reflects an initial phase in the formation of the mangrove vegetation, with very low values of *R. mangle*, and the sporadic presence of *A. germinans*. In Boca de López I, with an age at the base of 4585 years BP, the two mangrove species also register low records. Between 4400-3400 years BP, *R. mangle* representation increased, although from 3700 years BP, in Boca de López I, mangrove records disappeared. Between 3400-2000 years BP, the mangrove developed vigorously in Navío Quebrado, while in Boca de López I, vigorous mangrove only appeared at the end of the period. Between 2000-1200 years BP, the mangrove developed vigorously in Neguanje (Tayrona) and the CGSM (Boca de López I), while in Navío Quebrado, the presence of the mangrove decreased. Between 1200-500 years BP, vigorous mangrove grew in Neguanje and Ostional, but in Navío Quebrado and

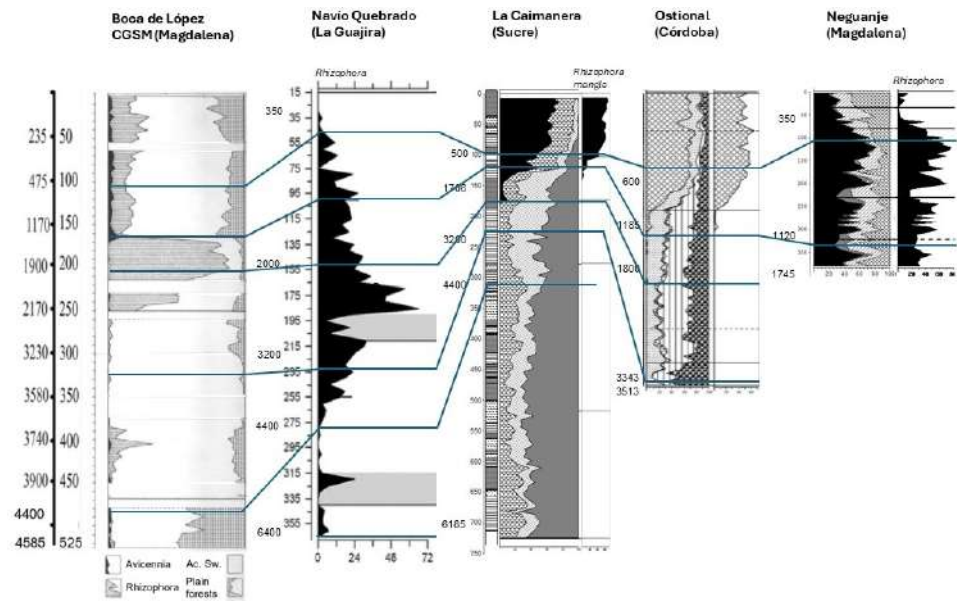


Figure 8. Correlation of vegetation changes over time in several locations in the Colombian Caribbean

La Caimanera, mangroves were greatly reduced. Between 500 years BP and the present, there has been a vigorous development of mangroves in La Caimanera and Ostional, and a slight decrease in Neguanje and CGSM (Boca de López I).

The changes detected do not allow for defining a repeating pattern in the estuarine and deltaic environments of the Colombian Caribbean. There were periods of vigorous mangrove development (between 3400 and 2000 years BP at Navío Quebrado and CGSM), which were associated with changes in the sea level during that time (**Robertson & Martínez, 1999**). However, other periods of significant mangrove development, such as between 1800 and 500 years BP (Boca de López I, Neguanje), and between 500 years BP and the present (La Caimanera and Ostional), cannot be linked to previously documented sea level changes.

A detailed analysis of the Caimanera situation suggests a complementary explanation for these changes. The analyzed sediment column presents two contrasting periods: between the base and 175 cm, when the environment was dominated by continental freshwater wetlands, and between 175 and 0 cm, before the transition, when the environment was estuarine. What changes occurred during the freshwater-brackish water transition? To answer this question, we must review the conditions in subzone Ic, at a depth of 275-175 cm, with an approximate age of 4323-2142 years BP. During this period, the vegetation was dominated by sandy beach elements, which had the highest representation in the entire diagram (**Figure 5**), while the representation of aquatic vegetation was the lowest in the entire column. The stratigraphy was characterized by organic clays; the sediment was consolidated, and no peat remains were found. The average values (%) of inorganic carbon (18.66%) and the mineral fraction (73.24%) were the highest in the entire column, while the residual moisture content was the lowest (0.03%). The highest average values (3.34%) were observed for anhydrite (differentiated phenocrysts) and shell content (40.98%). These biophysical conditions support the classification of subzone Ic as “dry,” in terms of moisture (precipitation, water column level), compared to the other subzones in the column. Under these climatic and stratigraphic conditions, it is plausible to recreate a scenario in which subduction occurred in the basin, facilitating the influx of seawater. This interpretation would therefore be more closely related to local variations than to global (or regional) sea level fluctuations.

Conclusions

The natural history of changes in the vegetation and environmental conditions of La Caimanera wetland revealed two well-defined and contrasting periods: between the beginning or base of the sediment column analyzed (725 cm, 6185 years BP, and the middle-upper part at 175 cm, 2142 years BP), when the environment was that of a continental freshwater wetland. The hydric series began with aquatic vegetation dominated by *Sagittaria* and *Hydrocotyle* species, and *Paspalum* sp., probably towards the shore, where they formed a belt (“gramalotal”). In the wetland vegetation, Cyperaceae species and *S. dulcis* were present. On the lowland plain, the low *S. paniculata* scrub-forest took root, and in the surroundings, in the final phase of the ecological series, on continental land, forests dominated by *M. montana*, *S. mombin*, and *A. excelsum* were arranged. The mineral component dominated the sediment; hydrated phenocrystals reached significant values at two points, a feature related to periods when the water level in the wetland dropped. In the organic component of continental origin, peat and plant remains were significant. In the upper part (subzone Ic), a drastic change occurred: the transition to a brackish environment, related to the considerable extension of the area covered by beach vegetation (*A. peruviana*) and the greatest expression of components of marine origin (shells). In this subzone, the lowest value (1.46%) of residual water was registered, a condition that is closely related to the disappearance of the representation of aquatic vegetation. Under these conditions, in this segment of the paleoenvironmental history, the wetland reached its greatest surface and volume of water, and the sedimentation rates varied between 0.3 and 0.21 cm/year. In the upper part (transition zone), the sedimentation rate was 0.046 cm/year, which is close to the upper limit of sedimentation rate variation in the Caribbean wetlands for dry periods (0.011-0.037 cm/year).

From 2142 years BP to the present (175 cm to 0 cm), the conditions for an estuarine environment (brackish water) were established. In the last 1000 years BP, the mangrove wetland (closed vegetation) developed vigorously, an event that is expressed in the palynological spectrum; the representation of marine remains (shells) is high, which is evidenced by the high representation of *A. brasiliensis* and *M. sillei* mollusk shells and remains of crustaceans, species of *Balanus*, and a sedimentation rate (accretion) of 1.14 cm/year.

Supplementary information

See the supplementary information in <https://www.raccefyn.co/index.php/raccefyn/article/view/3179/4585>

Acknowledgements

To the National University of Colombia, Faculty of Sciences, the Institute of Natural Sciences Palynology Laboratory, and the Biodiversity and Conservation Research Group, National University of Colombia, Bogotá campus. To David Mencin and Roger Bilham (University of Colorado) for their help with the complimentary C14 dating information.

Author contributions

JBP: palynological and stratigraphic analysis and writing of the document; **AJJ**: field work, stratigraphic analysis, and writing of the document; **ORCH**: field work, comprehensive information analysis, and writing of the document.

Conflicts of interest

The authors declare that they have no personal or institutional conflicts of interest.

References



Betancurt, A. (2019). Cambios medioambientales y movilidad de poblaciones humanas en el Caribe de Colombia. Tesis de Doctorado en Ciencias Biología. Instituto de Ciencias Naturales,

- Universidad Nacional de Colombia.
- Castaño, A., Urrego, L., Bernal, G.** (2010). Mangrove dynamics in the Cispatá lagoon system (Colombian Caribbean) during last 900 years. *Revista de Biología Tropical*, 58(4), 1347-1366.
- Cortés-C., D.V. & Rangel-Ch., J.O.** (2023). Manglares y vegetación estuarina de la región Caribe de Colombia. En: J.O. Rangel-Ch. (Ed.). *Colombia Diversidad Biótica XXI Tipos de vegetación en las regiones naturales de Colombia. Nuevos aportes: (1-70)*. Universidad Nacional de Colombia, Instituto de Ciencias Naturales. Ministerio de Ambiente y Desarrollo Sostenible.
- Díaz, J.F.** (2016). Registro palinológico e historia paleoecológica del cordón litoral de cierre de la ciénaga Navío, santuario de fauna y flora los Flamencos – Departamento de La Guajira. Trabajo de Grado. Departamento de Geociencias, Universidad Nacional de Colombia.
- Fernández, V.C. & García-M., Y.** (2008). Atlas palinológico de la vegetación acuática y de pantano de los complejos cenagosos del Caribe, Departamentos de Córdoba y César. Tesis de Pregrado. Universidad Militar Nueva Granada.
- García-M., Y., Rangel-Ch., J.O., Jaramillo-J., A.** (2022). Environmental changes during the last 1800 years in the Neguanje mangrove, Tayrona National Natural Park, Colombian Caribbean. *Revista de la Academia Colombiana de Ciencias Exactas Físicas y Naturales*, 46(178), 90-107. <https://doi.org/10.18257/raccefyn.1518>
- Herrera, L.E. & Urrego, L.** (1996). *Atlas de polen de plantas útiles y cultivadas de la Amazonia Colombiana. Estudios de la Amazonia Colombiana. Vol II*. Tropenbos.
- Krauss, K.W., McKee, K.L., Lovelock, C.E., Cahoon, D.R., Saintilan, N., Reef, R., Chen, L.** (2014). How mangrove forests adjust to rising sea level. *New Phytologist*, 202, 19-34.
- Lazala, M., Rangel-Ch., J.O., Romero, I., Valderrama, Y., Parra, L.N.** (2010). Cambios en la vegetación y en el clima de las ciénagas de Córdoba. En: J.O. Rangel-Ch. (Ed.). *Colombia Diversidad Biótica IX. Ciénagas de Córdoba: Biodiversidad-ecología y manejo ambiental: (71-100)*. Universidad Nacional de Colombia-Instituto de Ciencias Naturales-CVS.
- Moré Sierra, G.** (2025). La historia de Coveñas. Llegada del turismo y algunos de sus efectos. https://www.oocities.org/packing_house_covenas/Historia_Covenas_Turismo.html
- Palacios-P., L., Rodríguez-Z., P., Rangel-Ch, J.O.** (2012). Cambios en el clima y en la vegetación en ambientes estuarinos de la Bahía de Cispatá (Córdoba - Caribe colombiano). En: J.O. Rangel-Ch. (Ed.). *Colombia Diversidad Biótica XII: Región Caribe: (145-164)*. Instituto de Ciencias Naturales, Universidad Nacional de Colombia.
- Rangel-Ch., J.O.** (2024). Paleoambientes costeros del Caribe colombiano. Patrón de riqueza vegetal, historia natural y conservación. Charla magistral. Simposio de Cambio Climático, Paleoclima y Biodiversidad Thomas van der Hammen. Portal Servicio Geológico Colombiano.
- Rangel-Ch., J.O. & Suárez, C.** (2022). *Memoria técnica del mapa de la vegetación natural de Colombia*. Instituto de Ciencias Naturales – MADS, Ideam, Instituto Alexander von Humboldt, Instituto Sinchi, Instituto de investigaciones aplicadas del Pacífico.
- Robertson, K. & Martínez, N.** (1999). Cambios del nivel del mar durante el holoceno en el litoral Caribe colombiano. *Cuadernos de Geografía*, VIII(1), 168-198.
- Rodríguez, P.** (2011). Cambios en la vegetación de estuario en la bahía de Cispatá (Córdoba – Colombia). Trabajo de Grado. Instituto de Ciencias Naturales, Universidad Nacional de Colombia.
- Roubik, D.W. & Moreno, J.E.** (1991). Pollen and Spores of Barro Colorado Island. *Monograph in Systematic Botany from the Missouri Botanical Garden*, 36, 1-276.
- Santisteban, J.I., Mediavilla, R., Pamo, E., Dabrio, C.J., Ruiz-Z., M.B., Gil-G., M.J., Castaño, S., Martínez-A., P.E.** (2004). Loss on ignition: A qualitative or quantitative method for organic matter and carbonate mineral content in sediments? *Journal of Paleolimnology*, 32(3), 1-13. <https://doi.org/10.1023/B:JOPL.0000042999.30131.5b>
- Urrego, L.E., Correa-M., A., González, C., Castaño, A.R.** (2013). Contrasting responses of two Caribbean mangroves to sea-level rise in the Guajira Peninsula (Colombian Caribbean). *Palaeogeography, Palaeoclimatology, Palaeoecology*, 370, 92-102.
- Van der Hammen, T. & Noldus, G.** (1984). Paleoecología de la Ciénaga Grande de Santa Marta. En: T. van der Hammen & P.M. Ruiz (eds). *La sierra nevada de Santa Marta (Colombia) Transecto Buritaca-La Cumbre. Estudios de Ecosistemas Tropandinos 2*. J. Cramer.
- Vélez, M.I., Escobar, J., Brenner, M., Rangel-Ch., J.O., Jaramillo, A., Betancourt, A., Curtis, J.H., Moreno, J.L.** (2014). Middle to late Holocene relative sea level rise, climate variability and environmental change along the Colombian Caribbean coast. *Holocene*, 24(8), 898-907.

Artículo original

Análisis de la influencia del eclipse solar anular del 14 de octubre del 2023 en la variación de la gravedad vertical medida con un gravímetro CG-5

Analysis of the influence of the October 14, 2023, annular solar eclipse on the variation of vertical gravity measured with a CG-5 gravimeter

✉ Laura Daniela Jiménez-Prada*,  Bryan Steven Reina-Mejía,
 Luis Hernán Ochoa-Gutiérrez

Departamento de Geociencias, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, Colombia

Resumen

El eclipse solar anular ocurrido el 14 de octubre del 2023 fue visible en Norteamérica y en zonas de Centroamérica y Suramérica. En Colombia se pudo ver en fase anular o parcial en todo el territorio nacional. La zona de anularidad cruzó de occidente a oriente los departamentos de Chocó, Quindío, Tolima, Huila, Meta, Guaviare, Vaupés, Caquetá y Amazonas. El objetivo de este estudio fue analizar la posible atenuación de la gravedad durante el eclipse mediante mediciones gravimétricas de alta precisión realizadas en Aipe (Huila) entre las 3:05 UTC-05 del 13 de octubre y las 11:31 UTC-05 del 15 de octubre del 2023 utilizando un gravímetro CG-5. Para sustentar la interpretación se revisaron trabajos previos que proponen mecanismos como la dispersión o la absorción gravitacional, así como modelos teóricos que predicen patrones específicos en la señal gravimétrica durante eclipses. Aunque las variaciones detectadas fueron sutiles, se registraron descensos en la gravedad que coinciden con fases críticas del eclipse, especialmente antes del primer contacto y después del último. Estas variaciones se alinean con modelos como el de Múniera (2011) y Heriyanto (2022), y con estudios anteriores desarrollados en China y Europa, lo que, más allá de los valores absolutos, aporta evidencia coherente de un posible efecto de atenuación gravitacional asociado a la geometría del eclipse.

Palabras claves: Eclipse solar; Gravedad vertical; Eclipse anular; Atenuación gravitacional.

Abstract

The annular solar eclipse of October 14, 2023, was visible in North America and parts of Central and South America. In Colombia, the eclipse was seen in the annular and partial phases throughout the country. The annular zone crossed the departments of Chocó, Quindío, Tolima, Huila, Meta, Guaviare, Vaupés, Caquetá, and Amazonas from west to east. This study aimed to analyze the possible attenuation of gravity during the eclipse using high-precision gravimetric measurements taken in Aipe (Huila) between 3:05 UTC-05 on October 13 and 11:31 UTC-05 on October 15, 2023, with a CG-5 gravimeter. To support the interpretation, we reviewed previous works that propose mechanisms such as gravitational scattering or absorption and theoretical models that predict specific patterns in the gravimetric signal during eclipses. Although the variations detected were subtle, decreases in gravity were recorded coinciding with critical phases of the eclipse, especially before the first contact and after the last one. These variations align with models such as those of Múniera (2011) and Heriyanto (2022), as well as previous studies developed in China and Europe, and provide, beyond absolute values, consistent evidence of a possible gravitational attenuation effect associated with eclipse geometry.

Keywords: Solar eclipse; Vertical gravity; Annular eclipse; Gravitational attenuation.

Citación: Jiménez-Prada LD, *et al.*
Análisis de la influencia del eclipse solar anular del 14 de octubre del 2023 en la variación de la gravedad vertical medida con un gravímetro CG-5. Revista de la Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. 49(192):618-628, julio-septiembre de 2025. doi: <https://doi.org/10.18257/raccefy.3212>

Editor: Santiago Vargas Domínguez

***Correspondencia:**

Laura Daniela Jiménez-Prada;
ljimenezpr@unal.edu.co

Recibido: 23 de abril de 2025

Aceptado: 10 de agosto de 2025

Publicado en línea: 29 de agosto de 2025



Este artículo está bajo una licencia de Creative Commons Reconocimiento-NoComercial-Compartir Igual 4.0 Internacional

Introducción

A pesar de que, en teoría, la gravedad lunar durante un eclipse solar se alinea con el sistema gravitacional Tierra-Sol, es difícil demostrar su efecto de manera experimental. Se ha estudiado la posible existencia de absorción de ondas gravitacionales y se han realizado algunos análisis teóricos sobre un débil blindaje lunar en la interacción Tierra-Sol. Según **Yang y Wang** (2002), las variaciones pequeñas alrededor del máximo eclipse son complicadas de entender y pueden tener múltiples causas. Los autores proponen tres posibilidades: no se presenta absorción gravitacional por parte de la Luna, la posible anomalía es muy pequeña y no puede ser detectada por la precisión del gravímetro o, si ocurre cierta absorción gravitacional por parte de la Luna, esta se anula o se reduce drásticamente por la superposición de atracciones gravitacionales tras la alineación Sol-Luna-Tierra.

Para explicar estos posibles efectos, **Heriyanto** (2022) propuso el denominado ‘modelo de tendedero’ (*Clothesline Model*, CM), con el cual intentó describir el comportamiento gravimétrico en varios eclipses lunares y solares. De forma paralela, **Múnera** (2011) planteó el modelo de atenuación por la luna, el cual sostiene que la atenuación de la gravedad durante los eclipses solares está dominada por la dispersión elástica del flujo gravitacional y no por la absorción, como se creía tradicionalmente. Esta propuesta se inscribe dentro de una línea de investigación más amplia que ha explorado la posibilidad de una atenuación gravitacional asociada a la alineación de los astros durante un eclipse. Según **Múnera** (2011), uno de los primeros en abordar este fenómeno fue Quirino Majorana, quien propuso un coeficiente universal de atenuación h basado en experimentos de laboratorio con materiales densos y aplicó a la gravedad una fórmula análoga a la de la absorción de radiación:

$$F_{Majorana} = F_{Newton} \cdot \exp\left(-h \int \rho(r) dr\right),$$

donde $F_{Majorana}$ representa la fuerza gravitacional atenuada, F_{Newton} es la fuerza gravitacional clásica, $\rho(r)$ es la densidad del material atravesado en función de la distancia r ; y h es un coeficiente de atenuación, interpretado por Majorana como una posible constante universal de “extinción” (*quenching factor*) (Quirino Majorana, 1919, 1920, citado en **Múnera**, 2011).

Sin embargo, esta idea fue fuertemente cuestionada. Russell (1921, citado en **Múnera**, 2011), advirtió que un valor elevado de h implicaría una disminución efectiva de la masa gravitacional del Sol, lo que afectaría la estabilidad orbital de los planetas. Por su parte, Crowley *et al.* (1974, citados en **Múnera**, 2011) argumentaron que la absorción gravitacional, de existir, debería manifestarse en forma de calentamiento detectable en el interior de cuerpos planetarios, algo que no se observa geotérmicamente. Esto llevó a estimaciones mucho menores del coeficiente h , del orden de 10^{-28} a 10^{-30} cm²/g, en contraste con los resultados de laboratorio.

Pese a estas objeciones, en varios experimentos llevados a cabo durante eclipses se han documentado anomalías que han renovado el interés en esta hipótesis. En 1954, Tomaschek registró dos valles laterales en la señal gravimétrica durante un eclipse solar en las islas Shetland, aunque desestimó el hallazgo al no coincidir con una curva de atenuación centrada en la fase máxima del eclipse. Posteriormente, durante el eclipse solar total del 9 de marzo de 1997 en China, Wang y Yang reportaron anomalías similares utilizando un gravímetro LaCoste–Romberg. Observaron dos mínimos en la señal gravimétrica, uno antes del primer contacto y otro después del último, que inicialmente se atribuyeron a un posible sombreado gravitacional lunar. Más tarde plantearon una explicación alternativa basada en movimientos rápidos de masas de aire, aunque otros autores han cuestionado la plausibilidad física de esta hipótesis (**Múnera**, 2011).

Frente a estos antecedentes, **Múnera** (2011) retoma la idea de Majorana, pero introduce una corrección clave: el coeficiente de atenuación h no debe ser tratado como una constante universal, sino como un parámetro empírico dependiente de la composición

atómica y nuclear del medio (Z, N) (Múnera, 2011). Este enfoque permite reconciliar las discrepancias entre los valores observados en el laboratorio y los obtenidos mediante registros gravimétricos durante los eclipses.

Este enfoque se articula con la comprensión contemporánea de la gravedad como un fenómeno dinámico y multivariable. Según Toledo (2020), por ejemplo, la aceleración de la gravedad puede expresarse de forma general como una función que depende de múltiples factores:

$$g = g(\mu, \omega^2, P, \rho, t),$$

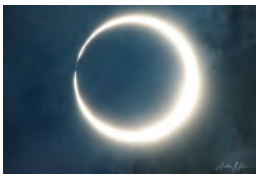

donde μ es el potencial gravitacional, ω^2 la componente centrífuga asociada a la rotación terrestre, P la presión atmosférica, ρ la densidad del medio, y t el tiempo. Esta expresión evidencia la complejidad de los sistemas gravimétricos, en los que la señal observada es el resultado de la interacción de diversas variables físicas y ambientales.

Como lo resalta Toledo (2020), una señal de marea no se limita únicamente al efecto de la marea terrestre (la deformación elástica global de la Tierra), sino que también incorpora la carga oceánica mareal, es decir, la redistribución del agua en los océanos bajo la influencia gravitacional lunar y solar, y factores locales como las variaciones en las propiedades elásticas del terreno. Ello significa que la señal gravimétrica es una superposición de múltiples efectos cuya dinámica puede enmascarar cambios sutiles asociados a eventos astronómicos. Así, cualquier intento por detectar una posible atenuación gravitacional durante un eclipse debe considerar el ruido de fondo generado por estas componentes, además del hecho de que sus interacciones no siempre son lineales ni fácilmente predecibles. Esta complejidad resalta la importancia de comparar los registros observados con los patrones teóricos propuestos por distintos modelos, y no solo evaluar la magnitud del cambio observado.

Materiales y métodos

Se estudió el eclipse solar anular del 14 de octubre de 2023 (Tabla 1, Figura 1) utilizando un gravímetro relativo con una resolución de 0,001 mGal (equivalente a 1 μ Gal). Las mediciones gravimétricas se realizaron entre las 3:05 UTC-05 del 13 de octubre y las 11:31 UTC-05 del 15 de octubre de 2023. La estación, con posición global $\phi = 03^{\circ}13'16.84''$ N y $\lambda = 75^{\circ}14'05.65''$ W (Aipe, Huila), se encontraba a una altitud de 398,0 m en la zona con el mayor ocultamiento nacional (90,50 %).

Tabla 1. Cronología de las fases del eclipse anular del 14 de octubre de 2023 en Aipe (Huila). Fotografías por cortesía de Andrés Molina

ECLIPSE SOLAR ANULAR (5m 15.1s)			
Coordenadas de la estación		Longitud: 75° 14' 05.65" W	
		Latitud: 3° 13' 16.84" N	
Fase del evento principal ($\Delta t=69.1s$; alt. $\approx 398m$)	Inicio de la anularidad	Máximo (90.65%)	Fin de la anularidad
			
Hora local	1:34:15 p. m.	1:36:53 p. m.	1:39:30 p. m.
Altitud del sol	60.9°	60.3°	59.7°

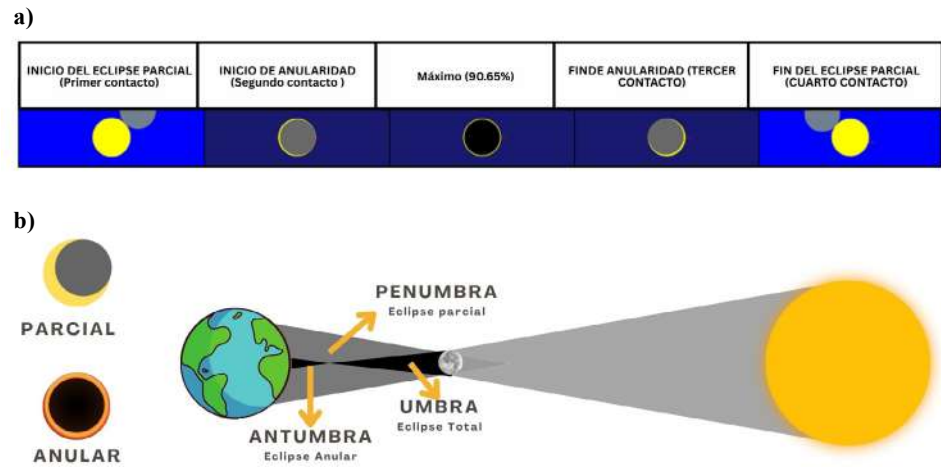


Figura 1. (a) Ilustraciones de las fases del eclipse anular del 14 de octubre de 2023 en Aipe (Huila). **(b)** Modelo de alineación de los astros durante un eclipse solar

Según el sitio web ‘Eclipse’ del centro de vuelos espaciales Goddard de la NASA, en las coordenadas mencionadas el eclipse parcial iniciaría a las 11:48:56 UTC-05 con el Sol a 79° sobre el horizonte oriental, la máxima ocultación se daría a las 13:36:46 UTC-05 y finalizaría (fin del eclipse parcial) a las 15:16:12 UTC-05 con el Sol a una altura de 37° cayendo sobre el occidente. Específicamente, el eclipse anular ocurriría de las 13:34:08 UTC-05 a las 13:39:24 UTC-05. Debido a que estos tiempos están fundamentados en modelos matemáticos teóricos, todos presentan una incertidumbre de 70,5 segundos.

El gravímetro CG-5 utilizado procesa y aplica correcciones a las señales del sensor de gravedad, almacena datos, los formatea para su salida y realiza las funciones de control del instrumento necesarias. Además de estar contenido en una cámara de vacío, el equipo hace diversas correcciones por defecto, incluidos el ruido, la deriva instrumental, la marea, la temperatura, la inclinación del instrumento, el rechazo avanzado de lecturas ruidosas, el filtro de ruido sísmico y las correcciones de terreno cercano.

El muestreo se diseñó de manera que incluyera mediciones previas y posteriores al evento, permitiendo un periodo de estabilización del sistema del instrumento. Con el fin de garantizar la precisión de las mediciones, el gravímetro se mantuvo a una temperatura constante dentro de una habitación tranquila.

Durante la recolección de datos en campo, se almacenaron promedios de seis lecturas corregidas cada 35 segundos, con una frecuencia de adquisición de una lectura cada cinco segundos. Se aplicaron correcciones automáticas por deriva instrumental (para eliminar efectos sistemáticos por relajación del resorte), inclinación (para compensar desviaciones con respecto a la vertical), temperatura (ajustando según el coeficiente térmico del resorte) y marea terrestre (basada en el modelo de Longman (1959), con un factor gravimétrico de 1,16 para simular la deformación elástica de la Tierra). Cabe señalar que dicho modelo no considera efectos mareales oceánicos ni variaciones locales del factor gravimétrico, lo que pueden inducir errores de hasta $\pm 3 \mu\text{Gal}$ (Scintrex Limited, 2012; Miranda *et al.*, 2013). Para reducir el ruido instrumental, se empleó un criterio estadístico que descartó mediciones que excedían cuatro desviaciones estándar con respecto al promedio. Estas correcciones automáticas se ejecutan internamente al configurar el equipo para la toma continua, sin necesidad de intervención manual en campo.

A pesar de que las variaciones en la presión atmosférica afectan la gravedad con una admitancia estándar de $-0,3 \mu\text{Gal/hPa}$ (Torge, 1989; Merriam, 1992, citados en Miranda *et al.*, 2013), el gravímetro CG-5 se encuentra encerrado en una cámara de vacío, lo que proporciona un aislamiento eficaz frente a estos cambios. Según Miranda *et al.* (2013), en

condiciones similares de medición pueden alcanzarse correcciones por presión atmosférica del orden de -8 a $+2 \mu\text{Gal}$, dependiendo de la altitud y de la correspondiente reducción de la presión al nivel del mar.

Con el fin de aislar posibles efectos no periódicos, el procesamiento se hizo en dos etapas: a la serie temporal completa se le aplicó un suavizado por ventana móvil de 10 muestras, a las que se les restó su media para centrar los valores y así visualizar si persistían fluctuaciones de alta frecuencia y resaltar tendencias dominantes; posteriormente, se recortó la ventana temporal correspondiente a la duración del eclipse y se repitió la eliminación de la media para evaluar el comportamiento anómalo de la señal en ese intervalo.

Además, al almacenar la corrección de marea, se analizaron en paralelo los valores de este efecto gravitatorio constante con los datos muestreados, siguiendo lo formulado en el modelo de Longman (1959) para una Tierra elástica mejorada con los parámetros de Love.

Resultados

La componente de marea se calculó teóricamente utilizando el modelo de Longman (1959) para una Tierra elástica mejorada mediante los parámetros de Love, modelo que el gravímetro implementó automáticamente. El instrumento usó un factor gravimétrico de 1,16 y mantuvo una precisión de $1 \mu\text{Gal}$ ($1 \times 10^{-8} \text{ m/s}^2$). La serie temporal de este efecto (Figura 2) está dominada por un período semidiurno y está en fase con la señal semidiurna de variación gravitacional observada, lo cual pone en evidencia que la discrepancia entre la teoría y la observación radica, en parte, en un factor de escala entre ambos que corresponde a la exactitud del valor del factor gravimétrico adoptado en el modelo (Toledo, 2020). Si a la fecha del evento, la Tierra se hubiese encontrado próxima al perihelio, el efecto de marea solar se habría amplificado; sin embargo, en este caso, la Tierra estaba en camino de alcanzar su máximo acercamiento al Sol, que duraría hasta el 3 de enero de 2024.

La Figura 3 muestra la variación de la gravedad vertical durante el día del eclipse atribuible a efectos físicos como la carga oceánica (mareal y no mareal) y, potencialmente, a un efecto de blindaje gravitacional. A pesar de este primer paso del procesamiento aplicado y de las correcciones automáticas del instrumento, se observó un patrón periódico, lo que sugiere que la corrección mareal realizada por el equipo no era completamente precisa (Figuras 3).

En contraste, a partir de la segunda etapa del procesamiento (Figura 4), sí se identificó un comportamiento anómalo en dos intervalos caracterizado por una disminución significativa de la gravedad que no parecía estar influenciada por la señal semidiurna de

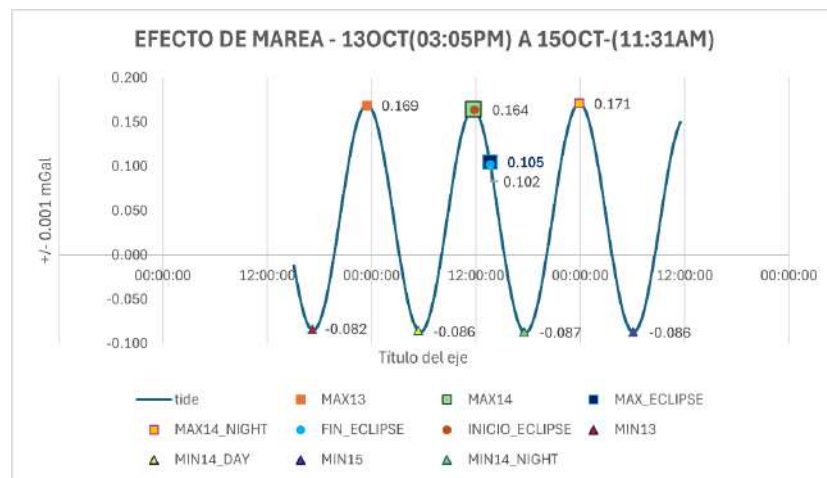


Figura 2. Corrección de marea a partir del modelo de Longman para una Tierra elástica mejorada por los parámetros de Love

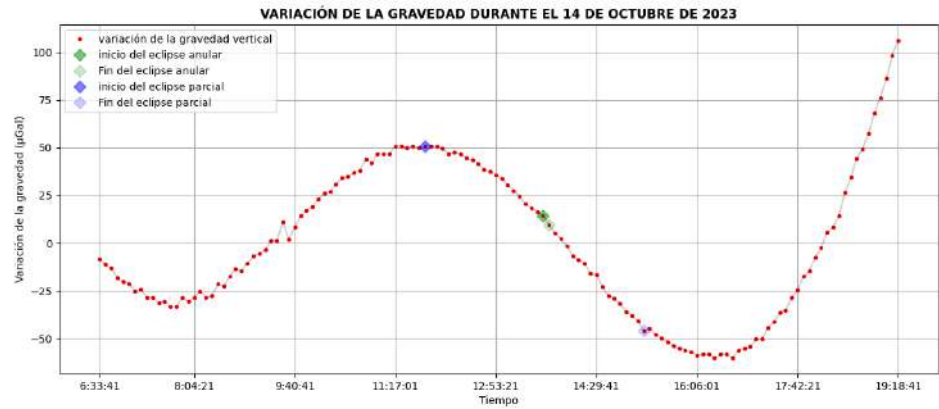


Figura 3. Variación de la gravedad vertical durante el 14 de octubre de 2023 en Aipe (Huila)

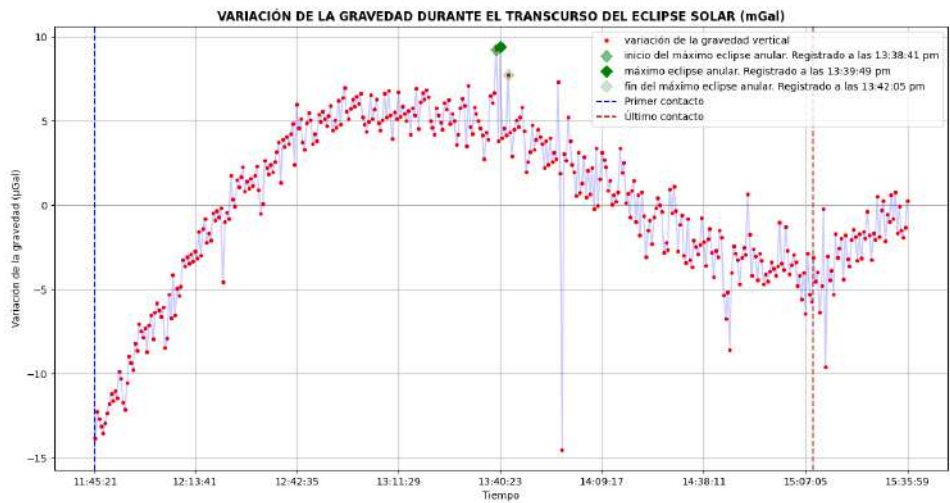


Figura 4. Variación de la gravedad vertical durante el eclipse solar anular del 14 de octubre de 2023 en Aipe (Huila)

la marea. Tales intervalos se ubicaron temporalmente alrededor de las 11:44 UTC-05, con una disminución máxima significativa de $-14,73 \mu\text{Gal}$, y sobre las 15:12 UTC-05, con un cambio máximo de $-9,71 \mu\text{Gal}$. Estos dos valles están estrechamente relacionados con las fases del primer y último contacto del eclipse, respectivamente (Yang & Wang, 2002).

Durante el periodo de máxima ocultación, la variación de la gravedad presentó tres picos, correspondientes al inicio, el punto máximo y el fin del eclipse anular medidos a las 13:38:41, las 13:39:49 y las 13:42:05 (UTC-05). Se omitió el pico de $-14,51 \mu\text{Gal}$ registrado a las 13:57 UTC-05 por considerarlo ruido instrumental.

La gravedad residual, centrada en torno a cero, tuvo una amplitud total de $166,47 \mu\text{Gal}$ (0.1665 mGal), con un valor máximo de $9,42 \mu\text{Gal}$ ($0,0094 \text{ mGal}$) durante el momento de mayor anularidad, cuando el ocultamiento solar alcanzó el 90,50 % debido a la interposición de la Luna (Toledo, 2020).

Discusión

El análisis simultáneo de la corrección de marea modelada y la señal observada evidenció una discrepancia en fase y amplitud. Aunque el gravímetro utiliza un factor gravimétrico de 1,16, como ya se mencionó, este valor puede variar ligeramente según la latitud. De

hecho, **Miranda *et al.* (2013)** reportaron que los factores de amplitud y fase determinados localmente pueden generar variaciones del 2,2 % en la señal mareal modelada comparada con la observada. En este caso, el uso de parámetros genéricos pudo haber introducido errores del orden de los microgales. En todo caso, se esperaría que la eliminación estadística de la tendencia en las mediciones durante el eclipse haya descartado cualquier variación ocasionada por la precisión de esta constante gravitacional.

La **Figura 5**, además de evidenciar la imprecisión en la corrección mareal del instrumento, muestra que el máximo ocultamiento solar no coincidió con la mayor señal de marea registrada (**Figura 2**) debido a que el evento no ocurrió cuando los astros estaban en su mínima distancia de la estación de medición. Al igual que en el estudio de **Toledo (2020)**, la sombra producida durante el eclipse no fue el punto en que los astros se hallaban más cercanos a la Tierra, lo que sería el caso si el eclipse hubiera ocurrido al mismo tiempo que el Sol y la Luna atravesaban el meridiano local. Además, si el evento hubiese coincidido con el perihelio de la Tierra, la variación gravimétrica habría sido aún mayor. En ese escenario hipotético, la aceleración de las mareas resultante de la suma de la atracción gravitacional de los cuerpos celestes y la aceleración orbital debida al movimiento de la Tierra alrededor del baricentro del sistema Tierra-Sol-Luna, alcanzaría su valor máximo posible (**Toledo, 2020**).

Además, los tiempos predichos matemáticamente no se ajustan con exactitud a los tiempos demostrados por los datos debido al intervalo entre las mediciones, la incertidumbre de los tiempos del modelo, los posibles errores del modelo y, probablemente, a una pequeña diferencia entre el momento en que el evento ocurrió y su efecto *in situ*.

Como se ve en la **Figura 3**, la señal residual que alcanzó la resolución del gravímetro puede adjudicarse mayormente al efecto de la carga oceánica presente durante la medición, cuya amplitud puede llegar a decenas de microgales. Dado que Aipe se encuentra alejado de las grandes cuencas oceánicas y la zona costera, donde según **Hinderer *et al.* (2015)** la carga de marea oceánica puede oscilar entre el 1 % y el 10 % de la marea terrestre, la señal de marea oceánica no coincidirá con la terrestre por un retraso en tiempo asociado a la variación de la batimetría y la topografía.

El ruido producido por este efecto, así como la componente astronómica real de la marea, podrían corregirse de manera más efectiva si se dispusiera de un gravímetro absoluto en la estación de base y números de Love mejorados para el modelo de tierra elástica.

Miranda *et al.* (2013) demostraron que la calibración del gravímetro CG-5 con parámetros locales permite estimar el factor de escala con errores del orden de 10^{-4} y variaciones menores al 0,0034 %. En este estudio no hicimos una calibración experimental específica, por lo que no puede descartarse una desviación instrumental del orden de

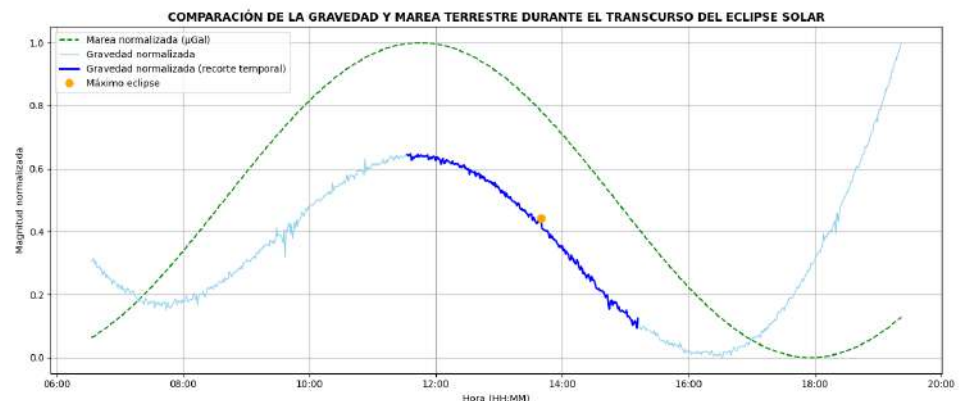


Figura 5. Comparación entre la marea terrestre modelada y la gravedad vertical medida durante el eclipse solar anular del 14 de octubre de 2023 en Aipe (Huila). El gráfico evidencia la imprecisión de la corrección mareal automática del instrumento y muestra un desfase temporal entre el máximo de la señal de marea y el momento de máximo ocultamiento solar.

1–2 μGal . Si bien este valor es relativamente bajo en términos absolutos, representa hasta el 20 % del valor máximo registrado durante la anularidad (9,42 μGal). Esta proporción, aunque pequeña frente al rango total de la señal residual, podría afectar la interpretación si no se identifican y controlan adecuadamente otras fuentes de error, como la señal de carga oceánica no mareal o las interferencias atmosféricas menores. Pese a estas limitaciones, los valores de corrección por presión atmosférica se vieron mitigados por la cámara de vacío del instrumento. **Miranda et al.** (2013) estimaron una corrección de entre -8 y 2 μGal bajo condiciones similares de medición. Para evaluar la señal de interés en este estudio, se procesaron únicamente los datos alrededor del eclipse (**Figuras 4 y 5**). Así, al discriminarse las frecuencias del efecto de marea con respecto al efecto del eclipse, los cambios reales y notables obtenidos implicarían algún fenómeno asociado con el eclipse solar. Según el modelo de tendedero propuesto por **Heriyanto** (2022), esta variación de aceleración gravitacional se debe en parte a la influencia del factor de amortiguación de la Luna contra las perturbaciones del Sol y la Tierra. Cuando la Luna inicia el primer contacto parcial del eclipse, el Sol y esta comienzan a interferir con la curvatura del espacio-tiempo en la Tierra, lo que provoca la curvatura negativa del espacio-tiempo terrestre vista parcialmente en el primer mínimo anómalo observado en la **Figura 4**. El efecto amortiguador de la Luna aumenta desde el inicio del primer contacto hasta el final de esta fase. Durante este periodo, la curvatura del espacio-tiempo en la Tierra, influenciada por el Sol, tiende a incrementarse. Este patrón se detiene cuando la Luna alcanza su máxima anularidad. En la fase máxima, la curvatura del espacio-tiempo en la Tierra y el Sol alcanza su valor máximo durante el evento, al igual que la amortiguación de la Luna contra las perturbaciones solares. La fase del segundo contacto parcial sigue un proceso inverso al del primer contacto, lo que explica el segundo valle en el patrón gravitacional (**Figura 6**) (**Heriyanto, 2022**).

De forma complementaria, el modelo propuesto por **Múnera** (2011) plantea una interpretación alternativa para las anomalías gravimétricas registradas durante eclipses solares, la cual se basa en la dispersión gravitacional más que en la absorción. Como ya se mencionó en la introducción, Múnera retoma la hipótesis de atenuación de la gravedad formulada originalmente por Quirino Majorana (1919, 1920, 1921; citado en **Múnera, 2011**).

Múnera extiende el modelo de Majorana mediante una analogía con la dispersión de rayos gamma y descompone el coeficiente de atenuación como:

$$h = h_A + h_S + h_D,$$

donde h_A representa la absorción, h_S la dispersión elástica y h_D una posible deflexión (despreciada en su estudio). Su modelo propone que la Luna actúa como una pantalla dispersora del flujo gravitacional solar. Para elevaciones solares bajas, como la de este estudio, el modelo predice una curva gravimétrica con dos valles laterales flanqueados por picos de dispersión en los bordes, en lugar de una única depresión centrada en la fase máxima del eclipse (**Figura 7**).

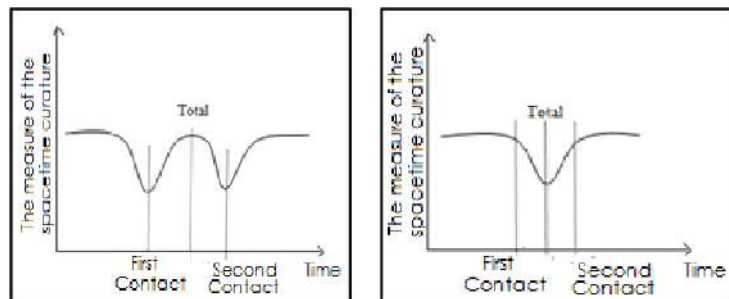


Figura 6. Patrón de variación de la curvatura del espacio-tiempo de la Tierra y el Sol durante un eclipse solar total de acuerdo con el modelo de tendedero propuesto por **Heriyanto** (2022). Reproducido de **Heriyanto** (2022).

El modelo de Múnera se ha mostrado consistente con las observaciones de por lo menos seis eclipses ocurridos entre 1954 y 1999 en los cuales se registraron patrones de doble valle, incluidos los trabajos de Wang y Yang durante el eclipse del 9 de marzo de 1997 (Múnera, 2011). De hecho, este modelo puede explicar por qué, a pesar de que dicho eclipse fue de tipo anular, se presentó una mayor variación de la gravedad vertical en comparación con el eclipse total del 9 de marzo de 1997 evaluado por Wang *et al.* (2000) en China (Figura 8), en el que la elevación local de los astros fue menor (21° durante la duración total). Este modelo también plantea que los valles que se registren en una estación con los astros en baja elevación estarán más separados (y, en algunos casos, incluso fuera de la sombra del eclipse visual) que los valles obtenidos cuando el Sol y la Luna están en una alta elevación local.

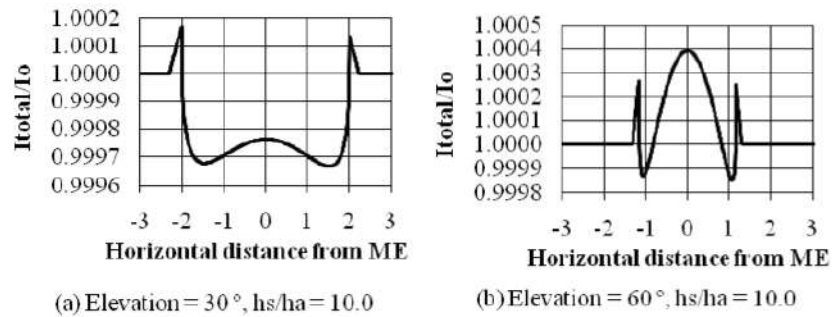


Figura 7. Flujo de gravedad total I debido al Sol después de la atenuación por la Luna para dos elevaciones lunares de acuerdo con el modelo de atenuación por la luna propuesto por Múnera (2011). Reproducido de Múnera (2011).

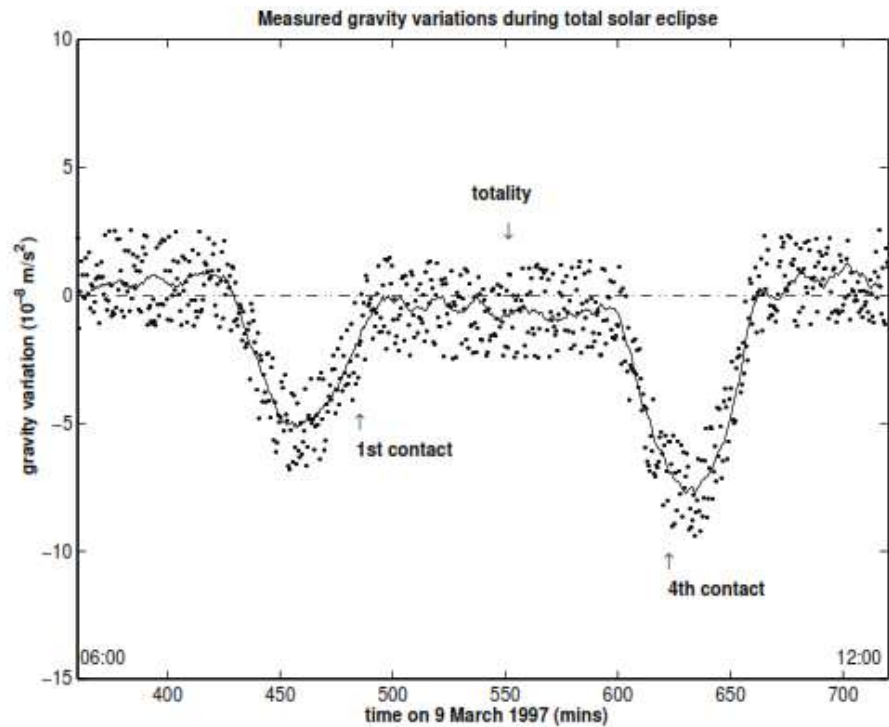


Figura 8. Variaciones de la gravedad vertical medidas por Wang *et al.* (2000) durante el eclipse solar total del 9 de marzo de 1997. Reproducido de Wang *et al.* (2000).

Conclusiones

En este estudio se midió la variación de la gravedad vertical durante el eclipse solar anular del 14 de octubre de 2023 empleando un gravímetro de alta precisión (0,001 mGal). A pesar de las limitaciones en el rango de comparación antes y después del evento, los resultados evidenciaron descensos significativos en la gravedad vertical durante los momentos cercanos al primer contacto y al último, así como una variación distintiva durante las fases principales de anularidad.

El comportamiento registrado mostró una señal con dos valles laterales y una secuencia de picos en torno al momento de máxima ocultación solar. Este patrón puede interpretarse a partir del modelo de tendadero propuesto por **Heriyanto** (2022), en el cual la Luna actúa como un amortiguador gravitacional. Complementariamente, el modelo de atenuación por la luna de **Múnera** (2011) describe cómo la dispersión del flujo gravitacional solar puede generar este tipo de comportamiento, especialmente en configuraciones con baja elevación solar, como la registrada en este evento.

Mientras que el modelo de marea terrestre para una Tierra elástica arrojó una magnitud de 0,105 mGal durante la anularidad, la señal residual observada alcanzó una amplitud total de 166,47 μ Gal (0.1665 mGal), con un valor máximo de 9,42 μ Gal durante el máximo ocultamiento. La diferencia entre las curvas de marea terrestre y la señal residual puede explicarse por condiciones astronómicas particulares y efectos locales no corregidos, como la carga oceánica y errores en la modelación mareal.

La ausencia de calibración con una estación de base impidió establecer un factor de escala específico para el sitio, lo que podría haber generado una desviación de 1–2 μ Gal, equivalente hasta a un 20 % del valor máximo registrado durante la anularidad. Aunque se mantuvo una buena estabilidad instrumental, estudios previos han demostrado que este procedimiento puede reducir errores de órdenes hasta de 10^{-4} (**Miranda et al.**, 2013). Por otra parte, la carga oceánica, tanto mareal como no mareal, puede representar hasta un 10 % de la señal mareal en zonas costeras y, aunque su efecto disminuye en regiones continentales, no desaparece por completo (**Hinderer et al.**, 2015; **Rajner**, 2010). Por último, si bien el diseño del gravímetro CG-5 ayuda a mitigar el impacto de la presión atmosférica, en este estudio no se realizaron mediciones paralelas de presión; sin embargo, en condiciones similares, **Miranda et al.** (2013) reportaron correcciones por presión de entre –8 y 2 μ Gal, lo que permite estimar un rango razonable de incertidumbre adicional asociada a este efecto.

Este trabajo aporta evidencia coherente de un posible efecto de atenuación gravitacional durante un eclipse solar respaldada por modelos teóricos y observaciones previas. Es importante destacar el estudio de **Toledo** (2020) en La Plata, Argentina, en torno a la variación de la gravedad durante el eclipse solar total del 14 de diciembre de 2020, porque los estudios sobre la variación gravitacional durante eclipses solares son escasos en Latinoamérica. El presente trabajo se constituye como el primero en la región que analiza la variación de la gravedad vertical de un eclipse solar de tipo anular.

Agradecimientos

Agradecemos a Andrés Molina por compartirnos las fotografías que tomó durante el eclipse anular del 14 de octubre de 2023 en Aipe (Huila).

Contribución de los autores

LJ: investigación preliminar sobre la variación gravitacional durante un eclipse solar, procesamiento de los datos, cálculo de los resultados y redacción de la mayor parte del documento; **BR:** investigación de la variación gravitacional en eventos de eclipse solar, evaluación de los resultados obtenidos y contribución en la redacción del documento; **LO:** responsable de la recolección de datos y participación en la revisión del manuscrito.

Conflicto de intereses

Ninguno de los autores presenta conflicto de intereses.

Referencias

- Gallucci, R.** (2019). *The Allais effect – Coincidence between Newtonian and LeSagian gravity*. <https://vixra.org/pdf/1907.0380v1.pdf>
- Heriyanto, L.** (2022). Clothesline model for total eclipses: Shielding like effect of gravity. *Jurnal Penelitian Pendidikan IPA*, 8(6), 2689-2696. <https://doi.org/10.29303/jppipa.v8i6.2006>
- Hinderer, J., Crossley, D., Warburton, R. J.** (2015). Superconducting gravimetry. In G. Schubert (Ed.), *Treatise on Geophysics*. Elsevier. <https://doi.org/10.1016/B978-0-444-53802-4.00062-2>
- Longman, I. M.** (1959). Formulas for computing the tidal accelerations due to the moon and sun. *Journal of Geophysical Research*, 64(12), 2351-2355. <https://doi.org/10.1029/JZ064i012p02351>
- Miranda, S. A., Herrada, A., Pacino, M.C.** (2013). Respuesta instrumental del gravímetro Scintrex Autograv CG-5 (s/n 40484) en modos continuo y relevamiento. Asociación Argentina de Geofísicos y Geodestas. *GeoActa*, 38(1), 1-14. <http://ref.scielo.org/szxdw9>
- Miranda, S. A., Ortiz, C., Herrada, A. H., Pacino, M. C.** (2015). Análisis de la marea terrestre gravimétrica en la estación San Juan (Argentina). *Boletim de Ciências Geodésicas*, 21, 721-729. <https://www.redalyc.org/pdf/3939/393943285005.pdf>
- Múnera, H. A.** (2011). Gravity attenuation and consistency with observed solar eclipse gravitational anomalies. *Physics Essays*, 24(3), 428-434. <https://doi.org/10.4006/1.3615660>
- Rajner, M.** (2010). Ocean tidal loading from the gravity measurements at Jozefoslaw observatory. *Artificial Satellites*, 45(4), 175-183. <https://doi.org/10.2478/v10018-010-0016-0>
- Scintrex Limited.** (2012). *CG-5 Scintrex Autograv™ System Operation Manual*.
- Toledo, M. J.** (2020). *Variación de la gravedad durante el eclipse de sol del 14 de diciembre del 2020* [Tesis de grado, Universidad Nacional de La Plata]. SEDICI Repositorio Institucional. <https://sedici.unlp.edu.ar/handle/10915/139154>
- Wang, Q., Yang, X., Wu, C., Guo, H., Liu, H., Hua, C.** (2000). Precise measurement of gravity variations during a total solar eclipse. *Physical Review D*, 62(4). <https://doi.org/10.1103/physrevd.62.041101>
- Yang, X.-S. & Wang, Q.-S.** (2002). Gravity anomaly during the Mohe total solar eclipse and new constraint on gravitational shielding parameter. *Astrophysics and Space Science*, 282(1), 245-253. <https://doi.org/10.1023/a:1021119023985>

Artículo original

Una generalización del método de Newton-Kantorovich

A generalization of the Newton-Kantorovich method

Guillermo Albuja-Proaño^{1,*}, Miguel Murillo²

¹ Centro de Matemática, Universidad Central del Ecuador, Quito, Ecuador

² Facultad de Ciencias, Universidad Central del Ecuador, Quito, Ecuador

Resumen

En este artículo presentamos una generalización del clásico método de Newton-Kantorovich, el cual se usa frecuentemente para aproximar una solución de una ecuación no lineal en un espacio de Banach. Los métodos que aquí sugerimos constituyen una mejora del método iterativo de Newton. Estos nuevos esquemas se derivan a partir de la fórmula integral dada en **Argyros** (2007) (pág. 33) y en **Kelley** (1995) (pág. 65), y los esquemas numéricos clásicos de integración de funciones. Se presentan varios ejemplos que ilustran cómo el orden de convergencia experimental de los nuevos métodos es cúbico. Por último, cabe recordar que estos esquemas se utilizan para encontrar la solución numérica de una ecuación no lineal en una y dos dimensiones.

Palabras clave: Ecuaciones no lineales; Newton-Kantorovich; Métodos iterativos.

Abstract

Here, we present a generalization of the classical Newton-Kantorovich method, which is frequently used to approximate a solution to a nonlinear equation in a Banach space. The methods we suggest are an improvement on the iterative Newton method. These new schemes are derived from the integral formula given in **Argyros** (2007) (p. 33), **Kelley** (1995) (p. 65), and the classical numerical schemes for function integration. Through several examples, we show how the experimental order of convergence of the new methods is cubic. These schemes are used to find the numerical solution of a nonlinear equation in one and two dimensions.

Keywords: Nonlinear equations; Newton-Kantorovich; Iterative methods.

Introducción

Las ecuaciones no lineales son problemas muy comunes que aparecen frecuentemente en varias partes de la ciencia y la ingeniería. Además, juegan un papel fundamental en numerosas áreas de investigación en matemática. Es así que uno de los problemas más estudiados en análisis numérico es la aproximación de soluciones de ecuaciones no lineales. Una de las formas más generales de este problema esta dada de la siguiente manera: Sea V y W dos espacios de Banach, Ω un conjunto convexo abierto subconjunto de V y $F : V \rightarrow W$ un operador no lineal, el problema consiste en

$$\begin{cases} \text{Encontrar } x \in \Omega \text{ tal que,} \\ F(x) = 0. \end{cases} \quad (1)$$

En este campo, los métodos iterativos se han convertido en herramientas computacionales importantes y útiles. Principalmente por su sencillez, eficacia y facilidad de implementación. Uno de los esquemas iterativos más importantes y conocidos para aproximar una solución del problema (1), es el clásico método de Newton-Kantorovich (**Argyros**, 2007, pág 88), (**Kelley**, 1995, pág 71), que fue propuesto en 1948 por Leonid Kantorovich como una generalización del conocido método de Newton, en el marco de los espacios de Banach. Este

Citación: Albuja-Proaño G & Murillo M. Una generalización del método de Newton-Kantorovich. Revista de la Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. 49(192):629-644, julio-septiembre de 2025. doi: <https://doi.org/10.18257/raccefyn.3214>

Editor: Luis Carlos Arboleda Aparicio

***Correspondencia:**

Miguel Murillo;
miguel_fima.ldu@hotmail.com

Recibido: 25 de abril de 2025

Aceptado: 17 de julio de 2025

Publicado en línea: 8 de agosto de 2025



Este artículo está bajo una licencia de Creative Commons Reconocimiento-NoComercial-Compartir Igual 4.0 Internacional

método es muy usado por su simplicidad y rápida tasa de convergencia ya que construye una sucesión de aproximaciones que convergen cuadráticamente a la solución. Lo que significa que, el método aproximadamente duplica el número de decimales correctos o dígitos significativos en cada iteración.

Muchas variantes del método de Newton se han propuesto y estudiado por varios autores como por ejemplo (Schneebeli & Wihler, 2011), (Amrein & Wihler, 2014), (Amrein & Wihler, 2015), (Amrein & Hilber, 2020), (Amrein, 2021), que investigaron una generalización del esquema de Newton llamado método de Newton continuo, en (Jacobsen, Lewis, & Tennis, 2007) se propone varios esquemas derivados de este método para los complejos, otras variante fueron propuestas en (de los Angeles Martínez & Fernandez, 2019), (Grau & Noguera, 2004).

Algunos investigadores han introducido y estudiado otros métodos iterativos para resolver el problema (1), muchos de ellos en espacios de Banach como por ejemplo (Zhao & Wu, 2009), (Heid & Wihler, 2020a), (Cárdenas, Castro, & Sierra, 2020), y otros para ecuaciones no lineales en una sola dimensión como (Weerakoon & Fernando, 2000), (Kou, Li, & Wang, 2007), (Bi, Ren, & Wu, 2009), (Thukral & Petković, 2010), (Petković & Petković, 2010) y (McDougall & Wotherspoon, 2014). Muchos métodos iterativos se han desarrollado para resolver numéricamente ecuaciones diferenciales no lineales por ejemplo (Chaillou & Suri, 2006), (Amrein & Wihler, 2015), (Heid & Wihler, 2020a) y (Heid & Wihler, 2020b).

En los últimos años se han propuesto algunos métodos multipaso, ver por ejemplo (Weerakoon & Fernando, 2000), (Amat & Busquier, 2006), (Kou, Li, & Wang, 2007), (Argyros & Chen, 2009), (Argyros & Ren, 2009), (Zhao & Wu, 2009), (Bi, Ren, & Wu, 2009), (Petković & Petković, 2010), (Amat *et al.*, 2010), (Thukral & Petković, 2010), (Soleymani, Khattri, & Vanani, 2012), (McDougall & Wotherspoon, 2014) (de los Angeles Martínez & Fernandez, 2019), (Cárdenas, Castro, & Sierra, 2020), (Ezquerro *et al.*, 2023), y sus referencias. Aunque los métodos de varios pasos (Amorós-Canet, 2020) ofrecen una convergencia de alto orden para resolver ecuaciones no lineales, la mayoría tiene la desventaja de requerir la evaluación de derivadas de mayor orden, lo que en general puede ser computacionalmente costoso. En contraste con esto, los métodos de dos pasos, estudiados por ejemplo en (Weerakoon & Fernando, 2000), (Amat & Busquier, 2006), (Kou, Li, & Wang, 2007), (Argyros & Ren, 2009), (Zhao & Wu, 2009), (Petković & Petković, 2010), (McDougall & Wotherspoon, 2014) y (Cárdenas, Castro, & Sierra, 2020), tienen la ventaja de requerir solo la evaluación de la función y su primera derivada en cada iteración, y ofrecen una convergencia de mayor orden que el método de Newton. Motivados por estos trabajos, proponemos una generalización del esquema de Newton-Kantorovich que nos permite obtener varios métodos iterativos de dos pasos para aproximar una solución del problema (1); discutimos los métodos y comparamos su orden de convergencia experimental, así como su índice de eficiencia de Ostrowski-Traub. Para mayores detalles ver (Kogan *et al.*, 2017) y sus referencias.

Este artículo está organizado de la siguiente forma: En la Sección 2, introducimos una generalización del método de Newton-Kantorovich y se obtienen varios esquemas numéricos. En la Sección 3, se utilizan varios experimentos numéricos para evaluar la convergencia de los nuevos esquemas y obtener el orden de convención experimental siguiendo las ideas de (Grau-Sánchez *et al.*, 2012). Finalmente, en la Sección 4 se realizan algunos comentarios finales sobre los métodos iterativos.

Nuevos esquemas tipo Newton de dos pasos

Usando la fórmula integral dada en (Argyros, 2007, pág 33), (Kelley, 1995, pág 65). La ecuación del problema (1), puede ser escrita de la siguiente forma:

$$F(\hat{x}) = F(x_n) + \int_0^1 F'(x_n + t(\hat{x} - x_n))(\hat{x} - x_n) dt = 0, \quad (2)$$

donde $x_n \in \Omega$, \hat{x} es la solución de (2) y F' es la derivada de Fréchet de F . A continuación, se utilizan varios métodos para aproximar la integral involucrada en (2) y de esta forma derivar varios esquemas iterativos en espacios de Banach. En consecuencia, se van a clasificar los esquemas iterativos implícitos en dos partes para estimar el valor de y_n : La Forma 1 se utilizará el esquema de Newton-Kantorovich y en la Forma 2, se utiliza el mismo esquema definido en esa subsección para estimar el valor de y_n . Para una descripción detallada de los esquemas de integración se sugiere revisar (Davis & Rabinowitz, 2007).

1. Regla del rectángulo

Usando uno de los métodos mas simples de integración numérica que existen llamado regla del rectángulo aplicada a la integral en la ecuación (2), se tiene que:

$$F(x_n) + F'(x_n)(\hat{x} - x_n) \approx 0,$$

de donde se obtiene inmediatamente el esquema de Newton-Kantorovich

$$x_{n+1} = x_n - (F'(x_n))^{-1} F(x_n). \quad (3)$$

Este método de integración numérica corresponde a la fórmula de cuadratura de Newton-Cotes de orden cero y es un caso particular del esquema que se encuentra detallado en (Davis & Rabinowitz, 2007, pág 57). El procedimiento anterior, está descrito con bastante detalle en (Weerakoon & Fernando, 2000), pero solo para el caso de funciones reales.

2. Regla del punto medio

Usando la regla de integración del punto medio en (2), se obtiene

$$F(x_n) + F'\left(\frac{x_n + \hat{x}}{2}\right)(\hat{x} - x_n) \approx 0,$$

de donde se deduce el esquema implícito siguiente:

$$x_{n+1} = x_n - \left(F'\left(\frac{x_n + x_{n+1}}{2}\right)\right)^{-1} F(x_n). \quad (4)$$

Se puede obtener un esquema explícito de dos pasos estimando el valor de x_{n+1} por y_n . Así, se obtienen dos esquemas iterativos de dos pasos:

La Forma 1 se construye mediante la aplicación del método de Newton-Kantorovich (3):

$$\begin{cases} y_n = x_n - (F'(x_n))^{-1} F(x_n), \\ x_{n+1} = x_n - (F'\left(\frac{x_n + y_n}{2}\right))^{-1} F(x_n). \end{cases}$$

Por otro lado, la Forma 2 se obtiene al utilizar el mismo esquema (4) para la estimación de y_n , pero evaluando la derivada en un punto anterior:

$$\begin{cases} y_n = x_n - \left(F'\left(\frac{x_{n-1} + y_{n-1}}{2}\right)\right)^{-1} F(x_n), \\ x_{n+1} = x_n - (F'\left(\frac{x_n + y_n}{2}\right))^{-1} F(x_n), \end{cases}$$

donde $x_0 \in \Omega \subset V$ es un punto dado y $y_0 = x_0 - (F'(x_0))^{-1} F(x_0)$. Este último esquema fue estudiado para problemas unidimensionales en (McDougall & Wotherpoon, 2014), y para el caso general en espacios de Banach en (Cárdenas, Castro, & Sierra, 2020).

3. Método del Trapecio

Aplicando el método de integración de los trapecios en (2), se deduce que

$$F(x_n) + \frac{1}{2} [F'(x_n) + F'(\hat{x})] (\hat{x} - x_n) \approx 0,$$

de donde se obtiene el esquema implícito siguiente:

$$x_{n+1} = x_n - 2 [F'(x_n) + F'(x_{n+1})]^{-1} F(x_n).$$

En consecuencia, la Forma 1, construida a partir del método de Newton-Kantorovich, da lugar a un esquema iterativo de dos pasos:

$$\begin{cases} y_n = x_n - (F'(x_n))^{-1} F(x_n), \\ x_{n+1} = x_n - 2 [F'(x_n) + F'(y_n)]^{-1} F(x_n). \end{cases}$$

Este método fue estudiado en (Weerakoon & Fernando, 2000), únicamente para problemas unidimensionales. De manera análoga, la Forma 2 conduce a un nuevo método iterativo de dos pasos, al reutilizar el mismo esquema para la estimación de y_n :

$$\begin{cases} y_n = x_n - 2 [F'(x_{n-1}) + F'(y_{n-1})]^{-1} F(x_n), \\ x_{n+1} = x_n - 2 [F'(x_n) + F'(y_n)]^{-1} F(x_n), \end{cases}$$

donde $x_0 \in \Omega \subset V$ es un punto dado y $y_0 = x_0 - (F'(x_0))^{-1} F(x_0)$. Estos esquemas iterativos que se presentan, aún no han sido reportados, y se analizará en las siguientes secciones.

4. Método de Simpson 1/3

Aplicando el clásico método de integración de Simpson $\frac{1}{3}$ en (2), se deduce

$$F(x_n) + \frac{1}{6} \left[F'(x_n) + 4F' \left(\frac{x_n + \hat{x}}{2} \right) + F'(\hat{x}) \right] (\hat{x} - x_n) \approx 0,$$

de donde se obtiene el esquema implícito siguiente:

$$x_{n+1} = x_n - 6 \left[F'(x_n) + 4F' \left(\frac{x_n + x_{n+1}}{2} \right) + F'(x_{n+1}) \right]^{-1} F(x_n).$$

En consecuencia, la Forma 1, construida a partir del método de Newton-Kantorovich, da lugar a un esquema iterativo de dos pasos:

$$\begin{cases} y_n = x_n - (F'(x_n))^{-1} F(x_n), \\ x_{n+1} = x_n - 6 \left[F'(x_n) + 4F' \left(\frac{x_n + y_n}{2} \right) + F'(y_n) \right]^{-1} F(x_n). \end{cases}$$

La Forma 2 conduce a un nuevo método iterativo de dos pasos, al reutilizar el mismo esquema para la estimación de y_n :

$$\begin{cases} y_n = x_n - 6 \left[F'(x_{n-1}) + 4F' \left(\frac{x_{n-1} + y_{n-1}}{2} \right) + F'(y_{n-1}) \right]^{-1} F(x_n), \\ x_{n+1} = x_n - 6 \left[F'(x_n) + 4F' \left(\frac{x_n + y_n}{2} \right) + F'(y_n) \right]^{-1} F(x_n), \end{cases}$$

donde $x_0 \in \Omega \subset V$ es un punto dado y $y_0 = x_0 - (F'(x_0))^{-1} F(x_0)$.

5. Método de Simpson 3/8

Aplicando el método de integración de Simpson $\frac{3}{8}$ en (2), se deduce

$$F(x_n) + \frac{1}{8} \left[F'(x_n) + 3F' \left(\frac{2}{3}x_n + \frac{1}{3}\hat{x} \right) + 3F' \left(\frac{1}{3}x_n + \frac{2}{3}\hat{x} \right) + F'(\hat{x}) \right] (\hat{x} - x_n) \approx 0,$$

de donde se obtiene el esquema implícito siguiente:

$$x_{n+1} = x_n - 8 \left[F'(x_n) + 3F' \left(\frac{2}{3}x_n + \frac{1}{3}x_{n+1} \right) + 3F' \left(\frac{1}{3}x_n + \frac{2}{3}x_{n+1} \right) + F'(x_{n+1}) \right]^{-1} F(x_n).$$

En consecuencia, la Forma 1, construida a partir del método de Newton-Kantorovich, da lugar a un esquema iterativo de dos pasos:

$$\begin{cases} y_n = x_n - (F'(x_n))^{-1} F(x_n), \\ x_{n+1} = x_n - 8 \left[F'(x_n) + 3F' \left(\frac{2}{3}x_n + \frac{1}{3}y_n \right) + 3F' \left(\frac{1}{3}x_n + \frac{2}{3}y_n \right) + F'(y_n) \right]^{-1} F(x_n). \end{cases}$$

La Forma 2 conduce a un nuevo método iterativo de dos pasos, al reutilizar el mismo esquema para la estimación de y_n :

$$\begin{cases} y_n = x_n - 8 \left[F'(x_{n-1}) + 3F' \left(\frac{2}{3}x_{n-1} + \frac{1}{3}y_{n-1} \right) + 3F' \left(\frac{1}{3}x_{n-1} + \frac{2}{3}y_{n-1} \right) + F'(y_{n-1}) \right]^{-1} F(x_n), \\ x_{n+1} = x_n - 8 \left[F'(x_n) + 3F' \left(\frac{2}{3}x_n + \frac{1}{3}y_n \right) + 3F' \left(\frac{1}{3}x_n + \frac{2}{3}y_n \right) + F'(y_n) \right]^{-1} F(x_n), \end{cases}$$

donde $x_0 \in \Omega \subset V$ es un punto dado y $y_0 = x_0 - (F'(x_0))^{-1} F(x_0)$.

6. Puntos de Gauss

En el método de los puntos de Gauss, se realiza un cambio de variable en la integral de (2), obteniendo

$$F(\hat{x}) = F(x_n) + \frac{1}{2} \int_{-1}^1 F' \left(x_n + \frac{t+1}{2} (\hat{x} - x_n) \right) (\hat{x} - x_n) dt = 0. \quad (5)$$

En consecuencia, si se utiliza en esta integral el métodos de puntos Gauss, con un solo punto de interpolación, se obtiene el esquema iterativo de la Regla del punto medio (4). Por consiguiente, se van a determinar nuevos esquemas utilizando los puntos de Gauss, hasta 3 puntos de interpolación.

6.1. Método de Gauss con dos puntos

Aplicando el método de Gauss de dos puntos en (5), se obtiene

$$F(x_n) + \frac{\hat{x} - x_n}{2} \cdot \left[F' \left(x_n + \left(\frac{-\sqrt{3}+3}{6} \right) \cdot (\hat{x} - x_n) \right) + F' \left(x_n + \left(\frac{\sqrt{3}+3}{6} \right) \cdot (\hat{x} - x_n) \right) \right] \approx 0,$$

de donde se obtiene el esquema implícito siguiente:

$$x_{n+1} = x_n - 2 \left[F' \left(x_n + \left(\frac{-\sqrt{3}+3}{6} \right) \cdot (x_{n+1} - x_n) \right) + F' \left(x_n + \left(\frac{\sqrt{3}+3}{6} \right) \cdot (x_{n+1} - x_n) \right) \right]^{-1} F(x_n).$$

En consecuencia, la Forma 1, construida a partir del método de Newton-Kantorovich, da lugar a un esquema iterativo de dos pasos:

$$\begin{cases} y_n = x_n - (F'(x_n))^{-1} F(x_n), \\ x_{n+1} = x_n - 2 \left[F' \left(x_n + \left(\frac{-\sqrt{3}+3}{6} \right) \cdot (y_n - x_n) \right) \right. \\ \left. + F' \left(x_n + \left(\frac{\sqrt{3}+3}{6} \right) \cdot (y_n - x_n) \right) \right]^{-1} F(x_n). \end{cases}$$

La Forma 2 conduce a un nuevo método iterativo de dos pasos, al reutilizar el mismo esquema para la estimación de y_n :

$$\begin{cases} y_n = x_n - 2 \left[F' \left(x_{n-1} + \left(\frac{-\sqrt{3}+3}{6} \right) \cdot (y_{n-1} - x_{n-1}) \right) \right. \\ \left. + F' \left(x_{n-1} + \left(\frac{\sqrt{3}+3}{6} \right) \cdot (y_{n-1} - x_{n-1}) \right) \right]^{-1} F(x_n), \\ x_{n+1} = x_n - 2 \left[F' \left(x_n + \left(\frac{-\sqrt{3}+3}{6} \right) \cdot (y_n - x_n) \right) \right. \\ \left. + F' \left(x_n + \left(\frac{\sqrt{3}+3}{6} \right) \cdot (y_n - x_n) \right) \right]^{-1} F(x_n), \end{cases}$$

donde $x_0 \in \Omega \subset V$ es un punto dado y $y_0 = x_0 - (F'(x_0))^{-1} F(x_0)$.

6.2 Método de Gauss con 3 puntos

Aplicando el método de Gauss de tres puntos en (5), se obtiene

$$\begin{aligned} F(x_n) + \frac{(\hat{x} - x_n)}{18} \cdot \left[5 \cdot F' \left(x_n + \left(\frac{-0.7745966692 + 1}{2} \right) \cdot (\hat{x} - x_n) \right) \right. \\ \left. + 5 \cdot F' \left(x_n + \left(\frac{0.7745966692 + 1}{2} \right) \cdot (\hat{x} - x_n) \right) \right. \\ \left. + 8 \cdot F' \left(\frac{\hat{x} + x_n}{2} \right) \right] \approx 0, \end{aligned}$$

de donde se obtiene el esquema implícito siguiente:

$$\begin{aligned} x_{n+1} = x_n - 18 \left[5 \cdot F' \left(x_n + \left(\frac{-0.7745966692 + 1}{2} \right) \cdot (x_{n+1} - x_n) \right) \right. \\ \left. + 5 \cdot F' \left(x_n + \left(\frac{0.7745966692 + 1}{2} \right) \cdot (x_{n+1} - x_n) \right) \right. \\ \left. + 8 \cdot F' \left(\frac{x_{n+1} + x_n}{2} \right) \right]^{-1} F(x_n). \end{aligned}$$

En consecuencia, la Forma 1, construida a partir del método de Newton-Kantorovich, da lugar a un esquema iterativo de dos pasos:

$$\begin{cases} y_n = x_n - (F'(x_n))^{-1} F(x_n), \\ x_{n+1} = x_n - 18 \cdot \left[5 \cdot F' \left(x_n + \left(\frac{-0.7745966692 + 1}{2} \right) \cdot (y_n - x_n) \right) \right. \\ \left. + 5 \cdot F' \left(x_n + \left(\frac{0.7745966692 + 1}{2} \right) \cdot (y_n - x_n) \right) \right. \\ \left. + 8 \cdot F' \left(\frac{y_n + x_n}{2} \right) \right]^{-1} F(x_n). \end{cases}$$

La Forma 2 conduce a un nuevo método iterativo de dos pasos, al reutilizar el mismo esquema para la estimación de y_n :

$$\left\{ \begin{array}{l} y_n = x_n - 18 \cdot \left[5 \cdot F' \left(x_{n-1} + \left(\frac{-0.7745966692 + 1}{2} \right) \cdot (y_{n-1} - x_{n-1}) \right) \right. \\ \quad \left. + 5 \cdot F' \left(x_{n-1} + \left(\frac{0.7745966692 + 1}{2} \right) \cdot (y_{n-1} - x_{n-1}) \right) \right. \\ \quad \left. + 8 \cdot F' \left(\frac{y_{n-1} + x_{n-1}}{2} \right) \right]^{-1} F(x_n), \\ x_{n+1} = x_n - 18 \cdot \left[5 \cdot F' \left(x_n + \left(\frac{-0.7745966692 + 1}{2} \right) \cdot (y_n - x_n) \right) \right. \\ \quad \left. + 5 \cdot F' \left(x_n + \left(\frac{0.7745966692 + 1}{2} \right) \cdot (y_n - x_n) \right) \right. \\ \quad \left. + 8 \cdot F' \left(\frac{y_n + x_n}{2} \right) \right]^{-1} F(x_n), \end{array} \right.$$

donde $x_0 \in \Omega \subset V$ es un punto dado y $y_0 = x_0 - (F'(x_0))^{-1} F(x_0)$.

7. Método NK1

En este método NK1, se utiliza una fórmula desarrollada en (Al-Karamy & Alsharify, 2020) para la aproximación de la integral de la ecuación (2), con lo cual se obtiene

$$F(x_n) + \frac{1}{6} \left[4 \cdot \left(F' \left(\frac{3}{4}x_n + \frac{1}{4}\hat{x} \right) + F' \left(\frac{1}{4}x_n + \frac{3}{4}\hat{x} \right) \right) - 2F' \left(\frac{x_n + \hat{x}}{2} \right) \right] (\hat{x} - x_n) \approx 0,$$

de donde se deduce el esquema implícito siguiente:

$$x_{n+1} = x_n - 6 \left[4 \cdot \left(F' \left(\frac{3}{4}x_n + \frac{1}{4}x_{n+1} \right) + F' \left(\frac{1}{4}x_n + \frac{3}{4}x_{n+1} \right) \right) - 2F' \left(\frac{x_n + x_{n+1}}{2} \right) \right]^{-1} F(x_n),$$

En consecuencia, la Forma 1, construida a partir del método de Newton-Kantorovich, da lugar a un esquema iterativo de dos pasos:

$$\left\{ \begin{array}{l} y_n = x_n - (F'(x_n))^{-1} F(x_n), \\ x_{n+1} = x_n - 6 \cdot \left[4 \cdot \left(F' \left(\frac{3}{4}x_n + \frac{1}{4}y_n \right) + F' \left(\frac{1}{4}x_n + \frac{3}{4}y_n \right) \right) - 2F' \left(\frac{x_n + y_n}{2} \right) \right]^{-1} F(x_n). \end{array} \right.$$

La Forma 2 conduce a un nuevo método iterativo de dos pasos, al reutilizar el mismo esquema para la estimación de y_n :

$$\left\{ \begin{array}{l} y_n = x_n - 6 \cdot \left[4 \cdot \left(F' \left(\frac{3}{4}x_{n-1} + \frac{1}{4}y_{n-1} \right) + F' \left(\frac{1}{4}x_{n-1} + \frac{3}{4}y_{n-1} \right) \right) - 2F' \left(\frac{x_{n-1} + y_{n-1}}{2} \right) \right]^{-1} F(x_n) \\ x_{n+1} = x_n - 6 \cdot \left[4 \cdot \left(F' \left(\frac{3}{4}x_n + \frac{1}{4}y_n \right) + F' \left(\frac{1}{4}x_n + \frac{3}{4}y_n \right) \right) - 2F' \left(\frac{x_n + y_n}{2} \right) \right]^{-1} F(x_n), \end{array} \right.$$

donde $x_0 \in \Omega \subset V$ es un punto dado y $y_0 = x_0 - (F'(x_0))^{-1} F(x_0)$.

8. Método de Romberg

El método de Romberg es una técnica de integración numérica que combina la extrapolación de Richardson con la regla del trapecio para mejorar la precisión de la aproximación de una integral definida. Para desarrollar la fórmula del método de Romberg con $n = 4$ en la integral de la ecuación (2), note que

$$F(x_n) + \frac{1}{90} \left[7F'(x_n) + 32F' \left(\frac{1}{4}x_n + \frac{3}{4}\hat{x} \right) + 12F' \left(\frac{x_n + \hat{x}}{2} \right) + 32F' \left(\frac{3}{4}x_n + \frac{1}{4}\hat{x} \right) + 7F'(\hat{x}) \right] (\hat{x} - x_n) \approx 0,$$

de donde se obtiene el esquema implícito siguiente:

$$x_{n+1} = x_n - 90 \left[7F'(x_n) + 32F' \left(\frac{1}{4}x_n + \frac{3}{4}x_{n+1} \right) + 12F' \left(\frac{x_n + x_{n+1}}{2} \right) + 32F' \left(\frac{3}{4}x_n + \frac{1}{4}x_{n+1} \right) + 7F'(x_{n+1}) \right]^{-1} F(x_n).$$

En consecuencia, la Forma 1, construida a partir del método de Newton-Kantorovich, da lugar a un esquema iterativo de dos pasos:

$$\begin{cases} y_n = x_n - (F'(x_n))^{-1} F(x_n), \\ x_{n+1} = x_n - 90 \left[7F'(x_n) + 32F' \left(\frac{1}{4}x_n + \frac{3}{4}y_n \right) + 12F' \left(\frac{x_n + y_n}{2} \right) + 32F' \left(\frac{3}{4}x_n + \frac{1}{4}y_n \right) + 7F'(y_n) \right]^{-1} F(x_n). \end{cases}$$

La Forma 2 conduce a un nuevo método iterativo de dos pasos, al reutilizar el mismo esquema para la estimación de y_n :

$$\begin{cases} y_n = x_n - 90 \left[7F'(x_{n-1}) + 32F' \left(\frac{1}{4}x_{n-1} + \frac{3}{4}y_{n-1} \right) + 12F' \left(\frac{x_{n-1} + y_{n-1}}{2} \right) + 32F' \left(\frac{3}{4}x_{n-1} + \frac{1}{4}y_{n-1} \right) + 7F'(y_{n-1}) \right]^{-1} F(x_n), \\ x_{n+1} = x_n - 90 \left[7F'(x_n) + 32F' \left(\frac{1}{4}x_n + \frac{3}{4}y_n \right) + 12F' \left(\frac{x_n + y_n}{2} \right) + 32F' \left(\frac{3}{4}x_n + \frac{1}{4}y_n \right) + 7F'(y_n) \right]^{-1} F(x_n), \end{cases}$$

donde $x_0 \in \Omega \subset V$ es un punto dado y $y_0 = x_0 - (F'(x_0))^{-1} F(x_0)$.

Resultados y Discusión

Experimentos numéricos

Se probarán los nueve métodos iterativos de dos pasos en las Formas 1 y 2 con dos ejemplos que fueron analizados en (Argyros & Chen, 2009) y (Weerakoon & Fernando, 2000). En estos ejemplos determinaremos el orden de convergencia y un número de iteraciones de cada esquema numérico. Se considera un criterio de parada en el cual emplea la solución exacta x_e , y se comparan los esquemas que utilizan la norma en \mathbb{R} y en \mathbb{R}^2 estableciendo que el error de la solución aproximada satisfaga: $\|x_n - x_e\|_{\Omega} < 10^{-15}$ y un número máximo de iteraciones de 1000. Todos los cálculos se realizaron en una notebook Dell con un procesador Intel(R) Core(TM) i3-1115G4, 8 GB de RAM y utilizamos el Software Python para todas las simulaciones.

Ejemplo 1:

Consideramos nueve ecuaciones no lineales de variable real que tienen algunas soluciones; en este caso se comparará con la solución más cercana a la solución aproximada al esquema numérico. Observamos que algunas ecuaciones no lineales se utilizaron en (Weerakoon & Fernando, 2000) para comparar un método de orden de convergencia cúbica estudiado en ese artículo con el método clásico de Newton.

Tabla 1. Ejemplos del orden de convergencia computacional de varios métodos para funciones en una dimensión

	Métodos Iterativos	Forma 1		Forma 2		Raíz
		N	O.C.C	N	O.C.C	
(1) $f(x) = x^3 + 4x^2 - 10$						
$x_0 = -0.5$						
	Método del rectángulo	118	2.001787			
	Método del punto medio	11	2.927467	91	2.842174	
	Método del Trapecio	7	2.962998	9	2.413360	
	Método de Simpson 1/3	11	2.962931	38	2.427136	
	Método de Simpson 3/8	11	2.962931	38	2.427136	1.3652300134140969
	Método de Gauss P2	11	2.962931	38	2.427136	
	Método de Gauss P3	11	2.962931	38	2.424053	
	Método NK1	11	2.962931	38	2.427136	
	Método de Romberg	67	1.031869	44	1.922229	
$x_0 = 1$						
	Método del rectángulo	6	1.999575			
	Método del punto medio	4	3.358756	5	2.446423	
	Método del Trapecio	4	3.329056	5	2.408121	
	Método de Simpson 1/3	4	3.348693	5	2.433327	
	Método de Simpson 3/8	4	3.348693	5	2.433327	1.3652300134140969
	Método de Gauss P2	4	3.348693	5	2.433327	
	Método de Gauss P3	4	3.348693	5	2.433327	
	Método NK1	4	3.348693	5	2.433327	
	Método de Romberg	28	1.005584	5	2.063738	
$x_0 = 2$						
	Método del rectángulo	6	1.998934			
	Método del punto medio	4	3.438683	5	2.485035	
	Método del Trapecio	5	3.404892	5	2.475681	
	Método de Simpson 1/3	4	3.426959	5	2.481708	
	Método de Simpson 3/8	4	3.426959	5	2.481708	1.3652300134140969
	Método de Gauss P2	4	3.426959	5	2.481708	
	Método de Gauss P3	4	3.426959	5	2.481708	
	Método NK1	4	3.426959	5	2.481708	
	Método de Romberg	29	0.983486	5	1.753006	
$x_0 = -0.3$						
	Método del rectángulo	54	1.996655			
	Método del punto medio	19	2.993514	48	2.431856	
	Método del Trapecio	7	3.054323	7	2.015201	
	Método de Simpson 1/3	5	2.839654	7	2.470211	
	Método de Simpson 3/8	5	2.839654	7	2.470211	1.3652300134140969
	Método de Gauss P2	5	2.839654	7	2.470211	
	Método de Gauss P3	5	2.839654	7	2.470211	
	Método NK1	5	2.839654	7	2.470211	
	Método de Romberg	28	0.966897	8	2.020011	
(2) $f(x) = \text{sen}^2(x) - x^2 + 1$						
$x_0 = 1$						
	Método del rectángulo	7	1.999859			
	Método del punto medio	5	3.027389	5	2.029363	
	Método del Trapecio	5	3.041036	5	1.807153	
	Método de Simpson 1/3	5	3.031753	5	1.964893	
	Método de Simpson 3/8	5	3.031773	5	1.964268	1.4044916482153411
	Método de Gauss P2	5	3.031816	5	1.963022	
	Método de Gauss P3	5	3.031790	5	1.963775	
	Método NK1	5	3.031823	5	1.962785	
	Método de Romberg	27	0.933203	6	2.019065	
$x_0 = 3$						
	Método del rectángulo	7	1.999529			
	Método del punto medio	5	2.908886	6	2.434955	
	Método del Trapecio	4	3.088464	5	2.694990	
	Método de Simpson 1/3	5	2.939020	6	2.435189	
	Método de Simpson 3/8	5	2.940167	6	2.435032	1.4044916482153411
	Método de Gauss P2	5	2.942411	6	2.434989	
	Método de Gauss P3	5	2.941028	6	2.434930	

	Método NK1	5	2.942850	6	2.434914	
	Método de Romberg	28	1.132801	6	1.906298	
(3) $f(x) = x^2 - e^x - 3x + 2$						
$x_0 = 2$						
	Método del rectángulo	6	2.000483			
	Método del punto medio	4	3.306218	5	2.477307	
	Método del Trapecio	5	3.008538	5	2.328873	
	Método de Simpson 1/3	4	3.269328	5	2.412982	
	Método de Simpson 3/8	4	3.265689	5	2.413106	0.25753028543986073
	Método de Gauss P2	4	3.258350	5	2.413358	
	Método de Gauss P3	4	3.269629	5	2.413207	
	Método NK1	4	3.269629	5	2.413405	
	Método de Romberg	30	1.028661	5	1.835977	
$x_0 = 3$						
	Método del rectángulo	7	2.000754			
	Método del punto medio	5	3.385472	5	2.425419	
	Método del Trapecio	5	3.036769	6	2.235149	
	Método de Simpson 1/3	5	2.655800	5	2.889906	
	Método de Simpson 3/8	5	2.666609	5	2.891673	0.25753028543986073
	Método de Gauss P2	5	2.685914	5	2.895305	
	Método de Gauss P3	5	2.674712	5	2.893122	
	Método NK1	5	2.689225	5	2.895994	
	Método de Romberg	29	1.013196	6	2.004549	
(4) $f(x) = \cos(x) - x$						
$x_0 = -0.3$						
	Método del rectángulo	6	1.989932			
	Método del punto medio	5	3.052179	5	1.923553	
	Método del Trapecio	4	3.404689	5	2.419577	
	Método de Simpson 1/3	5	3.049556	5	2.106761	
	Método de Simpson 3/8	5	3.049342	5	2.109855	0.7390851332151607
	Método de Gauss P2	5	3.048924	5	2.115947	
	Método de Gauss P3	5	3.049177	5	2.112248	
	Método NK1	5	3.048842	5	2.117110	
	Método de Romberg	27	0.983580	6	2.011285	
$x_0 = 1$						
	Método del rectángulo	5	1.998032			
	Método del punto medio	4	3.385918	4	2.400006	
	Método del Trapecio	3	3.384686	4	2.427962	
	Método de Simpson 1/3	4	3.403739	4	2.596812	
	Método de Simpson 3/8	4	3.403730	4	2.596801	0.7390851332151607
	Método de Gauss P2	4	3.403714	4	2.596778	
	Método de Gauss P3	4	3.403724	4	2.596792	
	Método NK1	4	3.403712	4	2.596774	
	Método de Romberg	28	1.018377	4	2.400006	
$x_0 = 1.7$						
	Método del rectángulo	5	1.990525			
	Método del punto medio	4	3.713338	5	2.441520	
	Método del Trapecio	4	3.941634	5	2.368736	
	Método de Simpson 1/3	4	3.574071	4	2.681955	
	Método de Simpson 3/8	4	3.572678	4	2.680386	0.7390851332151607
	Método de Gauss P2	4	3.569864	4	2.677214	
	Método de Gauss P3	4	3.571564	4	2.679131	
	Método NK1	4	3.569328	4	2.676610	
	Método de Romberg	29	0.987558	5	1.918761	
(5) $f(x) = (x - 1)^3 - 1$						
$x_0 = 3.5$						
	Método del rectángulo	8	1.999492			
	Método del punto medio	6	2.992126	6	2.379779	
	Método del Trapecio	6	2.985496	7	2.434064	
	Método de Simpson 1/3	6	2.990191	6	2.377267	
	Método de Simpson 3/8	6	2.990191	6	2.377267	2.0
	Método de Gauss P2	6	2.990191	6	2.377267	
	Método de Gauss P3	6	2.990191	6	2.377267	
	Método NK1	6	2.990191	6	2.377267	
	Método de Romberg	27	1.052410	7	1.956669	
$x_0 = 2.5$						

Método del rectángulo	7	1.998128			
Método del punto medio	5	2.985266	5	2.449922	
Método del Trapecio	5	2.979137	5	2.435259	
Método de Simpson 1/3	5	2.983280	5	2.444696	
Método de Simpson 3/8	5	2.983280	5	2.444696	2.0
Método de Gauss P2	5	2.983280	5	2.444696	
Método de Gauss P3	5	2.983280	5	2.444696	
Método NK1	5	2.983280	5	2.444696	
Método de Romberg	28	0.970379	5	1.976656	
(6) $f(x) = x^3 - 10$					
$x_0 = 1.5$					
Método del rectángulo	7	2.000768			
Método del punto medio	5	3.013936	5	2.202375	
Método del Trapecio	5	3.023989	5	1.979051	
Método de Simpson 1/3	5	3.017113	5	2.130544	
Método de Simpson 3/8	5	3.017113	5	2.130544	2.154434690031884
Método de Gauss P2	5	3.017113	5	2.130544	
Método de Gauss P3	5	3.017113	5	2.130544	
Método NK1	5	3.017113	5	2.130544	
Método de Romberg	25	0.932707	6	2.012653	
(7) $f(x) = x \exp(x^2) - \sin^2(x) + 3 \cos(x) + 5$					
$x_0 = -2$					
Método del rectángulo	33	1.908396			
Método del punto medio	35	3.281230	34	1.829848	
Método del Trapecio	36	2.596892	35	2.085558	
Método de Simpson 1/3	36	2.964147	33	2.096712	
Método de Simpson 3/8	36	2.965632	33	2.096710	-1.207647827130919
Método de Gauss P2	36	2.968623	33	2.096704	
Método de Gauss P3	36	2.966839	33	2.096707	
Método NK1	36	2.969179	33	2.096703	
Método de Romberg	118	1.029848	35	2.200978	
(8) $f(x) = x^2 \sin^2(x) + \exp[x^2 \cos(x) \sin(x)] - 28$					
$x_0 = 5$					
Método del rectángulo	91	1.968479			-7.1208726199848105
Método del punto medio	24	1.000051	ND	ND	15852.476196217493
Método del Trapecio	ND	ND	ND	ND	NC
Método de Simpson 1/3	72	1.000059	ND	ND	-12.986058716491828
Método de Simpson 3/8	ND	ND	ND	ND	NC
Método de Gauss P2	82	1.000013	ND	ND	18.56044975198646
Método de Gauss P3	ND	ND	ND	ND	NC
Método NK1	94	2.935344	ND	ND	12.114335933712576
Método de Romberg	1001	0.999964	ND	ND	-28.46134091825484
(9) $f(x) = \exp(x^2 + 7x - 30) - 1$					
$x_0 = 3.5$					
Método del rectángulo	13	1.999855			
Método del punto medio	8	2.910432	10	2.399924	
Método del Trapecio	9	2.962434	11	2.442645	
Método de Simpson 1/3	9	2.993685	10	2.392948	
Método de Simpson 3/8	9	2.993834	10	2.392980	3.0
Método de Gauss P2	9	2.993012	10	2.393046	
Método de Gauss P3	9	2.993451	11	2.403392	
Método NK1	9	2.994402	10	2.393058	
Método de Romberg	30	1.016734	10	1.915685	
$x_0 = 3.25$					
Método del rectángulo	9	1.998775			
Método del punto medio	6	2.933090	8	2.444156	
Método del Trapecio	7	2.991491	8	2.442752	
Método de Simpson 1/3	6	2.895654	8	2.440973	
Método de Simpson 3/8	6	2.895697	8	2.440123	3.0
Método de Gauss P2	6	2.895781	8	2.438418	
Método de Gauss P3	6	2.895731	8	2.445546	
Método NK1	6	2.895797	8	2.438100	
Método de Romberg	27	0.928468	8	1.936775	

O.C.C → Orden de Convergencia Computacional
 NC → No Converge

ND → No definida

Ejemplo 2:

Consideramos un sistema de ecuaciones no lineales de variable real, el cual tiene algunas soluciones. En este caso se comparará con la solución más cercana a la solución aproximada al esquema numérico.

$$\begin{aligned} 2x - \frac{1}{9}x^2 - y &= 0 \\ -x + 2y - \frac{1}{9}y^2 &= 0 \end{aligned} \tag{6}$$

Observamos que el sistema se utilizó en (Argyros & Chen, 2009) para comparar el método de tipo Newton-Kantorovich estudiado en ese artículo con el método clásico de Newton.

Tabla 2. Ejemplos del orden de convergencia computacional de un sistema de ecuaciones no lineales de variable real

Métodos Iterativos	Forma 1		Forma 2		Raíz
	N	O.C.C	N	O.C.C	
$(x_0, y_0) = (11.4, 11.4)$					
Método del rectángulo	5	1.999369			
Método del punto medio	4	2.365630	3	2.487628	
Método del Trapecio	4	2.365630	3	2.487628	
Método de Simpson 1/3	4	2.365630	3	2.487628	
Método de Simpson 3/8	4	2.365630	3	2.487628	$(x, y) = (9, 9)$
Método de Gauss P2	4	2.365630	3	2.487628	
Método de Gauss P3	4	2.365630	3	2.487628	
Método NK1	4	2.365630	3	2.487628	
Método de Romberg	14	0.999999	5	2.000002	
$(x_0, y_0) = (5.3, 5.3)$					
Método del rectángulo	7	1.998897			
Método del punto medio	5	3.018029	4	2.114003	
Método del Trapecio	5	3.018029	4	2.114003	
Método de Simpson 1/3	5	3.018029	4	2.114003	
Método de Simpson 3/8	5	3.018029	4	2.114003	$(x, y) = (9, 9)$
Método de Gauss P2	5	3.018029	4	2.114003	
Método de Gauss P3	5	3.018029	4	2.114003	
Método NK1	5	3.018029	4	2.114003	
Método de Romberg	14	0.999999	6	1.999996	

O.C.C → Orden de Convergencia Computacional ND → No definida
 NC → No Converge

De la Tabla 1 y la Tabla 2 podemos ver que el orden de convergencia de los métodos iterativos de dos pasos para la Forma 1 y la Forma 2, son lineales, cuadráticos, cúbicos y supercuadrática $(1 + \sqrt{2})$. Se presenta una tabla de resumen del orden de convergencia y índice de eficiencia de Ostrowski.

Tabla 3. Orden de Convergencia e Índice de Eficiencia de métodos iterativos de dos pasos

Métodos Iterativos	Forma 1			Forma 2		
	\mathcal{N}	O.C.C	I_E	\mathcal{N}	O.C.C	I_E
Método del rectángulo	2	2	$\sqrt{2} \approx 1.4142$			
Método del punto medio	2	3	$\sqrt{3} \approx 1.7320$	2	$1 + \sqrt{2}$	$\sqrt{1 + \sqrt{2}} \approx 1.5537$
Método del Trapecio	2	3	$\sqrt{3} \approx 1.7320$	2	$1 + \sqrt{2}$	$\sqrt{1 + \sqrt{2}} \approx 1.5537$

Método de Simpson 1/3	2	3	$\sqrt{3} \approx 1.7320$	2	$1 + \sqrt{2}$	$\sqrt{1 + \sqrt{2}} \approx 1.5537$
Método de Simpson 3/8	2	3	$\sqrt{3} \approx 1.7320$	2	$1 + \sqrt{2}$	$\sqrt{1 + \sqrt{2}} \approx 1.5537$
Método de Gauss P2	2	3	$\sqrt{3} \approx 1.7320$	2	$1 + \sqrt{2}$	$\sqrt{1 + \sqrt{2}} \approx 1.5537$
Método de Gauss P3	2	3	$\sqrt{3} \approx 1.7320$	2	$1 + \sqrt{2}$	$\sqrt{1 + \sqrt{2}} \approx 1.5537$
Método NK1	2	3	$\sqrt{3} \approx 1.7320$	2	$1 + \sqrt{2}$	$\sqrt{1 + \sqrt{2}} \approx 1.5537$
Método de Romberg	2	1	$\sqrt{1} = 1$	2	2	$\sqrt{2} \approx 1.4142$

$\mathcal{N} \rightarrow$ Número de evaluaciones

O.C.C \rightarrow Orden de Convergencia Computacional

$I_E \rightarrow$ Índice de Eficiencia de Ostrowski

En el Ejemplo 1, se observa que el método del Rectángulo de la Forma 1 presenta, en algunas funciones, el mayor número de iteraciones requeridas para alcanzar la convergencia, a pesar de tener orden de convergencia cuadrático. En cambio, el método de Romberg aplicado a la Forma 1 muestra un comportamiento linealmente convergente en todos los casos, con una cantidad constante de iteraciones, lo que indica estabilidad, pero a costa de una velocidad de convergencia menor.

Por otro lado, los métodos restantes aplicados a la Forma 1 exhiben un orden de convergencia cúbico, lo cual se traduce en una convergencia más rápida. Además, mantienen un número constante de iteraciones y presentan un mejor rendimiento comparado con el método de Newton clásico, en términos tanto de eficiencia como de estabilidad numérica.

En el caso de la Forma 2, todos los métodos iterativos analizados presentan un orden de convergencia igual a $1 + \sqrt{2} \approx 2.4142$, valor que también ha sido reportado en la literatura para ciertos métodos modificados de tipo Newton, como en el trabajo de **McDougall and Wotherspoon**, 2014, salvo el método de Romberg, el cual alcanza una convergencia cuadrática. Nuevamente, se destaca que el número de iteraciones se mantiene constante, y el rendimiento general de los métodos supera al del método de Newton, especialmente en estabilidad frente a variaciones en las condiciones iniciales.

Un caso particular se presenta en la función 8, donde algunos métodos no logran converger. Esto se debe a la presencia de múltiples raíces, lo cual puede hacer que, dependiendo del punto inicial, el método converja a una raíz distinta o incluso diverja. Este comportamiento está relacionado con la dependencia de la derivada de la función en cada iteración, la cual no está moderada por un parámetro de amortiguamiento, lo que limita el control del comportamiento dinámico del método.

En el Ejemplo 2, se analiza el comportamiento de los métodos iterativos de dos pasos bajo dos condiciones iniciales distintas. En ambos casos, tanto en la Forma 1 como en la Forma 2, los métodos convergen exitosamente y mantienen los mismos órdenes de convergencia observados en el Ejemplo 1. Además, se confirma que una mejor elección del punto inicial (es decir, más cercano a la raíz) acelera la convergencia, debido a que la derivada de la función en las iteraciones subsecuentes se mantiene más controlada.

Asimismo, la Forma 2 demuestra un mejor índice de eficiencia computacional, dado que en cada paso se reutiliza el mismo método para el cálculo de los valores y_n , lo cual reduce el esfuerzo computacional sin sacrificar precisión.

Finalmente, al comparar todos los métodos iterativos propuestos con el método de Newton-Kantorovich clásico, se observa que los nuevos métodos presentan tanto un mayor orden de convergencia como un mejor índice de eficiencia. Incluso en casos donde el método de Newton falla en converger, los métodos propuestos logran hacerlo. Esto se debe a que las aproximaciones sucesivas aprovechan de manera más efectiva la estructura del método, en particular por utilizar el mismo esquema en el cálculo de las variables secundarias, lo que mejora la estabilidad global.

Una limitación importante de estos métodos iterativos de dos pasos es la dependencia del cálculo de la derivada de la función. Sin embargo, en comparación con métodos que no requieren derivadas, como el método de la secante, los métodos propuestos tienen un mayor orden de convergencia y, en muchos casos, un índice de eficiencia superior. Recordemos que el orden de convergencia (O.C.C) del método de la secante es: $(1 + \sqrt{5})/2 \approx 1.6180$ y $I_E = 1.6180$.

Conclusiones

Aunque el método de Newton presenta un orden de convergencia cuadrático, lo que lo hace teóricamente más rápido, su desempeño en la práctica puede verse comprometido por su alta sensibilidad a las condiciones iniciales y a la forma específica de la función. En contraste, los métodos iterativos de dos pasos analizados ofrecen mayor estabilidad frente a estas variaciones, lo que los convierte en alternativas más robustas en situaciones complejas.

Por otro lado, la incorporación de estrategias como parámetros de relajación o amortiguamiento adaptativo podría mejorar aún más la convergencia de los métodos en casos donde la función presenta múltiples raíces o derivadas oscilantes, ayudando a evitar la divergencia o la convergencia hacia soluciones no deseadas.

Finalmente, una evaluación más detallada del costo computacional total (incluya el número de evaluaciones de funciones, derivadas y operaciones por iteración) permitiría fortalecer la justificación del uso de estos métodos iterativos de dos pasos, especialmente cuando se aplican en contextos como la resolución de ecuaciones diferenciales, donde la eficiencia y estabilidad son fundamentales.

Agradecimientos

Expresamos nuestro profundo agradecimiento a la Universidad Central del Ecuador por brindarnos el tiempo necesario y proveernos de todo el material para el desarrollo de este trabajo.

Contribución de los autores

GAP y MM trabajaron por igual en el desarrollo teórico, diseño y programación de esquemas numéricos, análisis de resultados, conclusiones y redacción del manuscrito.

Conflicto de intereses

Los autores declaran no tener ningún conflicto de intereses en todo lo que se refiere al contenido de este artículo.

References

- Al-Karamy, N. A. M., Alsharify, F. H. (2020) New numerical method nk1 for calculating single integrals. *International Journal of Technology, Science and Engineering ISSN: 2457, 33*.
- Amat, S., Busquier, S. (2006) A two-step steffensen's method under modified convergence conditions. *Journal of mathematical analysis and applications, 324(2)*, 1084–1092.

- Amat, S., Bermúdez, C., Busquier, S., Plaza, S.** (2010) On a third-order newton-type method free of bilinear operators. *Numerical Linear Algebra with Applications*, 17(4), 639–653.
- Amorós-Canet, C.** (2020) Estudio sobre convergencia y dinámica de los métodos de newton, stirling y alto orden.
- Amrein, M.** (2021) A global newton-type scheme based on a simplified newton-type approach. *JOURNAL OF APPLIED MATHEMATICS AND COMPUTING*, 65(1-2), 321–334. <https://doi.org/10.1007/s12190-020-01393-w>
- Amrein, M., Hilber, N.** (2020) Adaptive newton-type schemes based on projections. *International Journal of Applied and Computational Mathematics*, 6(4), 120.
- Amrein, M., Wihler, T. P.** (2014) An adaptive newton-method based on a dynamical systems approach. *COMMUNICATIONS IN NONLINEAR SCIENCE AND NUMERICAL SIMULATION*, 19(9), 2958–2973. <https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2014.02.010>
- Amrein, M., Wihler, T. P.** (2015) Fully adaptive newton-galerkin methods for semilinear elliptic partial differential equations. *SIAM JOURNAL ON SCIENTIFIC COMPUTING*, 37(4), A1637–A1657. <https://doi.org/10.1137/140983537>
- Argyros, I.** (2007) *Computational theory of iterative methods*. Elsevier.
- Argyros, I. K., Chen, J.** (2009) On local convergence of a newton-type method in banach space. *International Journal of Computer Mathematics*, 86(8), 1366–1374.
- Argyros, I. K., Ren, H.** (2009) On the convergence of modified newton methods for solving equations containing a non-differentiable term. *Journal of computational and applied mathematics*, 231(2), 897–906.
- Bi, W., Ren, H., Wu, Q.** (2009) Three-step iterative methods with eighth-order convergence for solving nonlinear equations. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 225(1), 105–112.
- Cárdenas, E., Castro, R., Sierra, W.** (2020) A newton-type midpoint method with high efficiency index. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 491(2), 124381.
- Chaillou, A. L., Suri, M.** (2006) Computable error estimators for the approximation of nonlinear problems by linearized models. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 196(1-3), 210–224.
- Davis, P. J., Rabinowitz, P.** (2007) *Methods of numerical integration*. Courier Corporation.
- de los Angeles Martinez, M., Fernandez, D.** (2019) A quasi-newton modified lp-newton method [4th International Conference on Computational and Experimental Science and Engineering (ICCESEN), Kemer, TURKEY, OCT 04-08, 2017]. *OPTIMIZATION METHODS & SOFTWARE*, 34(3), 634–649. <https://doi.org/10.1080/10556788.2017.1384955>
- Ezquerro, J. A., Hernandez-Veron, M. A., Magrenan, A. A., Moysi, A.** (2023) A significant improvement of a family of secant-type methods. *JOURNAL OF COMPUTATIONAL AND APPLIED MATHEMATICS*, 424. <https://doi.org/10.1016/j.cam.2022.115002>
- Grau, M., Noguera, M.** (2004) A variant of cauchy’s method with accelerated fifth-order convergence. *Applied Mathematics Letters*, 17(5), 509–517.
- Grau-Sánchez, M., Noguera, M., Grau, À., Herrero, J. R.** (2012) On new computational local orders of convergence. *Applied Mathematics Letters*, 25(12), 2023–2030.
- Heid, P., Wihler, T. P.** (2020a) On the convergence of adaptive iterative linearized galerkin methods. *CALCOLO*, 57(3). <https://doi.org/10.1007/s10092-020-00368-4>
- Heid, P., Wihler, T. P.** (2020b) Adaptive iterative linearization galerkin methods for nonlinear problems. *MATHEMATICS OF COMPUTATION*, 89(326), 2707–2734. <https://doi.org/10.1090/mcom/3545>
- Jacobsen, J., Lewis, O., Tennis, B.** (2007) Approximations of continuous newton’s method: An extension of cayley’s problem. *Electronic Journal of Differential Equations (EJDE)[electronic only]*, 2007, 163–173.

- Kelley, C. T.** (1995) *Iterative methods for linear and nonlinear equations*. SIAM.
- Kogan, T., Sapir, L., Sapir, A., Sapir, A.** (2017) To the question of efficiency of iterative methods. *APPLIED MATHEMATICS LETTERS*, 66, 40–46. <https://doi.org/10.1016/j.aml.2016.11.006>
- Kou, J., Li, Y., Wang, X.** (2007) Some variants of ostrowski's method with seventh-order convergence. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 209(2), 153–159.
- McDougall, T. J., Wotherspoon, S. J.** (2014) A simple modification of newton's method to achieve convergence of order $1 + \sqrt{2}$. *APPLIED MATHEMATICS LETTERS*, 29, 20–25. <https://doi.org/10.1016/j.aml.2013.10.008>
- Petković, M. S., Petković, L. D.** (2010) Families of optimal multipoint methods for solving nonlinear equations: A survey. *Applicable Analysis and Discrete Mathematics*, 1–22.
- Schneebeli, H. R., Wihler, T. P.** (2011) The newton–raphson method and adaptive ode solvers. *Fractals*, 19(01), 87–99.
- Soleymani, F., Khattri, S. K., Vanani, S. K.** (2012) Two new classes of optimal jarratt-type fourth-order methods. *Applied mathematics letters*, 25(5), 847–853.
- Thukral, R., Petković, M.** (2010) A family of three-point methods of optimal order for solving nonlinear equations. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 233(9), 2278–2284.
- Weerakoon, S., Fernando, T.** (2000) A variant of newton's method with accelerated third-order convergence. *Applied mathematics letters*, 13(8), 87–93.
- Zhao, Y., Wu, Q.** (2009) Convergence analysis for a deformed newton's method with third-order in banach space under γ -condition. *International Journal of Computer Mathematics*, 86(3), 441–450.

Artículo original

La espiral de Arquímedes y los problemas clásicos de la geometría griega

The Archimedean spiral and the classical problems of Greek geometry

 J.M. Ayerbe Toledano

Departamento de Análisis Matemático, Universidad de Sevilla, España

Resumen

Los tres problemas clásicos de la geometría griega son la cuadratura del círculo, la trisección del ángulo y la duplicación del cubo. En este artículo se indaga sobre el origen de la espiral de Arquímedes, poniendo el énfasis en su similitud con la cuadratriz de Hipias, y se analiza la forma en la que fue utilizada la curva para obtener soluciones para dos de los problemas clásicos, concretamente para la trisección del ángulo y para la cuadratura del círculo.

Palabras clave: Cuadratura del círculo; Trisección del ángulo; Tangente; Espiral; Conon de Samos; Arquímedes; Papo de Alejandría.

Abstract

The three classic problems of Greek geometry are the squaring of the circle, the trisection of the angle, and the duplication of the cube. This article inquires about the origin of the Archimedean spiral, emphasizing its similarity to the Hippias quadratrix, and analyzes the contribution of this curve to the solutions of two classic problems, specifically, the angle trisection and the quadrature of the circle.

Keywords: Squaring of the circle; Angle trisection; Tangent; Spiral; Conon of Samos, Archimedes, Pappus of Alexandria.

Introducción

Aunque la matemática griega tuvo inicialmente una orientación aritmética, debido al impulso de la escuela pitagórica que consideraba al número como el origen o la esencia de todas las cosas, la irrupción de las magnitudes inconmensurables y las paradojas asociadas a los primeros razonamientos de corte infinitesimal la hicieron virar a lo largo del siglo V a.C. hacia una forma geométrica (Ayerbe-Toledano, 2024, pág. 55), lo que favoreció que desde una época muy temprana se plantearan los tres problemas que, posteriormente, han sido conocidos como los tres problemas clásicos de la geometría griega. Estos problemas no son otros que la cuadratura del círculo, la trisección del ángulo y la duplicación del cubo.

El problema de la cuadratura del círculo se pregunta cómo construir, empleando únicamente rectas y circunferencias, un cuadrado de área igual a la de un círculo dado¹. Por su parte el problema de la trisección del ángulo consiste en determinar la construcción geométrica que permita dividir un ángulo dado en tres partes iguales, utilizando los mismos medios que en el caso anterior. Finalmente, el problema de la duplicación del cubo estudia la forma de obtener, también mediante rectas y circunferencias, un cubo de volumen doble al de uno dado. Estos problemas actuaron como verdaderos catalizadores de la investigación durante toda la etapa griega y, aunque resultaron ser de imposible solución en los términos en los que

¹La igualdad de áreas entre dos figuras debe ser entendida en este contexto, con objeto de evitar anacronismos, como la posibilidad de descomponer una de ellas para transformarla en la otra en un número finito de pasos.

Citación: Ayerbe Toledano JM. La espiral de Arquímedes y los problemas clásicos de la geometría griega. Revista de la Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. 49(192):645-672, julio-septiembre de 2025. doi: <https://doi.org/10.18257/raccefyn.3221>

Editor: Clara Helena Sánchez

Correspondencia:

José María Ayerbe Toledano;
jayerbe@us.es

Recibido: 13 de mayo de 2025

Aceptado: 29 de julio de 2025

Publicado en línea: 29 de agosto de 2025



Este artículo está bajo una licencia de Creative Commons Reconocimiento-NoComercial-Compartir Igual 4.0 Internacional

fueron planteados, el extraordinario ingenio de los grandes matemáticos de la Antigüedad permitió encontrar numerosas respuestas a los mismos ampliando el foco de las que eran admisibles.

Fue probablemente Platón, dada su conocida aversión a la utilización de elementos extraños en la geometría, el que estableció la obligación de emplear en las construcciones y diagramas únicamente la regla y el compás, limitación que hizo irresolubles los tres problemas clásicos y que motivó que estos no fueran considerados por Euclides como materia digna de ser incluida en *Elementos*², obra escrita a finales del siglo IV a.C. en una época en la que ya se habían obtenido algunos importantes resultados en relación con estas cuestiones. Quien no eludió en su trabajo las soluciones obtenidas en la Antigüedad para los tres problemas clásicos fue Papo de Alejandría, un matemático del siglo IV d.C. que escribió una de las referencias fundamentales que tenemos para nuestro conocimiento de la geometría griega, la *Colección Matemática* o simplemente la *Colección*, un compendio formado por ocho libros, de los que se ha perdido el primero y parte del segundo y del último. En este tratado Papo clasifica los problemas geométricos en *planos*, *sólidos* o *lineales* según que para su solución se precisen construcciones que se ejecuten únicamente con rectas y circunferencias, mediante el uso adicional de las secciones cónicas o con el concurso de otras curvas, respectivamente, dando así cabida en los diagramas a otros instrumentos de dibujo distintos de la regla y el compás. Además anticipó que los problemas de la trisección del ángulo y de la duplicación del cubo son *sólidos*, mientras que el de la cuadratura del círculo es *lineal*, resultados para cuya demostración rigurosa hubo de esperarse hasta el siglo XIX. Una prueba de estos resultados puede encontrarse en (Klein, 1993).

Las primeras soluciones de los tres problemas clásicos de la geometría griega se obtuvieron a lo largo del siglo IV a.C. mediante la introducción de la cuadratriz de Hipias, la primera curva definida cinemáticamente y que resultó útil para solventar los problemas de la trisección del ángulo y de la cuadratura del círculo (Heath, 1981, Vol. I, pág. 226-229), y de las secciones cónicas, una familia de curvas con amplias aplicaciones en la matemática pero que fueron inventadas específicamente para resolver el enigma de encontrar dos medias proporcionales, en proporción continua, entre dos magnitudes dadas³ (Ayerbe-Toledano, 2025a). Esta cuestión, como ya había señalado Hipócrates de Quíos casi un siglo antes de que Menecmo introdujera la parábola, la elipse y la hipérbola, conduce a la solución del problema de la duplicación del cubo si la segunda magnitud se toma doble de la primera (Ayerbe-Toledano, 2025b, pág. 41-43).

El objeto de este artículo es estudiar con cierto detalle la espiral de Arquímedes, incidiendo especialmente en su utilización para resolver los problemas de la trisección del ángulo y de la cuadratura del círculo, adentrándonos de esta forma en las respuestas encontradas a lo largo del siglo III a.C.

La espiral guarda ciertas similitudes con la cuadratriz de Hipias ya que ambas curvas pertenecen a la clase *lineal* según la tipología de Papo, se definen como una combinación de dos movimientos sincronizados, fueron inicialmente concebidas para resolver el problema de la trisección del ángulo y, posteriormente, se comprobó que también eran útiles para atacar el problema de la cuadratura del círculo. En el trabajo se reflexiona sobre el origen de la espiral, atribuyendo su invención, de acuerdo con lo señalado por Papo, a Conón de Samos, quien, como se acaba de indicar, la habría concebido específicamente para dar una solución, alternativa a la ideada por Hipias, al problema de la trisección del ángulo. Asimismo se analizan las definiciones de la espiral realizadas por Arquímedes y Papo, estudiando la evolución que se produjo en la concepción de las curvas en el periodo griego, proceso en

²En este artículo utilizaremos como referencia de este tratado el texto (Euclides, 1991-1994-2008).

³Se dice que dos magnitudes A y B son dos medias proporcionales, en proporción continua, entre otras dos C y D si se verifica que $\frac{C}{A} = \frac{A}{B} = \frac{B}{D}$.

el que el *symptoma* o propiedad fundamental de la curva va adquiriendo una importancia creciente en detrimento de la propia génesis de la línea.

Finalmente se revisa la obra de Arquímedes *Sobre las líneas espirales* desde la perspectiva del problema de la cuadratura del círculo, análisis que nos permitirá valorar el papel central jugado por la técnica conocida como inserción o *neusis*, que Arquímedes utilizó magistralmente en su compendio, y el principio de continuidad de las magnitudes arquimedianas y el método de demostración por exhaución, conceptos atribuidos a Eudoxo de Cnido pero que en manos del genio siracusano adquirieron sus más altas cotas de depuración técnica.

Algunas notas sobre la vida y la obra de Arquímedes

Vamos a dedicar esta segunda sección a presentar alguna información general que nos permita situar al personaje central de este artículo, Arquímedes. En comparación con la mayor parte de los matemáticos de la Antigüedad, de su vida poseemos numerosos apuntes procedentes de fuentes diversas. De acuerdo con lo recogido en (Arquímedes y Eutocio, 2005, pág. 7) estas reseñas son “las indicaciones del propio Arquímedes, las referencias historiográficas de Polibio y Tito Livio y el encomio literario de Plutarco, a lo que hay que sumar algunos datos transmitidos por Cicerón y por los matemáticos posteriores”. Con objeto de situarlo en el tiempo y en el espacio debe señalarse que sabemos con certeza que lo asesinaron durante la rapiña posterior a la toma de Siracusa por los romanos en 212 a.C., en el transcurso de la Segunda Guerra Púnica (ver, por ejemplo, (Plutarco, 2006, pág. 423-424)) y, dado que por otras fuentes se tiene constancia de que murió a los 75 años, su fecha de nacimiento suele datarse en el año 287 a.C.

Aunque Arquímedes pasó la mayor parte de su vida en su tierra natal, Siracusa, hay constancia de que en su juventud residió durante algún tiempo en Alejandría, la capital cultural del mundo en aquella época. Probablemente aquella visita hay que enmarcarla en los deseos de su padre, el astrónomo Fidias, de proporcionar a su hijo, cuyas cualidades habría sabido apreciar, una educación adecuada a su enorme talento. Alejandría contaba en el siglo III a.C. con dos instituciones, el Museo y la Biblioteca, que disponían de unos fondos bibliográficos imposibles de encontrar en ningún otro lugar y en las que trabajaban los más eminentes sabios y eruditos del mundo helénico bajo la protección de la dinastía ptolemaica.

Es en esta etapa en la que se supone que Arquímedes conoció a algunos de los mejores investigadores de su tiempo, con los que trabajaría amistad y con los que, una vez de vuelta en su tierra, mantuvo una fructífera relación epistolar. En este grupo debemos destacar especialmente al matemático y astrónomo Conón de Samos, al que nos referiremos posteriormente en este trabajo. Aunque no nos ha llegado nada de la correspondencia entre ambos eruditos, hay constancia, por escritos y cartas posteriores del genio de Siracusa, que esta tuvo lugar y que, durante los primeros años tras su vuelta a Sicilia y hasta la muerte de Conón, le remitió algunos de sus trabajos científicos y fue su interlocutor habitual en Alejandría. Concretamente, en la carta que precede al compendio *Sobre la cuadratura de la parábola* (Arquímedes, 2009, pág. 161), Arquímedes precisa que “solía escribir a Conón teoremas matemáticos que antes no habían sido estudiados, pero que ahora han sido estudiados por mí, habiéndolos descubierto primero mediante el método mecánico y habiéndolos demostrado después por el método geométrico”.

También deben mencionarse como interlocutores de Arquímedes a Dosíteo de Pelusa y Eratóstenes de Cirene, aunque probablemente a estos no los conoció personalmente. Al primero dirigió sus trabajos *Sobre la cuadratura de la parábola*, *Sobre la esfera y el cilindro*, *Sobre los conoides y esferoides* y *Sobre las líneas espirales* ((Arquímedes y Eutocio, 2005) y (Arquímedes, 2009)). En este artículo vamos a analizar esta última obra desde la perspectiva de su aportación a la solución del problema de la cuadratura del círculo. Nuestra

mejor información sobre Dosíteo es lo que Arquímedes recoge en sus cartas, esto es, que había conocido a Conón y que estaba familiarizado con la geometría. Además se le atribuyen algunos trabajos perdidos sobre astronomía y la construcción de un espejo ustorio parabólico o alguna participación en ese propósito (ver (Diocles, 1976, pág. 140)). Sin duda era un estudioso alejandrino bien relacionado, pues hizo circular adecuadamente las obras de Arquímedes entre sus colegas.

Por lo que se refiere al segundo, al que también envió algunos tratados, entre otros *El Método sobre los teoremas mecánicos* que hoy solemos denominar simplemente como *El Método* (Arquímedes, 2009), debe reseñarse que fue el director de la Biblioteca desde el año 236 a.C. hasta su muerte acaecida hacia el año 194 a.C. y que gozó de un enorme prestigio fundamentado, sobre todo, en sus trabajos geográficos. No obstante, por lo que se refiere a las matemáticas y más concretamente a los tres problemas clásicos griegos, debe señalarse su contribución para resolver el problema de la duplicación del cubo, mediante la obtención de medias proporcionales en proporción continua, que nos ha llegado a través de Eutocio en sus *Comentarios* al Libro II de la obra de Arquímedes *Sobre la esfera y el cilindro* (Arquímedes y Eutocio, 2005, pág. 378-383). En esta fuente se hace referencia a lo orgulloso que se sentía Eratóstenes de un ingenio mecánico que había ideado para la obtención práctica de medias proporcionales al que posteriormente Papo denominó “mesolabio”, literalmente “constructor de medias”, y que ha llegado a identificarse de tal manera con el problema de la duplicación del cubo que a menudo se le denomina a este como “problema del mesolabio”. Un estudio detallado de las contribuciones de Eratóstenes en su doble condición de geómetra y geodesta puede encontrarse en (Ayerbe-Toledano, 2025b).

A los efectos que interesan a este artículo sabemos por Plutarco que Arquímedes, siguiendo la tradición platónica, no estaba en absoluto interesado por las aplicaciones prácticas de la geometría y que solo accedió a desarrollar algunos inventos a petición del rey Hieron II, tirano de Siracusa, con el que es posible que tuviera alguna relación de parentesco. En este sentido en (Plutarco, 2006, pág. 414) se recoge lo siguiente:

“Este hombre [Arquímedes] los tenía [los ingenios] por materia nada digna de interés y la mayor parte habían sido resultados accesorios de juegos geométricos, pues ya antes el rey Hierón le apreciaba y había convencido a Arquímedes de que volviera algo de su arte de lo inteligible a lo corpóreo y lo hiciera más conocido para la gente del común mezclando de algún modo lo racional con lo sensible en los asuntos prácticos”.

Y un poco más adelante (Plutarco, 2006, pág. 419), apostillando esta misma idea, señala: “Considerando que las ocupaciones relativas a la mecánica y, en general, todo género de arte tocante a lo útil era innoble y vil [Arquímedes] puso su propia estimación sólo en aquello en lo que la belleza y la excelencia se da sin mezcla con lo útil”.

Sin embargo estas palabras de Plutarco deben ser acogidas con cierto recelo. No cabe duda de que la formación de Arquímedes estuvo fuertemente influida por su estancia en Alejandría y, de hecho, su obra matemática es de una perfección técnica y un rigor científico que en nada desmerece de la metodología seguida en *Elementos* de Euclides. Además, y esta no es una cuestión menor, no nos ha llegado ningún compendio del genio de Siracusa dedicado a sus obras de ingeniería, lo que podría indicar que no las consideraba de entidad suficiente como para ponerlas por escrito. No obstante, no cabe pensar que los artilugios diseñados por Arquímedes fueran únicamente un pasatiempo derivado de sus investigaciones geométricas, sino que, por su originalidad e importancia, deben considerarse como una parte fundamental de su aportación a la ciencia. En este sentido en (González-Urbaneja, 2006, pág. LXVII) se especula con que uno de los motivos que podría haberle impelido a abandonar Alejandría y volver a Sicilia pudo ser el hecho de que la rígida concepción de la ciencia en la cultura helenística, sustancialmente teórica y abstracta, limitaba su capacidad investigadora y su genio creativo. En cualquier caso, su admiración por la ciencia pura es

indiscutible toda vez que en su propia tumba mandó grabar un cilindro circunscrito a una esfera, junto con un epigrama que describía la relación de dos tercios que vincula tanto los respectivos volúmenes como las superficies totales, distinguiendo de esta forma, entre toda su producción científica, precisamente estos resultados como aquellos por los que sentía una mayor predilección.

En relación con los inventos de Arquímedes interesa ahora destacar los que preparó para la defensa de Siracusa frente a los ataques del cónsul romano Marcelo. En (Plutarco, 2006, pág. 415-419) se relata con cierto detalle esta participación, que resultó extraordinariamente exitosa, hasta el punto de hacer desistir a Marcelo de tomar la ciudad por asalto y obligarle a rendirla mediante un ardid después de más de tres años de asedio. Plutarco lo recoge en el siguiente pasaje:

“Y al final, [viendo] Marcelo que los romanos estaban tan asustados que si veían una cuerdecita o un madero que sobresalía un poco del muro daban media vuelta y huían gritando que Arquímedes ponía en marcha otro ingenio contra ellos, renunció a toda clase de batalla y ataque y a partir de entonces hizo depender el asedio del tiempo”.

La utilización de las matemáticas para la construcción y mejora de las catapultas y otros instrumentos de guerra está bien documentada en la tradición griega. En relación concretamente con el problema de la duplicación del cubo Eutocio pone en boca de Eratóstenes las siguientes palabras en (Arquímedes y Eutocio, 2005, pág. 379-380): “La idea [para el cálculo de medias proporcionales] será útil también para quienes quieran hacer mayores las catapultas o los ingenios para lanzar proyectiles. Porque es preciso agrandararlo todo en proporción: los grosores y los tamaños y los orificios y las tuercas y las correas que van insertadas, si se quiere aumentar el proyectil en proporción, y esto no es posible hacerlo sin el descubrimiento de las medias proporcionales”.

Y Arquímedes debió de ser un maestro en este arte pues Plutarco documenta cómo los romanos fueron obligados a retirarse, en los sucesivos intentos que realizaron para tomar Siracusa, a consecuencia de la cantidad de piedras y otros proyectiles de gran tamaño con que eran bombardeados. Así, en (Plutarco, 2006, pág. 416) se afirma: “Cuando los romanos atacaron por ambos flancos, los siracusanos quedaron asombrados y sin decir palabra por causa del miedo, pensando que no tenían manera de enfrentarse a una violencia y un ejército tan grande. Pero Arquímedes, poniendo en funcionamiento sus máquinas, hizo frente a la infantería con proyectiles de todas clases y piedras de enorme magnitud lanzadas con estruendo y velocidad increíbles y como nada les protegía del peso, iban poniendo patas arriba a todos los que pillaban debajo y sembraban el revuelo entre las formaciones”.

Sirvan estas referencias para demostrar el dominio que poseía Arquímedes del problema de la duplicación del cubo, mediante la obtención de medias proporcionales en proporción continua, pero a nosotros en este artículo nos interesa en particular la investigación que realizó sobre la espiral, una nueva curva conocida en la actualidad como espiral de Arquímedes, que le permitió encontrar una solución al problema de la cuadratura del círculo.

La espiral de Arquímedes y el problema de la trisección del ángulo

La espiral fue estudiada por Arquímedes de manera específica y exhaustiva en su tratado titulado *Sobre las líneas espirales*. Nosotros tomaremos como fuente en este artículo la traducción al español de la obra de Arquímedes recogida en (Arquímedes, 2009, pág. 13-71). No obstante, se han revisado cuidadosamente todas las demostraciones de las proposiciones, con objeto de evitar en lo posible la forma retórica de las mismas, y se han incluido referencias precisas de los resultados utilizados por el genio siracusano. Con esta actuación se ha pretendido hacer más accesible al lector contemporáneo esta difícil obra de Arquímedes,

en la parte que hemos tratado en este artículo, pero la notación moderna no debe hacernos caer en el anacronismo de identificar las magnitudes con números reales o de aplicar sin más las reglas del álgebra actual en los cálculos con razones y proporciones. Para evitarlo se hace referencia siempre a los resultados de Euclides que justifican las operaciones entre magnitudes que se efectúan.

En la carta a Dosíteo que precede al compendio Arquímedes se refiere a Conón, del que dice que había fallecido unos años antes y del que alaba su inteligencia poco corriente para las matemáticas y su excelente afición al estudio, señalando que antes de su muerte le había planteado algunos problemas de los que no tenía constancia de que se hubiera logrado algún avance posterior. Entre los problemas que Arquímedes planteó a Conón estarían los teoremas principales incluidos posteriormente en su compendio dedicado a la espiral, pero lo que no queda claro es si esta curva fue concebida inicialmente por Arquímedes o ya era conocida por los estudiosos alejandrinos. Papo parece atribuir la invención de la curva a Conón y, justamente antes de definir la línea en el Libro IV de la *Colección Matemática*, agradece el trabajo de sus predecesores (Pappus, 2010, pág. 119): “el geómetra Conón de Samos, que propuso el teorema principal acerca de la espiral, y Arquímedes, que lo probó utilizando una asombrosa línea de ataque”.

Aunque en (Heath, 1981, Vol. II, pag. 359) y en (Pappus, 2010, pág. 119) se señala que la cita de Papo que acabamos de mencionar podría ser errónea, ya que de acuerdo con la carta de Arquímedes fue este quien le propuso el teorema a Conón y no al revés, nosotros damos credibilidad a la atribución de la autoría de la curva al sabio de Samos y consideramos al menos verosímil que Conón ideara la curva como una alternativa a la cuadratriz de Hipias para solucionar el problema de la trisección del ángulo, dadas las críticas que la construcción de la cuadratriz podría estar recibiendo. En efecto, se sabe por autores posteriores, especialmente por Papo, que algunos matemáticos de la Antigüedad fueron muy críticos con la línea ideada por Hipias, señalando la dificultad de su construcción. En (Pappus, 2010, pág. 132-133) se reseñan dos serias objeciones puestas de manifiesto por Esporo de Nicea (aprox. 240 d. C.-300 d. C.) que, probablemente, aunque fuera de una forma menos explícita, podrían estar ya planteadas en vida de Conón.

Por otra parte en esta época, fuertemente influenciada por la sombra de Platón, estarían muy presentes en los ambientes alejandrinos las severas críticas vertidas por el gran filósofo sobre la persona de Hipias de Élida en los dos Diálogos que llevan su nombre, *Hipias Menor* e *Hipias Mayor*, lo que pudo contribuir también a la revisión de su obra científica con el ánimo de desacreditarla. Aunque esta situación estaba ya superada en la etapa de Proclo, que reconoce en (Proclus, 1970, pág. 52) la notable reputación del elidense como geómetra, probablemente la coyuntura era muy distinta al principio del siglo III a.C., en la época inmediatamente posterior a la muerte de Euclides. En definitiva parece plausible que el descrédito de Hipias, en el marco general de las implacables críticas a los sofistas realizadas por Platón, unido a las dificultades detectadas en la construcción de la cuadratriz, fuera lo que animó a Conón a buscar una línea alternativa, aunque similar en cuanto a su génesis como combinación de dos movimientos y a su idoneidad para dividir un ángulo en tantas partes como se precise. Lo que resulta verdaderamente admirable es que esta curva, manteniendo su similitud con la cuadratriz hasta el final, también fuera de utilidad para cuadrar el círculo.

A continuación vamos a revisar la definición de la espiral y sus principales elementos, siguiendo la nomenclatura establecida por Arquímedes en su tratado que, suponemos, partiría de la que hubiera realizado Conón y que este habría trasladado a aquel en el curso de su perdida relación epistolar.

Definición 1 *Espiral de Arquímedes y principales elementos.*

Si se traza una línea recta⁴ en un plano y, permaneciendo fijo uno de sus extremos y haciéndola girar un número cualquiera de veces con movimiento uniforme, vuelve de nuevo a la posición inicial y, al mismo tiempo que se hace girar la línea, un punto se desplaza por la recta uniformemente partiendo del extremo fijo, el punto describirá una espiral en el plano (curva OCEABD en la Figura 1).

Llámesse principio de la espiral al extremo de la recta que permanece fijo mientras esta se desplaza⁵ (punto O en la Figura 1).

Y principio del giro a la posición de la línea en la que la recta empezó a girar.

Llámesse recta primera a la que recorre en el primer giro el punto que se desplaza por la recta (segmento OA en la Figura 1) y segunda a la que recorre el mismo punto en el segundo giro (segmento AD en la Figura 1) y, de manera semejante, llámense a las otras con nombre homónimo de esos giros.

Llámesse área primera a la comprendida por la espiral descrita en su primer giro y la recta primera (determinada por la espiral OCEA y el segmento OA en la Figura 1), y área segunda a la comprendida por la espiral en su segundo giro y la recta segunda (determinada por la espiral ABD y el segmento AD en la Figura 1), y llámense sucesivamente a las demás.

Y si desde el punto que es principio de la espiral se traza una línea recta, llámese lo de delante de esta recta a lo que está hacia el lado que se produce el giro, y lo de detrás lo que está hacia el otro lado.

Llámesse círculo primero al trazado con centro en el punto que es principio de la espiral y con la recta primera por radio (de centro O y radio OA en la Figura 1) ; círculo segundo al trazado con el mismo centro y con el doble de esa recta por radio (de centro O y radio OD en la Figura 1), y los demás sucesivos a estos de la misma manera.

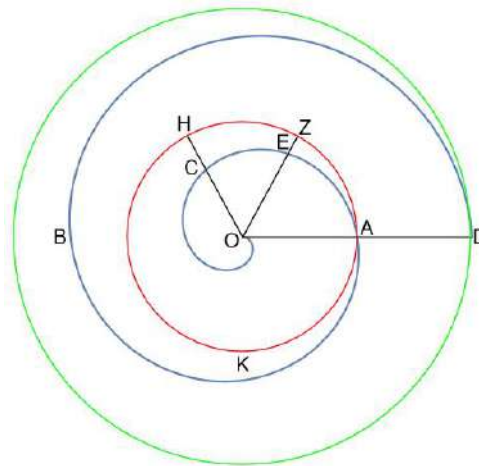


Figura 1. Espiral y sus elementos.

Como vemos en la definición, la espiral se materializa mediante la combinación de dos movimientos uniformes: por un lado el movimiento de rotación de la recta, permaneciendo fijo uno de sus extremos, y por otro el movimiento de traslación del punto sobre la recta, partiendo del principio de la espiral. Precisamente las dos primeras proposiciones del tratado analizan, con el implacable rigor que caracteriza al genio de Siracusa, las propiedades

⁴En realidad es una semirrecta, pues uno de los extremos debe permanecer fijo.

⁵Se refiere al desplazamiento en su movimiento de rotación.

del movimiento rectilíneo uniforme, estableciendo que la razón entre el espacio recorrido y el tiempo empleado por un punto que se desplaza uniformemente por una línea recta es constante durante todo el movimiento, esto es, que la velocidad permanece constante, y deduciendo de este hecho que en los movimientos uniformes también se mantiene inalterable la razón entre los espacios cuando son recorridos en los mismos tiempos. En realidad estos dos resultados, aunque Arquímedes explicita una demostración para ellos, son consecuencia directa de la naturaleza del movimiento uniforme y lógicamente también serían conocidos y utilizados por los matemáticos anteriores a Arquímedes. Además, de la definición de la espiral siguen inmediatamente los tres resultados siguientes, que Arquímedes recoge como las proposiciones 12, 14 y 15 de su tratado, pero que sin duda ninguna serían conocidos por Conón y estarían en la base de su concepción de la curva.

Proposición 1 *Si a la espiral descrita en un giro cualquiera la cortan un número cualquiera de rectas que parten del principio de la espiral y forman unas con otras ángulos iguales, se excederán [las rectas] entre sí en lo mismo [es decir, sus longitudes estarán en progresión aritmética].*

Demostración. Sea una espiral con principio en O y en la que inciden los segmentos OB , OC , OD y OE que forman unos con otros ángulos iguales como se indica en la Figura 2. Hemos de probar que $OE - OD = OD - OC = OC - OB$.

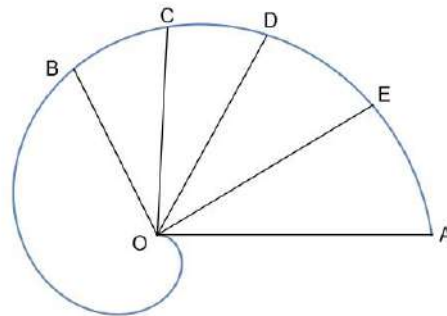


Figura 2. Segmentos cuya longitud varía en progresión aritmética.

En efecto, al ser el movimiento uniforme, el tiempo en que la recta desplazada en sentido circular llega desde OB hasta OC es el mismo que el tiempo en que, al desplazarse el punto que está en la recta, recorre el exceso entre OC y OB , y lo mismo puede decirse de las restantes posiciones, al ser el giro con el mismo ángulo. De este hecho se obtiene el resultado. □

Proposición 2 *Si dos rectas que parten del punto que es principio de la espiral cortan a la espiral trazada en su primer giro y son prolongadas hasta la circunferencia del círculo primero, las rectas que cortan a la espiral guardarán entre sí la misma razón que los arcos de círculo que quedan entre el extremo de la espiral y los extremos de las rectas prolongadas que resultan en la circunferencia, tomados los arcos hacia lo de delante desde el extremo de la espiral.*

Demostración. En las condiciones de la Figura 3 se ha de demostrar que

$$\frac{OE}{OC} = \frac{\text{arco}(AKZ)}{\text{arco}(AKH)}$$

donde los arcos mencionados están tomados sobre el círculo primero.

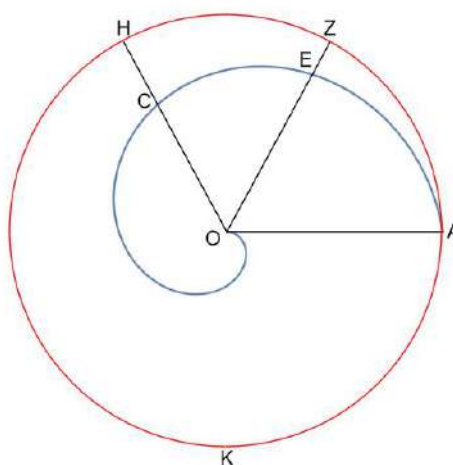


Figura 3. Proporción entre rectas que parten del origen de la espiral y arcos del círculo primero.

En efecto, al desplazarse en círculo el segmento OA está claro que el punto A se ha ido desplazando a velocidad uniforme por la circunferencia del primer círculo, mientras que el punto O , que se desplaza también uniformemente por la recta, recorre la línea OA ⁶. Así el punto A , desplazándose uniformemente por la circunferencia del primer círculo, recorre el arco AKZ en el mismo tiempo que el punto O recorre el segmento OE y también el punto A , desplazándose uniformemente por la circunferencia del primer círculo, recorre el arco AKH en el mismo tiempo que el punto O recorre el segmento OC . Como en los movimientos uniformes se mantiene constante la razón entre los espacios recorridos en los mismos tiempos, de acuerdo con la mencionada proposición 2 del tratado de Arquímedes, se sigue el resultado. \square

Corolario 1

Si rectas que parten del principio de la espiral trazada en su segundo giro inciden en ella, las rectas guardarán entre sí la misma razón que los arcos indicados [tal como se describen en la proposición anterior] tomados conjuntamente con la circunferencia entera del [primer] círculo.

Corolario 2

Si rectas que parten del principio de la espiral trazada en cualquier giro inciden en ella, las rectas guardarán entre sí la misma razón que los arcos indicados [tal como se describen en la proposición anterior] tomados conjuntamente con la circunferencia entera del [primer] círculo [multiplicada] tantas veces como el número del giro menos uno.

La relación de proporcionalidad recogida en la proposición 2, así como las de los corolarios 1 y 2, constituyen la propiedad fundamental o *symptoma* de la curva, esto es, la relación matemática precisa que cumplen los puntos de la curva y solo ellos. Así, aunque lógicamente esto no lo hicieron los griegos pues faltaban casi dos mil años para que se identificaran las curvas con sus ecuaciones, estas propiedades, junto con la representación simbólica de las proporciones y su manipulación algebraica, permiten en la actualidad obtener fácilmente la ecuación de la espiral en coordenadas polares. En efecto, tomando un punto P cualquiera del primer giro de la espiral, cuyas coordenadas polares serán $P(r, \theta)$, y eligiendo también

⁶En sentido estricto los puntos A y O no se desplazan puesto que son fijos. Las palabras de Arquímedes deben entenderse en el sentido de que los que se desplazan son un punto que partiendo de A recorre la circunferencia del primer círculo, y otro que saliendo de O recorre la recta OA .

el punto A final del primer giro de la espiral, de la proposición 2 se sigue que, si llamamos O al principio de la espiral, entonces

$$\frac{OP}{OA} = \frac{\text{arco}(AP)}{c}$$

tomando el arco señalado sobre el primer círculo y siendo c la longitud de la circunferencia de dicho círculo. Sustituyendo queda

$$\frac{r}{OA} = \frac{OA \cdot \theta}{2\pi \cdot OA}$$

y, en consecuencia, se deduce que la ecuación en coordenadas polares del primer giro de la espiral es $r = \frac{OA}{2\pi} \theta = a \cdot \theta$, donde a^7 es una constante positiva que depende únicamente de las velocidades uniformes lineal y angular y $\theta \in [0, 2\pi]$.

Razonando de manera análoga, pero utilizando los corolarios 1 y 2, se obtendría que, si P es un punto perteneciente al giro n -ésimo de la espiral expresado en coordenadas polares $P(r, \theta)$, la ecuación en dichas coordenadas de ese giro de la espiral sería

$$r = a(\theta + 2(n - 1)\pi), \quad \theta \in [0, 2\pi]$$

En definitiva, podemos expresar la espiral en la forma $r = a \cdot \theta$, donde $\theta \geq 0$ y a es una constante positiva que depende únicamente de las velocidades uniformes lineal y angular.

Como hemos señalado, la espiral también fue estudiada en profundidad por Pappo en el Libro IV de la *Colección* (ver (Pappus, 2010, pág. 119-125)), en el marco de una presentación sistemática y organizada de las tres principales curvas *lineales*, esto es, la espiral, la conoide de Nicomedes y la cuadratriz. El maestro alejandrino define la espiral de la siguiente forma:

“Sea un círculo dado, con centro B y radio BA . Asumamos que la línea BA está en movimiento de tal forma que, mientras B permanece fijo, A se mueve uniformemente a lo largo de la circunferencia del círculo y, al mismo tiempo un punto, partiendo de B , se mueve uniformemente en la dirección de A , de tal forma que el tiempo que tarda el punto en recorrer BA es el mismo que tarda el punto A en recorrer la circunferencia del círculo. Ahora, el punto que se mueve a lo largo de la línea BA describirá la línea $BEZA$ durante la rotación, y su punto de partida será el punto B , mientras que el punto de partida de la rotación será BA .

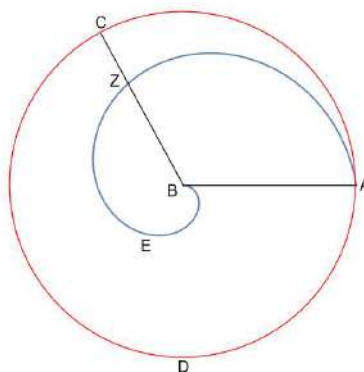


Figura 4. Génesis de la espiral según Pappo.

Esta línea es llamada espiral. Y su principal *symptoma* es de la siguiente forma. Si unimos mediante una línea recta B con un punto cualquiera de la espiral Z , y este segmento BZ lo

⁷Lógicamente, la identificación de la razón con un número real no era posible en la matemática griega.

prolongamos hasta el punto C de la circunferencia, el segmento BA es al segmento BZ como la circunferencia completa es al arco ADC .”

Como podemos ver, aunque las definiciones de Papo y Arquímedes son muy similares, presentan alguna sutil diferencia. En efecto, mientras que en la de Papo el círculo primero se ha fijado *a priori*, en la definición de Arquímedes este círculo se obtiene como una consecuencia de la combinación de movimientos que se describe, es decir, se determina *a posteriori*. Esta diferencia es relevante porque en las curvas cuya generación se realiza mediante una composición de movimientos sincronizados, es esencial conocer la ratio entre los mismos para que la curva quede perfectamente descrita y, por tanto, esté libre de contradicciones conceptuales. Y en el caso de la espiral la ratio entre ambos movimientos es la de la circunferencia respecto al radio, es decir, esencialmente π , y esta razón era desconocida. Este problema es el mismo que aquejaba a la cuadratriz de Hipias y al que nos hemos referido anteriormente, por lo que resulta sorprendente que Papo no lo mencione siquiera en relación con la espiral. De hecho, en la definición de Papo el inconveniente se manifiesta en toda su crudeza, al haber fijado *a priori* el primer círculo, mientras que Arquímedes, más astuto, obvia el problema al usar movimientos sincronizados en una ratio dada de antemano, obteniendo el círculo primero posteriormente.

Sin embargo Papo parece avanzar respecto del genio de Siracusa en la identificación del *symptoma* de la curva como el elemento clave a partir del cual pueden obtenerse las diferentes propiedades de la misma. En esta concepción se pone el énfasis, para la definición de la línea, en la determinación de su propiedad fundamental, relegando la cuestión de la génesis de la curva a una posición secundaria, casi se podría decir que irrelevante puesto que lo que verdaderamente interesa es la relación matemática que deben cumplir los puntos de la curva y sólo ellos.

Aunque probablemente Papo no tenía todavía una conciencia clara de que el *symptoma* de la curva la definía completamente, y por ello habla de su “*symptoma* principal”, sí parece progresar respecto de la concepción arquimediana al destacar de manera más relevante el papel central que juega la propiedad fundamental de la curva en la determinación de sus propiedades. De hecho, en el Libro IV de la *Colección* repite el mismo esquema de presentación para las tres curvas *lineales* mencionadas, en un esfuerzo no disimulado por darles un estatus matemático aceptable que permitiera superar las reticencias que la génesis de las mismas como movimientos sincronizados había generado entre sus predecesores.

El hecho de que los matemáticos griegos definieran algunas curvas utilizando movimientos uniformes no quiere decir que la tradición euclídea considerara esta forma de proceder como parte del discurso matemático. Papo toma conciencia de que, para superar las contradicciones conceptuales inherentes a la generación de las líneas como una combinación de movimientos sincronizados en una ratio desconocida, era necesario concebirlas de otra forma. Con esta finalidad se esfuerza por resaltar la importancia del *symptoma* de la curva, en detrimento de su génesis, y pone el acento en lo que muchos siglos después, expresado en un lenguaje algebraico adecuado, será su ecuación.

Veamos ahora cómo podemos utilizar la espiral para trisecar un ángulo dado. Como hemos señalado, entendemos que la búsqueda de soluciones a este problema fue lo que motivó a Conón para definir la curva. Arquímedes no se refiere en absoluto a este tema en su tratado *Sobre las líneas espirales* y, dado que no parece posible que a un genio de su talla le pasara desapercibido un hecho tan íntimamente ligado a la naturaleza de la curva, debemos concluir que esta aplicación de la espiral le habría sido trasladada por Conón y, por ello, ni siquiera la menciona. En relación con el problema de la trisección del ángulo, Proclo en (**Proclus**, 1970, pág. 212) indica, después de referirse a las soluciones halladas por Hipias y Nicomedes, que “otros han comenzado desde las espirales de Arquímedes y han dividido un ángulo rectilíneo dado en una ratio dada”, afirmación que, aunque no aclara quién aplicó por

primera vez la espiral a este problema clásico, sí parece atestiguar que no fue Arquímedes. Para dividir en tres partes iguales (o en la ratio que se desee pues el procedimiento es el mismo) un ángulo dado \widehat{AOP} se debe situar en O el origen de la espiral, siendo A el punto final de la primera vuelta y P el punto de intersección de la espiral con la recta que limita el ángulo que comienza en OA , todo ello tal como se indica en la Figura 5.

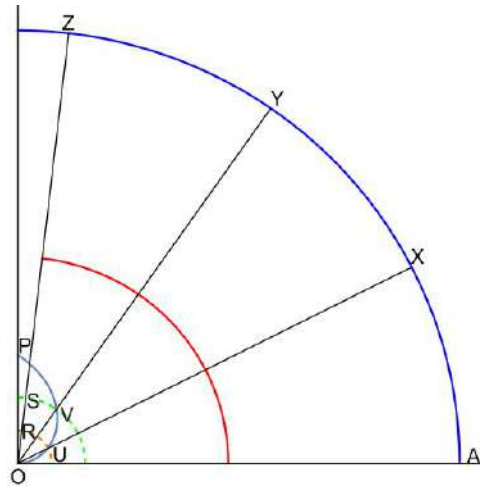


Figura 5. Trisección del ángulo.

Entonces, para trisecar el ángulo \widehat{AOP} se divide el segmento OP en tres partes iguales⁸ mediante los puntos R y S y se trazan las circunferencias concéntricas de centro O y radios OR y OS . Estas circunferencias cortarán a la espiral en los puntos U y V , respectivamente. Obviamente se tiene que

$$\frac{OU}{OP} = \frac{OR}{OP} = \frac{1}{3}$$

por la construcción realizada. Pero por la proposición 2, si llamamos Z , Y y X a los puntos de corte de las rectas OP , OV y OU , respectivamente, con la circunferencia del primer círculo, se verifica que⁹

$$\frac{OU}{OP} = \frac{\text{arco}(AX)}{\text{arco}(AZ)} = \frac{\widehat{AOX}}{\widehat{AOZ}} = \frac{1}{3}$$

Así, las rectas OX y OY dividen el ángulo \widehat{AOP} en tres partes iguales.

Aplicación de la espiral a la cuadratura del círculo

Como sucedió en el caso de la cuadratriz de Hipias, la espiral también pudo ser utilizada para obtener una solución al problema de la cuadratura del círculo. El resultado clave, obtenido por Arquímedes en su tratado *Sobre las líneas espirales* como la proposición 18, no es nada sencillo y para su demostración se requerirá de una serie de proposiciones previas. El teorema permite rectificar la circunferencia, pues lo que se prueba es que la subtangente a la espiral en el punto final de la primera vuelta coincide con la longitud de la circunferencia del primer círculo. Una vez rectificada la circunferencia, si ahora se desea cuadrar un círculo de radio $r = OA$, basta trazar la espiral con principio en O y recta primera OA y su tangente en el punto A . Se verifica entonces que la recta tangente corta a la perpendicular a OA por

⁸Elementos, Prop. VI.9.

⁹La segunda igualdad es consecuencia de Elementos, Prop. VI.33.

O en un punto B de forma que la longitud de OB coincide con la de la circunferencia del primer círculo de la espiral c , es decir, con la de la circunferencia dada de radio $r = OA$.

Una vez obtenido el segmento OB de longitud c construimos el rectángulo de lados OB y OA que determina, en virtud de la proposición 1 del compendio de Arquímedes *Sobre la medida del círculo*, un área doble a la del círculo de partida, por lo que el rectángulo de lados $\frac{OB}{2}$ y OA tiene el mismo área que el círculo inicial. Finalmente, si hallamos la media proporcional entre los lados del rectángulo¹⁰, resultará que el cuadrado construido a partir de ese segmento¹¹ tendrá la misma área que el círculo dado de radio OA .

En el tratado *Sobre las líneas espirales* Arquímedes hace uso, como en otros trabajos anteriores, del que hoy llamamos principio de continuidad de las magnitudes arquimedianas. En el último párrafo de la carta a Dosíteo que precede al compendio señala lo siguiente (Arquímedes, 2009, pág. 18):

“Asumo aquí también el siguiente postulado de los que figuran en los libros publicados anteriormente: en las líneas desiguales y las áreas desiguales, es posible que el exceso en que excede la mayor a la menor, sumado repetidamente a sí mismo, exceda a cualquier magnitud propuesta de las que decimos que guardan razón”.

Este principio se debe a Eudoxo de Cnido, probablemente el matemático más importante vinculado a la Academia de Platón, y aparece recogido en *Elementos* (Euclides, 1991-1994-2008, Libros V-IX, pág. 10) como la definición V.4 de la siguiente forma: “Se dice que guardan razón entre sí las magnitudes que, al multiplicarse, pueden exceder una a otra”.

Sin embargo Arquímedes, como acabamos de ver, lo consideró, más correctamente, un principio o postulado. Arquímedes utiliza este axioma para probar la proposición 4 del compendio en la que demuestra que, dadas dos líneas desiguales, una recta y una circunferencia de círculo, es posible tomar una recta menor que la mayor de las líneas dadas pero mayor que la menor. En la proposición 18 necesitará asumir que, dada una circunferencia y un segmento, si ambas magnitudes son desiguales, siempre podrá encontrarse un segmento mayor que la menor y menor que la mayor.

Para llegar al resultado central a los efectos de resolver el problema de la cuadratura del círculo, es decir, a la mencionada proposición 18, vamos a comenzar revisando las proposiciones 5 a 8 del compendio de Arquímedes que, como se verá enseguida, son muy similares. Se trata de cuatro resultados técnicos que nada tienen que ver con las espirales, pero que resultarán fundamentales posteriormente para obtener el teorema principal. Los cuatro lemas desarrollan construcciones geométricas que utilizan el llamado método de inserción¹². Los griegos denominaban “inserción” a una relación entre figuras que consiste en admitir que dadas dos curvas en general y un punto fijo, siempre existe una recta que pasa por el punto fijo, al que llamaban polo, y tal que sus intersecciones con las curvas dadas determina un segmento de longitud prefijada, denominada *diastema*¹³.

En las proposiciones citadas Arquímedes asume estas construcciones como posibles, pero sin realizarlas expresamente ni dar ninguna explicación sobre las mismas. En (Heath, 1981, Vol. II, pág. 65-66) se señala que, “excepto en la primera de ellas, la solución teórica no puede ser obtenida mediante construcciones con regla y compás, y depende en general de la solución de una ecuación de cuarto grado que puede obtenerse mediante la intersección de una hipérbola equilátera y una parábola. Es bastante posible, no obstante, que estos

¹⁰*Elementos*, Prop. VI.13.

¹¹*Elementos*, Prop. I.46.

¹²Denominado también *neusis* por muchos autores que simplemente trasladan a nuestro alfabeto el correspondiente vocablo griego.

¹³Esta palabra traslada a nuestro alfabeto el correspondiente vocablo griego que se traduce literalmente por “distancia”.

problemas fueran a menudo resueltos en la práctica mediante algún procedimiento mecánico, a saber, colocando una regla, mediante prueba, en la posición de la línea requerida: para ello solo es necesario situar la regla de forma que pase por el polo y, utilizando ese punto como un pivote, girarla adecuadamente hasta que la intersección con las curvas dadas tenga la longitud deseada”. En (Heath, 2002, pág. c-cxxii) se detalla algo más el estudio de estas inserciones y la utilización que Arquímedes hizo de las mismas, así como su aplicación a los problemas de la trisección del ángulo y de la duplicación del cubo.

Aunque la operación inserción se consideraba en la Antigüedad un argumento matemático legítimo y, de hecho, se tiene constancia de que ya fue usada por Hipócrates de Quíos en el siglo V a.C. para la cuadratura de la tercera lúnula¹⁴, el criterio general extendido en la época griega era el de evitar, siempre que fuera posible, su utilización en las construcciones geométricas ya que estas, de acuerdo con la concepción platónica de las matemáticas, debían realizarse empleando como únicos instrumentos de dibujo la regla y el compás. En esta ocasión este criterio no fue seguido por Arquímedes, mostrando una vez más su independencia respecto de los moldes impuestos en *Elementos*. Pero en este caso Arquímedes también infringió otra regla y es la de que cada problema debe resolverse con el menor aparato matemático posible en el sentido de que, si un problema es *plano*, no serían admisibles las soluciones que utilizaran otras curvas *sólidas* o *lineales* mientras que si es *sólido*, solo deberían considerarse las respuestas que se materializaran mediante secciones cónicas. Por ello fue duramente criticado por Papo en la siguiente cita del Libro IV de la *Colección* (Pappus, 2010, pág. 145-146):

“Parece ser un grave error en el que caen los geómetras cuando uno descubre la solución de un problema *plano* mediante el uso de cónicas u otras líneas o lo resuelve mediante un procedimiento extraño [...] como hace Arquímedes cuando en su tratado *Sobre las líneas espirales* asume una inserción de carácter *sólido* con referencia a un círculo; porque es posible sin pedir ayuda a nada *sólido* encontrar la prueba del teorema dado por Arquímedes. Quiero decir en efecto que [es posible] mostrar que la circunferencia del círculo en la primera rotación [de la espiral] es igual a la línea recta dibujada formando ángulos rectos con la recta generadora [de la espiral] hasta [el punto de intersección con] la tangente de la espiral”.

Efectivamente Papo dió una construcción por medio de cónicas (ver (Heath, 2002, pág. cvii-cix)) de la inserción utilizada por Arquímedes en la proposición 8 de su tratado y también se ha comprobado que es posible probar la proposición 18 por métodos puramente *planos*, sin recurrir a una inserción *sólida* (ver (Heath, 1981, Vol. II, pág. 556-561)), tal como Papo menciona en la cita anterior, lo que corrobora la pertinencia de la crítica de este ilustre matemático de la Antigüedad tardía.

No obstante, las críticas de Papo deben ser matizadas teniendo en cuenta que en la etapa del genio de Siracusa era habitual utilizar las inserciones sin mayores comentarios ni justificaciones específicas y que no fue hasta posteriormente¹⁵ que esta operación perdió su condición de mero dispositivo en los diagramas y comenzó a comprenderse la necesidad de construirlas específicamente, indicando en cada caso si eran *planas*, *sólidas* o *lineales* según que se utilizaran para trazarlas solo rectas y circunferencias, secciones cónicas u otras curvas, respectivamente.

Veamos ya los resultados de Arquímedes que, dado su carácter técnico¹⁶, hemos recogido como lemas. El primer lema será fundamental en la demostración de la proposición 4, el

¹⁴Este hecho se recoge en el fragmento relativo a las lúnulas de Hipócrates, de la *Historia de la Matemática* de Eudemo de Rodas, obra desaparecida pero de la que nos ha llegado ese extracto a través de una reproducción contenida en un comentario aristotélico de Simplicio del siglo VI d.C. incluido en (Vera, 1970, pág. 680-685).

¹⁵Según (Zeuthen, 1886) fue Apolonio el primero que advirtió la necesidad de diferenciar entre inserciones *planas* o *sólidas*.

¹⁶El término *técnico* debe entenderse en este contexto en el sentido de que se trata de *enunciados de construcción* y no de *enunciados teóricos*.

lema 2 será necesario para probar el lema 3 y los lemas 3 y 4 jugarán un papel clave en el teorema 1.

Lema 1 Dado un círculo $[ABC]$ y una recta $[FB]$ tangente al círculo [en el punto B] es posible trazar desde el centro $[K]$ del círculo una recta hasta la tangente $[KZ]$ que corta a la circunferencia en T de forma que el segmento TZ [la recta entre la tangente y la circunferencia del círculo] guarde con el radio [del círculo] una razón menor que la que guarda el arco de circunferencia BT [el comprendido entre el punto de contacto de la tangente B y la recta trazada T] con cualquier arco de círculo dado.

Demostración. Sea ABC un círculo de centro K , sea FB la tangente a la circunferencia en B y dese también un arco de circunferencia cualquiera. Consideremos un segmento mayor que el arco dado que se denotará por E .

Por el punto K se traza la recta AKC paralela a FB y elegimos en ella un punto H de forma que si se une H con B el punto de intersección de esta recta con la circunferencia, que llamaremos T , verifique que¹⁷ $TH = E$. Una vez trazada desde el centro la recta KT , prolongamos esta recta hasta cortar a la tangente en el punto Z , todo ello tal como se indica en la Figura 6.

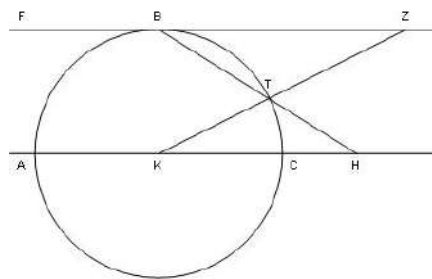


Figura 6. Primer lema técnico.

Se verifica que los triángulos BZT y TKH son semejantes, puesto que son iguales¹⁸, respectivamente, los ángulos \widehat{KTH} y \widehat{BTZ} , \widehat{TKH} y \widehat{BZT} y \widehat{KHT} y \widehat{ZBT} . Por tanto¹⁹

$$\frac{TZ}{TK} = \frac{TB}{TH} < \frac{\text{arco}(TB)}{\text{arco dado}}$$

dado que $TB < \text{arco}(TB)$ y $TH = E$ es mayor que el arco dado²⁰. En consecuencia

$$\frac{TZ}{\text{radio}} < \frac{\text{arco}(TB)}{\text{arco dado}}$$

□

Lema 2 Dado un círculo $[ABC]$ y en el círculo una cuerda $[AC]$ menor que el diámetro, es posible trazar desde el centro del círculo $[K]$ hasta su circunferencia una recta $[KB]$ que corte a la cuerda dada en el círculo [en E] de manera que la recta tomada entre la circunferencia y la cuerda $[EB]$ guarde la razón que se indique con la recta que una B [el extremo de la incidente que está sobre la circunferencia] con un extremo de la cuerda dada en el círculo $[C]$, siempre que la razón dada sea menor que la que guarda la mitad de la cuerda dada en el círculo $[TC]$ con la perpendicular trazada desde el centro hasta ella $[KT]$.

¹⁷Arquímedes asume esta inserción, con polo en B y diastema E , sin mayores precisiones.

¹⁸Elementos, Prop. I.15 y I.29.

¹⁹Elementos Prop. VI.4.

²⁰Elementos, Prop. V.8.

Demostración. Consideremos el círculo ABC con centro en K y sea dada en él la cuerda AC menor que el diámetro y sean dadas las magnitudes Z y H tales que²¹ $\frac{Z}{H} < \frac{TC}{KT}$. Trazamos desde el centro K una paralela a AC y sea CD la perpendicular a KC en C . La recta CD es, por tanto, la tangente a la circunferencia en²² C . Todo ello tal como se indica en la Figura 7.

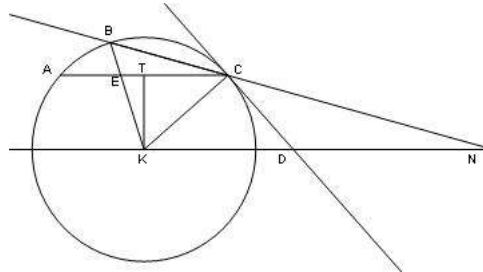


Figura 7. Segundo lema técnico.

Se verifica que los triángulos TCK y KCD son semejantes²³ ya que los ángulos \widehat{CTK} y \widehat{KCD} son rectos, siendo iguales²⁴, además, los ángulos \widehat{TCK} y \widehat{CKD} , por lo que también lo serán \widehat{TKC} y \widehat{KDC} . Así se obtiene que $\frac{TC}{KT} = \frac{KC}{CD}$, lo que implica que $\frac{Z}{H} < \frac{KC}{CD}$.

Dado que $\frac{Z}{H} < \frac{KC}{CD}$, podemos encontrar un segmento $BN > CD$ tal que $\frac{Z}{H} = \frac{KC}{BN}$, tomando B sobre el arco (AC) , N sobre la recta KD y obligando al segmento a pasar por el punto C . Obsérvese que siempre es posible tomar el segmento BN de esta forma ya que, si la magnitud BN fuese muy próxima a CD se tomaría B muy cerca de C , y si tuviera que ser mucho mayor se tomaría B tan próximo a A como se precisara²⁵.

Puesto que $KB = KC = \text{radio}$, sigue que $\frac{KB}{BN} = \frac{Z}{H}$ y, en consecuencia, $\frac{EB}{BC} = \frac{Z}{H}$ ya que los triángulos KBN y EBC son semejantes²⁶ pues son iguales²⁷, respectivamente, los ángulos \widehat{EBN} y \widehat{KBN} , \widehat{BEC} y \widehat{BKN} y \widehat{BCE} y \widehat{BNK} . \square

Lema 3 Con los mismos datos del lema anterior y prolongada la cuerda $[AC]$ en el círculo, es posible trazar desde el centro del círculo $[K]$ hasta la cuerda prolongada una recta $[KE]$ de manera que la parte de la recta que queda entre la circunferencia y la prolongación de la cuerda $[IE]$ guarde la razón que se indique con la que une el extremo de la recta cortada dentro $[del círculo]$ con el extremo de la prolongación $[CI]$, siempre que la razón dada sea mayor que la que guarda la mitad de la cuerda dada en el círculo $[TC]$ con la perpendicular trazada desde el centro hasta ella $[KT]$.

Demostración. Dado que $\frac{Z}{H} > \frac{TC}{KT}$ y que los triángulos TCK y KCD son semejantes, como vimos en el lema anterior, se sigue que $\frac{TC}{KT} = \frac{KC}{CD}$, lo que implica que $\frac{KC}{CD} < \frac{Z}{H}$. Así podemos encontrar un segmento $IN < CD$ tal que $\frac{Z}{H} = \frac{KC}{IN}$, eligiendo el punto I en el arco de circunferencia entre C y F , de forma que IN sea tendente a C . Así, si I se aproxima a C la magnitud IN se aproxima a CD tanto como se quiera, mientras que si I se aproxima a F la magnitud IN se puede hacer tan pequeña como sea necesario²⁸, todo ello tal como se indica en la Figura 8.

²¹Por *Elementos*, Prop. III.3, se sabe que la perpendicular desde el centro del círculo a la cuerda la corta en su punto medio.

²²*Elementos*, Prop. III.18 y III.19.

²³*Elementos*, Prop. VI.4.

²⁴*Elementos*, Prop. I.29 y I.32.

²⁵Aquí aparece de nuevo una inserción con polo en C y *diastema* BN , pero sin mencionarse nada sobre cómo se realizaría la construcción.

²⁶*Elementos*, Prop. VI.4.

²⁷*Elementos*, Prop. I.29.

²⁸Aquí se utiliza de nuevo una inserción, en este caso con polo en C y *diastema* IN .

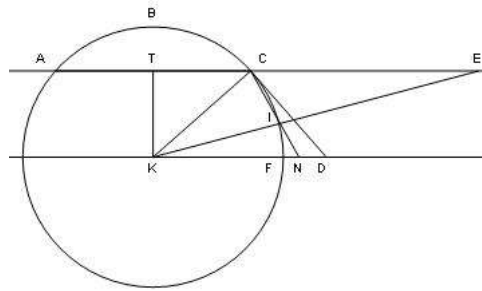


Figura 8. Tercer lema técnico.

Observemos ahora que los triángulos CIE y KIN son semejantes²⁹ puesto que son iguales³⁰, respectivamente, los ángulos \widehat{CIE} y \widehat{KIN} , \widehat{CEI} y \widehat{IKN} y \widehat{ECI} y \widehat{INK} . Así $\frac{KI}{IN} = \frac{IE}{CI}$ y como $KI = KC$ se sigue que

$$\frac{IE}{CI} = \frac{KC}{IN} = \frac{Z}{H}$$

□

Lema 4 Dado un círculo $[ABC]$ y en el círculo una cuerda $[AC]$ menor que un diámetro y otra línea tangente al círculo en el extremo de la cuerda $[C]$, es posible trazar desde el centro del círculo $[K]$ una recta hasta la cuerda $[KE]$ de manera que $[la\ parte]$ de ella entre la circunferencia del círculo y la cuerda $[BE]$ guarde con $[la\ parte]$ tomada de la tangente $[IC]$ la razón que se indique, siempre que dicha razón sea menor que la que guarda la mitad de la cuerda dada en el círculo $[TC]$ con la perpendicular trazada desde el centro hasta ella $[KT]$.

Demostración. Sea ABC el círculo dado y considérese en el círculo una cuerda AC menor que el diámetro. Sea VP la tangente al círculo en el punto C , tal como se indica en la Figura 9. Sean Z y H dos magnitudes tales que $\frac{Z}{H} < \frac{TC}{KT}$.

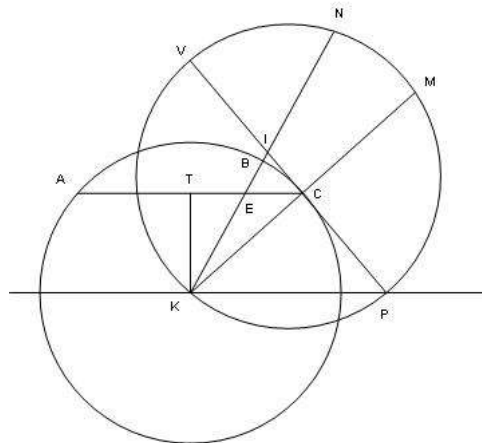


Figura 9. Cuarto lema técnico.

Si se traza KP paralela a AC se tiene que los triángulos TCK y KCP son semejantes, como

²⁹Elementos, Prop. VI.4.

³⁰Elementos, Prop. I.15 y I.29.

se probó en el lema 2. Así

$$\frac{Z}{H} < \frac{TC}{KT} = \frac{KC}{CP}$$

Podemos, por tanto, tomar un segmento $CV > CP$ tal que $\frac{Z}{H} = \frac{KC}{CV}$. Dado que los tres puntos V , K y P no están alineados por la construcción realizada, trazamos la circunferencia que pasa por ellos³¹ VKP . Puesto que $CV > CP$ y KC y VP son perpendiculares, cabe que pongamos otra línea $IN = MC$ tendente a K , que cortará a la circunferencia del círculo ABC en un punto B y a la tangente en C en un punto³² I .

Entonces se tiene, por un lado, que $VI \cdot IP = KI \cdot IN$ pues las cuerdas VP y KN se cortan en³³ I y, por otro, que $KE \cdot IP = KI \cdot CP$ ya que, al ser semejantes los triángulos EKI y KPI sigue³⁴ que $\frac{KE}{KI} = \frac{CP}{IP}$.

Así, de las dos igualdades anteriores, se obtiene que

$$\frac{KE \cdot IP}{VI \cdot IP} = \frac{KI \cdot CP}{KI \cdot IN}$$

lo que implica que $\frac{KE}{VI} = \frac{CP}{IN}$ y, en consecuencia que $\frac{KE}{VI} = \frac{CP}{MC}$ ya que $IN = MC$ por construcción.

Razonando de manera similar con las cuerdas KM y VP que se cortan en el punto C se obtiene que $KC \cdot MC = CV \cdot CP$ y así

$$\frac{CP}{MC} = \frac{KC}{CV} = \frac{KE}{VI}$$

Pero

$$\frac{KC}{CV} = \frac{KE}{VI} = \frac{KB - BE}{CV - IC} = \frac{KC - BE}{CV - IC}$$

lo que implica que³⁵ $\frac{KC}{CV} = \frac{BE}{IC}$ y, por tanto, $\frac{BE}{IC} = \frac{Z}{H}$. □

Después de estos resultados técnicos que, como vemos, no tienen nada que ver propiamente con la espiral, Arquímedes prueba tres propiedades de la tangente a la espiral preparatorias del resultado principal. Como se señala en (Arquímedes, 2009, pág. 12) “este tratado es el primer estudio a fondo sobre tangentes a una curva diferente del círculo”; poco tiempo después Apolonio hizo lo propio con las tangentes a las cónicas en su gran obra dedicada a estas curvas.

La tangente a la circunferencia había sido definida por Euclides de la siguiente forma³⁶: “Se dice que es tangente a un círculo la recta que, tocando el círculo y siendo prolongada, no corta el círculo”. Obviamente esta definición, entendida literalmente, no es de aplicación a la espiral ya que, si se prolonga suficientemente la recta que “toca” a la espiral en un punto, esta terminará cortándola en otros muchos. No obstante, la definición sigue siendo totalmente válida si nos restringimos a un entorno del punto de tangencia y entendemos que es por este motivo por el que Arquímedes, tan puntilloso la mayoría de las veces, no consideró necesario dar una definición precisa de la tangente a la espiral. Así la tangente a la espiral en un punto sería para Arquímedes la recta que la “toca” en dicho punto, esto es, que entra en contacto con ella en el punto de tangencia, pero sin atravesarla, es decir, “dejándola a un lado”.

³¹Elementos, Prop. IV.5.

³²Aquí aparece de nuevo una inserción, en este caso con polo en K y *diastema* MC . Esta es la inserción que fue criticada por Papo en la *Colección*.

³³Elementos, Prop. III.35.

³⁴Elementos, Prop. VI.2.

³⁵Elementos, Prop. V.19.

³⁶Elementos, Def. III.2.

Aunque Arquímedes da por supuesto que la tangente a la espiral en cada punto existe, sí considera necesario probar que si una recta es tangente a la espiral, entonces el punto de tangencia es único. La prueba muestra además que la espiral siempre es cóncava hacia el origen, hecho que será posteriormente utilizado en el teorema principal para garantizar que cualquier segmento que una el origen de la espiral con la tangente a esta en el punto final de la primera vuelta ha de cortar previamente a la propia espiral.

Proposición 3 *Si una recta es tangente a la espiral [“toca” a la espiral], lo será en un solo punto [la “tocará” en un único punto].*

Demostración. Sea $OCTHA$ una espiral con principio en O y sea OA el principio del giro. Sea tangente a la espiral una recta EZ y supongamos que toca a la espiral en dos puntos C y H . Tracemos OC y OH y córtese por la mitad el ángulo comprendido entre³⁷ OH y OC , siendo T el punto en que corta a la espiral la recta que divide el ángulo por la mitad, todo ello tal como se indica en la Figura 10.

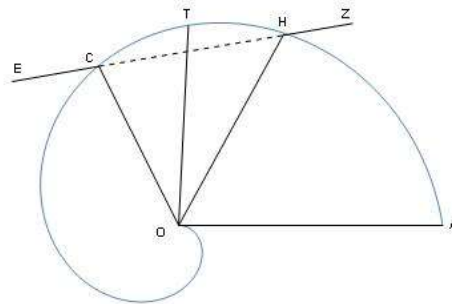


Figura 10. Recta tangente a la espiral.

Entonces OH excede a OT en lo mismo que OT excede a OC , en virtud de la proposición 1 puesto que contienen ángulos iguales. Así $OH + OC = 2 \cdot OT$ y, por tanto, el punto T debe ser exterior al triángulo³⁸ OCH . Por tanto es evidente que el punto en que la recta OT corta a CH está entre O y T . Luego la recta EZ corta a la espiral, ya que uno de los puntos del segmento determinado por los puntos C y H es interior a la curva, lo que contradice el hecho de que EZ sea tangente³⁹. \square

Proposición 4 *Si una línea recta es tangente a la espiral trazada en su primer giro y desde el punto de tangencia se traza una línea recta hasta el punto que es principio de la espiral, los ángulos que forma la tangente con la línea trazada son desiguales, siendo obtuso el que está hacia lo de delante y agudo el que está hacia lo de detrás.*

Demostración. Sea $OBCDA$ una espiral trazada en su primer giro, siendo O el principio de la espiral y la recta OA el principio del giro. Sea AKH el círculo primero y sea ECZ la tangente a la espiral en C y desde C hasta O trácese CO , todo ello tal como se indica en la Figura 11.

Se ha de demostrar que el ángulo \widehat{OCZ} es un ángulo obtuso. Para ello trácese un círculo CTN con centro en O y radio OC . Por fuerza el arco de este círculo que mira hacia delante [CT] cae dentro de la espiral, mientras que el que mira hacia detrás cae fuera⁴⁰.

³⁷Elementos, Prop. I.8.

³⁸Arquímedes utiliza aquí, sin mayor comentario, que si un ángulo de un triángulo es cortado por la mitad, la suma de los lados que lo forman es mayor que el doble de la bisectriz.

³⁹Obsérvese que la prueba muestra que la espiral es cóncava respecto del origen en cada punto.

⁴⁰Obsérvese que de las rectas que inciden en la espiral partiendo de O , las que inciden en lo de delante desde C son mayores que OC y las que inciden en lo de detrás, menores.

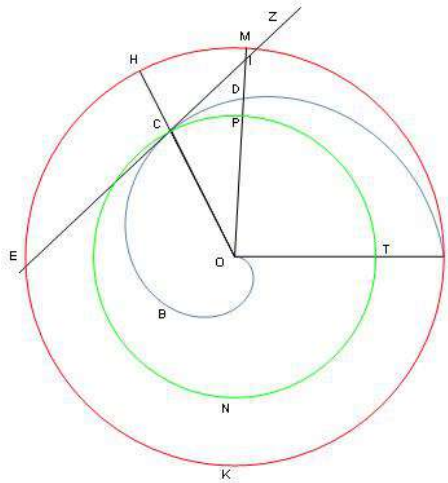


Figura 11. Ángulos determinados por la tangente.

Que el ángulo \widehat{OCZ} no es agudo es evidente, puesto que es mayor o igual que el comprendido entre OC y el arco (CT) y este ya es mayor o igual a un recto. Precisamente el ángulo será recto si EZ es la tangente a la circunferencia CTN en⁴¹ C . Supóngase pues que estamos en ese caso y que ECZ es tangente a la circunferencia CTN . Entonces por el lema 1, dado el arco (CNT) es posible trazar una recta OI desde O hasta la tangente, que cortará a la circunferencia CTN en P y a la espiral en D , de modo que la recta que quede entre la tangente y la circunferencia $[PI]$ guarde con el radio OP de dicha circunferencia una razón menor que la que guarda el arco que queda entre el punto de tangencia C y el punto P con el arco (CNT) . Así

$$\frac{PI}{OP} < \frac{\text{arco}(CP)}{\text{arco}(CNT)}$$

y, por tanto,

$$\frac{PI}{OP} + \frac{OP}{OP} < \frac{\text{arco}(CP)}{\text{arco}(CNT)} + \frac{\text{arco}(CNT)}{\text{arco}(CNT)}$$

Así

$$\frac{OI}{OP} < \frac{\text{arco}(PCNT)}{\text{arco}(CNT)}$$

y, en consecuencia,

$$\frac{OI}{OP} < \frac{\text{arco}(AKHM)}{\text{arco}(AKH)}$$

toda vez que las circunferencias CTN y $AKHMA$ son concéntricas y los arcos considerados en cada una de ellas corresponden a los mismos ángulos centrales⁴².

Pero de acuerdo con la propiedad fundamental de la espiral recogida en la proposición 2,

$$\frac{\text{arco}(AKHM)}{\text{arco}(AKH)} = \frac{OD}{OC} = \frac{OD}{OP}$$

y, por tanto, $\frac{OI}{OP} < \frac{OD}{OP}$, lo cual es imposible pues $OI > OD$ ya que, como la espiral es cóncava hacia el origen en cualquier punto, para ir desde O hasta el punto I situado sobre la tangente a la espiral en C , necesariamente hay que cortarla de acuerdo con la construcción realizada.

⁴¹Elementos, Prop. III.16, Porisma.

⁴²Elementos, Prop. VI.33

Por tanto ECZ no es tangente a la circunferencia CTN y, en consecuencia, el ángulo \widehat{OCZ} es obtuso y el restante \widehat{OCE} será agudo como se quería probar. \square

La prueba obviamente puede replicarse para la tangente a la espiral en cualquier giro, por lo que se tiene el siguiente corolario.

Corolario 3 *Y efectivamente ocurrirá lo mismo si la recta es tangente a la espiral trazada en su segundo giro [o en cualquier otro].*

Ahora ya estamos en condiciones de demostrar el resultado fundamental que permitirá rectificar la circunferencia. Arquímedes hace la demostración utilizando el método de exhaustión, un procedimiento de prueba en el que llegó a ser un verdadero maestro y cuyo máximo exponente de perfección es quizás el teorema que veremos a continuación. La técnica se basa en el conocido principio de exhaustión, que no es otro que la proposición X.1 de *Elementos*: “Dadas dos magnitudes desiguales, si de la mayor se quita una magnitud mayor [o igual] que su mitad, y de la que queda una magnitud mayor [o igual] que su mitad y así sucesivamente, quedará una magnitud que será menor que la magnitud menor dada”. Este resultado está íntimamente conectado con el principio de continuidad de las magnitudes arquimedianas y también se atribuye a Eudoxo de Cnido. La importancia de ambos radica en que permiten obtener magnitudes tan grandes o tan pequeñas como se quiera, evitando las confusas elucubraciones de corte infinitesimal que habían conducido, entre otras paradojas, a las aporías de Zenón de Elea o a las “demostraciones” de la cuadratura del círculo debidas a Antifón de Atenas y a Bryson de Heraclea (ver (González-Urbaneja, 2008, pág. 46-50)).

Los principios de continuidad y de exhaustión hacen innecesaria la utilización de cantidades infinitamente pequeñas o infinitamente grandes, transformando anteriores argumentos imprecisos y vagos en razonamientos rigurosos que anticipan en más de dos mil años la noción de límite del cálculo infinitesimal que no apareció hasta principios del siglo XIX, de la mano de Cauchy y Bolzano, y que no tomó su forma actual hasta los trabajos de Weierstrass en el último tercio de dicho siglo, si bien no puede obviarse que los griegos no identificaban las magnitudes con números reales como se hace en la actualidad. De esta forma la matemática griega consiguió eludir la presencia del infinito actual, proscrito por Aristóteles, sin renunciar a la potencia de técnicas que en la actualidad englobaríamos en el área del análisis matemático. La íntima conexión entre el postulado de continuidad, el principio de exhaustión y los métodos infinitesimales se muestra claramente en los trabajos de Arquímedes para la determinación de longitudes, áreas y volúmenes, lo que ha permitido señalar a este como un brillante precursor de los procedimientos propios del cálculo integral.

El método de demostración por exhaustión, cuyo nombre fue introducido por primera vez por el matemático belga Gregorius Saint Vincent (1584-1667) en su obra *Opus geometricum quadrature circuli et sectionum conii*, consiste en una doble reducción al absurdo de manera que, para demostrar que dos magnitudes son iguales o que dos figuras son equivalentes, basta probar que una de ellas no puede ser ni mayor ni menor que la otra. Aun cuando es un procedimiento de prueba de un rigor lógico impecable tiene el inconveniente, nada despreciable, de que no da ninguna pista que ilumine el camino que ha seguido el investigador para intuir el resultado que posteriormente se ha probado. Además, al tener que realizar una doble reducción al absurdo, el proceso suele resultar bastante tedioso y difícil de seguir. Por este motivo los matemáticos de los siglos XVI y XVII, aunque reconocían y alababan la perfección de los trabajos de Arquímedes, tendían a eludir la penosidad de las demostraciones por exhaustión y las sustituían por razonamientos de corte infinitesimal habitualmente mucho menos rigurosos.

Veamos ya la proposición 18 del tratado de Arquímedes que permite rectificar la circunferencia y, en consecuencia, cuadrar el círculo.

Teorema 1 *Si OA es la recta primera, A el final del primer giro y si se traza la tangente*

a la espiral en A, la línea recta OB perpendicular a OA desde el principio de la espiral O cortará a dicha tangente en un punto B y la longitud de OB [es decir, la subtangente] será igual a la de la circunferencia del primer círculo.

Demostración. Sea AKC el primer círculo de la espiral. Por la proposición anterior los ángulos que forma OA con la tangente en A son desiguales, siendo agudo el ángulo \widehat{OAB} puesto que es el que está hacia lo de detrás, es decir, del lado contrario hacia donde se produce el giro. Por tanto la recta tangente AC no es paralela a OB y cortará a esta en algún punto B que estará, respecto de OA, en el lado señalado en la Figura 12.

Sea c la longitud de la circunferencia del primer círculo. Hemos de probar que $OB = c$. Supongamos en primer lugar que $OB > c$ y elijamos⁴³ un punto D en OB tal que $c < OD < OB$.

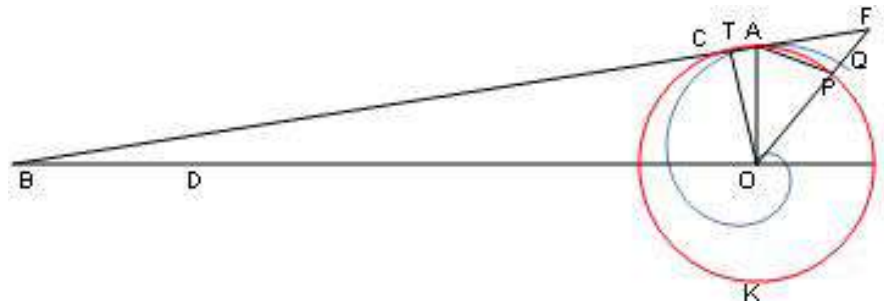


Figura 12. Primer supuesto.

Tenemos, por tanto, un círculo AKC, una cuerda AC de ese círculo menor que un diámetro y $\frac{OA}{OD} > \frac{OA}{OB}$, pues $OD < OB$. Tomamos ahora la perpendicular desde O hasta AC que cortará a la cuerda en T, punto medio del segmento⁴⁴ AC. Se verifica que los triángulos AOB y AOT son semejantes pues el ángulo en el vértice A es común y los ángulos \widehat{AOB} y \widehat{ATO} son rectos⁴⁵. Por tanto se tiene que⁴⁶

$$\frac{OA}{OD} > \frac{OA}{OB} = \frac{AT}{OT}$$

Estamos ahora en condiciones de aplicar el lema 3 para obtener que es posible prolongar la cuerda AC hasta un punto F de manera que la recta que une O con F corte a la circunferencia del primer círculo en un punto P y a la espiral en su segundo giro en un punto Q de forma que

$$\frac{PF}{AP} = \frac{OA}{OD}$$

Ahora bien, como $OA = OP$ se tiene que

$$\frac{PF}{OP} = \frac{AP}{OD} < \frac{\text{arco}(AP)}{c}$$

ya que $AP < \text{arco}(AP)$ y $c < OD$.

Por tanto

$$\frac{OF}{OP} = \frac{OP}{OP} + \frac{PF}{OP} < \frac{c}{c} + \frac{\text{arco}(AP)}{c} = \frac{c + \text{arco}(AP)}{c}$$

⁴³Esta elección siempre será posible en virtud del postulado de continuidad de las magnitudes arquimedianas. Como hemos señalado Arquímedes prueba expresamente este resultado en la proposición 4 del tratado.

⁴⁴Elementos, Prop. III.3.

⁴⁵Elementos, Prop. I.32.

⁴⁶Elementos, Prop. VI.4.

Pero como la espiral en su segundo giro va por fuera del primer círculo se tiene que el arco (AP) de esta circunferencia es menor que el arco (AQ) sobre la espiral y, en virtud del corolario 1, se sigue que

$$\frac{OF}{OP} < \frac{c + \text{arco}(AP)}{c} < \frac{c + \text{arco}(AQ)}{c} = \frac{OQ}{OA}$$

Pero como $OP = OA$, se obtiene finalmente que $OF < OQ$, lo cual es manifiestamente imposible pues el punto F está sobre la tangente a la espiral en A y, al ser esta cóncava hacia el origen en cada punto, el segmento que une O con F cortará necesariamente a la espiral.

Supongamos ahora que $OB < c$ y sea OE medido sobre OB tal que⁴⁷ $OB < OE < c$. Se verifica entonces que $\frac{OA}{OE} < \frac{OA}{OB}$. Razonando como en el caso anterior, dado que los triángulos AOB y AOT son semejantes, donde T es el punto medio de la cuerda AC determinada en el primer círculo por la tangente a la espiral en A , se tiene que

$$\frac{OA}{OE} < \frac{OA}{OB} = \frac{AT}{OT}$$

Estamos ahora en condiciones de aplicar el lema 4, considerando la cuerda AC del primer círculo y la tangente a su circunferencia en A , que será la recta AM , de forma que es posible trazar una recta desde O que cortará a la espiral en Q , a la cuerda en F , a la circunferencia del primer círculo en P y a la tangente AM en el punto G , todo ello tal como se indica en la Figura 13, de forma que

$$\frac{FP}{AG} = \frac{OA}{OE}$$

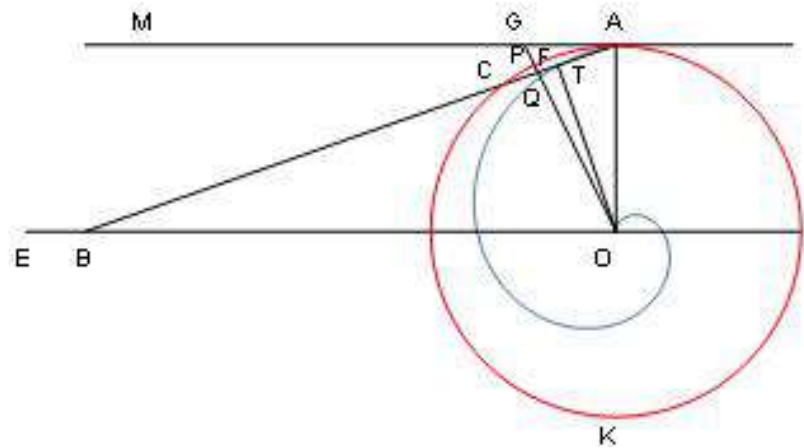


Figura 13. Segundo supuesto.

Entonces se tiene que⁴⁸

$$\frac{FP}{OA} = \frac{AG}{OE}$$

y como $OA = OP$, $AG > \text{arco}(AP)$ ⁴⁹ y $OE < c$ se sigue que

$$\frac{FP}{OP} = \frac{AG}{OE} > \frac{\text{arco}(AP)}{c}$$

⁴⁷La elección del segmento OE siempre será posible en virtud de la proposición 4 del compendio.

⁴⁸*Elementos*, Prop. VI.16.

⁴⁹Arquímedes utiliza aquí que cualquier arco de círculo menor que un cuadrante es menor que la porción de la tangente que va desde el extremo que toca el arco hasta el punto en que corta a la tangente la prolongación del radio.

Por tanto

$$\frac{OF}{OP} = \frac{OP - FP}{OP} = \frac{OP}{OP} - \frac{FP}{OP} < \frac{c}{c} - \frac{\arcsin(AP)}{c} = \frac{\arcsin(AKP)}{c} = \frac{OQ}{OA}$$

donde la última igualdad se ha obtenido por aplicación de la proposición 2 a las rectas OQ y OA , considerando los puntos A y Q del primer giro de la espiral. Se obtiene así que $\frac{OF}{OP} < \frac{OQ}{OA}$ y como $OP = OA$ se sigue que $OF < OQ$ lo cual es obviamente imposible pues el punto F está sobre la tangente a la espiral en A y, al ser la espiral cóncava en dicho punto hacia el origen, para ir desde O hasta F necesariamente hay que cortarla.

Así OB no puede ser ni mayor ni menor que c , de donde se deduce que es igual. \square

A lo largo de la historia este resultado ha sido visto con recelo por muchos matemáticos. En **(Rey Pastor y Babini, 1984, pág. 93)** se señala que el tratado *Sobre las líneas espirales* es uno de los más difíciles de Arquímedes “por sus largas demostraciones, la concisión de su texto, que subentiende muchas relaciones intermedias, y la aplicación de expresiones en forma geométrica de la suma de términos en progresión aritmética o de sus cuadrados; todo hace su lectura nada fácil, circunstancia que explica que en los siglos XVII y XVIII hubo matemáticos que desistieron de entender este escrito y hasta quien, frente a sus dificultades, prefirió considerar erróneos sus resultados”. Incluso en el siglo XIX el eminente historiador de las matemáticas Guglielmo Libri escribía **(Heath, 1981, Vol. II, pág. 556)**: “Después de veinte siglos de trabajos y descubrimientos, las inteligencias más poderosas siguen chocando con la difícil síntesis del tratado *Sobre las espirales* de Arquímedes”.

Según se señala en **(Heath, 1981, Vol. II, pág. 556)** el origen de esta concepción podría estar en la siguiente cita de Fontanelle en la *Historia de la Academia de Ciencias* del año 1704: “Son tan largos y tan difíciles de entender [los teoremas del compendio *Sobre las líneas espirales*] que, como pudimos ver en el prefacio del *Análisis de los infinitamente pequeños*, el señor Bouillard admitió que nunca los había entendido bien y que Vieta era injustamente sospechoso de paralogismo porque tampoco había podido entenderlos claramente. Pero todas las pruebas que se pueden dar de su dificultad y su oscuridad incrementan la gloria de Arquímedes; porque qué vigor de espíritu, qué cantidad de puntos de vista diferentes, qué constancia en el trabajo no sería necesaria para desarrollar y ordenar un razonamiento que algunos de los más grandes geómetras no pueden seguir”.

Efectivamente en el prefacio del libro del Marqués de l'Hôpital *Análisis de los infinitamente pequeños para el estudio de las líneas curvas*, editado por primera vez en 1696 y por tanto plenamente de actualidad cuando Fontanelle realiza su comentario, se recoge el siguiente párrafo **(Marqués-De-L'Hôpital, 1998, pág. 16)**: “Lo que tenemos de los antiguos sobre estas materias [el estudio de las curvas], principalmente de Arquímedes, es indudablemente digno de admiración. Pero además de que sólo trataron unas pocas curvas y de que las trataron ligeramente, casi en todos lados se refieren a proposiciones particulares y sin orden, que no permiten percibir ningún método regular y coherente. Sin embargo, no se les puede hacer un legítimo reproche; necesitaron una gran cantidad de talento para penetrar a través de tanta oscuridad y para ser los primeros en entrar a regiones totalmente desconocidas. Si no llegaron más lejos, si marcharon por largos trayectos, por lo menos, a pesar de lo que diga Vieta, no se extraviaron”. Como vemos L'Hôpital defiende la corrección de las pruebas de Arquímedes y contradice de pasada a Vieta dando a entender que este habría considerado erróneos determinados resultados. Según se señala en **(Heath, 1981, Vol. II, pág. 556-557)** la cita de Vieta debe tratarse de un malentendido, pues hay constancia de que este ilustre matemático hizo un estudio específico del tratado de Arquímedes *Sobre las líneas espirales* y tuvo la mayor admiración por ese trabajo en concreto. Y en general, ninguno de los matemáticos realmente importantes de los siglos XVI o XVII que estudió con detalle la obra de Arquímedes ha expresado jamás una opinión desfavorable sobre esta, ni ha apreciado nunca esa “oscuridad” del genio de Siracusa a la que se refiere Fontanelle.

De lo que sí se quejaron los grandes matemáticos que estudiaron en profundidad la obra de Arquímedes fue de la ocultación por parte de este, que ellos entendían deliberada, de los métodos heurísticos que le habían permitido vislumbrar los extraordinarios descubrimientos que luego demostraba de manera impecable por el método de exhaución. Como se ha señalado anteriormente, el método de exhaución es un procedimiento de demostración que no da ninguna pista sobre la técnica de indagación seguida por el investigador para llegar a la convicción de que el resultado posteriormente demostrado era efectivamente cierto.

Aunque Arquímedes tenía un método de investigación, y lejos de ocultarlo se lo había trasladado a Eratóstenes en su trabajo *El Método*, los matemáticos de los siglos XVI y XVII lo desconocían pues el tratado se había perdido y no fue recuperado sino hasta principios del siglo XX. Esto explica las siguientes palabras de Wallis, que tuvo a su cuidado una edición de las Obras de Arquímedes publicada en Oxford en 1676 (**González-Urbaneja**, 1992, pág. 53): “Al parecer Arquímedes ocultó adrede las huellas de su investigación, como si hubiera sepultado para la posteridad el secreto de su método de investigación”. Hoy sabemos que esto no es cierto. Arquímedes no solo no ocultó su procedimiento de investigación, sino que lo dio a conocer con la convicción de su utilidad práctica para todos los que quisieran emplearlo. Así, en el prefacio de su obra *El Método*, escribe a Eratóstenes lo siguiente (**Arquímedes**, 2009, pág. 274-275):

“Probé a escribirte y a definir en este mismo libro la peculiaridad de cierto método mediante el cual, cuando te lo haya proporcionado, te será posible disponer de recursos para poder investigar algunos asuntos matemáticos por medio de la mecánica. Estoy persuadido de que esto es no menos útil también para la demostración de estos mismos teoremas, pues algunas de las cosas que primero se me mostraron por medio de la mecánica luego las demostré por medio de la geometría, porque la investigación por este método carece de demostración; y es más fácil avanzar en la demostración tras haber alcanzado por anticipado cierto conocimiento de las cuestiones gracias a este método que hacer la investigación sin conocer nada”. Y un poco más adelante, apostillando estas ideas, añade: “Al redactar el método he pretendido sacarlo a la luz a la vez porque previamente había hablado en favor de él⁵⁰ –no fuera que les pareciera a algunos que había estado hablando palabras vanas– y al mismo tiempo porque estaba convencido de que arrojaría no pequeña utilidad para la matemática. Pues sostengo que algunos [matemáticos], bien de los presentes, bien de los venideros, mediante el método que doy a conocer descubrirán incluso otros teoremas que aún no se me han ocurrido”.

Desafortunadamente el teorema que acabamos de probar no está incluido en *El Método*, de manera que no podemos conocer a ciencia cierta cual fue el procedimiento heurístico seguido por Arquímedes para llegar a la conclusión que luego demuestra impecablemente por exhaución, esto es, que la subtangente a la espiral en el punto final de la primera vuelta es igual a la longitud de la circunferencia del primer círculo. En (**Heath**, 1981, pág. 557-558) se especula acerca de esto y se conjetura que Arquímedes debió considerar la dirección instantánea del movimiento del punto P que va describiendo la espiral, usando para este propósito el paralelogramo de velocidades. En todo caso este teorema es, sin duda, uno de los ejemplos más representativos del extraordinario ingenio de Arquímedes para la investigación matemática y de su pericia para la demostración rigurosa de los resultados.

⁵⁰En el prefacio de su obra *Sobre la cuadratura del círculo* había indicado a Dosíteo (**Arquímedes**, 2009, pág. 161) que los teoremas primero los había descubierto por el “método mecánico” y después los había demostrado por el “método geométrico”.

Conclusiones

La espiral de Arquímedes es una de las curvas más interesantes definidas por los matemáticos griegos y tuvo muchas y muy interesantes aplicaciones. En relación con los tres problemas clásicos vino a dar nuevas respuestas a los problemas de la cuadratura del círculo y de la trisección del ángulo, alternativas a las obtenidas con anterioridad utilizando la cuadratriz de Hipias, curva con la que guarda un gran paralelismo. En efecto, ambas se definieron de forma cinemática, mediante una combinación de movimientos uniformes sincronizados, uno de rotación y otro de traslación, las dos fueron ideadas específicamente para resolver el problema de la trisección del ángulo y, posteriormente, también resultaron útiles para abordar el enigma de la cuadratura del círculo.

En el artículo se atribuye a Conón de Samos la invención de esta curva, con objeto de dar una respuesta al problema de la trisección del ángulo diferente a la proporcionada por la cuadratriz, dadas las críticas que la génesis de esta curva podría estar recibiendo en los ambientes alejandrinos. En este sentido se hace notar que, a principios del siglo III a.C., la influencia de Platón en la matemática que se desarrollaba en el Museo de Alejandría debía ser muy fuerte, lo que probablemente contribuyó a desprestigiar el trabajo de un sofista como Hipias y a animar al círculo de Euclides a buscar alternativas a la curva ideada por este. La autoría de Conón sobre la espiral es mencionada de pasada por Papo en la *Colección*, lo que viene a apoyar esta hipótesis, pero otro hecho significativo es que Arquímedes ni siquiera menciona este resultado en su tratado *Sobre las líneas espirales*, lo que refuerza la idea de que esa cuestión debía ser conocida con anterioridad. En esta misma línea se pronuncia Knorr en su clásico trabajo (Knorr, 1978).

El compendio de Arquímedes *Sobre las líneas espirales* es una de las referencias fundamentales de la matemática antigua, un texto de una gran complejidad técnica magistralmente expuesto por el sabio siracusano. Aun cuando el resultado principal hacia el que se orienta todo el libro es el cálculo del área encerrada por la espiral, nosotros en este artículo ponemos el foco en la proposición 18 del tratado, que permite rectificar la circunferencia y, por tanto, resolver el problema de la cuadratura del círculo. El resultado es una obra maestra de ingeniería matemática cuyo análisis nos permite hacer un recorrido por las técnicas utilizadas en la época para la realización de los diagramas. En este sentido se apunta el rol central que jugó la *neusis* en las construcciones geométricas que realiza Arquímedes en esta obra, poniendo el énfasis en el carácter práctico que para él tenía, como mero dispositivo en los dibujos, y en su despreocupación por las implicaciones teóricas del procedimiento. La utilización de la inserción jugó un papel fundamental en la matemática griega, pero es una técnica ajena a la geometría euclídea siempre remisa al empleo de procedimientos extraños en los diagramas. Este compendio de Arquímedes, probablemente más que ningún otro, supuso una ruptura con la tradición y la norma académica imperante en su época. A pesar de esta singularidad, el genio de Arquímedes fue inmediatamente reconocido por sus contemporáneos lo que favoreció que, tanto estos como sus sucesores, aceptaran en el seno de la matemática procedimientos de dudosa corrección platónica.

En el artículo también se revisa la forma en la que Arquímedes utiliza el principio de continuidad de las magnitudes arquimedianas y la técnica de demostración por exhaustión, dos nociones introducidas por Eudoxo de Cnido, pero que en manos del genio de Siracusa alcanzaron sus más altas cotas de virtuosismo. En este aspecto Arquímedes sí es netamente platónico y siempre tuvo clara la necesidad de probar los resultados de forma rigurosa y precisa o, usando sus propias palabras, por el “método geométrico”. Y ello a pesar de que poseía un depurado método de investigación, que él llamaba “mecánico” y que aparece recogido en su tratado *El Método*, que le permitía anticipar de manera informal los resultados. Pero Arquímedes era plenamente consciente de que esos razonamientos no podían en modo alguno sustituir a la demostración propiamente dicha. Esta actitud, absolutamente conforme

con el quehacer matemático actual, contrasta vivamente con la de los grandes geómetras del siglo XVII que, aunque recuperaron su legado y eran profundos admiradores de su obra, tendían a evitar la penosidad de los rigurosos razonamientos arquimedianos.

Finalmente, en este trabajo se incide en la evolución que se va produciendo en los métodos empleados para definir las curvas, procedimientos en los que la génesis de las mismas va perdiendo importancia frente a la identificación de su *symptoma* o propiedad fundamental, lo que muchos siglos después, expresado en un lenguaje algebraico adecuado, se llamará su ecuación. Aunque los matemáticos helenos estaban muy lejos de la geometría analítica, Papo ya tenía clara la relevancia que en la identificación de cada curva juega lo que él llamaba su “*symptoma* principal”, y así lo pone de manifiesto en la *Colección* donde realiza un estudio sistemático de las tres principales curvas *lineales*, la cuadratriz, la espiral y la conoide, con el propósito específico de darles un estatus respetable en la geometría. En este sentido es importante señalar que la definición de las curvas mediante movimientos no tiene acomodo en la tradición euclídea, fundamentalmente estática, y presentaba además determinados problemas conceptuales que fueron puestos de manifiesto por matemáticos como Esporo de Nicea y de los que se hizo eco Papo en el Libro IV de la *Colección*. Precisamente para superar estas contradicciones el erudito alejandrino resalta el papel esencial del *symptoma* y da un salto de gigante del que probablemente ni él mismo fue consciente pues las limitaciones de su sistema numérico, la inexistencia de un lenguaje algebraico adecuado y el relativamente escaso número de curvas que los griegos consideraron impidieron un avance más significativo en el camino hacia la ecuación. Para alumbrar ese paso decisivo hubo que esperar casi mil quinientos años, los que median entre Papo y Descartes, y un cambio de mentalidad en la investigación que permitió superar por primera vez el inmenso legado griego.

Conflicto de intereses

El autor declara no tener conflicto de intereses respecto del contenido de este artículo.

Referencias

- Arquímedes.** (2009). *Tratados II. Introducciones, traducción y notas de Paloma Ortiz García*. Gredos.
- Arquímedes, y Eutocio.** (2005). *Tratados I y Comentarios. Introducciones, traducción y notas de Paloma Ortiz García*. Gredos.
- Ayerbe-Toledano, J. M.** (2024). Los dos grandes tesoros de la geometría y el descubrimiento de las magnitudes inconmensurables. *Lecturas Matemáticas*, **45**(1), 35–72.
- Ayerbe-Toledano, J. M.** (2025a). El descubrimiento de las cónicas por Menecmo <https://doi.org/10.63427/mzyd9698>. *Gaceta de la RSME*, **28**(2), 325–339.
- Ayerbe-Toledano, J. M.** (2025b). Eratóstenes de Cirene, geómetra y geodesta <https://doi.org/10.47101/lull.2025.48.96.ayerbe>. *Lull*, **48**(96), 35–60.
- Diocles.** (1976). *On burning mirrors, The arabic translation of the lost Greek original. Edited, with English Translation and Commentary, by G. J. Toomer*. Springer-Verlag.
- Euclides.** (1991-1994-2008). *Elementos, Vol. I, II y III. Introducción de Luis Vega, Traducción y Notas de María Luisa Puertas Castaños*. Gredos.
- González-Urbaneja, P. M.** (1992). *Las raíces del cálculo infinitesimal en el siglo XVII*. Alianza Editorial.
- González-Urbaneja, P. M.** (2006). *Arquímedes, un sabio de leyenda, en Arquímedes: Obras escogidas. Editor: Antonio J. Durán Guardado*. Editado por RSME, ICM, Patrimonio Nacional.

-
- González-Urbaneja, P. M.** (2008). *Arquímedes y los orígenes del cálculo integral*. Nivola.
- Heath, T.** (1981). *A history of Greek mathematics, Vol. I y II*. Dover Publications.
- Heath, T.** (2002). *The Works of Archimedes*. Dover Publications, Inc.
- Klein, F.** (1993). *Famous Problems of Elementary Geometry*. In: *Famous Problems and Other Monographs*,. New York, Chelsea Publishing Company.
- Knorr, W. R.** (1978). Archimedes and the spirals: The heuristic background. *Historia Mathematica*, 5(1), 43–75.
- Marqués-De-L'Hôspital.** (1998). *Análisis de los infinitamente pequeños para el estudio de las líneas curvas, Introducción y traducción de Rodrigo Cambray Núñez*. Servicios editoriales de la Facultad de Ciencias, UNAM.
- Pappus.** (2010). *Book 4 of the Collection, edited with translation and commentary by Heike Sefrin-Weis*. Springer Verlag.
- Plutarco.** (2006). *Vidas paralelas III, Marcelo, Introducción, Traducción y Notas de Paloma Ortíz*. Gredos.
- Proclus.** (1970). *A commentary on the first book of Euclid's Elements, Translated, with Introduction and Notes, by Glenn R. Morrow*. Princeton University Press.
- Rey Pastor, J., y Babini, J.** (1984). *Historia de la Matemática, Vol. I*. Gedisa.
- Vera, F.** (1970). *Científicos griegos, Vol. I*. Aguilar.
- Zeuthen, H. G.** (1886). *Die Lehre von den Kegelschnitten im Altertum*. reprint Hildesheim 1966.

Club de revistas/Journal Club



Reseña sobre el artículo

Gopaulchan, D., Moore, C., Ali, N. et al. (2025). A defined microbial community reproduces attributes of fine flavour chocolate fermentation. *Nat Microbiol* 10, 2130-2152. <https://doi.org/10.1038/s41564-025-02077-6>

Consorcio microbiano define un chocolate de sabor fino Microbial Consortium Defines Fine-Flavor Chocolate

La fermentación de alimentos es un proceso milenario que permite obtener productos saludables y beneficiosos. En el caso del chocolate la fermentación es un paso crucial para desarrollar las características organolépticas propias del chocolate de sabor fino, pero aún no se cuenta con un método de fermentación estandarizado que garantice resultados consistentes. Sin embargo, un nuevo estudio ha abierto la posibilidad de cambiar esto.

La calidad y el sabor del chocolate dependen de múltiples factores, que van desde la variedad de la planta y las características del suelo donde se cultiva, hasta el procesamiento y el manejo poscosecha, etapa en la que la fermentación juega un papel fundamental. Recogida la fruta de *Theobroma cacao* —planta originaria de las Américas—, sus granos recubiertos de una pulpa dulce y mucilaginososa se extraen y se incuban durante varios días de forma artesanal en cajas de madera o canastos. Gracias a la actividad microbiana, la pulpa se degrada y produce moléculas que realzan el sabor y el aroma del chocolate.

A diferencia de otros alimentos fermentados, como el vino, el queso o la cerveza, al cacao no se le añaden microorganismos externos durante la fermentación, la cual depende exclusivamente de la colonización de microorganismos presentes en el ambiente. Estas comunidades microbianas son complejas y varían según factores ambientales y biológicos, razón por la cual las características del producto final cambian dependiendo del origen del grano. Como es fácil suponer, la naturaleza poco controlada de este proceso hace difícil establecer métodos que aseguren la reproducibilidad de las propiedades del chocolate producido. Optimizar la fermentación requiere, por lo tanto, entender mejor la dinámica de estas comunidades microbianas y cómo los diversos organismos interactúan y contribuyen a optimizar las propiedades sensoriales del chocolate.

Con esto en mente, un grupo de investigadores de Reino Unido, Trinidad y Tobago y Colombia analizó muestras de fermentación de granos de cacao provenientes de fincas colombianas. Los investigadores lograron identificar las comunidades microbianas presentes, estudiar sus cambios y determinar los microorganismos cuyas funciones contribuían al perfil deseado en el chocolate final.

Para comenzar, los investigadores monitorearon los parámetros de pH y temperatura durante el proceso de fermentación artesanal en tres fincas de café y tomaron muestras periódicas a las cuales les hicieron secuenciación masiva del metagenoma (*shotgun metagenomics*). Encontraron que las poblaciones microbianas fluctuaban durante la fermentación, con cambios en la composición acompañados de alteraciones en los parámetros de pH y temperatura. Una finca en particular, localizada en el departamento de Antioquia, mostró una dinámica de fermentación distintiva. Más interesante fue el hecho de que el cacao obtenido de esta finca poseía un perfil de sabor fino, según catadores expertos, lo cual resalta la influencia del proceso fermentativo microbiano en el desarrollo de dicho sabor.

Con el fin de guiar el diseño de una población microbiana que sirviera para iniciar el proceso de fermentación, los investigadores identificaron microorganismos y rasgos metabólicos claves. Para ello, inicialmente reconstruyeron genomas a partir de datos metagenómicos, los cuales se conocen como genomas ensamblados a partir de datos metagenómicos (*Metagenome Assembled Genomes, MAG*). Al hacer la anotación

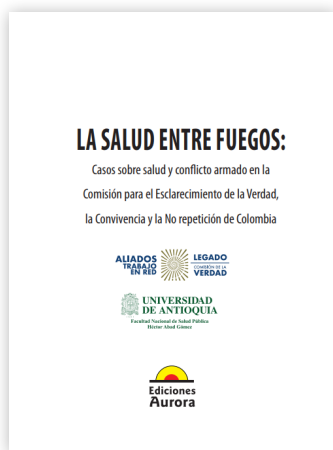
funcional y una construcción de redes metabólicas, encontraron redundancia funcional, lo cual significaba que era posible simplificar el grupo de microorganismos involucrados en la fermentación. Identificaron, además, diez MAG con las capacidades metabólicas requeridas para lograr el perfil sensorial deseado. Después evaluaron estas predicciones definiendo un consorcio de nueve microorganismos (cinco bacterias y cuatro hongos) que utilizaron como insumo en el proceso de fermentación. Dicho consorcio se aproximaba a los diez MAG identificados previamente tanto en composición taxonómica como en potencial metabólico. Los ensayos con este consorcio de microorganismos replicaron aspectos clave de la fermentación natural y generaron las notas deseadas de sabor y aroma en el cacao. Estos resultados demuestran que es posible definir una comunidad sintética de microorganismos para lograr una fermentación bajo condiciones controladas.

Este trabajo identificó elementos clave para la fermentación de cacao en consorcios complejos naturales mediante el uso de diversas estrategias y la integración de información sobre factores abióticos, taxonomía y datos genómicos y funcionales. El resultado fue la definición de un grupo reducido de microorganismos capaz de replicar la fermentación natural. Lo más relevante de este hallazgo es la posibilidad de llevar a cabo una fermentación del cacao de manera más controlada. Esto, a su vez, podría permitir la producción consistente de chocolates de alta calidad, con beneficios potenciales para los productores a nivel global.

María Mercedes Zambrano, Ph. D.

Directora Científica, Corporación Corpogen, Bogotá, Colombia
Dirección de Investigación y Transferencia de Conocimiento, Universidad Central,
Bogotá, Colombia

Comentario bibliográfico



Colombia. Comisión para el Esclarecimiento de la Verdad, la C. y la N. R. (CEV). (2022). *La salud entre fuegos: infracciones contra la misión médica y la medicina tradicional, y violencia contra el sector salud en el conflicto armado colombiano (1958-2019)*. https://www.udea.edu.co/wps/wcm/connect/udea/d198a09f-75cc-47d2-b637-1569b5ebdbef/LIBRO_LA+SALUD+ENTRE+FUEGOS-ABRIL1.pdf?MOD=AJPERES&CVID=prbo1S7

¿Infracciones a la Misión Médica o crímenes de lesa humanidad contra los trabajadores de salud?

El libro *La salud entre fuegos*, editado por la Universidad de Antioquia y Ediciones Aurora, es producto del trabajo de la Comisión de la Verdad y narra de forma descarnada las violencias múltiples que sufrió y sigue sufriendo el personal de salud asignado a las zonas de conflicto a través de dos estudios de caso. Infortunadamente, este no es un tema nuevo, ni algo que se desconociera. Durante la última década del siglo XX y la primera del siglo XXI en Colombia no eran raras las noticias sobre el asalto de distintos grupos armados a los recursos económicos, humanos y físicos del Sistema Nacional de Salud. Tanto en las zonas dominadas por las guerrillas como en aquellas bajo el control de los paramilitares era *vox populi* que los líderes de estos grupos manejaban a su antojo los recursos de la salud, pero quizás se conocían menos, o se publicaban con menor frecuencia, noticias sobre las vejaciones y violencias que los trabajadores de este sector sufrieron a manos de estos criminales.

Quisiera llamar la atención sobre el nombre que se le da a este delito: infracción contra la Misión Médica. El Diccionario de la Lengua Española (RAE) define “infracción” como “Transgresión, quebrantamiento de una ley, pacto o tratado, o de una norma moral, lógica o doctrinal. Falta, incumplimiento, delito, ilícito, quebrantamiento, transgresión, conculcación, contravención, desafuero, inobservancia, violación, atropello”. Es decir, es un término amplio y, a mi parecer, impreciso, que incluye hechos con diversos grados de gravedad penal o jurídica. Los grupos criminales en contienda cometieron crímenes a lo largo y ancho de nuestra geografía y muchos de ellos han sido calificados como “crímenes de lesa humanidad”. Organizaciones como Amnistía Internacional definen el crimen de lesa humanidad como “un ataque generalizado o sistemático contra la población civil, que incluye actos como asesinato, tortura, esclavitud, desaparición forzada y violencia sexual, entre otros”. Todos estos actos fueron cometidos por los actores armados contra el personal sanitario. Por ello pienso que los hechos que se relatan en *La salud entre fuegos* constituyen verdaderos crímenes de lesa humanidad y me pregunto si llamarlos “infracción” no minimiza su gravedad frente a los autores, la justicia y la opinión pública, y si ello no constituye una revictimización.

Los casos se presentaron con diferentes patrones temporales y regionales: algunas regiones como Antioquia, Norte de Santander, Guaviare, Arauca, Cundinamarca, Nariño o Cauca presentaban las cifras más altas de crímenes contra la Misión Médica, pero cuando los investigadores las ajustan por el número de habitantes, los departamentos de mayor riesgo eran Arauca, Guaviare, Caquetá, Vaupés, Putumayo y Chocó. Estos departamentos siguen siendo el epicentro de nuestras guerras recicladas, por lo que es de suponer que la violación de los derechos de la Misión Médica continúa.

Los autores del documento revisaron datos del observatorio de la Universidad de Antioquia y de la Comisión de la Verdad, que rastrean este tipo de crímenes desde 1958. Los crímenes contra la Misión Médica ocurrieron de forma ocasional desde ese año hasta 1979, pero a partir de allí experimentaron una nueva dinámica en la que su presencia siguió un patrón “endémico” que luego alcanzó cifras “epidémicas” entre 1999 y 2005. A partir de 2005 los niveles de ataque adoptaron de nuevo un comportamiento “endémico”, pero en niveles mucho más altos que los observados antes de 1999. Ni la “Seguridad democrática” ni los “Acuerdos de paz” lograron eliminarlos porque, desafortunadamente, nuestro conflicto interno se recicla debido a la incapacidad perenne del Estado para copar

territorios y monopolizar el uso de la fuerza, independientemente de qué facción política esté en el poder. Solo la recuperación de ese monopolio de la fuerza y el fortalecimiento de la justicia lograrán garantizar la seguridad de todos los colombianos, incluida la de los trabajadores del sistema de salud.

Los autores mencionan que en el 2022 el Comité Internacional de la Cruz Roja (CICR) documentó más de 400 violaciones al Derecho Internacional Humanitario y entre el 2006 y el 2019 se documentaron 49 casos por año. Un hecho preocupante es que en un porcentaje importante de los casos, casi el 50 % de ellos, no se sabe quién fue el agresor. La impunidad que ha rodeado la mayoría de los casos contribuye sin duda a que las agresiones al personal médico se perpetúen. Mucho se ha discutido sobre el nivel de impunidad que rodea nuestro sistema de justicia, pero está claro que tal impunidad es peor cuando está relacionada con delitos cometidos por los actores armados. Incluso en el caso de que se puedan identificar los perpetradores de manera individual, lo más probable es que por cuenta de los acuerdos que se han firmado con los diferentes gobiernos (los paramilitares con el gobierno Uribe y los guerrilleros con el gobierno Santos) nunca se logre verdadera justicia en la gran mayoría de los casos.

Aunque los autores reconocen que el número de crímenes contra la Misión Médica atribuibles a las Fuerzas Armadas del Estado (FFMM) es pequeño comparado con los cometidos por los grupos ilegales, en la presentación de casos individuales tienden a darle un alto perfil a los cometidos por estas. Sin embargo, al revisar las cifras relacionadas con la actividad armada de las FFMM contra grupos ilegales, se ve que esta se incrementó dramáticamente desde el 2002, coincidiendo con una reducción marcada de las agresiones al personal sanitario, lo que sugiere que una mayor actividad de las FFMM no es causa importante de violaciones de los Derechos Humanos, sino un factor protector, al menos en el caso de Colombia, donde hay tantos actores criminales y las intervenciones de fuerza legales de las FFMM están justificadas.

Como colofón, quiero hacer notar que, tristemente, las agresiones contra el personal de salud no se limitan a las ejercidas por los actores armados. Hemos visto cómo durante su entrenamiento médico, los jóvenes residentes son víctimas de violencia psicológica, y de otros tipos, por parte de sus propios entrenadores, y que el maltrato es visto como parte normal de su preparación. También ese tipo de violencia debería considerarse inaceptable y habría que luchar por terminarla.

© **Fernando de la Hoz Restrepo, MD. Ph.D.**

Profesor titular
Departamento de Salud Pública
Universidad Nacional de Colombia
fpdelahozr@unal.edu.co

Comentario bibliográfico



Mario Alberto Quijano Abril, 2025. ISBN 978-628-01-8301-5. 204 páginas. Editado por ElocuEntes. Encuadernación en rústica.

Las plantas nos miran

En el mundo natural las plantas están entre los seres vivos más importantes de los ecosistemas. Sin las plantas la vida en el planeta sería muy diferente de la que hoy conocemos. Una gran parte de los organismos sobreviven y prosperan en los ecosistemas gracias a las interacciones directas o indirectas que mantienen con las plantas.

Quienes trabajamos con ellas en las esferas de la ciencia, el medioambiente, la cultura, la economía o el paisajismo tenemos la necesidad constante de comprender y aprender sobre estas fascinantes criaturas, cuya evolución se remonta a un lejano pasado. Muy probablemente fue esa necesidad la que impulsó al profesor Mario Quijano a escribir este interesante libro. El autor, quien es biólogo, con magister y doctorado en botánica, se desempeña actualmente como Profesor Titular de la Facultad de Ingenierías de la Universidad Católica de Oriente (Rionegro, Colombia). En doce capítulos, el autor nos embarca en un viaje de conocimiento sobre las plantas a partir de su experiencia de investigación y conocimiento de estos seres. El libro constituye una herramienta eficaz de divulgación científica, pues uno de sus propósitos principales es enseñar a los lectores acerca de procesos y dinámicas particulares de la morfología, la anatomía, la reproducción y la evolución de las plantas, usualmente desconocidas por la gente. Sin duda alguna, estas enseñanzas permiten entender que las plantas son seres más complejos de lo que comúnmente se cree o se percibe.

Utilizando un lenguaje sencillo y una narrativa que emplea metáforas y comparaciones con ejemplos de la vida diaria, el autor pretende alcanzar al público general con base en sus propias investigaciones en diversos campos de la botánica como la morfología, la anatomía, la palinología y las invasiones biológicas, entre otros. Los títulos de los capítulos son sugestivos e invitan al lector a una exploración relajada de sus contenidos.

En los tres primeros capítulos, el autor nos presenta un panorama general de la evolución de las plantas en la tierra, con ejemplos sobre los ciclos de vida y de reproducción de los briófitos (por ejemplo, los musgos), los helechos y las gimnospermas. En el cuarto capítulo hace énfasis en una de las innovaciones biológicas más interesantes de la evolución de las plantas: las semillas, detallando su estructura, su desarrollo y el intrigante proceso de la germinación. En el quinto capítulo comenta acerca de las plantas que viven en el páramo, algunas de sus adaptaciones morfológicas y fisiológicas a estos particulares ambientes, y los hallazgos y relaciones que encontró el científico y explorador Alexander von Humboldt, quien, con su particular visión integradora, detectó convergencias en las formas de estas plantas con las de otros ambientes de alta montaña del mundo. El sexto capítulo trata sobre las invasiones biológicas y sus consecuencias, utilizando como ejemplo sus propias investigaciones en torno a una planta invasora introducida en nuestros bosques, conocida como “ojo de poeta” (*Thunbergia alata*).

El séptimo capítulo, “sobre sexo y platillos voladores”, recalca la importancia de la reproducción sexual en las plantas y la trascendencia del polen como uno de sus elementos vitales. Este capítulo, en mi opinión, es un buen ejemplo de la manera en que una obra científica de divulgación puede alcanzar sus objetivos. El siguiente capítulo nos habla sobre la miel, su importancia en el ciclo vital de las plantas con flores y el concepto de la miel de “origen”. En el noveno capítulo (“árbol que nace torcido...”), el autor nos explica que existe una relación entre la forma de una planta y sus patrones de crecimiento con la disponibilidad de la luz, así como de otros factores abióticos. Asimismo, hace énfasis en las razones por las que el hecho de que un árbol no crezca totalmente recto, como nos han enseñado que “debería” ser, no implica que esté enfermo o sea un “error” de la naturaleza. El décimo capítulo trata sobre las plantas que viven en el medio acuático, los retos que deben afrontar

para vivir en ese medio y las interesantes adaptaciones morfológicas y fisiológicas que les permiten sobrevivir “con el agua hasta el cuello”. En el undécimo capítulo el autor nos habla sobre la forma y la función de los tejidos de las plantas, cuya exquisita geometría ha fascinado a los investigadores desde que fuera observada por primera vez gracias al desarrollo del microscopio. En el capítulo final, el autor nos explica la importancia de las células muertas en la estructura y crecimiento de las plantas, y cómo dichas células influyen en las majestuosas formas, tamaños y longevidad que estas pueden alcanzar.

En todos los capítulos del libro se intercalan los nombres de algunos de los científicos que han sido claves en el desarrollo de los estudios evolutivos, morfológicos, anatómicos, fisiológicos y ecológicos de las plantas, procurando resaltar la visión original, novedosa e integrativa que permitió romper numerosos paradigmas en su momento. Indudablemente, esta obra representa un interesante relato de divulgación científica sobre múltiples aspectos de la vida y la evolución de las plantas, que seguramente dejará intrigado al lector y lo motivará a conocer más sobre la existencia de estos maravillosos seres.

Carlos Alberto Parra Osorio

Profesor Asociado, Instituto de Ciencias Naturales, Universidad Nacional de Colombia

Carta a la Editora

1900-1925: La ruptura de la Física

1900-1925: The breakdown of physics

Por recomendación de la UNESCO, la Asamblea General de la ONU proclamó 2025 como *Año Internacional de la Ciencia y la Tecnología Cuánticas* (Resolución A/RES/78/287, <https://docs.un.org/es/A/RES/78/287>) para conmemorar el primer centenario de la Mecánica Cuántica, cuyo nacimiento se reseña con el artículo “Sobre la reinterpretación teórico-cuántica de las relaciones cinemáticas y mecánicas” de Werner Heisenberg (**Heisenberg**, 1925). Durante la mayor parte del siglo 20, esta disciplina se desarrolló con el fin primordial de explicar la estructura de la materia y su interacción con la radiación. Pero, en las postrimerías de ese siglo y lo corrido del 21, la Mecánica Cuántica irrumpió definitivamente en el ámbito de la tecnología más sofisticada, principalmente en los campos de la computación, las telecomunicaciones y la ciencia de los materiales. Sus aplicaciones actuales son diversas y no sólo ocupan buena parte del paisaje tecnológico cotidiano a escala global, sino también las expectativas y tendencias de la tecnología y la innovación para el futuro cercano y mediano. Motivada por este panorama, la ONU busca con la celebración incentivar la conciencia sobre el impacto de las tecnologías cuánticas en la vida moderna, además de apuntar a objetivos socio-culturales globales conforme a sus principios misionales.

No obstante, la historia de la física durante el primer cuarto del siglo 20, antes de la publicación del artículo de Heisenberg, merece toda nuestra atención, no solo como reseña de época, que algunos llaman *edad dorada de la Mecánica Cuántica* (**Eisberg**, 1978), sino primordialmente, como evolución del pensamiento humano en la búsqueda de la comprensión plena de la naturaleza, con impactos profundos e indiscutibles en la educación y en la cultura. No se trató de un “salto cualitativo”, producto de la complejidad lograda por la acumulación de conocimientos, sino de una ruptura rotunda de la concepción de la naturaleza, establecida a lo largo de los tres siglos precedentes, al estilo de la declaración de uno de sus protagonistas, Louis de Broglie: “La historia de la ciencia muestra que su progreso se ha visto constantemente obstaculizado por la influencia tiránica de ciertas concepciones que han llegado a ser consideradas como dogmas. Por esta razón, es conveniente someter a examen periódico y a profundidad los principios que hemos llegado a admitir sin discusión” (**De Broglie**, 1956). La Historia de esa ruptura ilustra en detalle el ejercicio de lo que hoy llamamos *pensamiento crítico*, con una participación protagónica de la intuición y de la actitud inquebrantable de salvaguardar la investigación científica. Irónicamente, este último aspecto ha sido puesto en entredicho por los liderazgos políticos actuales, en un momento de innegable florecimiento de la producción tecnológica.

El siglo 19 marcó la época en la que los físicos creyeron saberlo todo de su disciplina. Desde la revolución científica del siglo 17, siguieron los lineamientos trazados por Galileo Galilei e Isaac Newton, entre otros, sobre el quehacer en física. Galileo expresó que “la filosofía está escrita en ese grandísimo libro [de la naturaleza] que continuamente está abierto ante nuestros ojos (me refiero al universo), pero no se puede entender si antes no se aprende a entender la lengua, y conocer los caracteres en los que está escrito. Este libro está escrito en lengua matemática, y los caracteres son triángulos, círculos, y otras figuras geométricas, sin las cuales es imposible entender ni una palabra; sin ellos es como girar vanamente en un oscuro laberinto” (**Galilei**, 1623), mientras que Newton estableció las reglas de filosofía natural: “(i) No se deben admitir otras causas que las necesarias para explicar los fenómenos. (ii) Los efectos del mismo género deben siempre ser atribuidos, en la medida en que sea posible, a la misma causa. (iii) Las cualidades de los cuerpos que no son susceptibles de aumento ni disminución y que pertenecen a todos los cuerpos sobre los cuales se pueden hacer experimentos, deben ser miradas como pertenecientes a todos los cuerpos en general. (iv) En

la filosofía experimental, las proposiciones sacadas por inducción de los fenómenos deben ser miradas, a pesar de las hipótesis contrarias, como exacta o aproximadamente verdaderas, hasta que algunos otros fenómenos las confirmen enteramente o hagan ver que están sujetas a excepciones” (Newton, 1686). Esos lineamientos llevaron a Newton mismo a la creación del Cálculo Analítico y de la Mecánica, cuyo nivel más alto de abstracción matemática fue alcanzado en los siglos 18 y 19 por Joseph Louis Lagrange y William Rowan Hamilton respectivamente. Los mismos lineamientos condujeron, ya en el siglo 19, a Augustin-Jean Fresnel a su célebre “Memoria sobre la difracción de la luz” (Fresnel, 1826) que, luego de una dramática historia entre 1815 y 1818, inauguró la edad dorada de la concepción ondulatoria de la luz. El pináculo de esta edad dorada fue alcanzado por James Clerk Maxwell en su celebrado artículo “Una teoría dinámica del campo electromagnético” (Maxwell, 1875), que consagró la naturaleza electromagnética de las ondas luminosas. Finalizando el siglo 19, Ludwig Boltzmann aportó los fundamentos de la física estadística con su teoría cinética de los gases (Boltzmann, 1896). Sobre esas tres bien fundadas columnas de la ciencia, además de las matemáticas, se apoyó la convicción de los físicos decimonónicos de haber alcanzado el conocimiento completo de la naturaleza, quedando solo la misión de realizar experimentos enriquecedores de ese conocimiento y de mejorar la precisión de las constantes universales.

Sin embargo, la historia de la física dio un giro drástico apenas comenzando el siglo 20, a causa de un conjunto de experimentos cuyos resultados no pudieron apoyarse en dichas columnas de la ciencia. En 1900, la electrodinámica y la física estadística juntas, en manos de los reputados físicos John William Strutt (Lord Rayleigh) y Sir James Jeans, no pudieron explicar el espectro de radiación del cuerpo negro, cuyo estudio, que ocupó la segunda mitad del siglo 19 desde su postulación por Gustav Robert Kirchhoff en 1856, había dado lugar a las leyes empíricas de Stefan-Boltzmann (1879) y de desplazamiento de Wien (1893). La electrodinámica tampoco pudo explicar el “efecto fotoeléctrico” demostrado experimentalmente por Philipp Lenard en 1902, inspirado en una anotación escrita casi década y media antes por Heinrich Hertz; ni el espectro de emisión del hidrógeno, llamado “serie de Balmer” porque, en 1885, Johann Jacob Balmer sintetizó una fórmula empírica que predecía las longitudes de onda de las líneas de dicho espectro (Eisberg, 1978).

Si bien no deja de impresionar que los límites explicativos de teorías tan elaboradas y elegantes se establecieran poco tiempo después de su formulación, impacta igualmente o incluso más, la manera en que los físicos de inicios del siglo 20 emprendieron la tarea de superarlos. La mayoría tenía menos de 30 años. Todos ellos compartían una actitud decidida de renuncia, parcial o total, a esos tres pilares de la ciencia del siglo 19 y sus contribuciones fueron galardonadas con el premio Nobel de física. Además, las explicaciones aportadas no fueron propuestas en el marco de teorías bien establecidas y, peor aún, contradijeron sin pudor principios de dichos pilares. De hecho, el término *postulado*, que atañe a proposiciones cuya verdad se admite sin pruebas, es decir, con base en posturas intuitivas del sujeto que las propone, constituye una marca de época de la física entre 1900 y 1925. En efecto, en ese lapso sólo se produjeron dos teorías axiomáticas rigurosas: la de la Relatividad de Albert Einstein en dos momentos, el primero publicado en 1905, conocido hoy como Relatividad Especial (Einstein, 1905 a) y el segundo, publicado en 1916, denominado Relatividad General (Einstein, 1916); y la tesis doctoral de Louis de Broglie “Investigaciones sobre la teoría de los *quanta*”, presentada en 1924 y publicada al año siguiente (De Broglie, 1925), cuyo final, sin embargo, fue más bien trágico.

Específicamente, la deducción de la fórmula matemática que se ajusta a los resultados experimentales del espectro de radiación de cuerpo negro fue presentada, antes de que terminara el año de 1900, por Max Planck, de 42 años, luego de postular el *quantum* de energía electromagnética como una estrategia matemática, pues no se convenció de su existencia física ya que contradecía la naturaleza ondulatoria de la radiación. Así mismo, la fórmula matemática que se ajusta a los resultados experimentales del efecto fotoeléctrico fue deducida por Einstein de 26 años, en 1905, postulando la ocurrencia de colisiones entre los *quanta* de radiación y los electrones de las placas iluminadas por la luz. Einstein había aceptado sin más la realidad física de los *quanta* de Planck (Einstein, 1905 b). Por su parte,

Niels Bohr de 28 años aceptó sin explicaciones la estructura nuclear del átomo, sugerida por los descubrimientos experimentales del electrón en 1897 y del núcleo atómico en 1911, pero cuya estabilidad había sido puesta en duda por las leyes de la electrodinámica. En 1913, Bohr formuló cuatro postulados que negaban la validez de dichas leyes en relación con la estructura del átomo y describían la interacción de la radiación con el átomo en términos de “saltos cuánticos” producidos por la colisión de un *quantum* con uno de los electrones del átomo o por la emisión espontánea de un *quantum* por decaimiento electrónico del átomo (Bohr, 1913).

A pesar del ingenio puesto en los postulados y de la eficacia y elegancia de las explicaciones logradas, el desparpajo de la renuncia a “los principios que hemos llegado a admitir sin discusión” demoró su aceptación por la comunidad científica de esa época. Como se dijo antes, el mismo Planck no estaba convencido de los *quanta*. Robert Millikan, premio Nobel de física de 1923, tildó el artículo de Einstein sobre el efecto fotoeléctrico de “hipótesis atrevida, por no llamarla insensata”. Finalmente, la teoría ondulatoria de la materia desarrollada por de Broglie, que aportó un marco teórico axiomático a los postulados de Bohr y fue galardonada con premio Nobel de física, fue refutada por Bohr mismo.

El tono de las confrontaciones, que llegó a ser melodramático, como en el enfrentamiento entre Heisenberg y Erwin Schrödinger (Cassidy, 1992), reflejó la incomodidad por el reto de comprender la naturaleza de las partículas y las ondas desde la perspectiva abierta por la ruptura de la física. Hasta el siglo 19, las esencias de esos dos tipos de objetos físicos se concebían mutuamente excluyentes, de modo que la onda podía caracterizarse como el objeto físico que *no es* una partícula, entendiendo que las partículas son entidades discretas, esto es discontinuas, e impenetrables, de manera que son contables, localizables en el espacio-tiempo, se mueven a lo largo de trayectorias y cuando se encuentran en un punto del espacio-tiempo, están obligadas a colisionar, cambiando su estado de movimiento. Las ondas, por el contrario, pueden superponerse en regiones extendidas del espacio-tiempo, sin que por ello estén obligadas a interactuar, pero, cuando lo hacen, su interacción se llama interferencia y, al abandonar la zona de interacción, continúan propagándose sin alteración por la interferencia.

Sin embargo, tanto la radiación como la materia parecían comportarse o bien como ondas o bien como partículas, porque para ambas se habían observado experimentalmente tanto las colisiones como la interferencia. Así, la noción de *dualidad onda-partícula* fue también un sello de época, a pesar de lo incómoda que resulta desde una perspectiva epistemológica, pues viola el principio de no-contradicción lógica, que establece que no se puede ser y no ser al tiempo. Bohr propuso una cierta reconciliación desplazando la exclusión mutua de ondas y partículas a los contextos experimentales: en un experimento específico, un objeto físico solo puede comportarse como onda o como partícula. Así, estos términos dejaron de denominar esencias de objetos físicos para nombrar estados o circunstancias contextuales.

Con todo, el convencimiento no fue unánime. En 1965, el mismo año en que recibió el premio Nobel de física, Richard Feynman afirmó que la interferencia de electrones es “un fenómeno imposible de explicar clásicamente y contiene el corazón de la Mecánica Cuántica. Realmente, contiene el único misterio de la Mecánica Cuántica” (Feynman et al, 1965). Pero la interferencia de partículas no es el único “misterio” con raíces en la edad dorada de la Mecánica Cuántica. También lo es, por ejemplo, el *salto cuántico* de los electrones orbitales en los átomos, mediante el cual el electrón literalmente desaparece de una órbita al tiempo que aparece en otra, debido a que cada órbita está asociada a un valor de la energía del electrón.

Es probable que se haya tenido la expectativa de que, una vez formalizada la Mecánica Cuántica con la publicación del artículo de Heisenberg en 1925, seguido de la publicación de cuatro artículos de Schrödinger (Schrödinger, 1926 a-d) con una formulación matemática alternativa pero equivalente, las rupturas se estabilizaran y la nueva teoría comenzara su desarrollo de manera armónica. Sin embargo, no fue así. La equivalencia matemática de los formulismos de Heisenberg y Schrödinger no trajo acuerdo sobre la fenomenología cuántica entre sus autores. El enfrentamiento de Schrödinger y su concepción ondulatoria con la denominada Escuela de Copenhague, a la que pertenecía Heisenberg (él difundió

el término "Der Kopenhagener Geist" - El Espíritu de Copenhague - para referirse de manera más filosófica a los aportes del grupo de su tutor Niels Bohr), y su concepción corpuscular se mantuvo hasta la muerte de Schrödinger en 1961.

También se mantuvo un largo enfrentamiento de Einstein con la misma Escuela de Copenhague, que tuvo un clímax con el artículo de 1935 publicado por Einstein y sus colaboradores Podolsky y Rosen. En este documento argumentaron que la Mecánica Cuántica no podía considerarse una teoría cuántica completa porque predecía como natural lo que hoy conocemos como *entrelazamiento* de sistemas cuánticos y, ellos lo consideraban un comportamiento contra natura (**Einstein et al**, 1935). Tal discusión, sin posible verificación experimental en la época, condujo a una interpretación en términos de "variables ocultas" (**Bohm**, 1952 a, b). La factibilidad experimental del entrelazamiento cuántico y la refutación de la interpretación basada en variables ocultas fue demostrada años después de la muerte de Einstein (**Aspect et al**, 1982). A pesar de que hoy no se haya alcanzado todavía su comprensión fenomenológica completa, el entrelazamiento cuántico constituye un aspecto fundamental del desarrollo tecnológico de la computación, las telecomunicaciones y la interacción no-lineal de los materiales con la radiación a escala de nano-tecnología.

La elegancia y aceptación generalizada del aparato matemático de la Mecánica Cuántica y su eficacia predictiva contrastan con las limitaciones fenomenológicas de la teoría, hasta el punto de que a mediados del siglo 20 se popularizó el refrán "*Shut up and calculate!*" (¡Cállate y calcula!). Quizá la aplicación más importante de la Mecánica Cuántica sea, todavía en la actualidad, el cálculo de densidades de probabilidad de fenómenos físicos en el espacio de Hilbert, a pesar de reclamos de experimentalistas como Asher Peres: "Los fenómenos cuánticos no ocurren en el espacio de Hilbert. Ocurren en un laboratorio" (**Peres**, 2010). De todas maneras, el papel actual de las matemáticas en Mecánica Cuántica se acerca más a la percepción Galileana, como lo expresó Lorenzo de la Torre, profesor de la Universidad de Antioquia: "Las matemáticas se utilizan sistemáticamente en la construcción de contextos para problemas físicos. De esta manera, vemos que las matemáticas son esenciales para la existencia misma de muchas partículas elementales y, en general, son una condición indispensable de la realidad física" (**De la Torre**, 1997).

La vigencia actual de la ruptura causada por la Mecánica Cuántica quedó manifiesta dramáticamente en una encuesta realizada este año por *Nature* alrededor del mundo, cuyos resultados se publicaron hace pocas semanas (**Gibney**, 2025). Dos resultados fueron de particular interés. El primero se refiere a la indagación sobre las explicaciones preferidas de la Mecánica Cuántica. Los resultados revelaron que apenas el 36% de 1.101 encuestados se acoge a la interpretación de Copenhague, mientras que el 64% restante se distribuye en 10 opciones interpretativas, en poblaciones que no superan el 10% en ocho de ellas y son de 15% y 17% en las otras dos. Aunque la muestra no necesariamente es representativa de la comunidad científica, el resultado parece sugerir un fenómeno similar al relatado en el mito bíblico de la torre de Babel: los físicos no han logrado acuerdo sobre la visión del mundo que puede construirse con base en la Mecánica Cuántica, a pesar de la precisión predictiva de sus cálculos. El segundo atañe al reconocimiento de la frontera entre objetos clásicos y cuánticos. En este caso el 45% de los 1.018 encuestados reconoce la frontera, pero el 40% la califica de no-nítida. Otro 45% declara que no hay frontera y el 10% restante se manifiesta inseguro de su existencia. Una vez más, la muestra no necesariamente es representativa de la comunidad científica, pero el resultado es inesperado: los encuestados no parecen percibir la historia de ruptura dramática de la Mecánica Cuántica, considerándola más bien como una evolución natural del conocimiento científico, armónica con el legado del siglo 19. La última palabra al respecto no parece haber sido dicha todavía.

El recorrido anterior sugiere que la conmemoración convocada por la Asamblea General de la ONU para este año es realmente la celebración de una profunda ruptura en el pensamiento humano que aún permanece vigente.

Román Castañeda

Departamento de Física, Universidad Nacional de Colombia Sede Medellín, Colombia
rcastane@unal.edu.co

Referencias

- Aspect, A., Dalibard, J., and Roger, G.** (1982). Experimental test of Bell's Inequalities using Time-Varying Analyzers. *Phys. Rev. Let.* 49, 1804-1807.
- Bohm, D.** (1952). A Suggested Interpretation of the Quantum Theory in Terms of "Hidden" Variables I. *Phys. Rev.* 85, 166-179.
- Bohm, D.** (1952). A Suggested Interpretation of the Quantum Theory in Terms of "Hidden" Variables II. *Phys. Rev.* 85, 180-193.
- Bohr, N.** (1913). On the Constitution of Atoms and Molecules. *Philosophical Magazine* 26, 476 (25 p).
- Boltzmann, L.** (1896). Vorlesungen über Gastheorie (Leipzig: Johann Ambrosius Barth Collection).
- Cassidy, D.C.** (1992). Werner Heisenberg und das Unbestimmtheitsprinzip. *Spektrum der Wissenschaft*, Juli 1992, 92-99.
- De Broglie, L.** (1925). Recherches sur la théorie des quanta (Ann.de Phys., 10^e série, t. III, Janvier-Février).
- De Broglie, L.** (1956). Nouvelles Perspectives en Microphysique (Paris: Albin Michel).
- De la Torre, L.** (1997). Math is key to identifying source of 'strange foot-print. *Physics Today*, September, p. 15.
- Einstein, A.** (1905). Zur Elektrodynamik bewegter Körper. *Annalen der Physik* 17, 891-921.
- Einstein, A.** (1905). Über einen die Erzeugung und Verwandlung des Lichtes betreffenden heuristischen Gesichtspunkt. *Annalen der Physik* 17, 132-148.
- Einstein, A.** (1916). Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie. *Ann. Phys.* 49, 769-822.
- Einstein, A., Podolsky, B., and Rosen, N.** (1935). Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete? *Phys. Rev.* 47, 777-780.
- Eisberg, R.** (1978). Fundamentos de Física Moderna (México: Limusa).
- Feynman, R., Leighton, R., and Sands, M.** (1965). The Feynman Lectures on Physics (Menlo Park: Addison-Wesley).
- Fresnel, A.** (1826). Mémoire sur la diffraction de la lumière. *Mémoires de l'Académie des Sciences*, vol.V: 339-475.
- Galilei, G.** (1623). Il Saggiatore (Editio Princeps, Roma: Giacomo Mascardi).
- Gibney, E.** (2025). Physicists disagree wildly on what quantum mechanics says about reality, *Nature* survey shows. *Nature*. <https://www.nature.com/articles/d41586-025-02342-y>
- Heisenberg, W.** (1925). Über quantentheoretische Umdeutung kinematischer und mechanischer Beziehungen. *Z. Physik* 33, 879-893.
- Maxwell, J. C.** (1865). A Dynamical Theory of the Electromagnetic Field. *Phil. Trans. R. Soc. Lond.* 155, 459-512.
- Newton, I.** (1686). *Philosophiae naturalis principia mathematica* (London: S. Pepys Imprimatur).
- Peres, Asher** (2010). *Quantum theory concepts and methods* (Springer).
- Schrödinger, E.** (1926). Quantisierung als Eigenwertproblem I. *Ann. Phys.* 79, 361-376.
- Schrödinger, E.** (1926). Quantisierung als Eigenwertproblem II. *Annalen der Physik* 79, 489-527.
- Schrödinger, E.** (1926). Quantisierung als Eigenwertproblem III. *Annalen der Physik* 80, 437-490.
- Schrödinger, E.** (1926). Quantisierung als Eigenwertproblem IV. *Annalen der Physik* 81, 109-139.

A nuestros lectores y autores

Enfoque y alcance

La Revista de la Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales es una publicación periódica trimestral, multidisciplinaria, que tiene como objetivo dar a conocer artículos inéditos de investigación de alta calidad.

La Revista publica artículos científicos en las áreas de ciencias biomédicas, ciencias del comportamiento (filosofía, psicología, antropología, sociología), ciencias físicas, ciencias naturales (biología, microbiología, botánica, zoología, ecología) ciencias químicas, ciencias de la tierra (geología, medio ambiente) y matemáticas.

Está reseñada en varios índices nacionales e internacionales tales como Actualidad Iberoamericana, Agris, CIRS (*International Center for Scientific Research*), *Current Mathematical Publications*, EBSCO, Dialnet, Historia Mathematica, Index Kewensis, Latindex, Mathematical Reviews, MathSciNet (on line data base), PERIODICA, SciELO Colombia, Online Computer Library Center – OCLC, *Zentralblatt für Mathematik*, *Zoological Record*. Nacionalmente se encuentra reseñada en la base de datos Publindex de Colciencias.

El primer número se publicó en diciembre de 1936, año de creación oficial de la Academia, bajo la dirección del doctor Jorge Álvarez Lleras y hasta el momento se han editado 41 volúmenes.

Proceso de evaluación por pares

Se recibirán solo los manuscritos que cumplan con todos los requisitos que se mencionan en las indicaciones a los autores. Los manuscritos serán evaluados en primera instancia por el editor y los editores asociados de la disciplina correspondiente.

Cada manuscrito será enviado a dos especialistas en el tema, quienes evaluarán y enviarán sus recomendaciones. Este proceso de revisión tendrá una duración aproximada de 90 días.

Los pares académicos pueden adoptar alguna de las siguientes tres opciones: a) aceptación sin modificaciones; b) aceptación con correcciones; c) no aceptación. En caso de desacuerdo de los pares, el original será enviado a un tercer evaluador.

En cualquiera de los casos, el autor será informado y deberá realizar las modificaciones correspondientes en el manuscrito y enviarlo dentro de las cuatro semanas siguientes. Además, deberá enviar un documento en el que responderá, una a una, todas las observaciones señaladas por los evaluadores.

Cuando el autor demore más de 30 días en responder a las sugerencias de los evaluadores, se entenderá que los autores han retirado el manuscrito en su forma actual y, si se remitiera de nuevo, el Comité Editorial de la Revista lo considerará como un nuevo trabajo.

Los trabajos que sean aceptados se considerarán como propiedad de la **Revista de la Academia Colombiana de Ciencias Exactas Físicas y Naturales** y podrán ser reproducidos total o parcialmente por la Revista.

La Revista no se hace responsable de los contenidos científicos ni de las implicaciones legales de los artículos publicados.

Ética de la publicación

La Revista de la Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales (RACCEFYN), acoge la normatividad internacional definida por el *Committee on Publication Ethics* (COPE). Algunas normas se pueden consultar en:

COPE guidelines on good publication practice: <https://www.ncbi.nlm.nih.gov/pmc/articles/PMC1753164/>

COPE code of conduct: <https://publicationethics.org/resources/code-conduct>

Ver documento pdf (anexo)

Política de acceso abierto

La página web de la Revista (www.raccefyn.co) permite el acceso libre y abierto a los artículos con el fin de contribuir a la visibilidad, el acceso y la difusión de la producción científica.

Directrices para autores

Tipología de los artículos publicados en la Revista

Artículos originales o artículos de investigación científica y tecnológica: documento que presenta, de manera detallada, los resultados originales de proyectos de investigación. La estructura generalmente utilizada contiene los siguientes apartes importantes: introducción, metodología, resultados, discusión, conclusiones y referencias.

Artículos cortos: documentos breves que presenta resultados originales preliminares o parciales de una investigación científica o tecnológica y, que, por lo general, requieren de una pronta difusión.

Artículos de posesión o artículos de revisión de tema: documentos resultantes de una investigación donde se analizan crítica y sistemáticamente, a la par que se integran los resultados de investigaciones publicadas o no publicadas, centradas en un campo de la ciencia o la tecnología, con el fin de dar cuenta de sus avances y sus tendencias de desarrollo. Presentar un artículo de revisión constituye un requisito para que un Académico pueda posesionarse como miembro correspondiente o de número.

Cartas al editor: posiciones críticas, analíticas o interpretativas sobre los documentos publicados en la revista que, a juicio del Comité Editorial, constituyen un aporte importante a la discusión del tema por parte de la comunidad científica de referencia.

Comentarios bibliográficos: son escritos críticos breves sobre libros recientes publicados en las disciplinas de interés de la Revista.

Corrección de los autores

Fe de erratas

Indicaciones a los autores

Los autores deben tener en cuenta las siguientes indicaciones:

1. Los trabajos presentados deberán ser originales y de alto nivel, escritos en inglés o español, y que traten sobre aspectos relacionadas con las Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Todos los trabajos aceptados quedarán como propiedad permanente de la Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de manera que la misma podrá publicarlos en formato físico y electrónico, incluyendo la internet. (Ver transferencia derechos de autor).
2. El autor de la correspondencia aceptará mediante comunicación escrita firmada que el manuscrito es un trabajo original, que no ha sido publicado por ningún medio, ni está siendo evaluado para aparecer en otra publicación impresa o electrónica y que, además, ha sido aceptado por todos los autores para su publicación en la Revista. Igualmente, que los derechos de autor no han sido cedidos a nadie con anterioridad. (Ver formatos declaración originalidad, conflicto de intereses y sesión de derechos de autor en la página web de la Revista: <http://www.raccefyn.co>).
3. La participación de los autores en el trabajo deberá ser suficiente como para aceptar públicamente la responsabilidad por los aportes de cada cual. El orden de los autores en la publicación deberá ser una decisión compartida de los coautores, quienes deberán ser capaces de explicar el orden en el que aparecen sus nombres. Finalmente, el manuscrito debe contener un párrafo en el que se detallará la contribución de cada uno de los autores.
4. De acuerdo con el ICMJE, todos los colaboradores que no cumplan con los criterios de autoría o hayan realizado contribuciones menores deberán aparecer en la sección de *Agradecimientos*, pero no serán citados como autores. Las ayudas económicas y materiales deberán aparecer en los *Agradecimientos*.
5. La terminología debe regirse por el Código Internacional de Nomenclatura Botánica. La terminología física, química o bioquímica, deberá seguir las normas del Comité de Nomenclatura de la Unión Internacional de la Química Pura y Aplicada (IUPAC). Deberán usarse las abreviaturas internacionales convencionales y las unidades del Sistema Internacional (SI). Los nombres científicos deberán ser escritos en la forma recomendada por el *Internacional Code of Botanical Nomenclature* y por el *International Committee on Systematics of Prokaryotes* o ICSP.

Envío y presentación del manuscrito

Los artículos deberán ser enviados a través de <http://www.raccefyn.co>

El manuscrito incluirá además de la página correspondiente al título, el resumen, las referencias, las tablas y sus títulos, las leyendas de las figuras, todos los cuales deberán estar escritos en procesador de palabras Word a doble espacio, usando la fuente Arial de tamaño 12, sin justificar el texto. No debe olvidarse el usar la numeración en todo el manuscrito. Extensión máxima de 30 páginas, entre 5.000 a 8.000 palabras.

Los manuscritos deben incluir la siguiente información:

1. Una hoja de presentación, página en Word con los nombres y apellidos (si desea poner el segundo apellido, debe ir separado por un guion) de todos los autores (sin cargos, ni grado académico), filiaciones y correos electrónicos. Agregar aquí un párrafo en el que los autores declaren su aporte personal al manuscrito bajo consideración.
2. Título completo del manuscrito en español e inglés (máximo 30 palabras, 165 caracteres)
3. Título corto (máximo 10 palabras, 50 caracteres)
4. Resumen en español e inglés que no supere 250 palabras.
5. Palabras clave en español y en inglés que no superen en número a seis, separadas por punto y coma.
6. Nombre del autor responsable de la correspondencia con su dirección completa, número telefónico, dirección electrónica y código ORCID. *Open Researcher and Contributor ID* (Identificación del Investigador y del colaborador abierto)
7. Direcciones electrónicas de todos los coautores y códigos ORCID *Open Researcher and Contributor ID*.
8. Texto, referencias y tablas en un mismo archivo en conjunto con las leyendas de las figuras en formato jpg o tiff en archivos individuales y con una resolución mayor a 300 dpi (*dots per inch*).
9. El número máximo de tablas y figuras es de 7. Para enviar información adicional se puede emplear la sección de *Información suplementaria* debidamente referenciada en el texto: tabla 1S, 2S, etc.; figura 1S, 2S, etc.

Estructura del manuscrito

Introducción: se debe mostrar el marco teórico en el cual se inscribe el tema de la investigación, propósito del artículo y justificación del estudio indicando, además, la delimitación de la pregunta problema.

Materiales y métodos: se describirán los sujetos de observación o experimentación, aparatos o dispositivos y metodologías empleadas en el estudio. La descripción de la metodología debe tener referencias de los métodos usados.

Análisis estadístico: señalar los métodos estadísticos utilizados y la manera de analizar los datos.

Resultados: deben presentarse en secuencia lógica, con las tablas y las figuras acompañadas de una explicación y análisis de las mismas.

Discusión: debe hacerse énfasis en los aspectos nuevos e importantes del estudio, contrastando los resultados con la información pertinente disponible en literatura actualizada y relacionar las conclusiones con los objetivos propuestos. Se deben incluir las implicaciones y limitaciones de los hallazgos y comparar las observaciones relevantes con las de otros estudios.

Los resultados y la discusión pueden presentarse también en forma combinada, en cuyo caso la sección se denominará *Resultados y Discusión*.

Conclusiones: deberán responder al objetivo de la investigación reportada e incluir el planteamiento de objetivos futuros a seguir en la línea de investigación.

Referencias: todas las referencias bibliográficas se insertarán en el texto y deberán llevar siempre entre paréntesis el apellido del primer autor y el año de publicación. Si el apellido del autor o autores forma parte de la estructura formal de la frase, sólo se pondrá entre paréntesis la fecha; por ejemplo: Pérez y Ribas (1996). Si no forma parte de la estructura formal del texto, por ejemplo: ... como indica Barbudo (2003). Si son solo dos autores se pondrán los dos apellidos, si son más de dos sólo se pondrá el apellido del primero añadiendo “*et al.*”

La Revista ACCEFYN utiliza las normas del Manual APA, estas emplean un sistema de citación de autor-fecha.

Lista de referencias. Se organizan alfabéticamente y se citan de la siguiente manera:

Artículo de revista

Apellido, A. A., Apellido, B. B., Apellido, C. C. (Año). Título del artículo. Nombre de la revista, **volumen:** pp-pp.

Ejemplo

Kay, M.A., Glorioso, J.C., Naldini, L. (2001). Viral vectors for gene therapy: the art of turning infectious agents into vehicles of therapeutics. *Nat Med.*, **7:** 33-40.

Libro

Apellido, A. A. (Año). Título. Ciudad, País: Editorial

Ejemplo

Salisbury, F. B., Ross, C. M. (1994). *Fisiología Vegetal*. Guadalajara, México: Grupo editorial Iberoamérica.

Capítulo de libro

Apellido, A. A., Apellido, B. B. (Año). Título del capítulo o la entrada. En A. A. Apellido. (Ed.), Título del libro (pp. xx-xx). Ciudad, País: Editorial.

Ejemplo

Guba, E.G. (1983). Criterios de credibilidad en la investigación naturalista. En J. Jimeno Sacristán y A. Pérez Gómez. *La enseñanza: Su teoría y su práctica* (148-165). Madrid, España: Akal.

Revista en línea

Apellido, A. A. (Año). Título del artículo. Nombre de la revista, **volumen** (número): pp-pp. Disponible en: <http://www...>

Ejemplo

Cintrón, G., Lugo, A. E., Pool, D. J., Morris, G. (1978). Mangroves of arid environments in Puerto Rico and adjacent islands. *Biotropica*, **10** (2): 110-121. Disponible en: <http://www.jstor.org/pss/2388013>.

Gutiérrez-Vargas, J.A., Moreno, H., Cardona-Gómez, G.P. (2016). Targeting CDK5 post-stroke provides long-term neuroprotection and rescues synaptic plasticity. *J Cereb Blood Flow Metab*. doi: 10.1177/0271678X16662476

Citas páginas web

Anotar la fecha de la consulta

Ejemplo

Guiry, M.D., Guiry, G.M. (2015). *AlgaeBase*. World-wide electronic publication, National University of Ireland, Galway. Disponible en <http://www.algaebase.org>., accedida entre enero y junio de 2015.

Tablas y figuras: las tablas y cuadros se denominarán tablas y llevarán numeración arábiga de acuerdo con el orden de aparición. El título correspondiente se coloca en la parte superior de la tabla y las notas en la inferior. Los símbolos para unidades deben aparecer en el encabezamiento de las columnas. Si es necesario exponer alguna información, utilizar las letras minúsculas del alfabeto según orden de aparición en la respectiva tabla: a, b, c, d, e, etc.

Las fotografías, gráficos, dibujos y esquemas se denominan todos como Figuras, las cuales se enumeran según el orden de aparición y sus leyendas se describen en hoja separada. Si se trata de micro-fotografías debe indicarse el aumento utilizado. Las personas, o sus nombres, no deben ser identificables en las fotografías pero se requiere permiso escrito para su publicación.

Cuando las tablas y figuras hayan sido tomadas de revistas o libros, sean impresos o electrónicos, se debe especificar la fuente y adjuntar autorización de la respectiva publicación para su reproducción.

Agradecimientos: podrán ser expresados a personas o entidades que hayan ayudado en la realización del trabajo. Se mencionarán las personas y el tipo de ayuda aportada, así como las entidades, instituciones o fundaciones que hayan financiado o suministrado materiales. En caso de proyectos de investigación financiados será suficiente con mencionar el código de registro y la entidad, institución o fundación que lo apoyó económicamente.

Consideraciones

Los trabajos aceptados son propiedad de la Revista ACCEFYN y podrán ser reproducidos total o parcialmente por la Revista.

La Revista no se hace responsable de los contenidos científicos ni de las implicaciones legales de los artículos publicados.

Corrección de estilo y publicación del manuscrito

Una vez aceptados los artículos, éstos se enviarán a corrección orto-tipográfica. Se usará la herramienta de control de cambios de Word, en la cual quedará el registro de cada una de las sugerencias llevadas a cabo y los comentarios o dudas para que el autor o los autores aprueben y contesten apropiadamente.

La versión corregida deberá ser enviada nuevamente para su aprobación definitiva en un plazo mínimo de 48 horas. El manuscrito deberá ir con una carta al editor, informando cuales correcciones fueron procesadas. El editor le informará al autor la fecha aproximada y el número del volumen en el que el trabajo será publicado.

Rectificaciones y correcciones de errores

Las rectificaciones sobre la información suministrada por parte de los autores, se harán en el número inmediatamente posterior al anuncio de las mismas y serán responsabilidad de los mismos autores. La Revista se encargará de publicar una nota aclaratoria a manera de erratas. En el caso que sean necesarias mejoras y corrección de errores orto-tipográficos, de manejo visual de la información o de imprecisiones involuntarias, el o los autores podrán comunicarse al correo de la Revista para que puedan efectuarse en las versiones electrónicas de la Revista.

Falsificación de artículos

Si en el proceso editorial se encuentra falsificación, omisión de datos, duplicidad del artículo o plagio, se devolverá el original al autor con la debida notificación a su institución patrocinadora, centro de investigación o universidad.

Conflicto de intereses

Si los autores o coautores, editores o revisores (evaluadores) tienen algún conflicto de intereses que pueda de alguna manera influir en la transparencia u objetividad en el proceso de revisión por pares y publicación, tal conflicto debe ser declarado.

Los conflictos de interés más evidentes son los llamados conflictos financieros, resultado de relaciones entre empleador-empleado, financiaciones y patentes, así como también honorarios, consultorías, investigación pagada por compañías que dependen de los resultados investigativos, entre otros.

También existen los conflictos personales resultado de amistades o animadversiones, competencias académicas y pasiones en el campo intelectual o moral (por ej. parientes en una compañía que se beneficiaría de los resultados que se van a publicar, el uso de los resultados publicados para promoción inmediata basada en el artículo publicado, creencias religiosas que estén en conflicto directo con la investigación que se va a publicar, entre otros).

Transferencia de derechos de autor

En caso de que el artículo enviado sea aprobado para publicación, el autor principal en nombre propio y en el de los coautores o el autor principal y los coautores deben ceder los derechos de autor del artículo mencionado a la revista de la Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales (ACCEFYN), excepto en los siguientes casos:

- a) Los autores y coautores retienen el derecho de revisar, adaptar, preparar trabajos derivados, presentaciones orales y distribuir a algunos colegas impresos de su propio trabajo publicado, siempre y cuando se dé el crédito correspondiente a la revista de ACCEFYN. También pueden publicarse el título del trabajo, resumen, tablas y figuras del trabajo en los correspondientes sitios web de autores o de sus empleadores, también dando el crédito correspondiente a la revista de ACCEFYN.
- b) Si el trabajo ha sido realizado por contrato, el empleador del autor tiene el derecho de revisar, adaptar, preparar trabajos derivados, reproducir o distribuir en formato impreso el trabajo publicado, de una manera segura y para el uso exclusivo de sus empleados.
- c) Si a la revista de ACCEFYN se le solicitara permiso individual por terceras personas para usar, imprimir o publicar específicamente artículos ya publicados, deberá obtenerse el permiso expreso del autor y coautores del trabajo o del empleador con excepción del uso en salones de clase, bibliotecas o reimpresos en un trabajo colectivo.
- d) La revista ACCEFYN se reserva el posible uso en la portada de la revista, de figuras sometidas con los manuscritos.
- e) Ningún otro derecho, además del de derechos de autor, debe ser reclamado por la revista de ACCEFYN.

Aviso de derechos de autor

Los autores certifican que son los creadores originales del trabajo y declaran que:

- a) Los datos y las referencias a materiales ya publicados están debidamente identificados con su respectivo crédito e incluidos en las notas bibliográficas y en las citas que se destacan como tal y,

en los casos que así lo requieran, se cuenta con las debidas autorizaciones de quienes poseen los derechos patrimoniales.

- b) Todos los materiales que se presentan están totalmente libres de derecho de autor y, por lo tanto, el autor de la correspondencia se hace responsable de cualquier litigio o reclamación relacionada con derechos de propiedad intelectual, exonerando de responsabilidad a la **Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales**.
- c) El trabajo es inédito y no será enviado a otras revistas mientras se espera la decisión de los editores de tal revista. El primer autor declara que no existe un posible conflicto de intereses en este manuscrito.
- d) En caso de ser publicado, los autores del artículo transfieren todos los derechos de autor a la Revista ACCEFYN, sin cuyo permiso expreso no podrá reproducirse ninguno de los materiales publicados en la misma.
- e) A través de este documento, y si el trabajo es aceptado para su publicación, la Revista ACCEFYN asume los derechos para editar y publicar los artículos en índices nacionales, e internacionales o bases de datos con fines académicos y científicos no comerciales en medios impresos, electrónicos, Internet en texto completo o cualquier otro medio conocido o por conocer con respeto de los derechos de autoría.

Transferencia de derechos de autor

En caso de que el artículo enviado sea aprobado para publicación, el autor principal en nombre propio y en el de los coautores o el autor principal y los coautores deben ceder los derechos de autor del artículo mencionado a la revista de la Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales (ACCEFYN), excepto en los siguientes casos:

- a) Los autores y coautores retienen el derecho de revisar, adaptar, preparar trabajos derivados, presentaciones orales y distribuir a algunos colegas impresos de su propio trabajo publicado, siempre y cuando se dé el crédito correspondiente a la revista de ACCEFYN. También se pueden publicar el título del trabajo, el resumen, las tablas y las figuras del trabajo en los correspondientes sitios web de autores o de sus empleadores, dando también el crédito a la revista de ACCEFYN.
- b) Si el trabajo ha sido realizado por contrato, el empleador del autor tiene el derecho de revisar, adaptar, preparar trabajos derivados, reproducir o distribuir en formato impreso el trabajo publicado, de una manera segura y para el uso exclusivo de sus empleados.
- c) Si a la revista de ACCEFYN se le solicitara permiso individual por terceras personas para usar, imprimir o publicar específicamente artículos ya publicados, deberá obtenerse el permiso expreso del autor y de los coautores del trabajo o del empleador con excepción del uso en salones de clase, bibliotecas o reimpresos en un trabajo colectivo.
- d) La revista ACCEFYN se reserva el posible uso en la portada de la revista, de figuras sometidas con los manuscritos.
- e) Ningún otro derecho, además del de derechos de autor, debe ser reclamado por la revista de ACCEFYN.

Declaración de privacidad

Los nombres y las direcciones de correo electrónico incluidos en esta revista se usarán exclusivamente para los fines establecidos en ella y no se proporcionarán a terceros ni serán usados con otros fines.

Lista de comprobación para la preparación de envíos

Como parte del proceso de envíos, los autores están obligados a comprobar que su envío cumpla todos los elementos que se muestran a continuación. Se devolverán a los autores aquellos envíos que no cumplan estas directrices.

1. Carta de sometimiento del artículo, donde informa que todos los autores han leído, aprueban y declaran que:

- Están de acuerdo con el manuscrito remitido, en su contenido, organización y presentación.
- El trabajo es original, el cual no ha sido publicado previamente y, de igual forma, no se someterá a otra revista hasta conocer la respuesta del Comité Editorial.
- En caso de ser aceptado el manuscrito, se autoriza su publicación bajo las normas establecidas por la revista.

- El documento no cuenta con texto o figuras que tengan reserva de derechos y si los tuviere se cuenta con la autorización escrita para su reproducción.
- El documento no contiene citas o transcripciones de obras que carezcan de referencias bibliográficas debidamente citadas.
- Se incluye un párrafo donde los autores declaran cuál fue el aporte de cada uno de ellos al documento.
- Esta carta firmada debe ser adjuntada en el paso 4 del presente proceso de envío en formato PDF.

2. Presentación

- Una página en Word con los nombres y apellidos (nombre completo, apellido y segundo apellido separado por un guion) de todos los autores (sin cargos, ni grados académicos), filiaciones y correos electrónicos.
- Título completo del manuscrito en español e inglés y título corto.
- Nombre del autor responsable de la correspondencia con su dirección completa, número telefónico y dirección electrónica.
- Direcciones electrónicas de todos los coautores.
- Texto, referencias y tablas en un mismo archivo junto con las leyendas de las figuras. Figuras en formato jpg o tiff en archivos individuales.

3. Estructura del artículo. Se incluyen

- El resumen en español e inglés (Abstract).
- Las palabras clave (máximo 6) en español e inglés (Keywords).
- Introducción.
- Materiales y métodos.
- Resultados y Discusión para comunicaciones cortas.
- Discusión.
- Agradecimientos a colaboradores y/o instituciones u organizaciones que financiaron la investigación.
- Referencias.
- Declaración de conflicto de interés.

4 Información adicional: figuras

- Se incluyen como archivo independiente, cada figura en página aparte.
- Se incluyen las leyendas correspondientes al final del original. Estas figuras deberán ser cargadas en el paso 4 del presente proceso de envío en formato JPG o TIF.

5. Información adicional: tablas

- Se incluyen al final del original, elaborados en el modelo más sencillo de tablas del programa Word.
- Se ordenan secuencialmente.
- Se incluye el título correspondiente.

6. Referencias

- Se han seguido las normas de la revista de ACCEFYN en las instrucciones a los autores.

7. Abreviaturas:

- Se introducen entre paréntesis la primera vez que se usan.

8. Nomenclatura:

- Los nombres de género y especie están en letra cursiva.
- Los nombres de microorganismos, plantas y animales se escriben completos la primera vez que se citan, en el título y en el resumen.

9. Ética

- Todos los autores conocen y aprueban la presentación del manuscrito, su contenido, la autoría y el orden de la autoría.
- El manuscrito ha sido postulado solo a la Revista ACCEFYN y no se encuentra postulado ni ha sido publicado en otra revista.
- Si el artículo incluye la investigación en humanos o con animales se han seguido las directrices de la Declaración de Helsinki y el uso de primates no humanos en la investigación.
- Se incluye los agradecimientos a las instituciones u organizaciones que financiaron la investigación.

10. Revisores

Se suministran indicaciones sobre tres o cuatro posibles revisores con sus nombres completos, formación académica y direcciones de correos electrónicos.

To our readers and authors

Focus and Scope

The Journal of the Colombian Academy of Exact, Physical and Natural Sciences (ACCEFYN) is a multidisciplinary quarterly journal that publishes high quality original research articles.

The journal publishes scientific articles in the disciplines of Biomedical Sciences, Behavioral Sciences (philosophy, psychology, anthropology, and sociology), Natural Sciences (Biology, Botany, Microbiology, Zoology, Ecology), Physical Sciences, Chemical Sciences, Earth Sciences (Geology, Environmental Sciences) and Mathematics. It is included in several national and international directories and indexing services like Actualidad Iberoamericana, Agris, CIRS (International Center for Scientific Research), Current Mathematical Publications, EBSCO, Dialnet, Historia Mathematica, Index Kewensis, Latindex, Mathematical Reviews, MathSciNet (on line data base), PERIODICA, SciELO Colombia, On-line Computer Library Center – OCLC, Zentralblatt für Mathematik, Zoological Record, RLG. Within the Colombian citation system, the journal is register in Publindex (The Journal index Departamento Administrativo de Ciencia, Tecnología e Innovación, Colciencias).

The journal's website (www.racefyn.co) allows free and open access to full-text articles with the purpose of contributing to the visibility, access and dissemination of Colombian scientific production. The first issue was published in December 1936, year of the official creation of the National Academy, led by Jorge Álvarez Lleras. The journal has been edited 41 volumes since then.

Peer Review Process

Manuscripts that meet the author guidelines are welcomed. Manuscripts will be assessed by the editor in chief and associate editors' expert in the topic of the manuscript.

If the editors see fit, the manuscript will be sent to, at least, two peers knowledgeable in the topic of the manuscript. It is estimated the peer reviewing process will take around 90 days.

The reviewers can decide to a) accept the article without any modification, b) accept it if some recommendations are addressed, or c) reject the manuscript. If peers exhibit contradicting assessments, an extra reviewer will be approached to settle disparities and reach a final decision.

The corresponding author will be notified of the results of the peer review process. The author should return an amended version, along with a documenting reporting the response to the reviewers, four weeks after receiving the results of the reviewers.

If the author does not send these documents past the suggested time, the journal will assume the manuscript has been withdrawn. If the author send these documents past the suggested time, the journal takes the manuscript as a new submission and the reviewing process starts anew.

Accepted manuscripts are considered property of the journal. Thus, the journal is free to reproduce an entire manuscript or parts of it.

The journal is not responsible of the contents of the published manuscripts and related legal implications.

Publication Ethics and Publication Malpractice Statement

The journal abides by the *Committee on Publication Ethics* (COPE) standards. These guidelines can be consulted in the following links:

COPE guidelines on good publication practice: <https://www.ncbi.nlm.nih.gov/pmc/articles/PMC1753164/>

COPE code of conduct: <https://publicationethics.org/resources/code-conduct>

See document pdf (annex)

Open access policy

The journal enables open access to published articles via its website (www.racefyn.co) to contribute to the dissemination, accessibility, and visibility of scientific work.

Author Guidelines

Research articles. A manuscript documenting the results of at least one experiment/study by following the following structure: introductions, methodology, results, discussion, conclusions, and references. Extra material can be reported as an appendix.

Brief articles. Manuscripts reporting the results of novel experiments/study in a succinct manner and that require prompt diffusion.

Inaugural articles or Review articles. Manuscripts reporting literature reviews on a topic. It is one requirement for the Academics to be admitted to the Academy

Letters to the editor. Manuscripts proposing critical comments, novel analysis or re-interpretations of published work.

Book reviews. Short manuscripts reporting a review of a book recently published within an area of interest to the journal.

Authors correction

Errata

Information for Authors

Authors should bear in mind the following

1. Submitted manuscripts must be original and of outstanding quality. They can be written in Spanish or English in an area related to the **Exact, Physical or Natural Sciences**. All works accepted will remain permanent property of the Colombian Academy of Exact, Physical and Natural Sciences so that such work can be published in hard copy or in electronic format, including web posting. (See transference of authors' rights).
2. The corresponding author will be required to state that the work is original, has not been published elsewhere, is not under review elsewhere and that co-authors agree as to the version submitted. Equally important, the corresponding author will be asked to state whether copyrights have been passed on to other parties. (See form for declaration of originality, conflicts of interest, and authors' rights).
3. It is assumed all listed authors have contributed substantially to the manuscript. Their order in the manuscript should be reached by agreement. Finally, each author's contribution should be explicitly stated. Collaborators whose contribution was not substantial (see above) should be mentioned in the 'acknowledgments' section (see <http://www.icmje.org/> for a reference). Financial supports and grants should also be mentioned in this section.
4. The terminology used in the manuscript should follow that used in specific areas (we therefore recommend authors to consult specialised references in this regards as to their own fields of research). Scientific names should follow recommendations such as those stated, for example, by the International Code of Botanical Nomenclature and the International Committee on Systematics of Prokaryotes.

Submission and Presentation of manuscript

The manuscripts should be submitted using the website of the Academy: <http://www.acefyn.co>

The manuscript, including the title page, the abstract, tables with titles, graphics with descriptive legends, must be prepared in Microsoft WORD processor in double space. Use Arial font size 12 without justification. Do not forget to number the entire manuscript. Maximum extension 30 pages, 5,000 to 8,000 words.

The manuscripts must contain the following information:

1. A page in Microsoft Word with the names and surnames (complete name, first and second family name separated by a hyphen) of all the authors (without positions, and without academic degrees), academic affiliations and email addresses.
2. Complete manuscript title in Spanish and English.
3. Short Title
4. Abstract in Spanish and English using 250 or less words
5. Key words in Spanish and English not containing more than 6 words.
6. Name of the author responsible for all correspondence, including his complete address, telephone number and email address.
7. Electronic addresses of all the co-authors.
8. Text, bibliographical references, and tables in the same file together with the legends for all the figures.
9. Figures must be in jpg or TIF format.

Manuscript Structure

Introduction: there must be a clear description of the theoretical framework of the theme of the investigation, purpose of the article and justification of the study, indicating the limitation of the problem question.

Materials and methods: a description of the object of observation or experimentation, instruments or devices and the methodology employed in the study.

Statistical analysis: indicate the statistical methods used and the data analysis employed.

Results: these must be presented in a logical sequence, with the accompanying tables and figures with their respective explanations and analysis.

Discussion: emphasis must be given to those aspects of the study which are new and important, contrasting the results with the relevant information available in the recent literature and relate the conclusions with the proposed objectives. Mention must be made of the implications and limitations of the results found and a comparison of the relevant observations with that of other studies. The results and the discussion may also be presented in a combined form.

Conclusions: an up to date survey of the investigation. Mention can be made here of future objectives of the same line of investigation.

References: these citations must be verifiable. When a citation is made, indicate in the text the author, the year and page in the following way: last name of the first author and year of publication Pérez (1996). If there are only two authors use both last names Perez and Ribas (1996). If there are more than two authors use only the first last name followed by *et al.*

Reference list: alphabetically and following the examples

Journal article

Last name, A. A., Last name, B. B., Last name, C. C. (Year). Title. Journal name, **volume:** pp-pp.

Example

Kay, M.A., Glorioso, J.C., Naldini, L. (2001). Viral vectors for gene therapy: the art of turning infectious agents into vehicles of therapeutics. *Nat Med.*, **7:** 33-40.

Book

Last name, A. A. (year). Title, City, Country: Publisher

Example

Salisbury, F. B., Ross, C. M. (1994). *Fisiología Vegetal*. Guadalajara, México: Grupo editorial Iberoamérica.

Book chapter

Last name, A. A., Last name, B. B. (Year). Chapter title. In A. A. Last name. (Ed.), Book title (pp. xx-xx). City, Country: Publisher.

Example

Guba, E.G. (1983). Criterios de credibilidad en la investigación naturalista. En J. Jimeno Sacristán y A. Pérez Gómez. *La enseñanza: Su teoría y su práctica* (148-165). Madrid, España: Akal.

Journal on line

Last name, A. A. (Year). Article title. Journal, **volume** (issue): pp-pp. Available in <http://www...or DOI>

Examples

Cintrón, G., Lugo, A. E., Pool, D. J., Morris, G. (1978). Mangroves of arid environments in Puerto Rico and adjacent islands. *Biotropica*, **10** (2): 110-121. Available in: <http://www.jstor.org/pss/2388013>

Gutiérrez-Vargas, J.A., Moreno, H., Cardona-Gómez, G.P. (2016). Targeting CDK5 post-stroke provides long-term neuroprotection and rescues synaptic plasticity. *J Cereb Blood Flow Metab.* doi: 10.1177/0271678X16662476

References web pages

Date of the access

Example

Guiry, M.D., Guiry, G.M. (2015). *AlgaeBase*. World-wide electronic publication, National University of Ireland, Galway. Available in <http://www.algaebase.org>., accessed in June 2015.

Tables and graphics: The tables and frames are called tables and carry an Arabic numeration in accordance with the order in which they appear. The corresponding title is placed on the upper part of the table and notes are placed in the lower part. Symbols for unit measures must appear in the column

headings. If it is necessary to display some information, use lower case letters from the alphabet according to the appearance of the table: a, b, c, d, e, etc.

Photographs, graphics, pictures, or sketches are named figures, are enumerated in order of appearance, and their legends must be written in a separate page. With respect to microfiches, indicate the size of the augmentation used. People or their names should not be identifiable in photographs, unless written permission for their publication has been obtained.

When tables and figures have been taken from magazines or books, published in hard copy or electronically, specify the source and include the authorization for its reproduction from the respective publication.

Acknowledgments: These can be expressed to persons or entities who have aided in the realization of the work. Mention is made of persons and their type of aid provided, as well as to entities or institutions which have provided financial and material assistance. In case of investigative projects with financial support it suffices to mention the registry code and the entity, institution or foundation which provided the economic support.

Considerations

They will be published in the following issue to the announcement of the correction. They are responsibility of the authors. Errata are responsibility of the Journal.

Fabrication of evidence, data omission, duplicity of data or plagiarism will be penalized. The authors and their institutions, research center or university and sponsors will be notified.

Once the article has been accepted, it will undergo a style and format revision which will bring it to its definitive version. The authors will receive the galley proofs in PDF format for the correction of errors before its printing. The corrected version must be returned for final approval within a period of 48 hours. The manuscript must be accompanied with a letter to the editor informing him of the corrections that were carried out. The editor will inform the author of the date and volume number in which the publication will appear.

If the authors or co-authors, the editors or reviewers (evaluators) have some conflict of interest which may in any way influence the transparency and objectivity of the peer review process and publication, it must be so declared.

The most obvious conflicts of interest are those referred to as financial conflicts, which result between, employer-employee, investments, and patents, as well as honoraria, consulting, paid investigation by companies which depend on the investigative results, etc.

There also exist personal conflicts arising from friendships, animosity, academic competencies and passions in the moral or intellectual field (for example relatives in a company which will benefit from the results to be published, the use of the results for immediate promotion based on the published article, religious beliefs which are in direct conflict with the investigation that will be published, etc.).

Copyright Notice

Declaration of originality and transfer author's rights

The authors declare:

The published data and reference materials have been duly identified with their respective credits and have been included in the bibliographic notes and citations that have been so identified and that should it be required, I have all releases and permissions from any copyrighted material.

All material presented is free from any copyright and that I accept full legal responsibility for any legal claims relating to copyrighted intellectual property, fully exonerating from responsibility the **Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales**.

This work is unpublished and will not be sent to any other journal while waiting for the editorial decision of this journal. I declare that there is no conflict of interest in this manuscript.

In case of publication of this article, all author's rights are transferred to the **Revista de la Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales**, and so cannot be reproduced in any form without the express permission of it.

By means of this document, if the article is accepted for publication by the **Revista de la Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales**, the Revista assumes the right to edit and publish the articles in national and international indices or data bases for academic and scientific use in paper, electronic, CD-ROM, internet form either of the complete text or any other known form known or to be known and non-commercial, respecting the rights of the authors.

Transfer of author rights

In case the article is approved for publication, the main author in representation of himself and his co-authors or the main author and his co-authors must cede the author rights of the corresponding article to the **Revista de la Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales**, except in the following cases:

The authors and co-authors will retain the right to revise, adapt, prepare derived works, oral presentations, and distribution to some colleagues of reprints of their own published work, if the corresponding credit is given to the **Revista de la Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales**. It is also permissible to publish the title of the work, summary, tables, and figures of the work in the corresponding web sites of the authors or their employers, also giving credit to the Revista.

If the work has been realized under contract, the author's employer has the right to revise, adapt, prepare derivative works, reproduce, or distribute in hard copy the published work, in a secure manner and for the exclusive use of his employees.

If the **Revista de la Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales** were approached for permission by a third party for using, printing, or publishing specifically articles already published, the Revista must obtain the express permission of the author and co-authors of the work or of the employer except for use in classrooms, libraries, or reprinted in a collective work. The **Revista de la Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales** reserves the possible use in its front cover of figures submitted with the manuscripts.

No other right, other than the author's right, can be claimed by the **Revista de la Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales**.

Privacy Statement

The names and e-mail addresses appearing in the journal will be used solely for the purposes explicitly therein expressed and by no means will they be supplied to third parties.

Submission Preparation Checklist

As part of the submission process, authors are required to check off their submission's compliance with all of the following items, and submissions may be returned to authors that do not adhere to these guidelines.

1. Letter of submission, where it is stated that all authors have read and approved that:

- The submitted manuscript conforms in content, organization and presentation with established norms.
- The original article has not been previously published in any form nor has it been submitted to another journal nor will it be until an answer is received from the Editorial Committee.
- In the case the manuscript is accepted, it is then authorized to be published under the journal's norms.
- The document may not be published without authorization of all copyrighted texts and figures.
- The document is fully cited in a list of references.

2. Appearance

- The first page written in Word with names and surnames (complete name, first and second surnames separated by a hyphen) of all authors (without job titles or academic titles), affiliations and e-mail address.
- Complete title of the manuscript in Spanish and English. Short title.
- Name of person responsible for correspondence with their complete address, telephone number and electronic address.
- E-mail of all coauthors.
- Text, references and tables in the same file together with legends of the figures. Figures in jpg or TIF format.

3. Structure of the article

The following sections are to be included:

- An abstract should be included in both Spanish and English.
- Key words (no more than 6) should be included in both Spanish and English.
- Introduction.
- Materials and methods.

- Results and Discussion for short communications.
- Discussion.
- Acknowledgments to collaborators and institutions and organizations which financed the research.
- Declaration of conflict of interest.

4. Additional information: Figures

- Each figure is included in a separate page in jpg or TIF format
- Corresponding legends are included in a separate page
- Figures should be charged in JPG o TIF format

5. Additional information: Tables

- Tables are included on a separate page and are presented in a simple manner as a Word table
- Tables are ordered sequentially

6. References

Citations must follow the journal ACCEFYN's norms found in the authors' instructions

7. Abbreviations

The first use is introduced in parentheses

8. Nomenclature

- The generic and specific names are written in italics
- Names of micro-organisms, plants and animals are written out completely the first time that they are cited in the title and in the abstract.

9. Ethics and malpractice considerations

- All authors must know and approve of the form, content, authors, and the order of the authors
- An article that has been submitted to the journal ACCEFYN has not be submitted or published in any other journal.
- If the article includes research on human or animals have all authors read and followed the guiding principles of the Declaration of Helsinki and the use of non-human primates in the research?

10. Reviewers

List 3 or 4 possible reviewers with their complete names, academic background and e-mails.

