

REVISTA DE LA ACADEMIA COLOMBIANA de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales

LA ACADEMIA ES ÓRGANO CONSULTIVO DEL GOBIERNO NACIONAL

VOLUMEN XXXVI

DICIEMBRE DE 2012

NÚMERO 141

DIRECTORA DE PUBLICACIONES: MARGARITA PEREA DALLOS



CONTENIDO - CONTENTS

Pág.	Pág.
Astronomía (Astronomy)	Física (Physics)
Cinémática de la región emisora de líneas coronales observadas en galaxias Seyfert [kinematics of the emission region of coronal lines observed in Seyfert galaxies] <i>José Gregorio Portilla, Alberto Rodríguez-Ardila, Juan Manuel Tejeiro</i>473	El mecanismo del universo relajado: posible solución dinámica y libre de ajustes finos al viejo problema de la constante cosmológica [The relaxed Universe mechanism: a possible dynamical and free of fine-tuning solution to the old Cosmological Constant problem] <i>José F. Rodríguez, Yeinzon Rodríguez</i>549
La órbita del satélite Libertad I [The orbit of the Libertad I satellite] <i>José Gregorio Portilla</i>491	Fitopatología (Plant Pathology)
Botánica (Botany)	Evaluación de inductores de resistencia para el manejo de nematodos fitoparásitos en plántulas de plátano [Evaluation of inductors of resistance to manage plant parasitic nematodes in seedlings of plantain] <i>Catalina Quintero Vargas, Jairo Castaño Zapata</i>571
Novedades en Asteraceas Colombianas – II [Novelties in Colombian Asteraceae - II] <i>Santiago Díaz-Piedrahita, Betsy Viviana Rodríguez-Cabeza</i>501	Matemáticas (Mathematics)
<i>Salvia guacana</i> , una nueva Labiatae de Colombia con flores resupinadas y sinopsis de <i>Salvia</i> sect. <i>Tubiflorae</i> [<i>Salvia guacana</i> , a new Labiatae from Colombia with resupinate flowers and synopsis of <i>Salvia</i> sect. <i>Tubiflorae</i>] <i>José Luis Fernández</i>517	Cálculo eficiente del estimador Jackknife para mínimos cuadrados lineales de rango deficiente [Efficient Calculation of the Jackknife Estimator for Linear Least Squares rank deficient] <i>Héctor Jairo Martínez, Ana María Sanabria</i>583
Bioquímica (Biochemistry)	Química (Chemistry)
Caracterización física y matemática de péptidos de alta unión de EBA-181 mediante la aplicación de la teoría de la probabilidad y la entropía [Physical and mathematical characterization of high binding peptides of EBA-181 by means of the application probability and the entropy theory] <i>Javier Rodríguez, Signed Prieto, Pedro Bernal, Catalina Correa, Sarith Viteri, Jessica Mora, Luisa Álvarez, Diego Tapia, Fredy López</i>531	Evaluación de la cascarilla de higuera como posible adsorbente de contaminantes fenólicos en tratamiento de aguas residuales [Evaluation of the castor seed shell as possible adsorbent of phenolic pollutants in aqueous phase] <i>Luisa Fernanda Navarrete Rodríguez, Zurely Rodríguez Parra</i>591
Estudio μ rman de la oxidación superficial de la pirita (FeS_2), Calcopirita (CuFeS_2) por <i>Acidithiobacillus ferrooxidans</i> [Microraman study of the pyrite and chalcopyrite surface oxidation by <i>Acidithiobacillus ferrooxidans</i>] <i>Márquez M.A., Ospina, J.D., Mejía, E.R., Morales A. L.</i>541	Índice general.....595
	Constitución de la Academia (Members of the Academy)599
	Publicaciones de la Academia (Publications of the Academy).....602

CINEMÁTICA DE LA REGIÓN EMISORA DE LÍNEAS CORONALES OBSERVADAS EN GALAXIAS SEYFERT

José Gregorio Portilla¹, Alberto Rodríguez-Ardila², Juan Manuel Tejeiro³

Resumen

J. G. Portilla, A. Rodríguez-Ardila & J. M. Tejeiro. Cinemática de la región emisora de líneas coronales observadas en galaxias Seyfert. *Rev. Acad. Colomb. Cienc.* (141): 305-322, 2013. ISSN:0370-3908.

Dos conjuntos de espectros seleccionados por su emisión prominente de líneas coronales fueron analizados para efectos de caracterizar la cinemática de las nubes de emisión coronal. Se presentan valores de anchos completos a mitad de la altura (FWHM), desplazamiento del pico de línea (Δv), kurtosis e índice de asimetría tanto de líneas coronales como algunas de baja ionización, estos últimos para efectos de comparación. En la mayoría de los objetos no se observa una correlación entre el potencial de ionización y el FWHM, en particular si se tiene en cuenta las líneas de [Fe x] $\lambda 6374$ y [Fe xi] $\lambda 7892$. Con relación al Δv de las líneas coronales, la gran mayoría de los objetos poseen un desplazamiento hacia el azul, mientras que solo el 15 % de ellos mostraron un ligero desplazamiento al rojo. Hay correlaciones suaves entre el FWHM y el Δv de las líneas coronales. También hay indicios de que la luminosidad en el radio afecta el desplazamiento del pico de línea en las líneas coronales lo que sugiere que el chorro de radio está interviniendo en los *outflows* observados en estas líneas.

Palabras clave. Núcleo activo de galaxias, galaxias Seyfert, líneas de emisión, líneas coronales.

Abstract

Two sets of spectra selected by their prominent coronal line emission were analyzed with the purpose of characterizing the kinematics of clouds emitting coronal lines. Values of full width at the half the maximum (FWHM), shift of the peak emission (Δv), kurtosis and asymmetry both of coronal lines and some low ionization lines (these latter for comparison) are presented. For the majority of the objects, no correlation between ionization potential and FWHM it is observed, particularly if [Fe x] $\lambda 6374$ and [Fe xi] $\lambda 7892$ lines are included. Regarding the shifting of the peak emission most of the objects show blueshift whereas just 15 % showed a slight redshift. There are weak correlations between FWHM and Δv for coronal lines. Finally, there is some indication that the radio luminosity has influence in the shift of the peak emission of coronal lines suggesting that the jet radio is intervening in the outflows of these lines.

Key words. Active galactic nuclei, Seyfert galaxies, emission lines, coronal lines.

¹Observatorio Astronómico Nacional, Facultad de Ciencias, Universidad Nacional de Colombia, e-mail: jgportillab@unal.edu.co

²Laboratório Nacional de Astrofísica, e-mail: aardila@lna.br

³Observatorio Astronómico Nacional, Facultad de Ciencias, Universidad Nacional de Colombia, e-mail: jmtejeiros@unal.edu.co

1. Introducción

En la región central de algunas galaxias se observa una prominente emisión de energía que se equipara, y en numerosos casos sobrepasa por varios órdenes de magnitud, a la emisión de la energía que emite el resto de la galaxia en sí. Dicha producción de energía se traduce no solo en emisión de radiación electromagnética prácticamente en todo el rango espectral, desde rayos gamma hasta el radio, sino en características adicionales muy particulares tales como variabilidad (aunque no periódica) de la emisión, existencia de chorros emisores de radio y exhibir espectros en el óptico de carácter no estelar más semejantes a los que presentan las nubes fotoionizadas. Dichos sectores se denominan núcleos activos de galaxias (*Active Galactic Nuclei*, AGNs). De forma estándar se cree que los AGNs están constituidos por agujeros negros supermasivos (con masas mayores o iguales a $10^6 M_{\odot}$ donde M_{\odot} representa una masa solar, i.e., 2×10^{30} kg) rodeados de nubes a diferentes distancias que están siendo sometidas a un baño de radiación que surge del disco de acreción que rodea al agujero negro (Peterson, 1997).

Los tipos más comunes de galaxias hospederas de AGNs son las Seyfert, galaxias generalmente espirales que serían consideradas normales —como la enorme mayoría de las galaxias en el Universo— sino fuera por las características atípicas que se observan en sus centros. Se conocen dos tipos fundamentales de galaxias Seyfert diferenciados a partir de las líneas de emisión observadas en sus espectros ópticos: las de tipo 1 (T1), además de poseer líneas con anchos “delgados” (con una velocidad de dispersión que alcanza los $\sim 500 \text{ km s}^{-1}$), poseen una componente adicional ancha ($\sim 1000\text{-}10000 \text{ km s}^{-1}$) en las líneas de recombinación; las de tipo 2 (T2) sencillamente carecen de esas bases anchas. Las líneas anchas surgen de una zona llamada región de líneas anchas (*Broad Line Region*, BLR), en tanto que las líneas delgadas surgen de una región más extensa denominada región de líneas delgadas (*Narrow Line Region*, NLR). En esta comunicación se tendrá en cuenta un subtipo especial de las galaxias Seyfert de tipo 1: las Seyfert 1 de líneas delgadas (*Narrow Line Seyfert 1*, NLS1), galaxias que poseen signos inequívocos de ser un objeto de tipo 1 (Pogge, 2000), tales como líneas intensas de Fe II y O III relativamente débiles con relación a las líneas de Balmer) en la que las bases de las líneas de recombinación son ligeramente más anchas que las líneas prohibidas (en particular $H\beta < 2000 \text{ km s}^{-1}$), con propiedades en los rayos X bien particulares. Aquellos objetos de tipo 1 que no son NLS1 serán llamados de T1 normal (T1 N).

Los espectros ópticos y de otras zonas del espectro señalan que el grado de ionización reinante en los AGNs puede ser bastante amplio: va desde la recombinación del hidrógeno, pasando por la emisión de líneas prohibidas (lo cual permite colocar cotas sobre la densidad reinante

en las nubes emisoras) de especies tales como S II, N II y O III (Osterbrock & Ferland, 2006). En algunos casos, incluso, se observa emisión de líneas prohibidas de especies con un alto potencial de ionización, tales como Fe VII, Fe X, Si X, etc. Esas líneas de emisión que surgen de especies químicas con potenciales de ionización igual o superior a 100 eV se denominan líneas coronales, llamadas así porque se detectaron por vez primera en la corona solar. También es común referirse a ellas como líneas prohibidas de alta ionización (*Forbidden high-ionization lines*).

Las líneas coronales presentan características morfológicas que las distinguen de las líneas de baja ionización propias de la NLR. Desde los años 70 del siglo pasado se ha reportado que las líneas coronales en galaxias Seyfert suelen tener anchos mayores —usualmente cuantificados por el ancho completo a mitad de la altura, FWHM— que los que presentan las líneas prohibidas de baja ionización, pero en ningún caso al extremo de llegar a los anchos que distinguen la BLR (Phillips & Osterbrock, 1975; Cooke et al., 1976; Penston et al., 1984). Una extensión de este resultado, y con frecuencia anotada como característica notable de las líneas coronales, es la correlación entre el ancho de la línea y el grado de ionización de la especie química, esto es, a mayor ancho, mayor potencial de ionización (Wilson, 1979; Pelat et al., 1981; De Robertis & Osterbrock, 1984). Sin embargo, investigaciones subsecuentes con otros AGNs han revelado que son varios los objetos que no siguen la correlación entre el FWHM y el potencial de ionización (Wilson & Nath, 1990; Rodríguez-Ardila et al., 2006, Mullaney & Ward, 2008, Rodríguez-Ardila et al., 2011).

Otra característica que suele observarse de las líneas coronales en AGNs es el desplazamiento al azul del pico de la línea con relación a las líneas de baja ionización (Grandi, 1978; Wilson, 1979; Shuder, 1980; Pelat et al., 1981; Kollatschny et al., 1983; Jaffe et al., 2004; Appenzeller & Wagner, 1991; Erken et al., 1997; Vanden Berk, et al., 2001). Sin embargo, hay claras indicaciones de que dicho corrimiento en AGNs no es universal. Osterbrock (1981) reporta un “significativo” corrimiento al rojo de las líneas de más alta ionización, incluyendo [Fe XIV] $\lambda 5303$, en Mrk 699. Appenzeller & Östreicher (1988) analizan varios perfiles de líneas coronales detectadas en una muestra de siete galaxias Seyfert: en tres de ellas hay desplazamiento al azul (Akn 120, NGC 3783, IC 4229A, todas Seyfert 1) y en otras cuatro (NGC 3081, NGC 4507, NGC 5728 y NGC 5506, las tres primeras Sy2 y la última Sy1.9) presentan líneas coronales ligeramente desplazadas hacia el rojo, con la primera revelando estructura de doble pico en Fe VII.

Por su parte, Rodríguez-Ardila et al. (2006) encuentran en AGNs muy cercanos que, en general, las líneas coronales en el óptico que provienen del núcleo no resuelto muestran ligeros corrimientos al azul, que van

desde una decena de km s^{-1} hasta seis centenas de km s^{-1} . Sólo en dos galaxias Seyfert 2 (NGC 1386 y Circinus) se encuentra un ligero desplazamiento al rojo pero no en todas las líneas. Los mismos autores observan en varias galaxias (Circinus, MCG-6-30-15 y NGC 3783) que las líneas coronales pueden desacoplarse en dos componentes: una delgada (con FWHM que van desde 100 hasta 540 km s^{-1}) y otra ancha (con FWHM comprendidos entre 290 y 1380 km s^{-1}). En general, se observa que el centroide de la componente delgada corresponde a la velocidad sistémica de la galaxia.

Mullaney & Ward (2008) examinaron las propiedades cinemáticas de las líneas de emisión de 10 galaxias Seyfert: observaron corrimiento al azul de todas las líneas coronales con relación a las líneas de baja ionización salvo en el caso de Mrk 573 (la única Sy2) en la que se observa desplazamiento al rojo de todas las líneas coronales. En general, donde se observa el desplazamiento al azul, se aprecia que es mayor a medida que se incrementa el potencial de ionización.

El estudio de los perfiles de las líneas coronales también puede arrojar importante información sobre el estado cinemático del gas emisor. Sin embargo, dado lo poco intensas que suelen ser estas líneas, son relativamente pocos los perfiles que están disponibles en la literatura, los cuales no siempre cumplen con la debida calidad en cuanto a resolución y razón señal/ruido (S/R). Algunos pocos perfiles de [Ne v] $\lambda 3426$ y de [Fe VII] $\lambda 6087$ (acompañados por perfiles de líneas de más baja ionización) son mostrados por **Whittle** (1985) revelando una clara asimetría consistente en alas extendidas hacia el azul. Un estudio más completo para las líneas [Fe VII] $\lambda \lambda 5721, 6087$ y [Fe X] $\lambda 6374$ es el reporte de **Appenzeller & Östreicher** (1988) (en el que también aparecen de [Fe XIV] $\lambda 5303$ y [Fe XI] $\lambda 7892$). Estos autores encuentran que los perfiles de las líneas coronales (en 7 galaxias Seyfert) no solo son más simétricos sino que parecen ajustarse más a perfiles gaussianos cuando son comparados con los perfiles de O III lo que sugiere que solo una pequeña fracción de la NLR contribuye a la emisión de las líneas coronales.

De Robertis & Shaw (1990) presentan desplazamientos y valores de índice de asimetría de varias líneas de distinta ionización (incluidas líneas coronales) de seis galaxias Seyfert y concluyen que la asimetría de la línea se correlaciona con el potencial de ionización (y la densidad crítica) pero sus modelos de NLR favorecen más *inflows* del gas que *outflows*.

Veilleux (1991) presenta perfiles de [Fe VII] $\lambda \lambda 5721, 6087$ para Mrk 359 y NGC 4151 en las que se evidencian alas extendidas hacia el azul. En lo que respecta a la línea de [Fe XI] $\lambda 7892$ sobresale el trabajo de **Wagner** (1997). En los últimos años han aparecido los trabajos de **Rodríguez-Ardila et al.** (2006) y **Mullaney & Ward** (2008) que contienen algunos perfiles de líneas en el óptico

como también en el NIR (**Mueller Sánchez et al.**, 2006) y en el MIR (**Spoon et al.**, 2009; **Spoon & Holt**, 2009). Lo que estos estudios muestran es que, en general, las líneas coronales tienden a presentar perfiles marcadamente asimétricos, caracterizados por alas extendidas hacia el azul y una caída aguda de la forma de la línea hacia el rojo. Esta característica suele explicarse en términos de gas que está siendo eyectado en dirección al observador (*outflows*).

Por lo que se acaba de describir, se infiere que no es mucha la información que se dispone de líneas coronales en espectros ópticos de AGNs con la debida resolución espectral en las que se pueda realizar un análisis estadístico sobre la tendencia predominante de los perfiles y desplazamiento de líneas y con ello caracterizar la cinemática de la región emisora. Por ello, esta comunicación aborda varios aspectos tendientes a estudiar la morfología y el desplazamiento de las líneas de emisión coronal y contrastarlos con líneas de más baja ionización. Para emprender este estudio, disponemos de espectros ópticos de 34 galaxias Seyfert: 14 de ellos obtenidos por dos de los autores en el observatorio de *Pico dos Dias* y otros 20 seleccionados de una muestra de espectros con emisión coronal obtenidos de la página del *Sloan Digital Sky Survey* (SDSS). Claramente, por la robustez de la muestra, este estudio se constituye en la caracterización morfológica de líneas coronales más completa realizada hasta la fecha.

La sección 2 describe la selección de la muestra de galaxias; la sección 3 describe la observación y reducción de los datos de la submuestra P; la sección 4 contiene los resultados obtenidos en tanto que la sección 5 presenta una discusión e interpretación de los resultados. Finalmente, la sección 6 contiene las conclusiones.

2. Selección de la muestra

Tal y como se comentó atrás, la muestra está integrada por dos submuestras: una, que llamaremos la submuestra P, está integrada por espectros que fueron tomados por dos de los autores en el observatorio de *Pico dos Dias*, en Brasil; la segunda, que llamaremos la submuestra S, está conformada por espectros especialmente seleccionados tomados del *Sloan Digital Sky Survey*.

La submuestra P de galaxias Seyfert fue escogida con base a dos criterios observacionales. Primero que todo, todas debían ser conocidas emisoras de líneas coronales (casi siempre [Fe VII] $\lambda 6087$ y, de ser posible, [Fe X] $\lambda 6374$); debían ser, además, galaxias activas del universo cercano, esto es, relativamente brillantes (magnitudes en el visible, $m_v \sim 13-14$) para efectos de evitar prolongados tiempos de exposición, sin sacrificar una adecuada relación S/R. Por ello se realizó una búsqueda de galaxias Seyfert en la literatura. Adicional a esto, por supuesto, está el constreñimiento de la latitud del observatorio de *Pico dos*

Dias ($\phi \sim 22.5^\circ$ S) y las fechas de observación (agosto y octubre). De particular ayuda en la selección fue el trabajo de **Nagao et al.** (2000) dado que contiene un extenso listado de AGNs con emisión coronal en el óptico. En total,

el número de galaxias que conforman la submuestra P fue de 14, clasificadas así: 7 de Tipo 1 “normal” (T1 N), 3 del subtipo NLS1 y 4 de Tipo 2 (T2).

Tabla 1: Galaxias que integran la muestra. La primera columna muestra el nombre común, la segunda y tercera columnas presentan las coordenadas ecuatoriales (2000.0), la cuarta muestra el tipo, la quinta el corrimiento al rojo, la sexta el exceso de color ocasionado por la Vía Láctea, la séptima la magnitud aparente en el visible y la última la pertenencia de la galaxia: P: proveniente de la muestra de *Pico dos Dias*; S: perteneciente a la muestra del SDSS.

Galaxia	A.R., 2000 (h m s)	δ , 2000 ($^\circ$ ' ")	Tipo	z	E(B-V) Gal.	m_v	Origen submuestra
MRK 335	00 06 19.5	+20 12 10	T1 (NLS1)	0.025785	0.035	13.75	P
TOL 0109-383	01 11 27.6	-38 05 00	T2	0.011865	0.016	13.90	P
MRK 975	01 13 51.0	+13 16 18	T1 N	0.049363	0.026	14.76	P
II Zw1	01 21 59.8	-01 02 24	T1 N	0.055032	0.046	15.17	S
Fairall 9	01 23 45.8	-58 48 20	T1 N	0.047016	0.027	13.50	P
MRK 573	01 43 57.8	+02 21 00	T2	0.017179	0.023	13.68	P
MRK 607	03 24 48.7	-03 02 32	T2	0.009176	0.047	13.32	P
3C120	04 33 11.1	+05 21 16	T1 N	0.033010	0.297	14.20	P
ESO 362-G018	05 19 35.8	-32 39 28	T1 N	0.012445	0.017	12.50	P
RXSJ07424+4656	07 42 27.1	46 56 42	T1 N	0.168295	0.069	19.58	S
NPM1G+48.0114	08 39 49.7	48 47 02	T1 (NLS1)	0.039621	0.031	16.70	S
MRK 110	09 25 12.9	52 17 11	T1 N	0.035394	0.013	16.41	S
3C 234.0	10 01 49.6	28 47 09	T1 N	0.185138	0.019	17.27	S
KUG1031+398	10 34 38.6	39 38 29	T1 (NLS1)	0.043778	0.015	16.90	S
MRK 1310	12 01 14.5	-03 40 40	T1 N	0.019697	0.031	14.58	S
IC 3599	12 37 41.2	26 42 27	T1 N	0.021205	0.019	15.50	S
MRK 236	13 00 19.9	61 39 18	T1 N	0.052231	0.013	16.80	S
SBS 1258+569	13 00 52.3	56 41 07	T1 N	0.071872	0.012	17.35	S
IRAS 13144+4508	13 16 39.7	44 52 35	T2	0.091354	0.018	17.45	S
RXSJ13199+5235	13 19 56.9	52 35 34	T1 (NLS1)	0.092430	0.016	17.94	S
SDSSJ13557+6440	13 55 42.8	64 40 45	T1 N	0.075558	0.013	16.71	S
NGC 5548	14 17 59.6	25 08 13	T1 N	0.017142	0.020	13.73	S
MRK 1392	15 05 56.6	03 42 26	T1 N	0.036169	0.047	15.50	S
SBS 1518+593	15 19 21.6	59 08 24	T1 N	0.078269	0.010	15.94	S
SDSSJ15342+3034	15 34 15.4	30 34 35	T1 N	0.094697	0.029	17.22	S
MRK 290	15 35 52.3	57 54 09	T1 N	0.030667	0.015	15.27	S
MRK 699	16 23 45.9	41 04 56	T1 N	0.034091	0.010	16.61	S
1H1934-063A	19 37 33.0	-06 13 05	T1 (NLS1)	0.010286	0.293	14.09	P
1H2107-097	21 09 10.0	-09 40 15	T1 N	0.027299	0.233	14.32	P
SDSSJ22025-0732	22 02 33.8	-07 32 24	T1 N	0.059736	0.033	17.15	S
AKN 564	22 42 39.3	+29 43 31	T1 (NLS1)	0.024200	0.060	14.55	P
MRK 1126	23 00 47.8	-12 55 07	T1 N	0.010457	0.044	14.00	P
NGC 7469	23 03 15.6	+08 52 26	T1 N	0.016088	0.069	13.00	P
NGC 7674	23 27 56.7	+08 46 45	T2	0.029071	0.059	13.92	P

En cuanto a la submuestra S, la selección de los objetos estuvo basada fundamentalmente en la intensidad de la emisión coronal y en la calidad del espectro en cuestión. El primer autor dispone de una muestra de 265 galaxias obtenidas en el servidor del SDSS que tienen en común emisión de [Fe VII] $\lambda 6087$ y, en muy pocos casos, emisión exclusiva de [Ne V] $\lambda 3426$ (**Portilla**, 2011). Éstos espectros fueron localizados a partir de la tabla de galaxias activas (Table-AGN) del catálogo Véron-Cetty & Véron, edición 12

(**Véron-Cetty & Véron**, 2006)⁴. Dicha tabla contiene un número cercano a 21 700 galaxias (clasificadas como Seyfert 1, Seyfert 2, Liners y galaxias H II con brillos intrínsecos hasta $M_B = -23$) distribuidas por toda la esfera celeste. La idea fundamental del proceso de búsqueda fue, conociendo las coordenadas de un objeto, ya previamente identificado y clasificado como galaxia activa y el cual hace parte de un catálogo, localizar si el espectro de dicho objeto ha sido obtenido por el SDSS y está disponible para su estudio.

⁴El catálogo completo está disponible en la página: <http://cdsarc.u-strasbg.fr/viz-bin/ftp-index?VII/248>

Para la selección de los objetos de la submuestra S, debían ser, además, objetos con emisión de [Fe VII] $\lambda 6087$ particularmente notable y en algunos casos de [Fe X] $\lambda 6374$ y de [Fe XI] $\lambda 7892$ acompañado de una adecuada relación S/R. Con excepción tal vez de IC3599 y SDSSJ22025-0732, los espectros presentan en general pocas líneas de absorción provenientes de la población estelar asegurando con ello una fijación del continuo expedita en las zonas de interés. Con base en estos criterios fueron escogidos 20 objetos de la submuestra S clasificados así: 16 de T1 “normal”, 3 del subtipo NLS1 y 1 de T2.

Las propiedades fundamentales de los objetos que integran la muestra así como el tipo de submuestra a la que pertenece, se encuentran en la Tabla 1. A causa del estudio cinemático requerido, los valores de z fueron calculados (y utilizados para corregir por expansión cosmológica) con base a las líneas de emisión de baja ionización siguientes: [O I] $\lambda 6300$, [S II] $\lambda 6731$ y [O II] $\lambda 3727$.

3. Observación y reducción de datos de la submuestra P

Los espectros de ranura larga (*long-slit*) fueron obtenidos con el telescopio de 1.6 m del observatorio de *Pico dos Dias* ubicado en el municipio de Brazópolis, estado de Minas Gerais (Brasil) y el cual es administrado por el *Laboratório Nacional de Astrofísica*. Los espectros se obtuvieron en varias sesiones de observación (14 al 16 de agosto, 30 de agosto al 1 de septiembre y 27 al 30 de octubre de 2006), ver Tabla 2, con un espectrógrafo convencional Cassegrain Boller & Chivens y una cámara CCD 2048 \times 2048. En la Tabla 3 se encuentran las principales características de dicha cámara. Se utilizó la rejilla de 600 líneas mm $^{-1}$ con ángulo de blaze tal que la longitud de onda en el centro de los espectros fuera de 6000 Å en la mayoría de los casos (que llamaremos el sector azul) o en 7800 Å (el sector rojo) y motivado fundamentalmente para registrar las líneas de [Fe VII] $\lambda\lambda 5721, 6087$ y [Fe X] $\lambda 6374$, en el primer caso, y [Fe XI] $\lambda 7892$, en el segundo. En todos los casos se utilizó un ancho de rendija de 1" orientado en la dirección oriente-occidente.

La calidad de la observación no fue fotométrica en la mayoría de las noches, con extinción y condiciones de *seeing* que fluctuaban debido a la presencia de cirrus tenues. La reducción y la calibración de los datos se realizó aplicando procedimientos estándar de IRAF y siguiendo las prácticas usuales de corrección para esta clase de espectros (Wagner, 1992). Todos los espectros fueron corregidos tanto por *bias* como por *flat-field* usando flats de cúpula normalizados así como de flats de cielo tomados o bien al anochecer o al amanecer.

Galaxia	Fecha (UT) (UT)	λ_c (Å)	Masa de aire	Exp. (min)
MRK 335	15 ago. 2006	6000	1.46	20
	16 ago. 2006	6000	1.60	20
Tol-0109-383	30 ago. 2006	6000	1.04	20
	31 ago. 2006	6000	1.16	20
	01 sep. 2006	7800	1.07	30
MRK 975	28 oct. 2006	6000	1.24	20
FAIRALL9	31 ago. 2006	6000	1.27	30
MRK 573	15 ago. 2006	6000	1.13	20
	31 ago. 2006	6000	1.10	20
	01 sep. 2006	7800	1.11	30
	27 oct. 2006	6000	1.10	20
MRK 607	30 oct. 2006	7800	1.13	20
	31 ago. 2006	6000	1.09	20
	29 ago. 2006	6000	1.07	20
3C120	29 oct. 2006	6000	1.13	20
	30 oct. 2006	7800	1.13	20
ESO 362-G018	28 oct. 2006	6000	1.04	20
	30 oct. 2006	7800	1.02	20
	30 ago. 2006	6000	1.68	30
1H1934-063A	14 ago. 2006	6000	1.09	20
	15 ago. 2006	6000	1.07	20
	31 ago. 2006	7800	1.06	30
	29 oct. 2006	7800	1.18	20
1H2107-097	15 ago. 2006	6000	1.04	20
	16 ago. 2006	6000	1.13	20
AKN 564	28 oct. 2006	6000	1.78	20
	29 oct. 2006	7800	1.63	20
MRK 1126	24 oct. 2006	6000	1.10	20
	26 oct. 2006	6000	1.09	10
	29 oct. 2006	6000	1.03	20
NGC 7469	16 ago. 2006	6000	1.17	20
	30 oct. 2006	7800	1.42	20
NGC 7674	15 ago. 2006	6000	1.21	20

Tabla 2: Bitácora de observación

Los espectros 1D tomados en el sector azul, que constituyen la mayoría, fueron extraídos usando la tarea APALL de IRAF. La escala de longitud de onda fue establecida con exposiciones de lámparas de calibración de He-Ar tomadas al final de cada exposición. El tiempo de exposición está referido en la columna 5 de la Tabla 2. La calibración por flujo fue llevada a cabo mediante observaciones de estrellas estándar de Hamuy et al. (1992) y Hamuy et al. (1994) que fueron tomadas al inicio, mitad y final de la noche. Se utilizaron los valores de longitud de onda observados de las líneas de baja ionización tales como [O III] $\lambda 5007$, [S II] $\lambda\lambda 6717, 6731$ y [O I] $\lambda 6300$ con el fin de corregir los espectros por expansión cosmológica. En todos los casos, los valores promediados nunca excedieron un error del 1% comparados con los valores reportados por NED⁵. De igual forma, no se realizó corrección por contaminación estelar de la galaxia (la mayoría de los espectros no evidencian la presencia de fuertes líneas de absorción). Las medidas de FWHM fueron realizadas usando la rutina LINER (Pogge & Owen, 1993). La resolución de los espectros ($R = \lambda/\Delta\lambda$)

⁵NASA/IPAC Extragalactic data Base: <http://ned.ipac.caltech.edu/>

quedó entre 4900 y 6900 dependiendo de la longitud de onda. El ancho instrumental, fijado con las líneas de cielo observadas, fue determinada en $\sim 230 \text{ km s}^{-1}$.

Filas \times columnas	2048 \times 2048
Tamaño del pixel	13.5 μm \times 13.5 μm
Corriente oscura	$1.5 \times 10^{-4} \text{ e}^- / \text{pixel/s}$
Ruido de lectura	2.5 e^-
Saturación	$9 \times 10^4 \text{ e}^- / \text{pixel}$

Tabla 3: Características de la cámara CCD

Los espectros obtenidos en el sector rojo, algunos de los cuales tienen una relación S/R baja, fueron sometidos a un proceso extra. Puesto que en esta región hay fuerte absorción de moléculas tales como agua (bandas en 7100-7450 Å, 8100-8400 Å) y oxígeno molecular (6870 y 7620 Å), es preciso corregir los espectros por estas bandas de absorción. Por ello, inmediatamente después de la toma del espectro de la galaxia de interés, fue preciso obtener

el espectro de una estrella de tipo A. El proceso de extracción, calibración por longitud de onda y flujo de estos espectros fue idéntico a como se hizo en los espectros en el sector azul. La variante que se realizó para eliminar las bandas de absorción consistió en tomar individualmente los espectros de las estrellas tipo A e interpolar linealmente el continuo de la estrella (eliminando previamente las líneas de absorción inherentes de esta) a lo largo de la región espectral. Luego, mediante la tarea TELLURIC de IRAF se procedió a dividir los espectros interpolados por el espectro original de la galaxia y manualmente se dispuso a eliminar las absorciones desplazando sutilmente la longitud de onda. El proceso no siempre fue exitoso debido al fuerte residuo que quedó después de la corrección, por lo que en algunos espectros el ruido fue tan intenso que se decidió eliminar esas regiones ruidosas. Diferencias de masa de aire entre la estrella telúrica y la galaxia mayores a 0.1 son responsables por este residuo. Igualmente, fuertes variaciones de las condiciones de observación (vapor de agua) impiden una correcta anulación de estas bandas moleculares.

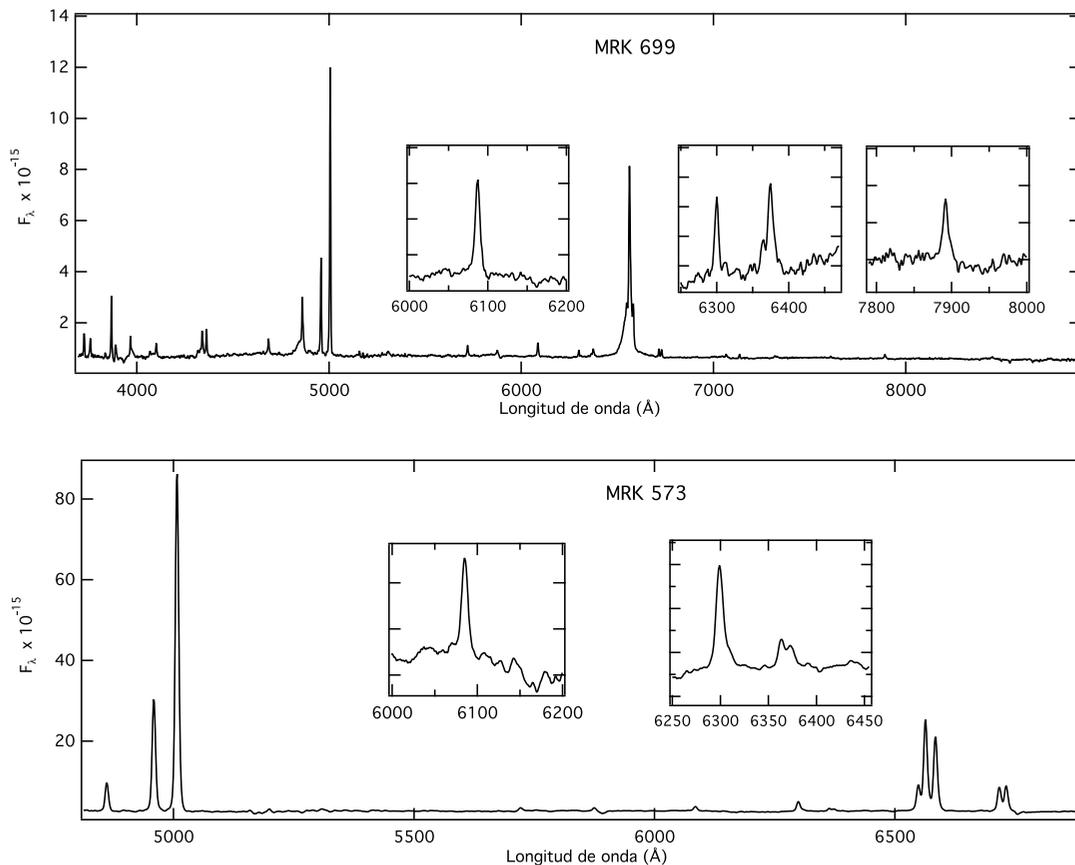


Figura 1: Espectro de Mrk 699 (arriba) perteneciente a la submuestra S y de Mrk 573 (abajo) perteneciente a la submuestra P. Las gráficas insertadas dentro de cada espectro son zonas ampliadas centradas, de izquierda a derecha, alrededor de 6090 Å (que muestra la línea de [Fe III] $\lambda 6087$), 6380 Å (que muestra la línea de [Fe X] $\lambda 6374$) y, en el caso de Mrk 699, de 7890 Å (que muestra la línea de [Fe XI] $\lambda 7892$).

Tabla 4: Anchos completos a mitad de la altura (FWHM) en km s^{-1} de algunas líneas de emisión. Los valores han sido corregidos por ensanchamiento instrumental en cuadratura. El ancho instrumental fue estimado en 230 km s^{-1} (para la submuestra P) y se utilizó el valor de 170 km s^{-1} (ver texto) para la submuestra S.

Galaxia	[O III] $\lambda 5007$	[Fe VII] $\lambda 6087$	[O I] $\lambda 6300$	[Fe X] $\lambda 6374$	[Fe XI] $\lambda 7892$
MRK 335	640±10	1030±100	640±240	750±40	†
TOL 0109	750±10	990±90	760±70	1200±280	820±100
MRK 975	970±20	1270±150	1190 ±90	1390±270	†
II Zw1	480±10	830±70	420±20	440±60	...
FAIRALL9	730±90	650±150	570±40	1100 ±180	†
MRK 573	450±10	400±40	420±40	430±60	390±80
MRK 607	370±10	520±60	250±70	470±40	†
3C120	420±10	310±200	400±40
ESO 362-G018	440±10	420±100	460±100	550±100	†
RXSJ07424+4656	310±10	510±30	210±40	520±90	...
NPM1G+48.0114	230±10	450±50	200±20	240±30	...
MRK 110	290±10	400±10	320±10	420±20	360±30
3C 234.0	500±10	700±20	510±10	380±60	...
KUG1031+398	(n) 230±10 (b) 1060±50	1290±120	430±90	1300±70	810±170
MRK 1310	200±10	280±10	180±10	340±30	410±140
IC 3599	270±10	420±30	280±50	420±180	190±20
MRK 236	280±10	420±90	260±10	480±60	350±130
SBS 1258+569	280±10	340±10	270±20	430±20	270±20
IRAS 13144+4508	(n) 310±10 (b) 990±10	950±120	400±10	430±40	100±30
RXSJ13199+5235	220±10	310±60	190±10	420±30	200±30
SDSSJ13557+6440	330±10	330±10	350±10	480±100	§
NGC 5548	500±10	680±20	600±40	610±140	530±40
MRK 1392	360±10	430±30	380±10	590±70	...
SBS 1518+593	440±10	540±20	500±20	860±90	280±10
SDSSJ15342+3034	430±10	580±60	450±50	920±100	<170
MRK 290	370±10	340±50	340±40	630±50	...
MRK 699	310±10	350±50	300±20	490±20	370±40
1H1934-063A	560±10	580±50	360±10	1140±50	1620±50
1H2107-097	610±10	790±30	450±60	940±220	†
SDSSJ22025-0732	270±10	410±10	300±20	890±130	...
AKN 564	350±10	500±50	290±30	610±160	1000±130
MRK 1126	380±10	300±30	280±40	420±90	†
NGC 7469	500±10	730±20	440±30	‡	...
NGC 7674	(n) 490±10 (b) 1490±20	(n) 580±40 (b) 1460±190	(n) 500±10 (b) 1740±90	...	†

† Espectro rojo no disponible.

§ En zona donde no hay información.

‡ Difícil de desacoplar.

(n) Componente delgada.

(b) Componente ancha.

4. Resultados

En la figura 1 se aprecian dos de los espectros, ya calibrados por longitud de onda y flujo. También están corregidos por expansión cosmológica. Se trata de Mrk 699 (de la submuestra S) y de Mrk 573 (espectro azul de la submuestra P). Ambos figuras presentan regiones ampliadas donde se observan claramente las líneas coronales, cuya particular intensidad en ambos casos es poco corriente en espectros de galaxias Seyfert.

En la Tabla 4 están contenidos los datos del ancho completo a mitad de altura (FWHM) de las líneas de interés. Con base en ella hemos elaborado la figura 2 para una mejor visualización de los datos. Con relación al ancho de las líneas de emisión coronal notamos que el FWHM de [Fe VII] $\lambda 6087$ es, en la mayoría de los casos, mayor que el correspondiente a [O I] $\lambda 6300$ y [O III] $\lambda 5007$. Incluso en algunos casos alcanza y supera el millar de km s^{-1} , como en Mrk 335, Tol 0109 y Mrk 975.

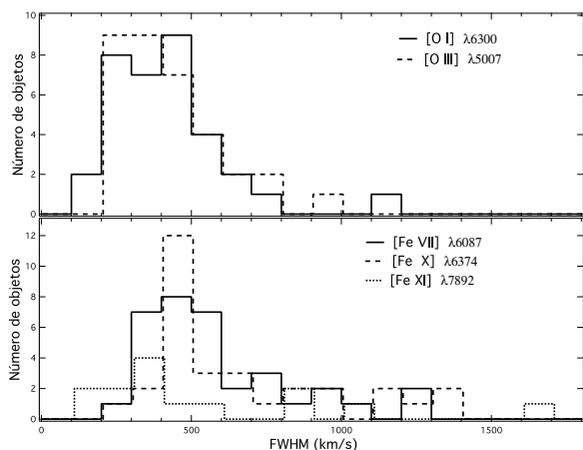


Figura 2: Histograma de número de objetos en función del FWHM (en km s^{-1}) para las líneas de emisión [O I] $\lambda 6300$ y [O III] $\lambda 5007$ (arriba) y [Fe VII] $\lambda 6087$, [Fe X] $\lambda 6374$ y [Fe XI] $\lambda 7892$ (abajo).

Solo en el caso de NGC 7674 se vio la clara necesidad de descomponer esta línea en dos componentes, pero no para NGC 7469, como lo hicieron **Mullaney & Ward** (2008). En la mayoría de los objetos se observa que el FWHM correspondiente a [Fe X] $\lambda 6374$ es mayor que el de [Fe VII] $\lambda 6087$; solo alrededor de 1/5 parte de los objetos se observa lo contrario.

La línea de [Fe X] $\lambda 6374$ puede alcanzar valores de FWHM cercanos a 1400 km s^{-1} como es el caso de Mrk 975. **Mullaney & Ward** (2008) desacoplan esta línea en dos componentes para NGC 7469. Nosotros, si bien detectamos [Fe X] $\lambda 6374$, no intentamos desacoplar esta línea ni aun de [O I] $\lambda 6364$, pues están estrechamente mezcladas y esto, junto con la dificultad de establecer un continuo, impidió realizar una medida con algún grado de confiabilidad.

En cuanto a la línea de más alta ionización aquí observada, [Fe XI] $\lambda 7892$, se aprecia un ancho del orden del millar para 1H1934-063A y Akn 564. En aquellos objetos en que se tienen valores de FWHM, tanto para [Fe X] $\lambda 6374$ como para [Fe XI] $\lambda 7892$, se observa que solo en tres de los quince objetos se presenta un mayor FWHM de esta última (de mayor potencial de ionización) con relación a la primera.

En la Tabla 5 presentamos los valores de la magnitud de desplazamiento (en km s^{-1}) del pico de emisión. Esto fue realizado para las líneas [O I] $\lambda 6300$, [O III] $\lambda 5007$, [Fe VII] $\lambda 6087$, [Fe X] $\lambda 6374$ y [Fe XI] $\lambda 7892$. Los valores de longitud onda en reposo de las líneas de emisión fueron tomados de **Cox** (2004). Para permitir una mejor visualización de estos resultados, hemos elaborado la figura 3 en la que se observa las distribuciones del número de objetos en función del desplazamiento del pico de la línea para las líneas de interés (en el caso de líneas con varias componentes se incluyó solo

la componente delgada). Claramente, para [O I] $\lambda 6300$ y [O III] $\lambda 5007$, la distribución está alrededor del valor cero con una ligera tendencia hacia el rojo para la primera y hacia el azul, para la segunda, con casi la totalidad de los valores de desplazamiento en un intervalo de velocidades comprendido en el rango de $\pm 100 \text{ km s}^{-1}$. En tres casos se evidencian una componente ancha para [O III] $\lambda 5007$, las cuales pueden alcanzar valores de corrimiento al azul tan grandes como de -600 km s^{-1} . Para el caso de las líneas coronales se evidencia que tienden a presentar un desplazamiento hacia el azul con respecto a las líneas de más baja ionización. Si bien hay algunos objetos de la muestra (15 %) que muestran un ligero desplazamiento al rojo, el grueso de los objetos (~ 60 %) poseen desplazamientos al azul que van hasta los -200 km s^{-1} , con 1/4 de los objetos cuyo desplazamiento alcanza a estar entre los -200 y los -300 km s^{-1} .

En los histogramas para [Fe VII] $\lambda 6087$ y [Fe XI] $\lambda 7892$ parece manifestarse la existencia de dos poblaciones: una, en la que el desplazamiento al azul está alrededor de los $-50/-100 \text{ km s}^{-1}$ con un ancho comprendido entre $+100$ y -150 km s^{-1} ; la segunda, un poco menos numerosa, posee un pico alrededor de -250 km s^{-1} con un ancho comprendido entre -150 km s^{-1} y -350 km s^{-1} . Para la línea del [Fe X] $\lambda 6374$ no es clara la existencia de dos poblaciones como en los dos casos anteriores pero se notan algunos objetos cuyos desplazamientos al azul alcanzan los -550 km s^{-1} .

Para efectos de cuantificar y describir la forma de una línea en particular nos hemos centrado en la determinación del grado de agudeza y de simetría. En particular, hemos determinado la denominada kurtosis (K) y el índice de asimetría (IA), llamado también de *skewness*. Desde el punto de vista estadístico la primera se define como el cuarto momento estandarizado de una determinada distribución y se constituye en una manera de cuantificar el grado de agudeza del pico de la misma así como el grado de prolongación de sus alas. El índice de asimetría corresponde al tercer momento estandarizado de una distribución y su valor es una medida del grado de simetría que posee una distribución alrededor del promedio. Tal y como es definido, un valor del IA negativo indica que la cola de la distribución de la izquierda es más larga que la de la derecha y, por lo tanto, el grueso de los valores tienden estar al lado derecho del valor promedio. Un valor positivo indica que la cola de la distribución en el lado derecho es más larga que en el lado izquierdo lo que indica que el grueso de los valores tienden a estar situados a la izquierda del valor promedio. Un valor nulo señala que los valores están uniformemente distribuidos en ambos lados del valor más probable.

Es importante subrayar que la determinación numérica tanto de K como del IA no solo parece variar con el campo del conocimiento donde se aplique sino también con el autor. En lo que aquí atañe se adoptaron las definiciones utilizadas por **Marziani et al.** (1996):

$$K = \frac{\lambda_{R,3/4} - \lambda_{A,3/4}}{\lambda_{R,1/4} - \lambda_{A,1/4}}, \quad (1)$$

$$IA = \frac{\lambda_{R,1/4} + \lambda_{A,1/4} - 2\lambda_P}{\lambda_{R,1/4} - \lambda_{A,1/4}}, \quad (2)$$

donde λ_P es la longitud de onda en el máximo de intensidad, $\lambda_{R,1/4}$ la longitud de onda a 1/4 de la intensidad en la zona derecha (roja) de la línea; $\lambda_{A,1/4}$, lo propio para la zona izquierda (azul); $\lambda_{R,3/4}$ y $\lambda_{A,3/4}$ las longitudes de onda a 3/4 de la intensidades en el rojo y en azul, respectivamente. Nótese entonces que de acuerdo con esta notación: FWHM = $\lambda_{R,1/2} - \lambda_{A,1/2}$, donde $\lambda_{R,1/2}$ y $\lambda_{A,1/2}$ corresponden a las

longitudes de onda a 1/2 de la intensidad tanto como en el rojo como en azul, respectivamente. La determinación de dichos parámetros se hizo para la línea entera tal y como se presenta, sin descomposición en dos o más componentes. No sobra mencionar que los valores de K y AI son altamente sensitivos a factores tales como la fijación del continuo y a la intensidad propia de la línea, pues en aquellas donde el flujo integrado suele ser pequeño con relación a líneas tales como [O III] λ 4959, 5007, [Ne III] λ 3869 y [O II] λ 3726, como son las líneas coronales propiamente dichas, pronunciarse sobre su forma se reserva solo en aquellos casos donde la línea en cuestión sea particularmente intensa.

Tabla 5: Magnitud del desplazamiento de los picos de las líneas de emisión en términos de velocidades.

Galaxia	[O I] λ 6300.30 (km s ⁻¹)	[O III] λ 5006.84 (km s ⁻¹)	[Fe VII] λ 6086.92 (km s ⁻¹)	[Fe X] λ 6374.53 (km s ⁻¹)	[Fe XI] λ 7891.94 (km s ⁻¹)
MRK 335	110	30	-259	-226	†
TOL 0109-383	-23	-33	-105	-186	-128
MRK 975	27	-32	-172	-345	†
II Zw1	-5	-83	-285	-124	...
Fairall 9	98	-1	-203	-199	†
MRK 573	-67	18	-59	-57	47
MRK 607	-72	-28	-46	76	†
3C120	10	9	-128
ESO 362-G018	-11	57	-31	-43	†
RXSJ07424+4656	3	-5	-73	-211	...
NPM1G+48.0114	32	9	-55	-29	-236
MRK 110	10	-16	12	-62	-36
3C234.0	10	32	40	27	...
KUG1031+398	17	-32(n), -326(b)	-124	-430	-259
MRK 1310	-2	-3	-55	-40	-80
IC 3599	14	-84	-166	-269	-85
MRK236	-32	29	49	62	-120
SBS 1258+569	75	95	-39	-77	-139
IRAS 13144+4508	-11	6(n), -237(b)	-4	-110	-237
RXSJ13199+5235	4	-52	-87	-151	-69
SDSSJ13557+6440	17	-18	-1	-105	§
NGC 5548	8	-17	-88	-78	-29
MRK 1392	40	79	20	1	...
SBS 1518+593	18	-36	-24	-238	-184
SDSSJ15342+3034	14	-8	-238	-216	-323
MRK 290	49	92	69	12	...
MRK 699	-25	-35	10	11	-22
1H1934-063A	-31	-30	-230	-520	-297
1H2107-097	14	-51	-287	-350	†
SDSSJ22025-0732	23	-32	-56	-231	...
AKN 564	-2	-9	-222	-440	-295
MRK 1126	-26	-51	-142	-85	†
NGC 7469	-66	-47	-213	‡	...
NGC 7674	22(n), -285(b)	0(n), -612(b)	-295(n), -777(b)	...	†

† Espectro rojo no disponible.

§ En zona donde no hay información.

‡ Difícil de desacoplar.

(n) Componente delgada.

(b) Componente gruesa.

La tabla 6 contiene los valores de la kurtosis y el índice asimétrico para las líneas coronales [Fe VII] $\lambda 6087$ y [Fe XI] $\lambda 7892$ pero solo en aquellos casos en el que la línea es lo suficientemente intensa con relación al continuo adyacente como para que su forma sea claramente discernible. La selección se hizo “a ojo” y la no determinación de los valores de K e IA fue básicamente aplicada para algunas líneas de [O I] $\lambda 6300$ y [Fe XI] $\lambda 7892$. La línea de [Fe X] $\lambda 6374$ no fue considerada puesto que casi siempre aparece severamente mezclada con [O I] $\lambda 6364$. Como referencia se incluyeron las líneas de [O I] $\lambda 6300$ y [O III] $\lambda 5007$ no solo por su presencia casi constante en los espectros sino por la relativa ausencia de líneas aledañas que puedan afectar severamente su forma y dificultar el establecimiento del continuo.

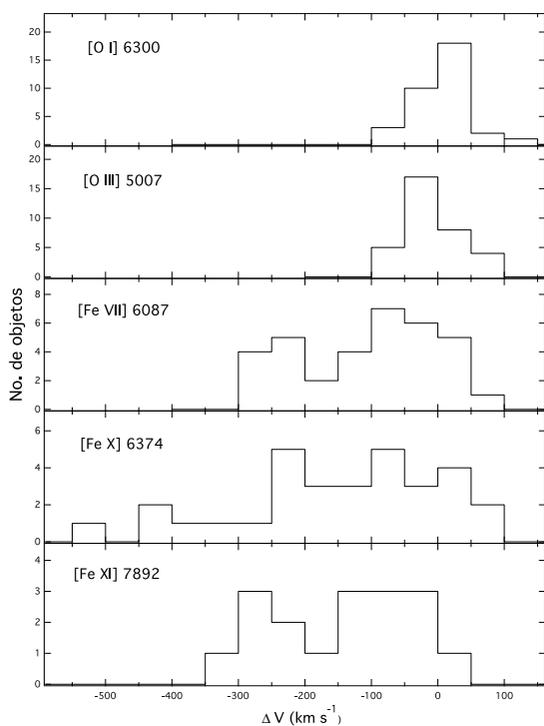


Figura 3: Histogramas de número de objetos en función del desplazamiento del pico de línea (en km s^{-1}) para las líneas de emisión [O I] $\lambda 6300$, [O III] $\lambda 5007$, [Fe VII] $\lambda 6087$, [Fe X] $\lambda 6374$ y [Fe XI] $\lambda 7892$. Para líneas con varias componentes se incluyó solo la componente delgada.

En las figuras 4 y 5 se muestran los histogramas del número de objetos en función del valor de la kurtosis y del índice de asimetría, respectivamente, con base a los valores de la tabla 6. En lo que respecta a la kurtosis se observa que las líneas de baja ionización tienden a presentar una distribución esencialmente idéntica, con la mayoría de los

objetos ($\sim 65\%$) con valores comprendidos entre 0.4 y 0.5 y un 20-25 % con valores entre 0.3 y 0.4. En cuanto a [Fe VII] $\lambda 6087$, se observa una distribución algo diferenciada de las dos anteriores, con un $\sim 40\%$ de los objetos con valores comprendidos entre 0.4 y 0.5 y cerca de la mitad con valores entre 0.3 y 0.4. Aunque el número de objetos que se incluyó con información de [Fe XI] $\lambda 7892$ es pequeño, su distribución la hemos incluido por razones de completitud. Aun así se observa que más de la mitad presentan valores de K entre 0.3 y 0.4.

Pruebas K-S comparando mutuamente las distribuciones entre las líneas de baja ionización con relación a la de [Fe VII] $\lambda 6087$ arrojan p-valores relativamente altos⁶ lo que indica que la hipótesis nula (distribuciones iguales) no es rechazable. Por lo tanto, las distribuciones con base en la kurtosis no señalan una clara diferenciación de valores entre las líneas coronales y líneas de más baja ionización. Sin embargo, se observa una tendencia de la línea de [Fe VII] $\lambda 6087$ (y de [Fe XI] $\lambda 7892$) a presentar valores más bajos de K. El valor para un perfil gaussiano, correspondiente a la definición adoptada aquí, es de 0.45; valores por encima de dicho número indican una línea más aguda; valores inferiores, una línea achatada, esto es, con picos redondeados y alas notablemente extendidas hacia los lados. Por lo tanto, alrededor del $\sim 50\%$ de las líneas de [Fe VII] $\lambda 6087$ parecen adoptar picos achatados, más parecidos a los de un perfil lorentziano (que es de alrededor de 0.33, para la definición adoptada aquí), contrario a lo hallado por **Appenzeller & Östreicher** (1988). Puesto que poseemos la misma definición de kurtosis que la que realizó **Marziani et al.** (1996) podemos comparar numéricamente nuestros valores con los de ellos: en general, la distribución de los valores de la kurtosis para el [Fe VII] $\lambda 6087$ y el [O III] $\lambda 5007$ obtenidos en esta tesis tienden a caer entre 0.3 y 0.5 en tanto que las líneas de H β y C IV analizados por esos autores se concentran en valores más bajos, del orden de 0.15-0.35, lo que no debe extrañar si se considera que ellos analizaron los perfiles anchos provenientes de esas líneas de recombinación, y por lo tanto, con picos bastante más redondeados y prominentes alas en los bordes.

En cuanto a los valores de distribución del IA se observa que la línea de [O I] $\lambda 6300$ presenta valores que en su mayoría están comprendidos entre -0.2 y 0.2 . La línea de [O III] $\lambda 5007$ presenta un poco más de la mitad de la muestra con valores comprendidos entre -0.2 y 0 y con alrededor de la tercera parte con valores de $\text{IA} < -0.2$. Esto está en concordancia con las numerosas observaciones que evidencian una asimetría de [O III] $\lambda 5007$ consistente en presentar alas más extendidas hacia el azul que hacia al rojo (**Heckman et al.**, 1981; **Vrtilek & Carleton**, 1985; **Véron-Cetty, M.-P., et al.**, 2001; **Bian et al.**, 2006; **Komossa et al.**, 2009). Si bien cerca de una tercera parte de los objetos presentan valores de IA para la línea de [Fe VII] $\lambda 6087$ entre

⁶Comparando la distribución entre [Fe VII] $\lambda 6087$ con [O III] $\lambda 5007$ y de [Fe VII] $\lambda 6087$ con [O I] $\lambda 6300$ ambos dan p-valores de 0.56.

-0.2 y 0, se observa que casi la mitad de la muestra tiene valores comprendidos de $IA < -0.2$; un $\sim 20\%$ presenta valores de IA positivos, que indican alas más pronunciadas hacia el rojo que al azul. La muestra de valores de $[Fe\ VII] \lambda 7892$ que, como hemos dicho, no es estadísticamente significativa, exhibe la dispersión más alta de valores llegando a presentar los valores más altos de IA en ambos extremos. En general, se observa lo anotado por **De Robertis & Shaw** (1990) en el sentido de que las líneas de baja ionización si bien tienden a mostrar asimetrías pequeñas, estas no son nulas. La línea del $[Fe\ VII] \lambda 6087$ tiende a presentar valores

negativos de la misma lo que indica mayor extensión de las alas al azul que al rojo. Pruebas K-S comparando mutuamente las distribuciones entre $[O\ III] \lambda 5007$ y de $[Fe\ VII] \lambda 6087$ con $[O\ I] \lambda 6300$ arrojan un p-valor 0.86 y de 0.0045, respectivamente, lo que indica que la hipótesis nula no es rechazable en el primer caso mientras que en el segundo sí. Esto sugiere una diferencia notable en el comportamiento cinemático del gas emisor de $[Fe\ VII] \lambda 6087$ con respecto al que emite $[O\ I] \lambda 6300$.

Tabla 6: Valores de Kurtosis (K) en índice de asimetría (IA).

Galaxia	[O III] $\lambda 5007$		[Fe VII] $\lambda 6087$		[O I] $\lambda 6300$		[Fe XI] $\lambda 7892$	
	K	IA	K	IA	K	IA	K	IA
MRK 335	0.38	-0.25	0.39	-0.12	†	†	‡	‡
TOL 0109	0.41	-0.27	0.35	-0.24	0.47	-0.10	0.44	0.47
MRK 975	0.37	-0.32	0.32	-0.43	†	†	‡	‡
II Zw1	0.41	-0.43	0.44	-0.25	0.37	-0.41
Fairall 9	0.42	-0.07	0.41	0.27	†	†	‡	‡
MRK 573	0.43	-0.03	0.47	0.01	0.41	0.21	0.28	0.15
MRK 607	0.45	-0.10	0.40	-0.14	0.47	0.04	‡	‡
3C120	0.47	-0.14	0.48	0.08	0.41	-0.07
ESO 362-G18	0.46	-0.05	0.44	-0.06	0.42	-0.04	‡	‡
RXSJ07424+4656	0.38	-0.22	0.39	-0.20	†	†
NPM1G+48.0114	0.42	-0.06	0.34	-0.41	0.55	0.09
MRK 110	0.44	0.16	0.51	-0.07	0.44	0.20	0.44	-0.16
3C234	0.51	-0.01	0.39	-0.18	0.31	0.37
KUG1031+398	0.32	-0.46	0.34	-0.55	†	†	0.35	-0.66
MRK 1310	0.44	0.16	0.51	-0.07	0.44	0.20	0.44	-0.16
IC3599	0.48	0.05	0.37	-0.36	†	†	†	†
MRK 236	0.39	-0.06	0.49	0.08	†	†	†	†
SBS 1258+569	0.44	-0.16	0.43	0.04	†	†	0.38	0.48
IRAS 13144+4508	0.37	-0.18	0.20	-0.44	0.41	0.03	†	†
RXSJ13199+5235	0.40	0.03	†	†	0.33	-0.28	0.19	-0.71
SDSSJ13557+6440	0.36	-0.18	0.42	-0.28	†	†	§	§
NGC 5548	0.38	-0.20	0.56	-0.25	0.34	0.00	†	†
MRK 1392	0.41	-0.09	0.42	0.08	0.42	0.03
SBS 1518+593	0.40	-0.14	0.34	-0.47	†	†	†	†
SDSSJ15342+3034	0.48	-0.20	0.34	-0.22	†	†	†	†
MRK 290	0.48	-0.24	0.37	-0.52	0.46	-0.07
MRK 699	0.40	-0.06	0.39	-0.08	0.40	0.00	0.31	0.15
1H1934-063A	0.43	-0.18	0.37	-0.21	0.43	-0.01	0.37	0.63
1H2107-097	0.39	-0.31	0.38	-0.42	†	†	‡	‡
SDSSJ22025-0732	0.40	-0.01	0.52	-0.20	0.44	-0.26
AKN564	0.43	0.06	0.47	-0.13	0.43	0.02	0.27	-0.57
MRK 1126	0.46	0.04	0.48	-0.03	0.45	-0.10	‡	‡
NGC 7469	0.42	-0.28	0.51	-0.49	0.44	-0.04
NGC 7674	0.28	-0.52	0.31	-0.43	0.38	-0.08	‡	‡

† La línea existe, pero débil.

‡ Espectro rojo no disponible.

§ En zona donde no hay información.

5. Discusión e interpretación

Tal y como se puede observar de la figura 2, los valores de FWHM correspondientes a las líneas coronales de $[Fe\ VII]$

$\lambda 6087$ y $[Fe\ X] \lambda 6374$ tienden a ser mayores con relación a los que presentan las de baja o nula ionización. Por ejemplo, considerando el valor promedio de FWHM, la línea de $[Fe\ VII] \lambda 6087$ es 38% y 42 % mayor que el de $[O\ III] \lambda 5007$ y $[O\ I] \lambda 6300$, respectivamente. El valor promedio de FWHM

para $[\text{Fe X}] \lambda 6374$ es un 13 % mayor que el del $[\text{Fe VII}] \lambda 6087$. Sin embargo, la línea de $[\text{Fe XI}] \lambda 7892$ no sigue la tendencia de aumento de FWHM conforme aumenta el potencial de ionización: el valor promedio para esta línea es menor en un 8 % al del $[\text{Fe VII}] \lambda 6087$. Estos resultados tomados en su conjunto sugieren una producción mayoritaria de $[\text{Fe VII}] \lambda 6087$ proveniente de zonas ligeramente más internas con respecto a la zona de emisión de $[\text{O III}] \lambda 5007$ y otras líneas comúnmente atribuidas a la NLR. El hecho de que los valores de FWHM para $[\text{Fe XI}] \lambda 7892$ no sean mayores que los que tienen el $[\text{Fe VII}] \lambda 6087$ y el $[\text{Fe X}] \lambda 6374$ puede, en un primer momento, indicar que la emisión principal de este ión proviene de zonas de la región de emisión coronal más externas. Sin embargo, este resultado está de acuerdo con lo reportado por **Rodríguez-Ardila et al.** (2011) en líneas del infrarrojo cercano, en el cual las líneas de potencial de ionización $\gtrsim 300$ eV tenían FWHM más bajos en relación a las líneas de menor potencial de ionización. Puede entonces que lo que esté ocurriendo es que la correlación entre el FWHM y el potencial de ionización se sostenga hasta un determinado valor de este último a partir del cual deje de ser válido a causa de las condiciones físicas reinantes, principalmente determinado por el valor de la densidad electrónica.

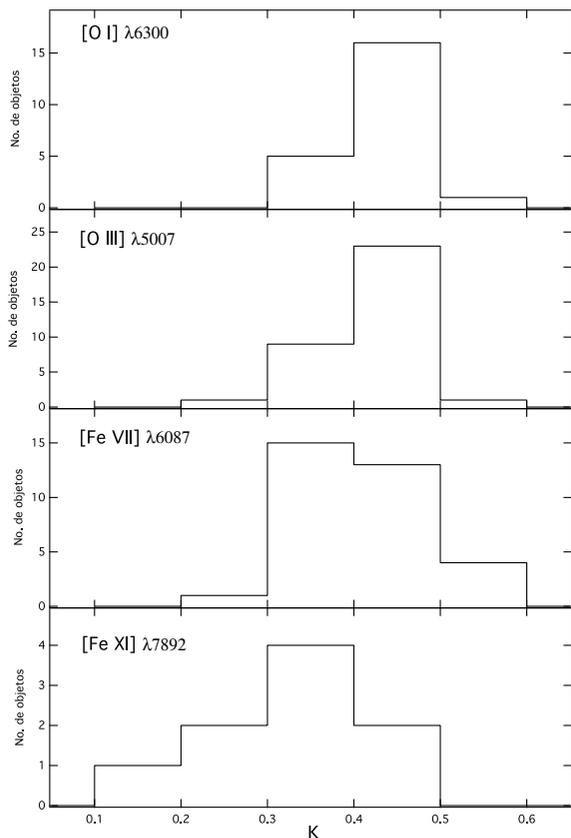


Figura 4: Histogramas de número de objetos en función de la kurtosis.

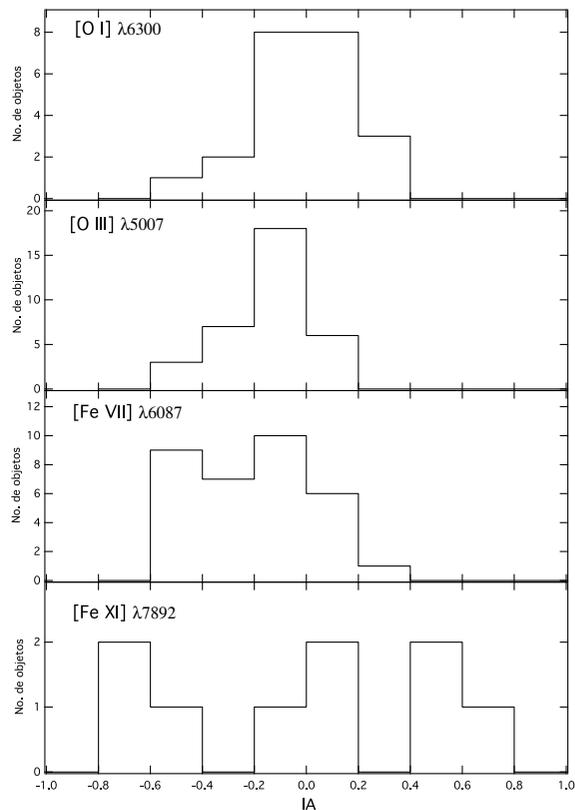


Figura 5: Histogramas de número de objetos en función del IA.

Está observacionalmente establecido que la zona de emisión coronal en AGNs puede llegar a extenderse hasta unas pocas centenas de parsecs del centro activo. Aun así, la distribución de la emisión coronal en las zonas más próximas al centro activo de objetos tales como Circinus y NGC 1386 (**Rodríguez-Ardila et al.**, 2006) así como NGC 1068, Mrk 573, NGC 4151, Mrk 3, NGC 3081 y NGC 4507 (**Mazzalay et al.**, 2010) el grueso de la emisión coronal proviene siempre de la zona nuclear no resuelta y siempre excede con al menos el doble de flujo con relación a las zonas aledañas a ella. Ello quiere decir que en los espectros que nos ocupan (con aperturas de 1" y 3" para las submuestras P y S, respectivamente), aun cuando se colectó emisión de varios centenares a miles de parsecs alrededor del núcleo, la información dominante de la emisión coronal es aquella que proviene de la zona más próxima al AGN, presumiblemente dentro del toroide y un poco más exterior a él, pero en todo caso, aun no resuelta por las observaciones.

Por lo tanto, no debe extrañar entonces que los desplazamientos al azul hallados en nuestra muestra estén dentro de los rangos observados de desplazamientos de líneas coronales reportados en la zona nuclear por **Rodríguez-Ardila et al.** (2006), los cuales, a excepción de NGC 1386, siempre son hacia el azul (en el caso del [Fe VII] $\lambda 6087$). En dicho trabajo, en los casos en que se reporta doble componente, es interesante observar que la componente delgada (FWHM ~ 100 - 600 km s^{-1}) posee siempre un menor desplazamiento que la componente gruesa (FWHM ~ 700 - 1700 km s^{-1}) la cual es del orden de -200 a -300 km s^{-1} , pero puede alcanzar los -600 km s^{-1} . Algo semejante es observado por **Mueller Sánchez et al.** (2006) para varias líneas del infrarrojo cercano en Circinus. Pero las observaciones de estos autores indican que en lo que concierne a cantidad de flujo, no hay una tendencia sobre cual componente es la que domina: en algunas galaxias la componente gruesa es la que predomina en flujo (como en el caso de Circinus); en otros, es la componente delgada (NGC 3783). Aun cuando solo en un caso hicimos distinción de dos componentes de líneas coronales claramente definidas, la figura 3 sugiere la existencia de dos zonas: una “delgada” y otra “gruesa”. En el mismo sentido, entonces, hay dos poblaciones de galaxias: una en la que el desplazamiento al azul no es tan significativo ($\Delta V \sim -200$ km s^{-1}) y, en consecuencia, la componente delgada o es única o predomina con respecto a la componente gruesa; en otros casos, hay una componente gruesa única o dominante, con $\Delta V \sim -200$ a -400 km s^{-1} . Lo anterior implica entonces una conexión directa entre una componente gruesa que se manifiesta por su mayor desplazamiento al azul y una componente delgada donde el desplazamiento al azul ya no es tan pronunciado. Enseguida examinaremos si el corrimiento al azul está relacionado con el ancho de línea, esto es, con el FWHM.

La figura 6 muestra la relación entre el desplazamiento al azul y el ancho de línea dado por el FWHM tanto para las líneas de baja ionización y las líneas coronales. Es evidente que para las líneas de baja ionización no parece existir una correlación entre ambas cantidades. En general, tanto para el [O I] $\lambda 6300$ como para el [O III] $\lambda 5007$, los valores de desplazamiento parecen distribuirse uniformemente alrededor del valor nulo y, salvo por algunos pocos *outliers*, los valores de FWHM se mantienen en valores de pocos centenares de km s^{-1} . Por otro lado, las líneas coronales parecen mostrar una leve tendencia entre el corrimiento al azul y el FWHM. Un análisis de regresión a los datos arroja una relación lineal de la forma:

$$\Delta V_{Fe VII} \approx -0.17 \times FWHM_{Fe VII},$$

$$\Delta V_{Fe X} \approx -0.31 \times FWHM_{Fe X},$$

$$\Delta V_{Fe XI} \approx -50 - 0.15 \times FWHM_{Fe XI},$$

con índices de correlación de 0.51, 0.61 y 0.56, respectivamente.

La correlación entre el FWHM y el potencial de ionización (hasta cierto valor de energía) que se observa en más de la mitad de la muestra se explica en términos de una zona de emisión coronal estratificada, en la que los iones de más alto potencial de ionización se encuentran en una zona próxima al centro activo (entre la BLR y la cara interna del toroide) y, en consecuencia, en interacción con el *outflow*. Aun así, puede ocurrir que parte de la emisión de [Fe X] $\lambda 6374$ y [Fe XI] $\lambda 7892$ provenga también de zonas internas de la NLR, esto es, apenas unas cuantas decenas de parsecs más allá del toroide oscurecedor. La ionización de los elementos químicos involucrados se da, bajo este modelo, fundamentalmente por fotoionización proveniente del AGN por lo que la contribución de la ionización por choques es marginal o nula. Esto está reforzado por consideraciones teóricas que evidencian lo poco eficientes que suelen ser los choques para producir ionización de la NLR (**Laor**, 1998) al igual que en evidencias observacionales en Mrk 78 (**Whittle et al.**, 2005) que tienden a favorecer al proceso de fotoionización como mecanismo principal de ionización.

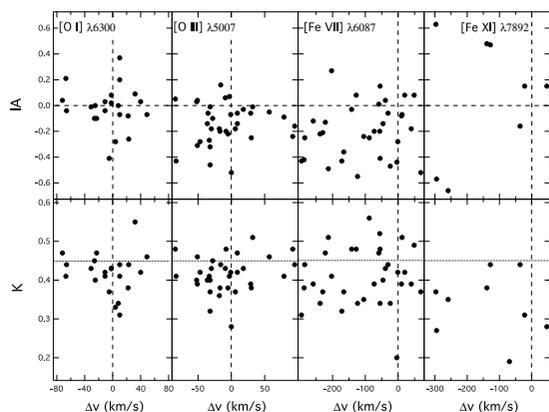


Figura 6: Relación entre Δv vs. FWHM para las líneas de interés. En el caso de líneas con varios componentes se incluyó solo la componente ancha.

Los resultados de la distribución del índice de asimetría sugieren que el comportamiento cinemático del [O I] $\lambda 6300$ difiere del de [O III] $\lambda 5007$ y [Fe VII] $\lambda 6087$. Es sabido que en nubes con “zonas de transición” parcialmente ionizadas se forman especies del tipo H^0 , H^+ , O^0 y S^+ en gran abundancia por lo que en nubes de gran tamaño las líneas como [O I] $\lambda 6300$ y [S II] $\lambda 6731$ son prominentes. En tal caso, el comportamiento dinámico del [O I] $\lambda 6300$ es distinto de aquel gas que se genera mayoritariamente cerca de la fuente (como las líneas coronales) e incluso de la línea de [O III] $\lambda 5007$ que suele verse también con prominentes alas hacia el azul. Observaciones de alta resolución realizadas en zonas anexas a los núcleos activos cercanos indican que mientras que el grueso de la emisión de líneas coronales proviene siempre del sector no resuelto del centro activo, la observación

de la línea de [O I] $\lambda 6300$ en núcleos tales como Cygnus A (Taylor et al., 2003) NGC 1068 y NGC 1386 (Rodríguez-Ardila et al., 2006) indica que puede emitirse en igual o mayor cantidad (comparada con las líneas coronales) en las zonas anexas que pueden extenderse hasta del orden de una centena de parsecs.

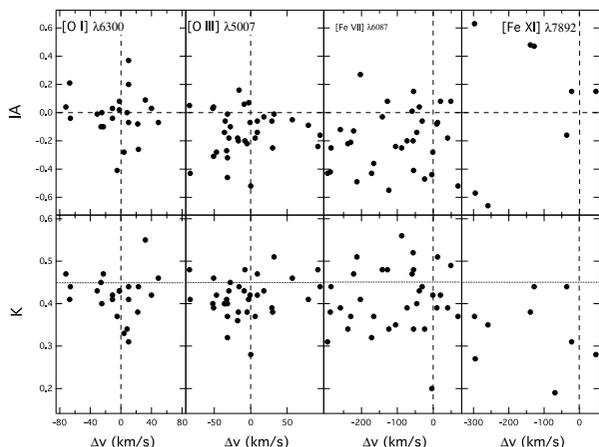


Figura 7: Relación entre el índice de asimetría (arriba) y la kurtosis (abajo) con respecto al desplazamiento del pico de línea para las líneas [O I] $\lambda 6300$, [O III] $\lambda 5007$, [Fe VII] $\lambda 6087$ y [Fe XI] $\lambda 7892$. La línea punteada en los paneles de la kurtosis corresponde al valor de una gaussiana, de acuerdo con la definición adoptada aquí.

Es claro que en los resultados presentados aquí, al igual que con las observaciones del Telescopio Espacial Hubble (Mazzalay et al., 2010), que la línea coronal [Fe VII] $\lambda 6087$ tiende a presentar un ancho un poco mayor que la línea de [O III] $\lambda 5007$. Sería importante examinar si existen diferencias adicionales de parámetros entre estas dos líneas. La figura 7 explora la relación tanto de la kurtosis y el índice de asimetría con respecto al desplazamiento del pico de línea. Si bien no parece existir correlación evidente entre K, IA y el Δv para cada una de las líneas en cuestión, sí se observa que para el [Fe VII], el 66 % de los objetos se ubican en la zona en que tanto el IA como el Δv son negativos, en contraste con lo que ocurre con el [O III] $\lambda 5007$ en los que, para aquellos con IA negativo, hay una fracción importante de objetos con Δv positivo. La distribución del [O I] $\lambda 6300$ es aun más uniforme, sin ninguna tendencia en particular. Claramente, la asimetría con alas extendidas al azul tiende mayoritariamente a estar vinculada al desplazamiento del pico de línea al azul. El comportamiento de la kurtosis también sugiere diferenciación entre las líneas de baja ionización y el [Fe VII] $\lambda 6087$. Mientras que para el [O I] $\lambda 6300$ y el [O III] $\lambda 5007$ las líneas tienden a presentar perfiles con alas relativamente poco extendidas, más semejantes a un perfil gaussiano, la línea de [Fe VII] $\lambda 6087$ tiende a presentar

valores más dispersos, lo que sugiere la presencia tanto de una población con perfiles parecidos a los gaussianos como de otra población que posee picos redondeados y con perfiles de alas un poco más extendidas hacia los lados.

Puesto que son pocos los valores para el [Fe XI] $\lambda 7892$, es difícil asegurar si el comportamiento extremo en los valores que adopta tanto en IA como en K observado en la figura 7 es característico de esta línea. De ser así, indicaría un comportamiento cinemático peculiar, pues aun cuando esta línea está casi siempre desplazada hacia el azul tiende a presentar notorias asimetrías tanto al azul como hacia el rojo y sus perfiles de línea indican en general prominentes extensiones en sus alas.

La interpretación más usual del corrimiento al azul es asociarlo a *outflows* del gas que está dirigido al observador y asumir la existencia de polvo que impide observar la porción del gas que está en recesión. La evidencia observacional reciente respalda cada vez más la existencia de *outflows* en la NLR (Storchi-Bergmann et al., 2008; Crenshaw et al., 2010; Riffel & Storchi-Bergmann, 2010; Fischer et al., 2011). Estos *outflows* pueden estar vinculados al chorro de radio (ver más adelante) y por ello algunos autores atribuyen la totalidad o parte de la emisión coronal a interacción del gas de la NLR con el chorro de radio y, por lo tanto, asignan una participación importante a ionización por choques. Aunque hay algunas observaciones que apuntan hacia una conexión entre la zona de emisión coronal coincidente con la dirección del chorro de radio (Marconi et al., 1996; Axon et al., 1998; Reunanen et al., 2003; Prieto et al., 2005; Storchi-Bergmann et al., 2008), permanece por demostrar si dicha yuxtaposición de zonas de emisión es efectiva y, si lo es, si dicho vínculo corresponde a una generalidad entre los AGNs. De hecho, Mazzalay et al. (2010) no encontraron evidencia de influencia local del chorro de radio sobre la emisión del gas coronal. La observación de NGC 3783, por ejemplo, (Reunanen et al., 2003) indica que la emisión de líneas coronales no solo se da paralela al cono de ionización sino también perpendicular a él.

En general, los resultados obtenidos aquí respaldan la idea de una región coronal que no se restringe a una sola región emisora. Primeramente, existe una zona de emisión coronal ubicada en la NLR que ha sido resuelta en AGNs cercanos la cual se extiende usualmente a pocas decenas de parsecs del centro activo, pero que puede en algunos casos extenderse hasta pocas centenas de parsecs. Y hay una zona de emisión más interna, donde proviene el grueso de la emisión coronal, aun no resuelta por la actual generación de instrumentos, que puede residir en la porción interna de la NLR y extenderse más profundamente a una zona que se concentra en la cara interna del toroide oscurecedor. Es posible que esta zona de emisión esté sujeta a interacción con *outflows*.

Si atribuimos a *outflows* el desplazamiento al azul de las líneas coronales bien podría ser semejante a lo que describimos en la figura 8. En tal caso, la emisión coronal está moviéndose en dirección al observador y está dotada de una velocidad de unas tres a seis centenas de km s^{-1} . Es posible que esta zona de emisión esté constituida por nubes en *outflow* las cuales están influenciadas cinemáticamente por el chorro de radio. Aunque se han propuesto otros mecanismos responsables de los *outflows* a parte del chorro de radio⁷, el hecho de que existan correlaciones entre las luminosidades de las líneas coronales con la luminosidad en radio en 1.4 GHz (Portilla, 2011) sugieren una participación del chorro de radio en la producción de las líneas coronales y de otras líneas de más baja ionización. La componente delgada resulta entonces de una zona más propiamente de la porción interna de la NLR dotada de la velocidad sistémica de la galaxia y con una tendencia a estar desplazada hacia el rojo, como ocurre con las líneas de más baja ionización.

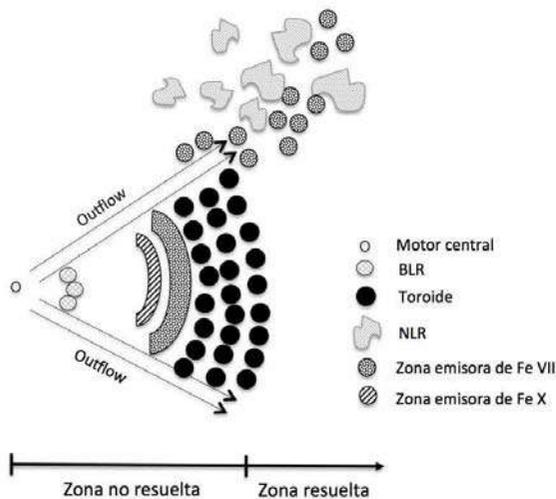


Figura 8: Corte transversal en el que se muestra un posible modelo cinemático de la región de emisión coronal.

Las zonas más internas de emisión de $[\text{Fe VII}] \lambda 6087$, con mayor interacción con el chorro de radio, están dotadas de mayor velocidad; el pico de emisión se va desplazando así hacia el azul (pues a medida que la principal zona de emisión es cada vez más interna el efecto de la zona ópticamente opaca es mayor) y con ello, viene acompañada la asimetría con alas prolongadas también al azul.

Para reforzar nuestra hipótesis de interacción entre el chorro de radio como responsable del desplazamiento al

azul de las líneas coronales, hemos elaborado la figura 9 en la que contrastamos la luminosidad de radio en 1.4 GHz con relación al desplazamiento de pico de línea para las tres líneas coronales que nos ocupan y líneas de más baja ionización. De forma interesante observamos que para las líneas coronales existe anticorrelación (sin tener en cuenta los dos valores de galaxias ruidosas en radio, indicados en las gráficas) entre la luminosidad en radio y el desplazamiento de línea (índices de correlación de -0.48 , -0.82 y -0.65 para $[\text{Fe VII}] \lambda 6087$, $[\text{Fe X}] \lambda 6374$ y $[\text{Fe XI}] \lambda 7892$, respectivamente). Esto contrasta con los bajos índices de correlación para $[\text{O III}] \lambda 5007$ y $[\text{O I}] \lambda 6300$, de nuevo sin los dos puntos ruidosos en radio (de -0.13 y -0.21 , respectivamente). Estos resultados sugieren que el chorro de radio puede estar involucrado en los *outflows* de las nubes de emisión coronal en las zonas más internas. Aquellos puntos que se alejan de la tendencia general corresponden a objetos radio ruidosos cuyas luminosidades exceden el valor de $10^{31.5} \text{ erg. s}^{-1} \text{ Hz}^{-1}$, valor por encima del cual comienza a manifestarse luminosidades de la línea coronal constante o con tendencia a disminuir (Portilla, 2011).

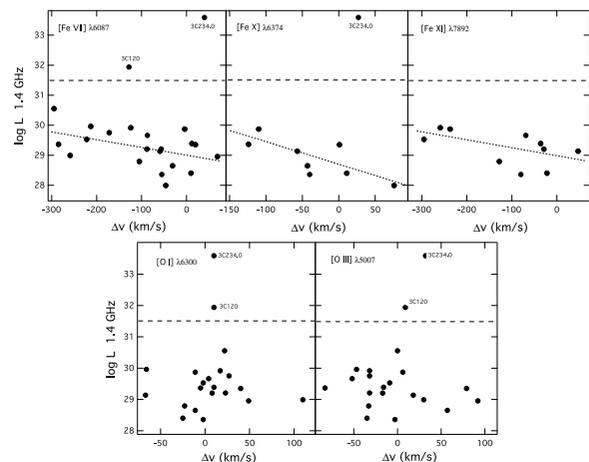


Figura 9: Luminosidad en radio en 1.4 GHz ($\text{erg. s}^{-1} \text{ Hz}^{-1}$) con relación al desplazamiento del pico de línea en km s^{-1} . Valores de flujo en radio fueron tomados de: Condon et al., 1998 (MRK 335, TOL 0109-383, MRK 607, ESO 362-G018, MRK 110 y KUG1031+398), Condon et al., 2002 (MRK 975, MRK 573, 3C120, NGC 5548, AKN 564 y NGC 7674), Rafter et al., 2009 (II Zw1, IRAS 13144+4508, MRK 1392 y MRK 290), servidor FIRST⁸ (MRK 1310, RXSJ13199+5235 y SDSSJ22025-0732), White & Becker, 1992 (3C234.0), Becker et al., 1995 (MRK 699) y Greene et al. 2004 (NGC 7469).

Ya hemos dicho que, basados en varias consideraciones, es poco probable que la presencia de choques surgidos por

⁷Entre dichos mecanismos están supervientos provenientes de zonas *starburst* (Heckman et al., 1990) y expansión de nubes que integran la BLR para explicar la formación de polvo (Elvis et al., 2002).

⁸<http://sundog.stsci.edu/cgi-bin/searchfirst>

interacción del chorro con el medio interestelar intervengan en la ionización de las especies químicas de las líneas coronales. Pero es claro que la luminosidad en radio interviene directamente en la luminosidad de las líneas coronales al menos hasta cierto valor límite. Puede que el chorro de radio esté formando un canal que permita que las nubes “vean” directamente el centro activo o como mecanismo que permita un aumento de densidad del medio interestelar y así incrementar la emisividad. Adicionalmente disponemos aquí de evidencias que sugieren una participación en la luminosidad del radio en el corrimiento al azul de las líneas coronales: entre mayor luminosidad, mayor desplazamiento al azul, siempre y cuando $\log L_{1.4 \text{ GHz}} (\text{erg. s}^{-1}\text{Hz}^{-1}) < 31.5$. Esto puede sugerir que el chorro de radio tiene el efecto de impulsar hacia afuera las zonas más internas de emisión de líneas coronales y con ello que la dispersión observada del valor del FWHM esté afectada no solo por el gradiente gravitacional dominante sino por el efecto de la componente radial de la velocidad de los *outflows*. Sin embargo, si el chorro de radio es muy intenso, comienza a tener un efecto que desfavorece la emisión de líneas coronales, disminuyendo no solo la luminosidad de estas sino desplazando el pico de línea hacia el rojo. Es posible que en tales casos la intensidad del chorro sea de tal magnitud que arrastra las nubes susceptibles de ser fotoionizadas a lugares que no quedan en la línea de visión del centro activo.

Para finalizar, es importante señalar que los resultados encontrados aquí corresponden a objetos cuya emisión coronal es particularmente notable. En ese sentido, existe un claro sesgo hacia objetos con manifestación de alta ionización y de ahí el predominio de galaxias T1 en la muestra de estudio (85 %). Como se dijo atrás, se realizó la selección de ese modo pensando en obtener información sobre perfiles de línea y desplazamientos de sus picos, no solo de [Fe VII] $\lambda 6087$ sino también de [Fe X] $\lambda 6374$ y [Fe XI] $\lambda 7892$, esto es, de objetos con ionización que llega a extenderse hasta 260 eV. Por lo tanto, quedaría por ver si este comportamiento puede ser extrapolado a aquellos objetos con emisión coronal marginal solo en Ne V y Fe VII o en muestras constituidas fundamentalmente por objetos T2.

6. Conclusiones

Varios aspectos cinemáticos de las líneas coronales en el óptico han sido abordados en este trabajo. Primeramente, la correlación entre el FWHM y el potencial de ionización, tan invocada en varios estudios, solo parece ser extensiva hasta determinados valores de potencial de ionización. Hemos encontrado que el FWHM para el [Fe XI] $\lambda 7892$ no suele tener FWHM mayores que el de otras líneas coronales con menor potencial de ionización, lo que sugiere la posible intervención de valores de densidad por encima del de la densidad crítica.

Cerca de un 80 % de los objetos presentan asimetría en la línea [Fe VII] $\lambda 6087$, confirmando así la tendencia de esta a mostrar alas pronunciadas hacia el azul. De igual forma, aproximadamente un 80 % de las galaxias muestran desplazamiento al azul en el pico de esa misma línea. El desplazamiento hacia el azul parece entonces venir acompañado de un efecto de asimetría. Esto contrasta con lo observado en líneas de más baja ionización, en los que apenas se observa un desplazamiento de pico de línea comprendido entre $\pm 100 \text{ km s}^{-1}$ y asimetrías menos pronunciadas. Cuando se tienen en cuenta dos o más líneas coronales, se observa que el mayor porcentaje de ellas presentan mayores corrimientos al azul a medida que aumenta el potencial de ionización de las líneas, lo que sugiere estratificación de la región emisora con aquellas de más alto potencial de ionización mostrando mayor desplazamiento al azul.

Interpretando nuestros resultados de desplazamiento al azul y teniendo como base las observaciones de alta resolución de AGNs cercanos hemos propuesto la existencia de dos zonas principales de emisión coronal aun no resuelta instrumentalmente hablando: una ubicada en la porción interna de la NLR y otra ubicada en la cara interior del toroide oscurecedor aunque es posible que ambas zonas estén en realidad conectadas conformando una única zona de emisión. Esto es coherente con lo encontrado por **Murayama & Taniguchi** (1998) que sugiere emisión coronal preferencial en galaxias de tipo Seyfert 1.

Hemos encontrado una relación entre la luminosidad en radio y el desplazamiento del pico de línea hacia el azul de las líneas coronales. Esto refuerza la idea de *outflows* originados por el chorro de radio. Realizando una fuerte simplificación, se puede afirmar que para el grueso de los objetos de nuestra muestra que a mayor luminosidad en radio (hasta cierto límite), mayor desplazamiento al azul del pico de línea, mayor valor de FWHM y mayor luminosidad de líneas coronales.

Agradecimientos

El autor agradece las sugerencias y comentarios por parte de un árbitro anónimo.

Bibliografía

- Appenzeller, I. & Östreicher, R.** 1988. High-ionization line profiles of Seyfert galaxies. *Astron. J.*, **95**: 45-57.
- _____, **Wagner, S.** 1991. Forbidden high-ionization lines in QSO spectra. *Astron. Astrophys.*, **250**: 57-61.
- Axon, D. J., Marconi, A., Capetti, A., Macchetto, F. D., Schreier, E. & Robinson, A.** 1998. Jet-driven motions in the narrow-line region of NGC 1068. *Astrophys. J.*, **496**: L75-L78.

- Becker, R. H., White, R. L. & Helfand, D. J. 1995. The FIRST survey: faint images of the radio sky at twenty centimeters. *Astrophys. J.*, **450**: 559-577.
- Bian, W., Yuan, Q. & Zhao, Y. 2006. [O III] emission line in narrow-line Seyfert 1 galaxies. *Mon. Not. Roy. Astro. Soc.*, **367**: 860-863.
- Condon, J. J., Cotton, W. D., Greisen, E. W., Yin, Q. F., Perley, R. A., Taylor, G. B. & Broderick, J. J. 1998. The NRAO VLA Sky Survey. *Astron. J.*, **115**: 1693-1716.
- , Cotton W. D. & Broderick J. J. 2002. Radio sources and star formation in the local universe. *Astron. J.*, **124**: 675-689.
- Cooke, B. A., Elvis, M., Maccacaro, T., Fosbury, R. A. E. & Penston, M. V. 1976. NGC 3783: a possible X-ray emitting Seyfert galaxy. *Mon. Not. Roy. Astro. Soc.*, **177**: 121P-125P.
- Cox, A. N. 2004. *Allen's Astrophysical Quantities*, Springer, New York.
- Crenshaw, D. M., Schmitt, H. R., Kraemer, S. B. & Mushotzky, R. F. 2010. Radial velocity offsets due to mass outflows and extinction in Active Galactic Nuclei. *Astrophys. J.*, **708**: 419-426.
- De Robertis, M. M. & Osterbrock, D. E. 1984. An analysis of the narrow-line profiles in high ionization Seyfert galaxies. *Astrophys. J.*, **286**: 171-185.
- , Shaw, R. A. 1990. Line profiles and the kinematics of the narrow-line region in Seyfert galaxies. *Astrophys. J.*, **348**: 421- 433.
- Elvis, M. 2002. Smoking quasars: A new source for cosmic dust. *Astrophys. J.*, **567**: L107-L110.
- Erkens, U., Appenzeller, I. & Wagner, S. 1997. The nature of the FHIL winds from AGN. *Astron. Astrophys.*, **323**: 707-716.
- Fischer, T.C. 2011. HST observations of the double-peaked emission lines in the Seyfert galaxy Markarian 78: mass outflows from a single AGN. *Astrophys. J.*, **727**: 71-77.
- Grandi, S. A. 1978. [Fe XI] λ 7892 emission in Seyfert galaxies. *Astrophys. J.*, **221**: 501-506.
- Greene, J., Lim, J. & Ho, P. T. P. 2004. Evidence for interactions in H I imaging of Seyfert galaxies. *Astrophys. J. Suppl. Ser.*, **153**: 93-117.
- Hamuy, M., Walker, A. R., Suntzeff, N. B., Gigoux, P., Heathcote, S. R. & Phillips, M. M. 1992. Southern spectrophotometric standards. I. *Pub. Astron. Soc. Pacific*, **104**: 533-552.
- , Suntzeff, N. B., Heathcote, S. R., Walker, A. R. & Gigoux P. & Phillips M. M. 1994. Southern spectrophotometric standards. II. *Pub. Astron. Soc. Pacific*, **106**: 566-589.
- Heckman, T. M., et al. 1981. Emission-line profiles and kinematics of the narrow-line region in Seyfert and radio galaxies. *Astrophys. J.*, **247**: 403-418.
- , Armus, L. & Miley, G. K. 1990. Emission-line profiles and kinematics of the narrow-line region in Seyfert and radio galaxies. *Astrophys. J.*, **247**: 403-418.
- Jaffe, W., et al. 2004. The central dusty torus in the active galactic nucleus of NGC 1068. *Nature*, **429**: 47-49.
- Kollatschny, W., Biermann, P., Fricke, K. J., Huchtmeier, W. & Witzel, A. 1983. Nuclear activity in the barred spiral galaxy NGC 3660 from radio, optical, and X-ray observations. *Astron. Astrophys.* **119**: 80-84.
- Komossa, S., Zhou, H., Rau, A., Dopita, M., Gal-Yam, A., Greiner, J., Zuther, J., Salvato, M., Xu, D., Lu, H., Saxton, R. & Ajello, M. 2009. NTT, Spitzer and Chandra spectroscopy of SDSSJ095209.56+214313.3: the most luminous coronal-line supernova ever observed, or a stellar tidal disruption event? *Astrophys. J.*, **701**: 105-121.
- Laor, A. 1998. A note on the viability of gaseous ionization in active galaxies by fast shocks. *Astrophys. J.*, **496**: L71-L74.
- Marconi, A., van der Werf, P. P., Moorwood, A. F. M. & Oliva, E. 1996. Infrared and visible coronal lines in NGC 1068. *Astron. Astrophys.*, **315**: 335-342.
- Marziani, P., Sulentic, J. W., Dultzin-Hacyan, D., Calvani, M. & Moles M. 1996. Comparative analysis of the high- and low-ionization lines in the broad-line region of Active Galactic Nuclei. *Astrophys. J. Suppl. Ser.*, **104**: 37-70.
- Mazzalay, X., Rodríguez-Ardila, A. & Komossa, S. 2010. Demystifying the coronal line region of active galactic nuclei: spatially resolved spectroscopy with HST. *Mon. Not. Roy. Astro. Soc.*, **405**: 1315-1338.
- Mueller Sánchez, F., Davies, R. I., Eisenhauer, F., Tacconi, L. J. & Genzel, R. 2006. Near IR diffraction-limited integral field SINFONI spectroscopy of the Circinus Galaxy. *New Astron. Rev.*, **50**: 439- 442.
- Mullaney, J. R., Ward, M. J. 2008. Optical emission line properties of narrow line Seyfert 1s and comparison AGN. *Mon. Not. Roy. Astro. Soc.*, **385**: 53-74.
- Murayama, T., Taniguchi Y. 1998. Where is the coronal line region in active galactic nuclei?. *Astrophys. J.*, **497**: L9-L12.
- Nagao, T., Taniguchi, Y. & Murayama, T. 2000. High-ionization nuclear emission-line region of Seyfert galaxies. *Astron. J.*, **119**: 2605-2628.
- Osterbrock, D. E. 1981. The spectrum of III Zw 77: an unusual, high ionization Seyfert 1 galaxy. *Astrophys. J.*, **246**: 696-707.
- , Ferland, G. J. 2006. *Astrophysics of Gaseous Nebulae and Active Galactic Nuclei*, University Science Books, Sausalito.
- Pelat, D., Alloin, D. & Fosbury, R. A. E. 1981. High resolution line profiles in the Seyfert galaxy NGC 3783: the structure of the emitting regions. *Mon. Not. Roy. Astro. Soc.*, **195**: 787-804.
- Penston, M. V., Fosbury, A. E., Boksenberg, A., Ward, M. J. & Wilson, A. S. 1984. The Fe⁹⁺ region in Active Galactic Nuclei. *Mon. Not. Roy. Astro. Soc.*, **208**: 347-364.
- Peterson, B. M. 1997. *An Introduction to Active Galactic Nuclei*, Cambridge University Press, New York.

- Phillips, M. M. & Osterbrock, D. E. 1975. The optical emission-line spectrum of 3C120. *Pub. Astr. Soc. Pac.*, **87**: 949-959.
- Pogge, R. W. & Owen, J. M. 1993. Reporte interno de Ohio State University, 93-01.
- . 2000. Narrow-line Seyfert 1s: 15 years later. *New Astron. Rev.*, **44**: 381-385.
- Portilla, J. G. 2011. La región de líneas coronales en galaxias Seyfert 1 y Seyfert 2. Tesis de Doctorado, Universidad Nacional de Colombia, Facultad de Ciencias.
- Prieto, M. A., Marco, O. & Gallimore, J. 2005. Morphology of the coronal line region in Active Galactic Nuclei. *Mon. Not. Roy. Astro. Soc.*, **364**: L28-L32.
- Rafter, S. E., Crenshaw, D. M. & Wiita, P. J. 2009. Radio properties of low-redshift Broad Line Active Galactic Nuclei. *Astron. J.*, **137**: 42-52.
- Reunanen, J., Kotilainen, J. K. & Prieto, M. A. 2003. Near-infrared spectroscopy of nearby Seyfert galaxies -II. Molecular content and coronal emission. *Mon. Not. Roy. Astro. Soc.*, **343**: 192-208.
- Riffel, R. A. & Storchi-Bergmann, T. 2010. Compact molecular disc and ionized gas outflows within 350 pc of the active nucleus of Mrk 1066. *Mon. Not. Roy. Astro. Soc.*, **411**: 469-486.
- Rodríguez-Ardila, A., Prieto, M. A., Viegas, S. M. & Gruenwald, R. 2006. Outflow of very ionized gas in the centers of Seyfert galaxies: kinematics and physical conditions. *Astrophys. J.*, **653**: 1098-1114.
- , Rodríguez-Ardila, A., Prieto, M. A., Portilla, J. G. & Tejeiro, J. M. 2011. The near-infrared coronal line spectrum of 54 nearby active galactic nuclei. *Astrophys. J.*, **743**: 100-116.
- Shuder J. M. 1980. The optical spectra of narrow-line X-ray galaxies. *Astrophys. J.*, **240**: 32-40.
- Spoon, H. W. W., Armus, L. L., Marshall, J. A., Bernard-Salas, J., Farrah, D., Charmandaris, V. & Kent, B. R. 2009. High-velocity neon line emission from the ULIRG IRAS F001837111: revealing the optically obscured base of a nuclear outflow. *Astrophys. J.*, **693**: 1223-1235.
- , Holt, J. 2009. Discovery of strongly blue shifted mid-infrared [Ne III] and [Ne V] emission in ULIRGs. *Astrophys. J.*, **702**: L42-L46.
- Storchi-Bergmann, T., McGregor, P. J., Riffel, R. A., Simões Lopez, R., Beck, T. & Dopita, M. 2008. Feeding versus feedback in NGC 4151 probed with Gemini NIFS. I. Excitation. *Mon. Not. Roy. Astro. Soc.*, **394**: 1148-1166.
- Taylor, M. D., Tadhunter, C. N. & Robinson, T. G. 2003. The structure of the narrow-line region in Cygnus A. *Mon. Not. Roy. Astro. Soc.*, **342**: 995-1008.
- Vanden Berk, D. E., et al. 2001. Composite quasar spectra from the Sloan Digital Sky Survey, 2001, *Astrophys. J.*, **122**: 549-564.
- Veilleux, S. 1991. A study of the structure and kinematics of the narrow-line region in Seyfert galaxies. I. Atlas of line profiles. *Astrophys. J. Suppl. Ser.*, **75**: 357-406.
- Véron-Cetty, M.-P., Véron, P. & Gonçalves, A. C. 2001. A spectrophotometric atlas of Narrow-Line Seyfert 1 galaxies. *Astron. Astrophys.* **372**: 730-754.
- , Véron, P. 2006. A catalogue of quasars and active nuclei: 12th edition. *Astron. Astrophys.* **455**: 773-777.
- Vrtilek, J. M. & Carleton, N. P. 1985. Seyfert galaxy narrow-line regions. I - Observations of forbidden [O III] λ 5007. *Astrophys. J.*, **294**: 106-120.
- Wagner, R. M. 1992. Point source spectroscopy. *Astr. Soc. Pac. Conf. Ser.*, **23**: 160-194.
- Wagner, S. J. 1997. Coronal lines from the BLR, NLR and ENLR. *Astr. Soc. Pac. Conf. Ser.*, **113**: 298-301
- White, R. L., Becker, R. H., 1992. A new catalog of 30239 1.4 GHz sources. *Astrophys. J. Suppl. Ser.*, **79**: 331-467.
- Whittle, M. 1985. The narrow line region of active galaxies. III - Profile comparisons, *Mon. Not. Roy. Astro. Soc.*, **216**: 817-855.
- Whittle, M. et al. 2005. Jet-Gas interaction in Markarian 78. II. Ionization mechanisms. *Astron. J.*, **129**: 104-124.
- Wilson, A. S. 1979. X-ray galaxies. *Proc. Roy. Soc. A.* **366**: 461-489.
- , Nath, B. 1990. A survey of the profiles of narrow emission lines in Seyfert galaxies. *Astrophys. J. Suppl. Ser.*, **74**: 731-754.

LA ÓRBITA DEL SATÉLITE LIBERTAD 1

José Gregorio Portilla¹

Resumen

J. G. Portilla. La órbita del satélite Libertad 1. Rev. Acad. Colomb. Cienc. (141): 323-332, 2013. ISSN:0370-3908.

Inicialmente hacemos una descripción de la génesis del satélite Libertad 1, un CubeSat de tipo 1U adquirido y adaptado por la Universidad Sergio Arboleda el cual se constituyó en el primero objeto en orbitar la Tierra por parte de una institución colombiana. Posteriormente se realiza un análisis de sus elementos orbitales registrados por el NORAD y se calculan las tasas de decaimiento del semieje mayor causado por rozamiento atmosférico en un periodo de cinco años. A partir de estos valores procedemos a una estimación de la densidad promedio de la atmósfera terrestre a una altura cercana a los 720 km.

Palabras clave. Satélite artificial, atmósfera terrestre, rozamiento atmosférico.

Abstract

We begin with a description of the genesis of the Libertad 1 satellite, a type 1U CubeSat purchased and then fitted by the Sergio Arboleda University. This satellite was the first object to orbit the Earth by initiative of a colombian institution. We made an analysis of the orbital elements determined by NORAD and then we calculate decay rates of the semimajor axis due to atmospheric drag within an interval of five years. With these values we calculated average atmospheric density at 720 km altitude.

Key words. Artificial satellite, Earth atmosphere, atmospheric drag.

1. Introducción

El satélite Libertad 1 fue puesto en órbita terrestre el día 17 de abril de 2007 por un misil balístico modificado lanzado desde el cosmódromo de Baikonour. Con forma de cubo, con cada lado de apenas 10 cm, el satélite se constituyó en el primer objeto en orbitar la Tierra por iniciativa de una institución colombiana.

Transcurrido medio siglo después de la colocación del Sputnik I, Colombia aun carece casi que por completo de investigación e industria astronáutica en los términos en que se entiende en la actualidad. Por tal razón, si el país, representado en una de sus instituciones (gubernamental o

privada) se ve compelido a utilizar tecnología aeroespacial debe adquirir necesariamente los servicios de industrias existentes en aquellos países que los ofrecen. De hecho, la gran mayoría de los usuarios, con independencia de las naciones a las que pertenecen, han de hacer lo mismo: si alguien desea hacerse con un satélite para efectos de utilizarlo con algún propósito, debe pagar por él; adicionalmente, ha de adquirir el servicio de un proveedor de un cohete para efectos de que coloque dicho satélite en la órbita apropiada.

En el país se ha venido hablando de la compra de un satélite de comunicaciones y, en el presente, de un satélite de observación terrestre, aparatos estos cuyo costo se cuenta por decenas de millones de dólares y, en consecuencia, de adquisición casi que únicamente reservada al estado.

¹Observatorio Astronómico Nacional, Facultad de Ciencias, Universidad Nacional de Colombia, e-mail: jgportillab@unal.edu.co

Sin embargo, los avances en miniaturización, ciencia de materiales y computación han hecho que hoy en día sea posible que cualquier interesado pueda adquirir un satélite en miniatura como quien compra un automóvil a costos de pocas decenas de miles de dólares. El Libertad 1 fue uno de tales satélites.

A pesar de que el Libertad 1 alcanzó exitosamente la órbita planeada, al igual que sus señales de radio fueron recolectadas en su momento por diversos radioescuchas a lo largo del planeta, hasta donde sabemos no existe publicado un reporte final que permita saber cuales objetivos básicos de la misión fueron alcanzados y cuales no. La información existente en la página del satélite contiene solo un listado de datos telemétricos que no ofrecen mayores luces sobre el desempeño del satélite y que al mismo tiempo suministre, con la debida perspectiva, los alcances y logros tecnológicos —apropiación de tecnología de punta— que, como se reitera por sus gestores, se generaron con la construcción y consiguiente puesta en órbita del Libertad 1.

Aun cuando el satélite dejó de ser operativo ya varios años atrás, no se descarta que los responsables de su gestión puedan ofrecer en el futuro cercano tanto un reporte final de operación y los resultados derivados de las medidas de temperatura que se lograron recolectar, tal como en su momento lo anunciaron (Joya, 2007). Adicionalmente, en la poca bibliografía técnica disponible (Joya et al., 2007), los parámetros orbitales que permiten conocer la orientación y geometría de la órbita están incompletos y no permiten siquiera realizar un cálculo de efemérides con alguna validez.

A la espera de un reporte final de operación, se presenta en esta comunicación una exposición sobre aspectos básicos de la dinámica orbital del satélite Libertad 1 desde su colocación en órbita hasta mediados del año 2012, lo cual se hará con base en información recolectada por estaciones de rastreo.

La sección 2 describe algunos aspectos básicos de los CubeSats así como una exposición sucinta sobre la génesis del satélite Libertad 1. La sección 3 describe el lanzamiento y trayectoria del cohete que colocó el satélite en órbita, en tanto que la sección 4 describe los valores de los elementos orbitales en los primeros días de la inserción orbital. La variación temporal de los elementos orbitales del Libertad 1 se encuentran en la sección 5 así como valores de la tasa de decaimiento. La sección 6 describe cómo es posible inferir valores de densidad atmosférica en los rangos de altura en que se ha desplazado el satélite. Finalmente, la sección 7 contiene las conclusiones.

2. Los CubeSats y el Libertad 1

Los CubeSats constituyen un tipo particular de satélites en miniatura (también denominados nano o picosatélites) con una estructura básica en forma de cubo², masa menor a 1.3 kg y un tamaño estándar de 10 cm de lado. Su concepción se debió a una colaboración entre la Universidad Estatal Politécnica de California (Cal Poly) y la Universidad de Stanford en un intento de incentivar la participación de universidades a nivel mundial para la realización de investigación espacial con base en tecnología disponible sin la implicación de fuertes presupuestos (Toorian, Diaz & Lee, 2008). Esto los hace particularmente atractivos para países en vías de desarrollo que desean participar en tecnologías usualmente revueltas solo al primer mundo (Woellert, 2011).

Lo que está detrás de los CubeSats es una “popularización” en la utilización de la tecnología satelital. Con establecer una estandarización del tamaño y la forma del satélite es ya mucho lo que se avanza y se ahorra en términos de investigación y desarrollo. A su vez, y debido a su escaso tamaño y masa, permite que haya un número adecuado de usuarios (universitarios, científicos, estudiantes, ingenieros) de diferentes instituciones, empresas y nacionalidades, cada uno con su CubeSat debidamente desarrollado y adaptado, que utilizarán un mismo cohete, lo que permite reducir notablemente los costos de su colocación en órbita pues se distribuye entre todos (Soojung-Kim Pang & Twiggs, 2011). Para estos efectos, se puede utilizar los servicios (aunque no exclusivamente) de la empresa rusa ISC Kosmotras, la cual comercializa antiguos misiles R-36M decomisionados de construcción rusoucraniana³. En la guerra fría cada uno de estos cohetes fue diseñado para arrojar un número cercano a 10 bombas termonucleares capaz de atacar distintos blancos. Hoy en día se han adaptado para su uso civil y cada cohete puede modificarse para colocar entre 10 y 15 pequeños satélites. En un determinado lanzamiento, los CubeSats, provenientes de distintos usuarios, son colocados en grupos en varios dispensadores y constituyen en sí las cargas secundarias, siendo satélites más masivos y voluminosos las cargas primarias.

En términos de participación, los CubeSats han resultado ser un éxito notable, ya que son numerosas las universidades e institutos de distintos países que han utilizado esta posibilidad como único medio para la ejecución de proyectos de investigación científica que van desde estudios atmosféricos, en particular de la ionósfera (Waido, Henry & Campbell, 2002), detección de polvo cósmico (McHugh et al., 2009) y emisiones terrestres de rayos gamma (Hill et al., 2011) hasta investigaciones en genética (Kitts et al., 2007). Sin embargo, la mayor

²Estos están enteramente conformados por una unidad básica llamada 1U; sin embargo, pueden existir satélites rectangulares, constituidos por 2 ó 3 unidades básicas, denominados CubeSats 2U ó 3U, respectivamente.

³<http://www.kosmotras.ru>

parte de las misiones involucran desarrollo tecnológico y con ello explorar la factibilidad de la utilización de estos satélites en miniatura para cumplir tareas de detección remota, comunicaciones, navegación, etc., en el que incluso empresas astronáuticas reputadas, con años de experiencia construyendo satélites del tamaño de autobuses, han acudido a su uso (**Caday-Eames**, 2006).

Son varias las naciones que, gracias a los CubeSats, aparecen figurando ahora con satélite propio. De ese modo los satélites SwissCube-1 (Suiza), MaSat-1 (Hungria), Goliat (Rumania) y PW-Sat (Polonia) son los primeros objetos en llegar a órbita por parte de esas naciones. A mediados del año 2013 se espera que llegue a órbita el satélite NEE-01 Pegasus, que se constituirá en el primer satélite de Ecuador, el cual, de funcionar, será el primer CubeSat en transmitir video en tiempo real⁴.

La idea inicial de que una institución colombiana adquiriera un CubeSat para modificarlo y que cumpliera una misión específica fue presentada al país a inicios del año 2005, donde se anunciaba la próxima puesta en órbita (para diciembre de ese año) del satélite Libertad 1 enmarcado dentro del proyecto titulado “Colombia en órbita” establecido como parte de la plataforma política del, por aquel entonces, candidato a la presidencia Álvaro Leyva⁵. La responsabilidad académica estaría a cargo de la Universidad Sergio Arboleda. Unos pocos años antes, Leyva había sido el principal gestor de la construcción de un observatorio astronómico en la misma universidad. Con el desarrollo del Libertad 1 entre manos, el observatorio de dicha institución recibe la inusual transformación de pasar de observatorio astronómico propiamente dicho a convertirse adicionalmente en algo semejante a un laboratorio de investigación aeroespacial. En el artículo de prensa en mención se señaló que las funciones del satélite eran múltiples: “tomar fotografías, emitir mensajes de los patrocinadores, el himno nacional, además de transmitir señales del sistema de posicionamiento global (GPS)”.

Después de un proceso de búsqueda de patrocinadores, se compró la estructura básica del Libertad 1 y se adaptó una habitación del observatorio para que sirviera de cuarto limpio donde se conducirían las labores de diseño y prueba de la electrónica involucrada, esto es, del montaje y ensayo de las tarjetas electrónicas. También se erigieron aparatos y antenas para efectos de rastrear la señal proveniente del satélite. Para inicios del año 2006 el candidato presidencial, gestor y líder de la iniciativa, cesó abruptamente su longevo vínculo con la universidad, lo que no implicó la cancelación del proyecto, pues fue adoptado en su totalidad por la Universidad Sergio Arboleda.

El proceso de diseño y prueba de la electrónica tuvo inconvenientes que retrasaron notablemente el cronograma. Adicionalmente, surgieron problemas de índole judicial ya que el principal asesor del proyecto, el profesor Cesar Ocampo de la Universidad de Texas y de origen colombiano, fue objeto de investigación por parte del FBI por asuntos de transferencia de tecnología. Estas contrariedades obligaron a reducir notablemente los objetivos del Libertad 1 —finalmente quedó aminorado a contener un emisor de señales de datos de temperatura—. Ensayos de temperatura y vibración (que se llevaron a cabo en los Estados Unidos) obligaron también a modificar el diseño original. Finalmente, para mediados del año 2006, el diseño de la tarjeta y el montaje de la batería y antenas en el interior de la estructura del Libertad 1 superaron las pruebas. Este retraso en el cronograma fue, paradójicamente, afortunado. De haber estado listo un poco antes, el Libertad 1 hubiese ido como una de las cargas en el lanzamiento del cohete Dnepr LV programado para el 26 de julio de 2006. Una falla en la primera etapa de este cohete ocasionó su colisión en el desierto a unos 150 km al sur del sitio de lanzamiento. Los 18 satélites que llevaba como carga útil (incluyendo 14 CubeSats) resultaron, por supuesto, destruidos.

3. La fase propulsada

El satélite Libertad 1 fue colocado en órbita baja mediante un cohete Dnepr LV lanzado desde el silo subterráneo 109/95 ($\phi = +45^{\circ}57'4.2''$, $\lambda = +63^{\circ}29'49.5''$, $h = 116$ m, siendo, respectivamente, latitud, longitud⁶ y altura sobre el nivel del mar, referidas al elipsoide WGS84) ubicado en el cosmódromo de Baikonur, Kazajistán. El Dnepr LV es una versión adaptada para el lanzamiento de satélites de baja altura del misil balístico intercontinental R-36M, también conocido por analistas militares occidentales como SS-18 Satan. Junto al Libertad 1 estaban otros 13 satélites para ser colocados en órbita: Egyptsat 1 (la carga principal del cohete, primer satélite de senseo remoto de Egipto, con un peso de 100 kg), Saudisat 3 (de 35 kg, dedicado a tareas científicas), 5 satélites SaudiComsat (del 3 al 7, cada uno de 12 kg y destinados a tareas de comunicaciones comerciales) y otros seis CubeSats (CP3, CP4, CAPE-1, Aerocube-2, CSTB-1 y MAST). Los CubeSats son lanzados desde una estructura llamada P-Pod dividida en tres segmentos: A, B y C. Cada segmento puede contener hasta tres CubeSats. En particular, el Libertad 1 estaba alojado en el segmento B.

El cohete despegó el 17 de abril de 2007 a las $6^h46^m35^s$ de TUC (tiempo universal coordinado)⁷. La forma de lanzamiento, en sus primerísimos instantes, es poco convencional y fue heredada de su condición de antiguo misil balístico en estado de alerta permanente. Como el cohete está bajo tierra (dentro de un silo subterráneo), para efectos de que en

⁴<http://www.exa.ec>

⁵El Espectador, 20 de febrero de 2005.

⁶En esta comunicación asumiremos que la longitud hacia el este es positiva y hacia el oeste negativa.

⁷<http://www.ne.jp/asahi/hamradio/je9pel/dneprcub.htm>

el despegue el flujo de salida de gases no atente contra la integridad del mismo, su activación ha de hacerse expulsando primero el cohete del foso en el que reside. Al momento de su lanzamiento, el cohete y la envoltura que lo protege son expulsados violentamente del foso a través del método llamado de “lanzamiento en vapor” en el que se insufla en el silo ya con su compuerta superior abierta, y en cuestión de milisegundos, vapor o gases producto de una combustión, con una intensidad tal, que todo el conjunto es eyectado del foso. El cohete, con un peso de 211 toneladas, una vez expulsado y ya en la superficie, entra en funcionamiento, encendiendo su primera etapa de forma casi que instantánea.

La dirección de la trayectoria propulsada del vuelo tuvo un azimut aproximado de 188 grados, lo que implicó sobrevolar áreas de Uzbekistán, Turkmenistán e Irán. Su primera etapa duró en funcionamiento apenas unos 130 segundos. Una vez agotada la primera etapa, esta se separó del cuerpo principal del cohete (colisionando poco tiempo después en una zona desértica al norte de Uzbekistán). A los pocos segundos se encendió la segunda etapa, que duró en operación unos 170 segundos aproximadamente. A su vez, al agotarse el combustible de ésta (que chocará, después de la separación, en las aguas del Océano Índigo) se encendió a los pocos segundos la tercera y última etapa cuya duración fue del orden de unos 11 minutos. Aunque esta etapa tiene el principal propósito de alcanzar la velocidad orbital, posee la característica adicional y poco común (una vez más heredada de su naturaleza de misil balístico con capacidad de atacar múltiples blancos) de que, en su fase final de funcionamiento, realiza una maniobra de rotación de 180 grados al cabo de la cual comienza a liberar (aun con el motor encendido), y en cuestión de pocos segundos, los satélites a ser colocados en órbita. La maniobra tiene el propósito de realizar la inyección orbital de cada una de las cargas útiles con notable exactitud.

4. El Libertad 1 en órbita

El Libertad 1 fue colocado en órbita baja terrestre cuasi polar de tipo sol sincrónico en un tiempo estimado de $7^h 02^m 6^s$ de TUC del 17 de abril de 2007 (ver Figura 1). De acuerdo con el NORAD⁸ el cohete constituyó el décimo séptimo lanzamiento del año 2007. En un principio, el Libertad 1 quedó registrado como la pieza N de ese lanzamiento y se le asignó el número de satélite 31129⁹ y así lo informa Joya (2007). Sin embargo, hubo una modificación tiempo después, ya que Celestrak¹⁰ designa al Libertad 1 como la pieza M y un número de satélite de 31128 (asignando la pieza N y el número 31129 para el

CubeSat CP3). El Director del proyecto, tiempo después, confirmó la asignación del número 31128 para el Libertad 1¹¹ aun cuando la página del satélite en la Universidad Sergio Arboleda¹² muestra desde el lanzamiento y aun en el momento en que se escriben estas líneas, los elementos orbitales correspondientes al satélite 31129.

Para confusión adicional, el Centro Nacional de Datos de Ciencia Espacial (NSSDC por sus siglas en inglés), adscrito a la Administración Nacional de la Aeronáutica y el Espacio (NASA) le asigna el número 31129. Por el elevado grado de confiabilidad y su actualización día a día de la página Celestrak, y por la información suministrada por el mismo Director del proyecto, asumiremos aquí que el Libertad 1 corresponde al objeto 31128 rastreado por el NORAD.

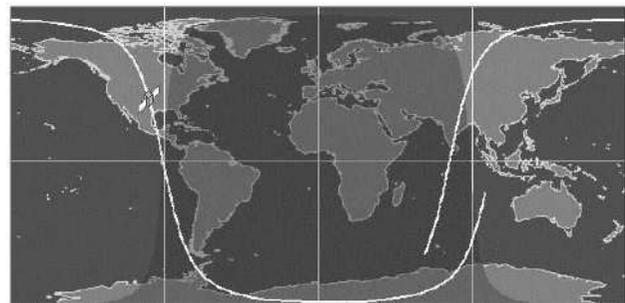


Figura 1: Una proyección específica de la órbita del Libertad 1 (curva de color blanco) en poco más de un periodo orbital sobre la superficie de la Tierra. Por ser la órbita de tipo sol sincrónico, el satélite se va desplazando de este a oeste.

Los elementos orbitales del Libertad 1, en el instante $21^h 3^m 8.02^s$ (TUC) del 17 de abril de 2007, esto es, unas 14 horas después del momento de la inyección (y que constituyen el primer número de elementos registrado por Celestrak y Space-Track¹³ para este satélite) pueden verse en la tabla 1.

Tabla 1: Primer conjunto de elementos orbitales del satélite Libertad 1 tomados por el NORAD: N es el número de revoluciones por día, i es la inclinación con respecto al ecuador celeste, e es la excentricidad, Ω es la ascensión recta del nodo ascendente, ω es el argumento de latitud del perigeo y M_r es la anomalía media en el tiempo de referencia ($21^h 3^m 8.02^s$ de TUC del 17 de abril de 2007).

N	i	e	Ω	ω	M_r
14.568	98.085	0.0086	183.053	206.758	152.914

⁸ Acrónimo de North American Aerospace Defense Command (Comando Norteamericano de Defensa Aeroespacial).

⁹ Así quedó registrado unos diez días después (<http://www.ne.jp/asahi/hamradio/je9pel/dneprcub.htm>)

¹⁰ <http://www.celestrak.com>

¹¹ Comunicación personal con Raúl Joya.

¹² http://www.usergioarboleda.edu.co/proyecto_espacial/index.htm

¹³ <http://www.space-track.org>

A partir de algunos de estos datos es posible determinar el semieje mayor a , y las alturas de perigeo (h_p) y apogeo (h_a), respectivamente. Teniendo en cuenta la tercera ley de Kepler que relaciona el período orbital T con la distancia media a , tenemos que:

$$\frac{1}{N} = T = \frac{2\pi}{\sqrt{GM_T}} a^{3/2},$$

donde G es la constante de Cavendish ($6.67428 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$) y M_T la masa de la Tierra ($5.9736 \times 10^{24} \text{ kg}$). Tomando como unidad de distancia y de tiempo al radio terrestre en el ecuador (RT) ($1 \text{ RT} = 6.37814 \times 10^6 \text{ m}$) y al día solar medio, respectivamente, podemos expresar el semieje mayor como:

$$a = \frac{1}{N^{2/3}} \left(\frac{k}{2\pi} \right)^{2/3} = \frac{6.62331}{N^{2/3}}, \quad (1)$$

siendo $k = \sqrt{GM_T} = 107.10085 \text{ RT}^{3/2} \text{ d}^{-1}$. Las alturas de perigeo (h_p) y apogeo (h_a) son entonces:

$$\begin{aligned} h_p &= a(1 - e) - R_T, \\ h_a &= a(1 + e) - R_T, \end{aligned}$$

donde R_T representa el radio terrestre en el ecuador.

Teniendo en cuenta los datos de la Tabla 1, deducimos que el semeje mayor de la órbita fue de 1.11039 RT, esto es, 7082.2 km, lo que corresponde a una altura media (h_m) sobre el ecuador de 704 km y alturas de perigeo y apogeo de 643 y 765 km, respectivamente. Sin embargo, estos datos de altura inicial del Libertad 1 no son correctos (al igual que los elementos de los que se calcularon) por las razones que exponemos a continuación. Los satélites CAPE-1 como el CP3, ambos CubeSats también, residían, junto al Libertad 1, en el P-Pod B. La separación de los satélites de la tercera etapa se produce en un intervalo de pocos segundos y es de presumir que el mecanismo eyector produce un cambio de velocidad casi idéntico para los tres satélites, por lo que sus órbitas han de ser en principio muy parecidas, más teniendo en cuenta el hecho de que los tres carecen de sistema de propulsión que puedan alterar su órbita.

Sin embargo, de acuerdo con Celestrak, tanto el CAPE-1 como el CP-3, en su primer conjunto de elementos orbitales, aparecen ambos con valores de $N = 14.518$ y $e = 0.0102$, claramente distintos a los que Celestrak registra para el Libertad 1. Si se consultan los siguientes conjuntos de elementos orbitales para el Libertad 1, se observan valores de N y e muy semejantes a los registrados en la Tabla 1. Sin embargo, el cuarto conjunto de elementos del Libertad 1, correspondiente a unas 39 horas después de haber quedado en órbita, contiene valores tanto de N como

de e casi idénticos a los de CAPE-1 y CP3. Esto lo que sugiere es que los primeros conjuntos de elementos orbitales del Libertad 1 tomados por el NORAD no se corresponden con la trayectoria real del objeto (lo que implica un error de algún tipo en la determinación orbital) y que solo hasta el cuarto conjunto de elementos se puede tener confianza en dichos datos¹⁴.

Reproducimos en la Tabla 2 el conjunto de elementos orbitales correspondiente al instante $21^{\text{h}}54^{\text{m}}52.4^{\text{s}}$ del 18 de abril de 2007, que es el cuarto conjunto de elementos orbitales registrados por NORAD para el Libertad 1.

Tabla 2: Cuarto conjunto de elementos orbitales del satélite Libertad 1 tomados por el NORAD correspondientes al instante $21^{\text{h}}54^{\text{m}}52.4^{\text{s}}$ TUC del 18 de abril de 2007.

N	i	e	Ω	ω	M_r
14.518	98.084	0.0102	184.092	207.965	153.552

Por lo tanto, los valores correctos (al cabo de día y medio en órbita) de la altura media del Libertad 1 es de 720 km con alturas de perigeo y apogeo de 647 y 793 km, respectivamente, valores estos que son los registrados para los tres satélites por el *Orbital Debris Quaterly News*¹⁵.

Claramente, por la orientación espacial ($i > 90$) y las dimensiones de la trayectoria ($h_m < 1500 \text{ km}$), el Libertad 1 quedó en una órbita de tipo sol sincrónica, la cual quedó determinada fundamentalmente por la órbita deseada de la carga principal. El valor de la tasa diaria de desplazamiento de la ascensión recta del nodo ascendente producida por achatamiento terrestre ($J_2 = 1.083 \times 10^{-3}$) con los parámetros del Libertad 1 es igual a (Brooks, 1977; Portilla, 2009):

$$\Delta\Omega = -\frac{3k(180/\pi)J_2}{2a^{7/2}(1 - e^2)^2} \cos i \approx +0.964^\circ/\text{d},$$

el cual es un poco menor al requerido para hacer que la órbita se desplace a la misma tasa de desplazamiento que el movimiento medio del Sol ($0.985^\circ/\text{d}$) y, por lo tanto, que pase por las mismas zonas terrestres bajo similares condiciones de iluminación solar. Pero ello no revirtió problema para los gestores del Libertad 1: quedar en una órbita sol sincrónica exacta no era una condición exigida para la misión.

Debido al movimiento de oeste a este de la rotación de la Tierra, por cada órbita realizada el satélite se va desplazando un ángulo $\Delta\chi$ en dirección hacia el oeste con respecto a un observador ubicado en la superficie terrestre. Dicho ángulo,

¹⁴No debe extrañar que solo hasta el cuarto conjunto de elementos orbitales se haya corregido la órbita, dado que muy probablemente el segundo y tercer conjunto fueron calculados a partir del primero, dado la forma como NORAD registra y determina los elementos que da a conocer. Ver: www.celestrak.com/columns/v04n05/index.asp#FAQ06

¹⁵<http://www.orbitaldebris.jsc.nasa.gov/newsletter/pdfs/ODQNv11i3.pdf>

con los parámetros orbitales del Libertad 1, está dado por (Portilla, 2009):

$$\Delta\chi = -360 \frac{T}{T_T} = -\frac{360.985852}{N} = -24.86^\circ,$$

donde $T_T = 0.997269$ es el periodo de rotación sideral de la Tierra en unidades de días solares medios y el signo menos significa que el ángulo tiene la dirección de las agujas del reloj mirado desde el polo norte celeste. Este ángulo no cambia significativamente si se tiene en cuenta el desplazamiento de la ascensión recta del nodo ascendente producida por achatamiento terrestre pues, por cada revolución, es del orden de $+0.964^\circ/N = +0.06^\circ$. Tomando entonces el valor de -24.8° como desplazamiento del paso del satélite con respecto a un observador terrestre se tendrá que la condición de paso sucesivo por el mismo sitio de la superficie terrestre es:

$$n|\Delta\chi| = 360^\circ m,$$

donde n y m son números enteros. Es claro que $n/m = 360/24.8 \approx 14.5$, valor este que puede obtenerse de la relación $29/2$, queriendo decir con ello que, si el satélite pasa por un sitio en un instante de tiempo determinado, al cabo de 2 días se completan 29 revoluciones y el satélite volverá a pasar aproximadamente por ese mismo sitio.

Es evidente que, si llamamos λ_0 a la longitud terrestre donde ocurre el nodo descendente, los valores de las longitudes terrestres donde se verifican los siguientes nodos descendentes sucesivos vienen dados por:

$$(\lambda_{i+1})_{ND} = \lambda_0 - |\Delta\chi| \times (i + 1),$$

donde i toma los valores $i = 0, 1, 2, 3, \dots$. Igualmente, los valores de la longitud terrestre donde se verifican los nodos ascendentes sucesivos están dados por:

$$(\lambda_{i+1})_{NA} = \lambda_0 + 180^\circ - \left(\frac{|\Delta\chi|}{2}\right) \times (2i + 1).$$

En particular, en el caso que nos ocupa, donde $i = ENT(N/2) = 7$ (donde ENT representa la función valor entero) se tiene un valor de la longitud terrestre del nodo ascendente próximo al valor de λ_0 . La diferencia entre estos dos valores de longitud puede hallarse así:

$$(\lambda_7)_{NA} - \lambda_0 = 180^\circ - \left(\frac{|\Delta\chi|}{2}\right) \times (2i + 1) \approx -6^\circ,$$

Esto lo que quiere decir es que, si el satélite pasa por el nodo descendente a una longitud terrestre dada, al cabo de un poco más de transcurrido un día, el satélite pasa por el nodo ascendente a 6 grados al oeste de la primera. Ilustremos el caso con valores específicos. Por ejemplo, el 19 de abril de 2007, el tiempo local (hora legal de la República de Colombia) de un paso por el nodo descendente ocurrió a las $10^h 16^m$ a una longitud de $-71^\circ 43'$, entrando a territorio colombiano por el departamento

de Arauca y saliendo por el departamento del Amazonas lo que realizó en un tiempo de 2.5 minutos. Unas 12.5 horas después, el satélite alcanzó a sobrevolar, de nuevo, territorio colombiano pero en esta ocasión poco después de ocurrir un paso por el nodo ascendente el cual ocurrió a las $22^h 41^m$ hora local a una longitud de $-77^\circ 45'$ (en territorio ecuatorial) entrando y saliendo del territorio terrestre nacional solamente por el departamento de Nariño. Como ya se dijo, los sobrevuelos por los mismos sitios se repiten aproximadamente al cabo de 29 revoluciones, esto es, 2 días después.

Sin embargo, como en cualquier satélite sol sincrónico, a medida que el tiempo transcurre los cruces del satélite por los nodos no se verifican, rigurosamente hablando, a la misma hora local y sobre la misma longitud terrestre. Los errores de inserción orbital y perturbaciones como la atracción gravitacional del Sol y la Luna así como la resistencia atmosférica hacen que el satélite comience a distanciarse de la posición del cruce del nodo descendente (y del tiempo en que ocurre) de tal modo que la ascensión recta del nodo descendente del Libertad 1 se va desplazando en promedio unos 2 grados hacia el este por cada 8 días transcurridos.

El Libertad 1 envió señales de radio en enlace de descenso a una frecuencia de 437.405 MHz que fueron recogidas por varias estaciones de rastreo a lo largo del planeta. Así lo hizo por 22 días al cabo de los cuales pasó a engrosar el listado de objetos considerados como desecho espacial. Continuará en órbita por varios años más.

5. Evolución orbital

Desde el lanzamiento de los primeros CubeSats, en junio de 2003, las órbitas de estos objetos han quedado relativamente altas, por un lado, y por otro, como es de esperarse por su baja masa y tamaño, presentan altos coeficientes balísticos (de acuerdo con la definición adoptada aquí, ver más adelante) lo que significa que la pérdida de altura por rozamiento atmosférico ha sido baja. No es de extrañar, entonces, que aun no se haya verificado a la fecha la reentrada atmosférica de alguno de ellos.

En la Figura 2 se puede observar el cambio de altura promedio ($h_m = a - R_T$) del satélite Libertad 1 desde 1.6 días de su puesta en órbita hasta finales del mes de junio de 2012. La tasa de disminución de altura, causada por rozamiento atmosférico, muestra claramente dos etapas: la primera, se extiende desde 1.6 días del lanzamiento hasta finales de diciembre de 2010 con un descenso claramente lineal y pendiente no tan acentuada; la segunda, caracterizada por poseer una mayor pendiente y un ajuste menos lineal, se extiende desde inicios del año 2011 hasta finales de junio de 2012.

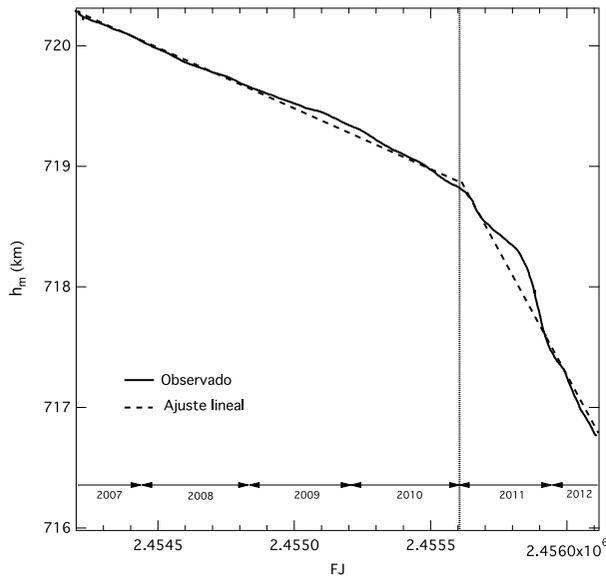


Figura 2: Cambio de altura media (en km) del Libertad 1 en función del tiempo (en fecha juliana). El intervalo de tiempo comprendido va desde 1.6 días del lanzamiento hasta el 30 de junio de 2012. A finales de diciembre de 2010 ($FJ \approx 2.4556 \times 10^6$) hay un cambio claramente definido en la pendiente señalado por la línea recta vertical.

Los valores de las tasas de cambio de la altura, asumiendo ajustes lineales, son:

$$\text{Etapa 1: } \dot{h}_m = -0.966 \pm 0.001 \text{ m d}^{-1},$$

$$\text{Etapa 2: } \dot{h}_m = -4.187 \pm 0.028 \text{ m d}^{-1},$$

donde los coeficientes de correlación son -0.99 y -0.98 para la etapa 1 y la etapa 2, respectivamente.

La Figura 3 muestra la variación del flujo del Sol en radio a la longitud de onda de 10.8 cm (2.8 GHz) el cual es considerado un indicador confiable de la actividad del Sol. Los datos de flujo fueron tomados de datos promediados y extrapolados de la página de la Oficina del Programa de Residuos Orbitales de la NASA (National Aeronautics and Space Administration)¹⁶. Es evidente el efecto que tiene la actividad solar sobre la tasa de decaimiento del Libertad 1 principalmente a partir del año 2011.

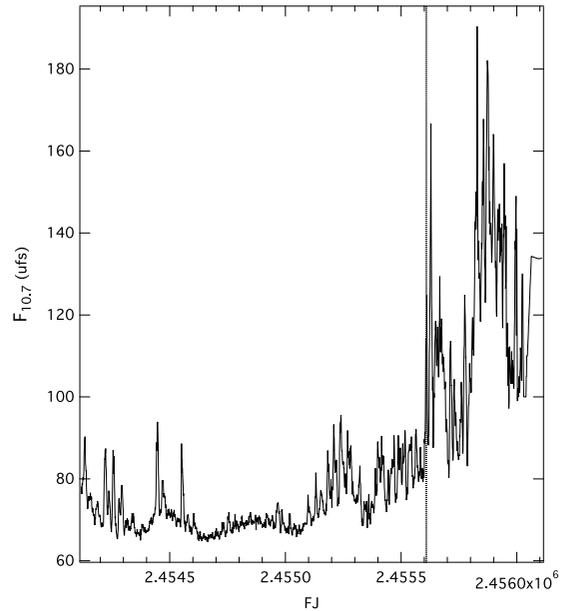


Figura 3: Variación del flujo solar en 10.8 cm en unidades de flujo solar ($ufs = 10^{-22} \text{ joules m}^{-2} \text{ Hz}^{-1}$). El intervalo de tiempo considerado es idéntico al de la Figura 1.

En la Figura 4 se puede observar la variación temporal de otros elementos orbitales del Libertad 1, comprendido desde su puesta en órbita hasta mediados del año 2012. Se aprecia que, en lo que tiene que ver con la ascensión recta del nodo ascendente y el argumento de latitud del perigeo, que ambos elementos cambian de forma secular y, por lo tanto, circularizan, comportamiento que, como es bien sabido, se debe al efecto del armónico zonal J_2 , el término principal de perturbación por la no esfericidad de la Tierra. La línea nodal se desplaza en sentido directo (occidente a oriente) a causa de que $i > 90^\circ$, mientras que la línea apsidal se desplaza en sentido retrógrado ya que $i > 63.4^\circ$. Tanto el periodo de circularización nodal (tiempo necesario para que la línea de los nodos realice una revolución completa) como el periodo de circularización apsidal (tiempo necesario para que la línea de las ápsides haga lo propio), los que llamaremos T_{cn} y T_{ca} , respectivamente, están dados, para un satélite artificial perturbado por J_2 , por (Portilla, 2009):

$$T_{cn} = \frac{27004.2(1 - e^2)^2}{N^{7/3} |\cos i|},$$

$$T_{ca} = \frac{27004.2(1 - e^2)^2}{N^{7/3} |2 - 2.5 \sin^2 i|},$$

en unidades de día solar medio. Al tener en cuenta los valores del Libertad 1 (Tabla 2) obtenemos: $T_{cn} = 373$ d y $T_{ca} = 116$ d, valores que corresponden casi exactamente a los periodos que se pueden inferir de la Figura 4.

¹⁶<http://www.orbitaldebris.jsc.nasa.gov/mitigate/das.html>

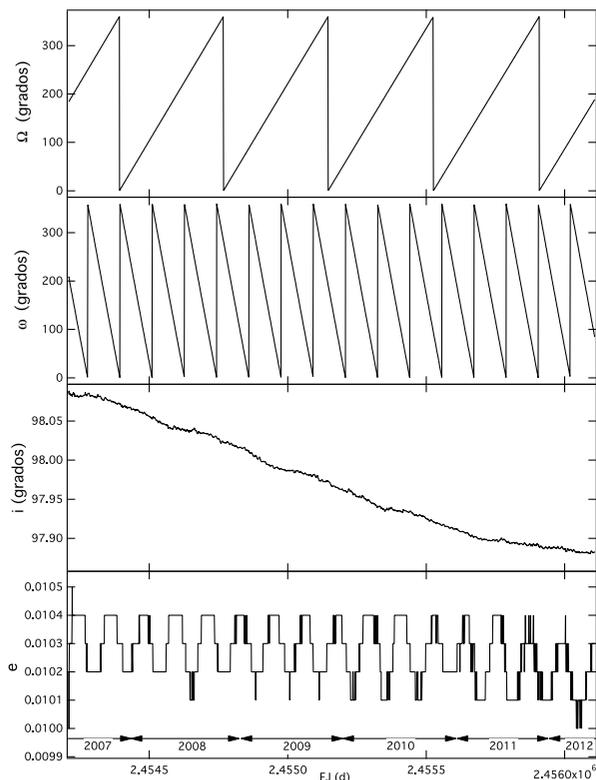


Figura 4: Variación temporal de varios elementos orbitales del Libertad 1. De arriba a bajo: ascensión recta del nodo ascendente, argumento de latitud del perigeo, inclinación y excentricidad.

En cuanto al valor de la inclinación con respecto al ecuador se observa una muy pequeña disminución de carácter secular que puede atribirse a la interacción con la atmósfera terrestre (Milani, Nobili, Farinella, 1987). La excentricidad muestra en el intervalo de tiempo estudiado una variación de carácter eminentemente periódico con valores mínimos y máximos comprendidos entre 0.0101 y 0.0104. No se observa aun claramente la tendencia de la excentricidad a ir disminuyendo por resistencia atmosférica debido a los valores exiguos de densidad correspondientes a las alturas a las que se ha desplazado el satélite.

6. Estimación de la densidad atmosférica

Conociendo la tasa de cambio de la altura es posible determinar la densidad promedio de la atmósfera con base en las características geométricas del satélite. En la descripción de un movimiento de un satélite de masa despreciable alrededor de una Tierra esférica con ausencia de fuerzas externas (i.e., del clásico problema de los dos cuerpos), la energía E

por unidad de masa está dada por:

$$E = -\frac{k^2}{2a},$$

la cual, bajo las condiciones expuestas, es una constante. De acuerdo con lo anterior, un cambio que pudiera presentarse de la energía en función del tiempo (potencia) está dado solo por el cambio instantáneo en el semieje mayor:

$$\dot{E} = \frac{k^2}{2a^2} \dot{a}. \quad (2)$$

La energía deja de ser una constante por la presencia de una fuerza de perturbación externa \vec{F} . Como se sabe, el trabajo generado por una fuerza está dado por:

$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int \vec{F} \cdot \vec{r} dt,$$

donde \vec{r} es el vector posición y el vector velocidad \vec{v} puede expresarse como \vec{r}' , siendo dt un intervalo diferencial de tiempo. De ahí que la potencia \dot{E} pueda escribirse como:

$$\dot{E} = \dot{W} = \vec{F} \cdot \vec{r}'. \quad (3)$$

La fuerza de perturbación \vec{F} puede expresarse en tres componentes (ver por ejemplo McCuskey, 1963; Murray & Dermott, 1999): una, tangencial en la dirección del movimiento (F_T), la segunda, normal a la órbita dirigida hacia el lado cóncavo sobre el plano orbital (F_A) y la otra, perpendicular al plano orbital (F_H). Entonces:

$$\vec{F} = F_T \hat{t} + F_A \hat{a} + F_H \hat{h},$$

donde \hat{t} , \hat{a} y \hat{h} ($\hat{h} = \hat{t} \times \hat{a}$) son los vectores unitarios dirigidos en esas respectivas direcciones. Puesto que el vector velocidad, por su definición, puede expresarse como $\vec{r}' = v \hat{t}$, donde v es la magnitud de la velocidad, se deduce entonces:

$$\vec{F} \cdot \vec{r}' = v F_T. \quad (4)$$

Por lo tanto, teniendo en cuenta las ecuaciones (3) y (4), al despejar \dot{a} en (2) se obtiene:

$$\dot{a} = \frac{2a^2}{k^2} v F_T. \quad (5)$$

Para un satélite de baja altura, la fuerza de perturbación que más afecta el cambio del semieje mayor es la presencia de la atmósfera terrestre, cuyo efecto secular es tanto mayor cuanto menor es la altura (Milani, Nobili & Farinella, 1987). La magnitud de la componente tangencial de la fuerza externa, F_T , teniendo en cuenta únicamente la presencia de la resistencia atmosférica, está dada por:

$$F_T = \frac{1}{2} \frac{C_D A}{m} v^2 \rho, \quad (6)$$

donde C_D es el coeficiente (adimensional) de resistencia atmosférica que es función de la forma geométrica del objeto, A el área proyectada del satélite en la dirección del movimiento, m su masa, y ρ la densidad del medio que ejerce

la resistencia. Es común llamar D , coeficiente balístico, a la relación (ver **Vallado**, 1997; **Anderson**, 2000):

$$D = \frac{m}{C_D A}. \quad (7)$$

La tasa de cambio del semieje mayor, expresada por (5), con ayuda de las ecuaciones (6) y (7), y teniendo en cuenta que $|\vec{F}_T| \cdot |\vec{r}| = -vF_T$ (ya que la fuerza de resistencia va dirigida en el sentido contrario al vector velocidad), puede escribirse:

$$\dot{a} = -\frac{a^2 v^3 \rho}{k^2 D}, \quad (8)$$

y como la magnitud de la velocidad, para una órbita con excentricidad pequeña ($e \approx 0$, $r = a$), puede escribirse con un buen grado de aproximación como:

$$v = \sqrt{\frac{GM_T}{a}} = \frac{k}{\sqrt{a}}, \quad (9)$$

la que, al reemplazar en (8), teniendo en cuenta (1) y al despejar la densidad se tiene:

$$\rho = -\frac{(2\pi N)^{1/3} D}{k^{4/3}} \dot{a}. \quad (10)$$

Reemplazando el valor de k y convirtiendo la unidad de longitud a centímetros, podemos llegar a:

$$\rho = -8,918 \times 10^{-21} D N^{1/3} \dot{a}, \quad (11)$$

donde D está en unidades de g cm^{-2} , \dot{a} en cm d^{-1} y N en d^{-1} y así expresar la densidad en g cm^{-3} .

De acuerdo con **Oltrogge & Leveque** (2011) el valor de C_D de un CubeSat 1U es de 2.2; con una masa de 1000 g y un área de sección transversal que va desde 100 cm^2 hasta unos 150 cm^2 (en el caso probable de que el Libertad 1 esté dando tumbos) tenemos que:

$$D = \begin{cases} 4.5 \text{ g cm}^{-2}, & \text{si } A = 100 \text{ cm}^2, \\ 3.0 \text{ g cm}^{-2}, & \text{si } A = 150 \text{ cm}^2. \end{cases}$$

Puesto que $a = R_T + h_m$, se deduce que $\dot{a} = \dot{h}_m$. De ahí que pueda calcularse un valor promedio de la densidad, $\bar{\rho}$, existente entre las dos etapas claramente definidas por las tasas de decaimiento de h_m vistas atrás. La variación de N dentro del tiempo considerado es pequeña por lo que podemos adoptar un valor nominal de $N = 14.52$. De este modo, los valores de la densidad promedio de la atmósfera calculados mediante (11) son:

$$\bar{\rho} = \begin{cases} 6.3 - 9.5 \times 10^{-18} \text{ g/cm}^3, & \text{si } 718.8 \text{ km} < h_m < 720.2 \text{ km}, \\ 2.7 - 4.1 \times 10^{-16} \text{ g/cm}^3, & \text{si } 716.3 \text{ km} < h_m < 718.8 \text{ km}. \end{cases}$$

Es claro que el valor de densidad promedio derivado de la segunda etapa está fuertemente influenciado por la activación del Sol observada desde el comienzo del año 2011.

Los valores de densidad así calculados pueden contrastarse con los valores nominales de atmósferas estándar. Por ejemplo, el modelo de la *U.S. Standard Atmosphere, 1976*¹⁷, establece, para una altura geométrica comprendida entre 715 y 720 km, un valor de densidad de $2.4 - 2.5 \times 10^{-17} \text{ g cm}^{-3}$.

Por supuesto, se debe tener muy presente que los valores de densidad en la ionósfera experimentan fuertes variaciones, comenzando por las diurnas que comprenden el calentamiento de la alta atmósfera por la radiación ultravioleta, la protuberancia subsolar de la atmósfera (que ocurre unas 2 a 3 horas después del medio día local) y que puede ocasionar variaciones hasta de un 15 %, como también de la declinación solar (que varía en el transcurso del año). El Sol, como ya se dijo, influye de manera notable: la rotación solar puede ocasionar variaciones de la densidad que alcanzan el 10 % en tanto que las de las tormentas solares alcanzan variaciones de hasta el 30 %.

7. Conclusiones

El satélite Libertad 1 fue iniciativa de la Universidad Sergio Arboleda, institución de carácter privado que compró la estructura de un CubeSat y diseñó una tarjeta y otros componentes para efectos de que, una vez en órbita, pudiera emitir datos de temperatura. El hecho de que hasta la fecha (casi seis años después) no haya salido a la luz un documento que presente un análisis de las señales obtenidas, sugiere que la iniciativa de colocar el satélite obedeció más a intereses de carácter propagandístico que de satisfacer objetivos de naturaleza científica o técnica.

Hemos presentado datos correspondientes a los elementos orbitales del Libertad 1 a las pocas horas de su puesta en órbita y se presentaron datos de la variación de estos desde abril de 2007 hasta mediados del año 2012. Debido a su escaso tamaño y la altura relativamente alta en la que quedó, el satélite ha sido poco afectado por rozamiento atmosférico, perdiendo pocos kilómetros de altura en el mencionado intervalo. Se evidencia un efecto particularmente notable de disminución de altura con el reinicio de actividad solar a partir del año 2011. Aun así, el Libertad 1 continuará orbitando la Tierra por varios años más. Los periodos de circularización observados de la ascensión recta del nodo ascendente así como del argumento de latitud del perigeo se ajustan bien a los valores teóricos.

Finalmente, hemos realizado un cálculo de estimación de densidad promedio de la atmósfera terrestre a alturas medias comprendidas entre 716 y 720 km con base en las tasas de decaimiento del semieje mayor.

¹⁷U.S. Standard Atmosphere, 1976, NOAA, NASA, Washington, 1976.

Agradecimientos

El autor agradece los comentarios y sugerencias por parte de un árbitro anónimo.

Bibliografía

- Anderson, J. D.** 2000. *Introduction to Flight*, McGraw-Hill Co., Singapur.
- Brooks, D. R.** 1977. *An Introduction to Orbit Dynamics and Its Application to Satellite-Based Earth Monitoring Missions*, NASA Reference Publication 1009, Washington, D.C.
- Caday-Eames, E.** 2006. *Small Box, Big Potential*. Boeing Frontiers, Octubre, p. 20.
- Hill, J. et al.** 2011. *The NSF Firefly CubeSat mission: Rideshare mission to study energetic electrons produced by lightning*, IEEE Aerospace Conference.
- Joya, R.** 2007. *Libertad 1, primer satélite colombiano en el espacio*. *Innovación y Ciencia*, **14**: 16-23.
- Joya, R., et al.** 2007. *Misión Libertad 1, primer satélite colombiano*. *Análisis Geográficos*, **37**: 140-143.
- Kitts, C., et al.** 2007. *Flight Results from the GeneSat-1 Biological Microsatellite Mission*. Proc. 21, AIAA/USU Conference on Small Satellites, Logan, Utah.
- McCuskey, S. W.** 1963. *Introduction to Celestial Mechanics*, Addison-Wesley Pub. Co., Reading, Massachusetts.
- McHugh, M. J., et al.** 2009. *DUST Sounder and Temperature Imager Experiment (DUSTIE)*. American Geophysical Union, abstract No. SM33C-1575.
- Milani, A., Nobili A. M., Farinella, P.** 1987. *Non-Gravitational Perturbations and Satellite Geodesy*, Adam Hilger, Bristol.
- Murray C. D. & Dermott, S. F.** 1999. *Solar System Dynamics*, Cambridge University Press, Cambridge.
- Oltrogge, D. F. & Leveque, K.** 2011. *An Evaluation of CubeSat Orbital Decay*. En *Small Satellite Conference*, Logan, Utah.
- Portilla, J. G.** 2009. *Elementos de Astronomía de Posición*. Editorial Universidad Nacional de Colombia, Bogotá.
- Soojung-Kim Pang, A. & Twiggs, B.** 2011. *Citizen Satellites*. *Scientific American*, **304**: 28-33.
- Toorian, A., Diaz, K., & Lee, S.** 2008. *The Cube Sat Approach to Space Access*, IEEE Aerospace Conference.
- Vallado, D. A.** 1997. *Fundamentals of Astrodynamics and Applications*, McGraw-Hill Co., New York.
- Waido, S., Henry, D. & Campbell, M.** 2002. *Cube-Sat Design for LEO-Based Earth Science Missions*, IEEE Aerospace Conference.
- Woellert, K., et al.** 2011. *Cubesats: Cost-effective Science and Technology Platforms for Emerging and Developing Nations*. *Advances in Space Research*, **47**: 663-684.

LA ÓRBITA DEL SATÉLITE LIBERTAD 1

José Gregorio Portilla¹

Resumen

J. G. Portilla. La órbita del satélite Libertad 1. Rev. Acad. Colomb. Cienc. 36 (141): 491-500, 2012. ISSN:0370-3908.

Inicialmente hacemos una descripción de la génesis del satélite Libertad 1, un CubeSat de tipo 1U adquirido y adaptado por la Universidad Sergio Arboleda el cual se constituyó en el primero objeto en orbitar la Tierra por parte de una institución colombiana. Posteriormente se realiza un análisis de sus elementos orbitales registrados por el NORAD y se calculan las tasas de decaimiento del semieje mayor causado por rozamiento atmosférico en un periodo de cinco años. A partir de estos valores procedemos a una estimación de la densidad promedio de la atmósfera terrestre a una altura cercana a los 720 km.

Palabras clave. Satélite artificial, atmósfera terrestre, rozamiento atmosférico.

Abstract

We begin with a description of the genesis of the Libertad 1 satellite, a type 1U CubeSat purchased and then fitted by the Sergio Arboleda University. This satellite was the first object to orbit the Earth by initiative of a colombian institution. We made an analysis of the orbital elements determined by NORAD and then we calculate decay rates of the semimajor axis due to atmospheric drag within an interval of five years. With these values we calculated average atmospheric density at 720 km altitude.

Key words. Artificial satellite, Earth atmosphere, atmospheric drag.

1. Introducción

El satélite Libertad 1 fue puesto en órbita terrestre el día 17 de abril de 2007 por un misil balístico modificado lanzado desde el cosmódromo de Baikonour. Con forma de cubo, con cada lado de apenas 10 cm, el satélite se constituyó en el primer objeto en orbitar la Tierra por iniciativa de una institución colombiana.

Transcurrido medio siglo después de la colocación del Sputnik I, Colombia aun carece casi que por completo de investigación e industria astronáutica en los términos en que se entiende en la actualidad. Por tal razón, si el país, representado en una de sus instituciones (gubernamental o

privada) se ve compelido a utilizar tecnología aeroespacial debe adquirir necesariamente los servicios de industrias existentes en aquellos países que los ofrecen. De hecho, la gran mayoría de los usuarios, con independencia de las naciones a las que pertenecen, han de hacer lo mismo: si alguien desea hacerse con un satélite para efectos de utilizarlo con algún propósito, debe pagar por él; adicionalmente, ha de adquirir el servicio de un proveedor de un cohete para efectos de que coloque dicho satélite en la órbita apropiada.

En el país se ha venido hablando de la compra de un satélite de comunicaciones y, en el presente, de un satélite de observación terrestre, aparatos estos cuyo costo se cuenta por decenas de millones de dólares y, en consecuencia, de adquisición casi que únicamente reservada al estado.

¹Observatorio Astronómico Nacional, Facultad de Ciencias, Universidad Nacional de Colombia, e-mail: jgportillab@unal.edu.co

Sin embargo, los avances en miniaturización, ciencia de materiales y computación han hecho que hoy en día sea posible que cualquier interesado pueda adquirir un satélite en miniatura como quien compra un automóvil a costos de pocas decenas de miles de dólares. El Libertad 1 fue uno de tales satélites.

A pesar de que el Libertad 1 alcanzó exitosamente la órbita planeada, al igual que sus señales de radio fueron recolectadas en su momento por diversos radioescuchas a lo largo del planeta, hasta donde sabemos no existe publicado un reporte final que permita saber cuales objetivos básicos de la misión fueron alcanzados y cuales no. La información existente en la página del satélite contiene solo un listado de datos telemétricos que no ofrecen mayores luces sobre el desempeño del satélite y que al mismo tiempo suministre, con la debida perspectiva, los alcances y logros tecnológicos —apropiación de tecnología de punta— que, como se reitera por sus gestores, se generaron con la construcción y consiguiente puesta en órbita del Libertad 1.

Aun cuando el satélite dejó de ser operativo ya varios años atrás, no se descarta que los responsables de su gestión puedan ofrecer en el futuro cercano tanto un reporte final de operación y los resultados derivados de las medidas de temperatura que se lograron recolectar, tal como en su momento lo anunciaron (Joya, 2007). Adicionalmente, en la poca bibliografía técnica disponible (Joya et al., 2007), los parámetros orbitales que permiten conocer la orientación y geometría de la órbita están incompletos y no permiten siquiera realizar un cálculo de efemérides con alguna validez.

A la espera de un reporte final de operación, se presenta en esta comunicación una exposición sobre aspectos básicos de la dinámica orbital del satélite Libertad 1 desde su colocación en órbita hasta mediados del año 2012, lo cual se hará con base en información recolectada por estaciones de rastreo.

La sección 2 describe algunos aspectos básicos de los CubeSats así como una exposición sucinta sobre la génesis del satélite Libertad 1. La sección 3 describe el lanzamiento y trayectoria del cohete que colocó el satélite en órbita, en tanto que la sección 4 describe los valores de los elementos orbitales en los primeros días de la inserción orbital. La variación temporal de los elementos orbitales del Libertad 1 se encuentran en la sección 5 así como valores de la tasa de decaimiento. La sección 6 describe cómo es posible inferir valores de densidad atmosférica en los rangos de altura en que se ha desplazado el satélite. Finalmente, la sección 7 contiene las conclusiones.

2. Los CubeSats y el Libertad 1

Los CubeSats constituyen un tipo particular de satélites en miniatura (también denominados nano o picosatélites) con una estructura básica en forma de cubo², masa menor a 1.3 kg y un tamaño estándar de 10 cm de lado. Su concepción se debió a una colaboración entre la Universidad Estatal Politécnica de California (Cal Poly) y la Universidad de Stanford en un intento de incentivar la participación de universidades a nivel mundial para la realización de investigación espacial con base en tecnología disponible sin la implicación de fuertes presupuestos (Toorian, Diaz & Lee, 2008). Esto los hace particularmente atractivos para países en vías de desarrollo que desean participar en tecnologías usualmente revueltas solo al primer mundo (Woellert, 2011).

Lo que está detrás de los CubeSats es una “popularización” en la utilización de la tecnología satelital. Con establecer una estandarización del tamaño y la forma del satélite es ya mucho lo que se avanza y se ahorra en términos de investigación y desarrollo. A su vez, y debido a su escaso tamaño y masa, permite que haya un número adecuado de usuarios (universitarios, científicos, estudiantes, ingenieros) de diferentes instituciones, empresas y nacionalidades, cada uno con su CubeSat debidamente desarrollado y adaptado, que utilizarán un mismo cohete, lo que permite reducir notablemente los costos de su colocación en órbita pues se distribuye entre todos (Soojung-Kim Pang & Twiggs, 2011). Para estos efectos, se puede utilizar los servicios (aunque no exclusivamente) de la empresa rusa ISC Kosmotras, la cual comercializa antiguos misiles R-36M decomisionados de construcción rusoucraniana³. En la guerra fría cada uno de estos cohetes fue diseñado para arrojar un número cercano a 10 bombas termonucleares capaz de atacar distintos blancos. Hoy en día se han adaptado para su uso civil y cada cohete puede modificarse para colocar entre 10 y 15 pequeños satélites. En un determinado lanzamiento, los CubeSats, provenientes de distintos usuarios, son colocados en grupos en varios dispensadores y constituyen en sí las cargas secundarias, siendo satélites más masivos y voluminosos las cargas primarias.

En términos de participación, los CubeSats han resultado ser un éxito notable, ya que son numerosas las universidades e institutos de distintos países que han utilizado esta posibilidad como único medio para la ejecución de proyectos de investigación científica que van desde estudios atmosféricos, en particular de la ionósfera (Waido, Henry & Campbell, 2002), detección de polvo cósmico (McHugh et al., 2009) y emisiones terrestres de rayos gamma (Hill et al., 2011) hasta investigaciones en genética (Kitts et al., 2007). Sin embargo, la mayor

²Estos están enteramente conformados por una unidad básica llamada 1U; sin embargo, pueden existir satélites rectangulares, constituidos por 2 ó 3 unidades básicas, denominados CubeSats 2U ó 3U, respectivamente.

³<http://www.kosmotras.ru>

parte de las misiones involucran desarrollo tecnológico y con ello explorar la factibilidad de la utilización de estos satélites en miniatura para cumplir tareas de detección remota, comunicaciones, navegación, etc., en el que incluso empresas astronáuticas reputadas, con años de experiencia construyendo satélites del tamaño de autobuses, han acudido a su uso (Caday-Eames, 2006).

Son varias las naciones que, gracias a los CubeSats, aparecen figurando ahora con satélite propio. De ese modo los satélites SwissCube-1 (Suiza), MaSat-1 (Hungria), Goliat (Rumania) y PW-Sat (Polonia) son los primeros objetos en llegar a órbita por parte de esas naciones. A mediados del año 2013 se espera que llegue a órbita el satélite NEE-01 Pegasus, que se constituirá en el primer satélite de Ecuador, el cual, de funcionar, será el primer CubeSat en transmitir video en tiempo real⁴.

La idea inicial de que una institución colombiana adquiriera un CubeSat para modificarlo y que cumpliera una misión específica fue presentada al país a inicios del año 2005, donde se anunciaba la próxima puesta en órbita (para diciembre de ese año) del satélite Libertad 1 enmarcado dentro del proyecto titulado “Colombia en órbita” establecido como parte de la plataforma política del, por aquel entonces, candidato a la presidencia Álvaro Leyva⁵. La responsabilidad académica estaría a cargo de la Universidad Sergio Arboleda. Unos pocos años antes, Leyva había sido el principal gestor de la construcción de un observatorio astronómico en la misma universidad. Con el desarrollo del Libertad 1 entre manos, el observatorio de dicha institución recibe la inusual transformación de pasar de observatorio astronómico propiamente dicho a convertirse adicionalmente en algo semejante a un laboratorio de investigación aeroespacial. En el artículo de prensa en mención se señaló que las funciones del satélite eran múltiples: “tomar fotografías, emitir mensajes de los patrocinadores, el himno nacional, además de transmitir señales del sistema de posicionamiento global (GPS)”.

Después de un proceso de búsqueda de patrocinadores, se compró la estructura básica del Libertad 1 y se adaptó una habitación del observatorio para que sirviera de cuarto limpio donde se conducirían las labores de diseño y prueba de la electrónica involucrada, esto es, del montaje y ensayo de las tarjetas electrónicas. También se erigieron aparatos y antenas para efectos de rastrear la señal proveniente del satélite. Para inicios del año 2006 el candidato presidencial, gestor y líder de la iniciativa, cesó abruptamente su longevo vínculo con la universidad, lo que no implicó la cancelación del proyecto, pues fue adoptado en su totalidad por la Universidad Sergio Arboleda.

El proceso de diseño y prueba de la electrónica tuvo inconvenientes que retrasaron notablemente el cronograma. Adicionalmente, surgieron problemas de índole judicial ya que el principal asesor del proyecto, el profesor Cesar Ocampo de la Universidad de Texas y de origen colombiano, fue objeto de investigación por parte del FBI por asuntos de transferencia de tecnología. Estas contrariedades obligaron a reducir notablemente los objetivos del Libertad 1 —finalmente quedó aminorado a contener un emisor de señales de datos de temperatura—. Ensayos de temperatura y vibración (que se llevaron a cabo en los Estados Unidos) obligaron también a modificar el diseño original. Finalmente, para mediados del año 2006, el diseño de la tarjeta y el montaje de la batería y antenas en el interior de la estructura del Libertad 1 superaron las pruebas. Este retraso en el cronograma fue, paradójicamente, afortunado. De haber estado listo un poco antes, el Libertad 1 hubiese ido como una de las cargas en el lanzamiento del cohete Dnepr LV programado para el 26 de julio de 2006. Una falla en la primera etapa de este cohete ocasionó su colisión en el desierto a unos 150 km al sur del sitio de lanzamiento. Los 18 satélites que llevaba como carga útil (incluyendo 14 CubeSats) resultaron, por supuesto, destruidos.

3. La fase propulsada

El satélite Libertad 1 fue colocado en órbita baja mediante un cohete Dnepr LV lanzado desde el silo subterráneo 109/95 ($\phi = +45^{\circ}57'4.2''$, $\lambda = +63^{\circ}29'49.5''$, $h = 116$ m, siendo, respectivamente, latitud, longitud⁶ y altura sobre el nivel del mar, referidas al elipsoide WGS84) ubicado en el cosmódromo de Baikonur, Kazajistán. El Dnepr LV es una versión adaptada para el lanzamiento de satélites de baja altura del misil balístico intercontinental R-36M, también conocido por analistas militares occidentales como SS-18 Satan. Junto al Libertad 1 estaban otros 13 satélites para ser colocados en órbita: Egyptsat 1 (la carga principal del cohete, primer satélite de senseo remoto de Egipto, con un peso de 100 kg), Saudisat 3 (de 35 kg, dedicado a tareas científicas), 5 satélites SaudiComsat (del 3 al 7, cada uno de 12 kg y destinados a tareas de comunicaciones comerciales) y otros seis CubeSats (CP3, CP4, CAPE-1, Aerocube-2, CSTB-1 y MAST). Los CubeSats son lanzados desde una estructura llamada P-Pod dividida en tres segmentos: A, B y C. Cada segmento puede contener hasta tres CubeSats. En particular, el Libertad 1 estaba alojado en el segmento B.

El cohete despegó el 17 de abril de 2007 a las $6^h46^m35^s$ de TUC (tiempo universal coordinado)⁷. La forma de lanzamiento, en sus primerísimos instantes, es poco convencional y fue heredada de su condición de antiguo misil balístico en estado de alerta permanente. Como el cohete está bajo tierra (dentro de un silo subterráneo), para efectos de que en

⁴<http://www.exa.ec>

⁵El Espectador, 20 de febrero de 2005.

⁶En esta comunicación asumiremos que la longitud hacia el este es positiva y hacia el oeste negativa.

⁷<http://www.ne.jp/asahi/hamradio/je9pel/dneprcub.htm>

el despegue el flujo de salida de gases no atente contra la integridad del mismo, su activación ha de hacerse expulsando primero el cohete del foso en el que reside. Al momento de su lanzamiento, el cohete y la envoltura que lo protege son expulsados violentamente del foso a través del método llamado de “lanzamiento en vapor” en el que se insufla en el silo ya con su compuerta superior abierta, y en cuestión de milisegundos, vapor o gases producto de una combustión, con una intensidad tal, que todo el conjunto es eyectado del foso. El cohete, con un peso de 211 toneladas, una vez expulsado y ya en la superficie, entra en funcionamiento, encendiendo su primera etapa de forma casi que instantánea.

La dirección de la trayectoria propulsada del vuelo tuvo un azimut aproximado de 188 grados, lo que implicó sobrevolar áreas de Uzbekistán, Turkmenistán e Irán. Su primera etapa duró en funcionamiento apenas unos 130 segundos. Una vez agotada la primera etapa, esta se separó del cuerpo principal del cohete (colisionando poco tiempo después en una zona desértica al norte de Uzbekistán). A los pocos segundos se encendió la segunda etapa, que duró en operación unos 170 segundos aproximadamente. A su vez, al agotarse el combustible de ésta (que chocará, después de la separación, en las aguas del Océano Índigo) se encendió a los pocos segundos la tercera y última etapa cuya duración fue del orden de unos 11 minutos. Aunque esta etapa tiene el principal propósito de alcanzar la velocidad orbital, posee la característica adicional y poco común (una vez más heredada de su naturaleza de misil balístico con capacidad de atacar múltiples blancos) de que, en su fase final de funcionamiento, realiza una maniobra de rotación de 180 grados al cabo de la cual comienza a liberar (aun con el motor encendido), y en cuestión de pocos segundos, los satélites a ser colocados en órbita. La maniobra tiene el propósito de realizar la inyección orbital de cada una de las cargas útiles con notable exactitud.

4. El Libertad 1 en órbita

El Libertad 1 fue colocado en órbita baja terrestre cuasi polar de tipo sol sincrónico en un tiempo estimado de $7^h 02^m 6^s$ de TUC del 17 de abril de 2007 (ver Figura 1). De acuerdo con el NORAD⁸ el cohete constituyó el décimo séptimo lanzamiento del año 2007. En un principio, el Libertad 1 quedó registrado como la pieza N de ese lanzamiento y se le asignó el número de satélite 31129⁹ y así lo informa Joya (2007). Sin embargo, hubo una modificación tiempo después, ya que Celestrak¹⁰ designa al Libertad 1 como la pieza M y un número de satélite de 31128 (asignando la pieza N y el número 31129 para el

CubeSat CP3). El Director del proyecto, tiempo después, confirmó la asignación del número 31128 para el Libertad 1¹¹ aun cuando la página del satélite en la Universidad Sergio Arboleda¹² muestra desde el lanzamiento y aun en el momento en que se escriben estas líneas, los elementos orbitales correspondientes al satélite 31129.

Para confusión adicional, el Centro Nacional de Datos de Ciencia Espacial (NSSDC por sus siglas en inglés), adscrito a la Administración Nacional de la Aeronáutica y el Espacio (NASA) le asigna el número 31129. Por el elevado grado de confiabilidad y su actualización día a día de la página Celestrak, y por la información suministrada por el mismo Director del proyecto, asumiremos aquí que el Libertad 1 corresponde al objeto 31128 rastreado por el NORAD.

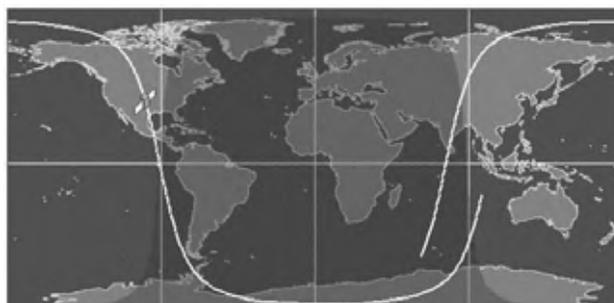


Figura 1: Una proyección específica de la órbita del Libertad 1 (curva de color blanco) en poco más de un periodo orbital sobre la superficie de la Tierra. Por ser la órbita de tipo sol sincrónico, el satélite se va desplazando de este a oeste.

Los elementos orbitales del Libertad 1, en el instante $21^h 3^m 8.02^s$ (TUC) del 17 de abril de 2007, esto es, unas 14 horas después del momento de la inyección (y que constituyen el primer número de elementos registrado por Celestrak y Space-Track¹³ para este satélite) pueden verse en la tabla 1.

Tabla 1: Primer conjunto de elementos orbitales del satélite Libertad 1 tomados por el NORAD: N es el número de revoluciones por día, i es la inclinación con respecto al ecuador celeste, e es la excentricidad, Ω es la ascensión recta del nodo ascendente, ω es el argumento de latitud del perigeo y M_r es la anomalía media en el tiempo de referencia ($21^h 3^m 8.02^s$ de TUC del 17 de abril de 2007).

N	i	e	Ω	ω	M_r
14.568	98.085	0.0086	183.053	206.758	152.914

⁸ Acrónimo de North American Aerospace Defense Command (Comando Norteamericano de Defensa Aeroespacial).

⁹ Así quedó registrado unos diez días después (<http://www.ne.jp/asahi/hamradio/je9pel/dneprcub.htm>)

¹⁰ <http://www.celestrak.com>

¹¹ Comunicación personal con Raúl Joya.

¹² http://www.usergioarboleda.edu.co/proyecto_espacial/index.htm

¹³ <http://www.space-track.org>

A partir de algunos de estos datos es posible determinar el semieje mayor a , y las alturas de perigeo (h_p) y apogeo (h_a), respectivamente. Teniendo en cuenta la tercera ley de Kepler que relaciona el período orbital T con la distancia media a , tenemos que:

$$\frac{1}{N} = T = \frac{2\pi}{\sqrt{GM_T}} a^{3/2},$$

donde G es la constante de Cavendish ($6.67428 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$) y M_T la masa de la Tierra ($5.9736 \times 10^{24} \text{ kg}$). Tomando como unidad de distancia y de tiempo al radio terrestre en el ecuador (RT) ($1 \text{ RT} = 6.37814 \times 10^6 \text{ m}$) y al día solar medio, respectivamente, podemos expresar el semieje mayor como:

$$a = \frac{1}{N^{2/3}} \left(\frac{k}{2\pi} \right)^{2/3} = \frac{6.62331}{N^{2/3}}, \quad (1)$$

siendo $k = \sqrt{GM_T} = 107.10085 \text{ RT}^{3/2} \text{ d}^{-1}$. Las alturas de perigeo (h_p) y apogeo (h_a) son entonces:

$$\begin{aligned} h_p &= a(1 - e) - R_T, \\ h_a &= a(1 + e) - R_T, \end{aligned}$$

donde R_T representa el radio terrestre en el ecuador.

Teniendo en cuenta los datos de la Tabla 1, deducimos que el semeje mayor de la órbita fue de 1.11039 RT, esto es, 7082.2 km, lo que corresponde a una altura media (h_m) sobre el ecuador de 704 km y alturas de perigeo y apogeo de 643 y 765 km, respectivamente. Sin embargo, estos datos de altura inicial del Libertad 1 no son correctos (al igual que los elementos de los que se calcularon) por las razones que exponemos a continuación. Los satélites CAPE-1 como el CP3, ambos CubeSats también, residían, junto al Libertad 1, en el P-Pod B. La separación de los satélites de la tercera etapa se produce en un intervalo de pocos segundos y es de presumir que el mecanismo eyector produce un cambio de velocidad casi idéntico para los tres satélites, por lo que sus órbitas han de ser en principio muy parecidas, más teniendo en cuenta el hecho de que los tres carecen de sistema de propulsión que puedan alterar su órbita.

Sin embargo, de acuerdo con Celestrak, tanto el CAPE-1 como el CP-3, en su primer conjunto de elementos orbitales, aparecen ambos con valores de $N = 14.518$ y $e = 0.0102$, claramente distintos a los que Celestrak registra para el Libertad 1. Si se consultan los siguientes conjuntos de elementos orbitales para el Libertad 1, se observan valores de N y e muy semejantes a los registrados en la Tabla 1. Sin embargo, el cuarto conjunto de elementos del Libertad 1, correspondiente a unas 39 horas después de haber quedado en órbita, contiene valores tanto de N como

de e casi idénticos a los de CAPE-1 y CP3. Esto lo que sugiere es que los primeros conjuntos de elementos orbitales del Libertad 1 tomados por el NORAD no se corresponden con la trayectoria real del objeto (lo que implica un error de algún tipo en la determinación orbital) y que solo hasta el cuarto conjunto de elementos se puede tener confianza en dichos datos¹⁴.

Reproducimos en la Tabla 2 el conjunto de elementos orbitales correspondiente al instante $21^{\text{h}}54^{\text{m}}52.4^{\text{s}}$ del 18 de abril de 2007, que es el cuarto conjunto de elementos orbitales registrados por NORAD para el Libertad 1.

Tabla 2: Cuarto conjunto de elementos orbitales del satélite Libertad 1 tomados por el NORAD correspondientes al instante $21^{\text{h}}54^{\text{m}}52.4^{\text{s}}$ TUC del 18 de abril de 2007.

N	i	e	Ω	ω	M_r
14.518	98.084	0.0102	184.092	207.965	153.552

Por lo tanto, los valores correctos (al cabo de día y medio en órbita) de la altura media del Libertad 1 es de 720 km con alturas de perigeo y apogeo de 647 y 793 km, respectivamente, valores estos que son los registrados para los tres satélites por el *Orbital Debris Quaterly News*¹⁵.

Claramente, por la orientación espacial ($i > 90$) y las dimensiones de la trayectoria ($h_m < 1500 \text{ km}$), el Libertad 1 quedó en una órbita de tipo sol sincrónica, la cual quedó determinada fundamentalmente por la órbita deseada de la carga principal. El valor de la tasa diaria de desplazamiento de la ascensión recta del nodo ascendente producida por achatamiento terrestre ($J_2 = 1.083 \times 10^{-3}$) con los parámetros del Libertad 1 es igual a (Brooks, 1977; Portilla, 2009):

$$\Delta\Omega = -\frac{3k(180/\pi)J_2}{2a^{7/2}(1 - e^2)^2} \cos i \approx +0.964^\circ/\text{d},$$

el cual es un poco menor al requerido para hacer que la órbita se desplace a la misma tasa de desplazamiento que el movimiento medio del Sol ($0.985^\circ/\text{d}$) y, por lo tanto, que pase por las mismas zonas terrestres bajo similares condiciones de iluminación solar. Pero ello no revirtió problema para los gestores del Libertad 1: quedar en una órbita sol sincrónica exacta no era una condición exigida para la misión.

Debido al movimiento de oeste a este de la rotación de la Tierra, por cada órbita realizada el satélite se va desplazando un ángulo $\Delta\chi$ en dirección hacia el oeste con respecto a un observador ubicado en la superficie terrestre. Dicho ángulo,

¹⁴No debe extrañar que solo hasta el cuarto conjunto de elementos orbitales se haya corregido la órbita, dado que muy probablemente el segundo y tercer conjunto fueron calculados a partir del primero, dado la forma como NORAD registra y determina los elementos que da a conocer. Ver: www.celestrak.com/columns/v04n05/index.asp#FAQ06

¹⁵<http://www.orbitaldebris.jsc.nasa.gov/newsletter/pdfs/ODQNv11i3.pdf>

con los parámetros orbitales del Libertad 1, está dado por (Portilla, 2009):

$$\Delta\chi = -360 \frac{T}{T_T} = -\frac{360.985852}{N} = -24.86^\circ,$$

donde $T_T = 0.997269$ es el periodo de rotación sideral de la Tierra en unidades de días solares medios y el signo menos significa que el ángulo tiene la dirección de las agujas del reloj mirado desde el polo norte celeste. Este ángulo no cambia significativamente si se tiene en cuenta el desplazamiento de la ascensión recta del nodo ascendente producida por achatamiento terrestre pues, por cada revolución, es del orden de $+0.964^\circ/N = +0.06^\circ$. Tomando entonces el valor de -24.8° como desplazamiento del paso del satélite con respecto a un observador terrestre se tendrá que la condición de paso sucesivo por el mismo sitio de la superficie terrestre es:

$$n|\Delta\chi| = 360^\circ m,$$

donde n y m son números enteros. Es claro que $n/m = 360/24.8 \approx 14.5$, valor este que puede obtenerse de la relación $29/2$, queriendo decir con ello que, si el satélite pasa por un sitio en un instante de tiempo determinado, al cabo de 2 días se completan 29 revoluciones y el satélite volverá a pasar aproximadamente por ese mismo sitio.

Es evidente que, si llamamos λ_0 a la longitud terrestre donde ocurre el nodo descendente, los valores de las longitudes terrestres donde se verifican los siguientes nodos descendentes sucesivos vienen dados por:

$$(\lambda_{i+1})_{ND} = \lambda_0 - |\Delta\chi| \times (i + 1),$$

donde i toma los valores $i = 0, 1, 2, 3, \dots$. Igualmente, los valores de la longitud terrestre donde se verifican los nodos ascendentes sucesivos están dados por:

$$(\lambda_{i+1})_{NA} = \lambda_0 + 180^\circ - \left(\frac{|\Delta\chi|}{2}\right) \times (2i + 1).$$

En particular, en el caso que nos ocupa, donde $i = ENT(N/2) = 7$ (donde ENT representa la función valor entero) se tiene un valor de la longitud terrestre del nodo ascendente próximo al valor de λ_0 . La diferencia entre estos dos valores de longitud puede hallarse así:

$$(\lambda_7)_{NA} - \lambda_0 = 180^\circ - \left(\frac{|\Delta\chi|}{2}\right) \times (2i + 1) \approx -6^\circ,$$

Esto lo que quiere decir es que, si el satélite pasa por el nodo descendente a una longitud terrestre dada, al cabo de un poco más de transcurrido un día, el satélite pasa por el nodo ascendente a 6 grados al oeste de la primera. Ilustremos el caso con valores específicos. Por ejemplo, el 19 de abril de 2007, el tiempo local (hora legal de la República de Colombia) de un paso por el nodo descendente ocurrió a las $10^h 16^m$ a una longitud de $-71^\circ 43'$, entrando a territorio colombiano por el departamento

de Arauca y saliendo por el departamento del Amazonas lo que realizó en un tiempo de 2.5 minutos. Unas 12.5 horas después, el satélite alcanzó a sobrevolar, de nuevo, territorio colombiano pero en esta ocasión poco después de ocurrir un paso por el nodo ascendente el cual ocurrió a las $22^h 41^m$ hora local a una longitud de $-77^\circ 45'$ (en territorio ecuatorial) entrando y saliendo del territorio terrestre nacional solamente por el departamento de Nariño. Como ya se dijo, los sobrevuelos por los mismos sitios se repiten aproximadamente al cabo de 29 revoluciones, esto es, 2 días después.

Sin embargo, como en cualquier satélite sol sincrónico, a medida que el tiempo transcurre los cruces del satélite por los nodos no se verifican, rigurosamente hablando, a la misma hora local y sobre la misma longitud terrestre. Los errores de inserción orbital y perturbaciones como la atracción gravitacional del Sol y la Luna así como la resistencia atmosférica hacen que el satélite comience a distanciarse de la posición del cruce del nodo descendente (y del tiempo en que ocurre) de tal modo que la ascensión recta del nodo descendente del Libertad 1 se va desplazando en promedio unos 2 grados hacia el este por cada 8 días transcurridos.

El Libertad 1 envió señales de radio en enlace de descenso a una frecuencia de 437.405 MHz que fueron recogidas por varias estaciones de rastreo a lo largo del planeta. Así lo hizo por 22 días al cabo de los cuales pasó a engrosar el listado de objetos considerados como desecho espacial. Continuará en órbita por varios años más.

5. Evolución orbital

Desde el lanzamiento de los primeros CubeSats, en junio de 2003, las órbitas de estos objetos han quedado relativamente altas, por un lado, y por otro, como es de esperarse por su baja masa y tamaño, presentan altos coeficientes balísticos (de acuerdo con la definición adoptada aquí, ver más adelante) lo que significa que la pérdida de altura por rozamiento atmosférico ha sido baja. No es de extrañar, entonces, que aun no se haya verificado a la fecha la reentrada atmosférica de alguno de ellos.

En la Figura 2 se puede observar el cambio de altura promedio ($h_m = a - R_T$) del satélite Libertad 1 desde 1.6 días de su puesta en órbita hasta finales del mes de junio de 2012. La tasa de disminución de altura, causada por rozamiento atmosférico, muestra claramente dos etapas: la primera, se extiende desde 1.6 días del lanzamiento hasta finales de diciembre de 2010 con un descenso claramente lineal y pendiente no tan acentuada; la segunda, caracterizada por poseer una mayor pendiente y un ajuste menos lineal, se extiende desde inicios del año 2011 hasta finales de junio de 2012.

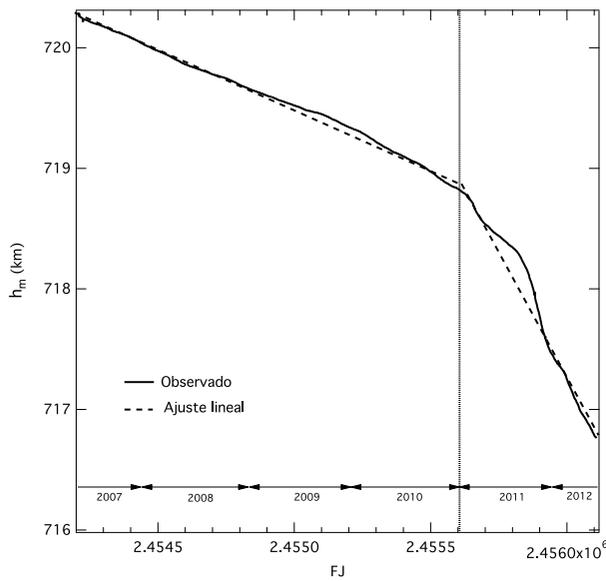


Figura 2: Cambio de altura media (en km) del Libertad 1 en función del tiempo (en fecha juliana). El intervalo de tiempo comprendido va desde 1.6 días del lanzamiento hasta el 30 de junio de 2012. A finales de diciembre de 2010 ($FJ \approx 2.4556 \times 10^6$) hay un cambio claramente definido en la pendiente señalado por la línea recta vertical.

Los valores de las tasas de cambio de la altura, asumiendo ajustes lineales, son:

$$\text{Etapa 1: } \dot{h}_m = -0.966 \pm 0.001 \text{ m d}^{-1},$$

$$\text{Etapa 2: } \dot{h}_m = -4.187 \pm 0.028 \text{ m d}^{-1},$$

donde los coeficientes de correlación son -0.99 y -0.98 para la etapa 1 y la etapa 2, respectivamente.

La Figura 3 muestra la variación del flujo del Sol en radio a la longitud de onda de 10.8 cm (2.8 GHz) el cual es considerado un indicador confiable de la actividad del Sol. Los datos de flujo fueron tomados de datos promediados y extrapolados de la página de la Oficina del Programa de Residuos Orbitales de la NASA (National Aeronautics and Space Administration)¹⁶. Es evidente el efecto que tiene la actividad solar sobre la tasa de decaimiento del Libertad 1 principalmente a partir del año 2011.

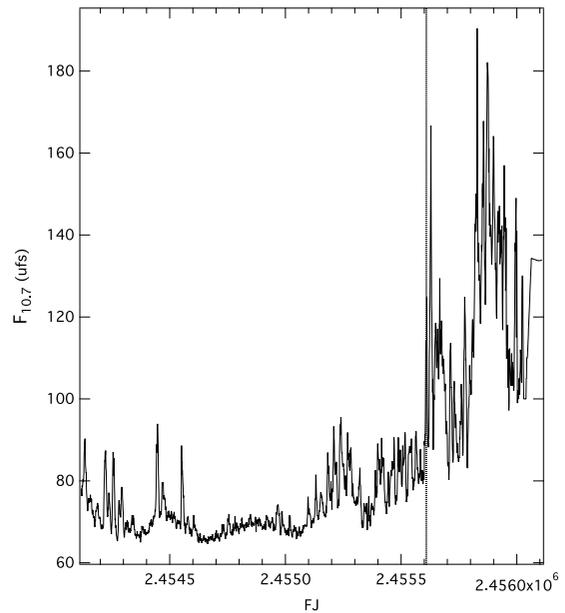


Figura 3: Variación del flujo solar en 10.8 cm en unidades de flujo solar ($ufs = 10^{-22} \text{ joules m}^{-2} \text{ Hz}^{-1}$). El intervalo de tiempo considerado es idéntico al de la Figura 1.

En la Figura 4 se puede observar la variación temporal de otros elementos orbitales del Libertad 1, comprendido desde su puesta en órbita hasta mediados del año 2012. Se aprecia que, en lo que tiene que ver con la ascensión recta del nodo ascendente y el argumento de latitud del perigeo, que ambos elementos cambian de forma secular y, por lo tanto, circularizan, comportamiento que, como es bien sabido, se debe al efecto del armónico zonal J_2 , el término principal de perturbación por la no esfericidad de la Tierra. La línea nodal se desplaza en sentido directo (occidente a oriente) a causa de que $i > 90^\circ$, mientras que la línea apsidal se desplaza en sentido retrógrado ya que $i > 63.4^\circ$. Tanto el periodo de circularización nodal (tiempo necesario para que la línea de los nodos realice una revolución completa) como el periodo de circularización apsidal (tiempo necesario para que la línea de las ápsides haga lo propio), los que llamaremos T_{cn} y T_{ca} , respectivamente, están dados, para un satélite artificial perturbado por J_2 , por (Portilla, 2009):

$$T_{cn} = \frac{27004.2(1 - e^2)^2}{N^{7/3} |\cos i|},$$

$$T_{ca} = \frac{27004.2(1 - e^2)^2}{N^{7/3} |2 - 2.5 \sin^2 i|},$$

en unidades de día solar medio. Al tener en cuenta los valores del Libertad 1 (Tabla 2) obtenemos: $T_{cn} = 373$ d y $T_{ca} = 116$ d, valores que corresponden casi exactamente a los periodos que se pueden inferir de la Figura 4.

¹⁶<http://www.orbitaldebris.jsc.nasa.gov/mitigate/das.html>

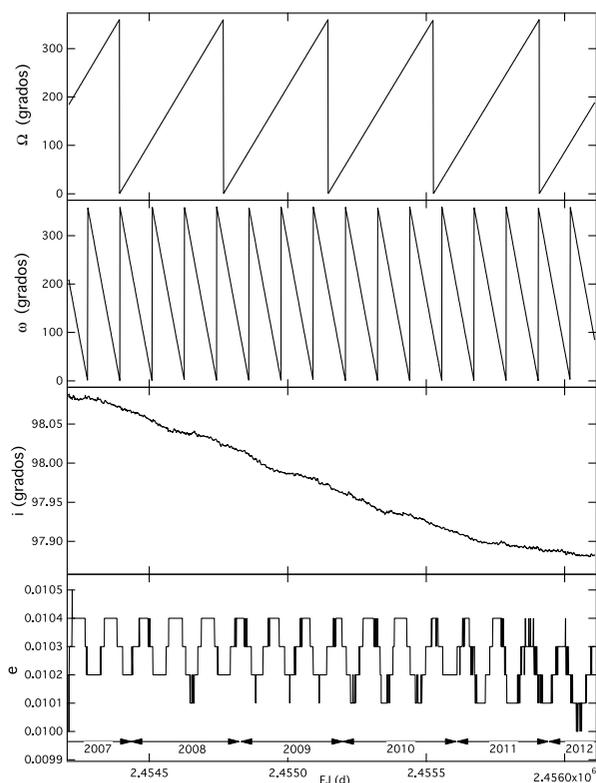


Figura 4: Variación temporal de varios elementos orbitales del Libertad 1. De arriba a bajo: ascensión recta del nodo ascendente, argumento de latitud del perigeo, inclinación y excentricidad.

En cuanto al valor de la inclinación con respecto al ecuador se observa una muy pequeña disminución de carácter secular que puede atribirse a la interacción con la atmósfera terrestre (Milani, Nobili, Farinella, 1987). La excentricidad muestra en el intervalo de tiempo estudiado una variación de carácter eminentemente periódico con valores mínimos y máximos comprendidos entre 0.0101 y 0.0104. No se observa aun claramente la tendencia de la excentricidad a ir disminuyendo por resistencia atmosférica debido a los valores exigüos de densidad correspondientes a las alturas a las que se ha desplazado el satélite.

6. Estimación de la densidad atmosférica

Conociendo la tasa de cambio de la altura es posible determinar la densidad promedio de la atmósfera con base en las características geométricas del satélite. En la descripción de un movimiento de un satélite de masa despreciable alrededor de una Tierra esférica con ausencia de fuerzas externas (i.e., del clásico problema de los dos cuerpos), la energía E

por unidad de masa está dada por:

$$E = -\frac{k^2}{2a},$$

la cual, bajo las condiciones expuestas, es una constante. De acuerdo con lo anterior, un cambio que pudiera presentarse de la energía en función del tiempo (potencia) está dado solo por el cambio instantáneo en el semieje mayor:

$$\dot{E} = \frac{k^2}{2a^2} \dot{a}. \quad (2)$$

La energía deja de ser una constante por la presencia de una fuerza de perturbación externa \vec{F} . Como se sabe, el trabajo generado por una fuerza está dado por:

$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int \vec{F} \cdot \vec{r} dt,$$

donde \vec{r} es el vector posición y el vector velocidad \vec{v} puede expresarse como \vec{r}' , siendo dt un intervalo diferencial de tiempo. De ahí que la potencia \dot{E} pueda escribirse como:

$$\dot{E} = \dot{W} = \vec{F} \cdot \vec{r}'. \quad (3)$$

La fuerza de perturbación \vec{F} puede expresarse en tres componentes (ver por ejemplo McCuskey, 1963; Murray & Dermott, 1999): una, tangencial en la dirección del movimiento (F_T), la segunda, normal a la órbita dirigida hacia el lado cóncavo sobre el plano orbital (F_A) y la otra, perpendicular al plano orbital (F_H). Entonces:

$$\vec{F} = F_T \hat{t} + F_A \hat{a} + F_H \hat{h},$$

donde \hat{t} , \hat{a} y \hat{h} ($\hat{h} = \hat{t} \times \hat{a}$) son los vectores unitarios dirigidos en esas respectivas direcciones. Puesto que el vector velocidad, por su definición, puede expresarse como $\vec{r}' = v \hat{t}$, donde v es la magnitud de la velocidad, se deduce entonces:

$$\vec{F} \cdot \vec{r}' = v F_T. \quad (4)$$

Por lo tanto, teniendo en cuenta las ecuaciones (3) y (4), al despejar \dot{a} en (2) se obtiene:

$$\dot{a} = \frac{2a^2}{k^2} v F_T. \quad (5)$$

Para un satélite de baja altura, la fuerza de perturbación que más afecta el cambio del semieje mayor es la presencia de la atmósfera terrestre, cuyo efecto secular es tanto mayor cuanto menor es la altura (Milani, Nobili & Farinella, 1987). La magnitud de la componente tangencial de la fuerza externa, F_T , teniendo en cuenta únicamente la presencia de la resistencia atmosférica, está dada por:

$$F_T = \frac{1}{2} \frac{C_D A}{m} v^2 \rho, \quad (6)$$

donde C_D es el coeficiente (adimensional) de resistencia atmosférica que es función de la forma geométrica del objeto, A el área proyectada del satélite en la dirección del movimiento, m su masa, y ρ la densidad del medio que ejerce

la resistencia. Es común llamar D , coeficiente balístico, a la relación (ver **Vallado**, 1997; **Anderson**, 2000):

$$D = \frac{m}{C_D A}. \quad (7)$$

La tasa de cambio del semieje mayor, expresada por (5), con ayuda de las ecuaciones (6) y (7), y teniendo en cuenta que $|\vec{F}_T| \cdot |\vec{r}| = -vF_T$ (ya que la fuerza de resistencia va dirigida en el sentido contrario al vector velocidad), puede escribirse:

$$\dot{a} = -\frac{a^2 v^3 \rho}{k^2 D}, \quad (8)$$

y como la magnitud de la velocidad, para una órbita con excentricidad pequeña ($e \approx 0$, $r = a$), puede escribirse con un buen grado de aproximación como:

$$v = \sqrt{\frac{GM_T}{a}} = \frac{k}{\sqrt{a}}, \quad (9)$$

la que, al reemplazar en (8), teniendo en cuenta (1) y al despejar la densidad se tiene:

$$\rho = -\frac{(2\pi N)^{1/3} D}{k^{4/3}} \dot{a}. \quad (10)$$

Reemplazando el valor de k y convirtiendo la unidad de longitud a centímetros, podemos llegar a:

$$\rho = -8,918 \times 10^{-21} D N^{1/3} \dot{a}, \quad (11)$$

donde D está en unidades de g cm^{-2} , \dot{a} en cm d^{-1} y N en d^{-1} y así expresar la densidad en g cm^{-3} .

De acuerdo con **Oltrogge & Leveque** (2011) el valor de C_D de un CubeSat 1U es de 2.2; con una masa de 1000 g y un área de sección transversal que va desde 100 cm^2 hasta unos 150 cm^2 (en el caso probable de que el Libertad 1 esté dando tumbos) tenemos que:

$$D = \begin{cases} 4.5 \text{ g cm}^{-2}, & \text{si } A = 100 \text{ cm}^2, \\ 3.0 \text{ g cm}^{-2}, & \text{si } A = 150 \text{ cm}^2. \end{cases}$$

Puesto que $a = R_T + h_m$, se deduce que $\dot{a} = \dot{h}_m$. De ahí que pueda calcularse un valor promedio de la densidad, $\bar{\rho}$, existente entre las dos etapas claramente definidas por las tasas de decaimiento de h_m vistas atrás. La variación de N dentro del tiempo considerado es pequeña por lo que podemos adoptar un valor nominal de $N = 14.52$. De este modo, los valores de la densidad promedio de la atmósfera calculados mediante (11) son:

$$\bar{\rho} = \begin{cases} 6.3 - 9.5 \times 10^{-18} \text{ g/cm}^3, & \text{si } 718.8 \text{ km} < h_m < 720.2 \text{ km}, \\ 2.7 - 4.1 \times 10^{-16} \text{ g/cm}^3, & \text{si } 716.3 \text{ km} < h_m < 718.8 \text{ km}. \end{cases}$$

Es claro que el valor de densidad promedio derivado de la segunda etapa está fuertemente influenciado por la activación del Sol observada desde el comienzo del año 2011.

Los valores de densidad así calculados pueden contrastarse con los valores nominales de atmósferas estándar. Por ejemplo, el modelo de la *U.S. Standard Atmosphere, 1976*¹⁷, establece, para una altura geométrica comprendida entre 715 y 720 km, un valor de densidad de $2.4 - 2.5 \times 10^{-17} \text{ g cm}^{-3}$.

Por supuesto, se debe tener muy presente que los valores de densidad en la ionósfera experimentan fuertes variaciones, comenzando por las diurnas que comprenden el calentamiento de la alta atmósfera por la radiación ultravioleta, la protuberancia subsolar de la atmósfera (que ocurre unas 2 a 3 horas después del medio día local) y que puede ocasionar variaciones hasta de un 15 %, como también de la declinación solar (que varía en el transcurso del año). El Sol, como ya se dijo, influye de manera notable: la rotación solar puede ocasionar variaciones de la densidad que alcanzan el 10 % en tanto que las de las tormentas solares alcanzan variaciones de hasta el 30 %.

7. Conclusiones

El satélite Libertad 1 fue iniciativa de la Universidad Sergio Arboleda, institución de carácter privado que compró la estructura de un CubeSat y diseñó una tarjeta y otros componentes para efectos de que, una vez en órbita, pudiera emitir datos de temperatura. El hecho de que hasta la fecha (casi seis años después) no haya salido a la luz un documento que presente un análisis de las señales obtenidas, sugiere que la iniciativa de colocar el satélite obedeció más a intereses de carácter propagandístico que de satisfacer objetivos de naturaleza científica o técnica.

Hemos presentado datos correspondientes a los elementos orbitales del Libertad 1 a las pocas horas de su puesta en órbita y se presentaron datos de la variación de estos desde abril de 2007 hasta mediados del año 2012. Debido a su escaso tamaño y la altura relativamente alta en la que quedó, el satélite ha sido poco afectado por rozamiento atmosférico, perdiendo pocos kilómetros de altura en el mencionado intervalo. Se evidencia un efecto particularmente notable de disminución de altura con el reinicio de actividad solar a partir del año 2011. Aun así, el Libertad 1 continuará orbitando la Tierra por varios años más. Los periodos de circularización observados de la ascensión recta del nodo ascendente así como del argumento de latitud del perigeo se ajustan bien a los valores teóricos.

Finalmente, hemos realizado un cálculo de estimación de densidad promedio de la atmósfera terrestre a alturas medias comprendidas entre 716 y 720 km con base en las tasas de decaimiento del semieje mayor.

¹⁷U.S. Standard Atmosphere, 1976, NOAA, NASA, Washington, 1976.

Agradecimientos

El autor agradece los comentarios y sugerencias por parte de un árbitro anónimo.

Bibliografía

- Anderson, J. D.** 2000. Introduction to Flight, McGraw-Hill Co., Singapur.
- Brooks, D. R.** 1977. An Introduction to Orbit Dynamics and Its Application to Satellite-Based Earth Monitoring Missions, NASA Reference Publication 1009, Washington, D.C.
- Caday-Eames, E.** 2006. Small Box, Big Potential. Boeing Frontiers, Octubre, p. 20.
- Hill, J. et al.** 2011. The NSF Firefly CubeSat mission: Rideshare mission to study energetic electrons produced by lightning, IEEE Aerospace Conference.
- Joya, R.** 2007. Libertad 1, primer satélite colombiano en el espacio. Innovación y Ciencia, **14**: 16-23.
- Joya, R., et al.** 2007. Misión Libertad 1, primer satélite colombiano. Análisis Geográficos, **37**: 140-143.
- Kitts, C., et al.** 2007. Flight Results from the GeneSat-1 Biological Microsatellite Mission. Proc. 21, AIAA/USU Conference on Small Satellites, Logan, Utah.
- McCuskey, S. W.** 1963. Introduction to Celestial Mechanics, Addison-Wesley Pub. Co., Reading, Massachusetts.
- McHugh, M. J., et al.** 2009. DUST Sounder and Temperature Imager Experiment (DUSTIE). American Geophysical Union, abstract No. SM33C-1575.
- Milani, A., Nobili A. M., Farinella, P.** 1987. Non-Gravitational Perturbations and Satellite Geodesy, Adam Hilger, Bristol.
- Murray C. D. & Dermott, S. F.** 1999. Solar System Dynamics, Cambridge University Press, Cambridge.
- Oltrogge, D. F. & Leveque, K.** 2011. An Evaluation of CubeSat Orbital Decay. En Small Satellite Conference, Logan, Utah.
- Portilla, J. G.** 2009. Elementos de Astronomía de Posición. Editorial Universidad Nacional de Colombia, Bogotá.
- Soojung-Kim Pang, A. & Twiggs, B.** 2011. Citizen Satellites. Scientific American, **304**: 28-33.
- Toorian, A., Diaz, K., & Lee, S.** 2008. The Cube Sat Approach to Space Access, IEEE Aerospace Conference.
- Vallado, D. A.** 1997. Fundamentals of Astrodynamics and Applications, McGraw-Hill Co., New York.
- Waido, S., Henry, D. & Campbell, M.** 2002. Cube-Sat Design for LEO-Based Earth Science Missions, IEEE Aerospace Conference.
- Woellert, K., et al.** 2011, Cubesats: Cost-effective Science and Technology Platforms for Emerging and Developing Nations. Advances in Space Research, **47**: 663-684.

Recibido: 4 de octubre de 2012

Aceptado para publicación: 5 de diciembre de 2012

NOVEDADES EN ASTERÁCEAS COLOMBIANAS - II

Santiago Díaz-Piedrahita*, Betsy Viviana Rodríguez-Cabeza**

RESUMEN

S. Díaz-Piedrahita, B. V. Rodríguez -Cabeza: Novedades en asteráceas colombianas - II. Rev. Acad. Colomb. Cienc. **36** (141): 333-347, 2013. ISSN 0370-3908.

Se describen e ilustran como novedades para la ciencia, un nuevo género, siete especies y una variedad de asteráceas propias de la flora colombiana. Los nuevos taxones pertenecen a las tribus Liabeae (*Liabum*), Vernonieae (género monotípico nuevo), Heliantheae (*Calea*) y Eupatorieae (*Ageratina*, *Badilloa*, *Hebeclinium* y *Neomirandea*). Adicionalmente se presentan claves para identificar las especies colombianas de los géneros *Badilloa*, *Hebeclinium* y *Neomirandea*.

Palabras clave: *Ageratina*, Asteraceae, *Badilloa*, *Calea*, Colombia, Eupatorieae, *Hebeclinium*, Heliantheae, Liabeae, *Liabum*, *Neomirandea*, *Piptocarpha*, Vernonieae.

ABSTRACT

One new genus, seven new species and one new variety of Asteraceae from Colombia are newly, described and illustrated. These new taxa belong to the tribes Liabeae (*Liabum*), Vernonieae (new monotypic genus), Heliantheae (*Calea*), and Eupatorieae (*Ageratina*, *Badilloa*, *Hebeclinium* and *Neomirandea*). Additionally, keys for the Colombian species of *Badilloa*, *Hebeclinium* and *Neomirandea* are provided.

Key words: *Ageratina*, Asteraceae, *Badilloa*, *Calea*, Colombia, Eupatorieae, *Hebeclinium*, Heliantheae, Liabeae, *Liabum*, *Neomirandea*, *Piptocarpha*, Vernonieae.

Introducción

En los últimos años y con base en colecciones, en su mayoría recientes, depositadas en el Herbario Nacional Colombiano (COL), se ha adelantado una revisión de material crítico de la familia Asteraceae; este trabajo ha permitido encontrar interesantes especies que enriquecen el conocimiento de la flora colombiana. En la primera entrega de esta serie (Díaz-Pie-

drahita & Rodríguez-Cabeza, 2011) se dieron a conocer cinco especies nuevas, una de *Lessingianthus* (Vernonieae), una de *Hebeclinium* (Eupatorieae) y tres de *Pentacalia* (Senecioneae); en el mismo trabajo se registró la presencia del género *Coespeletia* Cuatrec. en Colombia a través de una especie descrita previamente en el género *Espeletiopsis* Cuatrec. y proveniente de la zona limítrofe de los departamentos de Santander y Boyacá, concretamente de los páramos del

* Miembro de número Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Apartado 44763, Bogotá D.C., Colombia. Correo electrónico: sdiaz.piedrahita@gmail.com

** Candidata Maestría en Ciencias Biológicas - Línea Sistemática, Universidad Nacional de Colombia. Correo electrónico: bvrodruiguez@unal.edu.co, betsyviviana@gmail.com

Santuario de Fauna y Flora Guanentá Alto Río Fonce. En la presente contribución, y con base en una nueva especie, se propone un género afín a *Piptocarpha* (Vernonieae); adicionalmente se describen e ilustran seis especies más y una variedad; cuatro de ellas y la variedad pertenecen a la tribu Eupatorieae en tanto que las restantes especies hacen parte de las tribus Liabeae y Heliantheae. En futuras entregas se darán a conocer otras novedades, actualmente en estudio.

1. Liabeae

1.1. *Liabum onoserifolium* S. Díaz & Rodr.- Cabeza, sp. nov. Fig. 1

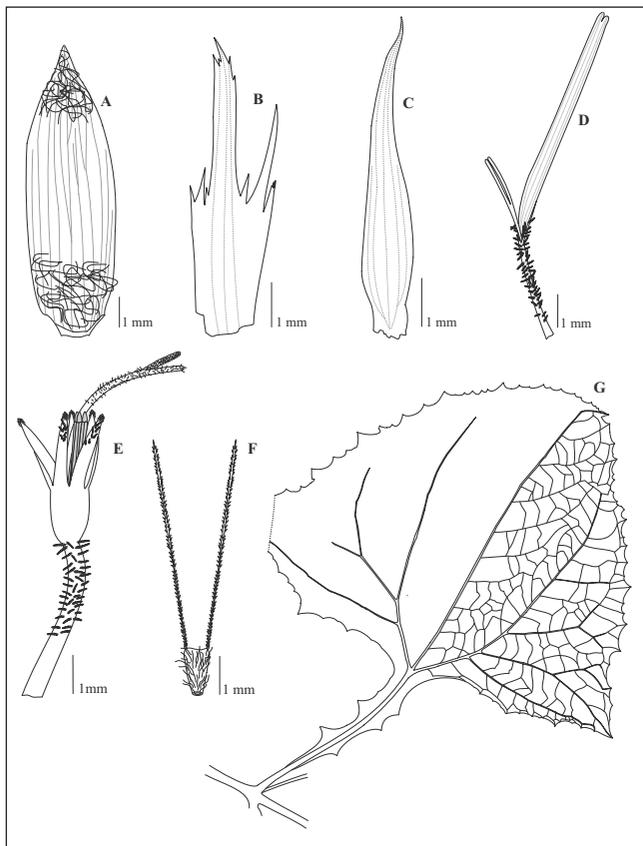


Figura 1. *Liabum onoserifolium* A. Filaria externa vista por el envés; B. Filaria intermedia vista por el envés; C. Filaria interna vista por el envés; D. Flor ligulada; E. Flósculo; F. Aquenio y papo; G. Hoja. Diseño digital de Betsy Viviana Rodríguez-Cabeza, elaborado con base en el ejemplar tipo (L.C. Jiménez 359, COL).

TYPUS. COLOMBIA. Boyacá: Municipio de Santa deMaría, vereda La Almenara, 4°53'17" N, 73°15'1" W, 1200 m, 9 oct 2000, fl, fr, L.C. Jiménez 359. "Hierba 1 m, lígula de color amarillo" (Holotypus COL [519097]).

Plantae herbaceae usque ad 1 m altae ramosae. Caules angulati crassiuscule ad 10 mm diam. striati juniores floccoso-tomentosi. Folia papyracea opposita, petiolis 6.5-9.5 cm longis alatis incis, laminis latissime ovatis deltatis 15-18.5 cm longis 18-23 cm latis irregulariter dentatis, circa 30-40 dentibus utroque latere, basi hastatis prope basin triplinervis ad apicem obtusis sed acuminatis supra pallidis arachnoideo tomentosus subtus albo-lanuginoso-tomentosa sed supra cum pilis arachnoideis caducis. Inflorescentiae terminales subumbellatae ex 22-25 capitulis compositae, 15-19 cm longae peduculi 4.6-15.5 mm longi dense tomentoso-floccosi, pedicelli 1-6.3 cm longi arachnoideo-tomentosi. Capitula campanulata ad 12-14 mm longa; squami involucrici 42-50 extus albo-arachnoideo-tomentosae 6 seriatae ovatae acuminatae vel angusto-ovatae ca. 4.5 - 10 mm longae ad 2.2 - 8.0 mm latae; receptacula plana paleacea, paleae anguste ovatae. Rami ca. 70, bi-tri-seriati, corollis flavidis 10.5-11.5 mm longi; limbus corollae glaber bidentatus binervatus 7-8 mm longus. Flores discorum 140-174; corollae flavae 6.7-7 mm longae anguste infundibulares extus in tubo dense pilosae, pilis articulatis, intus glabrae; lobi 1.8-2.3 x 0.5-0.6 mm longi triangulares superne extus longe piliferi et papillati; antherae 2 mm longae, appendices ovatae 0.3 x 0.15 mm; styli 6.2-8.7 mm longi inferne non nodulosi glabri supra medium pilosi, rami stylorum 0.8-1 mm longi pilosi acuti. Achaenia 0.9-1.2 mm longa circa 0.4 mm lata plerumque 2-3 costata dense pilosa; pappi setae biseriatae, 26-36 setis inaequalibus 4.5-5 mm longis scabris ad apicem acutis.

Etimología. El epíteto específico alude a la similitud de sus hojas con las de varias especies del género *Onoseris* (Asteraceae, Mutisieae).

Plantas herbáceas hasta de 1 m de altura. **Ramas** anguladas, cubiertas por indumento flocoso denso. **Hojas** opuestas, pecioladas, peciolos de 6.5-9.5 cm de largo, alados, alas con margen fuertemente incisa, base sin apéndice; lámina papyracea, discolora, de 15-18.5 x 18-23 cm, deltoidea, ápice obtuso y mucronado, mucrón de hasta 1 cm de largo, base hastada, margen irregularmente dentada, con 30-40 dientes por lado, dientes de hasta 0.7 x 1.4 mm; haz opaca, lisa y cubierta por indumento aracnoideo fácilmente desprendible; envés cubierto por indumento densamente lanoso sobrepuesto por indumento aracnoideo fácilmente desprendible; venación triplinerve, prominente por el envés. **Sinflorescencias** de 15-19 cm de largo, terminales de capítulos subumbelados, con 22-25 capítulos por sinflorescencia, cubiertas por indumento flocoso denso, ramas florales con porción vegetativa de 4.6-15.5 cm de largo. **Capítulos** de 12-14 mm de largo, pedicelados, pedicelos de 1-6.3 cm de largo cubiertos con indumento densamente flocoso, ebracteados. **Involucro** anchamente acampanado de 8 x 14 mm; filarias 42-50 por capí-

tulo, dispuestas en 5-6 series, eximbricadas y gradualmente menores hacia el interior; filarias externas de 9-13.5 x 5-8 mm, ovadas, con ápice acuminado, acumen de hasta de 2 mm de largo, margen entera, dorsalmente cubierta completamente con indumento aracnóideo, ventralmente con indumento aracnóideo sólo en el ápice y la base, con 18-19 nervios longitudinales; filarias intermedias de 7-8 x 2.1-2.2 mm y filarias internas de 4.5-6.5 x 0.8-1.5 mm, todas angosto-ovadas, con ápice agudo, margen fimbriada, algunas veces entera en las intermedias, glabras o con indumento aracnóideo por ambas caras, con 2-12 nervios longitudinales. **Receptáculo** paleáceo, paleas angosto-ovadas, de 1.6-2 x 0.4-0.6 mm, con ápice agudo y margen profundamente fimbriada en la mitad superior. **Flores liguladas** fértiles, 67-70 por capítulo, corola amarilla, de 10.5-12 mm de largo, con porción tubular de 2.5-3.7 mm de largo, cubierta de tricomas articulados dispersos, y limbo lineal, de 7- 8 x 0.5-0.7 mm, glabro, con dos dientes y 2-4 nervios perpendiculares; pistilo de 6.7-8.3 mm de largo, estilo de 5-6.3 mm de largo, ramas estigmáticas de 1.7-2 mm de largo. **Flósculos** hermafroditas, fértiles, 127-174 por capítulo, corola amarilla, de 6.7-7 mm de largo, angosto infundibuliforme; porción tubular de 3.5-4 mm de largo, cubierta externamente con abundantes tricomas articulados de hasta 0.4 mm de largo, internamente glabra; lóbulos de 1.8-2.3 x 0.5-0.6 mm, largamente triangulares, con ápice agudo y en la cara externa pilosos y con papilas hacia el ápice; anteras de 2-2.3 mm de largo, apéndice apical de 0.3 x 0.15 mm, ovado; conectivo no diferenciado; porción libre de los filamentos de 1-1.5 mm de largo; pistilo de 7-9.7 mm de largo, estilo de 6.2-8.7 mm de largo, piloso en la mitad superior, base no engrosada y glabra, ramas estigmáticas de 0.8-1 mm de largo, pilosas y con ápice agudo. **Aquenios** de 0.9-1.2 x 0.4-0.6 mm, sin costillas o algunas veces con 2-3 costillas escasamente diferenciadas, cubiertos por indumento piloso largo y denso; papo de 4.5-5 mm de largo, con 26-36 cerdas desiguales, escábridas y con ápice agudo.

Afinidad. *Liabum onoserifolium* es afín a *L. stipulatum* Rusby., especie que ha sido recolectada en territorio de los departamentos de Antioquia, Cauca, Cundinamarca, Tolima y Valle del Cauca. La nueva especie difiere por presentar la margen foliar irregularmente dentada (vs. tenuemente aserrada o denticulada), las alas del pecíolo con márgenes fuertemente incisas (vs. margen entera), base del pecíolo sin apéndice (vs. presente y auriculado), los capítulos mayores (12-14 mm de largo vs. 7-8 mm de largo), menor número de filarias (42-50 vs. 88), mayor número de flores radiales (67-70 vs. 46) y cinco veces mayor número de flósculos (140-175 vs. 30) por capítulo.

Comentarios. De acuerdo con **Bremer** (1994), el género *Liabum* estaba compuesto por 38 especies. En su reciente

revisión **Gutiérrez** (2004) pasa a la sinonimia algunas especies, y por tanto propone un total de 22 para el género. De las 22 especies, seis se encuentran en Colombia (*L. amplexicaule*, *L. asclepiadeum*, *L. igniarum*, *L. melastomoides*, *L. salooyense* y *L. stipulatum*). A ellas se agrega *L. onoserifolium*, que se distingue por ser la entidad que presenta mayor número de filarias y mayor número de flósculos, incrementando de manera significativa los límites previamente establecidos en este aspecto para el género.

2. Vernoniaeae

2.1. *Yariguianthus* S. Díaz & Rodr.-Cabeza, genus novum Asteracearum (Vernoniaeae).

Frutices arborescentes erecti ramosi. Rami teretes lignosi, canaliculati dense pilosi. Folia alterna petiolata, petiolis decurrentibus alatis; laminis ellipticis acuminatis basi acutis nervis secundariis pinnatis, nervulis dense reticulatis supra glabris vel subglabris subtus sparse pilosis et glanduliferis. Inflorescentiae paniculatae terminales, ramis alternis spicatis. Capitula raro solitaria plerumque glomerulata, glomeruli usque ad 6 capitulis compositis. Capitula cylindrica, involucri squamae 16-17 imbricatae 6-7 seriatas ovatae vel angusto-ovatae glabrae; receptacula plana glabra; flores 3 in capitulo; corollae albae anguste infundibulares in parte inferiori extus pilosae vel glabrae, pilis glanduliferis, lobis longis extus pilosis, basibus antherarum caudatis; basibus stylorum non noduliferis pilosis; achenia turbinata 10 costata setifera et glandulifera, carpodia breviter cylindrica. Pappus setiformis biseriatus, seriebus exterioribus brevioribus, omnes scabri persistentes; setae pappi interiores plerumque usque ad bases lobulorum longiores. Grana pollinis typo A (**Robinson, 1999**).

Species typica: *Yariguianthus glomerulatus* S Díaz & Rodr.-Cabeza.

Etimología. El nombre hace referencia a la Serranía de Yariquíes y al sufijo $\alpha\nu\tau\eta\upsilon\sigma$ = flor, en alusión al ramal de la Cordillera Oriental donde crece la especie que tipifica la sección.

Comentarios. Este género, se conoce únicamente por la especie tipo. Corresponde a arbustos o arbolitos con ramas escandentes, cilíndricas acanaladas cuyas hojas son alternas, discoloras, ovadas y penninervias; el envés foliar presenta escaso indumento piloso concentrado sobre las venas y abundantes glándulas. Los capítulos son discoideos, más o menos cilíndricos y el involucre presenta 16-17 filarias, graduales e imbricadas, dispuestas en 6-7 series, las más internas deciduas; el receptáculo es glabro y el número de flósculos se reduce a tres por capítulo; la corola es blanca y angosto-

infundibuliforme, el tubo presenta tricomas glandulosos, los lóbulos son alargados y rectos, tienen las márgenes engrosadas y presentan tricomas largos y agudos en la cara externa. Las anteras son bifurcadas y su base es roma y papilosa. El estilo no se ensancha en la base y es glabro, en tanto que en la porción apical es piloso; las ramas estigmáticas son agudas, densamente largo-pilosas en la cara externa, y papilosas en la cara interna. Los aquenios son obcónicos, presentan diez costillas longitudinales y desarrollan pelos y glándulas en toda su superficie; el papo presenta dos series de cerdas, las exteriores bastante cortas, en tanto que las interiores alcanzan en longitud la base de los lóbulos. El polen es del tipo A según la definición de **Robinson** (1999), es decir equinado, tricolpado y con un tecto continuo y micropunteado.

La nueva entidad es afín a *Piptocarpha* R. Brown., género del que se diferencia entre otras características por la ausencia de pelos estrellados o lepidotos tanto en el tallo como en el envés foliar, por presentar corolas con lóbulos no recurvados, estilo con la base no ensanchada y glabra, ramas estigmáticas con pelos largos y puntiagudos en la cara externa y aquenios marcadamente glandulosos y pilosos. Resulta notable que el género *Yariguianthus*, aparte de los caracteres propios que le dan identidad, combina características de los dos subgéneros de *Piptocarpha*, lo cual indica un parentesco cercano y con múltiples afinidades.

De acuerdo con **Smith & Coile** (2007), en *Piptocarpha* se distinguen dos subgéneros que según su morfología y los flavonoides contenidos en sus hojas, habrían evolucionado por separado. El subgénero *Piptocarpha*, al igual que otros géneros afines se habría originado en la alta cuenca del río Amazonas, en las estribaciones de los Andes del Perú desde donde habría irradiado hacia los Andes centrales y del norte, las Guayanas, Centro América y las islas del Caribe. Sus especies muestran caracteres más primitivos que los del subgénero *Hypericoides* cuyas especies se concentran en el este del Brasil. Esta hipótesis es interesante y sugestiva, más cuando en otros géneros de asteráceas como *Lessingianthus* y *Gongylolepis* se presentan distribuciones disyuntas que dejan incógnitas por resolver pero que en líneas generales podrían encuadrar en la teoría de los refugios selváticos como centros de endemismo de donde han surgido las distribuciones disyuntas.

Yariguianthus también presenta alguna afinidad con *Pollalesta*, *Piptocoma* y *Vernonia* subsecc. *Eremosis* (*Critoniopsis*), pero se puede diferenciar claramente de estas entidades.

2.1.1. *Yariguianthus glomerulatus* S. Díaz & Rodr.-Cabeza, sp. nov. **Fig. 2**

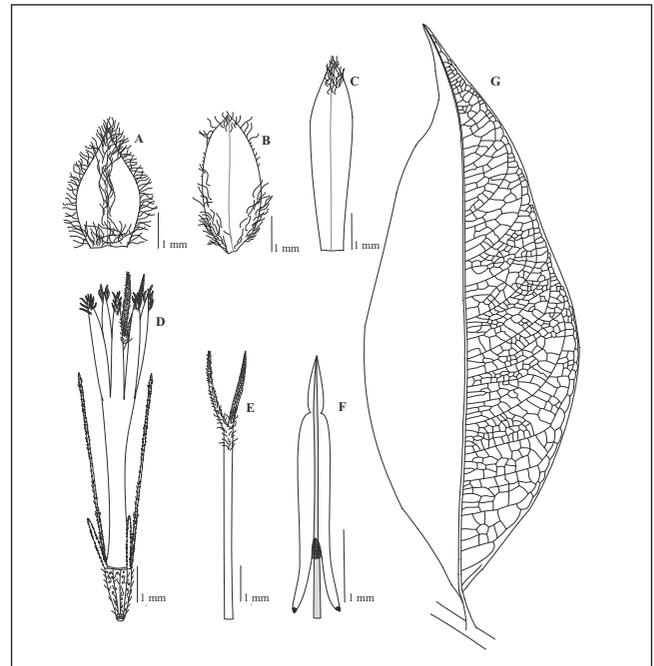


Figura 2. *Yariguianthus glomerulatus* A. Filaria externa vista por el envés; B. Filaria intermedia vista por el envés; C. Filaria interna vista por el envés; D. Flósculo; E. Estilo y estigma; F. Antera; G. Hoja. Diseño digital de Betsy Viviana Rodríguez-Cabeza, elaborado con base en el ejemplar tipo (*Aguilar-Cano 1005*, COL).

TYPUS: COLOMBIA. **Santander:** Municipio de Zapato, vereda San Javier, finca Matecaña, cuenca media alta quebrada La Ramera o El Ramo, en la zona amortiguadora del Parque Nacional Natural Serranía de Los Yariguíes, 6°50'51.4" N, 73°19'14.4" W, 1789-1997 m, 13 ene 2011, fl, fr, *Aguilar-Cano 1005*. "Hierba escandente; pedúnculos y pedicelos verdes, filarias verdes con ápice verde oscuro, corola blanca, ramas estigmáticas blancas, papus dorado" (Holotypus COL [559424]; isotypi COL [560961], UIS).

Plantae suffrutescens lignosae. Rami subscandentes. Caulis teretes, canaliculati pilosi. Folia alterna petiolata, petiolis decurrentibus alatis usque ad 0.7 cm longis, canaliculatis et dense pilosis; laminae ellipticae usque 10-14.5 cm longae et 3.4-5.1 cm latae basi acutae decurrentes, margine integerrimae revolutae apice longae acuminatae supra glabrae vel breviter pilosae supra venis subtus pilosae glandulosae, pilis longis glandulis refringentibus; nervis secundariis pinnatis 13-16 supra manifestis nervulis dense reticulatis. Inflorescentiae in ramis terminalibus paniculatae ramis spicatis dense pilosis. Capitula circa 10 mm alta raro solitaria vel

glomerulata cylíndrica; involucri squamae 16-17 imbricatae 6-7 seriatae gradatim longiores exteriores usque ad 1.5 mm longae ovatae acutae interiores usque ad 4.9 mm longae angusto-ovatae vel anguste ellipticae acutae, deciduis, omnes uninerves ciliatae extus pilosae intus glabrae; receptacula glabra; flores 3 in capitulo; corollae ca. 8 mm longae albae anguste infundibulares, tubis ca. 4 mm longis in parte inferiore extus sparse pilosulis, pilis glanduliferis, intus glabris; lobis 3-3.6 mm longis triangularibus in margine incrassatis extus pilosis; thecae antherarum ca. 3 mm longae; appendices antherarum ovatae ca. 0.7 mm longae basi caudatae, obtusae et papilosae; bases styli non noduliferae glabrae, stylo sursum piloso; rami styli ca. 2 mm longi pilosi ad apicem acuti; achaenia 1.4 mm longa obconica 10 costata setifera et glandulifera; setae pappi biseriatae flavescens persistentes scabridulae, exteriores ca. 1.2 mm longae, interiores ca. 6.5 mm longae.

Etimología. El epíteto específico alude a la disposición en glomérulos de los capítulos en las inflorescencias.

Arbustos con ramas subscandentes leñosas. **Ramas** cilíndricas, cubiertas por indumento piloso largo y denso. **Hojas** alternas, pecioladas, pecíolos de hasta 0.7 cm de largo, acanalados y cubiertos por indumento piloso largo y denso; lámina angosto-ovada o angosto-elíptica, de 10-14.5 x 3.4-5.1 cm, papirácea y discolora, con ápice largamente acuminado, acumen de hasta 2 cm de largo, base aguda y decurrente sobre el pecíolo, margen entera y revoluta; haz opaca, glabra o escasamente pilosa sobre las venas; envés escasamente piloso, pelos alargados más densos sobre las venas y con glándulas refringentes; nervios pinnados, 13-16 por lado y que divergen en ángulo de 55°-75°, prominentes por el envés. **Sinflorescencias** terminales ca. 21.5 cm de largo, capítulos organizados en panículas con 12-52 capítulos sésiles, solitarios o dispuestos en glomérulos de hasta 6 capítulos, cubiertas de indumento piloso denso de pelos alargados; ramas florales inferiores de 5-13 cm de largo, con porción terminal fértil de 3.2-8.5 cm de largo, porción vegetativa de 1.8-4.5 cm de largo, ebracteada. **Capítulos** de 9.5-10.5 de largo y 2.7-3.2 mm de ancho, sésiles y subtendidos por brácteas lineales de hasta 8 mm de largo. **Involucro** cilíndrico de 5.8-6 x 2.5-3 mm; filarias 16-17 por capítulo, dispuestas en 6-7 series, subimbricadas y gradualmente mayores hacia el interior; filarias exteriores de 1.4-1.5 x 0.9-1 mm, ovadas; filarias intermedias de 3-3.1 x 1.3 mm, angosto ovadas; filarias internas de 4.4-4.9 x 1.2-1.5 mm, angosto ovadas o angosto elípticas, caedizas; todas las filarias uninerves y con ápice agudo, la margen ciliada, el dorso piloso en la zona central y en el ápice o sólo en el ápice, ventralmente glabras. **Receptáculo** de ca. 0.7 cm de ancho, glabro. **Flósculos** hermafroditas, fértiles, 3 por capítulo, corola blanca, angosto-

infundibuliforme, de ca. 8 mm de largo; porción tubular de 4 mm de largo, externamente glabra o con escasos tricomas glandulares, internamente glabra; lóbulos de 3-3.6 x 0.6-0.7 mm, triangulares, con ápice agudo y margen engrosada, externamente con pelos alargados hacia el ápice. **Anteras** de 3.3 mm de largo, caudadas, caudas de 0.8-1 mm de largo, romas y papilosas en la base; apéndice apical ovado de 0.6-0.7 x 0.1-0.2 mm, conectivo de 0.3 mm de largo; porción libre de los filamentos de 1.5 mm de largo. **Pistilo** 7-7.8 mm de largo, estilo de 5-6 mm densamente piloso hacia el ápice, base no engrosada y glabra, ramas estigmáticas de 1.8-2 mm de largo, pilosas en la cara externa y papilosas en la cara interna, agudas en el ápice. **Aquénios** de 1.4 x 0.8-0.9 mm, obcónicos, con 10 costillas, pilosos y con glándulas en toda su superficie; papo cerdoso de 6.2-6.5 mm de largo, cerdas dispuestas en dos series, las internas de 6.2-6.5 mm de largo, las externas de 1.1-1.2 mm de largo.

3. Heliantheae

3.1 *Calea yariguiensis* Rodr. Cabeza & S. Díaz, sp. nov.

Fig. 3

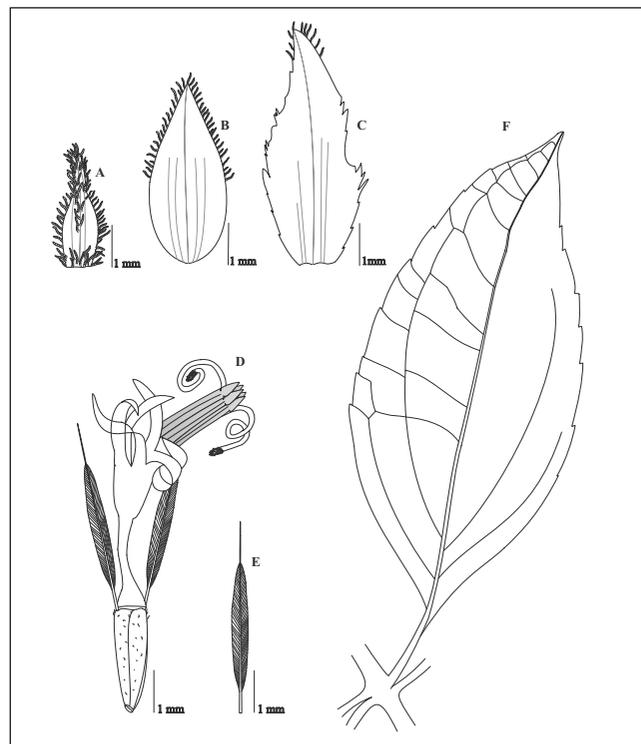


Figura 3. *Calea yariguiensis* A. Filaria externa vista por el envés; B. Filaria intermedia vista por el envés; C. Filaria interna vista por el envés; D. Flósculo; E. Escama del papo; F. Hoja. Diseño digital de Betsy Viviana Rodríguez-Cabeza, elaborado con base en el ejemplar tipo (Aguilar-Cano 955, COL).

TYPUS: COLOMBIA. **Santander:** Municipio de Zapatoca, vereda Bellavista, camino hacia la Cuchilla de San Javier desde la casa de Milton Rueda, área intervenida de bosque altoandino, en la zona amortiguadora del Parque Nacional Natural Serranía de Los Yariguíes, 06°49'19.6" N, 73°10'20.1" W, 2358 m, 8 ene 2011, fl, fr, *Aguilar-Cano 955*. "Arbusto escandente 3 m, orilla de camino, fragante, hojas ásperas al tacto; pubescencia parduzca; filarias externas verde-vináceo con ápice verde oscuro, filarias internas verde claro, corola, anteras y ramas estigmáticas amarillas" (Holotypus COL [559425]; isotypi COL [559426], UIS).

Arbusculae usque ad 3 m altae ramosae, rami scandentes lignosi. Caules teretes dense pilosi. Folia opposita petiolata, petiolis usque ad 0.8 cm longis dense pilosis; laminae anguste ovatae coriaceae 5.4-9.2 mm longae 1.5-3 cm latae fere ad basim trinervatae base anguste acutae et decurrentes margine revolutae tenuiter serratae et cum tribus - septem dentibus in utroque latere, ad apicem fortiter acuminatae supra pallidae sparse scabrosae, subtus scabrosae sed cum pilis longioribus articulatis nervis superioribus prominulis, inferioribus prominentibus. Inflorescentiae terminales in umbellas compositae vel in thyrsos compositae dispositae 12-30 capitulis instructae ramis principalibus 2.5-7 cm longis ebracteatis pedunculis dense pilosis. Capitula 7.5-9 mm alta 2.5-3.5 mm lata, sessilia vel breviter pedicellata pedicellis prout pertinens dense pilosis et cum duobus bracteis linearibus usque ad 4 mm longis. Involucris cylindricis circa 6 mm altis squamae involucri 10 subimbricatae circa 5-6 seriatae gradatim maioribus exterioribus 2.4-3 mm longae 1-1.2 mm latae ovatae apice acuminatae pilosulae ad marginem ciliatae vel fimbriatae extus pilosae, intermediae 2.8-4.1 mm longae 1.4-1.8 mm latae ellipticae vel ovatae sursum ciliatae ad apicem acutae extus interiores 4.6-5.3 mm longae 1.6-2 mm latae anguste ellipticae vel anguste ovatae acutae superne ciliatae vel fimbriatae glabrae 3-7 nervatae; receptacula 1.4 mm alta 0.4 mm lata cylindrica paleacea, paleis 10 in capitulo. Flores disci 5 in capitulo; corollae flavae 4.7-5.5 mm longae, angustae infundibulares utrinque glabrae, tubis 2.2-2.8 mm longis; lobis triangularibus 1.6-1.8 mm longis 0.5 mm latis triangularibus acutis ad marginem incrassatis glabris aliquando extus minute glanduliferis; thecae 1.7-2.1 mm longae; appendices antherarum 0.5 mm longae 0.2 mm latae ovatae; filamentum in parte superiore ca. 1.5 mm longum; pistillis circa 5 mm longis; bases stylorum nodulosae glabrae; rami stylorum planiusculi 1.3-1.5 mm longi ad apicem pilosi; nectariis usque ad 0.5 mm longis 0.4 mm latis. Achaenia obovoidea 1.6-2.4 mm longa 0.4-0.8 mm lata longitudinaliter tenuiter 5-6 costata glabra interdum ad apicem breviter pilosa; squamae pappi circa 26 usque ad 4.8 mm longae late lineatae apice filiformes.

Etimología. El epíteto específico alude a la Serranía de Los Yariguíes, localidad donde fue recolectada la colección típica.

Arbustos con ramas escandentes, hasta de 3 m de altura. **Ramas** cilíndricas, cubiertas por indumento denso piloso largo. **Hojas** opuestas, pecioladas, peciolo de hasta 0.8 cm de largo, cilíndricos, densamente pilosos; lámina coriácea, angosto ovada, de 5.4-9.2 x 1.5-3 cm, ápice largamente acuminado, base largamente aguda y decurrente sobre el peciolo, margen tenuemente aserrada con 3-7 dientes por lado, dientes de 0.5-1 x 3-12 mm, revoluta; haz opaca y cubierta por indumento escabroso, envés con indumento escabroso, tricomas articulados largos; venación triplinerve, con un par basal de nervios incompletos y un segundo par que se hace más tenue hacia el ápice, prominulos por la haz, prominentes por el envés. **Sinflorescencias** de 6.5-10 cm de largo, terminales, de capítulos en umbelas compuestas o en tirso con ramas umbeladas, densamente pilosas; ramas principales de 2.5-7 cm de largo, con porción reproductiva de 1.5-2 cm de largo y 12-30 capítulos, porción vegetativa de 0.6-5 cm de largo, ebracteada. **Capítulos** de 7.5-9 x 2.5-3.5 mm, sésiles o con breve pedicelo de hasta 0.1 cm de largo, pedicelos cuando presentes cubiertos por indumento piloso denso y subtendidos por 2 brácteas lineales de hasta 4 mm de largo. **Involucro** cilíndrico, de 6-6.3 mm de alto; filarias 10 por capítulo, dispuestas en 5-6 series, subimbricadas y gradualmente mayores hacia el interior; filarias exteriores de 2.4-3 x 1-1.2 mm, ovadas, con ápice acuminado, margen ciliada, dorsalmente pilosas hacia el centro y en el ápice, ventralmente glabras o pilosas en el ápice, uninerves; filarias intermedias de 2.8-4.1 x 1.4-1.8 mm, elípticas u ovadas; filarias internas de 4.6-5.3 x 1.6-2 mm, angosto-elípticas o angosto-ovadas; filarias intermedias e internas con ápice agudo, margen ciliada en la mitad superior o fimbriadas, glabras dorsal y ventralmente, con 3-7 nervios longitudinales. **Receptáculo** cilíndrico, de 1.4 x 0.4 mm, paleáceo, paleas diez por capítulo, de ca. 5 x 2.5 mm, elípticas, con ápice obtuso, margen ciliada o fimbriada, glabras por ambas caras y con 3 nervios longitudinales. **Flósculos** hermafroditas, fértiles, 5 por capítulo, corola amarilla, de 4.7-5.5 mm de largo, angosto-infundibuliforme, glabra externa e internamente; porción tubular de 2.2 - 2.8 mm de largo; lóbulos 1.6-1.8 x 0.5 mm, largamente triangulares, con ápice agudo, margen engrosada, glabros por ambas caras, algunas veces con glándulas en la margen de la cara externa. **Anteras** de 1.7-2.1 mm de largo, apéndice apical de 0.5 x 0.2 mm, ovado; conectivo de 0.4-0.5 mm de largo; porción libre de los filamentos ca. 1.5 mm de largo. **Pistilo** de 5-5.5 mm de largo, estilo de 3.5-4.2 mm de largo con base engrosada y glabra, ramas estigmáticas de 1.3-1.5 mm de largo, aplanadas y pilosas en el ápice; nectario de 0.2-0.5 x 0.3-0.4 mm. **Aque-nios** de 1.6-2.4 x 0.4-0.8 mm de largo, turbinados, con 5-6

costillas tenuemente visibles, glabros o con escasos tricomas en el ápice, con algunas manchitas blanco-grisáceas; papo escamoso de ca. 4.8 mm de largo, escamas lineales 22-26, agudas en el ápice y con un nervio central que se prolonga hasta 1 mm por encima del ápice.

Afinidad. *Calea yariguiensis* es afín a *C. angosturana* Hieron., especie recolectada en Antioquia y Risaralda. Difiere de ésta por presentar ramas cubiertas por indumento largo y denso piloso (vs. glabro o escaso piloso), lámina foliar opaca por la haz (vs. nítida por la haz) y cubierta por indumento escabroso por ambas caras (vs. piloso por ambas caras), capítulos con ca. 10 filarias (vs. 15-20 filarias) y cinco flósculos (vs. 10-12 flósculos) por capítulo, flósculos con tubo mayor (2.2-2.8 mm de largo vs. ca. 1.5 mm de largo) y aquenios mayores (1.6-2.4 mm de largo vs. 1 mm de largo).

4. Eupatorieae

4.1 *Ageratina josephensis* Rodr.-Cabeza & S. Díaz, sp. nov. Fig. 4

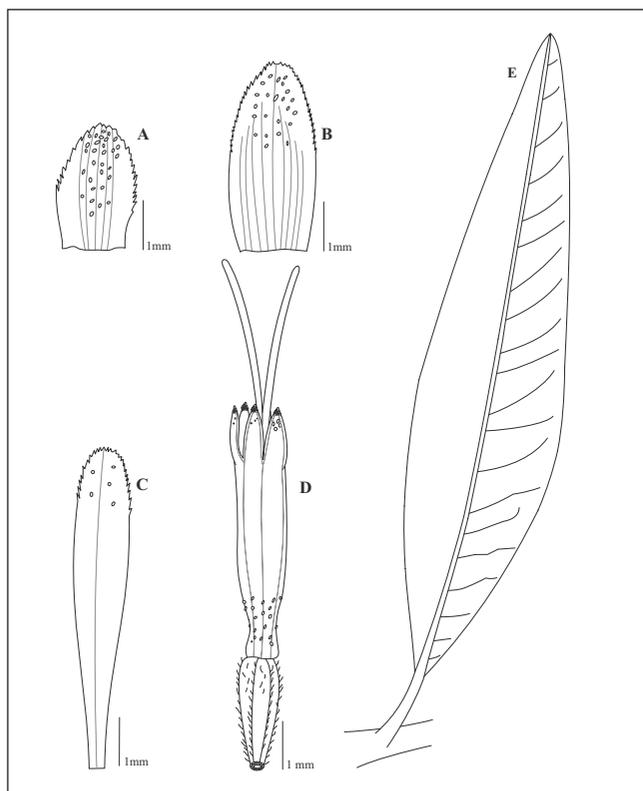


Figura 4. *Ageratina josephensis* A. Filaria externa vista por el envés; B. Filaria intermedia vista por el envés; C. Filaria interna vista por el envés; D. Flósculo; E. Hoja. Diseño digital de Betsy Viviana Rodríguez-Cabeza, elaborado con base en el ejemplar tipo (*Cuatrecasas* 12299, COL).

TYPUS: COLOMBIA. Norte de Santander: Páramo de Fontibón, 2600-2750 m, 15-16 oct 1941, fl, fr, *Cuatrecasas* 12299. “*Frutex, corola carmín*” (Holotypus COL [119177]).

Plantae frutescentes. Caules teretes tomentosi. Folia opposita, petiolis 0.4-0.7 cm longis puberulis; laminae crustaceae anguste ellipticae 4.2-6.4 cm longae et 0.8-1.3 cm latae basi longe acutae margine integrae revolutae apice acutae supra opacae dilutae puberulae praecipue in nervis et cum glandulis impressis subtus dense lanosae, laminae penninervatae 10-18 nervis utroque latere subtus prominentes. Inflorescentiae thyrsoido-corymbosae, ramis ultimis 3.5-5 cm longis puberulis. Capitula campanulata ca. 10 mm alta et 4.6 mm lata, pedicellata, pedicelli usque ad 7 mm longi puberuli bracteati, bracteae usque ad 3 mm longae; squamae involucri subimbricatae ca. 24 sexies seriatae gradatim maiores, externae ovatae plerumque 2.2 mm longae x 1.2 mm latae, intermediae ovatae 2.8 mm longae x 1.7 mm latae, internae anguste ovatae 6.4 mm longae x 1 mm latae, omnes cum apice acuto margine ciliatae interdum scariosae extus 3-5 nervatae glandulatae glabrae; receptacula breviter convexa glabra. Flores ca. 13 in capitulo; corollae puniceae ca. 4.8 mm longae, tubis 1.2 mm longis glabris, limbis late infundibularibus extus ad basim piloso-glanduliferis intus glabris, lobis triangularibus acutis ca. 0.7 mm longis et 0.5-0.7 mm latis extus piliferis ad apicem papillatis; filamento in parte superiore ca. 1.5 mm longo; thecae 1.5 mm longae; appendices antherarum ovatae ca. 0.3 mm longae et 0.3 mm latae; bases styli nodulos glabri; rami styli planiusculi 3.5 mm longi; achenia turbinata 2.2 mm longa 0.6 mm lata 5 costata setifera et glandulifera; setae pappi ca. 31 usque ad 4.4 mm longae inaequales scabridae.

Etimología. Esta especie está dedicada al notable sinantrólogo José Cuatrecasas Arumi (Camprodon 1803-Washington 1996), incansable investigador de la flora colombiana y recolector de la colección típica.

Arbustos. **Ramas** cilíndricas cubiertas por indumento tomentoso. **Hojas** opuestas, pecioladas, pecíolos de 0.4-0.7 cm de largo, planos y puberulos; lámina crustácea, angosto-elíptica, de 4.2-6.4 x 0.8-1.3 cm, aguda en el ápice, base largamente aguda, margen entera y fuertemente revoluta; haz opaca, en seco, cubierta por indumento pubérulo que se torna más denso sobre las venas y pequeñas glándulas incrustadas en la lámina; envés cubierto por indumento densamente lanoso; venas pinnadas, 10-18 por lado y que divergen en ángulo de 50°-65°, prominentes por el envés. **Sinflorescencias** de 3.5-5 cm de largo, terminales con capítulos en tirso corimbiformes, pubérulas; ramas inferiores de 4.5 cm de largo con porción terminal fértil de 2.2 cm de largo y ca. 5 capítulos, porción vegetativa de 2.3 cm de largo, ebracteada.

Capítulos de 10 x 4.6 mm, pedicelados, pedicelos de hasta 7 mm de largo, pubérulos y con brácteas de hasta 3 mm de largo ubicadas cerca del capítulo. **Involucro** acampañado de 8.2 x 4.5 mm; filarias 24 por capítulo, dispuestas en 6 series, subimbricadas y gradualmente mayores hacia el interior; filarias exteriores de 2.2 x 1.2 mm, ovadas; filarias intermedias de 2.8 x 1.7 mm, ovadas; filarias internas de 6.4 x 1 mm, angosto-obovadas; todas las filarias con 3-5 nervios longitudinales, ápice redondeado, margen ciliada, a veces escariosa, dorsalmente glándulosas, ventralmente glabras. **Receptáculo** de ca. 1 mm de ancho, ligeramente convexo, glabro. **Flósculos** hermafroditas, fértiles, ca. 13 por capítulo, corola de color carmín en vivo, anchamente infundibuliforme, de 4.8 mm de largo; porción tubular de 1.2 mm de largo; limbo externamente con tricomas glandulares en la mitad inferior, internamente glabro; lóbulos de 0.7 x 0.5 mm, triangulares y con ápice agudo, en la cara externa pilosos y con papilas hacia el ápice. **Anteras** de 1.5 mm de largo, apéndice apical de 0.3 x 0.3 mm, ovado; conectivo de 0.4 mm de largo; porción libre de los filamentos de 1.5 mm de largo. **Pistilo** 7.7 mm de largo, estilo de 4.2 mm de largo, con la base engrosada y glabra, ramas estigmáticas de 3.5 mm de largo, aplanadas. **Aquenios** turbinados de 2.2 x 0.6 mm, con 5 costillas, espacios intercostales y costillas pilosos y glandulosos; papo de 4.4 mm de largo, con ca. 31 cerdas escábridas y desiguales.

Afinidad. *Ageratina josephensis* es afín a *A. gynoxoides* (Wedd.) R.M. King & H. Rob., especie frecuente en los páramos de Cundinamarca y Boyacá. Difiere de ésta por presentar glándulas refringentes en la haz foliar (vs. lámina eglandulosa), sinflorescencias con indumento pubérulo (vs. sinflorescencias con indumento densamente lanoso), capítulos con cerca de 24 filarias (vs. 15-16 filarias) ovadas o angosto-obovadas y con ápice redondeado (vs. lineales o angostamente triangulares con ápice agudo), flósculos cerca de 13 por capítulo (vs. 22 por capítulo) y aquenios con costillas y espacios intercostales pilosos y glandulosos (vs. pilosos y eglandulosos). Una característica notable de esta especie es la de presentar hojas bastante esclerificadas y ligeramente bulladas en la haz, densamente tomentosas por el envés y con la margen fuertemente revoluta, que a primera vista recuerdan algunas especies de *Aristeguietia* R.M. King & H. Rob.

Comentarios. De acuerdo con **King & Robinson** (1987) el género *Ageratina* comprende cerca de 248 especies agrupadas en cinco subgéneros (*Ageratina*, *Klattiella*, *Neogreene-lla*, *Andinia* y *Apoda*). La especie aquí descrita pertenece al subgénero *Andinia*, que comprende 37 especies distribuidas en Colombia, Venezuela, Ecuador, Perú y Bolivia. En Colombia se han registrado 17 especies. El subgénero se caracteriza porque sus especies son arbustos con hojas coriáceas,

venación pinnada, algunas veces con nervios más prominentes cerca de la base, involucro débilmente subimbricado y porción basal de la corola estrecha y glabra o con glándulas en su cara externa, lóbulos de la corola más cortos que la garganta y en su cara interna densamente papilosos, y aquenios además de glándulosos algunas veces cortamente setosos.

4.2 *Badilloa quantivana* Rodr.- Cabeza & S. Díaz, sp. nov. Fig. 5

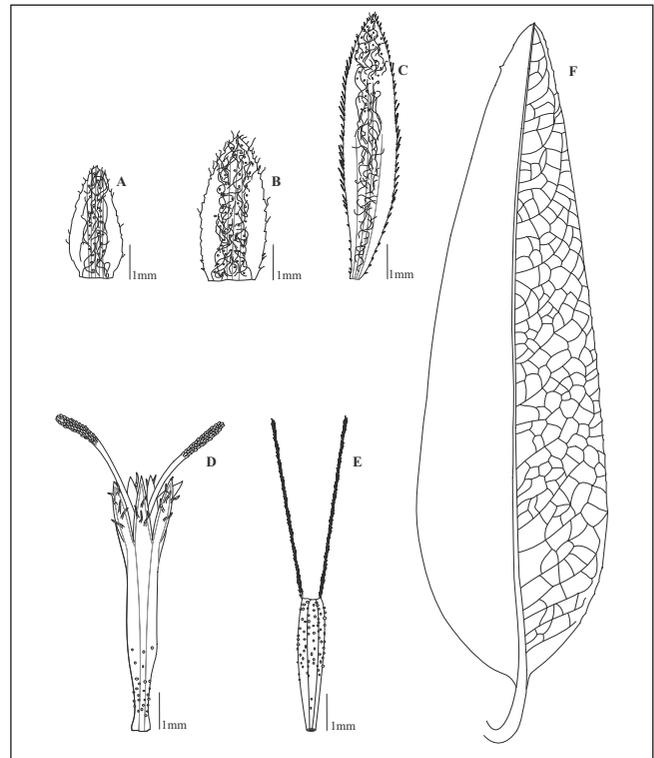


Figura 5. *Badilloa quantivana* A. Filaria externa vista por el envés; B. Filaria intermedia vista por el envés; C. Filaria interna vista por el envés; D. Flósculo; E. Aquenio y papo; F. Hoja. Diseño digital de Betsy Viviana Rodríguez-Cabeza, elaborado con base en el ejemplar tipo (*Jaramillo-Mejía 4303*, COL)

TYPUS: COLOMBIA. **Boyacá:** Páramo de Guantiva, entre Santa Rosita y Onzaga, quebrada Sietecuecal, 3410 m, 26 nov 1967, fl, fr, *Jaramillo-Mejía 4303*. “Árbol de 5 m. flores, flósculos y ligulas blancos. Inflorescencia péndula” (Holotypus COL [244587]).

Arbores usque ad 5 m altae ramosae. Caules teretes canaliculati glabri glanduliferi. Folia opposita breviter petiolata, petiolis usque ad 1.5 mm longis, angustis pilosis et glanduliferis, laminis coriaceis discoloribus anguste ovatis 9.5-9.7 x 2.5-2.8 cm, basibus obtusis vel breviter rotundatis apice

acutis interdum breviter mucronatis margine denticulatis vel tenuiter serratis revolutis supra glabris glanduliferis (glandulis refringentibus) dilutis laevibus subtus dense lanosis (pilis elongatis), nervis secundariis pinnatis prominentibus. Inflorescentiae terminales pendulae corymbiferae usque ad 10.5 cm. longae, 15-40 capitulatae supra ebracteatae. Capitula cylindrica ad basim inferne incrassata circa 11 mm alta pedicellata, pedicelli 2.5-7 mm longi pilosi et glanduliferi bracteati, bracteis linearibus usque ad 3.8 mm longis; involucri campanulatis 7.5-8.2 mm altis, receptacula 1-1.3 mm lata glabra; involucri squamae imbricatae 5-6 seriatas, 12-13, gradatim maiores internae, externae 2.1-2.3 x 0.8-1.1 mm, ovatae intermediae ovatae vel ellipticae, interiores anguste ellipticae, omnes trinervatae ad apicem acutae et ciliatae extus glanduliferae et arachnoideae. Flores albidis 5 in capitulo 6.8-7 mm longis; corollae late infundibulares inferne tubulares, tubis 2-2.2 mm longis extus cum pilis glanduliferis superne campanulatae, lobis triangularibus acutiusculis 5 aliquando 6-7 duplo latioribus quam longioribus extus pilosis, margine papilloso; antheris circa 2 mm longis appendicibus parum longioribus quam latioribus, filamenta circa 1.5 mm longa, pistillis 8.5-9.6 mm longis, styli inferne nodulosi glabri, ramis late linearibus circa 4 mm longis leniter papilloso; achaenia 3.5 mm longa prismatica 6-7 costata distincte setifera et glandulifera, intercostis glanduliferis superne densioribus; carpodia annularia. Pappus setiformis uniseriatus, setis circa 50 scabris, cellulis apicalibus acutis.

Etimología. El epíteto específico alude al páramo de Guantiva, región donde fue recolectada la colección típica.

Árboles de ca. 5 m de altura. **Ramas** cilíndricas, corteza canaliculada, glabra y con glándulas. **Hojas** opuestas, pecioladas, pecíolos hasta de 1.5 cm de largo, planos, pilosos y con glándulas; lámina coriácea, discolora, angosto-ovada o angosto-elíptica, de 9.5-9.7 x 2.5-2.8 cm, ápice obtuso y a veces brevemente mucronado, base obtusa, redondeada o aguda, margen revoluta, denticulada o tenuemente aserrada con 14-40 dientes por lado y distanciados entre sí por 1.5-3.5 mm; haz opaca, glabra, lisa, con glándulas refringentes, envés con indumento lanoso largo y denso; venación pinnada con ca. 14-20 nervios por lado y que divergen en ángulo de 40°-60°, prominentes por el envés. **Sinflorescencias** de 8.5-10.5 cm de largo, terminales, péndulas, de capítulos en panículas de ramas corimbiformes, cubiertas por indumento piloso largo y glándulas; ramas florales inferiores de 5.5-8.5 cm de largo total, con porción terminal fértil de 2.8-6.5 cm de largo y 15-40 capítulos, porción vegetativa de 2.3-5.5 cm de largo, ebracteada. **Capítulos** de 11-11.5 x 4-4.5 mm, pedicelados, pedicelos de 2.5-7 mm de largo, cubiertos por indumento piloso largo y glándulas, con brácteas lineales hasta de 3.8 mm de largo. **Involucro** acampanado de 7.5-8.2 mm

de alto; filarias 12-13 por capítulo, dispuestas en 5 - 6 series, subimbricadas y gradualmente mayores hacia el interior; filarias exteriores de 2.1-2.3 x 0.8-1.1 mm, ovadas; filarias intermedias de 4 x 1.5 mm, elípticas u ovadas; filarias internas de 6.2-7.3 x 1.3-1.9 mm, angosto-elípticas; todas las filarias con ápice agudo, margen ciliada, a veces con cilios sólo en la mitad superior, dorsalmente glandulosas o no y cubiertas de indumento aracnóideo o con pelos sólo hacia el ápice, ventralmente glabras, y trinerves. **Receptáculo** de 1-1.3 mm de ancho, glabro. **Flósculos** hermafroditas, fértiles, 5 por capítulo, corola blanca, anchamente infundibuliforme, de 5.6-7 mm de largo, externamente con glándulas y algunas veces con escasos tricomas, internamente glabra; porción tubular de 1.2-2.2 mm de largo; lóbulos generalmente cinco, a veces seis o siete, de 1.1-1.2 x 0.5 mm, triangulares, con ápice agudo, margen papilosa con papilas alargadas, externamente pilosos con pelos articulados. **Anteras** de 2-2.1 mm de largo, apéndice apical de 0.3-0.2 mm, ovado; conectivo de 0.5-0.6 mm de largo; porción libre de los filamentos de 1.5-1.6 mm de largo. **Pistilo** de 8.5-9.6 mm de largo, estilo de 4.5-5.5 mm de largo con base glabra, engrosada o no, ramas estigmáticas de 4-4.1 mm de largo, aplanadas y papilosas en la porción terminal. **Aquenios** de 3.5 x 0.6-0.8 mm, prismáticos y con 5-7 costillas, espacios intercostales con glándulas que se tornan más densas hacia el ápice, costillas glandulosas y con escasas setas hacia el ápice; carpodio anular; papo de 6-6.5 mm de largo, con 39-52 cerdas escábridas de ápice agudo.

Afinidad. *Badilloa guantivana* es afín a *B. sonsonensis* R.M. King & H. Rob, especie restringida a Colombia y conocida hasta el presente por colecciones hechas en el páramo de Sonsón, departamento de Antioquia. Difiere de ésta por presentar hojas mayores (de 9.5-9.7 x 2-2.8 cm vs. 4-6 x 1.5-3 cm), con lámina angosto-ovada (vs. lámina elíptica u ovada), de base redondeada (vs. base cuneada), margen denticulada o tenuemente aserrada (vs. margen crenulada), haz lisa, glabra o a veces pilosa sobre los nervios (vs. bullada y escabrosa), envés eglanduloso y cubierto con indumento lanoso largo y denso (vs. envés glanduloso y con indumento piloso) y cinco flósculos por capítulo (vs. 10 flósculos). Como una particularidad algunos flósculos presentan 6 ó 7 lóbulos.

4.2.1 *Badilloa guantivana* var. *güicanensis* var. nov. Rodr.-Cabeza & S. Díaz

TYPUS: COLOMBIA. **Boyacá:** Cañón del Chicamocha, Güicán, vereda San Roque, 3700 m, 30 sep 1991, fl, fr, A. Etter et al. 361. “Árbol de 5m, flósculos y ligulas blancos, inflorescencia péndula” (Holotypus COL [439443]; isotypus COL [439445]).

Badilloae guantivanae var. *guantivana affinis* a qua imprimis differt foliis anguste ellipticis basibus foliorum acutis; flosculis late infundibularibus, tubis flosculorum brevissimis; lobulis flosculorum extus piliferis, stylis inferne non nodulosis; achaeniis 5-costatis.

Etimología. El epíteto hace alusión al municipio de Güicán en cuya jurisdicción se recolectó la especie.

Afinidad. La variedad *güicanensis* difiere de la variedad *guantivana* por presentar hojas angosto-elípticas con base notablemente aguda (vs. angosto-ovadas y con base redondeada u obtusa), filarias dorsalmente eglandulares (vs. glandulosas), flósculos menores (5.6 mm vs. 6.8-7 mm de largo) con tubo reducido (1.2 mm vs. 2-2.2 mm de largo), estilo con base no engrosada (vs. engrosada), aquenios con 5 costillas (vs. 6-7 costillas) y papo con menor número de cerdas (39 vs. 48-52).

Comentarios. El género *Badilloa* fue propuesto por **King & Robinson** (1975), e inicialmente incluía nueve especies. Los mismos autores, en la revisión de la tribu, fijaron su número en diez (**King & Robinson**, 1987). Estas especies son propias del norte de los Andes en una franja comprendida entre 2500 y 4000 m de altitud. Cinco especies prosperan en Perú, una es endémica de Ecuador y otra es común a ese país y a Colombia, en tanto que dos crecen en Venezuela. Para la flora colombiana se conocían dos especies (*B. salicina* y *B. sonsonensis*). Con la aquí descrita se aumenta a once el número de especies del género y a tres las registradas en Colombia, una de ellas con una variedad. A continuación se presenta la clave para las especies colombianas.

Clave para las especies colombianas de *Badilloa* R.M. King & H. Rob.

- 1. Flósculos 5 por capítulo. Lámina foliar por la haz lisa, por el envés con indumento lanoso largo y denso, carente de glándulas refringentes **2**
- 1'. Flósculos 10 por capítulo. Lámina foliar por la haz bullada o rugosa, por el envés tomentosa o con pelos sólo sobre la venación, con glándulas refringentes..... **3**
- 2. Lámina foliar angosto-ovada con base redondeada u obtusa, filarias dorsalmente con glándulas, flósculos ≥ 6.8 mm de largo, con porción tubular ≥ 2 mm de largo, estilo con base engrosada, aquenios con 6-7 costillas y papo con más de 48 cerdas.....***B. guantivana* var. *guantivana***
- 2'. Lámina foliar angosto elíptica con base aguda, filarias dorsalmente eglandulares, flósculos ≤ 5.6 mm de largo, con porción tubular ≤ 1.2 mm de largo, estilo con base no engrosada, aquenios con 5 costillas y papo hasta con 39 cerdas...
.....***B. guantivana* var. *güicanensis***

- 3. Lámina foliar elíptica u ovada, hasta de 6 cm de largo y 3 cm de ancho, por la haz cubierta de indumento escábrido, y margen crenulada..... ***B. sonsonensis***
- 3'. Lámina foliar angosto-ovada u oblongo-lanceolada, de 7.5-14 cm de largo y hasta 2 cm de ancho, por la haz glabra o con pelos sólo sobre la venación principal, y margen escasamente aserrada o denticulada.....***B. salicina***

4.3 *Hebeclinium marianum* S. Díaz & Rodr.- Cabeza, sp. nov. Fig. 6

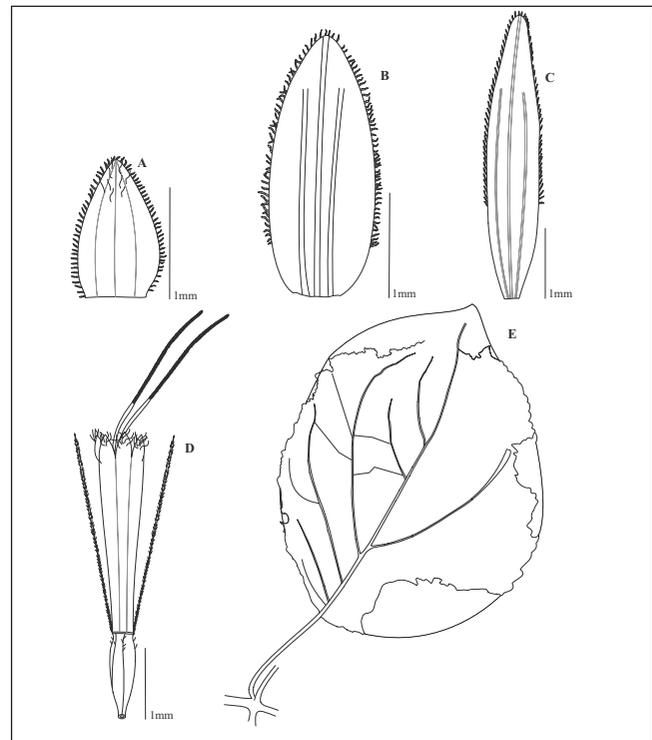


Figura 6. *Hebeclinium marianum* A. Filaria externa vista por el envés; B. Filaria intermedia vista por el envés; C. Filaria interna vista por el envés; D. Flósculo; E. Hoja. Diseño digital de Betsy Viviana Rodríguez-Cabeza, elaborado con base en el ejemplar tipo (*Granados-Tochoy, et al. 433, COL*)

TYPUS: COLOMBIA. **Boyacá:** Municipio de Santa María, vereda Caño Negro, bajando hacia la quebrada La Cristalina, 1000 m, 5 nov 2003, fl, fr, *Granados-Tochoy, et al. 433*. “*Hierba erecta, 1.2 m alto. Hojas basales suborbiculares, ca. 25 cm de diámetro. Involucro verde, flósculos blancos*” (*Holotypus COL [560962]; isotypus COL [559417]*).

Plantae suffrutescentes erectae usque ad 1.20 m. Caules teretes medullosi, canaliculati. pilosi, pilis longis articulatis. Folia magna opposita petiolata, petiolis 4.5-13 cm longis, planis dense pilosis, pilis longis pluricellularibus articulatis

purpurentibus, lamina membranaceis leviter discoloribus usque ad 32 x 25 cm, ovatis vel late-ovatis pinnato-palmeatis, margine irregulariter serrulatis et breviter revolutis, ad apicem acutis basi rotundatis supra pallidis pilosis subtus pilosis et squamosis, squamis albidis, nervis pinnatis supra prominulis subtus prominentibus. Inflorescentiae axillares laxae umbellatae usque ad 130 capitulis instructae, ramis umbellatis dense puberulis (pilis longis pluricellularibus articulatis purpurentibus) pedicellis dense pilosis. Capitula campanulata ca. 4.8 mm alta; squamae involucri 31-36 subimbricatae 7 seriatas gradatim maiores 0.7-3.4 x 0.4-0.9 mm, latae ovatae vel anguste ovatae ad apicem acutae margine ciliatae extus 1-3 costatae glabrae vel leviter pilosae; receptacula convexa minute pilosa. Flores circa 31 in capitulo; corollae 2.6-2.8 mm longae, anguste infundibulares albae extus glabrae intus pilosae, lobis triangularibus parum longioribus quam latioribus ad apicem acutiusculis extus longe piliferis interdum glanduliferis; filamento in parte superiore circa 0.5 mm longo; thecae circa 1 mm longae, appendicibus ovatis circa 0.2 mm longis; styli 2 mm longi; appendices stylorum usque ad 4 mm. tenuiter filiformes. Achaenia prismatica 5 – costata circa 1.2 mm longa leviter setifera; setae pappi 34-36 scabridae.

Etimología. El epíteto específico alude a la localidad donde fue recolectada la colección típica.

Arbusto de 1.2 m de altura. **Ramas** cilíndricas, canaliculadas, cubiertas de indumento piloso, pelos articulados largos. **Hojas** opuestas, pecioladas, pecíolos de 4.5-13 cm de largo, planos, larga y densamente pilosos, pelos articulados con septos purpúreos; lámina membranacea, tenuemente discolora, ovada o anchamente-ovada, de 9-32 x 7.5-24.6 cm, aguda en el ápice, base obtusa o redondeada, margen irregularmente aserrada, dientes de 2-7 x 0.5-2.5 mm, ligeramente revoluta; haz opaca y cubierta por indumento piloso que se torna más denso sobre la venación, envés cubierto por escamas blanquecinas e indumento piloso que se torna más denso en la venación; venación pinnada, con 6-7 nervios por lado, los cuales divergen en ángulo de 35°-65°, prominulos por la haz y prominentes por el envés. **Sinflorescencias** de hasta 32 cm de largo, axilares, con capítulos en umbelas compuestas, cubiertas de indumento piloso largo y denso, con pelos articulados; ramas florales inferiores de 26.5-32 cm de largo, con porción terminal fértil de 8-12 cm de largo y 40-130 capítulos; porción vegetativa de 18.5-21.5 cm de largo, ebracteada. **Capítulos** de 4.5-4.8 x 3.7 mm, pedicelados, pedicelos de 0.1-0.8 cm de largo, cubiertos por indumento piloso de pelos pluricelulares, y con brácteas angostamente-ovadas o lineales de hasta 1.5 mm de largo, a veces ebracteados. **Involucro** angostamente acampanado, 4.1-4.2 x 3.7 mm; filarias 31-36 por capítulo, dispuestas en 7 series, subimbricadas y

gradualmente mayores hacia el interior; filarias externas de 0.7-1.5 x 0.4-0.8 mm, ovadas; filarias intermedias de 1.8-3 x 0.8-1 mm, ovadas o angosto ovadas; filarias internas de 3.4-4 x 0.7-0.9 mm, angosto ovadas o angosto elípticas; todas las filarias con ápice agudo, margen ciliada, a veces escariosa, dorsalmente glabras o escasamente pilosas, ventralmente glabras y 1-3 nervios longitudinales. **Receptáculo** de ca. 0.9 mm de ancho, ligeramente convexo y piloso. **Flósculos** hermafroditas, fértiles, 28-31 por capítulo, corola blanca, angosto infundibuliforme, de 2.6-2.8 mm de largo; porción tubular de 1 mm de largo; limbo externamente glabro, internamente con tricomas pluricelulares en la parte media; lóbulos de 0.3-0.5 x 0.3 mm, triangulares, con ápice agudo, largo pilosos y algunas veces con glándulas en la cara exterior. **Anteras** de 1-1.1 mm de largo, apéndice apical de 0.2 x 0.1 mm, ovado; conectivo de 0.3 mm de largo; porción libre de los filamentos de 0.5-0.6 mm de largo. **Pistilo** de 6 mm de largo, estilo de 2 mm de largo, ramas estigmáticas de 4 mm de largo, filiformes. **Aquenios** de 1.2 x 0.3 mm, prismáticos, con 5 costillas, espacios intercostales glabros, costillas con escasas setas hacia la mitad superior; papo de 2.5-2.6 mm de largo, con 34-36 cerdas escábridas.

Afinidad: *Hebeclinium marianum* es afín a *H. wurdackianum* H. Rob., especie conocida sólo por la colección típica, la cual proviene del municipio de Frontino, Antioquia. Difiere de ella por presentar lámina foliar mayor (hasta dos veces más larga y casi el doble de ancha (32 x 24.5 cm vs. 17 x 13 cm), ápice agudo (vs. acuminado), base obtusa o redondeada (vs. subcordada o anchamente redondeada), pecíolos mayores (hasta de 13 cm vs. hasta 4 cm de largo) y capítulos con menor número de filarias (31-36 vs. ca. 50).

Aunque su mayor afinidad es con *Hebeclinium wurdackianum*, a primera vista *H. marianum* recuerda a *H. macrophyllum* (L.) DC., especie ampliamente distribuida en Colombia y de la que difiere por presentar hojas mayores y con margen irregularmente aserrada (vs. crenada), ápice agudo (vs. acuminado), base obtusa o redondeada (vs. ancho cordada y corto atenuada), eglandular por el envés (vs. con glándulas refringentes), sinflorescencias con capítulos en umbelas compuestas (vs. capítulos en panículas densas), capítulos con 28-31 flósculos (vs. 50-75 flósculos), corolas internamente pilosas (vs. internamente glabras).

Comentarios. A.P. De Candolle (1836) propuso el género *Hebeclinium*, que inicialmente incluía dos especies que compartían la característica de tener el receptáculo redondeado y pubescente. Baker (1876) lo redujo al rango de sección dentro del género *Eupatorium*, sección que con el paso de los años fue agrupando a aquellas especies que presentaban pelos o páleas en el receptáculo de los capítulos. Este concepto,

un tanto artificial, fue reconsiderado por **King & Robinson** (1971) quienes reestablecieron la entidad debidamente delimitada dentro de la subtribu Hebecliniinae, fijando el número de especies en once. Con base en material recolectado en Colombia, **King & Robinson** (1969, 1974, 1977) hicieron una primera revisión y dieron a conocer nuevas especies. En una nueva revisión de las especies colombianas, **Díaz-Piedrahita & Méndez** (2000) describieron tres más, quedando entonces quince especies para la flora colombiana. Con posterioridad, **Díaz-Piedrahita & Rodríguez-Cabeza** (2011) describieron a *H. squamosum*. De acuerdo con lo anterior e incluida la aquí descrita el número de especies colombianas queda en 17 que son las que incluye la clave que se presenta a continuación, basada en la clave publicada por **Díaz-P. & Méndez** (2000) y modificada para incluir las dos especies descritas con posterioridad.

Clave para las especies colombianas de *Hebeclinium* DC.

1. Corolas provistas de pelos largos y pluricelulares en la parte interior de la garganta.....2
- 1'. Corolas carentes de pelos en su interior.....7
2. Tallos y hojas cubiertos de pubescencia blanca (pelos densos, largos y sedosos), flósculos 50-70 por capítulo.....*H. sericeum*
- 2'. Tallos y hojas con pubescencia corta, dispersa y de color castaño pálido, flósculos 20-30 por capítulo.....3
3. Flósculos ca. 30 por capítulo.....4
- 3'. Flósculos ca. 20 por capítulo.....5
4. Capítulos con ca. 50 filarias. Hojas con peciolo ≤ 4 cm de largo y lámina $\leq 17 \times 13$ cm, con ápice acuminado, y base subcordada o anchamente redondeada,.....*H. wurdackianum*
- 4'. Capítulos con 31-36 filarias. Hojas con peciolo hasta de 13 cm de largo y lámina de hasta 32×24.6 cm, con ápice agudo, y base obtusa o redondeada.....*H. marianum*
5. Lámina foliar con margen crenada y venación pinnada con cerca de 10 nervios por lado.*H. guevarae*
- 5'. Lámina foliar con margen aserrada o dentada y venación triplinerve o trinerve.....6
6. Lámina foliar con margen aserrada, venación trinerve y en el envés cubierta por indumento piloso. Filarias 30-35 por capítulo.....*H. killipi*
- 6'. Lámina foliar con margen dentada, venación triplinerve con dos pares de nervios menores hacia abajo, y en el envés cubierta por indumento escamoso. Filarias 52-54 por capítulo.....*H. squamosum*
7. Hojas lanceoladas o angosto-ovadas.....8
- 7'. Hojas anchamente ovadas o cordadas.....9
8. Lámina foliar en el envés cubierta por indumento pubérulo. Receptáculo del capítulo glabro.....*H. lellingeri*
- 8'. Lámina foliar en el envés densamente pubescente. Receptáculo del capítulo piloso.....*H. phoenicticum*
9. Lámina foliar con margen anchamente crenado-dentada.....10
- 9'. Lámina foliar con margen aserrada.....11
- 10'. Filarias internas obtusas o redondeadas en el ápice y con tres o cuatro nervios longitudinales. Flósculos ca. 20 por capítulo.....*H. erioclinum*
- 10'. Filarias internas agudas en el ápice y con dos nervios longitudinales. Flósculos 50-80 por capítulo.....*H. macrophyllum*
11. Flósculos blancos o verde pálidos.....12
- 11'. Flósculos lila o purpurinos.....13
12. Ramas cilíndricas cubiertas por indumento pubérulo. Lámina foliar anchamente-ovada y con base cordada a truncada.....*H. frontinoense*
- 12'. Ramas levemente tetrágonas cubiertas por indumento sórdido lanoso. Lámina foliar elíptica y con base redondeada a cuneada.....*H. gentryi*
13. Ramas aristadas o cuadrangulares.....14
- 13'. Ramas cilíndricas o subcilíndricas.....15
14. Plantas herbáceas con ramas apenas aristadas. Lámina foliar glabra y con base redondeada a cuneada.....*H. flabellatum*
- 14'. Plantas arbustivas con ramas cuadrangulares. Lámina foliar pubescente y con base cordada.....*H. tetragonum*
15. Lámina foliar anchamente-ovada.....*H. torondoyense*
- 15'. Lámina foliar ovada.....16
16. Lámina foliar con ápice sutilmente agudo, margen hacia la base entera, el resto gruesa y sutilmente aserrada, envés sin puntos glandulosos.....*H. escobarieae*

16'. Lámina foliar con con ápice largamente cuspidado, margen regularmente dentada, dientes triangulares, envés con puntos glandulosos..... *H. longicuspidatum*

4.4 *Neomirandea pedrazorum* S. Díaz & Rodr.- Cabeza, sp. nov. Fig. 7

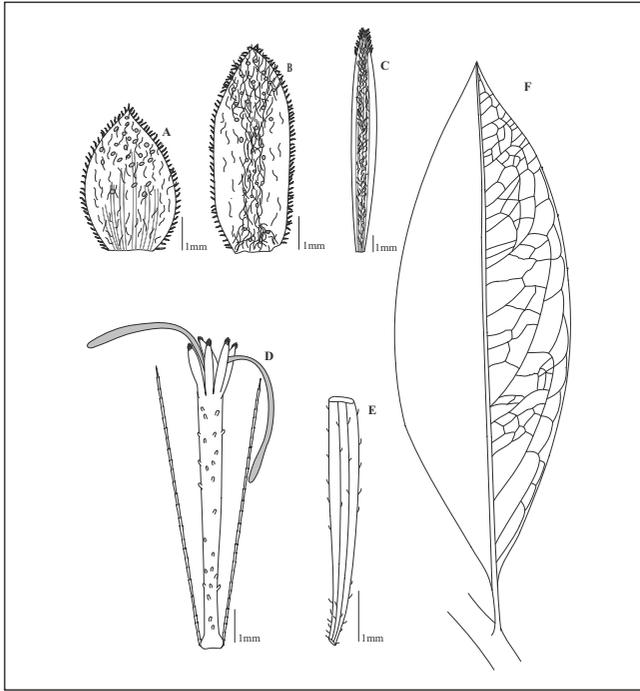


Figura 7. *Neomirandea pedrazorum* A. Filaria externa vista por el envés; B. Filaria intermedia vista por el envés; C. Filaria interna vista por el envés; D. Flósculo; E. Aquenio; F. Hoja. Diseño digital de Betsy Viviana Rodríguez-Cabeza, elaborado con base en el ejemplar tipo (*P. Pedraza & C. Pedraza 1118*, COL).

TYPUS: COLOMBIA. **Valle:** Corregimiento El Boquerón, vereda El Brillante, camino al Cerro del Inglés (Corporación Serraniagua), Serranía de Los Paraguas, borde de camino en un bosque andino secundario, 4°45'45.5" N, 76°16'24.2" W, 2100 m, 22 jul 2004, fl, fr, *P. Pedraza, & C. Pedraza 1118*. "Arbusto terrestre de 2.5 m de alto. Tallos, hojas, pedicelos e involucre verde vinotinto. Flósculos blancos; ramas estigmáticas vinotinto oscuro, pappus pajizo" (Holotypus COL [517544]; isotypi COL [517543], NY).

Suffrutices erecti usque ad 2.50 m alta. Caules teretes canaliculati sparse pilosi, pilis ad basim incrasati. Folia opposita breviter petiolata, petiolis usque ad 1 cm longis pilosis; laminae anguste ellipticae 6-11 mm longae et 1.9-3.4 cm latae coriacea basi longe acutae margine denticulatae (3-5 dentibus in utroque latere inter se 5-17 mm distantibus) revolutae

apice acuminatae, supra nitidae glabrae, costis pilosis, subtus nerviis secundaris 7-9 prominentibus pinnatis angulo 30°-65° divergentibus circa marginem arcuatis anastomasantibus pilosis. Inflorescentiae terminales ramosae thyrsoidae usque ad 19 cm longae 18-44 capitulis instructae, ramis dense pilosis (pilis articulatis subrectis) aphyllis rare unus paribus foliis decusatis munitis. Capitula magna circa 16 mm alta campanulata circa 14 mm alta, pedicellis usque ad 2.5 mm longis pilosis. Squamae involucri 26-27 fortiter subimbricatae 6-seriatae gradatim maiores exteriores 3-3.5 mm longae et 2.1-2.3 mm latae ovatae, intermediae 7-7.5 mm longae et 2 -2.5 mm latae ellipticae vel anguste ovatae interiores 12.5-13 mm longae et 1.7-1.9 mm latae lineari - vel anguste-ellipticae omnes leviter 3-7 costatae ad apicem acutae extus sparsim pilosae ciliatae; receptacula leviter convexa, dense pilosa. Flores 21-25 in capitulo; corollae circa 9.5 mm longae albae anguste infundibulares 5-lobatae, intus in dimidia parte longe pilosae, extus sparce pilosae, lobis profunde incisis triangularibus ad apicem acutis et glanduliferis 1.5-1.7 mm longis 0.4-0.5 mm latis in utroque latere glabris; filamentum in parte superiore circa 1.2 mm longo; thecae antherarum 1.6-2.5 mm longae appendicibus anguste ovatis circa 0.7 mm longis et 0.5 mm latis; styli inferne nodulosi hirsuti (pilis mamilliformibus brevibus) appendices styliorum usque ad 5.8 mm tenuiter filiformes ad apicem incrassatae. Achaeia prismatica 4.8-5 mm longa 5-7 costata, in costis setifera; setae pappi circa 50 scabrae uniseriatae 8.8-9 mm longae.

Etimología. Especie dedicada a los biólogos Paola y Carlos A. Pedraza, recolectores de la colección típica.

Arbustos de ca. 2.5 m de altura. **Ramas** cilíndricas, cubiertas por indumento largo piloso, con tricomas engrosados en la base. **Hojas** opuestas, pecioladas, peciolo de 0.5-1 cm de largo, planos y pilosos; lámina angosto-elíptica, de 6-11 x 1.9-3.4 cm, coriácea, acuminada en el ápice largamente aguda en la base, margen denticulada con 3-5 dientes por lado, separados entre sí por 5-17 mm, revoluta; haz nítida y con indumento piloso sobre la vena principal, envés piloso sobre las venas; venación pinnada con 7-9 nervios por lado que se anastomosan hacia la margen formando una vena colectora y que divergen en ángulo de 30°-65°, prominulos por la haz, prominentes por el envés. **Sinflorescencias** de 11-19 cm de largo, terminales, con capítulos en tirsos corimbiformes de 18-44 capítulos, cubiertas de indumento piloso largo y denso con tricomas articulados; ramas inferiores de 5.5-14.5 mm de largo, con porción terminal fértil de 3.5-9 cm de largo y 3-13 capítulos, porción vegetativa de 5-7 cm de largo, ebracteada o con un par de brácteas similares a las hojas. **Capítulo** de 16-16.5 x 8 mm, pedicelados, pedicelos de 1-2.5 cm de largo, cubiertos por indumento piloso largo, ebracteados o con una bráctea lineal de hasta 3 mm de largo. **Involucre**

acampanado de 13.5-14 mm de alto; filarias 26-27 por capítulo, dispuestas en 6 series, fuertemente subimbricadas y gradualmente mayores hacia el interior; filarias exteriores de 3-3.5 x 2.1-2.3 mm, ovadas; filarias intermedias de 7-7.5 x 2-2.5 mm, angosto-elípticas o angosto-ovadas; filarias internas de 12.5-13 x 1.7-1.9 mm, lineales o angosto-elípticas; todas las filarias con ápice agudo, margen ciliada, dorsalmente cubiertas de indumento piloso, ventralmente glabras y con 3-7 nervios longitudinales tenuemente visibles. **Receptáculo** de 2-2.2 mm de ancho, convexo y densamente piloso, pelos articulados. **Flósculos** hermafroditas, fértiles, 21-23 por capítulo, corola blanca, de 9.3-9.8 mm de largo, tubulares, externamente con tricomas pluricelulares dispersos, internamente con tricomas largos y pluricelulares en la parte media; porción tubular indiferenciada de 4.5-4.8 mm de largo; lóbulos profundamente hendidos de 1.5-1.7 x 0.4-0.5 mm, triangulares, con ápice agudo, externamente glabros y papilosos en el ápice. **Anteras** de 1.6-2.5 mm de largo, apéndice apical de 0.6-0.7 x 0.1-0.2 mm, angosto-ovado; conectivo de 0.6-0.7 mm de largo; porción libre de los filamentos de 1-1.2 mm de largo. **Pistilo** de 13.3-13.7 mm de largo, estilo de 7.5-8.5 mm de largo, con base engrosada y mamilosa, ramas estigmáticas de 5.2-5.8 mm de largo ligeramente engrosadas hacia el ápice. **Aquénios** de 4.8-5 x 0.5-0.7 mm, prismáticos, con 5-7 costillas, costillas pilosas; papo de 8.8-9 mm de largo, con 52-54 cerdas escábridas.

Afinidad. *Neomirandea pedrazorum* es afín a *N. araliaefolia* R.M. King & H. Rob., especie que se distribuye desde México hasta Colombia. Difiere de ésta por presentar sinflorescencias laxas con pedicelos de hasta de 2.5 cm de largo (vs. sinflorescencias densas con pedicelos de hasta 0.5 cm de largo), capítulos mayores (16-16.5 x 8 mm vs. 10 x 6 mm), involucro más largo (13.5-14 mm vs. 8.5 mm), filarias mayores (3-13 x 1.7-2.5 mm vs. 1.5-7.2 x 1.1-1.8 mm), flósculos tubulares externamente con pelos dispersos (vs. infundibuliformes externamente glabros), flósculos más largos (9.3-9.8 mm vs. 6.5 mm), porción tubular no diferenciada de hasta 4.8 mm de largo (vs. diferenciada de hasta 4 mm de largo), base del estilo engrosada y con mamilas (vs. base de estilo engrosada con células lisas).

Comentarios. El género *Neomirandea* fue propuesto por **King & H. Robinson** (1970). Con posterioridad los mismos autores (1987) fijaron el número de especies en 27. El área que ocupa corresponde a selvas húmedas que van desde México hasta Ecuador con mayor densidad en Costa Rica y Panamá, donde se concentra el mayor número de especies. Teniendo en cuenta la que se describe en el presente trabajo y la publicada previamente por **Díaz-Piedrahita** (1989), el género incluye 29 especies, de las cuales siete se encuentran en Colombia. A continuación se presenta una clave para las especies colombianas.

Clave para las especies colombianas de *Neomirandea* R.M. King & H. Rob.

1. Corola internamente con tricomas pluricelulares.....2
- 1'. Corola internamente sin tricomas.....4
2. Lámina foliar con margen denticulada, carente de puntos glandulares por ambas caras.....*N. pedrazorum*
- 2'. Lámina foliar con margen entera, con puntos glandulares por el envés.....3
3. Capítulos con ca. 9 flósculos. Hojas con peciolo < 1 cm de largo y lámina carnosa, con venación secundaria inconspicua, ápice acuminado.....*N. eximia*
- 3'. Capítulos con 23-28 flósculos. Hojas con peciolo de 3 cm o más de largo y lámina cartácea o coriácea, con venación secundaria evidente, ápice obtuso.....*N. araliifolia*
4. Lámina foliar anchamente-ovada o deltoidea, con margen dentada o aserrada..... 5
- 4'. Lámina foliar elíptica, oblonga u ovada, con margen entera.....6
5. Hojas con peciolo hasta de 6 cm de largo y lámina glabra por la haz, con base cuneada o redondeada. Flósculos ca. 5 mm de largo y lóbulos dos veces más largos que anchos...
.....*N. homogama*
- 5'. Hojas con peciolo hasta de 11 cm de largo y lámina con pelos amarillentos deciduos sobre la venación por la haz, con base cordada, truncada en las juveniles. Flósculos ca. 10 mm de largo y lóbulos tres veces más largos que anchos.....
....*N. cuatrecasana*
6. Lámina foliar con base obtusa. Flósculos externamente pilosos.....*N. allenii*
- 6'. Lámina foliar con base cuneada. Flósculos externamente glabros.....*N. sciaphila*

Agradecimientos. Expresamos nuestro agradecimiento al Herbario Nacional Colombiano por facilitar la revisión de sus colecciones y el apoyo brindado. A José Aguilar Cano y Cesar Marín (Herbario de la Universidad Industrial de Santander-UIS) por facilitar la revisión de los especímenes de Asteraceae colectados en el marco del Proyecto Yare II financiado por Conservation Leadership Programme (CLP). Al padre Pedro Ortiz Valdivieso S.J. (q.e.p.d.) por la revisión de las descripciones latinas. Al profesor John Lynch (Universidad Nacional de Colombia) por la revisión del resumen en inglés. A la Dirección de Investigación de la Universidad

Nacional de Colombia sede Bogotá –DIB- por el apoyo financiero concedido al proyecto de tesis “El género *Chromolaena* (Eupatorieae: Asteraceae) en Colombia: Revisión taxonómica y evaluación de su estatus generico” mediante la convocatoria “Apoyo de la DIB a tesis de investigación en posgrado”, con código de proyecto 13003.

Bibliografía citada

- Baker, J.G.** 1876. Compositae II. Eupatorieae in Martius. C. Flora Brasiliensis 6 (2): 181-375. Pl. 51-102.
- Bremer, K.** 1994. Asteraceae. Cladistics & Classification. Timber Press. Portland, Oregon.
- De Candolle, A.P.** 1836. Eupatorieae. Prodr. 5: 1-3-211.
- Díaz-Piedrahita, S.** 1989. Aportes a la flora de Colombia. Estudios en Compuestas VII. Pérez-Arbelaez 2 (8): 413-416.
- Díaz-Piedrahita, S. & G. Méndez-R.** 2000. El género *Hebeclinium* (Asteraceae, Eupatorieae) en Colombia. Rev. Acad. Colomb. Cienc. 24 (90): 25-44.
- Díaz-Piedrahita, S. & B.V. Rodríguez-Cabeza.** 2011. Novedades en Asteráceas Colombianas-I. Rev. Acad. Colomb. Cienc. 36 (137): 411 – 434.
- Gutiérrez, D.G.** 2004. Revisión sistemática y análisis cladístico del género *Liabum* Adans (Asteraceae, Liabeae). Tesis de doctorado para optar al título de Doctor en Ciencias Naturales. Facultad de Ciencias Naturales y Museo. Universidad Nacional de La Plata. Argentina.
- King, R.M. & H. Robinson.** 1969. Studies in the Compositae Eupatorieae, IX A review of the genus *Eupatorium* section *Hebeclinium* in Colombia. Sida 3(5):321 – 326.
- King, R.M. & H. Robinson.** 1970. Studies in the Eupatorieae (Asteraceae). XXI. A new genus, *Neomirandea*. Phytologia 19: 305 – 306.
- King, R.M. & H. Robinson.** 1971. Studies in the Eupatorieae (Asteraceae). XXXVII. The genus *Hebeclinium*. Phytologia 21(5): 298 – 301.
- King, R.M. & H. Robinson.** 1974. Studies in the Eupatorieae (Asteraceae). CXVIII. New species of *Ageratum*, *Fleischmannia* and *Hebeclinium* from Northern South America. Phytologia 27(6): 387 – 394.
- King, R.M. & H. Robinson.** 1975. Studies in the Eupatorieae (Asteraceae). CXLII. A new genus, *Badilloa*. Phytologia 30(3): 229-234.
- King, R.M. & H. Robinson.** 1977. Studies in the Eupatorieae (Asteraceae). *Guayana davidsei* and *Hebeclinium gentryi*, new species from Northern South America (Eupatorieae, Asteraceae). Ann. Missouri Bot. Gard. 64: 366-370.
- King, R.M. & H. Robinson.** 1987. The genera of the Eupatorieae (Asteraceae). Monographs of Systematic Botany. Missouri Botanical Garden. 22: 1 – 581.
- Robinson, H.** 1999. Generic and subtribal classification of American Veronieae. Smithsonian Contributions to Botany 89: 1-116.
- Smith, G.L. & N.C. Coile.** 2007. *Piptocarpha* (Compositae: Vernonieae). Flora Neotropica Monograph, vol 99, The New York Botanical Garden Press. 96 pp.

BOTÁNICA

SALVIA GUACANA, UNA NUEVA LABIATAE DE COLOMBIA CON FLORES RESUPINADAS Y SINOPSIS DE *SALVIA* SECT. *TUBIFLORAE*

José Luis Fernández Alonso*

RESUMEN

Fernández Alonso J.L.: *Salvia guacana*, una nueva Labiatae de Colombia con flores resupinadas y sinopsis de *Salvia* sect. *Tubiflorae*. Rev. Acad. Colomb. Cienc. **36** (141): 349-362, 2012. ISSN 0370-3908.

Se describe e ilustra una especie nueva de *Salvia* de la Cordillera Oriental de Colombia que tiene flores resupinadas, un raro atributo en este género. Se discute la circunscripción y composición de *Salvia* sección *Tubiflorae* a la cual se adscribe la nueva especie. Se propone la inclusión de la pequeña sección *Killipiana* (con dos especies de Colombia) dentro de la sección *Tubiflorae*. Se presenta una breve sinopsis de la sección *Tubiflorae* ampliada, que agrupa a 18 taxones (15 especies y tres subespecies) distribuidos desde México hasta Brasil (incluidas Las Antillas).

Palabras clave. Colombia, Labiatae, Neotrópico, *Salvia* sect. *Killipiana*, *Salvia* sect. *Tubiflorae*, *Salvia* subgen. *Calosphace*, taxonomía.

ABSTRACT

A new species of *Salvia* with resupinate flowers (a rare attribute in this genus) from the Eastern Cordillera of Colombia is described and illustrated. The circumscription and composition of *Salvia* section *Tubiflorae*, to which the new species belongs to, are discussed. It is proposed that the small section *Killipiana* (two species of Colombia) be included in section *Tubiflorae*. A synopsis of the expanded section *Tubiflorae*, which comprises 18 taxa (15 species and three subspecies) tath range from Mexico to Brazil (including The West Indies) is presented.

Key Words. Colombia, Labiatae, Neotropics, *Salvia* sect. *Killipiana*, *Salvia* sect. *Tubiflorae*, *Salvia* subg. *Calosphace*, taxonomy.

Introducción

El género cosmopolita *Salvia* L. con unas 1000 especies es el más extenso de la familia Labiatae. De los cuatro subgéneros tradicionalmente reconocidos en *Salvia* (**Bentham**,

1876), el más extenso es el subgénero *Calosphace* Benth. con unas 540 especies casi exclusivamente neotropicales (**Epling**, 1939; **Harley & al.**, 2004; **Fernández-Alonso**, datos no publ.). El subgénero *Calosphace* constituye un grupo natural, que de acuerdo con algunos análisis filogenéticos

* Real Jardín Botánico-CSIC, Consejo Superior de Investigaciones Científicas, Plaza de Murillo 2, 28014 Madrid, España, jlfernandeza@rjb.csic.es

podiera justificar su tratamiento como género independiente *Calosphace* (Benth.) Rafin. (Walker & al., 2004; Walker & Systma, 2007), un aspecto no considerado aquí ya que no afecta los objetivos del presente trabajo. En Colombia el género *Salvia* está representado por al menos 88 taxones de hierbas y arbustos, siendo también el género más diverso de las labiadas colombianas (Fernández-Alonso, 1995; Fernández-Alonso & al., 2003; Fernández-Alonso & Rivera-Díaz, 2006; Fernández-Alonso, 2012).

En la última década se adelantaron algunos trabajos en *Salvia* de Colombia, que trataron diversas novedades taxonómicas y corológicas, así como algunos casos de hibridación natural, principalmente en las secciones *Flexuosae* (Epling) Epling, *Longipes* Epling, *Rubescentes* (Epling) Epling y *Secundae* (Epling) Epling (Fernández-Alonso, 1991, 1995, 2008a). Más recientemente se dieron a conocer también para Colombia otras novedades de diversa índole en las secciones *Angulatae* (Epling) Epling, *Macrostachyae* (Epling) Epling, *Purpureae* (Epling) Epling, *Siphonantha* (Epling) Epling, *Tubiflorae* (Epling) Epling y *Tomentellae* (Epling) Epling y se comentaron también algunas consideraciones fitogeográficas de estos grupos (Fernández-Alonso 2002, 2003a, 2003b, 2006, 2008b).

Colecciones recientes adelantadas en algunos sectores poco explorados de la cuenca media del río Chicamocha, conocida como el Cañón del Chicamocha y enmarcadas en proyectos de taxonomía, conservación y bioprospección de Labiatae, permitieron localizar algunos taxones no descritos de esta familia que están siendo objeto de estudio en la actualidad. De la misma región de donde recientemente publicamos una especie arbustiva nueva del género *Hyptis* (Fernández-Alonso, 2010) damos a conocer a continuación una distintiva especie nueva de *Salvia* asignable a la sección *Tubiflorae*, que presenta inflorescencias péndulas con flores resupinadas. Este fenómeno que es frecuente en la familia orchidaceae (Dressler, 1981), representa una adaptación morfológica excepcional en *Salvia*, conocida en muy pocas especies, como es el caso de la especie mejicana *S. gravida* Epling (Wester & al., 2007).

Métodos y materiales

Para el presente estudio se contó con las recolecciones efectuadas en diferentes regiones de Colombia (departamentos de Boyacá, Cundinamarca, Santander y Nariño), principalmente en la cuencas del río Bogotá (Cundinamarca), del alto río Chicamocha (Boyacá-Santander) y del río Guaitara (Nariño). Se efectuaron diversas expediciones entre 1996 y 2009, enmarcadas en varios proyectos de prospección de lectinas y aceites esenciales adelantados en la Universidad Nacional

de Colombia (Fernández-Alonso & al., 2009; Fernández-Alonso & Chacón, 2012). Más recientemente se adelantó el seguimiento en cultivo de algunas de éstas especies en Bogotá, con el apoyo del proyecto vigente “Estudios en plantas vasculares neotropicales (*Geranium* y *Salvia*)” con el Consejo Superior de Investigaciones Científicas (CSIC) y el Ministerio de Ciencia e Innovación de España. Todas las muestras recolectadas cuentan con pliego depositado en el Herbario Nacional Colombiano (COL) y muchas de ellas con duplicado en los herbarios FMB, HUA, MA y UIS (acrónimos de acuerdo con Holmgren & al., 1990). Para el presente trabajo se contó con las muestras depositadas en los herbarios COL y MA y en los diferentes herbarios colombianos visitados. También se efectuaron visitas o se obtuvo material de préstamo o de obsequio para identificación de los herbarios AAU, MEXU, MO y UB.

Resultados y discusión

Salvia guacana Fern. Alonso, *sp. nov.* Figuras 1-2

Affinis *Salvia falcata* J.R.I. Wood & Harley a qua imprimis differt recens terminalis, pendulis multifloris (15-30 flores plusve), flores resupinatas, calyce longiore (13-15 mm) et corolla purpureo-vinacea, tubo manifeste ventricosos.

Tipo: COLOMBIA. **Santander.** Vía Los Curos – Málaga, municipio de Guaca, taludes y borde de bosque junto al camino, 6° 57' N, 72° 54' W, 2001 m, 27 jun 2009. Arbusto escandente con inflorescencias colgantes, fl, fr, *J. L. Fernández-Alonso & C.N. Díaz-Perez 28136* (Holotypus COL; isotypus COL,K, MA,MO,UIS,US).

Descripción. **Arbustos** de 2-4 m, con ramas colgantes y escandentes; tallos delgados, muy largos, con entrenudos cortos, glabrescentes. **Hojas** con peciolo de (3-)4-11 mm, flexuosos, con pubescencia tenue y dispersa; láminas verde oscuro y nítidas por la haz, verde pálido por el envés, elípticas o elíptico-lanceoladas, a veces elíptico-truladas, más o menos falcadas; base cuneada o atenuada en peciolo, plegado-acanalada en la zona donde inicia el peciolo, ápice acuminado o acuminado-caudado, superficie gruesa y ligeramente bullada; venación broquidódroma, excavada por la haz y resaltada por el envés, venas secundarias en posición erecto-patente con respecto a la vena media y con largo recorrido, venación terciaria paralela o poligonal, venación de cuarto orden reticulada, solo manifiesta en el envés; envés con pelos cortos en el nervio medio y pubescencia tenue en las láminas jóvenes. **Inflorescencia** terminal, péndula, 10-15(-40) cm, con 7-12(-20) verticilastros, con 4-6 flores por verticilastro; eje glabrescente con pelos cortos recurvados; brácteas prontamente caducas, de oval-lanceoladas a linear-

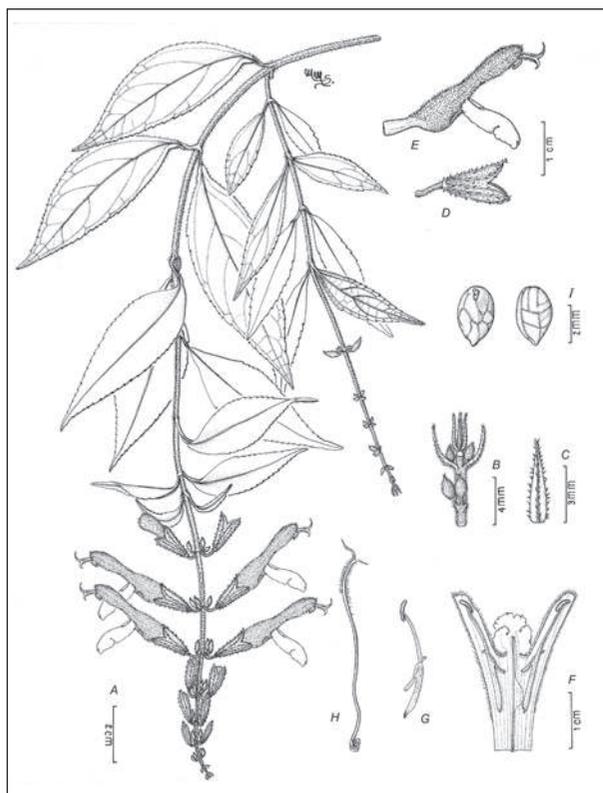


Figura 1. *Salvia guacana*. **A-** Hábito, posición natural de una rama con inflorescencias terminales. **B-** Detalle de la zona distal de la inflorescencia con brácteas y botones florales. **C-** Bráctea floral en vista dorsal. **D-** Cáliz y pedicelo. **E-** Vista lateral de la corola, mostrando una antera y la parte terminal del estilo. **F-** Tubo de la corola disectado y extendido por su zona dorsal, mostrando la posición de filamentos, conectivos y anteras. **G-** Filamento, conectivo mostrando el diente retrorso y antera. **H-** Ginobase, núculas inmaduras y estilo con las dos ramas estigmáticas. **I-** Núculas maduras en vista ventral mostrando la cicatriz hilar (izquierda) y vista dorsal (derecha). Dibujado a partir de la colección *Albesiano 2024* (COL).

lanceoladas, de 5-7 mm de longitud, con ápice caudado, con nervio medio resaltado y cortamente piloso, margen ciliado. **Pedicelos** florales de 3-6 mm de longitud (hasta de 8 mm en la fructificación), arqueado-ascendentes y resupinados, con pelos cortos, rígidos de 0.5 mm. **Flor** de c. 40 mm de longitud; **cáliz** generalmente verde pálido, a veces con tinte vinoso-magenta, de 13-15 mm de longitud, externamente pubescente, pelos cortos, rígidos, similares a los del pedicelo, a veces negruzcos, resaltando con la superficie pálida de cáliz; labios subiguales, de 4-6 mm de longitud (algo mayores, mas comprimidos lateralmente y separado-divergentes en la fructificación), con dientes de 1(2) mm de longitud, en forma de gancho; labio superior con tres venas; **corola** purpureo-vinácea o a veces color fucsia, brillante, de 31-35 mm de lon-



Figura 2. *Salvia guacana*. **A-** Inflorescencia péndula, en su ambiente natural, los taludes herbosos de Guaca, Santander-Colombia. **B-** Detalle de los verticilastros de la inflorescencia con las flores resupinadas. **C-** Corola en vista lateral sobre una hoja de la planta, bullado-reticulada por la haz. **D-** Detalle de un corte sagital de la corola, mostrando el filamento (inserto en al corola), el estilo (separado) y un conectivo con antera y diente. **E-** Corte sagital de la corola, mostrando el filamento (inserto en la corola), el estilo y el conectivo con antera en su posición natural. (A-C, *Fernández-Alonso & al. 28113*; D-F, de la serie típica *Fernández-Alonso & al. 28136*).

gitud (ligeramente más corta en seco), externamente villosa con pelos fucsia (Figs. 1e, 2c); tubo largo, (20-)22-24 mm de longitud, recto o levemente sigmoide-ascendente, brusca-mente ensanchado y ventricoso por encima de la zona media, adelgazándose en el tercio distal, sin papilas o invaginaciones en su interior; labio superior galeado, recto con respecto al tubo, ligeramente más largo que el inferior, de 11-14(-16) mm, estrecho, con indumento conspicuo de pelos largos, moniliformes, de 1-2 mm; labio inferior con brillo céreo y aspecto craso, semi-patente, de (8-)9-12(-13) mm, trilobado, de margen más o menos redondeado; lóbulos laterales más cortos, de c. 5 mm de longitud, lóbulo central más largo y dividido; **estambres** incluidos en la gálea o muy ligeramente exertos (más notorio, en la flor seca); filamentos insertos en

el tercio superior del tubo corolino, a unos 3 mm de la boca del tubo, de 6-7 mm de longitud, glabros; conectivo de 15-16 mm de longitud, arqueado convexo, glabro; porción inferior de conectivo de 10 mm de longitud, parcialmente concrecente con el conectivo del estambre contiguo, con diente agudo ubicado a 8 mm del extremo, cerca de la zona de inserción al filamento; anteras arqueado-convexas, estrechas, de 2,5-3,5 mm de longitud y c. 0,4 mm de grosor. **Ginobase** con proyección nectarífera lateral, erecta, que sobrepasa en longitud a las núculas en la antesis. **Estilo** blanco-rosado, de 34-37 mm de longitud, piloso en el tercio distal, con pelos septados, con rama superior más larga, de 4-5 mm, aguda y fuertemente curvado-ascendente y rama inferior recta, descendente, de c. 2 mm. **Núculas** brillantes, marrón-grisáceas, con líneas anastomosadas, difusas, más oscuras y numerosas manchas marrones muy finas, de contorno ovoide-trígono, ligeramente apiculadas, de 3-3,5 mm de longitud x 2-2,2 mm de anchura.

Etimología: El nombre de la especie hace referencia a la localidad típica, el Cañón del río Guaca, tributario del Chicamocha, en el departamento de Santander, Cordillera Oriental de Colombia.

Hábitat, distribución y conservación.

Especie endémica de un pequeño sector de la cuenca del Chicamocha (departamento de Santander), valle interandino ubicado en el flanco occidental de la Cordillera Oriental de Colombia. Se ha localizado en la franja de bosques subandinos de roble (*Quercus humboldtii* Bonpl.), entre los 1900-2200 m, donde crece en pendientes, junto con *Escallonia paniculata* (Ruiz & Pav.) Roem. & Schult., *Pachira pulchra* Planch. & Linden ex Triana & Planch., *Lippia hirsuta* L. f., *Lepechinia bullata* (Kunth) Epling, *Salvia carnea* Kunth y diversas especies de Alstroemeriaceae (*Bomarea* Mirb.), Asteraceae (*Alloispermum* Willd., *Ageratina* Spach., *Baccharis* L., *Chromolaena* DC., *Elaphandra* Strother, *Oyedaea* DC., *Stevia* Cav.), Clusiaceae (*Clusia* L., *Vismia* Vand.), Fabaceae (*Erythrina* L.), Gesneriaceae (*Corytoplectus* Oerst.); Labiatae (*Hyptis* Jacq.), Myrsinaceae (*Myrsine* L.), Oxalidaceae (*Biophytum* DC.), Polygalaceae (*Polygala* L.) y Verbenaceae (*Lantana* L., *Lippia* L.).

Considerando el limitado rango de distribución conocida y los criterios actuales de categorización en lo que se refiere áreas de extensión de presencia y de ocupación (IUCN, 2003; **Fernández-Alonso & Rivera-Díaz**, 2006), consideramos en la actualidad a esta especie tentativamente en la categoría de Vulnerable (VU). En este sentido, sería recomendable hacer una evaluación detallada de la distribución y del grado de amenaza de esta especie, que presenta la notable particula-

ridad morfológica de las flores resupinadas, además del indudable potencial como especie para el cultivo ornamental.

Afinidades y variabilidad

Salvia guacana se separa bien de otras especies colombianas y más concretamente, dentro de la Sección *Tubiflorae* a la que se adscribe, de la especie considerada más cercana, *S. falcata* J.R.I. Wood & Harley, por los siguientes caracteres. Son arbustos escandentes con tallos colgantes, hojas con peciolo más largos (más de 4 mm); inflorescencias terminales, péndulas con numerosos verticilastros (*versus* inflorescencias generalmente axilares y cortas); cáliz pubescente (glabro en *S. falcata*); corola purpureo-vinácea (*vs.* rojo escarlata en *S. falcata*) con tubo marcadamente ventricoso, de más de 20 mm de longitud (*vs.* tubo no ventricoso de 16-18 mm de longitud en *S. falcata*); labio superior mayor que el inferior; labio inferior de 8-10 mm (*vs.* 3-4 mm en *S. falcata*); labio superior más largo, 11-14(16) mm (*vs.* 6 mm en *S. falcata*); anteras de mayor tamaño (25-35 mm); núcula más larga, de 3-3,5 mm de longitud (*vs.* de 2 mm en *S. falcata*).

Aunque solo se conoce esta planta de una pequeña región aislada del Cañón del Chicamocha, donde su característico hábito escandente con inflorescencias colgantes se mantiene invariable, llama la atención la variación morfológica detectada en algunos caracteres entre individuos de las diferentes recolecciones. Ocasionalmente se presentan individuos con hojas más anchas (truladas o elíptico-truladas), siendo las elíptico-lanceoladas y ligeramente falcadas, las más frecuentes. El cáliz a veces presenta formas más anchas y comprimidas lateralmente, aunque la condición más frecuente del cáliz es su aspecto más cilíndrico, menos comprimido y con labios más estrechos. Aunque son más frecuentes las corolas purpureo-vináceas, se presentan también plantas con corolas más claras, de color fucsia, con ligeras diferencias en la longitud de la porción inferior (estrecha) del tubo y en la longitud del labio inferior patente.

Todo parece indicar, como ya se señaló para el caso del complejo de especies de la sección *Rubescetes* (Epling) Epling y para la sección *Angulatae* (Epling) Epling, que en el entramado de valles áridos interandinos de la Cordillera Oriental de Colombia, se ha presentado y se sigue presentando en la actualidad un activo proceso de diversificación en el género *Salvia*, asociado a fluctuaciones climáticas recientes (plio-pleistocénicas) y a su efecto directo sobre el complejo sistema de zonas de vida y franjas de vegetación que confluyen en esta cordillera (**Fernández-Alonso**, 2003a, 2003b). La considerable diversidad de especies de *Salvia* que viven en esta región de la Cordillera Oriental, apunta en el mismo sentido. En concreto, en la cuenca media del Cañón del Chica-

mocha, se presentan además de *S. guacana*, varias especies con tipos de corolas (forma, tamaño y a veces color) muy similares, como es el caso de *S. jaramilloi* Fern. Alonso, *S. sphaceliodes* Benth., *S. aratocensis* (J.R.I. Wood & Harley) Fern. Alonso (Sect. *Angulatae*); *S. carnea* Kunth, *S. sciaphila* (J.R.I. Wood & Harley) Fern. Alonso (Sect. *Carneae* (Epling) Epling); *S. paramicola* Fern. Alonso, *S. rubescens* Kunth, *S. melaleuca* Epling (Sect. *Rubescentes*) y *S. erythrostoma* Epling (sect. *Longipes* Epling), aspecto que facilita la aparición ocasional de plantas híbridas.

En general, la presencia frecuente de endemismos locales, subespecies, híbridos y formas de transición circunscritas a éstos sistemas de valles disectados, a veces muy próximos geográficamente, como se ha descrito ya en el complejo de *Salvia orthostachys* Epling de la secc. *Rubescentes*, sugieren activos procesos de hibridación (Fernández-Alonso, 1995, Fernández-Alonso & Rivera-Díaz, 2006). En este panorama biológico, un papel relevante hay que asignarlo a la hibridación natural y a la especiación hibridógena, fenómenos que se hipotetizan como muy frecuentes en este grupo y que empiezan a estar cada vez mejor documentado en la Flora andina y en general en floras orófilas de todo el planeta (Arnold, 1997; Rieseberg, 1997; Fernández-Alonso, 2003a, 2003b, 2008).

Paratipos: COLOMBIA. **Santander.** Municipio de Guaca, en la vía de Guaca a Quebradas, borde de bosque junto al camino, 6° 54' N 72° 53' W, 1992 m, 4 ago 2006. Arbusto escandente, fl, fr, A. *Albesiano & al.* 2024 (COL, HUA, MA, UIS, US); vía Los Curos – Málaga, municipio de Guaca, antes del desvío a Santa Bárbara, vereda El Barro, taludes de la carretera, 6° 56' N 72° 54' W, 2165 m, 27 jun 2009. Herbácea base leñosa, tallos colgantes, fl, J. L. *Fernández-Alonso & C.N. Díaz-Pérez* 28110 (COL, MA, MO, NY, UIS); ibidem, municipio de Guaca, desvío a Santa Bárbara, taludes pendientes con arbustos, 6° 56' N 72° 54' W, 2165 m, 27 jun 2009. Arbusto escandente con inflorescencias colgantes, fl, fr, J. L. *Fernández-Alonso & C.N. Díaz-Pérez* 28113 (COL, MA, P).

Circunscripción y distribución de *Salvia* sect. *Tubiflorae* y *Salvia* sect. *Killipiana*

Epling (1939) incluyó en su revisión de *Salvia* subgénero *Calosphace*, doce especies dentro de la sección *Tubiflorae* y cuatro más en la sección *Killipiana*, taxones distribuidos en México-mesoamérica, Las Antillas y Suramérica. Luego, el mismo autor (Epling, 1951, Epling & Mathias, 1957) transfirió la especie brasileña *S. ombrophyla* Dusén de la secc. *Angulatae* a la sección *Tubiflorae* y a la vez incluyó en esta última a la nueva especie *S. erythrostephana* Epling, de Guatemala. Con posterioridad Ramamoorthy (1984a) transfirió

la especie mejicana *S. tubifera* Cav. a la sección *Curtiflorae* Epling. Wood & Harley (1989) modificaron sustancialmente la composición de la sección *Tubiflorae*, pues publicaron una nueva especie de Colombia (*S. falcata*) de ésta sección y dos taxones infraespecíficos de *S. rufula*, de la secc. *Killipiana*; a la vez transfirieron *S. erythrostoma* Epling a la secc. *Longipes*, donde se encuentra ubicada la especie cercana de Venezuela *S. gracilipes* Epling. Por último, redujeron a la sinonimia, cuatro de los taxones originalmente tratados por Epling (*S. laurifolia* Epling, *S. pseudolantana* Epling, *S. secundiflora* Rusby *S. moschata* Kunth). Fernández-Alonso (2002), publicó una nueva subespecie colombiana de *S. camarifolia* Benth de la Sierra de Perijá. Muy recientemente, se han asociado dos nuevas especies a la Sección *Tubiflorae*: *S. carrilloi* Veliz & Quenslenday, de Guatemala de aspecto similar a *S. tortuosa*, pero probablemente más relacionada con *S. rufula* (Sect. *Killipiana*) por la presencia de papilas en su tubo corolino, y una segunda especie *S. cacomensis* J.G. Gonzalez & al., descrita de México, que ha sido relacionada con la especie colombiana *S. venulosa* Epling, con la que presenta cierta similitud. (Veliz & Quedensley, 2011; González-Gallegos & al., 2012).

Las especies colombianas de corolas rojas *Salvia rufula* Kunth de amplia distribución y *S. costata*, restringida a la Sierra Nevada de Santa Marta, tratadas tradicionalmente en la sección *Killipiana* (Epling, 1936, 1939), presentan gran similitud en hábito, inflorescencias y flores con otras especies de la sección *Tubiflorae*, como es el caso de *S. tortuosa*. La única diferencia significativa que separa a estas dos especies, de las de la sección *Tubiflorae*, la presencia de 2-4 papilas en la cara interna de la zona inferior del tubo corolino, se ha revelado sin embargo como un carácter no siempre constante en *S. rufula*, incluso en las plantas provenientes de una misma localidad. Esto ha sido puesto de manifiesto para los taxones *S. latens* Benth., *S. laurifolia* Epling y *S. pseudolantana* Epling, hoy reducidos a la sinonimia de *S. rufula* Kunth (Epling, 1957; Wood & Harley, 1989) y observado por el autor en una muestra procedentes de la región del Tequendama. Por lo tanto procedemos a subordinar a la sección *Killipiana*, en la sinonimia de la sección *Tubiflorae*, cuya circunscripción precisamos en este trabajo.

Sinopsis de *Salvia* subgen. *Calosphace* sect. *Tubiflorae* (Epling) Epling,

Salvia subgen. *Calosphace* sect. *Tubiflorae* (Epling) Epling, Repert. Spec. Nov. Regni Veg. Beih. 110: 321. 1939. Especie tipo: *S. moschata* Kunth, designado por Epling (1937).

= *Salvia* sect. *Calosphace* subsect. *Tubiflorae* Epling, Repert. Spec. Nov. Regni Veg. Beih. 85: 103. 1935.

= *Salvia* sect. *Killipiana* (Epling) Epling, Repert. Spec. Nov. Regni Veg. Beih. 110: 317. 1939. **syn. nov.**

= *Salvia* sect. *Calosphace* Subsect. *Killipiana* Epling in Repert. Spec. Nov. Regni Veg. Beih. 85, 101, 1936. Especie tipo: *S. latens* Benth.

Arbustos erectos o a veces escandentes (*S. falcata*, *S. guacana*) o hierbas perennes (*S. carrilloi*, *S. venulosa*). Inflorescencias espiciformes generalmente terminales, rara vez inflorescencias cortas axilares (*S. costata*, *S. falcata*, a veces en *S. venulosa*), o péndulas y con flores resupinadas por torsión del pedicelo (*S. guacana*). Cáliz con 3 venas en el labio superior (a veces 5 venas en las especies atípicas *S. tortuosa* y *S. venulosa*). Corola roja, fucsia, vinácea, rosada o blanco-rosada; tubo por lo general, gradualmente ensanchado o a veces ventricoso, epapilado en su interior, o en *S. costata* y *S. rufula* con papilas (no estaminodiales) ubicadas cerca de la base del tubo, o en *S. carrilloi* con papilas estaminodiales cerca de la boca del tubo; en las cuatro especies insulares. *S. clarendonensis* Britton, *S. eriocalyx* Bertero ex Roem. & Schult. y *S. jamaicensis* Fawc. ex Urb. (de Jamaica) y *S. microdictya* Urb. & Ekm. (de La Española), a diferencia del resto de la sección, el tubo de la corola con una invaginación marcada en la zona ventral de la mitad inferior; característica distintiva probablemente asociada a una estrategia específica en su biología floral que quizás amerite su consideración en una sección autónoma. Por otra parte aunque este grupo de especies insulares se parece en hábito y otros caracteres vegetativos a las especies de la sección antillana *Ekmania* (Epling) Epling (Torke, 2000), se separa bien por dos caracteres florales: la ausencia en esta última de invaginación ventral en el tubo de la corola y la presencia de estambres largamente exsertos con respecto a la gálea; labio superior de la corola erecto, generalmente más largo que el inferior (en *S. erithrostephana* es ligeramente más corto el inferior que el superior; subiguales en *S. camaraefolia*, *S. cacomensis*, *S. ombrophylla* y *S. venulosa*); estilo generalmente piloso, con la rama anterior más corta que la posterior (salvo en *S. tortuosa* en que la rama anterior es más larga que la posterior).

En su circunscripción ampliada aquí propuesta, la sección *Tubiflorae* agrupa 12 especies del neotrópico continental (4 en México y Guatemala, 7 en el norte de Sudamérica y una en Brasil) y mas cuatro de las antillanas -Jamaica y Haití- (Epling, 1936, 1939, 1944, 1951; Epling & Mathias, 1957; Gilli, 1983; Ramamoorthy, 1984a; Wood & Harley, 1989; Fernández-Alonso, 2002; Veliz & Quenslenday, 2011; González-Gallegos & al., 2012).

Clave para las especies de *Salvia* sect. *Tubiflorae*, sensu lato

1- Tubo de la corola con 2-4 papilas en su cara interna.....2

1'-Tubo de la corola sin papilas en su cara interna.....6

2-Plantas herbáceas. Flores blanco-rosadas, tubo de la corola con dos papilas (estaminodiales) ubicadas en el tercio superior.....3. ***S. carrilloi***

2-Plantas leñosas. Flores rojo escarlata, tubo de la corola con dos a cuatro papilas (no estaminodiales), ubicadas en su tercio inferior.....3

3'-Inflorescencias en racimos axilares cortos 3-8 cm largo. Cáliz con venas engrosadas y escabrido-muricadas.....5. ***S. costata***

3'-Inflorescencias en racimos terminales largos de más de 10 cm largo, o en verticilastros axilares simples. Cáliz sin venas gruesas, escábridas.....14. ***S. rufula* (4)**

4'-Inflorescencias en verticilastros axilares de 3-6 flores...
.....14a. ***S. rufula* subsp. *latens***

4'-Inflorescencias en racimos terminales largos con más de 5 verticilastros.....5

5-Hojas gris-verdosas en ambas caras. Cáliz de menos de 7 mm largo; corola de 16-20 mm largo.....
.....14b. ***S. rufula* subsp. *paezorum***

5'-Hojas verde oscuro por el haz. Cáliz de más de 9 mm largo; corola de 20-40 mm largo.....
.....14c. ***S. rufula* subsp. *rufula***

6-Arbustos escandentes o hierbas decumbentes.....7

6'-Arbustos, subarborescentes o hierbas erectas.....10

7-Hierbas decumbentes generalmente de menos de 1 m largo.....16. ***S. venulosa***

7'-Arbustos escandentes de más de 1 m largo.....8

8-Cáliz 5-7 mm largo con indumento lanoso; tubo de la corola con invaginación ventral en la mitad inferior. Jamaica.....6. ***S. eriocalyx***

8'-Cáliz 8-12(15) mm largo, glabro o glabrescente; tubo de la corola sin invaginación ventral en la mitad inferior. (Colombia continental).....9

9-Inflorescencias en racimos axilares cortos de 4-8 flores, mas raramente terminales, flores no resupinadas, corola rojo escarlata con tubo no ventricoso8. ***S. falcata***

9'-Inflorescencias terminales péndulas con más de 10 flores, flores resupinadas, corola rojo-vinoso o fucsia con tubo marcadamente ventricoso9. ***S. guacana***

- 10-Tubo de la corola gradualmente ensanchado, no ventricoso ni provisto de invaginación ventral.....11
- 10'-Tubo de la corola bruscamente ensanchado, ventricoso, con o sin invaginación ventral.....12
- 11-Labio superior de la corola de c. 20 mm, más largo que el inferior.....13. *S. pringlei*
- 11'-Labio superior de la corola de c. 4,5 mm, más corto que el inferior.....7. *S. erythrostephana*.
- 12-Tubo de la corola bruscamente ensanchado, ventricoso y sin invaginación ventral. Plantas de México o de Suramérica.....13
- 12'-Tubo de la corola no ventricoso, pero con invaginación ventral pronunciada. Jamaica y La Española.....17
- 13-Labio superior del cáliz con 5 venas, corola con labio superior más largo que el inferior; rama posterior del estilo claramente más corta que la inferior15. *S. tortuosa*
- 13'-Labio superior del cáliz con 3 venas, corola con labios subiguales en longitud; rama posterior del estilo más larga que la inferior14
- 14-Corola rosada o magenta, sin pliegues en posición ventral junto labio inferior.....15
- 14'-Corola rojo escarlata, con dos pliegues en posición ventral, junto al labio inferior.....2. *S. camarifolia* (16).
- 15-Hojas cuneadas en la base. Espigas de 11-18 cm largo; corola rosada o magenta, tubo de 15-17 mm largo, México.....1. *S. cacomensis*.
- 15'-Hojas redondeadas en la base. Espigas de 3-10 cm largo, corola rosada, tubo de más de 20 mm largo, Brasil.....12. *S. ombrophylla*.
- 16-Cáliz (7)8-9 mm largo, corola 15-20 mm largo.....2a. *S. camaraefolia* subsp. *camaraefolia*.
- 16'-Cáliz de más de 12 mm largo, corola (20-)21-24 mm largo.....2b. *S. camaraefolia* subsp. *ibiricensis*.
- 17-Indumento rojizo, flocoso, de pelos ramosos en todas sus partes; láminas bulladas por la haz. La Española.....11. *S. microdictya*.
- 17'- Indumento no rojizo ni flocoso; hojas no bulladas. Jamaica.....18.
- 18-Inflorescencias 15-30 cm largo, cáliz finamente pubérulo, glabrescente, de 8-10 mm largo en fruto.....4. *S. clarendonensis*

18-Inflorescencias de menos de 10 cm largo, cáliz de hasta 7 mm largo en fruto, con pubescencia púrpura muy conspicua.....10. *S. jamaicensis*.

Por tratarse de una revisión sinóptica de la sección, para cada especie se incluye de forma escueta información sobre: colecciones tipo, sinónimos, distribución conocida, material representativo revisado y también algunos comentarios taxonómicos o nomenclaturales relevantes, que refuerzan o justifican la presente propuesta. Algunos hacen referencia a cambios o transferencias recientes y otros a observaciones relacionadas con variabilidad morfológica en algunos caracteres o a posibles casos de hibridación o introgresión. En cuanto al grado de endemismo, se señalan solo como “endémicos” de un determinado país, los taxones cuya distribución general se encuentra restringida a los límites de dicho país, sin hacer otras precisiones.

1.- *Salvia cacomensis* J.G. González, J. Morales et J. Rodríguez, Rev. Mex. Biodiv. 83: 342, 2012. -Tipo: MEXICO: **Jalisco**, villa de Purificación, 1360 m, 26 ago 2010, fl, fr, *J.L. Rodríguez & al.* 340 (Holotypus XEA; isotypus MEXU).

Distribución: MÉXICO: Jalisco. –Endémica.

Aunque *Salvia cacomensis* se diferencian bien en el hábito, aparentemente presenta similitud en inflorescencias y flores con *Salvia venulosa* Epling (sección *Tubiflorae*). También se la ha relacionado con *Salvia tubifera* Cav., de la sección *Curtiflorae* y con la sección *Briquetia*. (**González-Gallegos & al.**, 2012).

2.- *Salvia camarifolia* Benth. Prodr. 12: 342. 1848.

2a. *S. camarifolia* Benth. subsp. *camarifolia* - Tipo: COLOMBIA. Sierra Nevada de Santa Marta, 1845, *Purdie s.n.* (Holotypus K; Isotypus K).

= *S. leucocalyx* Briq. 1898. -Tipo: COLOMBIA. Provincia de Ocaña. 2000 pies, 1846-1852, *L.J. Schlim 1108* (Holotypus BR-112814).

= *S. secundiflora* Rusby 1920. -Tipo: COLOMBIA. **Magdalena**; Santa Marta, open ravine 5 miles N. of Bonda, about 1000 ft. 1898-1899, fl, fr, *H.H. Smith 567* (Holotypus NY, isotypus: BM, F, GH, K, MA 209214, NY, P, US, TEX, WIS).

Distribución: COLOMBIA: Cesar, Magdalena, N. de Santander. –Endémica.

Material representativo revisado: COLOMBIA. **Magdalena**, Sierra Nevada de Santa Marta, hoyo del río Donachí, 2400-2650 m, 10 oct 1959, fl, *J. Cuatrecasas & R. Romero-Castañeda 24705* (COL, US); Santa Marta, río Piedras, 900

m, 10 jul 1999, fl, *E. Carbonó 3762* (COL); Santa Marta, *Purdie s/n* (KEW); Sierra Nevada de Santa Marta, 1898-1901, fl, *H.H. Smith 379* (MA); Sierra Nevada Santa Marta, 1000-1600 m, 14 jun 1985, fl, fr, *J.R.I. Wood 4985* (COL).

2b. *Salvia camarifolia* Benth. subsp. *ibiricensis* Fern. Alonso, *Anales Jard. Bot. Madrid* 59: 346, fig. 1, 2002, Figura 3a-c.

-Tipo: COLOMBIA: **Cesar**, Serranía de Perijá, Jagua de Ibirico, quebrada El Indio, 990 m. 10 mar 1996, fl, *J.L. Fernández-Alonso & al. 13352* (Holotypus COL, isotypus MA).

Distribución: COLOMBIA: Cesar. -Endémica. (**Fernández-Alonso, 2002; Rivera-Díaz & Fernández-Alonso, 2003a; Fernández-Alonso & Rivera-Díaz, 2006**).

Material representativo revisado: COLOMBIA: **Cesar**. Serranía del Perijá, municipio de La Jagua de Ibirico, vereda El Zumbador, trayecto La Ye a El Zumbador, 1100 m. 13 mar 1996, fr, *J. L. Fernández-Alonso 13467 & al.* (COL, MA); ibídem, vereda Nueva Granada, 900-1400 m, 15 mar 1996, fr, *J.L. Fernández-Alonso & al. 13652* (COL, FMB, HUA); ibídem, zona Cerro Cantarranas, 1800 m, 15 mar 1996, fr, *J.L. Fernández-Alonso & al. 13775* (COL, MEDEL). **Cundinamarca**. (**Material cultivado**) Bogotá. Plantas cultivadas en el Jardín Botánico JCM (de esquejes recolectados en Cesar: Jagua de Ibirico), feb 1998, fl, *J.L. Fernández-Alonso & G. Pérez 15255* (COL, MA); ibídem, cultivo experimental de *Salvia*, 11 ene 2000, *J.L. Fernández-Alonso & C. Bernal 18622* (COL, MA); ibídem, 2650 m, 5 ago 2000, fl, *J.L. Fernández-Alonso & al. 19216* (COL, MA); ibídem, Bogotá. Plantas cultivadas en el Jardín Botánico JCM, provenientes de Cesar: Jagua de Ibirico, 23 nov 2006, fl, *J.L. Fernández-Alonso 24534* (COL, MA).

3.- *Salvia carrilloi* Veliz & Quenslenday, *J. Bot. Res. Inst. Texas* 5(2): 471-474, f.1. 2011. -Tipo: GUATEMALA. **Huehuetenango**. Municipio de la Libertad, Sierra Cuchumatanes, 3059 m, *M.E. Veliz 20540 & al.* (Holotypus BIGU; isotypus: CAS, NY).

Distribución: GUATEMALA. Huehuetenango. - Endémica. (**Veliz & Quenslenday, 2011**).

4.- *Salvia clarendonensis* Britton, *Bull. Torrey Bot. Club* 48(12): 340. 1922. -Tipo: JAMAICA: **Clarendon**. Peckham Woods, Upper Clarendon, 762 m, 28 dic1917, fl, *W.H. Harris 12787* (Holotypus NY; Isotypus BM, GH, K 479252, MO 862630, US 1048164).

Distribución: JAMAICA. Clarendon - Endémica. (**Adams, 1972**).

5.- *Salvia costata* Epling *Repert. Spec. Nov. Regni Veg. Beih.* 85: 35. 1936. -Tipo: COLOMBIA: Nouvelle Grenade, [**Magdalena**] Sierra Nevada Santa Marta, Provincia de Rio Hacha, 9000 fl, fr, mar 1852, *L. Schlim 792* (Holotypus P, isotypus: BM 624814, BR 542967, K479699).

Distribución: COLOMBIA: Magdalena. -Endémica.

Especie sólo conocida por la colección tipo. Como parte de la inclusión de la sección *Killipiana* dentro de la sección *Tubiflorae*, esta especie es transferida aquí a esta última. Dentro de esta sección, es *S. falcata*, especie de la Cordillera Oriental, de flores rojas e inflorescencias axilares, la que en nuestra opinión se acerca más a *S. costata*.

6.- *Salvia eriocalyx* Bertero ex Roem. & Schult. *Mant. 1*(Schultes) *Addit.* 2 246. 1822. - Tipo: JAMAICA: *W. Purdie s.n.* (Holotypus TCD 7147).

Distribución: JAMAICA. San Andrés - Endémica. (**Epling, 1939; Adams, 1972**)

Material representativo revisado: JAMAICA: Garden Lawn to Content Gap, 500 m. *Bertero s.n.* (TCD)

7.- *Salvia erythrostephana* Epling *Brittonia* 7: 136. 1951. -Tipo: GUATEMALA. **Baja Verapaz**: in forest at west end of Sierra de las Minas. 2000 m, 23 feb 1945, fl, *A.J. Sharp 45238* (Holotypus UCLA 58752; isotypus MEXU).

Distribución: GUATEMALA, EL SALVADOR. (**Epling, 1951; Epling & Mathias, 1957**)

Material representativo revisado. EL SALVADOR. **Chalatenango**, Los Esemiles, 2600 m, *Tucker 989* (UCLA).

Klitgaard (2012) asoció este nombre a la especie *Salvia karwinskii* Benth. (secc. *Cardinales* Epling), incluyendo también en la sinonimia a los taxones mesoamericanos *S. siguatepequensis* Standl. y a *S. lindenii* Benth. Al no conocer una discusión que justifique esta sinonimia, su relación con otros táxones de la sección *Holwaya* Ramamoorthy, ni su adscripción a la sección *Cardinales* (**Ramamoorthy 1984b; Klitgaard, 2007**), preferimos mantener a *S. erythrostephana* en la ubicación asignada por **Epling & Mathias** (1957), en esta sección *Tubiflorae*.

8.- *Salvia falcata* J.R.I. Wood & Harley, *Kew. Bull.* 44(2): 270. 1989 -Tipo: COLOMBIA. **Cundinamarca**. In rio Negro valley, c 2 km below Talauta (Near El Peñon), 1000 m, 1 jun 1985, fl, *J.R.I. Wood 4962* (Holotypus COL 315845, isotypus COL, FMB, K 479679).

Distribución: COLOMBIA: Cundinamarca (**Fernández-Alonso & Rivera, 2006**).

Material representativo revisado COLOMBIA. **Cundinamarca**. Rio Negro valley c. 2 km W of Talautá near El Peñón, Pacho-La Palma, 1000 m, 29 jun 1985, fl, *J.R.I. Wood* 4944 (COL, K, FMB).

9.- *Salvia guacana* Fern. Alonso, Rev. Acad. Colomb. Cien. Exact. 2012. (este trabajo) -Tipo: COLOMBIA: **Santander**. Mpio. de Guaca, 2001 m, 27 jun 2009, *J. L. Fernández-Alonso* & *C.N. Díaz-Pérez* 28136 (Holotypus COL).

Distribución: COLOMBIA. Santander. -Endémica.

Material representativo revisado: (en este trabajo)

10.- *Salvia jamaicensis* Fawc. ex Urb. Symb. Antill. (Urban) 1(3): 396. 1899. -Tipo: JAMAICA. **John Crow Peak**. in Blue Mts. 1900 m, 7 jul 1898, fl, *W. Harris* 7327 (Lectotypus B; isolectotypus: F 146119, K, US).

Distribución: JAMAICA. -Endémica. Probablemente presente solo una variedad local de *S. eriocalyx* (**Urban**, 1899; **Adams**, 1972).

11.- *Salvia microdictya* Urb. & Ekman, Ark. Bot. 20A(15): 87. 1926. -Tipo: HAITÍ. **Massif de la Selle**, Morne de la Selle in saxosis ab *Ekman* 3089 (Holotypus B; isotypus S).

Distribución: HAITI. -Endémica. (**Lioger**, 1994; **Acevedo-Rodríguez & Strong**, 2012)

12.- *Salvia ombrophila* Dusén, Arch. Mus. Nac. Rio de Janeiro 13: 34, 1903. -Tipo: BRASIL: **Rio de Janeiro**, Sierra de Itatiaia, 2100 m, 17 may 1902, fl, fr, *Dusén* 399; *Ibidem*, ad Retiro, in silvula 2100 m, jun 1902, *Dusén* 2000 (S).

Distribución: BRASIL. Minas Gerais, Sao Paulo y Rio de Janeiro. -Endémica de la Mata Atlántica (**Epling & Toledo**, 1943; **Harley & al.** 2010).

= *S. nemoralis* Dusen ex Epling Repert. Spec. Nov. Regni Veg. Beih. 85: 75. 1935. **Epling & Mathias** (1957), con base en el estudio de nuevas muestras, transfieren esta especie de la Sec. *Angulatae* a la sección *Tubiflorae*.

Material representativo revisado: BRASIL. **Nouva Friburgo**. Subida al Caled, 14 jun 1951, fl, *P. Capell S.J. s.n.* (MA).

13.- *Salvia pringlei* B.L. Rob. & Greenm. Proc. Amer. Acad. Arts 29: 391. 1894. - Tipo: MÉXICO: **Jalisco**, Under cliffs, barranca of Tequila, 2 oct 1893, fl, C.G. *Pringle* 4564 (Holotypus GH; isotypus: E 259581, K, MO 138277, PH)

Distribución: MÉXICO. -Endémica.

Material representativo revisado MÉXICO: **Sinaloa**, Chilillos, La Rastra, 752 m, 7 oct 1975, fl, *J.L. Reveal & R.M.*

Harley 4029 (MO).

14.- *Salvia rufula* Kunth, Nov. Gen. Sp. [H.B.K.] 2: 291. 1818. -Tipo: COLOMBIA: [**Tolima**] "Crescit in Andibus subfrigidis Quinduensibus prope Los Gallegos, alt. 1382 m (Regno Novo-Granatensi), floret Octobri", fl, *A.J.A. Bonpland* & *A. Humboldt s.n.* (Holotypus P136241, isotypus F, P136242).

Especie endémica de Colombia que muestra una amplia variabilidad a lo largo del territorio. En la actualidad se reconocen tres subespecies, pero hay aún variantes regionales sobre las que no se ha establecido claramente su identidad. Este es el caso de algunos registros del Tolima-Quindío y de la Sierra Nevada de Santa Marta, asignables a esta especie, cuyo rango subespecífico aún no ha sido establecido, aspecto en el que se está trabajando con la ayuda de colecciones recientes. Es probable que algunas variantes en el indumento, tamaño y color de la corola de *Salvia rufula* puedan tener su origen en introgresión ocasional con *S. tolimensis* Kunth, especie de flores fucsia, de la sección *Purpureae*, en la Cordillera Central, donde entran en contacto las áreas de las dos especies.

14a.- *Salvia rufula* Kunth subsp. *latens* (Benth.) J.R.I. Wood & Harley, Kew. Bull. 44(2): 268. 1989. -Tipo: COLOMBIA: **Cauca**, ad Popayán, in sylvis ad Hato Frio, prope El Salado. *H. Hartweg* 1326 (Holotypus K, isotypus: B, BM 624813, G, UC, LD, P).

= *S. latens* Benth. Pl. Hartw. 242. 1846.

Distribución. COLOMBIA: Antioquia, Cauca, Quindío y Valle. -Endémica.

Material representativo revisado COLOMBIA. **Antioquia**. 7 km E de Medellín, 2100 m, 13 feb 1949, fl, *J. Araque M. & al.* 19An090 (COL); Medellín, 7000 ft., ene 1948, fl, fr, *C. Sandeman* 5657 (COL); Guarne, 2000-2500 m, 28 ago 1971, fl, *D. Soejarto & al.* 3103 (COL); Río Negro-Medellín, 25 mar 1986, fl, *J.R.I Wood* 5366 (COL). **Cauca**. Alrededores de Popayán, 1760 m, 4 ene 1947, fl, fr, *A. Fernández Pérez*, 43 (COL); río Las Piedras, 11 nov 1955, fl, *A. Fernández P.* 2976 (COL); Popayán, 1800 m, 14 jun 1939, fl, *E. Pérez-A.* 6067 (COL); Sotará, corregimiento El Crucero, 2160 m, 8 jun 2007, fl, fr, *B. Ramírez* 19077 (CAUP,COL); Popayán, 1700 m, jul 1953, fl, *J. Triana* 9 (COL). **Valle**. Tuluá, cultivada, 1050 m, *I. Cabrera* 4279 (CUVC).

14b.- *Salvia rufula* Kunth subsp. *paezorum* J.R.I. Wood & Harley, Kew Bull. 44(2): 265, f. 11D, 1989. -Tipo: COLOMBIA: **Huila**, in the río Paez, valle, between La Plata and Paicol, 900 m, 8 abr 1985, fl, fr, *J.R.I. Wood* 4819 (Holotypus COL 4174; isotypus: FMB, K).

Distribución: COLOMBIA: Cauca, Huila.

Material representativo revisado **Cauca**. Tierradentro, entre Inzá y San Andrés de Pisimbalá, 1600 m, 14 ago 1983, fl, *J.R.I. Wood 3944* (COL); cerca de Inza, río Ullocus, 1500 m, 6 jun 1985, fl, *J.R.I. Wood 4906* (COL). **Huila**. La Plata-Gallego, 1100 m, 4 abr 1985, fl, fr, *J.R.I. Wood 4780* (COL).

14c.- *Salvia rufula* subsp. *rufula* Figura 3d-e

Distribución: COLOMBIA: Antioquia, Caldas, Cauca, Cundinamarca, Huila, Magdalena, Quindío, Tolima.

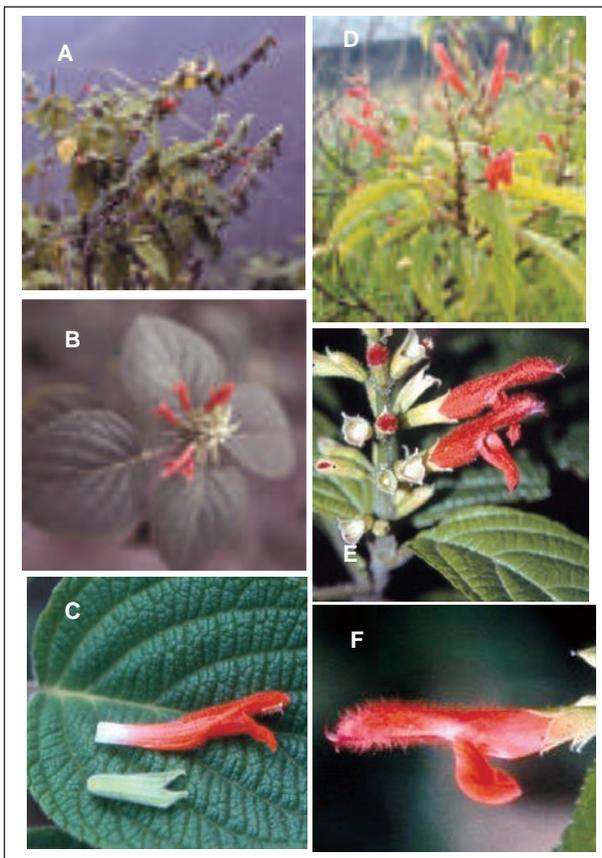


Figura 3. A-C. *Salvia camaraefolia* subsp. *ibiricensis*. A- Parte superior de la planta, en su ambiente natural. B- Parte superior de la planta con una inflorescencia joven. C-. Detalle del cáliz y la corola en vista lateral. D-F. *Salvia rufula* subsp. *rufula*. D- Parte superior de la planta, en cultivo. E- Inflorescencia joven. F-. Detalle del cáliz y la corola en vista lateral. (Fotografías: J.L. Fernández-Alonso; B-F, a partir de plantas cultivadas).

= *S. rufida* Willd. ex Schult., Mant. i, 189, 1822 (nomen)

= *S. goudotii* Benth, Prodr. 12: 339. 1848 –Tipo: COLOMBIA: [New Granada]: **Tolima**, prope Ibagué, Coello, año 1844, *Goudot 2*. (Holotypus K 479690, isotypus P)

= *S. orophila* Briq. Beih. Bot. Centralbl. 13: 81, pl. 3, figs 1-3. 1902. -Tipo: COLOMBIA: **Tolima**, entre Mediación y Las Cruces, *P. T. von Bayern 287* (Holotypus: Herb. Mónaco).

= *S. laurifolia* Epling Repert. Spec. Nov. Regni Veg. Beih. 85: 102. 1936. –Tipo: COLOMBIA: **Cundinamarca**. Ad cataractam Tequendama, 8 dic 1852, fl, *I.F. Holton 480* (Holotypus NY, isotypus: COL, K).

= *S. pseudolantana* Epling & Epling Repert. Spec. Nov. Regni Veg. Beih. 85: 104. 1936, -Tipo: COLOMBIA: **Huila**. Cordillera Oriental, east of Neiva, forest, alt.1800-2300m., 1 a 8 ago 1917, fl, *H.H. Rusby & F.W. Pennell 574* (NY).

Algunas plantas de la Cordillera Oriental, en el departamento del Huila presentan algunas diferencias en indumento e inflorescencias (longitud, orientación) han sido tratadas como una variedad independiente (**Wood & Harley**, 1989): *S. rufula* Kunth subsp. *rufula* var. *nutans* J.R.I. Wood & Harley, Kew Bull. 44(2): 268. 1989 -Tipo: COLOMBIA: Huila. Above Vega Larga in the Cordillera Oriental E of Neiva. 2200 m, 23 nov 1985, fl, fr, *J.R.I. Wood 5181* (Holotypus COL, isotypus: FMB, K).

Material representativo revisado. **Antioquia**. Medellín-Río Negro, 2000 m, 17 nov 1948, fl, *E. P. Killip & al. 39838* (COL); Medellín, 1900-2300 m, 21 ene 1950, fl, fr, *L. Uribe U. 2080* (COL); Ituango, 1700 m, 11 may 1988, fl, *J.L. Zarucchi & al. 6431* (COL, HUA). **Caldas**. Inter Salento et Laguneta 2400-2700 m, 1 ago 1922, fl, fr, *Killip & Hazen 9127,9130* (US); Manizales, ago 1948, fl, *S. Yepes A. 837* (CAUP, COL). **Cauca**. El Estrecho-Balboa; 1280 m, 27 jun 1989, fl, *F. Zuloaga & al. 4248* (COL). **Cundinamarca**. Bogotá-El Colegio, 2500 m, 19 abr 1972, fl, fr, *A. S. Barclay & al. 3320* (COL); Albán, río Dulce, 2040-2140 m, 18 may 2002, fl, *R. Bernal & al. 3165* (COL); Salto de Tequendama, 2200 m, 2 oct 1938, fl, fr, *J. Cuatrecasas 175* (COL); Salto del Tequendama, 2400 m, 2 may 1932, fl, *J. Cuatrecasas 3320* (MA); ibidem, 2440 m, 3 mar 1940, fl, fr, *J. Cuatrecasas 8184* (COL); San Bernardo-Sasaima, 1800-1600 m, 23 jun 1940, fl, *J. Cuatrecasas 9593* (COL); San Francisco, 2500 m, 25 ene 1965, fl, fr, *J. Cuatrecasas 26785* (COL); Sasaima-Albán, 1700-1800 m, 5 ago 1945, fl, *A. Dugand & al. 3953* (COL); Santandercito, oct 1992, fl, fr, *J.L. Fernández & al. 10341* (COL); Bogotá-La Vega, 2300 m, 30 jul 1994, fl, *J.L. Fernández & al. 11511* (COL); vía Zipaquirá –Pacho, 2600 m, 30 abr 1995, fl, fr, *J.L. Fernández-Alonso & R. Castillo 12590* (COL, MA); Bogotá, D.C. Plantas cultivadas, originarias del Mpio. de San Francisco, 20 jul 1996, fl, *J.L. Fernández-Alonso 14450* (COL,MA); vía Zipaquirá a Pacho, 3050 m, 5 dic 1996, fl, *J.L. Fernández-Alonso & G. Pérez 14594* (COL, MA; Pacho-San Cayetano, 5 dic 1996, fl, fr, *J.L. Fernández-Alonso & al. 14603* (COL); Mosquera-

Soacha, Chicaque, 2600-2200 m, 1 ago 1997, fl, *J.L. Fernández-Alonso & al. 14796* (COL,MA); desvío Mosquera a Soacha, Parque de Chicaque, 2200-2600 m, 1 ago 1997, fl, *J.L. Fernández-Alonso & al. 14806* (COL, MA); Bogotá D.C., cultivo experimental Labiatae, 12 jul 1999, fl, *J.L. Fernández-Alonso & R. Castillo 18485* (COL, MA); Soacha – Santandercito, Parque de Chicaque, 2300-2600, 22 nov 2005, fl, *J.L. Fernández-Alonso & al. 23794* (COL); Bogotá, D.C. Jardín Botánico, plantas cultivadas provenientes del Salto del Tequendama, 2600 m, 23 nov 2006, fl, *J.L. Fernández-Alonso 24538* (COL,MA); ibidem, plantas provenientes de Pacho, 2600 m, 23 nov 2006, fl, *J.L. Fernández-Alonso 24539* (COL,MA); Ibidem, sector Agronomía, 2 may 2010, fl, fr, *J.L. Fernández-Alonso 29070* (COL,MA); Las Mercedes, Pacho a San Cayetano, 2500 m, 26 oct 1985, fl, *J.R.I. Wood 5120* (COL, MA). **Huila.** Colombia, vereda Zaragoza, quebrada El Guayabo, 1400 m, 6 oct 1990, fl, *F. Llanos & J. Camacho 1977* (COL); ibidem, 1600-2000 m, 7 oct 1990, fl, fr, *F. Llanos & al. 2008* (COL); Vega Larga, 2300 m, 23 nov 1985, fl, *J.R.I. Wood 5180* (COL). **Quindío.** Pijao, vereda Rio Azul, 2390 m, 8 may 1987, fl, *G. Arbeláez & al. 2089* (COL); Pijao, 2100-2200 m, feb 1995, fl, *M. C. Vélez & al. 4983* (COL). **Tolima.** Cajamarca, 2400 m, 27 mar 1939, fl, fr, *E. P. Killip & al. 34531* (COL); Ibagué, vereda Toche, 2600 m, 28 abr 1998, *D. Macías & al. 831* (HUQ); Herveo, 2350 m, abr 1944, fl, fr, *L. Uribe U. 749* (COL); Anaime, 1900 m, 29 mar 1959, fl, *L. Uribe 3259* (COL); Anaime-Cajamarca, 1900 m, 19 dic 1984, fl, fr, *J.R.I. Wood 4660* (COL).

15.- *Salvia tortuosa* Kunth, Nov. Gen. Sp. [H.B.K.] 2: 292, t. 142. 1818. Figura 4 a-c.

-Tipo: ECUADOR. *Humboldt & Bonpland s.n.* (Holotypus P).

= *S. moschata* Kunth, Nov. Gen. Sp. [H.B.K.] 2: 293, t. 143. 1818. Tipo: COLOMBIA: **Cauca** A. *Bonpland 2084* (Holotypus P).

= *S. tortuosa* Kunth var. *detonsa* Epling Repert. Spec. Nov. Regni. Veg. Beih. 85(2): 106. 1936 –Tipo: ECUADOR: **Pichincha**, prope Quito, T: *E.W.D. Holway 889* (Holotypus US 121671).

= *S. corazonica* Gilli, Feddes Repert. 94: 316. 1983 –Tipo: ECUADOR: **Pichincha**, [Monte] El Corazón, 1630 m, 30 jun 1975, fl, *Gilli 284* (Holotypus W). (**Wester & al.** 2011).

Distribución: COLOMBIA: Cauca, Nariño, Putumayo, Valle. ECUADOR: Azuay, Bolivar, Carchi, Chimborazo, Cotopaxi, Napo, Pichincha, Tungurahua.

Nombres vernáculos: “quindechupe” en Pandiaco, Nariño; “quinde” en Túquerres, Nariño; “flor de quinde” en San Lorenzo, Nariño; “nerviola” en Sibundoy, Putumayo.



Figura 4. A-C. *Salvia tortuosa* Kunth. **A-** Parte distal de una rama con inflorescencias. **B-** Detalle de una flor en una planta cultivada, con la corola incompletamente extendida, mostrando el estilo y el carácter distintivo de la rama inferior más larga. **C.** Detalle de la corola completamente desarrollada en su ambiente natural, con la gálea cerrada y las ramas estigmáticas escasamente expuestas. (Fotografías A-B: J.L. Fernández-Alonso, a partir de plantas cultivadas, C: J.M. Vélez, planta silvestre en Nariño).

En esta especie se presentan tanto plantas con cálices glabros y nítidos como otras con cálices enteramente recubiertos de indumento algodonoso amarillento, característico, creciendo en una misma región. Una colección del Cauca (*Ramírez 19475*), aunque cuenta con las ramas estigmáticas características de *S. tortuosa*, presenta hojas más membranosas y alargadas, espigas cortas con flores rojizas, y parece corresponder a individuos o poblaciones hibridadas con *S. rufula*, también presente en éste sector de la cordillera.

Material representativo revisado. COLOMBIA. **Cauca.** Almaguer, 2650 m, 10 oct 1988, fl, *P. Franco & al. 2523* (COL); Paispamba, 2400 m, 24 nov 1946, fl, fr, *O. Haught 5304* (COL); Tunia, 18 jul 1939, fl, *E. Pérez-A. 6303* (COL); municipio de Bolivar, corregimiento El Morro, 1760-1790 m, 20 jul 2007, fl, *B. Ramírez & al. 19475* (CAUP, COL); Almaguer, 2560-2800 m, 9 mar 2007, fl, *B. Ramírez 18254* (CAUP, COL); Popayán, 1760 m, dic 1947, fl, *S. Yepes A. 144* (COL); **Cundinamarca.** Bogotá. Plantas cultivadas en predios de la Universidad Nacional de Colombia, Agronomía (planta originaria de Nariño, Pasto), 31 mar 2003, fl, *J.L. Fernández-Alonso 20195A* (COL,MA); Bogotá. Predios

del Jardín Botánico JC Mutis, Cultivo Experimental, (Planta originaria de Tangua-Yacuanquer), 23 nov 2006, fl, *J.L. Fernández-Alonso 24545* (COL,MA). **Nariño:** Sandoná, 1100 m, dic 1981, fl, fr, *O. de Benavides 3180* (PSO); La Unión, 1900-2470 m, 21 jun 1986, fl, *O. de Benavides 6757* (COL); Mallama, 2300 m, dic 1986, fl, fr, *O. de Benavides 7486* (PSO); Reserva Natural La Planada, San Isidro, 1950 m, 15 abr 1997, fl, *G.Herrera & J. Bittner 9582* (COL, JAUM, PSO); La Florida, 2300 m, 3, 5 ago 1977, fl, fr, *S. Díaz P. & al. 1020* (COL); Tangua, 2200 m, 6 mar 1963, fl, *S. Espinal 1073* (COL); Tangua, 2300 m, 28 sep 2002, fl, fr, *J.L. Fernández-Alonso & al. 19935* (COL); vía Tangua-El Placer, vereda Cocha Verde, 1 oct 2002, fl, fr, *J.L. Fernández-Alonso & al. 19954* (COL); ca. Chiles, 3200 m, 30 oct 1955, fl, *A. Fernández-Pérez. 2917* (COL); Pasto, 1 abr 1940, fl, fr, *M. de Garganta s/n* (COL); Pandiaco, 6 feb 1941, fl, *M. de Garganta 338* (COL); Chachagui, vía Chachagui-Sánchez, 1960 m, 1 dic 1978, fl, *Guarín, R. 45* (COL, UPTC); Túquerres, 3100 m, , 8 sep 1975, fl, fr, *S. López-P. & al. 3799* (COL); Pasto-San José, 2470 m, 20 nov 1984, fl, *B. R. Ramírez 218* (COL); San Lorenzo, El Carmen, 1980 m, 14 nov 2007, fl, fr, , fl, *B. Ramírez 19826* (CAUP,COL); Pasto, jun 1953, fr, *J.J. Triana & al. 18* (COL); Consaca, 2200 m, 26 jul 1965, fl, fr, *L. Uribe U. 5295* (COL). **Putumayo.** Colón, 2300 m, 4 may 1939, fl, *A. H. Alston 8357* (COL); Sibundoy, 2224 m, 2 ago 1956, fl, *A. S. Barclay & al. 328* (COL); Valle del Sibundoy, 2200 m, 1 ene 1941, fl, fr, *J. Cuatrecasas 11560* (COL); Sibundoy, 2200 m, , 6 nov 1989, fl, *R. Sánchez & al. 1256* (COL); Sibundoy, 2225-2300, 29 may 1946, fl, fr, *R. E. Schultes & al. 7603* (COL); Sibundoy-Santiago, 2500 m, 30 oct 1983, fl, fr, *J.R.I. Wood 4071* (COL). **Valle del Cauca.** Cali-Buenaventura, 18 nov 1963, fl, fr, *P. Hutchison & al. 3048* (COL). Colombia: **Sin localidad.** Sommet de la Cordillere Occidental 2000 m, 7 nov 1999, fl, *E. Langlassé 42* (P); *J.C. Mutis 708(2 pl)*; *J.C. Mutis 710* (MA-MUT). ECUADOR. **Ambato.** 2300 m, 14 nov 1932, fl, *E. Heinrichs s.n.* (MA). **Cotopaxi.** Pilaló, 2600-2630 m, 19 feb 1991, fl, fr, *P.M. Jorgensen & al. 93027* (COL); Cantón Sigchos, 3176 m, 23 jul 2003, fl, *J. Ramos et al 6471* (COL, CUVC); Cantón Pujilí, 1900 m, 5 ago 2003, fl, fr, *P. Silverstone et al 9791* (COL-, CUVC). **Napo.** 2450-2550 m, 30 dic 1976, fl, *H. Balslev & al. 10481* (COL). **Pichincha.** Valle de Lloa, al O. de Quito, 3000 m, 2 feb 1981, fl, *H. Balslev 1903* (AAU, MEXU); Vía Quito-Santo Domingo de los Colorados, 2100 m, 11 may 1985, fl, *B. Eriksen 59317* (COL); “Bosque Protector Pasochoa”, 30 km S de Quito, 2850-3550 m, 16 ago 1986, fl, fr, *P.M. Jorgensen 61468* (COL); Herbario Isern, Ceibo- Guaranda, año 1864, fl, *Isern 1684* (2 pl) (MA); ibidem, Quito, *Isern, 1360, 1361, 1362, 1364* (MA); Plantae Aequatoriales, sive Andium quitensium, prope Quito, *W. Jameson 685* (P); “*Salvia 8/ Camino de Guayaquil a Gua-*

randa/ Nee dedit (Expedicion Malaespina)” Nee s.n. (MA). **Tungurahua.** El Triunfo-Playon río Muyu, 3050 m, 3 mar 1989, fl, *C. Josse 439* (COL). **Sin loc.** (precisa): *Nee Iter (Expedicion Malaespina)” [Salvia tortuosa Kunth/ det. J.L. Fernández-Alonso/ 2012], Nee s.n.* MA 255911, MA 255920).

16.- *Salvia venulosa* Epling, Repert. Spec. Nov. Regni. Veg. Beih. 85: 105. 1935. -Tipo: COLOMBIA: **Risaralda**, Cordillera Central, [“Caldas”], Belen, Moist openbank, 1500-1700 m, 15 sep 1922 fl, *F.W. Pennell 10616* (Holotypus PH; isotypus US1143383).

Distribución: COLOMBIA: Antioquia, Risaralda (**Fernández-Alonso**, 2003a, **Fernández-Alonso & Rivera-Díaz**, 2006).

Material representativo revisado Antioquia. Betania, Farallones del Citará, Las Canoas, río Pedral, 1730 m, 12 nov 1997, fl, *R. Fonnegra & al. 6604* (HUA). **Risaralda.** Vertiente Occidental Cordillera Occidental, municipio de Pueblo Rico, carretera Apia – Pueblo Rico, 2000 m, 28 jul 1991, fl, *F.J. Roldán & al. 1622* (HUA); Marsella, corregimiento La Nona, 1700-2000 m, 12 mar 1999, fl, *W. Vargas 5684* (COL).

Especie excluida:

Salvia tubifera Cav. ubicada originalmente por **Epling** (1939) en la sección *Tubiflorae*, fué mas tarde analizada por **Ramamoorthy** (1984a,b), que la consideró mas próxima a *S. nervata* Mat. & Gal. (sección *Curtiflorae*) que al resto de las especies de la sección *Tubiflorae* y propuso su transferencia formal a dicha sección *Curtiflorae*.

Salvia tubifera Cav. Icon. [Cavanilles] i. 16. t. 25. 1791. -Tipo: MEXICO, Plantae Novae Hispaniae a Sesse, Mociño, Castillo & Maldonado lectae, 1787-1804, “*S.revoluta N. ic./N 122/ Cav. tubifera*” / *Sesse & Mociño 227* (MA 604471).

Material representativo revisado: MÉXICO: sin. loc. Plantae Novae Hispaniae a Sesse., 1787-1804, fl / *Salvia tubifera* Cav., det: C. Epling 1936/ MA 604472; *Cavanillesii Typi*, “*Salvia tubifera* Icon. t 25” / *Salvia tubifera* Cav. fl, MA 476241 (Lectótipo, designado por Ramamoorthy, 1984); ibidem, .”*Salvia tubifera* Cav. l.c./ Ex Hort. Matr.1806 MA 476241; Herbario general. MEXICO?, sin fecha ni recolector. “*Salvia? 70*”, fl, [*Salvia tubifera* Cav., det J.L. Fernández, VII-2012], MA-255843 (2 pl.), 292404; Herb. Cedido Inst. Enseñ. Sec. San Isidro/ mar 1993. “*Salvia longiflora W / S.tubiflora Cab.*” [*Salvia tubifera* Cav., det J.L. Fernández, VII-2012], MA 573801.

Agradecimientos

A COLCIENCIAS y a la Universidad Nacional de Colombia por la financiación del Proyecto de *Prospección, Detección, Purificación y Caracterización parcial de Lectinas en Labiatae* (1998-2007) y al Ministerio de Agricultura y Desarrollo Rural por el proyecto *Conservación e identificación de especies aromáticas nativas promisorias por su contenido de aceites esenciales*, durante los cuales se realizaron recolecciones de Labiatae en territorio colombiano y se contó con cultivos experimentales de seguimiento del género *Salvia* en el campus de la Universidad Nacional. A C. N. Díaz, M. A. Puerto y S. Albesiano por su colaboración en los trabajos de campo adelantados en Cundinamarca y Santander en 2007-2009 y a la profesora M. I. Chacón, de la Facultad de Agronomía de la Universidad Nacional de Colombia, coordinadora del Proyecto de Aromáticas por todas las facilidades. Al CSIC y al Ministerio de Ciencia e Innovación de España por la financiación del proyecto CGL 2010-19747, que facilitó el desplazamiento a Colombia, la recolección y el seguimiento en cultivo de cuatro de especies aquí tratadas. A los curadores de los herbarios COL y MA por facilitar el trámite de los préstamos de Herbario. A M. Morales, por la excelente ilustración de *Salvia guacana*.

Quiero por último dedicar este trabajo a la memoria del respetado Profesor, Académico y Bioquímico de la Universidad Nacional de Colombia, Dr. Gerardo Pérez Gómez, colega recientemente fallecido. Con él, con la profesora N. Vega y con varios de sus estudiantes del Laboratorio de Bioquímica, tuve la suerte de trabajar en un interesante proyecto conjunto sobre prospección, purificación y caracterización de lectinas de la familia Labiatae, que nos llevó a compartir varias jornadas de campo y de laboratorio y a recorrer muchas regiones montañosas de Colombia buscando salvas y mastrantos.

Referencias bibliográficas

- Acevedo-Rodríguez, P. & M.T. Strong.** 2012. Catalogue of Seed Plants of the West Indies. *Smithsonian Contr. Bot.* 98. Washington D.C.
- Adams, C.D.** 1972. *Flowering Plants of Jamaica*. University Press, Glasgow.
- Arnold, M. L.** 1997. *Natural hybridization and evolution*. New York, Oxford University Press.
- Bentham, G.** 1876. Labiatae. In: G. Bentham & J. D. Hooker. *Genera Plantarum* 2: 1160–1196.
- Dressler, R. L.** 1981. *The Orchids: Natural History and Classification*. Harvard University Press, Cambridge.
- Epling, C.** 1936. Synopsis of the South American Labiatae. *Repert. Spec. Nov. Regni Veg. Beih.* 85: 1-192.
- Epling, C.** 1939. A Revision of *Salvia* subgenus *Calosphace*. *Repert. Spec. Nov. Regni Veg. Beih.* 110: 1-383
- Epling, C.** 1944. Supplementary notes on American Labiatae III. *Bull. Torrey Bot. Club* 71: 484–497.
- Epling, C.** 1951. Supplementary notes on American Labiatae V. *Brittonia* 7: 129–142.
- Epling, C. & M. E. Mathias.** 1957. Supplementary notes on American Labiatae VI. *Brittonia* 8: 297–313.
- Epling, C. & J.F. Toledo.** 1943. Labiadas (p.p.) en: F.C. Hoehne (ed.). *Flora Brasílica* 48. pp. 1-107, tab. 1-42. Sao Paulo, Brasil.
- Fernández-Alonso, J. L.** 1991. Dos nuevos híbridos en *Salvia* (Labiatae) con potencial ornamental. *Trianea* 4: 329-340.
- Fernández-Alonso, J. L.** 1995. Estudios en Labiatae de Colombia I. Novedades en los géneros *Salvia* e *Hyptis*. *Rev. Acad. Colomb. Cienc. Exact.* 19: 469-480.
- Fernández-Alonso, J.L.** 2002. Estudios en Labiatae de Colombia III. Novedades en *Lepechinia* Willd., *Salvia* L. y *Satureja* L. *Anales Jard. Bot. Madrid* 59 (2): 344–348
- Fernández-Alonso, J.L.** 2003a. Estudios en Labiatae de Colombia IV. Novedades en *Salvia* y sinopsis de las secciones *Angulatae* y *Purpureae*. *Caldasia* 25(2): 235-281.
- Fernández-Alonso, J. L.** 2003b. Algunos patrones de distribución y endemismo en plantas vasculares de los páramos de Colombia, pp. 213-240. En C. A. Jaramillo & al. (eds.) *Memorias del Congreso Mundial de Páramos, Tomo I, Mayo 2002*. Ministerio de Medio Ambiente. Bogotá.
- Fernández-Alonso, J. L.** 2006. Revisión taxonómica de *Salvia* sect. *Siphonantha* (Labiatae). *Anales Jard. Bot. Madrid* 63 (2): 145-157.
- Fernández-Alonso, J.L.** 2008a. Estudios en Labiatae VII – Hibridación en el género *Salvia* en Colombia y su interés horticultural. *Caldasia* 30(1): 21-48.
- Fernández-Alonso, J.L.** 2008b. Estudios en Labiatae VI – *Salvia yukuparum*, nueva especie y primer representante de la Sección *Tomentellae* en Colombia. *Novon* 18: 38-42.
- Fernández-Alonso, J.L.** 2010. Una nueva especie de *Hyptis* (Labiatae) de Colombia. *Anales Jard. Bot. Madrid.* 67(2): 127-135.
- Fernández-Alonso, J.L.** 2012. Labiatae. en: Bernal, R., S. R. Gradstein & M. Celis (eds.). *Catálogo de las Plantas de Colombia*. Instituto de Ciencias Naturales – Universidad de Göttingen. Bogotá y Göttingen. Catálogo de la Flora de Colombia. (en prensa).
- Fernández-Alonso, J.L. & M.I. Chacón Sánchez.** 2012. *Catálogo de las especies aromáticas de la Provincia del Sumapaz y de la Cuenca del río Chicamocha*. Programa Aprovechamiento de aceites esenciales de especies nativas y foráneas promisorias de uso agrícola en Colombia. Universidad Nacional de Colombia, Facultad de Agronomía, sede Bogotá. 178 pp. (en prensa).
- Fernández-Alonso, J. L., & O. Rivera-Díaz.** 2006. Labiatae. pp. 385-582, en: N. García & G. Galeano (eds.) *Libro Rojo de Plantas de Colombia* - 3. Serie Libros Rojos de especies amenazadas de Colombia. Instituto Alexander von Humboldt – Instituto de Ciencias Naturales de la Universidad Nacional de Colombia – Ministerio de Ambiente, Vivienda y Desarrollo Territorial. Bogotá.
- Fernández-Alonso, J. L., Vega, N., J.J. Filgueira & G. Pérez.** 2003. Lectin prospecting in Colombian Labiatae. A systematic-ecological approach. *Biochem. Syst. Ecol.* 31: 617-633.
- Fernández-Alonso, J.L., Vega, N. & G. Pérez.** 2009. Lectin prospecting in Colombian Labiatae. A systematic-ecological approach.- III. Mainly exotic species (cultivated or naturalised). *Caldasia* 31(2): 227-245.
- Gilli, A.** 1983. Beiträge zur Flora von Ecuador. 3. Sympetalae. *Feddes Report.* 94: 303–322.
- González-Gallegos, J.G., J.G. Morales-Arias & J.L. Rodríguez-Hernández.** 2012. *Salvia cacomensis* (Lamiaceae), a new species from Jalisco, México. *Rev. Mex. Biodiversidad* 83: 341-346.

- Harley, R. M., S. Atkins, A. L. Budantsev, P. D. Cantino, B. J. Conn, R. Grayer, M. M. Harley, R. de Kok, T. Krestovkaja, R. Morales, A. J. Paton, O. Ryding & T. Upson.** 2004. *Salvia* L. In: Kubizki, K. (ed.). *The Families and Genera of Vascular Plants* 7: 235–236.
- Harley, R., Franca, F. Santos, E.P. & Santos, J.S.** 2010. Lamiaceae in: *Lista de Espécies da Flora do Brasil*. Jardim Botânico do Rio de Janeiro. (<http://floradobrasil.jbrj.gov.br/>).
- Holmgren, P. K., Holmgren, N. H. & L. C. Barnett.** 1990. *Index Herbariorum*, I. New York Botanical Garden
- IUCN.** 2003. Directrices para emplear los criterios de la Lista Roja de la IUCN a nivel nacional y regional – Versión 3.0 – Preparados por la Comisión de supervivencia de Especies de la UICN. IUCN – Unión Mundial para la Naturaleza.
- Klitgaard, B.B.** 2007. Three new species in *Salvia* subgenus *Calospatha* (Lamiaceae) from Mesoamérica. *Novon* 17(2): 206–211.
- Klitgaard, B.B.** 2012. *Salvia*, pp. 396–424, en: Davidse, G., M. Sousa, S. Knap & F. Chiang (eds.) *Flora Mesoamericana* 4(2) Rubiaceae a Verbenaceae. Missouri Botanical Garden Press. U.S.A.
- Lioger, A.H.** 1994. *Salvia*, pp. 293–314. *La flora de la Española* VI. Universidad Central del Este, 70. Santo Domingo. República Dominicana.
- Ramamoorthy, T. P.** 1984a. Notes on *Salvia* (Labiatae) in Mexico with three new species. *J. Arnold Arbor.* 65: 135–143.
- Ramamoorthy, T. P.** 1984b. Typifications in *Salvia* (Lamiaceae). *Taxon* 33: 322–324.
- Rieseberg, L. H.** 1997. Hybrid origins of plant species. *Ann. Rev. Ecol & Syst.* 28: 359–389.
- Rivera-Díaz, O. & J.L. Fernández-Alonso.** 2003. Análisis corológico de la flora endémica de la Serranía de Perijá, Colombia. *Anales Jard. Bot. Madrid* 60(2): 347–369.
- Torke, B.M.** 2000. A revisión of *Salvia* sect. *Ekmania* (Lamiaceae). *Brittonia* 52(3): 265–302.
- Urban, I.** 1899. *Symbolae Antillanae* I. Berlin, Leipzig, Germany.
- Veliz-Pérez, M.E. & T.S. Quedensley.** 2011. *Salvia cacumensis* (Lamiaceae), a new species from Guatemala. *J. Bot. Res. Inst. Texas* 5(2): 471 – 474. 2011
- Walker, J. B. & K. J. Sytsma.** 2007. Staminal evolution in the genus *Salvia* (Lamiaceae): Molecular phylogenetic evidence for multiple origins of the staminal lever. *Ann. Bot. (Oxford)* 100: 375–391.
- Walker, J. B., K. J. Sytsma, J. Treutlein & M. Wink.** 2004. *Salvia* (Lamiaceae) is not monophyletic: Implications for the systematics, radiation, and ecological specializations of *Salvia* and tribe *Mentheae*. *Amer. J. Bot.* 91: 115–1125.
- Wester, P. & R. Classen-Bockhoff.** 2007. Floral diversity and pollen transfer mechanisms in bird-pollinated *Salvia* species. *Ann. Bot.* 100: 401–421.
- Wood, J. R. I. & R. M. Harley.** 1989. The genus *Salvia* in Colombia. *Kew Bull.* 44: 211–279.

BIOQUÍMICA

CARACTERIZACIÓN TEÓRICA DE PÉPTIDOS DE ALTA UNIÓN DE EBA-181 MEDIANTE LA APLICACIÓN DE LA TEORÍA DE LA PROBABILIDAD Y LA ENTROPÍA

Javier Rodríguez, Signed Prieto, Pedro Bernal, Catalina Correa,
Sarith Vitery, Jessica Mora, Luisa Álvarez, Diego Tapia, Fredy López*

RESUMEN

Rodríguez J., S. Prieto, P. Bernal, C. Correa, S. Vitery, J. Mora, L. Álvarez, D. Tapia, F. López: Caracterización teórica de péptidos de alta unión de EBA-181 mediante la aplicación de la teoría de la probabilidad y la entropía. Rev. Acad. Colomb. Cienc. **36** (141): 363-371, 2012. ISSN 0370-3908.

El antígeno EBA-181 del *Plasmodium falciparum* se une al glóbulo rojo sugiriendo un papel en la invasión por parte del merozoito. Se aplicó una metodología previamente desarrollada con base en la probabilidad y la entropía, a la caracterización de péptidos de alta unión de EBA-181 al glóbulo rojo. Se calcularon los valores de probabilidad, sumatoria de probabilidad y entropía para las 79 secuencias no superpuestas de la proteína; también se efectuaron los cálculos para péptidos teóricos análogos construidos a partir de los péptidos de unión. Las secuencias específicas comprobadas experimentalmente como de alta unión presentaron valores dentro de los rangos asociados al macroestado unión, diferenciando las secuencias que se unen de las que no con un acierto en el 100% de los casos estudiados.

Palabras Clave: Probabilidad, entropía, alta unión, EBA-181, eritrocito, merozoito.

ABSTRACT

EBA-181, antigen of *Plasmodium falciparum*, binds to red blood cells, suggesting a role in the merozoite invasion. It was applied a previously developed methodology based on probability and entropy, to the characterization of high-binding EBA-181 peptides to red blood cells. Values of probability, probability summation and entropy were calculated for the 79 not overlapped sequences of the protein; the calculations were also made for analogous theoretical peptides, built from the binding peptides. The specific sequences experimentally proved as high binding ones had values into the ranges associated to the binding macrostate, differentiating the sequences that bind and not bind with a right guess of 100% in the studied cases.

Key Words: Probability, Entropy, High binding, EBA-181, erythrocyte, merozoite.

* Grupo Insight. Universidad Militar Nueva Granada. Centro de Investigaciones de la Clínica del Country

Introducción

La malaria es una enfermedad parasitaria que se presenta especialmente en áreas tropicales constituyendo en el mundo una de las principales causas de morbimortalidad (**World Health Organization**, 2009; **Shuman**, 2010; **Ministerio de Protección Social**, 2006). Un significativo número de los individuos que padecen de malaria son contagiados por el *Plasmodium falciparum*. La invasión periódica del *Plasmodium* a los eritrocitos es un proceso que requiere el reconocimiento, unión, orientación e internalización del merozoito dentro del eritrocito; cada una de estas acciones es mediada por interacciones receptor ligando, que caracterizan el ciclo eritrocítico de invasión de la malaria (**Aikawa et al.**, 1978; **Chitnis et al.**, 2000). La proteína del *Plasmodium falciparum* EBA-181 (o *Erythrocyte Binding Antigen-181*), es una proteína de 1567 aminoácidos, que tiene una estructura primaria característica de los miembros de la familia de proteínas *eb1*. La proteína EBA-181 se encuentra en micronemas y se expresa simultáneamente a la EBA-175, a la que además parece manifestar una función análoga, así como también a EBA-140 (**Adams et al.**, 2001; **Gilberger et al.**, 2003). La expresión de EBA-181 difiere a lo largo de las cepas de *P. falciparum*. Su estructura primaria y el hecho de que se une a los glóbulos rojos, sugiere que desempeña un papel en la invasión del merozoito. La interrupción selectiva del gen EBA-181 no ha tenido ningún efecto sobre el fenotipo de invasión del parásito, lo que sugiere que podría actuar como un ligando alternativo (**Mayer et al.**, 2004).

Para cuantificar la posibilidad de ocurrencia de un evento es empleada una medida matemática denominada probabilidad (**Feynman et al.**, 1998a). En algunos sistemas complejos, como el gaseoso, el análisis individual de cada partícula no permite establecer su estado dinámico, pues tienen un número de moléculas del orden del número de Avogadro (10^{23}), por lo tanto se debería emplear 10^{23} ecuaciones diferenciales. Surgieron teorías nuevas para solucionar este problema: la termodinámica y la mecánica estadística. La medida proporcional al logaritmo del número establecido de microestados propios de un sistema en estado de equilibrio para que desde el punto de vista macroscópico, éste permanezca, está dada por la definición de la Entropía dada por Boltzmann en el contexto de la teoría cinética de los gases (**Feynman et al.**, 1998b). Después de la termodinámica se fundamentó la mecánica estadística, con las probabilidades de las distribuciones microscópicas (**Feynman et al.**, 1998b).

Las definiciones de macroestado y microestado han sido utilizadas con el objetivo de caracterizar el estado de sistemas como el gaseoso, y se ha dicho que la primera indica una distribución general del sistema, mientras que la definición

de microestado señala las distintas configuraciones posibles para estas distribuciones. **Shannon** expresó que el concepto de la entropía de la mecánica estadística corresponde al encontrado en la teoría de la información, al buscar la forma de cuantificar la cantidad de información que contiene cualquier mensaje, con su correspondiente análisis como medida objetiva de la cantidad de información que posee un sistema (**Frodden et al.**, 2004).

La probabilidad y la entropía fueron aplicadas para el desarrollo de una nueva metodología de caracterización de péptidos de alta unión al eritrocito (**Rodríguez**, 2008a); se analizaron la totalidad de las secuencias de 20 aminoácidos componentes de la proteína de superficie del merozoito MSP-1, encontrando para las secuencias comprobadas experimentalmente de unión, valores de probabilidad, sumatoria de probabilidad y entropía dentro de los rangos asociados al macroestado de unión, y valores fuera de estos rangos para las secuencias de no unión, diferenciando acertadamente la pertenencia de las secuencias a cada uno de los macroestados en el 100% de los casos (**Rodríguez**, 2008a). Estos resultados son importantes pues evidenciaron un orden físico y matemático del fenómeno de unión, lo cual es importante para posteriormente realizar predicciones de unión ligando receptor, cruciales para la biología molecular. Desde esta perspectiva es necesario aplicar esta metodología a otras proteínas para comprobar su alcance. En este contexto, el propósito de este trabajo es la caracterización matemática de la unión de péptidos de la proteína EBA-181 al receptor del glóbulo rojo, mediante la aplicación de la metodología mencionada con base en la teoría de la probabilidad y la ley de la entropía.

Definiciones

Macroestado de unión: Representa a las secuencias que muestran alta unión al receptor del glóbulo rojo (**Rodríguez**, 2008a).

Macroestado de no unión: Representa a las secuencias que no muestran alta unión al receptor del glóbulo rojo (**Rodríguez**, 2008a).

Microestado: Cada una de las secuencias compuesta por un total de veinte aminoácidos (**Rodríguez**, 2008a).

Tipo de secuencia: Grupo particular de microestados que presentan valores similares de probabilidad, sumatoria de probabilidad y entropía (**Rodríguez**, 2008a).

Probabilidad Laplaciana [P(A_i): Probabilidad de un aminoácido A en una posición específica i, en la que se establece la relación entre la frecuencia de aparición de dicho aminoá-

cido en una posición específica y el total de aminoácidos (Feynman *et al.*, 1998a).

Ecuación 1

$$P(A_i) = \frac{\text{Frecuencia de aparición del aminoácido A en la posición } i}{\text{Total de aminoácidos}}$$

Probabilidad de una secuencia [P(S)]: Resulta de la multiplicación de las probabilidades de los aminoácidos constituyentes por posición específica *i* (Feynman *et al.*, 1998a).

Ecuación 2

$$P(S) = \prod_{i=1}^{20} P(A_i)$$

Sumatoria de probabilidad (SumP): Resulta de la suma de las probabilidades aisladas de cada aminoácido que conforma cada secuencia, en donde se cuantifican las probabilidades de aparición de un aminoácido particular en una posición específica.

Ecuación 3

$$\text{SumP} = \sum_{i=1}^{20} P(A_i)$$

Entropía (S): Cuando se trata de sistemas que se componen de múltiples microestados con probabilidades divergentes, la entropía se define como (Frodden *et al.*, 2004):

Ecuación 4

$$S = -k \sum_{i=1}^{20} P(A_i) \times \ln P(A_i)$$

k = Constante de Boltzmann [$1,38 \times 10^{-23}$ (J/K)].

S = Valor de la entropía.

$P(A_i)$ = Valor de la probabilidad del aminoácido A en la posición *i*.

Materiales y métodos

Se estudiaron las 79 secuencias de 20 aminoácidos de longitud de la proteína EBA-181 reportadas por Vera-Bravo *et al.* (2005), sin ningún tipo de solapamiento. Sólo de ellas 5 han sido comprobadas experimentalmente de alta unión al receptor del glóbulo rojo (Vera-Bravo *et al.*, 2005), mientras que las 74 restantes no son de alta unión. A partir de estas secuencias conocidas como de alta unión se estableció la frecuencia de aparición de cada uno de los 20 aminoácidos existentes en las 20 posibles posiciones para las secuencias

peptídicas, con la cual se construyó el espacio total de probabilidad, en el cual se determina la probabilidad laplaciana de las 5 secuencias comprobadas experimentalmente como de alta unión, mediante la ecuación 1. Un proceso idéntico se realizó con los 74 péptidos de 20 aminoácidos de no unión al receptor del glóbulo rojo, determinado de esta forma un espacio de probabilidad para el macroestado de no unión.

Con el fin de realizar la caracterización matemática de cada uno de los macroestados, tanto de unión como de no unión, se determinan los valores de probabilidad a partir de la Ecuación 2, sumatoria de probabilidad de acuerdo con la Ecuación 3 y de entropía con la ecuación 4, para la totalidad de los péptidos de EBA-181, tal como se efectuó en el trabajo previo (Rodríguez 2008a).

Tras determinar los valores característicos de cada macroestado, se crearon análogos teóricos de los péptidos de unión, y se realizaron los cálculos correspondientes de probabilidad, sumatoria de probabilidad y entropía, para así comparar el péptido de unión con cada uno de sus posibles péptidos análogos, al reemplazar cada uno de sus residuos constitutivos por Glicina, y con estas mutaciones teóricas ver la diferencia de los valores encontrados para cada una de ellas con respecto al péptido inicial.

Resultados

Para las 5 secuencias asociadas al macroestado de unión, las frecuencias de aparición de los aminoácidos se establecieron entre 0 y 3, correspondiendo este número mayor al aminoácido I en la posición 5 (Tabla 1). En el caso de las secuencias peptídicas asociadas al macroestado de unión la probabilidad laplaciana por posición específica se mantuvo entre 0 y 0,030, siendo el valor máximo asociado al aminoácido I, que tuvo mayor número de repeticiones en la posición 5 (Tabla 2).

Paralelamente, las secuencias asociadas al macroestado de no unión presentaron frecuencias de aparición de los aminoácidos por posición específica que variaron entre 0 y 14, asociándose este valor mayor al aminoácido E en la posición 9 (tabla 3), el cual además corresponde a la mayor probabilidad laplaciana presentada para el macroestado de no-unión, cuyo valor fue 0,009 (tabla 4).

Los valores de probabilidad, sumatoria de probabilidad y entropía para el macroestado de unión variaron entre 8,00E-40 y 1,60E-39, 0,23 y 0,026, y 1,53E-23 y 1,40E-23 respectivamente.

Para el macroestado de no unión los valores de probabilidad se encontraron entre 2,00E-22 y 1, los de sumatoria de probabilidad oscilaron entre 0 y 0,12, y los valores de entropía

Tabla 1. Frecuencias de aparición de los 20 aminoácidos por posición del macroestado de unión para la proteína EBA-181. Los espacios en blanco corresponden a frecuencias de aparición igual a cero, las columnas corresponden a cada aminoácido y las filas a las 20 posiciones en los 5 péptidos con alta unión de EBA-181.

Posición	W	F	Y	I	L	M	V	D	E	R	H	K	P	G	Q	S	T	C	N	A
1					1			1				1				1	1			
2		1		1	1							1						1		
3	1				1		1	1	1											
4		1								1		2								1
5				3								2								
6				1				1			1	1	1							
7		1							1			1		1		1				
8		1	1		1					1							1			
9				1					2				1	1						
10		1			1		1			1										1
11						1		1	2			1								
12			1										1	1						2
13									1					1	2		1			
14		1	1		1							1								1
15		1	1		1						1									1
16									1	2								1	1	
17	1		1						1	1		1								
18		1	1									1	1							1
19				1			1									2		1		
20		1				1									1	1			1	
Total	2	9	6	7	7	2	3	4	9	6	2	12	4	4	3	5	3	3	8	1

Tabla 2. Cálculos de probabilidad laplaciana para los 20 aminoácidos por posición del macroestado de unión para la proteína EBA-181. Los espacios en blanco corresponden a frecuencias de aparición igual a cero.

Posición	W	F	Y	I	L	M	V	D	E	R	H	K	P	G	Q	S	T	C	N	A
1					0,010			0,010				0,010				0,010	0,010			
2		0,010		0,010	0,010							0,010						0,010		
3	0,010				0,010		0,010	0,010	0,010											
4		0,010								0,010		0,020								0,010
5	0,030											0,020								
6				0,010				0,010		0,010	0,010	0,010								
7		0,010							0,010			0,010		0,010		0,010				
8		0,010	0,010		0,010					0,010								0,010		
9				0,010					0,020				0,010	0,010						
10		0,010			0,010		0,010			0,010										0,010
11						0,010		0,010	0,020			0,010								
12			0,010										0,010	0,010						0,020
13									0,010					0,010	0,020		0,010			
14		0,010	0,010		0,010							0,010								0,010
15		0,010	0,010		0,010						0,010									0,01
16									0,010	0,020								0,010	0,010	
17	0,010		0,010						0,010	0,010		0,010								
18		0,010	0,010									0,010	0,010							0,010
19				0,010			0,010									0,020		0,010		
20		0,010				0,010									0,010	0,010			0,010	
Total	0,020	0,090	0,060	0,070	0,070	0,020	0,030	0,040	0,090	0,060	0,020	0,120	0,040	0,040	0,030	0,050	0,030	0,030	0,080	0,010

se encontraron en el rango comprendido entre $6,36E-25$ y $1,27E-24$ (tabla 5), encontrándose además un valor de 0, correspondiente a una de las secuencias peptídicas de no unión, que además de este valor específico de entropía, presentó valores bien diferenciados dentro del rango de valores de no unión, siendo la secuencia FRKQRFTSMHYIAGGGIAL, cuyos valores respectivos de probabilidad y sumatoria de probabilidad fueron 1 y 0.

Los valores de probabilidad, sumatoria de probabilidad y entropía de las secuencias peptídicas comprobadas experimentalmente como de alta unión se mantuvieron dentro del rango asociado al macroestado de unión, que se mantiene en un rango diferenciado del hallado para el macroestado de no unión.

Para las 20 secuencias teóricas del péptido de unión 30030, los valores de probabilidad oscilaron entre $4,80E-39$ y $1,60E-37$, siendo el primero de ellos equivalente al hallado en el péptido original; los valores de sumatoria de probabilidad estuvieron entre 0,24 y 0,26, siendo este último el obtenido en el péptido original, y los valores de entropía se encontraron entre $1,53E-23$ y $1,39E-23$, correspondiendo el primero de

ellos al hallado para el original. Los valores calculados para las mutaciones teóricas de este péptido, se muestran como ejemplo de estos resultados teóricos en la Tabla 6. Para las 18 secuencias teóricas generadas como análogas al péptido 30031 los valores de probabilidad, sumatoria de probabilidad y entropía oscilaron entre $6,00E-40$ y $2,00E-38$, entre 0,2 y 0,23, y entre $1,40E-23$ y $1,25E-23$ respectivamente. Para las 19 secuencias teóricas análogas del péptido 30045, los valores de probabilidad se encontraron entre $8,00E-40$ y $4,00E-38$, los valores de sumatoria de probabilidad estuvieron entre 0,21 y 0,23, y los valores de entropía entre $1,40E-23$ y $1,30E-23$. Para las 19 secuencias teóricas del péptido 30051, los valores se encontraron respectivamente entre $8,00E-40$ y $1,60E-37$, entre 0,22 y 0,24, y entre $1,45E-23$ y $1,34E-23$. Finalmente, para las 20 secuencias teóricas generadas para el péptido 30056, los valores de probabilidad oscilaron entre $4,80E-39$ y $1,60E-37$, los valores de sumatoria de probabilidad estuvieron entre 0,23 y 0,26, y los valores de entropía se hallaron entre $1,53E-23$ y $1,39E-23$. La variación en la cantidad de secuencias teóricas generadas para cada péptido de unión se debe a la cantidad de glicinas (G) que presenta cada uno en su secuencia; por ejemplo, para el péptido 30031

Tabla 3. Frecuencias de aparición de los 20 aminoácidos por posición del macroestado de no unión para la proteína EBA-181. Los espacios en blanco corresponden a frecuencias de aparición igual a cero, las columnas corresponden a cada aminoácido y las filas a las 20 posiciones en los 74 péptidos de no unión de EBA-181.

Posición	W	F	Y	I	L	M	V	D	E	R	H	K	P	G	Q	S	T	C	N	A
1	1	4	1	2	5	3	4	3	7	3	1	7	4	2	1	11	4	2	4	5
2	1	2	2	4	8	1	3	5	6	4		9	2	2	6	6	4		6	3
3	1	3	5	3		1	4	6	4	5	2	13	2	5	3	9	5		3	
4	1	2	2	4	4		9	9	11	4		6	1	3	5	2	1	2	8	
5	1	2	2	2	1	1	3	8	4	1	2	5	4	3	1	4	8	3	9	1
6		5	2	1	4	3	2	6	8	1	1	6	2	3	6	1	2	2	8	2
7		1	1	5	5	2	3	6	1	4		8	2	1	2	9	3	3	9	
8	1		1	6	7	3	3	2	7	5		5	1	2	4	13	2	4	5	3
9		1	3	7	3	1	3	6	14	2		5	4	4	1	5	3	3	6	3
10		4	2	6	4		4	3	11	2	3	7	1		8	6	4	1	7	1
11		3	4	4	3	1	3	6	1	2	1	6	2	6	2	6	5	1	6	3
12	2	3	2	5	7	1	4	3	7	1	1	13		4	4	4	6		6	1
13		1	4	2	8	2	4	5	7	2	1	7	1	2	3	8	4	1	1	2
14	2	1	1	2	8	1	7	6	5	4	2	2	1	6	6	7	2	2	7	2
15	1		3	2	6		6	9	11	3	1	5	2	2	2	6	4	1	8	2
16	2	1	2	2	2	1		1	7	2	1	1	5	6	6	3	5	2	7	
17	1	3	3	4	6		5	6	5	2	1	5	2	2	4	7	6	2	7	3
18	1	2	3	4	4		3	9	9	4	1	6	2	4	1	6	5	4	5	1
19		3	1	4	3		5	5	11	5		11	2	4	2	5	5	1	5	2
20		2	2	3	4	2	5	6	9	5	2	6	4	2	1	3	5	4	7	2
Total	15	43	46	72	101	23	80	119	163	61	20	142	44	63	68	130	83	38	133	36

(SFLNIKKYGRKGEYLNRSF) se generaron 18 secuencias, ya que este presenta dos glicinas en su secuencia, en las posiciones 9 y 12, de manera que estas posiciones no son reemplazadas. Los valores encontrados en todos los cálculos para los péptidos teóricos análogos generados se encontraron

dentro de los rangos hallados de unión y en ocasiones tomaron valores un poco menores a los hallados para dicho rango, pero en ningún caso se encontraron dentro de los rangos hallados para el macroestado de no-unión.

Tabla 4. Cálculos de probabilidad laplaciana para los 20 aminoácidos por posición del macroestado de no unión para la proteína EBA-181. Los espacios en blanco corresponden a frecuencias de aparición igual a cero.

Posición	W	F	Y	I	L	M	V	D	E	R	H	K	P	G	Q	S	T	C	N	A
1	0,001	0,003	0,001	0,001	0,003	0,002	0,003	0,002	0,005	0,002	0,001	0,005	0,003	0,001	0,001	0,007	0,003	0,001	0,003	0,03
2	0,001	0,001	0,001	0,003	0,005	0,001	0,002	0,003	0,004	0,003		0,006	0,001	0,001	0,004	0,004	0,003		0,004	0,002
3	0,001	0,002	0,003	0,002		0,001	0,003	0,004	0,003	0,003	0,001	0,009	0,001	0,003	0,002	0,006	0,003		0,002	
4	0,001	0,001	0,001	0,003	0,003		0,006	0,006	0,007	0,003		0,004	0,001	0,002	0,003	0,001	0,001	0,001	0,005	
5	0,001	0,001	0,001	0,001	0,007	0,001	0,002	0,005	0,003	0,001	0,001	0,003	0,003	0,002	0,001	0,003	0,005	0,002	0,006	0,001
6		0,003	0,001	0,001	0,003	0,002	0,001	0,004	0,005	0,001	0,001	0,004	0,001	0,002	0,004	0,007	0,001	0,001	0,005	0,001
7		0,001	0,001	0,003	0,003	0,001	0,002	0,004	0,007	0,003		0,005	0,001	0,001	0,001	0,006	0,002	0,002	0,006	
8	0,001		0,001	0,004	0,005	0,002	0,002	0,001	0,005	0,003		0,003	0,001	0,001	0,003	0,009	0,001	0,003	0,003	0,002
9		0,001	0,002	0,005	0,002	0,001	0,002	0,004	0,009	0,001		0,003	0,003	0,003	0,001	0,003	0,002	0,002	0,004	0,002
10		0,003	0,001	0,004	0,003		0,003	0,002	0,007	0,001	0,002	0,005	0,001		0,005	0,004	0,003	0,001	0,005	0,001
11		0,002	0,003	0,003	0,002	0,001	0,002	0,004	0,007	0,001	0,001	0,004	0,001	0,004	0,001	0,004	0,003	0,001	0,004	0,002
12	0,001	0,002	0,001	0,003	0,005	0,001	0,003	0,002	0,005	0,001	0,001	0,009		0,003	0,003	0,003	0,004		0,004	0,001
13		0,001	0,003	0,001	0,005	0,001	0,003	0,003	0,005	0,001	0,001	0,005	0,001	0,001	0,002	0,005	0,003	0,001	0,007	0,001
14	0,001	0,001	0,001	0,001	0,005	0,001	0,005	0,004	0,003	0,003	0,001	0,001	0,001	0,004	0,004	0,005	0,001	0,001	0,005	0,001
15	0,001		0,002	0,001	0,004		0,004	0,006	0,007	0,002	0,001	0,003	0,001	0,001	0,001	0,004	0,003	0,001	0,005	0,001
16	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001		0,007	0,005	0,001	0,001	0,007	0,003	0,004	0,004	0,002	0,003	0,001	0,005	
17	0,001	0,002	0,002	0,003	0,004		0,003	0,004	0,003	0,001	0,001	0,003	0,001	0,001	0,003	0,005	0,004	0,001	0,005	0,002
18	0,001	0,001	0,002	0,003	0,003		0,002	0,006	0,006	0,003	0,001	0,004	0,001	0,003	0,001	0,004	0,003	0,003	0,003	0,001
19		0,002	0,001	0,003	0,002		0,003	0,003	0,007	0,003		0,007	0,001	0,003	0,001	0,003	0,003	0,001	0,003	0,001
20		0,001	0,001	0,002	0,003	0,001	0,003	0,004	0,006	0,003	0,001	0,004	0,003	0,001	0,001	0,002	0,003	0,003	0,005	0,001
Total	0,010	0,029	0,031	0,049	0,068	0,16	0,054	0,080	0,110	0,041	0,014	0,096	0,030	0,043	0,046	0,088	0,056	0,026	0,090	0,024

Tabla 5. Valores máximos y mínimos de probabilidad, sumatoria de probabilidad y entropía para los macroestados de unión y de no unión, para la proteína EBA-181.

Macroestado	Valor	Probabilidad	Sumatoria de Probabilidad	Entropía
Unión	Min	8,00E-40	0,23	1,53E-23
	Max	1,60E-39	0,26	1,40E-23
No Unión	Min	2,00E-22	0	6,36E-25
	Max	1	0,12	1,27E-24

Tabla 6. Mutaciones Teóricas del péptido de unión 30030 de la proteína EBA-181. El sombreado es el péptido original.

PEPTIDO	Probabilidad	Sumatoria Probabilidad	Entropía
KKVKIISRPVENTLHRYPVS	4,80E-39	0,26	1,53E-23
GKVKIISRPVENTLHRYPVS	4,80E-37	0,25	1,47E-23
KGVKIISRPVENTLHRYPVS	4,80E-37	0,25	1,47E-23
KKGKIISRPVENTLHRYPVS	4,80E-37	0,25	1,47E-23
KKVGIISRPVENTLHRYPVS	2,40E-37	0,24	1,42E-23
KKVKGISRPVENTLHRYPVS	1,60E-37	0,23	1,39E-23
KKVKIGSRPVENTLHRYPVS	4,80E-37	0,25	1,47E-23
KKVKIIGRPVENTLHRYPVS	4,80E-39	0,26	1,53E-23
KKVKIISGPVENTLHRYPVS	4,80E-37	0,25	1,47E-23
KKVKIISRGVENTLHRYPVS	4,80E-39	0,26	1,53E-23
KKVKIISRPVENTLHRYPVS	4,80E-37	0,25	1,47E-23
KKVKIISRPVGNLHRYPVS	2,40E-37	0,24	1,42E-23
KKVKIISRPVEGLHRYPVS	2,40E-39	0,25	1,49E-23
KKVKIISRPVENGLHRYPVS	4,80E-39	0,26	1,53E-23
KKVKIISRPVENTGHRYPVS	4,80E-37	0,25	1,47E-23
KKVKIISRPVENTLGRYPVS	4,80E-37	0,25	1,47E-23
KKVKIISRPVENTLHGYPVS	2,40E-37	0,24	1,42E-23
KKVKIISRPVENTLHRGPVS	4,80E-37	0,25	1,47E-23
KKVKIISRPVENTLHRYGVS	4,80E-37	0,25	1,47E-23
KKVKIISRPVENTLHRYPGS	4,80E-37	0,25	1,47E-23
KKVKIISRPVENTLHRYPVG	4,80E-37	0,25	1,47E-23

Discusión

Este es el primer trabajo en el que a partir de una caracterización matemática del fenómeno de unión para la proteína EBA-181 mediante la probabilidad y la entropía, partiendo del análisis de la totalidad de secuencias peptídicas no sobrelapadas de 20 residuos de la proteína, se diferenciaron rangos de valores de probabilidad, sumatoria de probabilidad y entropía asociados a los macroestados de unión y de no unión, diferenciando las secuencias que se unen de las que no se unen con un acierto del 100% en los casos estudiados. Se crearon análogos teóricos de los péptidos de unión, reemplazando cada uno de sus aminoácidos constitutivos por glicina, a fin de comparar sus valores encontrados de probabilidad, sumatoria de probabilidad y entropía, con respecto a los hallados en el péptido original de unión desarrollando una primera metodología predictiva de este método experimental de ensayo y error. Este método de péptidos teóricos análogos es una metodología nueva en esta disciplina, que está siendo refinada para establecer predicciones útiles.

Este trabajo se basa en un estudio previo realizado por **Rodríguez** (2008a), en el que se desarrolló la metodología para la caracterización de péptidos de alta unión de la proteína MSP-1; esta metodología fue aplicada posteriormente a la

caracterización de péptidos de las proteínas EBA-140 (**Rodríguez et al.**, 2009a), y MSA-2 (**Rodríguez et al.**, 2009b), obteniendo el mismo nivel de acierto en todos los casos, equivalente al 100%. En estos trabajos se encontraron para todas las proteínas estudiadas rangos de valores diferenciados respectivos a los cálculos de probabilidad, sumatoria de probabilidad y entropía asociados a los macroestados de unión y de no unión; en el presente trabajo se hallaron valores dentro de rangos claramente diferenciados para todos los cálculos realizados, aclarando que para el caso de la entropía se encontró además un valor de 0 para una de las secuencias de no unión estudiadas, la secuencia FRKQRFTSMHYIAGGGIAL, cuyo valor de sumatoria de probabilidad también fue de 0, y cuyo valor de probabilidad correspondió al más alto valor encontrado, siendo equivalente a 1.

Esta metodología evidencia la existencia de un orden físico y matemático subyacente al fenómeno de unión implicado en la invasión al glóbulo rojo por el merozoito. Estos trabajos, realizados desde una perspectiva acausal, permiten una comprensión físico-matemática a partir de la cual sería posible generar predicciones que superen la efectividad inherente a la metodología de ensayo y error actualmente empleada, simplificando el proceso y economizando recursos. Desde esta perspectiva se han desarrollado teorías de predicción

para el fenómeno de unión de péptidos, que pueden ser útiles para facilitar la escogencia de péptidos a usar en el desarrollo de vacunas. La primera se basa en las leyes de probabilidad, combinatoria y entropía (Rodríguez 2008b), y fue aplicada a 100 secuencias específicas de péptidos teóricos, promiscuos, sintéticos y naturales que se unen a moléculas de HLA clase II y 61 péptidos que no se unen; se desarrolló una predicción de tipo teórico para el conjunto apropiado de secuencias que debe tener un péptido para ser presentado por el HLA clase II, con la que se acertó en el 100% de los casos comprobados experimentalmente. La segunda fue desarrollada con la teoría de la probabilidad (Rodríguez *et al.*, 2010), a partir de la cual se realizó una inducción con 45 péptidos específicos, calculando valores predictivos para los péptidos de unión y de no unión al glóbulo rojo; se realizaron medidas de desempeño de las predicciones respecto a los hallazgos experimentales, obteniendo como resultado una sensibilidad del 95% y una especificidad del 90%.

La perspectiva física acausal también ha sido base para el desarrollo de metodologías predictivas en otras áreas de la medicina. En el campo de la epidemiología, se desarrolló una predicción de la dinámica temporal de la malaria en 820 municipios de Colombia para los años 2003 a 2007, a partir de la probabilidad y la entropía, estableciendo relaciones específicas que permiten determinar la correspondencia o no de la dinámica a un brote (Rodríguez, 2010a); este método puede ser útil como soporte para la planificación de intervenciones y la toma de decisiones en salud pública. También se han hallado resultados predictivos en el área de cardiología, donde a partir de las concepciones de los sistemas dinámicos y la aplicación de leyes de la probabilidad y la entropía, se desarrolló una metodología que permite predecir las diferencias de las dinámicas cardíacas agudas, crónicas, normales y estados de evolución entre normalidad y enfermedad, la cual es útil como herramienta de ayuda diagnóstica en la clínica (Rodríguez 2010b). Con base en la geometría fractal se desarrolló una generalización teórica con la que se determinó un total de 69.049 prototipos arteriales posibles normales y enfermos en el proceso de restenosis, a partir de una simulación computacional basada en el concepto de Armonía Matemática Intrínseca aplicada a dimensiones fractales de los objetos componentes de las arterias (Rodríguez *et al.*, 2010c). En el área de morfofisiología celular, la geometría fractal y la aplicación de los conceptos de Armonía Matemática Intrínseca celular y de variabilidad, sustentan el desarrollo de un nuevo diagnóstico de las alteraciones celulares preneoplásicas y neoplásicas en citologías cervicales (Rodríguez, 2011). La ocupación de atractores caóticos en el espacio fractal de Box-counting, ha permitido la diferenciación entre dinámicas cardíacas agudas de aquellas dentro de límites de normalidad y con enfermedades crónicas, metodo-

logía diagnóstica aplicada obteniendo un valor de 100% de sensibilidad y especificidad, así como un coeficiente Kappa de 1, en el estudio comparativo de pacientes diagnosticados con enfermedad aguda y normales (Rodríguez *et al.*, 2011a).

El trabajo realizado evidencia ordenes físico-matemáticos subyacentes a los diversos fenómenos propios de la medicina, favoreciendo el desarrollo de métodos predictivos que no requieren de análisis estadísticos ni de grandes pruebas experimentales, como sucede específicamente con las pruebas de ensayo y error empleadas para el estudio del fenómeno de unión.

Agradecimientos

A la Universidad Militar Nueva Granada, especialmente a la Dra. Esperanza Fajardo, Directora de Investigaciones de la Facultad de Medicina, al Dr. Juan Miguel Estrada, Decano de la Facultad de Medicina y a la Vicerrectoría de investigaciones, en especial al Dr. Ricardo Cure Hakim, Vicerrector y a Henry Acuña, Jefe División de Investigación Científica, por su apoyo a nuestras investigaciones.

Este trabajo es resultado del proyecto de Investigación PIC MED-785, financiado por el Fondo de Investigaciones de la Universidad Militar Nueva Granada, por lo cual agradecemos su apoyo a nuestras investigaciones.

Al Centro de Investigaciones de la Clínica del Country, en especial a todas las personas que trabajan en el mismo, por su apoyo efectivo.

Dedicatoria

A nuestros hijos y a Joshua, ahijado del primer autor.

Referencias bibliográficas

- Adams JH, Blair PL, Kaneko O, Peterson DS. 2001. An expanding ebl family of Plasmodium falciparum. *Trend Parasitol.* **17**(6):297-9.
- Aikawa M, Miller LH, Johnson J, Rabbage. 1978. Erythrocyte entry by malarial parasites. A Moving junction between erythrocyte and parasite. *J Cell Biol.* **77**:72-82.
- Chitnis CE, Blackman MJ. 2000. Host cell invasion by malaria parasites. *Parasitol.* **16**:411-415.
- Gilberger TW, Thompson JK, Reed MB, Good RT, Cowman AF. 2003. The cytoplasmic domain of the Plasmodium falciparum ligand EBA-175 is essential for invasion but not protein trafficking. *J Cell Biol.* **162**(2):317-27.
- Feynman RP, Leighton RB, Sands M. 1998a. Física, Probabilidad, Vol. 1. Addison-Wesley Iberoamericana, Wilmington, S. A. México, p. 6-1, 6-16.
- Feynman RP, Leighton RB, Sands M. 1998b. Física. Leyes de la Termodinámica, Vol. 1. Addison-Wesley Iberoamericana, Wilmington, S. A. México p. 44-1, 44-19.

- Frodden E, Royo J.** 2004. Entropía e Información. Seminario Final del curso de Termodinámica, Depto. de Física, Facultad de Ciencias, Universidad de Chile. Disponible en http://fisica.ciencias.uchile.cl/~gonzalo/cursos/termo_II-4/seminarios/seminarios1.htm.
- Mayer DC, Mu JB, Kaneko O, Duan J, Su XZ, Miller LH.** 2004. Polymorphism in the Plasmodium falciparum erythrocyte-binding ligand JESEBL/EBA-181 alters its receptor specificity. *Proc Natl Acad Sci U S A.* **11**(8):2518-23.
- Ministerio de Protección Social.** 2006. Guía de atención de la malaria. Bogotá.
- Rodríguez J.** 2008a. Caracterización física y matemática de péptidos de alta unión de MSP-1 mediante la aplicación de la teoría de la probabilidad y la entropía. *Arch alerg inmunol clin.* **39**(2):74-82.
- Rodríguez J.** 2008b. Teoría de unión al HLA clase II: Teoría de probabilidad, combinatoria y Entropía aplicadas a secuencias peptídicas. *Inmunología;* **27**:151-166.
- Rodríguez J, Correa C, Prieto S, Puerta G, Vitery S, Bernal P, Soracipa Y, Botero D.** 2009a. Aplicación de la probabilidad y la entropía a la proteína EBA-140. Caracterización matemática de péptidos de alta unión. *Inmunología.* **28**(2):65-73.
- Rodríguez J, Correa C, Prieto S, Cardona D, Vitery S, Puerta G, Soracipa Y, Bernal P.** 2009b. Caracterización física y matemática de péptidos de alta unión de MSA-2 aplicación de la teoría de la probabilidad y la entropía. *Rev Acad Colomb Cienc.* **33**(129):549-557.
- Rodríguez J, Bernal P, Prieto S, Correa C.** 2010. Teoría de péptidos de alta unión de malaria al glóbulo rojo. Predicciones teóricas de nuevos péptidos de unión y mutaciones teóricas predictivas de aminoácidos críticos. *Inmunología.* **29**(1):7-19.
- Rodríguez J.** 2010a. Método para la predicción de la dinámica temporal de la malaria en los municipios de Colombia. *Rev Panam Salud Pública.* **27**(3):211-8.
- Rodríguez J.** 2010b. Entropía Proporcional De Los Sistemas Dinámicos Cardiacos: Predicciones físicas y matemáticas de la dinámica cardíaca de aplicación clínica. *Rev Colomb Cardiol.* **17**:115-129.
- Rodríguez J, Prieto S, Correa C, Bernal P, Puerta G, Vitery S, Soracipa Y, Muñoz D.** 2010c. Theoretical generalization of normal and sick coronary arteries with fractal dimensions and the arterial intrinsic mathematical harmony. *BMC Medical Physics.* **10**:1 <http://www.biomedcentral.com/1756-6649/10/1>
- Rodríguez J.** 2011. Generalización fractal de células preneoplásicas y Cancerígenas del epitelio escamoso cervical. Una nueva Metodología de aplicación clínica. *Rev. Fac Med.* **18**(2): 173-181.
- Rodríguez J, Prieto S, Bernal P, Soracipa Y, Salazar G, Izasa D, Cruz LE, Correa C.** 2011a. Nueva metodología diagnóstica de la dinámica geométrica cardíaca. Dinámica cardíaca caótica del Holter. *Rev Acad Colomb Cienc* **35**(134):5-12.
- Shuman E.** 2010. Global Climate Change and Infectious Diseases. *N Engl J Med.* **362**:12.
- Vera-Bravo R, Valbuena J, Ocampo M, Garcia J, Rodríguez L, Puentes A, López R,** et al. 2005. Amino terminal peptides from the *Plasmodium falciparum* EBA-181/JESEBL protein bind specifically to erythrocytes and inhibit in vitro merozoite invasion. *Biochimie* **87**:425-436.
- World Health Organization, United Nations. World malaria report 2009. Geneva, Switzerland. WHO Press 2009.

BIOQUÍMICA

ESTUDIO μ RAMAN DE LA OXIDACIÓN SUPERFICIAL DE LA PIRITA (FeS_2), CALCOPIRITA (CuFeS_2) POR *Acidithiobacillus ferrooxidans*

Marco Antonio Márquez Godoy*, Juan David Ospina Correa**, Erica Mejía Restrepo***, Álvaro Luis Morales Aramburo****

RESUMEN

Márquez Godoy, M. A., J. D. Ospina Correa, E. Mejía Restrepo, A. L. Morales Aramburo: Estudio μ Raman de la oxidación superficial de la pirita (FeS_2), calcopirita (CuFeS_2) por *acidithiobacillus ferrooxidans* Rev. Acad. Colomb. Cienc. **36** (141): 373-380, 2012. ISSN 0370-3908.

En este trabajo, fueron oxidadas secciones pulidas de muestras relativamente puras de pirita y calcopirita, tomadas de las minas de oro San Antonio (Marmato, Caldas) y La Chorrera (Cisneros, Antioquia). Las muestras fueron tratadas usando la cepa de *Acidithiobacillus ferrooxidans* ATCC 23270 y fueron analizadas usando un espectrómetro Raman. Se pudieron detectar diversos recubrimientos minerales sobre los sulfuros tratados. Estos resultados muestran que la generación de recubrimientos es bastante dinámica y cambiante en el tiempo y es más compleja que los reportes que se encuentran en la literatura.

Palabras clave: calcopirita, pirita, biooxidación, caracterización superficial, microRaman

ABSTRACT

Polished sections of relatively pure samples of pyrite and chalcopyrite taken from San Antonio (Marmato, Caldas) and La Chorrera (Cisneros, Antioquia) gold mines, were bio-oxidized. The samples were treated using the *Acidithiobacillus ferrooxidans* strain ATCC 23270 and analyzed using Raman spectroscopy. Mineral coatings were detected on the bio treated sulphides. The results show that the generation of coatings on the different sulphide minerals is quite dynamic and changing in time and more complex than reported results.

Key words: chalcopyrite, pyrite, biooxidation, surface characterization, microRaman

* Grupo de Mineralogía Aplicada y Bioprocesos (GMAB), Universidad Nacional de Colombia, Medellín AA 1027. mmarquez@unal.edu.co

** Grupo de Mineralogía Aplicada y Bioprocesos (GMAB), Universidad Nacional de Colombia, Medellín AA 1027. judospinaco@unal.edu.co

*** Servicio Nacional de Aprendizaje SENA, Centro de Tecnología de la Manufactura Avanzada. AA 1188. emejiar@sena.edu.co

**** Grupo de Estado Sólido, Instituto de Física, Universidad de Antioquia, AA 1226, Medellín, Colombia. amoral@fisica.udea.edu.co

Introducción

La pirita es el sulfuro más común en la naturaleza. Éste es un sulfuro de hierro, que puede coexistir con diferentes sulfuros fuente de metales base y adicionalmente se encuentra asociada a oro. Por otra parte, la presencia de pirita en un concentrado puede promover la lixiviación de cobre de la calcopirita (Ahonnen *et al.*, 1986). Adicionalmente, la biooxidación de pirita ha sido fuertemente estudiada por a la presencia de oro oculto en este mineral en forma de oro invisible o refractario. Sin embargo, se ha encontrado que la formación de una capa de jarosita sobre la superficie de la pirita inhibe la lixiviación del mineral y por ende la extracción de oro (Dutrizac, 2008; Blight y Ralph, 2000; Rodríguez *et al.*, 2003). Pese a lo anterior, la naturaleza y el mecanismo de formación de la película pasivante no son aun claros por lo que se hace necesario desarrollar investigaciones que permitan elucidar el mecanismo de formación de la película sobre la superficie.

La calcopirita (CuFeS₂) es la fuente de cobre más importante, con cerca del 70% de las reservas en el mundo (Dutrizac, 1981, Rivadeneira, 2006). En aplicaciones metalúrgicas, la pirometalurgia es el principal método de recuperación de cobre, luego de la concentración de calcopirita por procesos de flotación (Córdoba *et al.*, 2008). El interés de la biohidrometalurgia, alternativo a la pirometalurgia, se ha incrementado con el objetivo de minimizar las emisiones de dióxido de azufre y disminuir el consumo energético durante el proceso de recuperación de cobre (Al-Harashsheh *et al.*, 2006). Sin embargo, la velocidad de lixiviación del cobre en la calcopirita es muy baja comparada con otros sulfuros metálicos como la calcocita (Cu₂S) o la bornita (Cu₅FeS₄) (Hiroyoshi *et al.*, 2000). Además, esta velocidad tiende a declinar, aún más, durante el tiempo de lixiviación, permitiendo sólo una extracción baja del cobre total lixiviable (Parker *et al.*, 2008). Debido a esto, se han postulado mecanismos de pasivación superficial durante la lixiviación de la calcopirita (Yin *et al.*, 1995, Hackl *et al.*, 1995). Un gran número de investigaciones sobre el mecanismo de disolución de la calcopirita, en medios líquidos ricos en Fe³⁺, han observado la formación de películas sobre la superficie del mineral, pero no han encontrado consenso en la naturaleza de esta película (Dutrizac 1981, Parker *et al.*, 2008, Yin *et al.*, 1995, Hackl *et al.*, 1995, Mikhlin *et al.*, 2004, Harmer *et al.*, 2006, Bevilacqua *et al.*, 2002, Córdoba *et al.*, 2008).

El propósito de este trabajo fue definir cambios de fase en la superficie de la pirita y la calcopirita asociados a la actividad oxidativa de *Acidithiobacillus ferrooxidans* ATCC 23270; empleando para esto superficies pulidas de los minerales y espectroscopía μ Raman.

Materiales y métodos

Toma y preparación de muestras

Las muestras fueron obtenidas de diferentes minas a lo largo del país, donde la pirita fue tomada de la mina San Antonio (Marmato, Caldas) y la calcopirita de la mina La Chorrera (Cisneros, Antioquia).

Para su estudio y análisis se hicieron montajes de granos en resina epóxica y luego fueron desbastadas y pulidas para obtener secciones pulidas. Éstas fueron analizadas, para su caracterización inicial, mediante el uso de un microscopio óptico de luz plana polarizada, modo luz reflejada, marca Olympus BX 41, con objetivos de aumento de 10X en aire y 20, 40 y 100X en aceite.

Bioensayos

Posteriormente, se hicieron los ensayos de biooxidación, a nivel de laboratorio, durante un periodo de 30 días, empleando para ello la cepa de *Acidithiobacillus ferrooxidans* ATCC 23270. Todos los experimentos se hicieron en erlenmeyers de 100 ml, conteniendo 80 ml de medio T&K [20–22], con 10% v/v de inóculo bacteriano con una concentración celular entre 10⁷-10⁸ células/ml, a una temperatura de 30°C y 180 r.p.m. Las células fueron contadas en cámara de Neubauer. Luego de iniciado el proceso, se retiraron muestras después de 2, 4, 8, 20, 32, 120, 360 y 720 horas de proceso.

Caracterización mineralógica

La caracterización mineralógica de las muestras iniciales y del proceso se hizo usando un espectrómetro Raman confocal marca Horiba Jobin Yvon, modelo Labram HR, de alta resolución, con distancia focal de 800mm, detector CCD con resolución de 1024x256 pixeles, rango espectral optimizado de 100–500cm⁻¹, rejilla de difracción de 1800, resolución espectral de 680nm. Además, se usó un microscopio confocal Nikon modelo BX41, con objetivos de plano acromático de 10X, 50X y 100X, cámara de video a color para visión de la muestra, acoplado al Raman, con láser He/Ne de 633nm y 17mW. Para operación del equipo, adquisición y tratamiento de datos se empleó el Software Labspec bajo Windows. Para la interpretación de los resultados fue usado el software Cristal Sleuth Application, versión mayo 19, 2008 © 2006 (Laetsch y Downs, 2006), el cual usa una base de datos compilada del proyecto RUFF (Downs, 2006).

Resultados y discusión

Caracterización inicial de las muestras

La muestra de pirita, mostró cristales euedrales a subedrales, presentando eventualmente pequeñas inclusiones de esfale-

rita. La muestra de calcopirita se pudo observar con una clara predominancia de ésta, mostrando cristales de masivos, con algunas fracturas e inclusiones de ganga. También se pudo observar, raramente, cristales de calcopirita con fracturas e inclusiones de esfalerita y coronas de covelina.

De forma general fue posible observar, a pesar de la ocurrencia de otros minerales como fases accesorias, muestras de cada sulfuro con predominancia (> 95%) del mineral de estudio.

Análisis por microRaman

En las figuras 1 y 2 se presentan los resultados del comportamiento de la superficie de los sulfuros estudiados, durante diferentes tiempos de biooxidación, desde algunas horas, hasta varios días de acción.

En la figura 1 se pueden ver los resultados obtenidos para la pirita, donde se observa que durante las primeras 32h, a excepción de pequeños corrimientos en las bandas de la pirita, posiblemente debidos a pequeños cambios en la cristalinidad de la superficie, no se observó la formación de fases adicionales o cambios significativos. Por otro lado, para los ensayos a 5, 15 y 30, días fue evidente la formación de películas de jarosita, las cuales presentaron espectros con bandas anchas, que indican la formación de una fase de baja cristalinidad y escaso espesor o baja homogeneidad (evidente por la aparición de pequeñas bandas de pirita sobrepuestas a las de jarosita, hasta el final del proceso).

La ocurrencia de películas micrométricas de jarosita sobre los granos de pirita en procesos de oxidación bacteriana ya ha sido reportada en trabajos anteriores mediante análisis de SEM/EDX (Márquez, 1999). La evidencia de películas de jarosita fue observada por Ospina (2010), para las muestras de este trabajo en procesos de biooxidación paralelos, usando SEM/EDX. Éste indicó que las películas de jarosita en la superficie de los granos de pirita casi siempre estuvieron por debajo de una micra y en ocasiones se mostraron casi imperceptibles y no homogéneas, de incipiente formación y baja estabilidad, debido escaso espesor y a su baja cristalinidad. Sin embargo, se ha encontrado que la formación de capas de jarosita sobre la superficie de la misma inhibe la lixiviación del mineral y por ende la extracción de oro (Dutrizac, 2008; Blight y Ralph, 2000; Rodríguez *et al.*, 2003).

La formación de jarosita sobre la pirita podría ser explicada en virtud de lo encontrado por Liu *et al.* (2011), quien, en sus trabajos con XPS y espectroscopia de impedancia electroquímica, propone la existencia de un proceso de disolución heterogénea en la pirita, con la salida de Fe y permanencia del S en el sólido. Aunque la principal hipótesis de Liu *et al.* (2011) es que a expensas de este mecanismo se puede formar una película de S⁰, no encontrada en este trabajo, es evidente, en sus resultados de XPS, la formación de una película de sulfato en la superficie de la pirita al final del experimento con bacterias, lo que está en concordancia con lo encontrado en este trabajo. Un mecanismo similar ha sido reportado para la biooxidación de arsenopirita, mediante la formación de pseudomorfo de jarosita como arsenopirita (Ossa y Már-

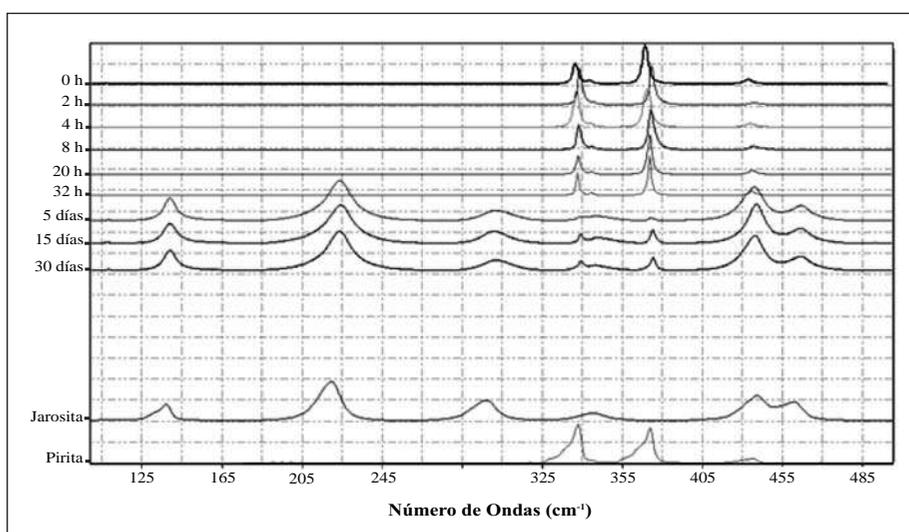


Figura 1. Espectroscopia de microRaman de la mineralogía de la superficie de la pirita para diferentes tiempos de biooxidación.

quez, 2010). Por otro lado, un mecanismo alternativo para la formación de las películas de jarosita, sería como producto de la precipitación del sulfato férrico en solución, después de vencer su límite de solubilidad, debido al aumento en la concentración de Fe en la solución a expensas del proceso de biolixiviación, como fue reportado por Márquez (1999).

Los resultados aquí presentados no muestran claramente la ocurrencia de azufre elemental durante todo el experimento, lo que se encuentra en contradicción con los trabajos en la literatura (Sasaki *et al.*, 1998, 1995, 1993; Zhu *et al.*, 1993; Tonniazo *et al.*, 1999; Lázaro y Nicol, 2003). Sin embargo, a pesar de no ser evidente la formación de bandas propias de este compuesto, se pudo observar que las bandas localizadas en 138,9 cm⁻¹, 224,5 cm⁻¹ y 454,6 cm⁻¹, caracterizadas como propias de la jarosita, mostraron un ensanchamiento en su base, que se sale de un ajuste propio con una única curva Lorentziana, indicando la posibilidad de la presencia de azufre elemental en las muestras. Es importante resaltar que, en el caso de que exista S⁰ en las muestras, este debe ocurrir en proporciones muy bajas y definitivamente no se observa en las muestras de la primera fase de la biooxidación (0-32h). La no existencia de películas de azufre o su baja proporción en los ensayos, podría ser producto de una mejor adaptación del microorganismo al mineral, como ha sido evidente en trabajos anteriores para esferita (Zapata *et al.*, 2007). Adicionalmente, buena parte de los trabajos reportados fueron llevados a cabo a pH alrededor de 2, siendo que en este es-

tudio los pH alcanzados estuvieron siempre por debajo de 1.6, lo que podría favorecer una rápida disolución del azufre presente o inhibir su formación.

Por último, la generación de estas películas podría explicar, al menos en parte, la resistencia a la oxidación bacteriana que presenta la pirita, siendo éste el segundo sulfuro más refractario, después de la calcopirita (Marsden y House, 1992). Esta película, aunque incipiente e inestable, generaría una barrera de difusividad, la cual limitaría la cinética de disolución de la pirita. Sin embargo, es evidente que la disolución continua de la pirita es posible a expensas de la remoción continua de la capa de jarosita incipiente, en virtud de su baja cristalinidad y aparentes escaso espesor y/o poca homogeneidad, facilitando su solubilidad a las condiciones de pH prevalecientes en el experimento (Welch *et al.*, 2008; Smith *et al.* 2006). Adicionalmente, la presencia de eventual alta porosidad, evidente para películas micrométricas de jarosita observadas en trabajos anteriores (Márquez *et al.*, 2006), limitaría el efecto pasivante de éstas sobre la biooxidación de la pirita.

A partir de los resultados observados para la calcopirita (figura 2), fue posible identificar, además de la formación de una incipiente película de jarosita de baja cristalinidad a partir de 32h de biooxidación, la formación inicial de una fina película de covelita, entre las 8 y 20h iniciales, la cual aparentemente desaparece a partir de las 32h, dando paso a la

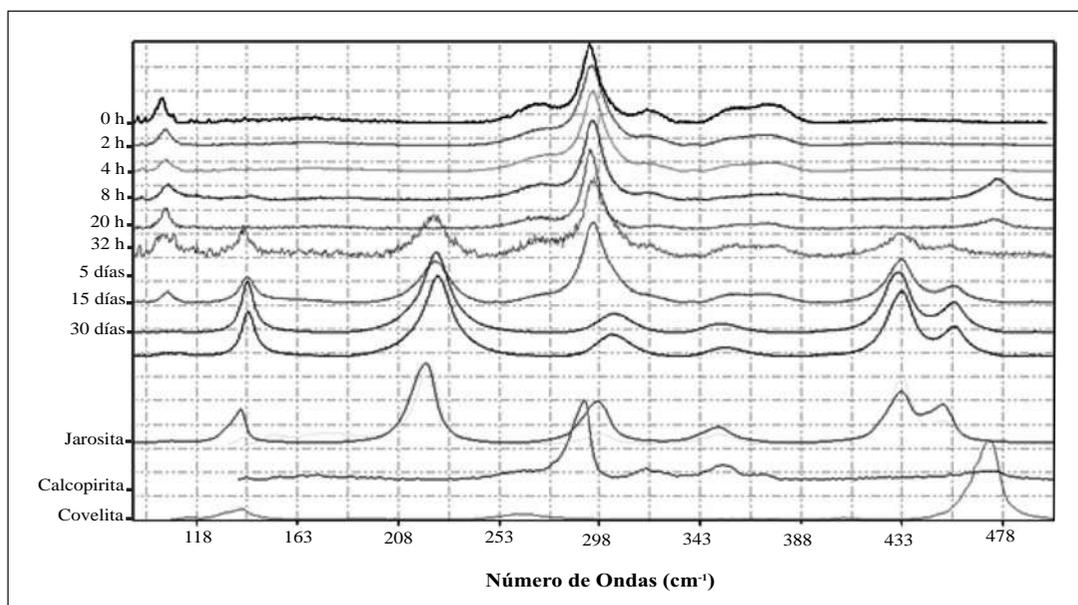


Figura 2. Espectroscopia de microRaman de la mineralogía de la superficie de la calcopirita para diferentes tiempos de biooxidación.

formación de jarosita. Adicionalmente, la aparición de bandas propias de la calcopirita (293 cm^{-1} y 102 cm^{-1}) y jarosita ($140,9\text{ cm}^{-1}$, $225,2\text{ cm}^{-1}$, $432,7\text{ cm}^{-1}$ y $456,2\text{ cm}^{-1}$), para los ensayos a 32h y 5 días, indican que el recubrimiento de jarosita sobre la calcopirita es muy fino o es parcial. Las bandas propias de la calcopirita desaparecen hacia el final del tiempo (15 y 30 días) indicando la formación de una película continua o relativamente espesa sobre la superficie. Con relación a las películas de jarosita, se pudo constatar un aumento en la cristalinidad entre las 32h y los 5 días, evidenciado por la presencia de bandas menos definidas y anchas en espectro a 32h.

Los resultados aquí encontrados presentan muchas similitudes con los reportados por otros autores, siendo las más relevantes la formación de películas de jarosita al final de los experimentos (**Sasaki et al.**, 2009; **He et al.**, 2012) y la formación de covelita como fase secundaria de la oxidación de la calcopirita (**Sasaki et al.**, 2009). En nuestros resultados no fue evidente la ocurrencia de S^0 , reportada por **Sasaki** (2009), sin embargo puede deberse al hecho de que en su trabajo el azufre sólo aparece de manera evidente (como un hombro de la banda de covelita) después de 58 días de oxidación. La no aparición de azufre elemental en este trabajo puede explicarse en virtud del tiempo de exposición o debido a una mejor adaptación de la cepa al mineral, como ya ha sido reportado por otros autores para otros sulfuros como la esfalerita (**Zapata et al.**, 2007).

Por otro lado, en este trabajo fue clara la generación temprana de covelita (8h), así como su disolución paulatina subsiguiente, desapareciendo totalmente para los análisis en el mineral después de 32h. Esta es la diferencia más sobresaliente con relación a los resultados reportados por **Sasaki et al.** (2009), donde la película de covelita perdura y aumenta en el tiempo hasta el final del experimento (81 días). **He et al.** (2012), reportan la formación calcocita como compuesto intermediario antes de la formación final de jarosita, pero no detectan la aparición de covelita. Sin embargo, su trabajo contempló el seguimiento cada 4 días y de acuerdo a los resultados obtenidos aquí los autores no pudieron detectarla, ya que la formación de covelita se observó en las primeras horas de los ensayos. La permanencia o no de las películas de covelita se podría explicar, de manera similar a la no ocurrencia de S^0 en nuestros resultados, en virtud de una mejor adaptación de la cepa al trabajo con el mineral o en virtud de diferencias en el mineral específico tratado.

Conclusiones

Generales

Los granos de calcopirita mostraron un recubrimiento de covelita en la fase temprana de oxidación (primeras horas), la

cual mostró baja estabilidad en el tiempo, desapareciendo después de 20h de biotratamiento, como producto en principio de su baja cristalinidad y probablemente su escaso espesor (de unos nm). Posteriormente, hacia las 32h del proceso, se observó la aparición de una película de jarosita de baja cristalinidad, la cual, después de varios días de acción bacteriana, se observó como una fase dominante, más cristalina y aparentemente más homogénea, especialmente hacia el final del proceso.

Por su lado, los granos de pirita no mostraron la ocurrencia de recubrimientos durante las primeras horas de los ensayos (0-32h), pero mostraron la formación de finas películas de jarosita, evidenciadas por la mezcla de bandas de jarosita y pirita observadas en los espectros, hasta el final del proceso. No se descarta la presencia de azufre elemental en pequeñas cantidades.

Se observaron algunas diferencias con relación a la permanencia de los recubrimientos tempranos de covelita en el tiempo, como por ejemplo los resultados de **Sasaki et al.** (2009), la no ocurrencia de ciertos minerales, como el azufre elemental, y las características específicas de los recubrimientos de jarosita hacia el final de los procesos.

Películas como barreras de difusión

Como se pudo observar, se detectaron minerales en la superficie los dos sulfuros analizados, especialmente claras después de 5 días de oxidación bacteriana. Sin embargo, no es claro el papel de todas ellas como barrera de difusión que impida o limite la oxidación subsiguiente de los sulfuros en el tiempo.

La observación de bandas de covelita generada tempranamente sobre la calcopirita y su rápida disminución y desaparición (8 y 20h), puede explicarse de dos formas: (i) los recubrimientos aparentemente son removidos rápidamente, debido seguramente a su inestabilidad, escaso espesor y/o falta de homogeneidad a lo largo de los granos de mineral y (ii) su recubrimiento, para dar paso a la generación de películas de jarosita, inicialmente incipientes (32h), pero mostrando una creciente homogeneidad física en el tiempo, especialmente después de 15 días de proceso, donde los espectros se muestran conformados únicamente por bandas de jarosita. En el primer caso, los recubrimientos de covelita difícilmente tendrían un papel importante como barreras de difusión en la oxidación de la calcopirita. Por otro lado, para el segundo caso, las películas de jarosita tendrían un papel importante como barreras de difusión impidiendo o limitando la oxidación de la calcopirita.

En cuanto a la pirita, es evidente que los recubrimientos de jarosita observados, delgados y/o poco homogéneos hasta

el final del proceso, no se conforman, en principio, como barreras que impidan la oxidación de la superficie de la pirita. Sin embargo, aspectos como su estabilidad, porosidad, espesor y recurrencia en la formación de las películas, deben ser tenidos en cuenta para definir la importancia en cuanto a su efecto limitante (retrasante) y su papel como barreras de difusión.

De esta forma, es importante tener en cuenta que películas heterogéneas, porosas o inestables en el tiempo, pueden solo conformarse como barreras de difusión parcial, retrasando la oxidación del mineral. Por otro lado, las películas homogéneas, podrían constituirse en un limitante para la oxidación posterior del mineral, impidiendo, o al menos retrasando, la oxidación subsiguiente de los minerales. Sin embargo, es importante tener en cuenta que factores como su porosidad y su homogeneidad física son de gran importancia a la hora de considerar la relevancia de éstas como barreras de difusión.

En la literatura existe gran controversia acerca de las implicaciones genéticas de la distribución de películas sobre la cinética de disolución de los diferentes sulfuros. Varios estudios han asegurado que la ocurrencia de películas sobre los sulfuros pasiva la superficie, evitando el paso de agentes oxidantes (Bevilaqua *et al.*, 2002; Curutchet *et al.*, 1996; Dopson y Lindstrom, 1999; García *et al.*, 1995a, 1995b). En contraste, otros autores aseveran que películas de azufre elemental, no producen cambios medibles en la velocidad de difusión y consecuente tasa de disolución a bajas concentraciones de hierro ferroso (McGuire *et al.*, 2001; Fowler y Crundwell, 1999). Nuestros resultados dan cuenta de una amplia variedad de películas (homogéneas, heterogéneas, químicamente y mineralógicamente variables), que podrían, al menos en principio, explicar la controversia sobre el tema en virtud de la gran variabilidad en cuanto a las posibilidades de acuerdo a: condiciones fisicoquímicas reinantes durante el experimento, características específicas de cada mineral, inclusive dentro de la misma especie, etc.

Por otro lado, la generación de películas formadas tempranamente, nos brinda información “de primera mano” sobre la forma y los mecanismos de importancia que actúan en la lixiviación homogénea o heterogénea de los diferentes iones implicados en el proceso de biooxidación global de los sulfuros aquí estudiados. Los resultados mostrados en este estudio dan cuenta de que las propuestas actuales sobre los diferentes procesos de oxidación de los minerales, aunque acertadas de forma global, se quedan cortas, mostrando que los mecanismos implicados de lixiviación, reprecipitación de compuestos cristalinos, de baja cristalinidad y/o amorfos, etc., son mucho más complejos y en principio estarían, al menos en parte, controlados por las características especifi-

cas de intrínsecas de cada mineral, su historia genética, etc.

Implicaciones ambientales

El entendimiento de los mecanismos y reacciones que controlan la biooxidación/biolixiviación de sulfuros, es de vital importancia para el entendimiento de la generación de drenajes ácidos de minería (AMD), su mitigación y las implicaciones de sus productos minerales.

La formación de películas, que genera problemas en aplicaciones de tecnología mineral, puede tornarse en una de las respuestas para la mitigación de problemas generados por la formación de AMD a partir de residuos minerales y explotaciones de minas activas e inactivas. El entendimiento acerca de las condiciones a las cuales se generan y su estabilidad, es de vital importancia con el objeto de favorecer su formación como barreras de difusión que impidan o al menos disminuyan la generación de AMD. En este trabajo fue evidente que ambos minerales generan películas, donde el mineral más frecuente y abundante fue la jarosita. Sin embargo, como ya fue mencionado anteriormente, existe gran controversia sobre la importancia real de las películas como agentes pasivadores de la superficie de los diversos sulfuros. En ese sentido es de vital importancia considerar aspectos: (a) químicos, como la estabilidad de cada mineral formado, con base en sus características específicas como composición química, estructura cristalina y sus variaciones (i.e. polimorfismo, grado de cristalinidad, elementos en solución sólida, etc.), etc., y (b) físicos como homogeneidad/heterogeneidad de las películas sobre el mineral, grado de contacto, formación de sistemas multicapa, espesor, mezcla de minerales, etc.

Agradecimientos

Los autores agradecen a la Subdirección de Biotecnología de Colciencias y a la Universidad Nacional de Colombia-Sede Medellín, por el apoyo económico a este proyecto. Al laboratorio de Corrosión y Protección de la Universidad de Antioquia, por la facilidad y ayuda con los análisis de espectroscopia Raman. A los laboratorios de Biomineralogía y Biohidrometalurgia, CIMEX, preparación de rocas y carbones de la Universidad Nacional de Colombia, sede Medellín y al INGEOMINAS, Medellín. ALM agradece el apoyo recibido de el programa de Sostenibilidad 2011-2012, Grupo de estado Sólido, del CODI, Universidad de Antioquia.

Referencias bibliográficas

- Ahonen, L., Hiltunen, P., Tuovinen, O.H. 1986. The role of pyrrhotite and pyrite in the bacterial leaching of chalcopyrite. Ebner, H.G. (Eds.), Fundamental and Applied Biohydrometallurgy. Elsevier, Amsterdam, 13-22.

- Al-Harashsheh, M., Kingman, S., Rutten, F., Briggs, D. 2006. ToF-SIMS and SEM study on the preferential oxidation of chalcopyrite. International Journal of Mineral Processing **80**: 2-4.
- Bevilaqua, D., Leite, A.L.L.C., Garcia, Jr. O., Tuovinen, O.H. 2002. Oxidation of chalcopyrite by *Acidithiobacillus ferrooxidans* and *Acidithiobacillus thiooxidans* in shake flasks. Process Biochemistry **38**: 587-592.
- Blight, K., Ralph, D.E., Thurgate, S. 2000. Pyrite surfaces after bio-leaching: a mechanism for bio-oxidation. Hydrometallurgy **58**: 227-237.
- Curutchet, G., Tedesco, P., Donati, E. 1996. Combined degradation of covellite by *Thiobacillus thiooxidans* and *Thiobacillus ferrooxidans*. Biotechnology Letters **18**: 1471-1476.
- Dopson, M., Lindström, E.B. 1999. Potential role of *Thiobacillus caldus* in arsenopyrite bioleaching. Appl. Environ. Microbiol. **65**: 36-40.
- Downs, R.T. 2006. The RRUFF Project: an integrated study of the chemistry, crystallography, Raman and infrared spectroscopy of minerals. Program and Abstracts of the 19th General Meeting of the International Mineralogical Association in Kobe, Japan. O03-13.
- Dutrizac, J.E. 2008. Factors affecting the precipitation of potassium jarosite in sulfate and chloride media. Metallurgical and Materials Transactions B. **39**: 771-783.
- Fowler, T.A., Crundwell, F.K. 1999. Leaching of zinc sulfide by *Thiobacillus ferrooxidans*: bacterial oxidation of the sulfur product layer increases the rate of zinc sulfide dissolution at high concentrations of ferrous ions. Appl Environ Microbiol. **65**(12): 5285-92.
- Garcia, O., Bigham, J.M., Tuovinen, O.H. 1995. Oxidation galena by *Thiobacillus ferrooxidans* and *Thiobacillus thiooxidans*. Canadian Journal Microbiology **41**: 508-514.
- Garcia, O., Bigham, J.M., Tuovinen, O.H. 1995. Sphalerite oxidation by *Thiobacillus ferrooxidans* and *Thiobacillus thiooxidans*. Canadian Journal Microbiology **41**: 578-584.
- He, H., Xia, J.L., Hong, F.F., Tao, X.X., Leng, Y.W., Zhao, Y.D. 2012. Analysis of sulfur speciation on chalcopyrite surface bioleached with *Acidithiobacillus ferrooxidans*. Minerals Engineering, **27-28**: 60-64.
- Laetsch, T., Downs, R.T. 2006. Software for identification and refinement of cell parameters from powder diffraction data of minerals using the RUFF Project and American Mineralogist Crystal Structure databases. Abstracts from the 19th General Meeting from the International Mineralogical Association, Kobe, Japan, 23-28 July 2006.
- Liu, H., Gu, G., Xu, Y. 2011. Surface properties of pyrite in the course of bioleaching by pure culture of *Acidithiobacillus ferrooxidans* and a mixed culture of *Acidithiobacillus ferrooxidans* and *Acidithiobacillus thiooxidans*. Hydrometallurgy, **108**: 143-148.
- Márquez, M., Gaspar, J., Bessler, K.E., Magela, G. 2006. Process mineralogy of bacterial oxidized gold ore in São Bento Mine (Brasil). Hydrometallurgy, **83**: 114-123.
- Márquez, M.A. 1999. Mineralogia dos produtos de oxidação sob pressão e bacteriana do minério de ouro da mina São Bento - MG. Tesis de doctorado, Universidade de Brasília. 271 p.
- Marsden, J., House, I. 1992. The chemistry of gold extraction. Ed. Ellis Horwood Limited, England.
- McGuire, M.M., Banfield, J.F., Hamers, R.J. 2001. Quantitative determination of elemental sulfur at the arsenopyrite surface after oxidation by ferric iron: mechanistic implications. Geochem. Trans. 2001a. **2**: 25.
- Ossa, D.M., Márquez, M.A. 2010. Jarosite pseudomorph formation from arsenopyrite oxidation using *Acidithiobacillus ferrooxidans*. Hydrometallurgy, **104**: 162-168.
- Parker, G.K., Woods, R., Hope, A.G. 2008. Raman investigation of chalcopyrite oxidation. Colloids and Surfaces A: Physicochem. Eng. Aspects. **318**: 60-16.
- Rodríguez, Y., Ballester, A., Blázquez, M.L., González, F., Muñoz, J.A. 2003. New information on the pyrite bioleaching mechanism at low and high temperature. Hydrometallurgy **71**: 37-46.
- Sasaki, K., Nakamuta, Y., Hirajima, T. 2009. Raman characterization of secondary minerals formed during chalcopyrite leaching with *Acidithiobacillus ferrooxidans*. Hydrometallurgy **95**: 153-158.
- Sasaki, K., Tsunekawa, M., Ohtsuka, T., Konno, H. 1998. The role of sulfur-oxidizing bacteria *Thiobacillus thiooxidans* in pyrite weathering. Colloids and Surfaces A: Physicochemical and Engineering Aspects, **133**: 269-278.
- Smith, A.M.L., Hudson-Edwards, K.A., Dubbin, W.E., Wright, K. 2006. Dissolution of jarosite [KFe₃(SO₄)₂(OH)₆] at pH 2 and 8: Insights from batch experiments and computational modelling. Geochimica et Cosmochimica Acta **70**: 608-621.
- Welch, S.A., Kirste, D., Christy, A.G., Beavis, F.R., Beavis, S.G. 2008. Jarosite dissolution II—Reaction kinetics, stoichiometry and acid flux. Chemical Geology **254**: 73-86.
- Zapata, D.M., Márquez, M.A., Ossa, D.M. 2007. Sulphur product layer in sphalerite biooxidation: Evidences for a mechanism of formation. Advanced Materials Research. **20-21**: 134-138.
- Zhu, X.M., Li, J., Bodily, D.M., Wadsworth, M.E. 1993. Transpassive oxidation of pyrite. J. Electrochem. Soc. **140**: 1927-1935.

EL MECANISMO DEL UNIVERSO RELAJADO: POSIBLE SOLUCIÓN DINÁMICA Y LIBRE DE AJUSTES FINOS AL VIEJO PROBLEMA DE LA CONSTANTE COSMOLÓGICA

José F. Rodríguez¹, Yeinzon Rodríguez^{2,3}

Resumen

Rodríguez, J. F. & Rodríguez, Y.: El mecanismo del universo relajado: Posible solución dinámica y libre de ajustes finos al viejo problema de la constante cosmológica. *Rev. Acad. Colomb. Cienc.* **36** (141): 381-401, 2013. ISSN 0370-3908.

Los estudios experimentales de las supernovas tipo Ia y de la radiación cósmica de fondo han mostrado la reciente expansión acelerada del Universo. Para explicar este comportamiento, se introdujo una forma hipotética de energía llamada la energía oscura. Por otro lado, la presencia de una constante cosmológica en las ecuaciones de campo provoca una expansión acelerada del Universo; así, esta última se identifica con la energía oscura. Además, la energía del estado de vacío exhibe las mismas consecuencias de una constante cosmológica; por consiguiente, el valor experimental de la energía de vacío debe contribuir al valor experimental de la constante cosmológica, y ambos deben tener el mismo orden de magnitud. Sin embargo, al comparar los dos valores, hay una diferencia de más de 55 órdenes de magnitud. Con el fin de establecer concordancia, es necesario hacer un ajuste fino en el valor experimental de la constante cosmológica. La imposibilidad de evitar un ajuste fino se conoce como el viejo problema de la constante cosmológica. Se han planteado muchas soluciones, tales como la sustitución de la constante cosmológica por un campo escalar; sin embargo, estas soluciones no resuelven realmente el problema. Se presentará una solución alternativa, en la cual la constante cosmológica es complementada con un nuevo término originado a partir de modificaciones de la gravedad. La modificación se realiza mediante la introducción de una función $f(R, \mathcal{G})$, donde R es el escalar de Ricci y \mathcal{G} es el invariante de Gauss-Bonnet. El término nuevo, que se puede interpretar como un fluido cósmico con una forma particular para su ecuación de estado, evoluciona en el tiempo relajando de manera dinámica la enorme diferencia entre la energía de vacío y la constante cosmológica.

Palabras clave: Constante cosmológica, energía oscura, gravedad modificada.

¹Escuela de Física, Universidad Industrial de Santander, Ciudad Universitaria, Bucaramanga 680002, Colombia, Correo electrónico: joferoru@gmail.com

²Centro de Investigaciones en Ciencias Básicas y Aplicadas, Universidad Antonio Nariño, Cra 3 Este # 47A - 15, Bogotá D.C. 110231, Colombia, Correo electrónico: yeinzon.rodriguez@uan.edu.co

³Escuela de Física, Universidad Industrial de Santander, Ciudad Universitaria, Bucaramanga 680002, Colombia, Correo electrónico: yrodrig@uis.edu.co

Abstract

The experimental studies of the type Ia supernovae and of the cosmic microwave background radiation have shown the recent accelerated expansion of the Universe. To explain this behavior, a hypothetical form of energy called the dark energy was introduced. On the other hand, the presence of a cosmological constant in the field equations causes an accelerated expansion of the Universe; thus, the latter is identified with the dark energy. Moreover, the energy of the vacuum state exhibits the same consequences of a cosmological constant; therefore, the experimental value of the vacuum energy must contribute to the experimental value of the cosmological constant, and both values must have the same order of magnitude. However, when the two values are compared, there exists a difference of more than 55 orders of magnitude. In order to establish concordance, it is necessary to do a fine-tuning in the experimental value of the cosmological constant. The impossibility to avoid this fine-tuning is called the old cosmological constant problem. Many solutions have been raised, such as the replacement of the cosmological constant by a scalar field; however, these solutions do not actually solve the problem. We will present an alternative solution, in which the cosmological constant is complemented by a new term originated from modifications of gravity. The modification is performed by introducing a function $f(R, \mathcal{G})$, where R is the Ricci scalar and \mathcal{G} is the Gauss-Bonnet invariant. The new term, which can be interpreted as a cosmic fluid with a particular form for its equation of state, evolves in time dynamically relaxing the enormous difference between the vacuum energy and the cosmological constant.

Keywords: Cosmological constant, dark energy, modified gravity.

1. Introducción

En la teoría general de la relatividad el tensor momentum-energía es la fuente del campo gravitatorio. Por lo tanto, es el valor mismo de la energía, y no la diferencia entre estados, la cantidad decisiva en el comportamiento de los fenómenos gravitacionales; es decir, cualquier tipo de energía, incluyendo la energía proveniente del estado de vacío, debe ser incluida en el análisis de la física gravitacional. La energía de vacío permea el Universo entero creando un campo gravitacional que produce una expansión acelerada; este resultado también puede ser obtenido al introducir una constante de naturaleza netamente geométrica en las ecuaciones de Einstein. Por consiguiente, la constante cosmológica (CC) “física”, Λ_{fis} , debe comprender dos contribuciones: una relacionada con una constante Λ_{des} , llamada la CC desnuda y, por otro lado, la contribución del estado de vacío de los campos que permean el Universo, denominada la CC inducida Λ_{ind} . El valor teórico de la contribución de estos campos es del orden de 10^8 GeV^4 (Kane, 1993)⁴.

Los resultados experimentales del estudio de las supernovas tipo Ia (Perlmutter *et al.*, 1999; Riess *et al.*, 1998) y los datos de la radiación cósmica de fondo (Komatsu *et al.*, 2011), implican la existencia de una forma hipotética de energía denominada la energía oscura (EO), cuyas características son similares a las de la CC. En consecuencia, es

razonable tomar como medida de la CC la cantidad de EO presente en el Universo. La EO constituye un 73 % de la densidad de energía total del Universo (Jarosik *et al.*, 2011; Komatsu *et al.*, 2011; Larson *et al.*, 2011) siendo el valor experimental de su densidad del orden de 10^{-47} GeV^4 . Al comparar este valor con la contribución de los campos que permean el Universo, se obtiene la enorme diferencia de 55 órdenes de magnitud. Con el único fin de obtener concordancia entre los resultados teóricos y experimentales, se elige el valor de Λ_{des} de tal forma que se cancelan 55 cifras significativas de manera exacta; sin embargo, es evidente que esta elección no proporciona una explicación satisfactoria del porqué del pequeño valor observado de Λ_{fis} a pesar de la enorme contribución de los campos. La imposibilidad de evitar la contribución de los campos sin recurrir a un ajuste fino se denomina el primer o viejo problema de la CC (Weinberg, 1989).

Como solución al viejo problema de la CC se ha reemplazado Λ_{des} por campos escalares (Abbot, 1985; Armendariz-Picon, Mukhanov & Steinhardt, 2000; Barr, 1987; Barr & Hochberg, 1988; Caldwell, Dave & Steinhardt, 1998; Ford, 1987; Peccei, Sola & Wetterich, 1987; Sola, 1989; Yoo & Watanabe, 2012); sin embargo, esta sustitución no resuelve realmente el problema (Weinberg, 1989). Para dar una verdadera solución al primer problema de la CC se deben garantizar dos hechos: primero, la cancelación libre de

⁴Este valor se obtiene teniendo en cuenta únicamente el vacío electrodébil; a una escala de gran unificación el valor es del orden de 10^{64} GeV^4 .

ajustes finos de la contribución de los campos, y, segundo, no se debe alterar la historia térmica del Universo. En las Refs. (**Bauer, 2010; Bauer, Sola & Stefancic, 2010a; Bauer, Sola & Stefancic, 2010b**) se presentó una posible solución en donde estos dos hechos se satisfacen. En este tipo de solución, la CC desnuda no se sustituye por campos escalares sino que es complementada por un término proveniente de la modificación de la gravedad. La modificación se realiza a través de la introducción de una función de la forma $f(R, \mathcal{G})$, que involucra el invariante de Gauss-Bonnet \mathcal{G} (**Chern, 1945**). La construcción del nuevo funcional garantiza que en la nueva teoría de la gravedad, el principio de equivalencia y la conservación del cuadrimomentum se sigan cumpliendo. El *resultado efectivo* de la modificación es la aparición de un nuevo fluido cósmico llamado el “Cosmón”. La presencia del Cosmón en las ecuaciones de campo provoca la cancelación dinámica de la contribución de los campos. Debido al origen gravitacional del Cosmón, la expansión del Universo pone en acción el mecanismo de cancelación y a su vez, la cancelación garantiza que la expansión del Universo sea la esperada. Adicionalmente, la ecuación de estado (EDE) de la combinación CC-Cosmón es no homogénea, lo cual implica que el presente modelo está relacionado con la posible solución al viejo problema de la CC presentada en la Ref. (**Stefancic, 2009**). En cuanto a la diferencia entre una EDE homogénea y una no homogénea, se deben observar las variables físicas presentes en la EDE: cuando están presentes únicamente la densidad de energía ρ y la presión p del fluido en cuestión, i.e. cuando la EDE se puede escribir de la forma $f(\rho, p) = 0$, se dice que ésta es homogénea; por el contrario, cuando se involucra otras cantidades diferentes se dice que la EDE es no homogénea, i.e. ésta tiene la forma $f(\rho, p) = g(x)$, en donde x representa una o más cantidades diferentes a ρ y p . En el presente modelo la EDE depende adicionalmente del parámetro de Hubble H y del parámetro de desaceleración $q = -a\ddot{a}/\dot{a}^2$ siendo a el parámetro de expansión.

Es importante mencionar que al referirse a una EDE no homogénea, no se está haciendo referencia a un espacio no homogéneo: más aún, en el análisis del presente artículo se asume, siguiendo el principio cosmológico, un espacio homogéneo e isotrópico y por lo tanto la métrica de fondo es la métrica de Friedmann-Robertson-Walker (FRW). Por último, la construcción de la función $f(R, \mathcal{G})$ provee una correcta transición entre las etapas conocidas del Universo y, por ende, respeta su historia térmica.

Para ilustrar el problema se calculará en la sección 2 la energía de vacío a partir del mecanismo de ruptura espontánea de la simetría o mecanismo de Higgs; también se

mostrará por qué la energía del estado base se comporta gravitacionalmente como una constante cosmológica. En la sección 3 se expondrá de forma clara y precisa el viejo problema de la constante cosmológica; en este punto se expondrá por qué las soluciones planteadas hasta el momento no han sido satisfactorias. Posteriormente, en la sección 4 se presentarán las motivaciones que llevaron al planteamiento de un modelo de gravedad modificada como la posible solución (**Bauer, 2010; Bauer, Sola & Stefancic, 2010a; Bauer, Sola & Stefancic, 2010b**), haciéndose un énfasis especial en la idea fundamental que éste propone; se describirá cómo obtener las ecuaciones de campo a partir del principio de acción estacionaria y cómo a partir de ellas se obtienen las respectivas ecuaciones que gobiernan la evolución cosmológica; además, se mencionarán las condiciones que se deben satisfacer para proporcionar una verdadera solución acorde con las observaciones. Con el propósito de comprender detalladamente la posible solución, se estudiará en la sección 5 un modelo de juguete que a su vez permitirá plantear conjeturas acerca de la forma explícita de las funciones que describen un modelo realista. Finalmente, en la sección 6 se discutirá teóricamente el comportamiento del modelo realista, analizando su comportamiento a lo largo de la historia térmica del Universo y mostrando que se exhibe una correcta transición entre las épocas conocidas.

La métrica a utilizar a lo largo del desarrollo del artículo tiene signatura $(+, -, -, -)$. Los índices griegos representan cualquiera de los números $\{0, 1, 2, 3\}$ y los índices latinos cualquiera de los números $\{1, 2, 3\}$. Los índices repetidos implican sumatoria, a menos de que se indique lo contrario. La derivada parcial $\partial_\mu A^\nu$ se denotará por $A^\nu_{,\mu}$ y la derivada covariante $\nabla_\mu A^\nu$ por $A^\nu_{;\mu}$. Los símbolos de Christoffel están dados por:

$$\Gamma_{\mu\nu}^\rho = \frac{1}{2}g^{\rho\sigma} [g_{\mu\sigma,\nu} + g_{\nu\sigma,\mu} - g_{\mu\nu,\sigma}], \quad (1)$$

y las componentes del tensor de Riemann y Ricci por:

$$R^\rho_{\mu\lambda\nu} = \Gamma_{\mu\nu,\lambda}^\rho - \Gamma_{\mu\lambda,\nu}^\rho + \Gamma_{\lambda\sigma}^\rho \Gamma_{\mu\nu}^\sigma - \Gamma_{\nu\sigma}^\rho \Gamma_{\mu\lambda}^\sigma, \quad (2)$$

$$R_{\mu\nu} = R^\rho_{\mu\nu\rho}. \quad (3)$$

2. El vacío electrodébil

Aunque existen numerosas fuentes de energía de vacío dependiendo del modelo de partículas fundamentales que se trabaje, el problema será ilustrado en el contexto del vacío electrodébil (**Kane, 1993; Weinberg, 1995**). Este vacío proveniente del mecanismo de ruptura espontánea de la simetría o mecanismo de Higgs es el responsable de la masa de los bosones W^\pm y Z (y de todos los fermiones con masa). El campo del Higgs formalmente se describe por un doblete de

campos escalares; sin embargo, por razones prácticas, se utilizará un solo campo escalar ϕ . La acción del sistema contiene la constante Λ_{des} (la CC desnuda) cuya naturaleza es netamente geométrica:

$$\begin{aligned}
 S &= \int d^4x \sqrt{|g|} \left[\frac{1}{16\pi G} (R - 2\Lambda_{\text{des}}) + \mathcal{L}_\phi \right] \\
 &= \int d^4x \sqrt{|g|} \left[\frac{R}{16\pi G} - \rho_{\Lambda_{\text{des}}} + \mathcal{L}_\phi \right], \quad (4)
 \end{aligned}$$

en donde G es la constante de gravitación universal, R el escalar de Ricci, \mathcal{L}_ϕ es la densidad lagrangiana que describe los campos energía–materia, y g es el determinante de la métrica $g_{\mu\nu}$ en consideración. De acuerdo con el principio de equivalencia (Weinberg, 1972), la densidad lagrangiana de un campo escalar ϕ en cualquier sistema de referencia se obtiene al reemplazar $\eta^{\mu\nu}$ por $g^{\mu\nu}$ ⁵:

$$\mathcal{L}_\phi = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - V(\phi), \quad (5)$$

en donde el potencial $V(\phi)$ esta dado por:

$$V(\phi) = \frac{1}{2} m^2 \phi^2 + \frac{1}{4!} \lambda \phi^4, \quad (\lambda > 0). \quad (6)$$

De esta manera, la acción en la Ec. (4) se puede expresar como:

$$S = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{|g|} R + S[\phi], \quad (7)$$

en donde

$$S[\phi] = \int d^4x \sqrt{|g|} \tilde{\mathcal{L}}_\phi, \quad (8)$$

con

$$\tilde{\mathcal{L}}_\phi = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - V(\phi) - \rho_{\Lambda_{\text{des}}}. \quad (9)$$

A partir de las expresiones (8) y (9) se calcula el tensor momentum-energía

$$\tilde{T}^\phi_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{|g|}} \frac{\delta S[\phi]}{\delta g^{\mu\nu}} = 2 \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial g^{\mu\nu}} - g_{\mu\nu} \tilde{\mathcal{L}} = g_{\mu\nu} \rho_{\Lambda_{\text{des}}} + T^\phi_{\mu\nu}, \quad (10)$$

en donde

$$T^\phi_{\mu\nu} = \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \partial_\sigma \phi \partial^\sigma \phi + g_{\mu\nu} V(\phi). \quad (11)$$

En el estado de vacío no existe energía cinética ni gradiente, por consiguiente sólo contribuyen la constante $\rho_{\Lambda_{\text{des}}}$ y el

valor esperado en el vacío del potencial $V(\phi)$:

$$\begin{aligned}
 \langle \tilde{T}^\phi_{\mu\nu} \rangle &= g_{\mu\nu} \rho_{\Lambda_{\text{des}}} + \langle T^\phi_{\mu\nu} \rangle \\
 &= g_{\mu\nu} (\rho_{\Lambda_{\text{des}}} + \langle V \rangle) \\
 &= (\rho_{\Lambda_{\text{des}}} + \rho_{\Lambda_{\text{ind}}}) g_{\mu\nu} \\
 &= \rho_{\Lambda_{\text{fis}}} g_{\mu\nu},
 \end{aligned} \quad (12)$$

en donde $\rho_{\Lambda_{\text{ind}}}$ es el valor esperado en el vacío del potencial $V(\phi)$. La expresión (12) tiene la misma forma del tensor momentum-energía asociado a la constante cosmológica introducida originalmente por Einstein (Einstein, 1917). Es decir, la “verdadera” densidad de energía asociada con la CC, que se denotará por $\rho_{\Lambda_{\text{fis}}}$, comprende dos contribuciones: una dada por la constante geométrica $\rho_{\Lambda_{\text{des}}}$, y otra dada por el valor esperado en el vacío del potencial $V(\phi)$.

Como se observa en la figura 1A, cuando $m^2 < 0$ el potencial $V(\phi)$ posee dos mínimos con $\phi \neq 0$, a diferencia del caso cuando $m^2 > 0$ en donde $V(\phi)$ posee un solo mínimo con $\phi = 0$. Los mínimos corresponden a los valores esperados en el vacío para ϕ (Cheng & Li, 1984). Para el caso descrito en la figura 1A, el escoger uno de los dos mínimos, por ejemplo el mínimo de la derecha, y construir una teoría de perturbaciones alrededor del valor de ϕ en este punto, conduce a un rompimiento de la simetría ⁶ que se tenía originalmente en el lagrangiano. De esta manera la partícula asociada al campo ϕ (el bosón de Higgs) obtiene una masa física igual a $M = (-2m^2)^{\frac{1}{2}}$. Sin embargo, el teorema de Goldstone (Cheng & Li, 1984) implica la existencia de bosones sin masa cuando se rompe la simetría de esta manera, lo cual es contrario a lo observado experimentalmente, ya que los bosones W^\pm y Z son masivos. No obstante, si se construye un lagrangiano invariante ante transformaciones de gauge locales (lo cual requiere introducir un doblete de campos), se puede evadir el teorema de Goldstone y obtener finalmente bosones masivos. Debido a que el objetivo de esta sección consiste en ilustrar sobre cómo se encuentra el valor del vacío electrodébil y no en proveer un cálculo riguroso de las masa de los bosones, es suficiente trabajar con el lagrangiano (5). El valor esperado en el vacío de ϕ que corresponde al valor de uno de los mínimos de la figura 1A (el de la derecha por ejemplo) es:

$$\langle \phi \rangle = \sqrt{\frac{-6m^2}{\lambda}}. \quad (13)$$

⁵En realidad, el principio de covariancia establece que se debe reemplazar $\eta^{\mu\nu}$ por $g^{\mu\nu}$ y las derivadas parciales por derivadas covariantes; sin embargo, en el caso de un campo escalar las derivadas parciales y covariantes son iguales. En el caso de un campo vectorial, donde el término es de la forma $F_{\mu\nu} = A_{\mu,\nu} - A_{\nu,\mu}$, se cancelan los símbolos de Christoffel y de nuevo no es necesario reemplazar las derivadas parciales por derivadas covariantes, $F_{\mu\nu} = A_{\mu,\nu} - A_{\nu,\mu}$.

⁶El lagrangiano (5) no es invariante de gauge local pero sí posee simetría de Lorentz, hermiticidad y simetría bajo la transformación $\phi \mapsto -\phi$.

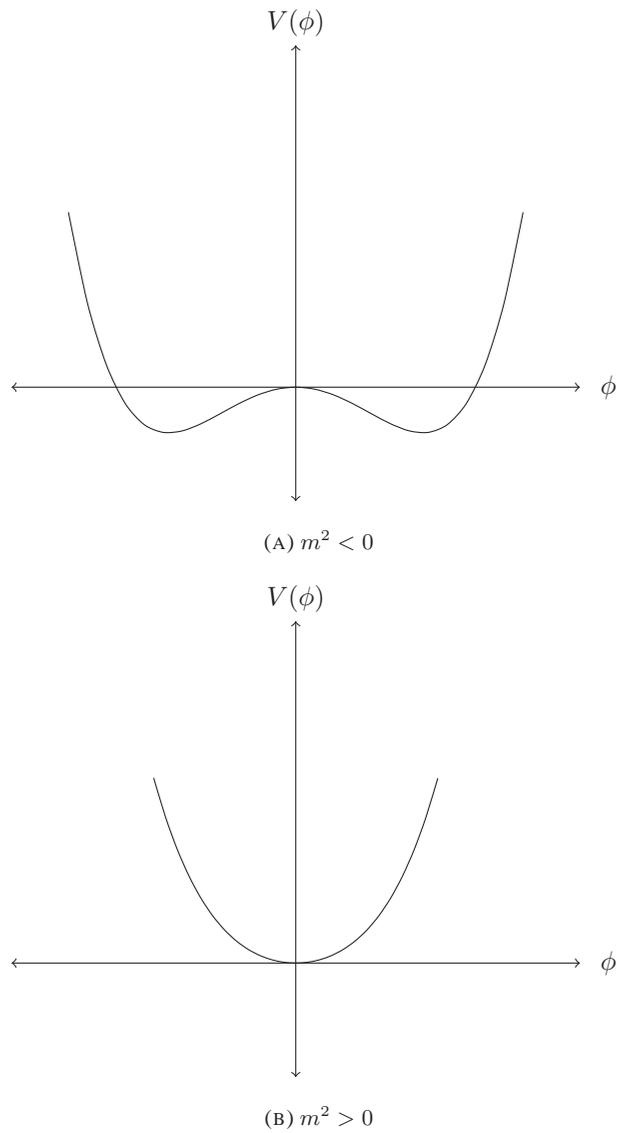


FIGURA 1. **El potencial $V(\phi)$ del campo de Higgs.** El caso (A) presenta dos mínimos, lo cual crea un rompimiento espontáneo de la simetría al tener que elegir entre uno de ellos. En el (B) caso sólo existe un mínimo y por lo tanto la simetría no se rompe.

En conclusión, la transición de fase electrodébil requiere que $\langle 0|\phi|0\rangle \neq 0$, lo cual induce una densidad de energía de vacío $\rho_{\Lambda\text{ind}} = \langle V \rangle$. En un nivel clásico, la densidad de energía del vacío electrodébil tiene el valor (Kane, 1993; Weinberg, 1995):

$$\rho_{\Lambda\text{ind}} = \langle V(\phi) \rangle = -\frac{3m^4}{2\lambda} = -\frac{1}{8}M_{\mathcal{H}}^2\langle\phi\rangle^2, \quad (14)$$

en donde $M_{\mathcal{H}}^2 = -2m^2 \simeq 100^2 \text{ GeV}^2$ es la masa física al cuadrado del bosón de Higgs (Aad *et. al.*, 2012; Chatrchyan

⁷Hasta el momento, las observaciones realizadas en el LHC acerca de la nueva partícula descubierta y candidata a ser el bosón de Higgs son consistentes con las características predichas por el Modelo Estándar; sin embargo, es necesario confirmar otras características como sus números cuánticos.

et. al., 2012)⁷ El valor de experimental de $\langle 0|\phi|0\rangle$ se obtiene a partir de la constante de Fermi G_F (**Beringer et. al., 2012**):

$$\langle 0|\phi|0\rangle = (\sqrt{2}G_F)^{-\frac{1}{2}} \approx 246,22 \text{ GeV}. \quad (15)$$

Reemplazando estos valores en (14), se obtiene que el valor esperado en el vacío para el potencial $V(\phi)$ es aproximadamente igual a -10^8 GeV^4 .

Como se verá en la siguiente sección, al comparar el valor deducido en esta sección con el valor experimental obtenido a partir de datos cosmológicos, se encuentra una diferencia abismal de 55 órdenes de magnitud. Se mostrará en dicha sección los primeros intentos para dar una solución a este problema, así como también se argumentará por qué tales intentos no lo solucionan realmente.

3. El viejo problema de la constante cosmológica

Los resultados experimentales (**Perlmutter et al., 1999**; **Riess et al., 1998**) muestran que el Universo no sólo se expande, sino que lo hace de una forma acelerada. Este hecho llevó a la hipótesis de la existencia de una nueva forma de energía llamada la EO, cuyas características deben ser similares a las de la CC con el fin de obtener el tipo de expansión observada. De esta manera, la EO se constituye en la medida experimental de la CC. Por otra parte, los resultados de las Refs. (**Jarosik et al., 2011**; **Komatsu et al., 2011**; **Larson et al., 2011**) muestran que el Universo es prácticamente plano, lo cual implica que, dado el monto de contenido material observado, existe un 73 % de energía faltante. La EO también proporciona una solución a este problema, constituyéndose en la cantidad de energía faltante. El orden de magnitud de la densidad de EO se puede calcular a partir del valor central de su parámetro de densidad Ω_Λ (**Komatsu et al., 2011**):

$$\Omega_\Lambda = \frac{\rho_{\Lambda\text{fis}}}{3m_p^2 H_0^2} = \frac{\rho_{\Lambda\text{fis}}}{\rho_c} = 0,729, \quad (16)$$

en donde $m_p^2 = 1/\sqrt{8\pi G} \sim 10^{18} \text{ GeV}$ es la masa reducida de Planck y $\rho_c = 3m_p^2 H_0^2 \sim 10^{-47} \text{ GeV}^4$ es la densidad de energía crítica. A partir de la Ec. (16), se obtiene que $\rho_{\Lambda\text{fis}} = \rho_c \cdot 0,729 \sim 10^{-47} \text{ GeV}^4$, por lo tanto, este último valor se constituye en el orden de magnitud del valor experimental de la CC.

En la sección anterior se encontró que el valor de la contribución del vacío electrodébil es del orden de 10^8 GeV^4 , y ya que los experimentos descritos en las Referencias (**Bressi, Carugno, Onofrio & Ruoso, 2002**; **Casimir, 1948**; **Mohideen & Roy, 1998**) demuestran la realidad indiscutible de la energía de vacío, el vacío electrodébil se constituye en una fuente real del campo gravitatorio. Al comparar este valor

teórico con el valor experimental mostrado anteriormente, se puede decir que la teoría predice una cantidad que es 55 órdenes de magnitud mayor que el valor observado. Esto ha sido llamado por algunos autores como “la peor predicción teórica en la historia de la física” (**Efstathaïou, Hobson & Lasenby, 2006**). Ahora, si se supone que los campos sólo contribuyen con el valor exacto de $\rho_{\Lambda\text{ind}} = -10^8 \text{ GeV}^4$ y que el valor observado es exactamente 10^{-47} GeV^4 ; la teoría *por sí sola* no consigue obtener concordancia entre los dos resultados, a menos que se escoja el valor $\rho_{\Lambda\text{des}}$ con una precisión de 55 cifras significativas. Por otro lado, debido a que en teoría cuántica de campos no es importante el valor de la energía sino la diferencia entre dos estados diferentes, se puede cambiar el valor de la energía de vacío añadiendo una constante arbitraria; sin embargo, lo anterior nos indica que siempre se debe escoger esta última constante con 55 cifras significativas de precisión. Esto muestra realmente que las teorías actuales son incapaces de dar una explicación satisfactoria a la existencia del pequeño valor observado de $\rho_{\Lambda\text{fis}}$, a pesar del enorme valor de $\rho_{\Lambda\text{ind}}$.

Lo expuesto anteriormente se conoce como el primer o viejo problema de la CC. Quien quiera resolver este problema debe preguntarse: ¿Cómo cancelar, sin recurrir a ajustes finos, la enorme contribución de los campos? Como solución a este cuestionamiento, se ha reemplazado $\rho_{\Lambda\text{des}}$ por campos escalares (**Abbot, 1985**; **Barr, 1987**; **Barr & Hochberg, 1988**; **Ford, 1987**; **Peccei, Sola & Wetterich, 1987**; **Sola, 1989**) (también en modelos de quintaesencia (**Caldwell, Dave & Steinhardt, 1998**; **Yoo & Watanabe, 2012**) y k-esencia (**Armendariz-Picon, Mukhanov & Steinhardt, 2000**; **Yoo & Watanabe, 2012**)). Sin embargo, en la Ref. (**Weinberg, 1989**) se mostró que esto no es realmente la solución al problema; la demostración consiste básicamente en que si se logra la cancelación dinámica del vacío cuántico, los campos no satisfacen las ecuaciones de movimiento que se derivan a partir de su densidad lagrangiana, y viceversa: si los campos satisfacen las ecuaciones de movimiento, éstos no logran solucionar el problema de ajuste fino (**Weinberg, 1996**).

4. Posible solución

La motivación principal que condujo al planteamiento de la presente solución se encuentra en la Referencia (**Stefanic, 2009**) en donde se muestra un modelo cosmológico que contiene un fluido cósmico adicional con una EDE no homogénea de la forma $p = \omega\rho + \beta H^{-\alpha}$, con $\alpha > 0$. El modelo exhibe en épocas tardías una expansión acelerada producida de una CC efectiva de *pequeño valor*. Como se verá más

detalladamente en la sección 5, cuando la CC es complementada por una función de la forma $1/H^{2n}$, siendo n un número natural, es posible cancelar en épocas tardías y sin necesidad de recurrir a un ajuste fino, la contribución de los campos que permean el Universo. Esto se debe a que el nuevo término, al ser un cociente que involucra a H , es muy grande en épocas tardías cuando el parámetro de Hubble es muy pequeño. Para épocas dominadas por la radiación o la materia, el valor de $\rho_{\Lambda\text{fis}}$ se relaja mediante la introducción de términos de la forma $1/(q-1)$ o $1/(q-\frac{1}{2})$, respectivamente (**Bauer, Sola & Stefancic**, 2010a). En resumen, se busca construir un modelo cosmológico en donde la CC es complementada por un nuevo fluido cósmico, llamado el ‘‘Cosmón’’, para provocar de esta manera la aparición de una EDE efectiva no homogénea. Este mecanismo, originado en la presencia del Cosmón, que reduce de manera significativa el gran valor de $\rho_{\Lambda\text{fis}}$, se llamará de ahora en adelante el ‘‘*mecanismo de relajación*’’ de la CC. No obstante, el origen y la naturaleza del ‘‘Cosmón’’ no son claros.

En la Referencia (**Nojiri & Odintsov**, 2005) se mostró que una EDE no homogénea es en realidad la descripción efectiva de una teoría modificada de la gravedad; es decir, *el Cosmón no es una partícula, sino la manifestación de una teoría modificada de la gravedad*. Gracias a la forma que poseen el escalar de Ricci y el invariante de Gauss-Bonnet en la métrica de Friedmann-Robertson-Walker, se pueden obtener algebraicamente los términos $1/(q-1)$ y $1/(q-\frac{1}{2})$ a partir de ellos. Todo lo anterior sugiere que una teoría modificada de la gravedad que involucre el escalar de Ricci y el invariante de Gauss-Bonnet conduce a una posible solución al viejo problema de la CC; la presentación de esta teoría de gravedad modificada se realizará en la siguiente subsección. Se debe mencionar que la solución al ser de origen gravitacional, en contraste con las soluciones en términos de campos escalares, goza de la gran ventaja de ser un mecanismo auto-interactuante, i.e., aparte de conseguir la cancelación *dinámica* de $\rho_{\Lambda\text{fis}}$, provoca simultáneamente que el Universo evoluciona a través de la historia térmica estándar. Por último, se debe mencionar que el enorme valor de $\rho_{\Lambda\text{fis}}$ no es un problema sino que garantiza el mismo éxito de la solución (como se observará en la sección 5).

4.1. Principio variacional. En las Referencias (**Bauer**, 2010; **Bauer, Sola & Stefancic**, 2010a; **Bauer, Sola & Stefancic**, 2010b) se presenta la siguiente teoría modificada de

la gravedad como la posible solución al problema:

$$\mathcal{S} = \int \sqrt{-g} d^4x \left[\frac{1}{16\pi G} R - \rho_{\Lambda\text{fis}} - f(R, \mathcal{G}) + \mathcal{L}_M \right], \quad (17)$$

en donde \mathcal{G} es el invariante de Gauss-Bonnet dado por:

$$\mathcal{G} = R^2 - 4R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + R_{\rho\mu\lambda\nu}R^{\rho\mu\lambda\nu}. \quad (18)$$

Puesto que el invariante de Gauss-Bonnet es un escalar que se construye a partir de sumas algebraicas de contracciones del tensor de Riemann, la presente teoría es coherente con el principio general de relatividad, el principio de equivalencia y la conservación del cuádrimomentum (**Einstein**, 1922).

La forma específica de $f(R, \mathcal{G})$ es:

$$f(R, \mathcal{G}) = \frac{\beta}{B(R, \mathcal{G})} + A(R), \quad (19)$$

en donde $A(R)$ es un polinomio de orden bajo (empezando desde el orden 2 debido a que los ordenes 0 y 1 ya están incluidos en la acción de Einstein-Hilbert con CC); las motivaciones para la introducción de este término no son relevantes en la solución del problema de ajuste fino debido a que su importancia se encuentra en épocas tempranas del universo. El invariante de Gauss-Bonnet no se incluyó en este polinomio ya que al ser un invariante topológico no tendrá ningún efecto en las ecuaciones de campo resultantes (**Armsen**, 1977). El primer término en la Ec. (19), conformado por la constante β y el polinomio B en R y \mathcal{G} , es el responsable de la cancelación dinámica de la energía de vacío. Con el propósito de obtener una densidad lagrangiana con una dimensión de masa correcta⁸, la constante β debe poseer una dimensión igual a:

$$[\beta] = M^{n+4}, \quad (20)$$

en donde n es la dimensión de masa característica del polinomio $B(R, \mathcal{G})$.

Para comprender cómo se origina la cancelación dinámica a partir del funcional (17), primero se derivan las ecuaciones de campo utilizando el principio de acción estacionaria, i.e. la variación a primer orden de (17) es igual a cero:⁹

$$\delta\mathcal{S} = \int d^4x \frac{\delta\mathcal{S}}{\delta g^{\mu\nu}} \delta g^{\mu\nu} = 0, \quad (21)$$

El término $\delta\mathcal{S}/\delta g^{\mu\nu}$ en (21) corresponde a la derivada funcional, la cual es igual a:

$$\frac{\delta\mathcal{S}}{\delta g^{\mu\nu}} = \left[\frac{1}{16\pi G} G_{\mu\nu} + \rho_{\Lambda\text{fis}} g_{\mu\nu} - E_{\mu\nu} + \frac{1}{2} T_{\mu\nu} \right] \sqrt{-g}, \quad (22)$$

⁸La acción \mathcal{S} posee dimensiones de energía integrada en el tiempo; por lo tanto, en unidades naturales, su dimensión de masa es 0. En consecuencia, la dimensión de la densidad lagrangiana debe ser M^4 .

⁹Si se desea conocer los detalles de este cálculo, véase el Apéndice A.

en donde $E_{\mu\nu}$ es

$$E_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}f(R, \mathcal{G})g_{\mu\nu} + R_{\mu\nu} (2Rf^{\mathcal{G}} + f^R) + (2Rf^{\mathcal{G}} + f^R)_{;\mu\nu} - g_{\mu\nu}g^{\alpha\beta} (2Rf^{\mathcal{G}} + f^R)_{;\alpha\beta} - 8f^{\mathcal{G}}R_{\mu\lambda}R_{\nu}^{\lambda} + 4g_{\mu\nu}(f^{\mathcal{G}}R^{\alpha\beta})_{;\alpha\beta} - 8(f^{\mathcal{G}}R^{\alpha\beta})_{;\mu\alpha}g_{\nu\beta} + 4g^{\alpha\beta}(f^{\mathcal{G}}R_{\mu\nu})_{;\alpha\beta} + 2f^{\mathcal{G}}R_{\mu\alpha\beta\gamma}R_{\nu}^{\alpha\beta\gamma} - 4(f^{\mathcal{G}}R_{\mu\nu}^{\alpha\beta})_{;\alpha\beta}, \tag{23}$$

siendo $f^Y = \partial f / \partial Y$. Por el lema fundamental del cálculo variacional se obtiene que

$$\frac{\delta \mathcal{S}}{\delta g^{\mu\nu}} = 0, \tag{24}$$

y, por lo tanto, las ecuaciones de campo son:

$$G_{\mu\nu} = -8\pi G(\rho_{\Lambda\text{fis}}g_{\mu\nu} + T_{\mu\nu} - 2E_{\mu\nu}). \tag{25}$$

En el término $\rho_{\Lambda\text{fis}}$, que corresponde a la densidad de energía de la CC “física”, no se ha hecho un ajuste fino en $\rho_{\Lambda\text{des}}$ para cancelar $\rho_{\Lambda\text{ind}}$. Deteniéndose un instante en este punto, se puede intuir que el resultado efectivo de la modificación de la gravedad consiste en la introducción de un nuevo tensor $E_{\mu\nu}$, el cual puede ser interpretado como “tensor momentum-energía” inducido gravitacionalmente. Como se verá posteriormente, este nuevo término hace que el ajuste fino sea innecesario.

4.2. Cosmología $f(R, \mathcal{G})$. Es obvio que la modificación de la gravedad ocasiona que la cosmología sea distinta a la estándar. Sin embargo, no es el propósito obtener una cosmología diferente, sino solucionar el viejo problema sin distorsionar la conocida historia térmica del Universo. Se verá que el *resultado efectivo* de la modificación es la introducción de un nuevo fluido cósmico, llamado el Cosmón, con una EDE no homogénea. Debido a que el tensor $E_{\mu\nu}$ (interpretado como el tensor momentum-energía asociado al Cosmón) es originado a partir de modificaciones de la gravedad, las expresiones para su densidad de energía y su presión en un universo de Friedmann-Robertson-Walker serán una función del parámetro de expansión a (véase el Apéndice B). Por consiguiente, el Cosmón no será un ente estático sino un ente dinámico que evoluciona a medida que el Universo se expande.

4.2.1. Ecuaciones modificadas de Friedmann. Con el propósito de comprender la naturaleza del tensor $E_{\mu\nu}$, se hallan las componentes de las ecuaciones de campo con el primer índice contravariante y el segundo covariante. A partir

de la componente 0_0 se obtiene que:

$$G^0_0 = -3H^2 = -8\pi G(\rho_{\Lambda\text{fis}} - 2E^0_0 + T^0_0), \tag{26}$$

$$3H^2 = 8\pi G(\rho_{\Lambda\text{fis}} - 2E^0_0 + \rho_m + \rho_r),$$

en donde

$$E^0_0 = -\frac{1}{2} \left[f - 24H^2(\dot{H} + H^2)f^{\mathcal{G}} - 6(\dot{H} + H^2)f^R + 6H\dot{f}^R + 24H^3\dot{f}^{\mathcal{G}} \right], \tag{27}$$

con ρ_m y ρ_r siendo las densidades de energía de la materia y la radiación respectivamente. Esta ecuación corresponde a la primera ecuación de Friedmann modificada. Al comparar con la primera ecuación de Friedmann, se observa que la única diferencia es el término E^0_0 . Si la gravedad a escalas cosmológicas está descrita por la Ec. (17), desde la perspectiva de la ecuaciones de campo usuales el término E^0_0 es una densidad de energía que evoluciona en el tiempo; es decir, el *resultado efectivo* de la modificación es la aparición de una densidad de energía variable en el tiempo:

$$\rho_F = -2E^0_0. \tag{28}$$

Generalizando el resultado anterior, el tensor $E_{\mu\nu}$ se identifica con las componentes del tensor momentum-energía, $T^F_{\mu\nu}$, de un nuevo fluido cósmico denominado el “Cosmón”.

De acuerdo con el principio cosmológico (Weinberg, 1972), el Cosmón debe comportarse como un fluido perfecto, $T_{\mu\nu} = (\rho + p)u_{\mu}u_{\nu} - pg_{\mu\nu}$. En un sistema de referencia donde el Cosmón está en reposo ($u^{\mu} = \delta^{\mu}_0$), su densidad de energía y presión son:

$$(T^F)^0_0 = \rho_F = -2E^0_0 \quad \text{y} \quad (T^F)^i_i = -3p_F = -2E^i_i, \tag{29}$$

con:

$$E^i_j = -\frac{1}{2} \left[f + 8H^2\ddot{f}^{\mathcal{G}} + 2\ddot{f}^R - 2(\dot{H} + 3H^2)f^R - 24H^2(\dot{H} + H^2)f^{\mathcal{G}} + 16H(\dot{H} + H^2)\dot{f}^{\mathcal{G}} \right] \delta^i_j. \tag{30}$$

Gracias a la construcción de la función $f(R, \mathcal{G})$ a partir de invariantes de curvatura, la integral $\int d^4x \sqrt{|g|} f(R, \mathcal{G})$ es un escalar; por lo tanto, el tensor $E_{\mu\nu}$ cumple la identidad de Bianchi, $E^{\mu\nu}_{;\nu} = 0$, la cual implica que el Cosmón cumpla individualmente la ecuación de continuidad:

$$\dot{\rho}_F + 3H(\rho_F + p_F) = 0. \tag{31}$$

“La EDE para el Cosmon” es $p_F = \omega_F \rho_F$. Se puede observar de las ecuaciones (27) y (30) que el parámetro de estado ω_F es una función no trivial de H y q .

Para derivar la segunda ecuación modificada de Friedmann se halla la componente i_i de las ecuaciones de campo:

$$\begin{aligned} G^i_i &= -3(2\dot{H} + 3H^2) = 6H^2q - 3H^2 \\ &= 8\pi G(3p_{\Lambda\text{fis}} + 3p_F + 3p_m + 3p_r). \end{aligned} \quad (32)$$

Reorganizando la ecuación (32), y teniendo en cuenta que la presión de la materia es cero, se obtiene una ecuación que involucra únicamente la radiación, la CC y el Cosmón:

$$H^2 \left(q - \frac{1}{2} \right) = 4\pi G(p_r + p_{\Lambda\text{fis}} + p_F). \quad (33)$$

Si se ignoran los términos correspondientes a la CC y al Cosmón, se deduce que en una época dominada por la materia q debe ser igual a $\frac{1}{2}$, es decir, cuando el Cosmón se cancela con la CC, se obtiene el resultado esperado. La ausencia del Cosmón en las ecuaciones no permitiría el desarrollo de una época dominada por la materia a menos que se realice un ajuste fino en la CC.

Al sumar la Ec. (26) con la Ec. (32) para eliminar H^2 se llega a la segunda ecuación de Friedmann modificada:

$$3H^2q = 4\pi G(\rho_{\Lambda\text{fis}} + 3p_{\Lambda\text{fis}} + \rho_F + 3p_F + \rho_m + \rho_r + 3p_r). \quad (34)$$

Por último, restando la segunda ecuación de Friedmann modificada de la primera, se obtiene una ecuación en donde se incluyen únicamente la materia, la CC y el Cosmón:

$$3H^2(1 - q) = 4\pi G[\rho_m + \rho_{\Lambda\text{fis}} + \rho_F - 3(p_{\Lambda\text{fis}} + p_F)]. \quad (35)$$

Nuevamente, haciendo un análisis similar, la presencia o ausencia del Cosmón en las ecuaciones permite o prohíbe la existencia de una época dominada por la radiación caracterizada por un parámetro de desaceleración igual a 1.

Sintetizando, el modelo de gravedad modificada permite definir una CC *efectiva*. La densidad de energía y la presión de la CC efectiva están dadas por:

$$\begin{aligned} \rho_{\Lambda\text{efec}} &= \rho_{\Lambda\text{fis}} + \rho_F, \\ p_{\Lambda\text{efec}} &= p_{\Lambda\text{fis}} + p_F. \end{aligned} \quad (36)$$

La EDE de la CC efectiva es $p_{\Lambda\text{efec}} = \omega_{\text{efec}}\rho_{\Lambda\text{efec}}$, en donde

$$\begin{aligned} \omega_{\text{efec}} &= \frac{-\rho_{\Lambda\text{fis}} + \omega_F \rho_F}{\rho_{\Lambda\text{fis}} + \rho_F} = -1 + (1 + \omega_F) \frac{\rho_f}{\rho_{\Lambda\text{efec}}} \\ &= -1 + (1 + \omega_F) \frac{\rho_{\Lambda\text{efec}} - \rho_{\Lambda\text{fis}}}{\rho_{\Lambda\text{efec}}}. \end{aligned} \quad (37)$$

Debido a que $\rho_{\Lambda\text{fis}}$ es una constante y que ω_F es una función de H y q , el parámetro de estado de la CC efectiva es una función de $\rho_{\Lambda\text{efec}}$, H y q ; por consiguiente su EDE es no homogénea. La EDE permite reescribir la segunda ecuación de Friedmann de la siguiente manera:

$$3H^2q = 4\pi G[2\rho_r + \rho_m + (1 + \omega_{\text{efec}})p_{\Lambda\text{efec}}]. \quad (38)$$

A partir de la EDE para cada fluido y de la ecuación (34), se obtiene una expresión para el parámetro de desaceleración q :

$$q = \sum_n (1 + \omega_n) \frac{\Omega_n}{2}, \quad \Omega_n = \frac{\rho_n}{\rho_c}, \quad \rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G}, \quad (39)$$

en donde n representa cada uno de los fluidos que componen el Universo. El parámetro de estado $\omega_{\Lambda\text{efec}}$, al depender de H y q es una función del tiempo. En la sección 6 se mostrará cualitativamente cómo debe ser su evolución en las épocas dominadas por la materia y la radiación. La expresión para el parámetro de desaceleración q hoy en día no es simplemente $q_0 = \Omega_m^0/2 - \Omega_{\Lambda\text{fis}}^0$ (según el modelo ΛCDM), sino:

$$q_0 = \frac{\Omega_m^0}{2} + \Omega_r^0 + (1 + 3\omega_{\text{efec}}^0) \frac{\Omega_{\Lambda\text{efec}}^0}{2}. \quad (40)$$

4.3. Condiciones sobre $f(R, \mathcal{G})$. En virtud de que la presente solución no debe solamente cancelar dinámicamente el valor de la energía de vacío sino que también debe reproducir satisfactoriamente la cosmología estándar, $f(R, \mathcal{G})$ debe cumplir ciertas condiciones que garantizan que se logre dicho objetivo. Las condiciones son (**Bauer, Sola & Stefancic, 2010a**):

1. Debido a la creación de las partículas del modelo estándar en la época de recalentamiento, justo después y en el inicio de la época dominada por la radiación, la densidad de energía $\rho_{\Lambda\text{efec}}$ debe coincidir prácticamente con el enorme valor de la densidad de energía de vacío. Para una época anterior, el mecanismo de relajación no debe funcionar, puesto que ocasionaría daños al funcionamiento de los modelos inflacionarios. La primera condición se puede resumir en:

$$\frac{\beta}{B(R, \mathcal{G})} \rightarrow 0, \quad f(R, \mathcal{G}) \rightarrow a_2 R^2 + \dots \quad (41)$$

para $H > H_{rad}^i$,

en donde H_{rad}^i es el parámetro de Hubble característico de esta época.

La presencia de $A(R)$ no provoca que el valor de $\rho_{\Lambda\text{fis}}$ se altere ya que a una escala de gran unificación, en donde $\rho_{\Lambda\text{fis}} \sim \rho_{GUT} \sim m_{GUT}^4$, con $m_{GUT} \sim 10^{16}$ GeV, se tiene que $R \sim H^2 \sim 8\pi m_{GUT}^4/m_p^2$, y por lo tanto $R^2/\rho_{\Lambda\text{fis}} \sim 64\pi^2 m_{GUT}^4/m_p^4 \sim 10^{-9}$, i.e. R^2 es despreciable; la razón para introducir el polinomio $A(R)$ radica en producir una inflación de tipo Starobinsky (**Starobinsky, 1980**) o una inflación de tipo anómala (**Antoniadis & Mottola, 1992; Sola, 2008; Sola & Shapiro, 2002**) y de esta manera crear

una transición entre la época inflacionaria y el mecanismo de relajación. El polinomio A también provee una vía de escape a inestabilidades encontradas en el formalismo métrico (Sotiriou & Faroni, 2010) y posibilidades de renormalización a altas energías. No obstante, el polinomio no cumplirá ninguna función en el mecanismo de relajación y será ignorado en el análisis subsecuente.

2. La presencia del Cosmón no debe distorsionar la historia térmica del universo, por consiguiente, el valor $\rho_{\Lambda\text{efec}}$ hoy en día debe coincidir esencialmente con el valor medido experimentalmente de 10^{-47} GeV^4 . En vista de que la diferencia entre el valor experimental y el valor arrojado por teoría cuántica de campos es abismal, se necesita básicamente que los dos valores se cancelen mutuamente, i.e. $\rho_{\Lambda\text{fis}} \sim -\rho_F$; para esto, B deber ser tan pequeño como para que el cociente crezca y se produzca la cancelación. La segunda condición se resume en:

$$B(R, \mathcal{G}) \rightarrow 0 \quad \text{para} \quad H < H_{rad}^i. \quad (42)$$

Al tratar de satisfacer las condiciones anteriores en cada una de las etapas de la historia térmica, se podrá construir la forma explícita de la función B . Los detalles acerca de la cancelación dinámica y de la construcción de B se presentarán en las siguientes secciones.

5. Modelo de juguete

Para entender de manera más precisa cómo el mecanismo garantiza que la relajación se realice mediante un proceso espontáneo y no mediante ajustes finos en la CC, se analizará un modelo de juguete en tres escenarios diferentes. Para solucionar el primer problema de la CC se debe dar razón acerca del pequeño valor medido de la CC a pesar del enorme valor del vacío cuántico. La razón consiste, según (Bauer, Sola & Stefancic, 2010a), en que se está ignorando el término $E_{\mu\nu}$ en las ecuaciones de campo, el cual cancela de manera espontánea el vacío cuántico provocando que el valor observado sea muy pequeño:

$$\begin{aligned} |\rho_{\Lambda\text{fis}} - 2E_0^0| &\ll |\rho_{\Lambda\text{fis}}|, \\ |\rho_{\Lambda\text{fis}} + \rho_F| &\ll |\rho_{\Lambda\text{fis}}|. \end{aligned} \quad (43)$$

El término ρ_F no es ajustado ad hoc, sino que varía en el tiempo hasta que se alcanza la cancelación que provoca que el valor de $\rho_{\Lambda\text{efec}}$ sea el observado.

5.1. Época actual. La cancelación en épocas tardías del Universo se obtiene con $\rho_F = \beta/H^2$. Al reemplazar en la

primera ecuación modificada de Friedmann (26) se obtiene:

$$\rho_c := \frac{3H^2}{8\pi G} = \rho_m + \rho_{\Lambda\text{fis}} + \rho_F = \rho_m + \rho_{\Lambda\text{fis}} + \frac{\beta}{H^2}, \quad (44)$$

cuya solución es:

$$H^2 = \left(\frac{\beta}{\rho_{\Lambda\text{fis}}} \right) / \left(\frac{\rho_c - \rho_m}{\rho_{\Lambda\text{fis}}} - 1 \right). \quad (45)$$

Actualmente $\rho_m, \rho_c \ll |\rho_{\Lambda\text{fis}}|$, por consiguiente el primer término del denominador en la expresión (45) se puede despreciar y la solución es $H_0^2 = -\beta/\rho_{\Lambda\text{fis}}$. El enorme valor de $\rho_{\Lambda\text{fis}}$ no es un problema dentro de este modelo, sino que por el contrario, ocasiona que el parámetro de Hubble actual sea pequeño. Sin la presencia de ρ_F la ecuación estaría dominada por la enorme CC provocando que H sea grande en oposición a los resultados experimentales.

El mecanismo también puede ser analizado desde un punto de vista diferente. Debido a que el parámetro de Hubble al cuadrado hoy en día H_0^2 es muy pequeño comparado con $\rho_{\Lambda}/3m_p^2$, el término $1/H^2$ se hace muy grande y, escogiendo correctamente el signo de β se obtiene la cancelación de la CC. De ahora en adelante, *relajar la CC es equivalente a hacer $B \rightarrow 0$* . La elección de la constante β no se constituye en un ajuste fino ya que pequeños cambios en β no producirán grandes cambios en H_0 ; el pequeño valor de H_0 es debido al gran valor de $\rho_{\Lambda\text{fis}}$ siendo únicamente necesario ajustar las unidades.

5.2. Época de radiación y de materia. Para analizar la época dominada por la radiación se toma como ejemplo el vacío electrodébil cuyo valor es negativo. El efecto de una CC negativa en esta época se deduce de la solución de la ecuación de Friedmann con densidades de energía ρ_r y $\rho_{\Lambda\text{fis}}$ comparables en magnitud, y bajo la condición de $\rho_r - |\rho_{\Lambda\text{fis}}| > 0$:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{\rho_r - |\rho_{\Lambda\text{fis}}|}{3m_p^2}, \quad (46)$$

$$\frac{da}{dt} = \sqrt{\frac{\rho_r^0 - |\rho_{\Lambda\text{fis}}| a^4}{3m_p^2 a^4}}. \quad (47)$$

La solución viene dada por:

$$a(t) = \left[\frac{\rho_r^0}{|\rho_{\Lambda\text{fis}}|} \right]^{1/4} \sqrt{\text{sen} \left(2 \frac{\sqrt{|\rho_{\Lambda\text{fis}}|}}{\sqrt{3}m_p} t \right)}. \quad (48)$$

De la figura 2 se observa que la presencia de una energía de vacío negativa en la época de radiación provoca el recolloso del universo. Para evitar que esto suceda se introduce nuevamente un término que contrarresta el enorme valor de vacío electrodébil. Sin embargo, en este caso, el parámetro

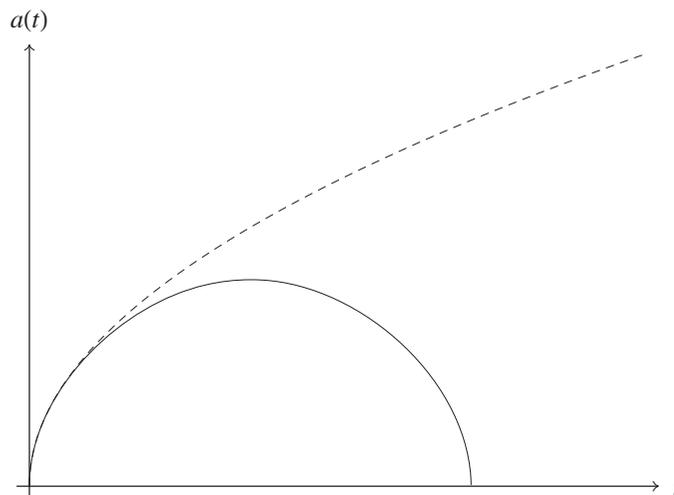


FIGURA 2. **Comportamiento del parámetro de expansión a con una CC negativa comparable con la densidad de energía de la radiación.** La línea continua muestra el comportamiento del parámetro $a(t)$ cuando la CC negativa es comparable con la densidad de energía de la radiación. La línea punteada muestra el comportamiento asintótico cuando la CC es despreciable.

de Hubble es grande y no funciona el método utilizado para la época actual; así se debe complementar la función B con un término que tienda a cero en esta época:

$$B \propto H^2(1 - q). \quad (49)$$

Justo al inicio de la época de radiación, la energía de vacío negativa provocará que el parámetro de desaceleración tienda a valores positivos (recolapso del Universo). A medida que q se acerca a 1, $B \rightarrow 0$. Por consiguiente, el valor de la densidad de energía inducida gravitacionalmente tiende a ser muy grande y cancela de esta manera el valor de la CC. El valor de q será muy cercano a 1 pero nunca igual, puesto que el proceso se detendrá cuando la cancelación cause que la radiación sea dominante. Si q llegará a ser mayor que 1, ρ_F dominará sobre $\rho_{\Lambda_{\text{fis}}}$, lo cual es equivalente a la presencia de una CC positiva que nuevamente provocaría que q tendiera a 1. Por esta razón se concluye que el modelo, con $q \approx 1$, es estable. En resumen, el mecanismo de relajación provoca que se presente un período de radiación, y a su vez, la misma existencia de la época de radiación permite que el mecanismo funcione. Para la época dominada por la materia la expresión $(\frac{1}{2} - q)$ relaja la CC debido a razones similares.

6. Modelo realista

En la sección anterior se mostró cómo relajar la CC en las diferentes épocas del Universo; sin embargo, cada modelo descrito implica un período de existencia infinita sin una

transición entre épocas. A partir de lo trabajado anteriormente, se infiere que para lograr el objetivo de una adecuada transición entre épocas, se requiere que la función B contenga cada uno de los términos H^2 , $(1 - q)$ y $(q - \frac{1}{2})$; para ello, en los artículos (Bauer, 2010; Bauer, Sola & Stefancic, 2010a; Bauer, Sola & Stefancic, 2010b) se propone el siguiente ansatz:

$$B(R, \mathcal{G}) = b_2 R^2 + c \mathcal{G} + b_n R^n. \quad (50)$$

Del Apéndice B, se observa que cualquiera de los términos en la Ec. (50) aporta un término proporcional a H^{2n} . Si se elige $b_2 = \frac{2}{3}$ y $c = \frac{1}{2}$, se obtiene $(q - \frac{1}{2})$. El último término proporciona $(1 - q)$ sin necesidad de fijar la constante b_n , la cual se denotará por y . De acuerdo con lo anterior, el ansatz mejorado es:

$$\begin{aligned} B(R, \mathcal{G}) &= \frac{2}{3} R^2 + \frac{1}{2} \mathcal{G} + (yR)^n \\ &= 24H^4 \left(q - \frac{1}{2}\right) (q - 2) \\ &\quad + [6yH^2(1 - q)]^n. \end{aligned} \quad (51)$$

El término proporcional a $(1 - q)$ será el responsable de relajar la CC en la época de radiación cuando H es grande; por consiguiente, éste debe dominar sobre el primero, para lo cual es necesario que $n > 2$. En la época de equivalencia entre la radiación y materia, los dos términos deben ser del mismo orden y por lo tanto:

$$y \sim H_{eq}^{\frac{(4-2n)}{n}}. \quad (52)$$

Las ecuaciones de campo resultantes (véase el apéndice B.2) son no lineales y bastantes complejas, lo cual dificulta una solución analítica de ellas. Por consiguiente, para entender cualitativamente el modelo, se realizará a continuación un análisis teórico aproximado del comportamiento de la función (51) en cada época del Universo. Aunque es posible hacer un completo análisis numérico del modelo, esto se encuentra fuera del alcance del artículo; sin embargo, se presentará un análisis numérico asintótico del modelo en la época actual.

6.1. Época de radiación. Primeramente, es importante mencionar que la forma en la que opera concretamente el mecanismo de relajación de la CC en las épocas de radiación y materia para este modelo realista es diferente a la presentada en el modelo de juguete. La época de radiación está caracterizada por $q \approx 1$ y por $H^2 \propto \rho_r \propto a^{-4}$. Para relajar la CC se requiere que $B \rightarrow 0$. Debido al valor de q , los términos en B poseen signos contrarios y es posible la cancelación aproximada de ambos si $[H^2(1-q)]^n \sim H^4$. De aquí, se deduce que $H^2(1-q) \sim H^{\frac{4}{n}} \propto a^{-4(\frac{2}{n})}$. Reemplazando en la ecuación (35) se encuentra que

$$3H^2(1-q) = 4\pi G(\rho_m + \rho_{\Lambda\text{efec}} - 3p_{\Lambda\text{efec}}) \propto a^{-\frac{8}{n}}, \quad (53)$$

por lo tanto $p_{\Lambda\text{efec}} = \frac{1}{3}\rho_m + \frac{1}{3}\rho_{\Lambda\text{efec}} + c_1 a^{-\frac{8}{n}}$. Cuando finaliza la época de radiación, q se hace diferente de 1; por lo tanto, para que se presente una transición suave a la época de materia, en donde $H^2 \propto a^{-3}$, se requiere que $n = \frac{8}{3}$. Utilizando la ecuación de continuidad y la regla de la cadena, $\dot{\rho}_{\Lambda\text{fis}} = aH \frac{d}{da}(\rho_{\Lambda\text{efec}})$, se llega a la siguiente ecuación diferencial ordinaria con coeficientes variables:

$$\frac{d}{da}(\rho_{\Lambda\text{efec}}) + 3\frac{1}{a} \left(\rho_{\Lambda\text{efec}} + \frac{1}{3}\rho_m + \frac{1}{3}\rho_{\Lambda\text{efec}} + c_1 a^{-\frac{8}{n}} \right) = 0. \quad (54)$$

Al solucionar la Ec. (54) con la ayuda de un sistema de álgebra computacional, se obtiene una expresión para $\rho_{\Lambda\text{efec}}$:

$$\rho_{\Lambda\text{efec}} = c_2 a^{-4} - \rho_m + 3c_1 \left(-4 + \frac{8}{n} \right)^{-1} a^{-\frac{8}{n}}. \quad (55)$$

A partir de la expresión anterior se obtiene el parámetro de estado ω_{efec} válido en esta época:

$$\omega_{\text{efec}} = \left(\frac{1}{3} \right) \left(\frac{\frac{1}{3}\rho_m + \frac{1}{3}\rho_{\Lambda\text{efec}} + c_1 a^{-\frac{8}{n}}}{c_2 a^{-4} - \rho_m + 3 \left(-4 + \frac{8}{n} \right)^{-1} a^{-\frac{8}{n}}} \right). \quad (56)$$

En el límite cuando $a \rightarrow 0$, es decir, en la época temprana de radiación, $\omega_{\text{efec}} \rightarrow \frac{1}{3}$; en la época tardía de radiación, cuando $a \rightarrow \infty$, $\omega_{\text{efec}} \rightarrow 0$.

6.2. Época de materia. La época dominada por la materia está caracterizada por $q \approx \frac{1}{2}$, $H^2 \propto \rho_m \propto a^{-3}$. Realizando un análisis similar, la condición $B \rightarrow 0$ implica que $H^4(q - \frac{1}{2}) \sim H^{2n}$. A partir de la ecuación (33) se obtiene que:

$$H^2 \left(q - \frac{1}{2} \right) = 4\pi G \left(\frac{1}{3}\rho_r + p_{\Lambda\text{efec}} \right) \sim H^{2n-2} \propto a^{3(n-1)}, \quad (57)$$

y por lo tanto $p_{\Lambda\text{efec}} = -\frac{1}{3}\rho_r + c_3 a^{-3(n-1)}$. Al escoger $n = \frac{7}{3}$ se obtiene una transición suave entre la época dominada por la radiación y la época dominada por la materia. Nuevamente, utilizando la ecuación de continuidad, se llega a una ecuación diferencial para $\rho_{\Lambda\text{efec}}$:

$$\frac{d}{da}(\rho_{\Lambda\text{efec}}) + 3\frac{1}{a} \left(\rho_{\Lambda\text{efec}} - \frac{1}{3}\rho_r + c_3 a^{-3(n-1)} \right) = 0, \quad (58)$$

cuya solución es:

$$\rho_{\Lambda\text{efec}} = c_4 a^{-3} - \rho_r + \frac{c_3 a^{-3(n-1)}}{n-2}. \quad (59)$$

El parámetro de estado en esta época es:

$$\omega_{\text{efec}} = \frac{-\frac{1}{3}\rho_r + c_3 a^{-3(n-1)}}{c_4 a^{-3} - \rho_r + \frac{c_3}{n-2} a^{-3(n-1)}}. \quad (60)$$

Para la época temprana ($a \rightarrow 0$) el parámetro tiende a $\frac{1}{3}$, y para la época tardía ($a \rightarrow \infty$) tiende a 0.

Anteriormente, se mostró cómo se debe escoger el valor de n para producir una correcta transición entre las etapas; sin embargo, el valor obtenido en los dos casos es diferente y por consiguiente se escogerá un valor cercano a las dos condiciones, $n = 3$. Esta selección también es congruente con la condición que se impuso al principio, $n > 2$. Finalmente, el ansatz completo es:

$$B(R, \mathcal{G}) = \frac{2}{3}R^2 + \frac{1}{2}\mathcal{G} + (yR)^3, \quad (61)$$

$$B(R, \mathcal{G}) = 24H^4 \left(q - \frac{1}{2} \right) (q - 2) + [6yH^2(1-q)]^3. \quad (62)$$

Se podría replicar en este punto que el análisis presentado no es válido, ya que la densidad de energía inducida no contiene únicamente la función $1/B$. Sin embargo, al examinar los términos adicionales, se observa que están acompañados por la derivada de la función $1/B$, lo cual implica que ρ_F sea una función de la forma:

$$\rho_F = \frac{\beta N(a, \dot{a}, \ddot{a}, \ddot{\ddot{a}})}{B^3}. \quad (63)$$

De esta manera, se mantiene la idea de hacer $B \rightarrow 0$ para relajar el enorme valor de $\rho_{\Lambda\text{fis}}$.

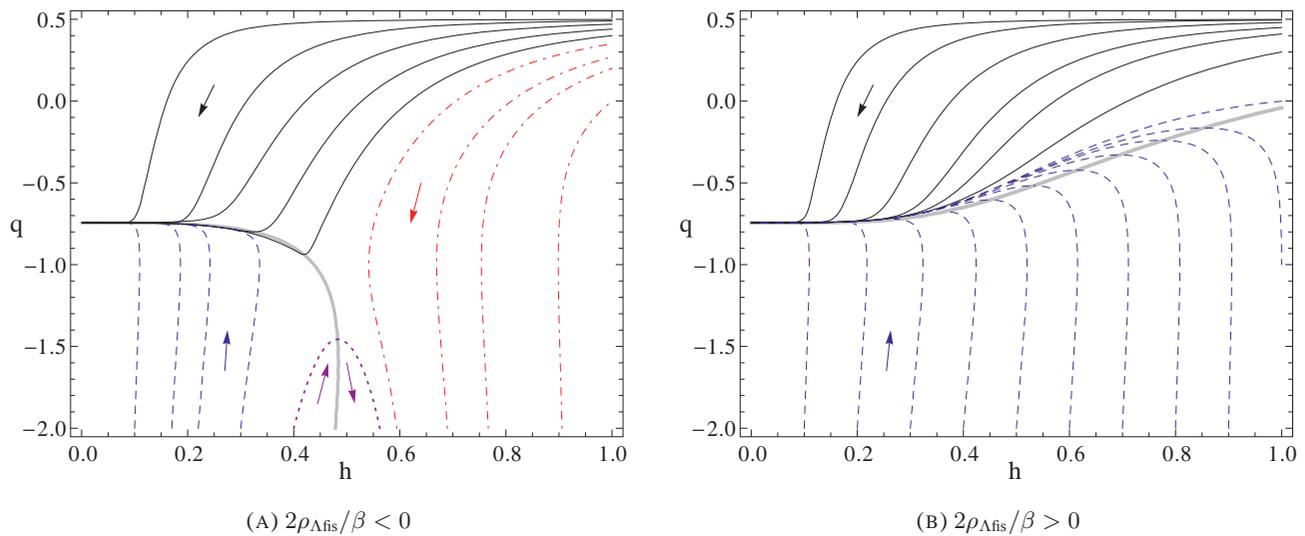


FIGURA 3. **Evolución tardía del parámetro de desaceleración q con respecto a $h = cH$.** Se presenta una familia de soluciones de las Ecs. (71) y (72). Las flechas indican la dirección del tiempo cósmico. La línea continua gruesa y gris que divide las gráficas en dos regiones representa $q' = \frac{dq}{d(t/c)} = 0$. Las líneas continuas negras representan universos que evolucionan de una época dominada por la radiación a una época acelerada producto de una CC pequeña. Las líneas a trazos azules representan universos superacelerados en el pasado (i.e. cuyo parámetro de desaceleración se hace cada vez más negativo cuando se va hacia atrás en el tiempo). Las líneas a trazos-punteadas representan universos superacelerados en el futuro. La línea punteada violeta representa universos que son superacelerados tanto en el pasado como en el futuro.

6.3. Época actual. Para la época actual el parámetro de Hubble H es muy pequeño y por lo tanto se desprecia el segundo término en la Ec. (62) (Bauer, Sola & Stefancic, 2010a), o en otras palabras se impone $y = 0$ en el modelo. En este caso, no se puede producir una cancelación aproximada entre dos términos, por lo cual la relajación de la CC está soportada en el pequeño valor de H (del mismo modo que se analizó en el modelo de juguete). Así, la densidad de energía inducida gravitacionalmente en la época actual es¹⁰:

$$\begin{aligned} \rho_F &= 864\beta[H^8(10q^4 - 31q^3 + 15q^2 + 19q - 10) \\ &\quad + H^7\dot{q}(4q^2 - 10q + 7)]/B^3 \\ &= \frac{\beta(5q^2 - 3q - 5)}{2H^4(2q^2 - 5q + 2)} - \frac{\beta\dot{q}(4q^2 - 10q + 7)}{2H^5(2q^2 - 5q + 2)^3}, \end{aligned} \quad (64)$$

y la ecuación de Friedmann modificada es:

$$\rho_c = \rho_m + \rho_{\Lambda\text{efec}}. \quad (65)$$

En un análisis asintótico, $\rho_m \rightarrow 0$, y la densidad de energía crítica se hace todavía más pequeña, $\rho_c \rightarrow 0$; por lo tanto la

ecuación (65) se reduce a:

$$\rho_{\Lambda\text{efec}} = \rho_{\Lambda\text{fis}} + \rho_F = 0, \quad (66)$$

i.e.

$$\rho_{\Lambda\text{fis}} + \beta \left[\frac{(5q^2 - 3q - 5)}{2H^4(2q^2 - 5q + 2)} - \frac{\dot{q}(4q^2 - 10q + 7)}{2H^5(2q^2 - 5q + 2)^3} \right] = 0. \quad (67)$$

Si se plantean las siguientes variables adimensionales $h := cH$, $\tilde{t} := t/c$, en donde $c = |2\rho_{\Lambda\text{fis}}/\beta|^{\frac{1}{4}}$, se obtiene $q'(\tilde{t}) = dq/d\tilde{t} = c\dot{q}(t)$. Lo anterior permite reescribir la ecuación (67) de la siguiente manera:

$$\frac{5q^2 - 3q - 5}{(2q^2 - 5q + 2)^2} - \frac{q'(4q^2 - 10q + 7)}{h(2q^2 - 5q + 2)^3} \pm h^4 = 0, \quad (68)$$

i.e.

$$q' = \frac{(5q^2 - 3q - 5)(2q^2 - 5q + 2)h \pm h^5(2q^2 - 5q + 2)^3}{4q^2 - 10q + 7}, \quad (69)$$

en donde el signo + corresponde al caso $2\rho_{\Lambda\text{fis}}/\beta > 0$ y el signo - al caso $2\rho_{\Lambda\text{fis}}/\beta < 0$. La derivada del parámetro de Hubble adimensional con respecto al tiempo adimensional

¹⁰Para obtener este resultado, se debe reemplazar $y = 0$ y $\dot{H} = -H^2(q + 1)$ en la Ec. (154) del Apéndice B.

está relacionada con el parámetro de desaceleración mediante la siguiente expresión¹¹:

$$\frac{dh}{d\tilde{t}} = h' = -h^2(q + 1). \quad (70)$$

De las ecuaciones (69) y (70) se pueden construir ecuaciones diferenciales de primer orden para $h(q)$ o $q(h)$:

$$\begin{aligned} \frac{q'}{h'} &= \frac{dq}{dh} = \\ &= -\frac{(5q^2 - 3q - 5)(2q^2 - 5q + 2)h \pm h^5(2q^2 - 5q + 2)^3}{h^2(4q^2 - 10q + 7)(q + 1)}, \end{aligned} \quad (71)$$

$$\begin{aligned} \frac{h'}{q'} &= \frac{dh}{dq} = \\ &= -\frac{h^2(4q^2 - 10q + 7)(q + 1)}{(5q^2 - 3q - 5)(2q^2 - 5q + 2)h \pm h^5(2q^2 - 5q + 2)^3}. \end{aligned} \quad (72)$$

En la figura 3A se muestra una familia de soluciones numéricas de las ecuaciones anteriores. La línea continua gruesa y gris que divide las gráficas en dos regiones representa $q' = 0$, lo que es igual a la curva:

$$\frac{5q^2 - 3q - 5}{(2q^2 - 5q + 2)^2} \pm h^4 = 0. \quad (73)$$

Las soluciones interesantes son aquéllas que corresponden a universos provenientes de una época de radiación, i.e. las líneas negras en la figura 3B. Se puede observar que estas últimas, independientemente de las condiciones iniciales, evolucionan en el tiempo hacia el punto $(h = 0, q \approx -0,74)$, el cual describe un universo con expansión acelerada. Este comportamiento es similar al predicho en los modelos de quintaesencia (Caldwell, Dave & Steinhardt, 1998; Yoo & Watanabe, 2012). En contraste, para obtener un universo de Sitter, el cual corresponde al punto $(h = 3^{-3/4}, q = -1)$, se necesita un ajuste fino en las condiciones iniciales. En el caso descrito en la figura 3A, que corresponde a la situación en la que la densidad de energía de la CC y la constante β poseen signo contrarios, el mecanismo de relajación actúa de la misma forma que fue descrita en el modelo de juguete. En el caso descrito en la figura 3B se muestra que aun cuando la densidad de energía de la CC y la constante β posean igual signo, las soluciones tienden al punto $(h = 0, q \approx -0,74)$.

7. Conclusiones

Se estudió la posible solución al viejo problema de la constante cosmológica, originada en el modelo de gravedad modificada descrito por la acción en la Ec. (17), que involucra una función $f(R, \mathcal{G})$ dependiente del escalar de Ricci

y del invariante de Gauss-Bonnet. Las ecuaciones de campo, derivadas a partir del principio de acción estacionaria, muestran que el resultado efectivo de la modificación consiste en la introducción de un nuevo tensor momentum-energía $E_{\mu\nu}$. Al estudiar la cosmología inducida por las ecuaciones modificadas de Friedmann, se mostró que la idea esencial detrás de la modificación de la gravedad consiste en introducir un término variable que cancela dinámicamente el enorme valor de la densidad de energía de vacío. Con el fin de obtener la conocida historia térmica del Universo, se impusieron condiciones que permiten acotar la forma funcional de $f(R, \mathcal{G})$.

A partir del estudio de un modelo de juguete se mostró cómo el mecanismo, sin necesidad de realizar un ajuste fino, relaja de manera dinámica el enorme valor del vacío cuántico en diferentes épocas del Universo, y genera un proceso de retroalimentación. También, bajo el estudio de este modelo de juguete, se construyó la forma de $f(R, \mathcal{G})$ de tal modo que el modelo corresponde a uno real:

$$f(R, \mathcal{G}) = \frac{\beta}{B(R, \mathcal{G})} + A(R), \quad (74)$$

con

$$B(R, \mathcal{G}) = \frac{2}{3}R^2 + \frac{1}{2}\mathcal{G} + (yR)^3. \quad (75)$$

Se mostró, a través de una aproximación analítica, cómo el comportamiento del modelo es congruente con la cosmología estándar. También, a través de un análisis numérico, se mostró cómo en el comportamiento asintótico se obtiene, sin necesidad de un ajuste fino, un universo con una expansión acelerada; este resultado es similar al predicho en los modelos de quintaesencia (Caldwell, Dave & Steinhardt, 1998; Yoo & Watanabe, 2012). Debido a que no se estudió el comportamiento del modelo a escalas del Sistema Solar, en donde esencialmente debe comportarse según la teoría de la gravedad de Einstein, no se puede concluir que la solución es completa (véase sin embargo la Ref. (Bauer, Sola & Stefancic, 2011)). Es de anotar que existen otros interesantes modelos que, a través de modificaciones a la gravedad, cancelan dinámicamente la densidad de energía de vacío (Bruneton et. al., 2012; Charmousis, Copeland, Padilla & Saffin, 2012a; Charmousis, Copeland, Padilla & Saffin, 2012b; Copeland, Padilla & Saffin, 2012; Padilla, Saffin & Zhou, 2010; Padilla, Saffin & Zhou, 2011). Como última conclusión, se puede decir que el modelo de gravedad modificada presentado en este artículo es en realidad un modelo efectivo, válido únicamente en escalas cosmológicas, que posiblemente soluciona el viejo problema de la constante cosmológica.

¹¹Esto se obtiene reemplazando las variables adimensionales h y \tilde{t} en $\dot{H} = -H^2(q + 1)$.

Agradecimientos

Y.R. cuenta con el apoyo financiero de la Fundación para la Promoción de la Investigación y la Tecnología del Banco de la República mediante proyecto de investigación número 3025 CT-2012-02, y de la VCTI (UAN) mediante proyecto de investigación número 2011254.

Apéndices

Apéndice A. Obtención de las ecuaciones de campo

A continuación se mostrarán los detalles del cálculo de las ecuaciones de campo para una gravedad modificada del tipo $F(R, S, T)$, y a partir de esta expresión general se obtendrán las respectivas ecuaciones para una gravedad de tipo $F(R, \mathcal{G})$.

El funcional que describe este primer tipo de gravedad es:

$$\mathcal{S} = \int d^4x \sqrt{-g} F(R, S, T), \quad (76)$$

en donde $S = R^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$ y $T = R^{\rho\mu\lambda\nu} R_{\rho\mu\lambda\nu}$. Para obtener las ecuaciones de campo se realiza una variación a primer orden al funcional \mathcal{S} . Primeramente, a partir de $g^{\mu\sigma} g_{\sigma\nu} = \delta_{\nu}^{\mu}$, las variaciones del tensor métrico doblemente covariante y doblemente contravariante son:

$$\delta g^{\rho\mu} = -g^{\rho\nu} g^{\mu\sigma} \delta g_{\nu\sigma}, \quad (77)$$

$$\delta g_{\rho\mu} = -g_{\rho\nu} g_{\mu\sigma} \delta g^{\nu\sigma}. \quad (78)$$

La variación de los símbolos de Christoffel es:

$$\begin{aligned} \delta \Gamma_{\mu\nu}^{\rho} &= \frac{1}{2} g^{\rho\sigma} (\delta g_{\nu\sigma,\mu} + \delta g_{\mu\sigma,\nu} - \delta g_{\mu\nu,\sigma}) \\ &+ \delta g^{\rho\sigma} (g_{\mu\sigma,\nu} + g_{\nu\sigma,\mu} - g_{\mu\nu,\sigma}), \\ &= \frac{1}{2} g^{\rho\sigma} (\delta g_{\nu\sigma,\mu} + \delta g_{\mu\sigma,\nu} - \delta g_{\mu\nu,\sigma} \\ &- 2\delta g_{\sigma\lambda} \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}). \end{aligned} \quad (79)$$

Por conveniencia, se hallan las derivadas covariantes de las variaciones de la métrica calculadas con respecto a la métrica $g_{\mu\nu}$:

$$\delta g_{\nu\sigma;\mu} = \delta g_{\nu\sigma,\mu} - \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} \delta g_{\lambda\sigma} - \Gamma_{\mu\sigma}^{\lambda} \delta g_{\nu\lambda}, \quad (80)$$

$$\delta g_{\mu\sigma;\nu} = \delta g_{\mu\sigma,\nu} - \Gamma_{\nu\mu}^{\lambda} \delta g_{\lambda\sigma} - \Gamma_{\nu\sigma}^{\lambda} \delta g_{\mu\lambda}, \quad (81)$$

$$\delta g_{\mu\nu;\sigma} = \delta g_{\mu\nu,\sigma} - \Gamma_{\sigma\mu}^{\lambda} \delta g_{\lambda\nu} - \Gamma_{\sigma\nu}^{\lambda} \delta g_{\mu\lambda}. \quad (82)$$

Utilizando la propiedad de simetría de los símbolos de Christoffel $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \Gamma_{\nu\mu}^{\lambda}$ y restando la ecuación (82) de la suma de las ecuaciones (80) y (81), se obtiene

$$\delta \Gamma_{\mu\nu}^{\rho} = \frac{1}{2} g^{\rho\sigma} (\delta g_{\nu\sigma;\mu} + \delta g_{\mu\sigma;\nu} - \delta g_{\mu\nu;\sigma}). \quad (83)$$

Debido a que las variaciones son con respecto a $g^{\mu\nu}$, se debe introducir la Ec. (78) en la Ec. (83):

$$\begin{aligned} \delta \Gamma_{\mu\nu}^{\rho} &= -\frac{1}{2} [g_{\lambda\nu} (\delta g^{\lambda\rho})_{;\mu} + g_{\lambda\mu} (\delta g^{\lambda\rho})_{;\nu} \\ &- g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} (\delta g^{\alpha\beta})_{;\rho}]. \end{aligned} \quad (84)$$

La variación del tensor de Riemann es:

$$\begin{aligned} \delta R_{\mu\lambda\nu}^{\rho} &= \delta \Gamma_{\mu\nu,\lambda}^{\rho} - \delta \Gamma_{\mu\lambda,\nu}^{\rho} + \Gamma_{\lambda\sigma}^{\rho} \delta \Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} + \delta \Gamma_{\lambda\sigma}^{\rho} \Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} \\ &- \Gamma_{\nu\sigma}^{\rho} \delta \Gamma_{\mu\lambda}^{\sigma} - \delta \Gamma_{\nu\sigma}^{\rho} \Gamma_{\mu\lambda}^{\sigma}. \end{aligned} \quad (85)$$

Puesto que la diferencia de dos símbolos de Christoffel es un tensor (Carroll, 2004), se puede hallar su derivada covariante:

$$\delta \Gamma_{\mu\nu;\lambda}^{\rho} = \delta \Gamma_{\mu\nu,\lambda}^{\rho} + \Gamma_{\lambda\sigma}^{\rho} \delta \Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} - \Gamma_{\mu\lambda}^{\sigma} \delta \Gamma_{\nu\sigma}^{\rho} - \Gamma_{\lambda\nu}^{\sigma} \delta \Gamma_{\mu\sigma}^{\rho}, \quad (86)$$

$$\delta \Gamma_{\mu\lambda;\nu}^{\rho} = \delta \Gamma_{\mu\lambda,\nu}^{\rho} + \Gamma_{\nu\sigma}^{\rho} \delta \Gamma_{\mu\lambda}^{\sigma} - \Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} \delta \Gamma_{\sigma\lambda}^{\rho} - \Gamma_{\lambda\nu}^{\sigma} \delta \Gamma_{\mu\sigma}^{\rho}. \quad (87)$$

Así, al restar la Ec. (87) de la Ec. (86) se obtiene una expresión más adecuada (Carroll, 2004):

$$\delta R_{\mu\lambda\nu}^{\rho} = (\delta \Gamma_{\mu\nu}^{\rho})_{;\lambda} - (\delta \Gamma_{\mu\lambda}^{\rho})_{;\nu}. \quad (88)$$

Con las expresiones anteriores se mostrará la variación del funcional (76). Debido a que la operación variación δ cumple la regla de Leibniz, se divide la variación en dos partes:

$$\delta \mathcal{S} = \int d^4x \{ [\delta \sqrt{-g} F(R, S, T)] + \delta F(R, S, T) \}, \quad (89)$$

en donde $\delta F(R, S, T)$ es:

$$\delta F(R, S, T) = \delta \mathcal{S}_R + \delta \mathcal{S}_S + \delta \mathcal{S}_T. \quad (90)$$

La variación del primer término de la integral, $\delta \sqrt{-g}$ es:

$$\delta \sqrt{-g} = -\frac{1}{2} \frac{\delta g}{\sqrt{-g}}. \quad (91)$$

Para hallar δg se utiliza el hecho que $\ln(\det A) = \text{Tr}(\ln A)$:

$$\frac{1}{\det A} \delta(\det A) = \text{Tr}[\delta(\ln A)] = \text{Tr}(A^{-1} \delta A). \quad (92)$$

Realizando la sustitución $A = g_{\mu\nu}$, $A^{-1} = g^{\mu\nu}$ se obtiene:

$$\delta g = g(g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}) = -g(g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}), \quad (93)$$

y reemplazando en la Ec. (91) se llega a la expresión:

$$\delta(\sqrt{-g}) = \frac{1}{2} \frac{g(g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu})}{\sqrt{-g}} = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}. \quad (94)$$

A partir de este punto, el superíndice que acompañe la letra F denotará derivación parcial con respecto a éste, $F^X = \partial F / \partial X$. La variación $\delta \mathcal{S}_R$ es:

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{S}_R &= \int d^4x \sqrt{-g} F^R \delta R, \\ &= \int d^4x \sqrt{-g} F^R (R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu}). \end{aligned} \quad (95)$$

Para hallar la variación del tensor de Ricci se utiliza la expresión (88)

$$\delta R_{\mu\nu} = \delta R^{\rho}_{\mu\nu\rho} = (\delta\Gamma^{\rho}_{\mu\rho})_{;\nu} - (\delta\Gamma^{\rho}_{\mu\nu})_{;\rho}, \quad (96)$$

y a partir de la Ec. (84) se obtiene:

$$\delta R_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \{ [g_{\lambda\nu}(\delta g^{\lambda\rho})_{;\mu} + g_{\lambda\mu}(\delta g^{\lambda\rho})_{;\nu} - g_{\alpha\mu}g_{\beta\nu}(\delta g^{\alpha\beta})_{;\rho}]_{;\rho} - [g_{\lambda\rho}(\delta g^{\lambda\rho})_{;\mu}]_{;\nu} \}. \quad (97)$$

Reemplazando la expresión anterior en la Ec. (95) se obtiene

$$\delta S_R = \int d^4x \sqrt{-g} \{ F^R R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + F^R [(\delta g^{\lambda\sigma})_{;\lambda} - g_{\mu\nu}(\delta g^{\mu\nu})_{;\sigma}]_{;\sigma} \}. \quad (98)$$

Ahora se integra por partes dos veces¹² para obtener una expresión en donde la variación de la métrica no sea operada por una derivada covariante. Debido a las condiciones de frontera $\delta g^{\mu\nu} = (\delta g^{\mu\nu})_{;\sigma} = 0$, cada vez que se realiza este proceso se ignoran los términos de superficie:

$$\delta S_R = \int d^4x \sqrt{-g} (F^R R_{\mu\nu} + F^R_{;\mu\nu} - g_{\mu\nu} (F^R)_{;\sigma}) \delta g^{\mu\nu}. \quad (99)$$

La variación δS_S es:

$$\delta S_S = \int d^4x \sqrt{-g} F^S \delta (R_{\mu\nu} R^{\mu\nu}), \quad (100)$$

en donde

$$\begin{aligned} \delta (R_{\mu\nu} R^{\mu\nu}) &= R^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} + R_{\mu\nu} \delta R^{\mu\nu}, \\ &= R^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} + R_{\mu\nu} \delta (g^{\mu\sigma} g^{\nu\lambda} R_{\sigma\lambda}), \\ &= 2R^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} + 2R_{\lambda\nu} \delta g^{\mu\nu} R_{\mu}^{\lambda}. \end{aligned} \quad (101)$$

Utilizando la expresión (97) se obtiene:

$$\begin{aligned} \delta (R_{\mu\nu} R^{\mu\nu}) &= 2R^{\mu\nu} [g_{\lambda\nu}(\delta g^{\lambda\rho})_{;\mu}]_{;\rho} + 2R_{\lambda\nu} \delta g^{\mu\nu} R_{\mu}^{\lambda} \\ &\quad - R^{\mu\nu} [g_{\alpha\mu}g_{\beta\nu}(\delta g^{\alpha\beta})_{;\rho}]_{;\rho} - R^{\mu\nu} [g_{\lambda\rho}(\delta g^{\lambda\rho})_{;\mu}]_{;\nu}. \end{aligned} \quad (102)$$

Reemplazando en la Ec. (100):

$$\begin{aligned} \delta S_S &= \int d^4x \sqrt{|g|} F^S \{ 2R^{\mu\nu} [g_{\lambda\nu}(\delta g^{\lambda\rho})_{;\mu}]_{;\rho} \\ &\quad + 2R_{\lambda\nu} \delta g^{\mu\nu} R_{\mu}^{\lambda} - R^{\mu\nu} [g_{\alpha\mu}g_{\beta\nu}(\delta g^{\alpha\beta})_{;\rho}]_{;\rho} \\ &\quad - R^{\mu\nu} [g_{\lambda\rho}(\delta g^{\lambda\rho})_{;\mu}]_{;\nu} \}. \end{aligned} \quad (103)$$

Integrando por partes dos veces y eliminando los términos de superficie se obtiene:

$$\begin{aligned} \delta S_S &= \int d^4x \sqrt{-g} [2(F^S R^{\sigma\lambda})_{;\mu\sigma} g_{\nu\lambda} - (F^S R_{\mu\nu})_{;\sigma} \\ &\quad - g_{\mu\nu} (F^S R^{\sigma\lambda})_{;\sigma\lambda} + 2F^S R_{\lambda\nu} R_{\mu}^{\lambda}] \delta g^{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (104)$$

Por último, la variación δS_T es:

$$\delta S_T = \int d^4x \sqrt{-g} F^T \delta (R_{\rho\mu\lambda\nu} R^{\rho\mu\lambda\nu}), \quad (105)$$

con

$$\begin{aligned} \delta (R_{\rho\mu\lambda\nu} R^{\rho\mu\lambda\nu}) &= \delta (R_{\rho\mu\lambda\nu}) R^{\rho\mu\lambda\nu} \\ &\quad + R_{\rho\mu\lambda\nu} \delta (R^{\rho\mu\lambda\nu}). \end{aligned} \quad (106)$$

Utilizando las propiedades de simetría del tensor de Riemann se llega a:

$$R^{\rho\mu\lambda\nu} \delta (R_{\rho\mu\lambda\nu}) = -R_{\sigma}^{\mu\lambda\nu} R_{\tau\mu\lambda\nu} \delta g^{\sigma\tau} + R_{\rho}^{\mu\lambda\nu} \delta R^{\rho}_{\mu\lambda\nu}, \quad (107)$$

$$R_{\rho\mu\lambda\nu} \delta (R^{\rho\mu\lambda\nu}) = 3R_{\sigma}^{\mu\lambda\nu} R_{\tau\mu\lambda\nu} \delta g^{\sigma\tau} + R_{\rho}^{\mu\lambda\nu} \delta R^{\rho}_{\mu\lambda\nu}. \quad (108)$$

Por lo tanto, la Ec. (106) queda expresada como:

$$\delta (R_{\rho\mu\lambda\nu} R^{\rho\mu\lambda\nu}) = 2R_{\sigma}^{\mu\lambda\nu} R_{\tau\mu\lambda\nu} \delta g^{\sigma\tau} + 2R_{\rho}^{\mu\lambda\nu} \delta R^{\rho}_{\mu\lambda\nu}. \quad (109)$$

A partir de la Ec. (88) se llega a:

$$\begin{aligned} \delta (R_{\rho\mu\lambda\nu} R^{\rho\mu\lambda\nu}) &= 2R_{\rho}^{\mu\lambda\nu} [(\delta\Gamma^{\rho}_{\mu\nu})_{;\lambda} - (\delta\Gamma^{\rho}_{\mu\lambda})_{;\nu}] \\ &\quad + 2R_{\alpha}^{\nu\rho\mu} R_{\lambda\nu\rho\mu} \delta g^{\alpha\lambda} \\ &= 4R_{\rho}^{\mu\lambda\nu} (\delta\Gamma^{\rho}_{\mu\nu})_{;\lambda} + 2R_{\alpha}^{\nu\rho\mu} R_{\lambda\nu\rho\mu} \delta g^{\alpha\lambda}. \end{aligned} \quad (110)$$

Al reemplazar la expresión (84) y emplear la primera identidad de Bianchi $R_{\rho\nu\lambda\mu} = R_{\rho\mu\lambda\nu} + R_{\rho\lambda\nu\mu}$ se obtiene:

$$\begin{aligned} \delta (R_{\rho\mu\lambda\nu} R^{\rho\mu\lambda\nu}) &= 2R_{\alpha}^{\nu\rho\mu} R_{\lambda\nu\rho\mu} \delta g^{\alpha\lambda} \\ &\quad - 2R_{\rho}^{\mu\lambda\nu} (g_{\sigma\nu} \delta g^{\sigma\rho}_{;\mu\lambda} + g_{\sigma\mu} \delta g^{\sigma\rho}_{;\nu\lambda} \\ &\quad - g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} \delta g^{\alpha\beta}_{;\lambda}), \\ \delta (R_{\rho\mu\lambda\nu} R^{\rho\mu\lambda\nu}) &= 2R_{\alpha}^{\nu\rho\mu} R_{\lambda\nu\rho\mu} \delta g^{\alpha\lambda} \\ &\quad - 2(R_{\rho}^{\nu\lambda}_{\sigma} \delta g^{\rho\sigma}_{;\nu\lambda} + R_{\rho}^{\nu\lambda}_{\sigma} \delta g^{\sigma\rho}_{;\nu\lambda} \\ &\quad + R_{\rho}^{\lambda\nu}_{\sigma} \delta g^{\sigma\rho}_{;\nu\lambda} - R_{\sigma}^{\nu\lambda}_{\rho} \delta g^{\sigma\rho}_{;\nu\lambda}), \\ \delta (R_{\rho\mu\lambda\nu} R^{\rho\mu\lambda\nu}) &= 2R_{\alpha}^{\nu\rho\mu} R_{\lambda\nu\rho\mu} \delta g^{\alpha\lambda} \\ &\quad - 4R_{\rho}^{\nu\lambda}_{\sigma} \delta g^{\sigma\rho}_{;\nu\lambda}. \end{aligned} \quad (111)$$

¹²Este procedimiento es válido gracias a que el operador derivada covariante cumple la regla de Leibnitz. Así, integrar por partes en este caso conduce a:

$$\int d^4x \sqrt{-g} A^{\mu\nu} B_{\mu;\nu} = \int d^4x \sqrt{-g} (A^{\mu\nu} B_{\mu})_{;\nu} - \int d^4x \sqrt{-g} B_{\mu} A^{\mu\nu}_{;\nu}.$$

Cada vez que se integra por partes, la operación derivada covariante pasa de un término al otro en el producto. En virtud del teorema de Stokes, se observa que el primer término, a la derecha de la igualdad, es igual a la integral de superficie del vector $A^{\mu\nu} B_{\mu}$ en la frontera; de aquí, proviene el nombre de términos de superficie.

Si se reemplaza lo anterior en la Ec. (105) y se eliminan nuevamente los términos de superficie al integrar por partes, la Ec. (105) resulta en:

$$\delta S_T = \int d^4x \sqrt{-g} [2F^T R_{\mu\lambda\sigma\rho} R_\nu^{\lambda\sigma\rho} - 4(F^T R_\mu^{\sigma\rho})_{;\sigma\rho}] \delta g^{\mu\nu}. \quad (112)$$

Finalmente, se obtiene la expresión completa para la variación a primer orden de la Ec. (76) (Bauer, Sola & Stefancic, 2010a):

$$\begin{aligned} \delta S &= \int d^4x \sqrt{-g} D_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \\ &= \int d^4x \sqrt{-g} \left[-\frac{1}{2} g_{\mu\nu} F(R, S, T) + F^R R_{\mu\nu} \right. \\ &\quad + F_{;\mu\nu}^R - g_{\mu\nu} (F^R)_{;\sigma} + 2(F^S R^{\sigma\lambda})_{;\mu\sigma} g_{\nu\lambda} \\ &\quad - (F^S R_{\mu\nu})_{;\sigma} - g_{\mu\nu} (F^S R^{\sigma\lambda})_{;\sigma\lambda} \\ &\quad + 2F^S R_{\lambda\nu} R_\mu^\lambda + 2F^T R_{\mu\lambda\sigma\rho} R_\nu^{\lambda\sigma\rho} \\ &\quad \left. - 4(F^T R_\mu^{\sigma\rho})_{;\sigma\rho} \right] \delta g^{\mu\nu} \\ &\quad + (\text{Términos de superficie}). \end{aligned} \quad (113)$$

De acuerdo con el principio de acción estacionaria, las ecuaciones de campo en el vacío para una gravedad del tipo $F(R, S, T)$ son:

$$\begin{aligned} D_{\mu\nu} &= -\frac{1}{2} g_{\mu\nu} F(R, S, T) + F^R R_{\mu\nu} + F_{;\mu\nu}^R \\ &\quad - g_{\mu\nu} (F^R)_{;\sigma} + 2(F^S R^{\sigma\lambda})_{;\mu\sigma} g_{\nu\lambda} \\ &\quad - (F^S R_{\mu\nu})_{;\sigma} - g_{\mu\nu} (F^S R^{\sigma\lambda})_{;\sigma\lambda} \\ &\quad + 2F^S R_{\lambda\nu} R_\mu^\lambda + 2F^T R_{\mu\lambda\sigma\rho} R_\nu^{\lambda\sigma\rho} \\ &\quad - 4(F^T R_\mu^{\sigma\rho})_{;\sigma\rho} = 0. \end{aligned} \quad (114)$$

Las ecuaciones de campo para una gravedad de tipo $F(R, \mathcal{G})$ se obtienen utilizando la regla de la cadena en las derivadas parciales de F de la siguiente manera:

$$F(R, S, T) = f(R, \mathcal{G}) \Rightarrow F^R = \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial R} f^{\mathcal{G}} + f^R = 2R f^{\mathcal{G}} + f^R,$$

$$F^S = \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial S} f^{\mathcal{G}} = -4f^{\mathcal{G}}, \quad F^T = \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial T} f^{\mathcal{G}} = f^{\mathcal{G}}. \quad (115)$$

Por consiguiente las respectivas ecuaciones de campo en el vacío son:

$$\begin{aligned} E_{\mu\nu} &= -\frac{1}{2} f(R, \mathcal{G}) g_{\mu\nu} + R_{\mu\nu} (2R f^{\mathcal{G}} + f^R) \\ &\quad + (2R f^{\mathcal{G}} + f^R)_{;\mu\nu} - g_{\mu\nu} g^{\alpha\beta} (2R f^{\mathcal{G}} + f^R)_{;\alpha\beta} \\ &\quad - 8f^{\mathcal{G}} R_{\mu\lambda} R_\nu^\lambda + 4g_{\mu\nu} (f^{\mathcal{G}} R^{\alpha\beta})_{;\alpha\beta} \\ &\quad - 8(f^{\mathcal{G}} R^{\alpha\beta})_{;\mu\alpha} g_{\nu\beta} + 4g^{\alpha\beta} (f^{\mathcal{G}} R_{\mu\nu})_{;\alpha\beta} \\ &\quad + 2f^{\mathcal{G}} R_{\mu\alpha\beta\gamma} R_\nu^{\alpha\beta\gamma} - 4(f^{\mathcal{G}} R_{\mu\nu}^{\alpha\beta})_{;\alpha\beta} = 0. \end{aligned} \quad (116)$$

Terminando, la expresión (114) con $F^R = 1$, $F^S = 0$, $F^T = 0$ corresponde a las ecuaciones de campo de Einstein en el vacío:

$$G_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + R_{\mu\nu} = 0. \quad (117)$$

Apéndice B. Obtención de las ecuaciones de campo para una gravedad tipo $f(R, \mathcal{G})$ en un universo de FRW

Se presentarán los cálculos para obtener las ecuaciones que describen el comportamiento del Universo cuando la gravedad está descrita por la acción (17). Los símbolos de Christoffel en FRW son (Weinberg, 2008):

$$\begin{aligned} \Gamma_{ij}^0 &= a\dot{a}\delta_{ij}, \\ \Gamma_{j0}^i &= \frac{\dot{a}}{a}\delta_j^i. \end{aligned} \quad (118)$$

Las componentes que no se mencionen son cero. Con las expresiones anteriores se hallan las componentes del tensor de Riemann:

$$R_{jmn}^i = (\delta_m^i \delta_{nj} - \delta_n^i \delta_{jm}) \dot{a}^2, \quad (119)$$

$$R_{i0j}^0 = a\ddot{a}\delta_{ij},$$

$$R_{00j}^i = \frac{\ddot{a}}{a}\delta_j^i,$$

$$R_{0i0j} = a\ddot{a}\delta_{ij}, \quad R_{ijmn} = -(\delta_{im}\delta_{nj} - \delta_{in}\delta_{jm}) a^2 \dot{a}^2, \quad (120)$$

$$R^{0i0j} = \frac{\ddot{a}}{a^3} \delta^{ij}, \quad R^{ijmn} = -(\delta^{im}\delta^{nj} - \delta^{in}\delta^{jm}) \frac{\dot{a}^2}{a^4}, \quad (121)$$

y las componentes del tensor de Ricci:

$$R_{00} = 3\frac{\dot{a}}{a}, \quad R_{ij} = -(a\ddot{a} + 2\dot{a})\delta_{ij}, \quad (122)$$

$$R^{00} = 3\frac{\ddot{a}}{a}, \quad R^{ij} = -\left(\frac{\ddot{a}}{a^3} + \frac{2\dot{a}^2}{a^4}\right)\delta^{ij}. \quad (123)$$

El escalar de Ricci, los escalares S, T y el invariante de Gauss-Bonnet \mathcal{G} se obtienen a partir de las expresiones anteriores:

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = 6 \left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} \right) = 6H^2(1 - q), \quad (124)$$

$$\begin{aligned} S = R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} &= 12 \left(\frac{\ddot{a}^2}{a^2} + \frac{\ddot{a}\dot{a}^2}{a^3} + \frac{\dot{a}^4}{a^4} \right), \\ &= 12H^4(q^2 - q + 1). \end{aligned} \quad (125)$$

$$\begin{aligned} T = R_{\rho\mu\lambda\nu} R^{\rho\mu\lambda\nu} &= 12 \left(\frac{a^2 \ddot{a}^2}{a^4} + \frac{\dot{a}^4}{a^4} \right), \\ &= 12H^2(q^2 + 1). \end{aligned} \quad (126)$$

$$\mathcal{G} = R^2 - 4S + T = -24H^4q. \quad (127)$$

Tensor de Einstein y $E_{\mu\nu}$. Las componentes del tensor de Einstein $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$ se obtienen a partir de las expresiones (122) y (124). La componente G^0_0 :

$$\begin{aligned} G_{00} &= R_{00} - \frac{1}{2}g_{00}R \\ &= 3\frac{\ddot{a}}{a} - 3\frac{\ddot{a}}{a} - 3\frac{\dot{a}^2}{a^2} \\ &= -3H^2. \end{aligned} \quad (128)$$

$$G^0_0 = g^{0\mu}G_{\mu 0} = G_{00} = -3H^2. \quad (129)$$

La componente G^i_j :

$$\begin{aligned} G^i_j &= g^{i\mu}G_{\mu j} = -\frac{1}{a^2}\delta^{il}G_{il} \\ &= -\frac{1}{a^2}\delta^{il} \left(R_{lj} - \frac{1}{2}g_{lj}R \right) \\ &= -\left(\frac{\dot{a}^2}{a^2} + 2\frac{\ddot{a}}{a} \right) \delta^i_j; \end{aligned} \quad (130)$$

dado que $\dot{H} = \ddot{a}/a - \dot{a}^2/a^2$, la Ec. (130) se reduce a

$$G^i_j = -(2\dot{H} + 3H^2)\delta^i_j. \quad (131)$$

Con el objeto de hallar la expresión específica de $E_{\mu\nu}$ en la Ec. (116) en la métrica de FRW, primeramente se expande

$E_{\mu\nu}$:

$$\begin{aligned} E_{\mu\nu} &= -\frac{1}{2}fg_{\mu\nu} + 2R_{\mu\nu}Rf^{\mathcal{G}} + R_{\mu\nu}f^R + (2Rf^R)_{;\mu\nu} \\ &+ f^R_{;\mu\nu} - g_{\mu\nu}[g^{00}(2Rf^{\mathcal{G}} + f^R)_{;00} + g^{ij}(2Rf^{\mathcal{G}} \\ &+ f^R)_{;ij}] - 8f^{\mathcal{G}}R_{\mu\lambda}R_{\nu}^{\lambda} + 4g_{\mu\nu}[(f^{\mathcal{G}}R^{00})_{;00} + (f^{\mathcal{G}}R^{0i})_{;0i} \\ &+ (f^{\mathcal{G}}R^{i0})_{;i0} + (f^{\mathcal{G}}R^{ij})_{;ij}] - 8[(f^{\mathcal{G}}R^{00})_{;\mu 0}g_{\nu 0} \\ &+ (f^{\mathcal{G}}R^{0i})_{;\mu 0}g_{\nu i} + (f^{\mathcal{G}}R^{i0})_{;\mu i}g_{\nu 0} + (f^{\mathcal{G}}R^{ij})_{;\mu i}g_{\nu j}] \\ &+ 4[g^{00}(f^{\mathcal{G}}R_{\mu\nu})_{;00} + g^{ij}(f^{\mathcal{G}}R_{\mu\nu})_{;ij}] + 2f^{\mathcal{G}}R_{\mu\alpha\beta\gamma}R_{\nu}^{\alpha\beta\gamma} \\ &- 4[(f^{\mathcal{G}}R^0_{\mu\nu})_{;00} + (f^{\mathcal{G}}R^i_{\mu\nu})_{;i0} + (f^{\mathcal{G}}R^0_{\mu\nu})_{;0i} \\ &+ (f^{\mathcal{G}}R^i_{\mu\nu})_{;ij}]. \end{aligned} \quad (132)$$

La componente E^0_0 esta dada por:

$$\begin{aligned} E^0_0 &= g^{\alpha 0}E_{\alpha 0} = E_{00} = -\frac{1}{2}f + R_{00}Rf^{\mathcal{G}} + R_{00}f^R \\ &- g^{ij}(2Rf^{\mathcal{G}} + f^R)_{;ij} - 8f^{\mathcal{G}}R_{0\lambda}R^{\lambda}_0 \\ &- 4[(f^{\mathcal{G}}R^{0i})_{;0i}] + 4[(f^{\mathcal{G}}R^{i0})_{;i0} + (f^{\mathcal{G}}R^{ij})_{;ij}] \\ &+ 4[g^{ij}(f^{\mathcal{G}}R_{00})_{;ij}] + 2f^{\mathcal{G}}R_{0\alpha\beta\gamma}R^{\alpha\beta\gamma}_0 \\ &- 4[(f^{\mathcal{G}}R^0_{00})_{;00} + (f^{\mathcal{G}}R^i_{00})_{;i0} + (f^{\mathcal{G}}R^0_{00})_{;0i} \\ &+ (f^{\mathcal{G}}R^i_{00})_{;ij}]. \end{aligned} \quad (133)$$

Utilizando las expresiones (119) a (124) se llega a (Bauer, Sola & Stefancic, 2010a):

$$\begin{aligned} E^0_0 &= -\frac{1}{2}f + 12\frac{\dot{a}^2\ddot{a}}{a^3}f^{\mathcal{G}} + 3\frac{\ddot{a}}{a}f^R - 3\frac{\dot{a}}{a}\dot{f}^R - 12\frac{\dot{a}^3}{a^3}\dot{f}^{\mathcal{G}}, \\ &= -\frac{1}{2}\left[f - 24H^2(\dot{H} + H^2)f^{\mathcal{G}} - 6(\dot{H} + H^2)f^R \right. \\ &\left. + 6H\dot{f}^R + 24H^3\dot{f}^{\mathcal{G}} \right]. \end{aligned} \quad (134)$$

Se obtiene la componente E^i_j al contraer $E_{\alpha j}$ con la métrica:

$$E^i_j = g^{i\alpha}E_{\alpha j} = g^{im}E_{mj} = -\frac{1}{a^2}\delta^{im}E_{mj} = -\frac{1}{a^2}E_{ij}. \quad (135)$$

Según la Ec. (132), la componente E_{ij} tiene la forma:

$$\begin{aligned} E_{ij} = & \frac{1}{2}a^2 f \delta_{ij} + 2R_{ij} R f^{\mathcal{G}} + R_{ij} f^R + (2R f^{\mathcal{G}})_{;ij} + f^R_{;ij} \\ & + a^2 \delta_{ij} \left[(2R f^{\mathcal{G}} + f^R)_{;00} - \frac{1}{a^2} \delta^{mn} (2R f^{\mathcal{G}} + f^R)_{;mn} \right] \\ & - 8R_{i\lambda} R_j^\lambda - 4a^2 \delta_{ij} \left[(f^{\mathcal{G}} R^{00})_{;00} + (f^{\mathcal{G}} R^{0m})_{;0m} \right. \\ & \left. + (f^{\mathcal{G}} R^{m0})_{;m0} + (f^{\mathcal{G}} R^{mn})_{;mn} \right] + 8a^2 \left[(f^{\mathcal{G}} R^{0m})_{;i0} \delta_{jm} \right. \\ & \left. + (f^{\mathcal{G}} R^{mn})_{;im} \delta_{jn} \right] + 4 \left[(f^{\mathcal{G}} R_{ij})_{;00} - \frac{1}{a^2} \delta^{mn} (f^{\mathcal{G}} R_{ij})_{;mn} \right] \\ & + 2f^{\mathcal{G}} R_{i\alpha\beta\gamma} R_j^{\alpha\beta\gamma} - 4(f^{\mathcal{G}} R_{ij}^\alpha{}_\beta)_{;\alpha\beta}. \end{aligned} \quad (136)$$

Nuevamente utilizando las expresiones (119) a (124) se obtiene que:

$$\begin{aligned} E^i_j = & -\frac{1}{a^2} E_{ij} = \left[-\frac{1}{2}f - 4\frac{\dot{a}^2}{a^2} \ddot{f}^{\mathcal{G}} - \ddot{f}^R - 2\frac{\dot{a}}{a} \dot{f}^R \right. \\ & \left. + \left(\frac{\ddot{a}}{a} + 2\frac{\dot{a}^2}{a^2} \right) f^{\mathcal{G}} + 24\frac{\ddot{a}\dot{a}^2}{a^3} f^{\mathcal{G}} + 16\frac{\ddot{a}\dot{a}^2}{a^2} \dot{f}^{\mathcal{G}} \right] \delta^i_j \\ = & -\frac{1}{2} \left[f + 8H^2 \ddot{f}^{\mathcal{G}} + 2\dot{f}^R - 2(\dot{H} + 3H) f^R \right. \\ & \left. - 24H^2(\dot{H} + H^2) f^{\mathcal{G}} + 16H(\dot{H} + H^2) \dot{f}^{\mathcal{G}} \right] \delta^i_j. \end{aligned} \quad (137)$$

Ecuación modificada de Friedmann. Se mostrará a continuación la forma explícita de la primera ecuación de Friedmann modificada:

$$3H^2 = \frac{1}{m_p^2} \left(\frac{\rho_r^0}{a^4} + \frac{\rho_m^0}{a^3} + \rho_F + \rho_\Lambda \right). \quad (138)$$

Para esto es necesario conocer la forma explícita de ρ_F . De la subsección anterior se conoce que ρ_F está dada por:

$$\rho_F = -2E^0_0 = \left[f - 6(\dot{H} + H^2) f^R + 6H \dot{f}^R \right. \\ \left. - 24H^2(\dot{H} + H^2) f^{\mathcal{G}} + 24H^3 \dot{f}^{\mathcal{G}} \right], \quad (139)$$

en donde

$$f = \frac{\beta}{B}, \quad (140)$$

y

$$\begin{aligned} B = & \frac{2}{3}R^2 + \frac{1}{2}\mathcal{G} + (yR)^3 = 24H^2(q-1/2)(q-2) \\ & + [6yH^2(1-q)]^3. \end{aligned} \quad (141)$$

Se procede a calcular las diferentes derivadas de la función f :

$$f^R := \frac{\partial f}{\partial R} = -\frac{\beta(4/3R + 3y^3R^2)}{B^2}, \quad (142)$$

$$f^{\mathcal{G}} := \frac{\partial f}{\partial \mathcal{G}} = -\frac{\beta}{2B^2}, \quad (143)$$

$$\dot{B} = \frac{1}{2}\dot{\mathcal{G}} + \frac{4}{3}R\dot{R} + 3y^3R^2\dot{R}, \quad (144)$$

$$\begin{aligned} \dot{f}^R = & \beta \{ [32y^3R^3\dot{R} - 2\mathcal{G}\dot{R} + 36y^6R^4\dot{R} \\ & + R^2(9y^3\dot{\mathcal{G}} + 8\dot{R}) + R(4\dot{\mathcal{G}} - 9y^3\mathcal{G}\dot{R})] \} / 3B^3, \end{aligned} \quad (145)$$

$$f^{\mathcal{G}} = \frac{\beta\dot{B}}{B^3} = \frac{\beta \left(\dot{\mathcal{G}}/2 + 4/3R\dot{R} + 3y^3R^2\dot{R} \right)}{B}, \quad (146)$$

y las derivadas con respecto al tiempo de los invariantes de curvatura en la métrica de FRW:

$$\dot{R} = 12H(1-q)\dot{H} - 6H^2\dot{q}, \quad (147)$$

$$\dot{\mathcal{G}} = -96H^3q\dot{H} - 24H^4\dot{q}. \quad (148)$$

Al reemplazar las expresiones anteriores en la ecuación (139) se obtiene:

$$\rho_F = \beta \left(\frac{1}{B} + \frac{k_1}{B^2} + \frac{k_2}{B^3} + \frac{k_3}{B^2} + \frac{k_4}{B^3} \right), \quad (149)$$

en donde

$$k_1 = 24H^2 [2 + 27y^3H^2(1-q)] (1-q)(H^2 + \dot{H}), \quad (150)$$

$$\begin{aligned} k_2 = & 288H^6 \{ 1944y^6H^4(q-1)^4 [2(1-q)\dot{H} - H\dot{q}] \\ & + 2q[2(1-q)\dot{H} - H\dot{q}] + 288y^3H^2(q-1)^3 \times \\ & [2(q-1)\dot{H} + H\dot{q}] - 6(q-1)^2 \times \\ & [4(9y^3H^2q + q-1)\dot{H} + H(2 + 9y^3H^2)\dot{q}] \\ & + (1-q)(-16q\dot{H} - 4H\dot{q}) \\ & + 54y^3H^2q[2(1-q)\dot{H} - H\dot{q}] \}, \end{aligned} \quad (151)$$

$$k_3 = 12H^2(H^2 + \dot{H}), \quad (152)$$

$$\begin{aligned} k_4 = & 288H^6 \{ -4q\dot{H} - H\dot{q} + [4 - 54y^3H^2 \times \\ & (q-1)](1-q)[2(1-q)\dot{H} - H\dot{q}] \}. \end{aligned} \quad (153)$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \rho_F = & 144H^6\{324y^6H^6(q-4)(q-1)^5 + (74 \\ & - 241q + 214q^2 - 56q^3)\dot{H} - 18y^3H^4(q-1)^2 \times \\ & [-3(5 + 162y^3\dot{H}) - 6q^2(4 + 243y^3\dot{H}) \\ & + q^3(4 + 486y^3\dot{H}) + 2q(19 + 729y^3\dot{H})] + H^2 \times \\ & (q-1)[4q^3(1 + 333y^3\dot{H}) - 12q^2(2 + 375y^3\dot{H}) \\ & - 2(7 + 783y^3\dot{H}) + q(39 + 4734y^3\dot{H})] \\ & - 3888y^6H^5(q-1)^4\dot{q} - 6H(7-10q \\ & + 4q^2)\dot{q} + 36y^3H^3(-22 + 57q - 51q^2 \\ & + 16q^3)\dot{q}\}/B^3. \end{aligned} \quad (154)$$

Se puede observar que los términos k_2 y k_4 incluyen la derivada del parámetro de desaceleración con respecto al tiempo, por lo tanto la ecuación diferencial es de tercer grado en $a(t)$. Con el fin de disminuir el orden de la ecuación, se expresan todas las funciones como una función del parámetro a :

$$\dot{f} = \dot{a}f'(a) = \dot{a}\frac{a}{a}f'(a) = aH(a)f'(a), \quad (155)$$

$$\dot{H}(a) = aH(a)H'(a), \quad (156)$$

$$q(a) = -\frac{\ddot{a}a}{\dot{a}^2} = -1 - \frac{\dot{H}}{H^2} = -1 - \frac{aH'(a)}{H(a)}, \quad (157)$$

$$\begin{aligned} \dot{q} &= -\frac{\ddot{H}}{H^2} + 2\frac{\dot{H}^2}{H^3}, \\ &= a^2\left(\frac{H'}{H} - H''\right) - H'a. \end{aligned} \quad (158)$$

Al hacer este cambio de variable, se obtiene una expresión para la densidad de energía en donde el parámetro de Hubble es una función explícita de a :

$$\rho_F = \beta \frac{864H^4(M + NH'')}{B^3}, \quad (159)$$

con

$$\begin{aligned} M = & 27H^4 + 972H^6y^3 + 8640H^8y^6 + 80352aH^7y^6H' \\ & + 152928a^2H^6y^6H'^2 + 57a^3HH'^3 + 6a^4H'^4 \\ & + 138a^5Hy^3H'^5 + 12aH^5y^3H'(589 \\ & + 10548a^2y^3H'^2) + 3a^2H^4y^3H'^2(3383 \\ & + 17604a^2y^3H'^2) + 3a^2H^2H'^2(55 + 506a^2y^3H'^2 \\ & + 288a^4y^6H'^4) + 3aH^3H'(55 + 1971a^2y^3H'^2 \\ & + 3618a^4y^6H'^4), \end{aligned} \quad (160)$$

$$\begin{aligned} N = & 10368a^2H^7y^6 + 20736a^3H^6y^6H' + 4a^4HH'^2 \\ & + 6a^3H^2H'(3 + 16a^2y^3H'^2) + 54a^3H^4y^3H'(23 \\ & + 96a^2y^3H'^2) + 12a^2H^5y^3(73 + 1296a^2y^3H'^2) \\ & + 3a^2H^3(7 + 198a^2y^3H'^2 + 216a^4y^6H'^4), \end{aligned} \quad (161)$$

$$\begin{aligned} B = & 12H^4\left(1 + \frac{aH'}{H}\right) + 24H^4\left(2 + \frac{aH'}{H}\right)^2 \\ & + 216y^3H^6\left(2 + \frac{aH'}{H}\right)^3. \end{aligned} \quad (162)$$

Si se reemplaza (159) en (138) se obtiene la forma explícita de la ecuación de Friedmann modificada:

$$F + \left(\frac{\beta}{m_p^2}\right) \left[\frac{864H^4(M + NH'')}{B^3}\right] = 0, \quad (163)$$

con

$$F = \frac{\rho_r}{m_p^2 a^4} + \frac{\rho_m}{m_p^2 a^3} + \frac{\rho_\Lambda}{m_p^2} - 3H^2. \quad (164)$$

Referencias

- Aad G. et. al.**, [ATLAS Collaboration], 2012. Observation of a new particle in the search for the Standard Model Higgs boson with the ATLAS detector at the LHC, Phys. Lett. B **716**, 1.
- Abbot L.**, 1985. A mechanism for reducing the value of the cosmological constant, Phys. Lett. B **150**, 427.
- Antoniadis I. & Mottola E.**, 1992. 4-D quantum gravity in the conformal sector, Phys. Rev. D **45**, 2013.
- Armendariz-Picon C., Mukhanov V. & Steinhardt P. J.**, 2000. A dynamical solution to the problem of a small cosmological constant and late-time cosmic acceleration, Phys. Rev. Lett. **85**, 4438.
- Armsen M.**, 1977. A variational proof of the Gauss-Bonnet formula, Manuscripta. Math. **20**, 245.
- Barr S.**, 1987. An attempt at a classical cancellation of the cosmological constant, Phys. Rev. D **36**, 1691.
- Barr S. & Hochberg D.**, 1988. Dynamical adjustment of the cosmological constant, Phys. Lett. B **211**, 49.
- Bauer F.**, 2010. The cosmological constant and the relaxed universe, J. Phys. Conf. Ser. **259**, 012083.
- Bauer F., Sola J. & Stefancic H.**, 2010a. Dynamically avoiding fine-tuning the cosmological constant: the "relaxed universe", JCAP **1012**, 029.
- Bauer F., Sola J. & Stefancic H.**, 2010b. The relaxed universe: towards solving the cosmological constant problem dynamically from an effective action functional of gravity, Phys. Lett. B **688**, 269.
- Bauer F., Sola J. & Stefancic H.**, 2011. Relaxing a large cosmological constant in the astrophysical domain, Mod. Phys. Lett. A **26**, 2556.
- Beringer J. et. al.** 2012. Review of Particle Physics (RPP), Phys. Rev. D **86**, 010001.

- Bressi G., Carugno G., Onofrio R. & Ruoso G.**, 2002. Measurement of the Casimir force between parallel metallic surfaces, *Phys. Rev. Lett.* **88**, 041804.
- Bruneton J.-P. et al.**, 2012. Fab Four: when John and George play gravitation and cosmology, *Adv. Astron.* **2012**, 430694.
- Caldwell R. R., Dave R. & Steinhardt P. J.**, 1998. Cosmological imprint of an energy component with general equation of state, *Phys. Rev. Lett.* **80**, 1582.
- Carroll S.**, 2004. *Spacetime and geometry: an introduction to general relativity*, Addison Wesley, San Francisco, USA.
- Casimir H. B. G.**, 1948. On the attraction between two perfectly conducting plates, *Indag. Math.* **10**, 261.
- Charmousis C., Copeland E. J., Padilla A. & Saffin P. M.**, 2012a. General second order scalar-tensor theory, self tuning, and the Fab Four, *Phys. Rev. Lett.* **108**, 051101.
- Charmousis C., Copeland E. J., Padilla A. & Saffin P. M.**, 2012b. Self-tuning and the derivation of the Fab Four, *Phys. Rev. D* **85**, 104040.
- Chatrchyan S. et al.**, [CMS Collaboration], 2012. Observation of a new boson at a mass of 125 GeV with the CMS experiment at the LHC, *Phys. Lett. B* **716**, 30.
- Cheng T.-P. & Li L.-F.**, 1984. *Gauge theory of elementary particle physics*, Clarendon Press, Oxford, UK.
- Chern S.-S.**, 1945. On the curvatura integra in Riemannian manifold, *Ann. of Math.* **46**, 674.
- Copeland E. J., Padilla A. & Saffin P. M.**, 2012. The cosmology of the Fab-Four, *JCAP* **1212**, 026.
- Efstathiou G., Hobson M. P. & Lasenby A. N.**, 2006. *General relativity: an introduction for physicists*, Cambridge University Press, Cambridge, UK.
- Einstein A.**, 1917. Cosmological consideration in the general theory of relativity, *Sitz. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math.Phys.)* **1917**, 142.
- Einstein A.**, 1922. *The meaning of relativity*, Taylor & Francis, London, UK.
- Ford L. H.**, 1987. Cosmological damping by unstable scalar fields, *Phys. Rev. D* **35**, 2339.
- Jarosik N. et al.**, 2011. Seven-year Wilkinson Microwave Anisotropy (WMAP) observations: sky maps, systematic errors and basic results, *Astrophys. J. Suppl. Ser.* **192**, 14.
- Kane G.**, 1993. *Modern elementary particle physics*, Addison-Wesley, Massachusetts, USA.
- Komatsu E. et al.**, 2011. Seven-year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) observations: cosmological interpretation, *Astrophys. J. Suppl. Ser.* **192**, 18.
- Larson D. et al.**, 2011. Seven-year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) observations: power spectra and WMAP-derived parameters, *Astrophys. J. Suppl. Ser.* **192**, 16.
- Mohideen U. & Roy A.**, 1998. Precision measurement of the Casimir force from 0.1 to 0.9 μm , *Phys. Rev. Lett.* **81**, 4549.
- Nojiri S. & Odintsov S. D.**, 2005. Inhomogeneous equation of state of the universe: phantom era, future singularity and crossing the phantom barrier, *Phys. Rev. D* **72**, 023003.
- Padilla A., Saffin P. M. & Zhou S.-Y.**, 2010. Bi-galileon theory I: motivation and formulation, *JHEP* **1012**, 031.
- Padilla A., Saffin P. M. & Zhou S.-Y.**, 2011. Bi-galileon theory II: phenomenology, *JHEP* **1101**, 099.
- Peccei R. D., Sola J. & Wetterich C.**, 1987. Adjusting the cosmological constant dynamically: cosmons and new force weaker than gravity, *Phys. Lett. B* **195**, 183.
- Perlmutter S. et al.**, 1999. Measurements of Ω and Λ from 42 high-redshift supernovae, *Astrophys. J.* **517**, 565.
- Riess A. G. et al.**, 1998. Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant, *Astron. J.* **116**, 1009.
- Sola J.**, 1989. The cosmological constant and the fate of the cosmon in Weyl conformal gravity, *Phys. Lett. B* **228**, 317.
- Sola J.**, 2008. Dark energy: a quantum fossil from the inflationary universe?, *J. Phys. A* **41**, 164066.
- Sola J. & Shapiro I. L.**, 2002. Massive fields temper anomaly-induced inflation, *Phys. Lett. B* **530**, 10.
- Sotiriou T. P. & Faroni V.**, 2010. $f(R)$ theories of the gravity, *Rev. Mod. Phys.* **82**, 451.
- Starobinsky A. A.**, 1980. A new type of isotropic cosmological models without singularity, *Phys. Lett. B* **91**, 99.
- Stefancic H.**, 2009. The solution of the cosmological constant problem from the inhomogeneous equation of state - a hint from modified gravity?, *Phys. Lett. B* **670**, 246.
- Weinberg S.**, 1972. *Gravitation and cosmology: principles and applications of the general theory of relativity*, John Wiley & Sons, New York, USA.
- Weinberg S.**, 1989. The cosmological constant problem, *Rev. Mod. Phys.* **61**, 1.
- Weinberg S.**, 1995. *The quantum theory of fields, Volume 2: modern applications*, Cambridge University Press, Cambridge, UK.
- Weinberg S.**, 1996. Theories of the cosmological constant, arXiv:astro-ph/9610044.
- Weinberg S.**, 2008. *Cosmology*, Oxford University Press, Oxford, UK.
- Yoo J. & Watanabe Y.**, 2012. Theoretical models of dark energy, *Int. J. Mod. Phys. D* **21**, 1230002.

Recibido el 6 de septiembre de 2012

Aceptado para su publicación el 30 de enero de 2013

FITOPATOLOGÍA

EVALUACIÓN DE INDUCTORES DE RESISTENCIA PARA EL MANEJO DE NEMATODOS FITOPARÁSITOS EN PLÁNTULAS DE PLÁTANO

Catalina Quintero-Vargas*, Jairo Castaño-Zapata**

RESUMEN

Quintero Vargas, C., J. C. Castaño Zapata: Evaluación de inductores de resistencia para el manejo de nematodos fitoparásitos en plántulas de plátano. Rev. Acad. Colomb. Cienc. **36** (141): 403-413, 2012. ISSN 0370-3908.

Se evaluó el efecto de Fosfito de potasio, Fosetil-Al, Acibenzolar-s-metil, Ácido DL-3-aminobutírico y lixiviados de raquis de plátano, en la reducción de nematodos fitoparásitos en suelo y raíces de plántulas de plátano Dominico-Hartón y FHIA-21. El diseño experimental fue de bloques al azar con siete tratamientos, ocho plántulas por tratamiento, y cuatro repeticiones, incluyendo dos testigos: absoluto y relativo. Se registró la brotación, altura de plántulas, longitud de raíces, materia seca de raíces y nematodos fitoparásitos en 100 g de raíces y suelo. En todos los tratamientos ocurrió el 100% de brotación. La altura de plántulas y longitud de raíces no fue afectada negativamente por la aplicación de los inductores de resistencia, excepto en las tratadas con lixiviados de raquis que presentaron síntomas de fitotoxicidad. La materia seca de raíces aumentó a través del tiempo en los tratamientos con inductores y disminuyó en los testigos. La aplicación de los inductores de resistencia redujo significativamente las poblaciones de nematodos fitoparásitos en raíces de Dominico-Hartón entre 61 y 91% y en FHIA-21 entre 51 y 85%. En suelo la reducción en Dominico-Hartón osciló entre 42 y 78% y en FHIA-21 entre 38 y 72%. En ambos materiales de plátano, se registró *Radopholus similis*, *Helicotylenchus* spp. y *Meloidogyne* spp.

Palabras clave: Dominico-Hartón, FHIA-21, *Radopholus similis*, *Meloidogyne* spp., *Helicotylenchus* spp.

ABSTRACT

It was evaluated the effect of potassium Phosphite, Fosetyl-Al, Acibenzolar-s-methyl, DL-3-aminobutyric acid and lixivates of rachis of plantain, on the reduction of nematodes in soil and roots of seedlings of Dominico-Hartón and FHIA-21. The experimental design used was a randomized complete block with seven treatments, four replications and eight plants per replication, including two controls: absolute and relative. Sprouting, seedling height, root length, dry matter of roots and number of nematodes in 100 g of roots and soil were regis-

1. Magíster en Fitopatología. Programa de Maestría en Fitopatología, Departamento de Fitotecnia, Facultad de Ciencias Agropecuarias, Universidad de Caldas. Carrera 35 No. 62-160. Manizales, Colombia, e-mail: catalinaquinteroavargas@hotmail.com
2. Ph.D. Profesor titular, Departamento de Fitotecnia, Universidad de Caldas. Carrera 35 No. 62-160. Manizales, Colombia, e-mail: jairo.castano_z@ucaldas.edu.co

tered. In all treatments occurred 100% of sprouting. Seedling height and root length was not affected adversely by the application of inductors of resistance, except in those treated with lixiviates of rachis of plantain, which showed symptoms of phytotoxicity. The dry matter of roots increased over time in treatments with the inductors. The application of resistance inductors significantly reduced populations of plant parasitic nematodes in roots of Dominico-Harton between 61 and 91% and FHIA-21 between 51 and 85%. In soil the reduction ranged between 42 and 78% in Dominico-Harton and between 38 y 72% in FHIA-21. In both materials was found *Radopholus similis*, *Helicotylenchus* spp. and *Meloidogyne* spp

Key words: Dominico-Hartón, FHIA-21, *Radopholus similis*, *Meloidogyne* spp., *Helicotylenchus* spp.

Introducción

En Colombia hay alrededor de 368.392 ha en plátano, con una producción de 2.970.435 t año⁻¹ (AGRONET, 2010). Este cultivo genera unos 286.000 empleos directos año⁻¹, lo que equivale a 57.000 familias que viven de él (Martínez et al., 2006).

Entre las plagas que atacan el plátano, se encuentran los nematodos fitoparásitos, distribuidos en diferentes regiones del mundo ocasionando pérdidas en el rendimiento entre 30 y 50% (Araya, 2003). Debido a que poseen un estilete, ingresan a las raíces, liberando toxinas que causan deformidad y destrucción de los tejidos, lo que afecta la absorción de agua y nutrimentos y su posterior translocación hacia las partes aéreas de las plantas; en infestaciones severas, la ruptura radical, ocasiona el volcamiento de las plantas antes del desarrollo completo del racimo.

Se han implementado métodos de manejo cultural, químico y biológico, sin embargo el problema aún continúa, por lo que se requiere de nuevas estrategias, que permitan aumentar el grupo de tácticas usadas para éste fin. La inducción de resistencia puede representar un gran potencial porque consiste en estimular la planta a producir sustancias naturales de defensa contra patógenos como peroxidadas y proteínas PR (relacionadas con la patogenicidad). Este tipo de mecanismo no ocasiona contaminación del medio ambiente (Ryals et al., 1994; Kessmann et al., 1994), hay menor probabilidad de un desarrollo rápido de resistencia, posee amplio espectro de acción y ofrece protección prolongada (Kessmann et al., 1994; Kuc, 2001; Riveros, 2001; Andreu et al., 2006). Existen diversos compuestos que estimulan ésta respuesta en la planta, como el Fosfito de potasio, Fosetil-Al, Acibenzolar-s-metil, ASM, ó Benzothiadiazole, BTH, Ácido aminobutírico, BABA, Ácido 2,6-dicloroisonicotínico, INA, Ácido salicílico, etc. (Kessmann et al., 1994; Schneider et al., 1996; Cohen, 2001; Kuc, 2001) y compuestos orgánicos como lixiviados de raquis de plátano (Álvarez et al., 2001; Escobar-Vélez & Castaño-Zapata, 2005). Los beneficios de su aplicación han sido reportados previamente.

El Fosfito de potasio causó efecto inhibitorio del desarrollo de *Phytophthora cinnamomi* en raíces de eucalipto (*Eucalyptus marginata*) y redujo la incidencia de éste mismo hongo entre un 72 a 100% en plantas de castaño común (*Castanea sativa*) después de dos aplicaciones; así mismo ocasionó 99% de control de *Phytophthora cactorum*, en plantas de fresa (*Fragaria* spp.) con respecto a las no tratadas (Jackson et al., 2000; Rebollar et al., 2005; Gentile et al., 2009). Fosetil-Al indujo resistencia disminuyendo la severidad de la Pudrición de la corona (*P. cactorum*) y Pudrición de las raíces (*Phytophthora fragariae*) en plantas de fresa (Eikemo et al., 2003); también hubo mayor acumulación e incremento de proteínas β -1,3-glucanasas, proteasas, fitoalexinas y compuestos fenólicos en tubérculos de papa (*Solanum tuberosum*), posterior a su aplicación para el manejo de *Phytophthora infestans* (Andreu et al., 2006). Acibenzolar-s-metil, ASM, redujo significativamente la severidad de la Roña de la pera (*Venturia nashicola*), con una eficiencia en el control del 42% (Faize et al., 2004) y en plátano Dominico-Hartón (*Musa AAB*) tuvo una eficiencia del 80% en la reducción de la severidad de las sigatokas negra (*Mycosphaerella fijiensis*) y amarilla (*M. musicola*) (Márquez & Castaño-Zapata, 2007). El Ácido DL-3-aminobutírico, BABA, aplicado sobre el follaje de plantas de la vid (*Vitis vinifera*), proporcionó un control efectivo mayor al 90% de *Plasmopara viticola* (Reuveni et al., 2001) y lixiviados de raquis de plátano al 0,5%, disminuyeron la severidad de las sigatokas negra y amarilla en plátano Dominico-Hartón en un 17% con respecto al testigo (Escobar-Vélez & Castaño-Zapata, 2005).

Teniendo en cuenta lo anterior, en el presente trabajo se evaluó el efecto de cinco inductores de resistencia: Fosfito de potasio, Fosetil-Al, Acibenzolar-s-metil, ASM, Ácido DL-3-aminobutírico, BABA, y lixiviados de raquis de plátano, para el manejo de nematodos fitoparásitos en plántulas plátano Dominico-Hartón y el híbrido FHIA-21, bajo condiciones de almacigo.

Materiales y métodos

El experimento se realizó en la granja Montelindo de la Universidad de Caldas, ubicada en el municipio de Palesti-

na (Caldas), con altitud de 1.010 msnm, temperatura media anual de 22,8°C y precipitación anual de 2.200 mm, y en el laboratorio de Fitopatología de la Universidad de Caldas.

Se utilizaron cormos de plátano Dominico-Hartón (361-722 g) y del híbrido FHIA-21 (142-316 g), procedentes de plantaciones en la misma granja y a los cuales se les determinó la población inicial de nematodos fitoparásitos. Los inductores de resistencia fueron formulaciones comerciales de Fosfito de potasio, Fosetil-Al, Acibenzolar-s-metil, ASM, y Ácido DL-3-aminobutírico, BABA. También se utilizaron lixiviados de raquis de plátano procedentes de la granja Montelindo.

Los tratamientos consistieron en la aplicación de los inductores de resistencia sobre cormos de Dominico-Hartón y el híbrido FHIA-21 previamente tratados en inmersión con 10 mL L⁻¹ de Carbofuran, durante 60 min.; también se tuvo un testigo relativo y absoluto para cada material de plátano. Cada material de plátano se consideró un experimento independiente y su establecimiento en campo se realizó con una semana de diferencia iniciando con Dominico-Hartón.

La unidad experimental, consistió en ocho cormos de plátano ya fuese de Dominico-Hartón o FHIA-21, sembrados en suelo previamente cernido y homogenizado para proporcionar mayor soltura, contenido en bolsas plásticas negras perforadas de 5 kg. En cada bolsa se aplicaron 500 mL de una solución de agua más los inductores de resistencia según el tratamiento en una concentración de 1 mL L⁻¹ (Fosfito de potasio), 10 g L⁻¹ (Fosetil-Al), 0,01 mL L⁻¹ (Acibenzolar-s-metil), 100 µg mL⁻¹ (Ácido DL-3-aminobutírico); y lixiviados de raquis de plátano evaporados al 50%. En los testigos relativo y absoluto, se aplicaron 500 mL de agua sobre cormos tratados y sin tratar con Carbofuran, respectivamente. Las aplicaciones de los tratamientos se realizaron en la siembra, 40, 60 y 90 días después de la siembra, DDS, para obtener protección prolongada contra la infestación de los nematodos fitoparásitos a través del tiempo. El diseño experimental fue de bloques completos al azar con siete tratamientos por cada material de plátano evaluado, cuatro unidades experimentales por cada tratamiento y ocho plantas por cada unidad experimental para un total de 32 plantas por cada tratamiento.

Transcurridos 15 días del establecimiento del experimento, se puso una cubierta de polisombra, para proporcionar un ambiente más favorable para el desarrollo de las plántulas. También se separaron las bolsas del suelo con un plástico grueso (Agroclear No. 8), para evitar el contacto de las raíces con éste.

Variables de respuesta:

Brotación (%): Se observó semanalmente durante 40 días, la emergencia de las plántulas por tratamiento.

Altura de plántulas (cm): Se tomaron en cada evaluación muestras destructivas correspondientes a dos plántulas de cada unidad experimental por tratamiento, para un total de ocho por plántulas por tratamiento en cada material de plátano, y la medición se realizó con un flexómetro.

Longitud de raíces (cm): Se realizó midiendo con un flexómetro las raíces de las ocho plántulas muestreadas por tratamiento, en cada momento de evaluación.

Materia seca de raíces (%): Se realizó seleccionando la mitad de las ocho plántulas muestreadas por tratamiento en cada momento de evaluación. Las raíces de dichas plántulas se cortaron y se registró su peso fresco. Luego se depositaron en bolsas de papel y se llevaron al laboratorio de Fitopatología. Éstas se pusieron en una estufa de control de temperatura (marca DIES) a 70 °C durante 48 h y después se registró el peso seco de las raíces.

El porcentaje de materia seca de raíces se determinó con la fórmula:

$$MS (\%) = 1 - ((PF - PS) / PF) \times 100$$

Donde: **MS:** Materia seca; **PF:** Peso fresco y **PS:** Peso seco.

Número de nematodos fitoparásitos en 100 g de raíces y suelo: Con la mitad restante de las plántulas muestreadas por tratamiento (cuatro), se realizó la evaluación de la población de nematodos en 100g de raíces y suelo en cada momento de evaluación. Las raíces de las plántulas muestreadas se cortaron con porciones del cormo y el suelo se tomó del área radical de dichas plántulas; ambas muestras se depositaron independientemente en bolsas plásticas debidamente marcadas. Estas se llevaron al laboratorio de Fitopatología de la Universidad de Caldas y se realizó el procedimiento de extracción de nematodos por el método de licuado, centrifugación y flotación en azúcar (Flegg & Hooper, 1970). El recuento de los nematodos se realizó en un microscopio estereoscópico (marca LEICA ZOOM 2000), utilizando una cámara provista de cuadrantes de 1 cm² y posteriormente se identificaron los géneros presentes, con ayuda del microscopio compuesto de luz (marca LW Scientific; modelo Revelación III), a través del objetivo de 40X.

Análisis estadístico.

Se usó el programa estadístico SAS® (*Statistical Analysis System*, SAS Institute) para realizar el análisis de varianza y la prueba de comparación Tukey al 5%, para las variables de respuesta.

Resultados y discusión

Brotación (%): Para el análisis estadístico, se tuvo en cuenta la brotación acumulada a través del tiempo, expresada en porcentaje. El análisis de varianza indicó diferencias significativas en la primera, segunda y tercera semana después de la siembra, tanto en Dominico-Hartón ($P= 0,0089$, $P= 0,0010$ y $P= 0,0005$, respectivamente), como en FHIA-21 ($P = 0,0025$, $P = 0,0025$ y $P < 0,0001$, respectivamente).

En ambos materiales de plátano, el total de cormos sembrados emergió y esto ocurrió entre la primera y la cuarta semana después del establecimiento. El comportamiento de la brotación con la aplicación de los inductores de resistencia reveló que las plantas tratadas con Fosfito de potasio, Fose-til-Al, ASM y BABA, emergieron en su totalidad en la tercera semana, mientras que con la aplicación de lixiviados de raquis de plátano ocurrió solo hasta la cuarta semana después de la siembra (Figura 1).

El tiempo de brotación en general indicó un comportamiento normal para esta variable, dado que estuvo dentro de los rangos normales para la ocurrencia de éste fenómeno, no obstante, es importante resaltar que el tratamiento que más rápido alcanzó el 100% de brotación en la segunda semana

después de la siembra, fue el testigo relativo. En este testigo los cormos fueron expuestos a un tratamiento presiembra con Carbofuran, sugiriendo que éste estimuló una brotación rápida de las plántulas. Este comportamiento también fue reportado por **Márquez & Castaño-Zapata (2008)**, quienes observaron que cormos de Dominico-Hartón expuestos a 2 mL L⁻¹ de Carbofuran durante 60 min, emergieron 7 días más rápido que los del testigo. Al parecer, la estimulación del crecimiento generada por Carbofuran podría estar relacionada además de su actividad nematocida o insecticida, a que produce una serie de metabolitos que inhiben la oxidación del ácido indolacético (**Lee, 1976**), considerada la auxina natural más importante que influye en el crecimiento, división celular y formación de raíces en las plantas (**Castillo et al., 2005**). Es de anotar que aunque los cormos de los tratamientos con inductores también llevaron tratamiento presiembra con Carbofuran, no hubo una superioridad en dicho efecto combinado sobre la brotación.

Altura de plántulas: En Dominico-Hartón las principales diferencias entre tratamientos con inductores de resistencia y los testigos se registraron en la última evaluación (120 DDS, $P < 0,0001$), mientras que para FHIA-21 estas fueron en la tercera evaluación (90 DDS, $P < 0,0001$).

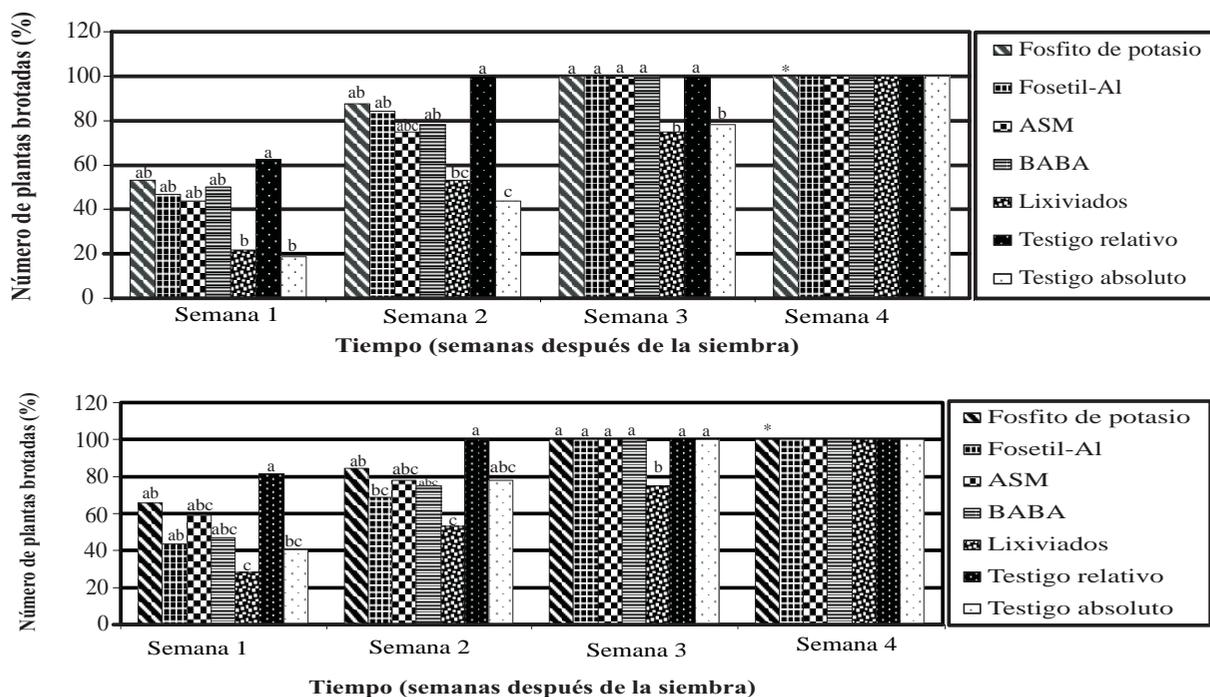


Figura 1. Brotación acumulada (%) de plántulas de Dominico-Hartón (A) y FHIA-21 (B), en la semana 1, semana 2, semana 3 y semana 4 después de la siembra y establecimiento de los tratamientos. Letras diferentes, indican diferencias significativas entre tratamientos, según prueba de Tukey al 5%. * Diferencias no significativas.

Tabla 1. Altura y longitud promedio de plántulas y raíces de Dominico-Hartón y FHIA-21, registrada en las evaluaciones realizadas a los 40, 60, 90 y 120 DDS y establecimiento de los tratamientos.

Material	Tratamientos	Altura promedio de plántulas (cm) DDS	Longitud promedio de raíces (cm) DDS							
			40	60	90	120	40	60	90	120
Dominico-Hartón	Fosfito de potasio	21,18 a ^x	30,5 a	35,68 a	41,37 a	43,43 a	47,12 a	54,37 a	63,25 a	
	Fosetil-Al	20,63 a	29 a	32,12 a	37,87 abc	41,84 a	42,75 a	45,5 ab	53,12 ab	
	ASM	20,02 a	28,37 a	33,62 a	38,75 ab	38,58 a	43 a	50,5 a	59,37 a	
	BABA	19,72 a	27,25 a	31,5 a	36,43 abc	39,21 a	41,5 a	53,12 a	55,12 ab	
	Lixiviados de raquis	10,15 b	13,02 b	15,86 b	17,9 d	16,21 b	18,37 b	23,33 c	30,97 c	
	Testigo relativo	24,07a	26,01 a	30,08 a	33,77 bc	39,12 a	40,10 a	43,25 ab	44,12 abc	
	Testigo absoluto	23,18 a	24,96 a	28,25 a	32 c	30,15 a	31,62 ab	33,12 bc	37,87 bc	
FHIA-21	Fosfito de potasio	16,33 ab	19,5 a	26,74 a	30,18 a	32,91 a	37,12 a	42,5 a	51,25 n.sy	
	Fosetil-Al	15,5 ab	17,37 ab	23,23 ab	26,5 a	35 a	37,5 a	47 a	50,75 n.s	
	ASM	15,81 ab	19,06 a	25,75 ab	28,52 a	31,31 a	38 a	44,87 a	48,25 n.s	
	BABA	14,31 ab	18,62 a	24,31 ab	27,62 a	30,56 a	39,12 a	43 a	44,75 n.s	
	Lixiviados de raquis	11,63 b	12,25 b	14,37 c	16,87 b	18,37 b	19,39 b	25,33 b	32,25 n.s	
	Testigo relativo	19,12 a	21,01 a	22,08 ab	25 a	31 a	33,62 ab	38,5 ab	40,37 n.s	
	Testigo absoluto	18,03 ab	19,71 a	21,12 b	23,75 a	29,75 a	31,12 ab	33,50 ab	35,28 n.s	

^x Letras diferentes, indican diferencias significativas entre tratamientos, según prueba de Tukey al 5%. ^y n.s: diferencias no significativas. DDS: Días después de la siembra.

Durante las tres primeras evaluaciones, la altura de las plántulas de Dominico-Hartón no fue afectada significativamente por la aplicación de Fosfito de potasio, Fosetil-Al, ASM y BABA. Así mismo, aunque éstos mismos cuatro inductores, presentaron mayor altura que la de ambos testigos en la última evaluación 120 DDS, el efecto solo fue estadísticamente significativo para aquellas tratadas con Fosfito de potasio (41,37 cm). En FHIA-21, la altura tampoco se vio afectada significativamente por la aplicación de Fosfito de potasio, Fosetil-Al, ASM y BABA, con respecto a ambos testigos y éste comportamiento fue consistente a través del tiempo (Tabla 1).

Tanto en Dominico-Hartón como en FHIA-21, las mayores diferencias entre los tratamientos con inductores y los testigos, se apreciaron con la aplicación de lixiviados de raquis de plátano el cual registró el menor valor de altura de plántulas a través del tiempo (Tabla 1). Se observó además, que las plántulas tratadas con este inductor de resistencia, presentaron síntomas de fitotoxicidad manifestada en las hojas con apariencia de rigidez y deformidad y aunque para tratar de contrarrestar este efecto se disminuyó la concentración de

lixiviados a la mitad en la tercera evaluación (60 DDS), la recuperación de las plántulas no fue sustancial, siendo éste el inductor que más adversamente afectó el crecimiento.

El comportamiento destacado de Fosfito de potasio en Dominico-Hartón, registrado a los 120 DDS en éste estudio para altura de las plántulas, también fue reportado por **Mogollón-Ortíz** (2011), quien al evaluar el efecto de diferentes inductores de resistencia, para el manejo de las sigatokas amarilla y negra, indicó superioridad en la altura de plántulas de Dominico-Hartón, al cabo de tres aplicaciones de Fosfito de potasio, con un valor promedio de 36,6 cm registrado a los 112 DDS, con respecto a 29 cm registrado en las plántulas del testigo, sin dicha aplicación. Al respecto, se ha reportado que el efecto que tiene el Fosfito de potasio en el crecimiento de las plantas se debe principalmente a los cambios bioquímicos y estructurales que restringen el desarrollo del patógeno (**Lobato et al.**, 2011; **Olivieri et al.**, 2012), más que a su acción como fertilizante (**Thao & Yamakawa**, 2009).

Por su parte otros estudios en plátano reportaron que la aplicación de Fosfito de potasio y ASM, no afectó la altura de las

plantas cuando se aplicaron cada 6 semanas durante el ciclo del cultivo para el manejo de las sigatoka negra y amarilla dado que no difirieron con las plantas del testigo (**Ramírez-Loaiza, 2010**), comportamiento que también fue observado en éste estudio para las plántulas de FHIA-21.

En lo referente al proceso de inducción de resistencia, ha sido ampliamente documentado que existe una serie de costos energéticos para la planta, como consecuencia de la redistribución masiva de su energía, hacia la producción de compuestos para la defensa contra el patógeno (**Hermes & Mattson, 1992; Cipollini et al., 2003; Iriti & Faoro, 2006; Berger et al., 2007; Bolton, 2009**). En este estudio estos costos no tuvieron un efecto adverso en el crecimiento de las plantas de Dominico-Hartón y FHIA-21, con la aplicación de Fosfito de potasio, Fosetil-Al, ASM ó BABA. Al respecto, **Siemens et al. (2003)** y **Dietrich et al. (2005)**, afirman que la naturaleza de estos costos aún se encuentra en discusión y dependen del ambiente en que la planta se encuentre y en muchos casos se relaciona con condiciones de estrés.

Longitud de raíces: Las diferencias estadísticas en Dominico-Hartón para esta variable se presentaron en todos los tiempos de evaluación ($P < 0,0001$, $P < 0,0001$, $P < 0,0001$ y $P = 0,0004$), mientras que en FHIA-21 éstas ocurrieron solo en las tres primeras evaluaciones ($P = 0,0006$, $P = 0,0174$ y $P = 0,0006$).

La longitud de raíces en plántulas de Dominico Hartón, y FHIA-21, no fue afectada significativamente por la aplicación de Fosfito de potasio, Fosetil-Al, ASM y BABA, más si lo fue con la aplicación de lixiviados de raquis de plátano (Tabla 1).

Aunque no hubo un efecto estadísticamente superior en la longitud de raíces con la aplicación de los inductores de resistencia con respecto a los testigos, cabe resaltar que al cabo de 120 DDS, las raíces de las plántulas de los dos materiales de plátano evaluados tratadas con Fosfito de potasio, Fosetil-Al, ASM y BABA, fueron mas largas que aquellas que no recibieron aplicación de dichos productos, siendo el mayor valor de 63,25 cm en Dominico-Hartón y de 51,25 cm en FHIA-21, registrado con Fosfito de potasio (Tabla 1).

Las plántulas de Dominico-Hartón y FHIA-21 tratadas con lixiviados de raquis de plátano, presentaron desarrollo radical deficiente, y menor longitud de raíces, comparada con los demás tratamientos, probablemente como resultado de la fitotoxicidad causada por la concentración a la cual se usaron (Figura 2). Esto coincide con lo reportado por **Álvarez et al. (2001)** quienes observaron que las aplicaciones de lixiviados de raquis de plátano al 50%, aunque redujeron la incidencia del Míldeo polvoroso de la rosa (*Rosa* spp.) causado por *Sphaerotheca pannosa*, causaron fitotoxicidad en plantas.

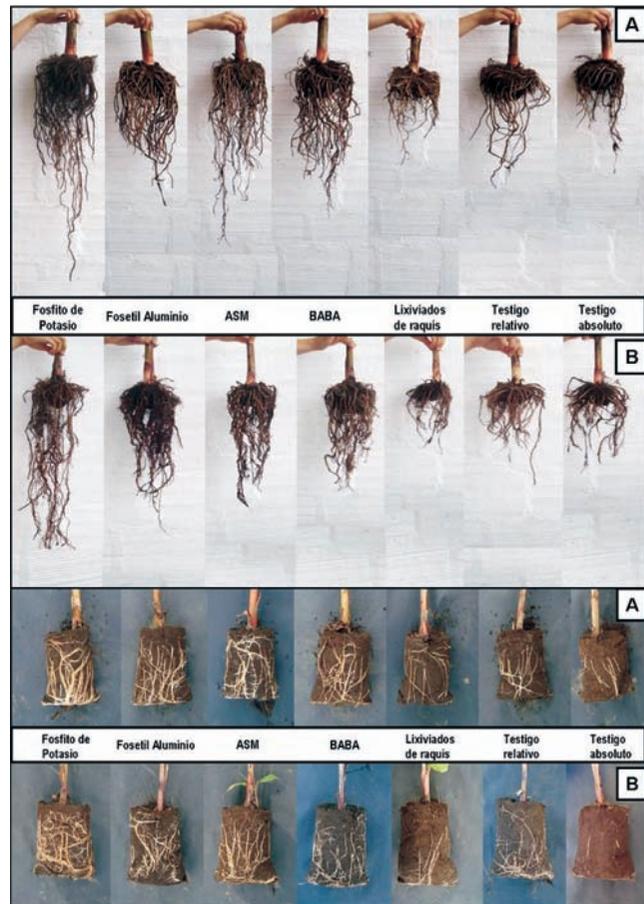


Figura 2. Sistema radical de plántulas de plátano tratadas con inductores de resistencia Fosfito de potasio, Fosetil-Al, ASM, BABA y lixiviados de raquis de plátano, 120 DDS. A. Dominico-Hartón B. FHIA-21.

Materia seca de raíces: Tanto en Dominico-Hartón y FHIA-21, las plántulas tratadas con los inductores de resistencia presentaron mayores valores de materia seca de raíces con respecto a ambos testigos. Sin embargo, estas diferencias solo fueron significativas a los 90 y 120 DDS, tanto en Dominico-Hartón ($P < 0,0001$ y $P = 0,0003$), como en FHIA-21 ($P = 0,0008$ y $P < 0,0001$).

Las plántulas tratadas con Fosfito de potasio, Fosetil-Al y ASM presentaron un comportamiento similar en Dominico-Hartón y FHIA-21 debido a que difirieron significativamente de ambos testigos tanto en la evaluación realizada a los 90 como en la realizada a los 120 DDS. Los valores de materia seca al final del periodo evaluativo con la aplicación de estos tres inductores fueron en Dominico-Hartón de 44, 39 y 45%, respectivamente, mientras que en FHIA-21 estuvieron alrededor de 30% (Tabla 2).

Tabla 2. Materia seca de raíces (%) de plántulas de Dominico-Hartón y FHIA-21, registrada en las evaluaciones realizadas a los 40, 60, 90 y 120 DDS y establecimiento de los tratamientos.

Material	Tratamientos	Materia seca de raíces (%) DDS			
		40	60	90	120
Dominico-Hartón	Fosfito de potasio	32 n.s ^x	35 n.s	38 aby	44 a
	Fosetil-Al	31 n.s	32n.s	37 ab	39 a
	ASM	33 n.s	35 n.s	39 a	45 a
	BABA	31 n.s	32 n.s	34 ab	37 ab
	Lixiviados de raquis	26 n.s	27 n.s	29 bc	30 ab
	Testigo relativo	23 n.s	23 n.s	21 cd	20 b
	Testigo absoluto	21 n.s	20 n.s	20 d	19 b
FHIA-21	Fosfito de potasio	29 n.s	30 n.s	31 a	31 a
	Fosetil-Al	29 n.s	31 n.s	32 a	32 a
	ASM	27 n.s	28 n.s	31 a	32 a
	BABA	26 n.s	28 n.s	30 ab	30 a
	Lixiviados de raquis	22 n.s	23 n.s	23 abc	24 b
	Testigo relativo	21 n.s	20 n.s	20 bc	19bc
	Testigo absoluto	20 n.s	19 n.s	19 c	18 c

^x Diferencias no significativas * letras diferentes indican diferencias significativas entre tratamientos, según prueba de Tukey al 5%. DDS: Días después de la siembra.

En ambos genotipos la materia seca de raíces aumentó a través del tiempo en los tratamientos con inductores de resistencia, y disminuyó en los testigos, comportamiento que también fue reportado por **Becerra-Encinales (2010)**; esto probablemente se relaciona con mayor número de nematodos fitoparásitos en ambos testigos, cuyos daños, afectaron negativamente la biomasa radical.

Nematodos fitoparásitos en 100 g de raíces y suelo: Las plántulas de Dominico-Hartón y FHIA-21 tratadas con los inductores de resistencia redujeron significativamente el número de nematodos en raíces y suelo en todos los tiempos de evaluación, con respecto a ambos testigos ($P < 0,0001$).

Las diferencias estadísticas no permitieron distinguir claramente la superioridad en la acción de alguno de los inductores de resistencia, sin embargo en términos de reducción del número de nematodos fitoparásitos, hubo un orden de efectividad que fue consistente tanto para Dominico-Hartón

y FHIA-21. En raíces la mayor reducción de nematodos fitoparásitos se presentó con la aplicación de ASM, seguido por Fosfito de potasio, Fosetil-Al, BABA y lixiviados de raquis de plátano. Los valores en Dominico-Hartón para dichos tratamientos al final del periodo evaluativo (120 DDS) fueron de 521, 848, 929, 1.391 y 2.172 individuos 100 g de raíces⁻¹, respectivamente; en FHIA-21 fueron de 970, 1.192, 1.434, 1.714 y 3.109 individuos 100 g de raíces⁻¹, respectivamente (Figura 3). En suelo la mayor reducción de nematodos fitoparásitos se observó con la aplicación de Fosfito de potasio, seguido de ASM, Fosetil-Al, BABA y lixiviados de raquis de plátano, con valores al cabo de 120 DDS para Dominico-Hartón de 105, 128, 131, 181, y 284 individuos 100 g de suelo⁻¹, respectivamente y en FHIA-21 de 213, 229, 277, 285 y 476 individuos 100 g de suelo⁻¹, respectivamente (Figura 4).

En ambos materiales de plátano, el tratamiento de los cormos con Carbofuran tuvo una gran influencia en la reducción de las poblaciones de nematodos fitoparásitos. Este comportamiento se apreció en el testigo relativo, el cual registró valores inferiores a los registrados en el testigo absoluto a través del tiempo (Figuras 3, 4). El número de nematodos fitoparásitos en raíces registrado para los testigos relativo y absoluto al final del periodo evaluativo (120 DDS), fue en Dominico-Hartón de 5.522 y 7.940 individuos, respectivamente; mientras que en FHIA-21 fue de 6.310 y 9.400 individuos respectivamente. En suelo los valores para Dominico-Hartón con estos dos testigos fueron de 487 y 606 individuos, respectivamente y en FHIA-21 de 764 y 945 individuos, respectivamente. Teniendo esto en cuenta se realizó un análisis de reducción porcentual de nematodos fitoparásitos tomando como referencia el testigo relativo, dado que los cormos usados en los tratamientos con inductores de resistencia también fueron tratados con Carbofuran (Tabla 3).

Desde el establecimiento del experimento, hasta el final de la evaluación se realizaron cuatro aplicaciones de los inductores de resistencia y esto dio como resultado al cabo de 120 DDS, una reducción de los nematodos fitoparásitos en raíces en Dominico-Hartón entre 61 y 91%, mientras que en FHIA-21, entre 51 y 85% en comparación con el testigo relativo. En suelo esta reducción en Dominico-Hartón fue entre 42 y 78%, mientras que en FHIA-21 fue entre 38 y 72% (Tabla 3). Estos resultados confirman la efectividad de los inductores de resistencia y coincide con reportes anteriores donde se evidencian los beneficios de su aplicación en la estimulación de los mecanismos de defensa de las plantas y la supresión de las poblaciones de nematodos fitoparásitos. **Ramírez-Loaiza (2010)**, observó que la aplicación de ASM y Fosfito de potasio en plantas de plátano Dominico-Hartón en campo, redujeron las poblaciones de nematodos fitoparásitos en raíces en 74 y 44% y en suelo en 26 y 17%, respectivamente.

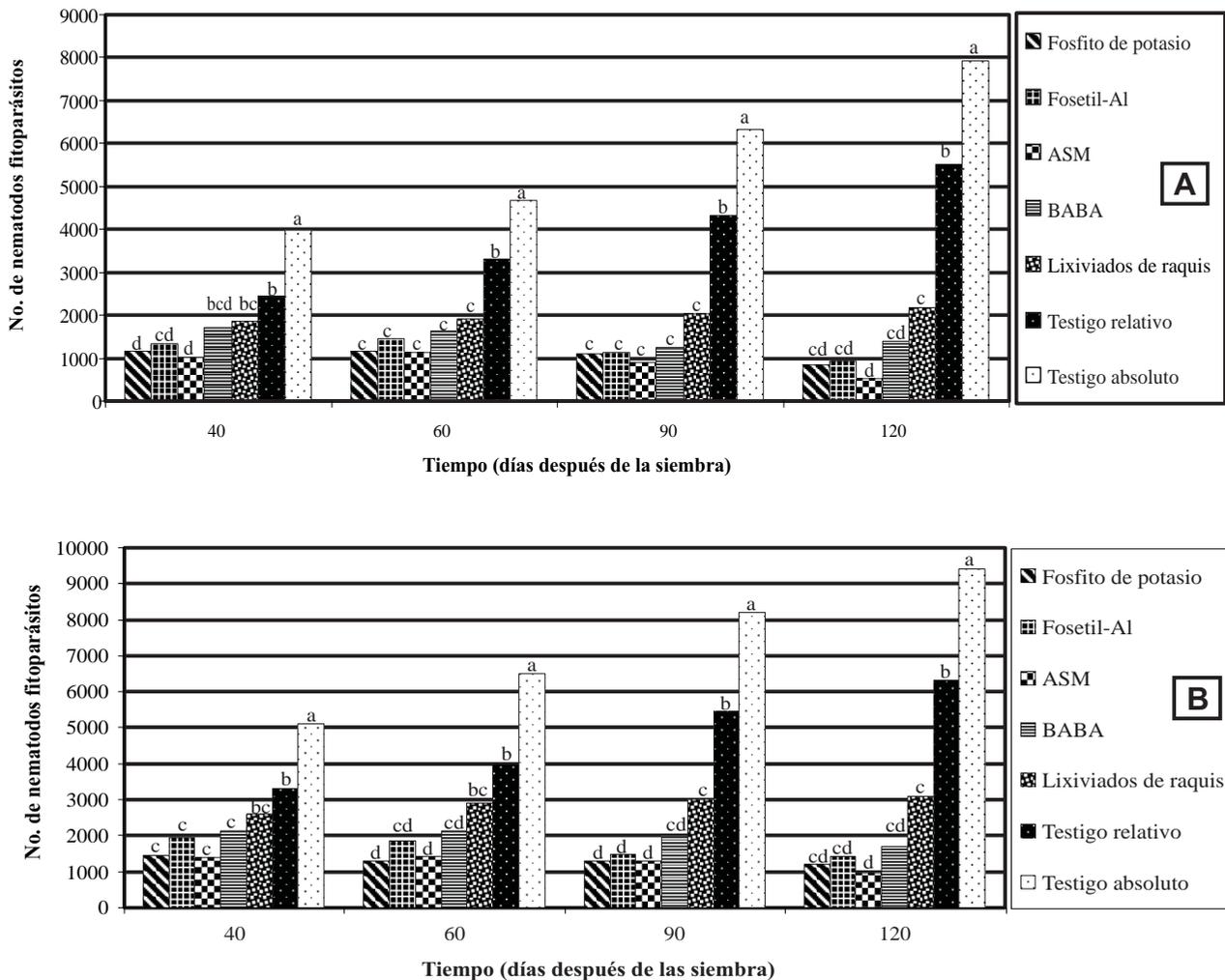


Figura 3. Número de nematodos fitoparásitos en 100 g de raíces de plántulas de plátano Dominico-Hartón (A) y FHIA-21 (B), en las evaluaciones realizadas a los 40, 60, 90 y 120 DDS y establecimiento de los tratamientos. Letras diferentes, indican diferencias significativas entre tratamientos, según prueba de Tukey al 5%.

Mogollón-Ortiz (2011), reportó una reducción en poblaciones de nematodos fitoparásitos en plántulas de plátano tratadas con Fosfito de potasio, ASM y BABA, que fueron del orden de 22,01, 21,10 y 6,42%, respectivamente. Arias (1999), registró una disminución significativa del número de nematodos en raíces de plantas de banano con la aplicación de Fosetil-Al y un aumento del 15% de las raíces funcionales con respecto a las no tratadas y Llive-Condor (2009), reportó que la aplicación de lixiviados de raquis frescos o maduros, en diferentes concentraciones sobre *vitro* plantas de banano (*Musa paradisiaca*) cv. “Gran Enano” en invernadero, redujeron la penetración de *Radopholus similis* en rangos que oscilaron entre 64 y 91%.

En lo referente a la acción de los inductores de resistencia sobre nematodos fitoparásitos, se ha reportado que éstos compuestos activan genes relacionados con la patogenicidad como inhibidores de proteasas (PR-6), que impiden el desdoblamiento de las proteínas consumidas por los nematodos; también se reporta que afectan su reproducción y desarrollo al alterar los sitios de alimentación ya sea por el suministro inadecuado de nutrientes para los nematodos o por el desplazamiento de sustancias tóxicas para su desarrollo (Chinnasri *et al.*, 2003; Chinansri & Sipes, 2005; Oka *et al.*, 2007).

En esta investigación hubo mayor población de nematodos fitoparásitos en raíces y suelo en FHIA-21 que en Dominico-Hartón, que también fue registrado en trabajos previos en

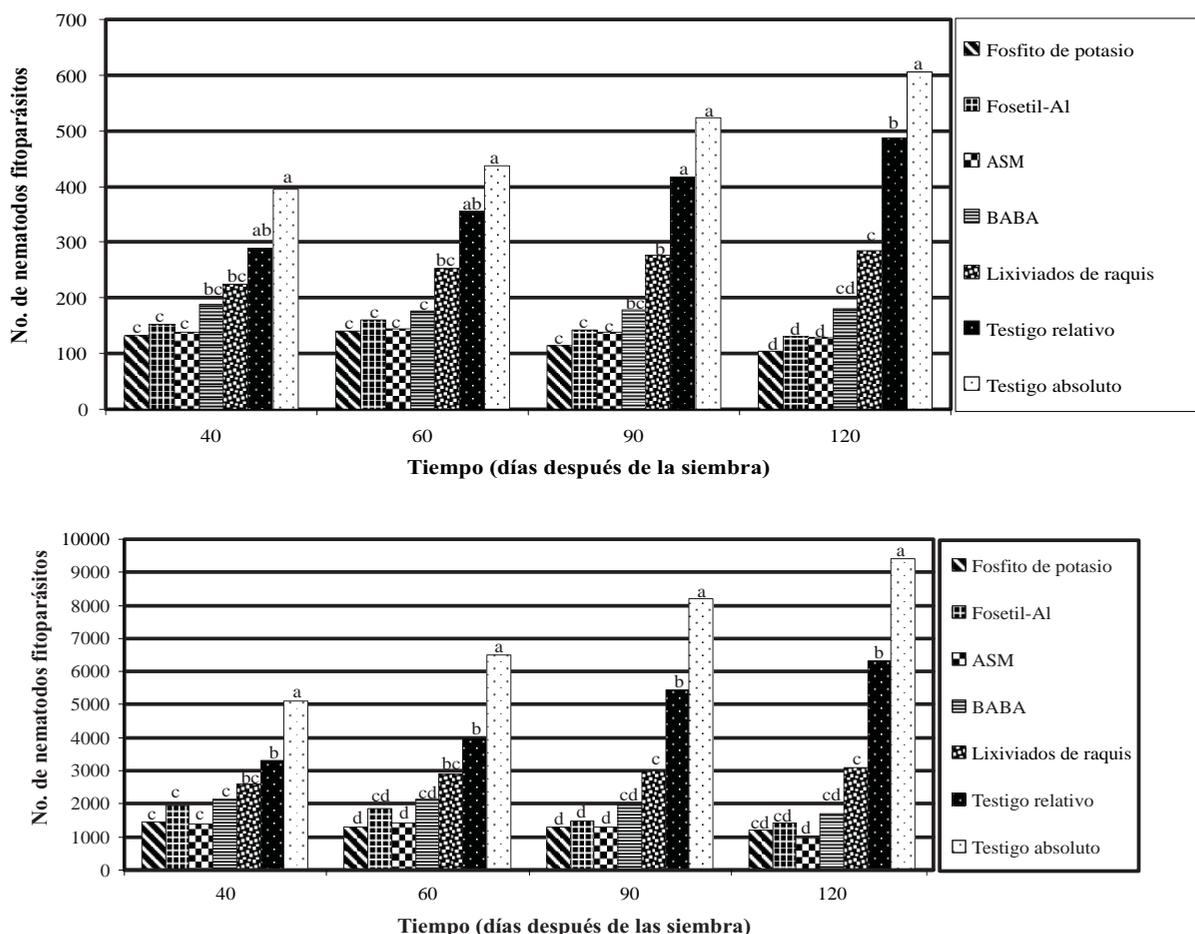


Figura 4. Número de nematodos fitoparásitos en 100 g de suelo de plátano Dominico- Hartón (A) y FHIA-21 (B), en las evaluaciones realizadas a los 40, 60, 90 y 120 DDS y establecimiento de los tratamientos. Letras diferentes, indican diferencias significativas entre tratamientos, según prueba de Tukey al 5%.

Tabla 3. Reducción porcentual del número de nematodos fitoparásitos al final del periodo evaluativo 120 DDS, con la aplicación de los inductores de resistencia.

Tratamientos	Reducción de nematodos fitoparásitos (%)			
	Dominico-Hartón		FHIA-21	
	Raíces	Suelo	Raíces	Suelo
Fosfito de potasio	85*	78	81	72
Fosetil-AI	83	73	77	64
ASM	91	74	85	70
BABA	75	63	73	63
Lixiviados de raquis	61	42	51	38
Testigo relativo	0	0	0	0

* Reducción porcentual del número de nematodos fitoparásitos en raíces y suelo, con respecto al testigo relativo.

la granja Montelindo (Guzmán & Castaño-Zapata, 2004). Este comportamiento es concordante con mayor población inicial de nematodos fitoparásitos en las raíces de los cormos de FHIA-21 (16.101 individuos 100 g de raíces⁻¹) que de Dominico-Hartón (12.364 individuos 100 g de raíces⁻¹). En suelo, podría ser el resultado de la reinfestación a partir de poblaciones de nematodos en las raíces.

Tanto en Dominico-Hartón y FHIA-21 se registró la presencia en raíces y suelo de nematodos importantes como *Radopholus similis*, *Meloidogyne* spp., y *Helicotylenchus* spp., siendo *R similis* más predominante en Dominico-Hartón y *Meloidogyne* spp. en FHIA-21 (Tabla 4).

Tabla 4. Identificación de nematodos fitoparásitos presentes en 100 g de raíces y suelo en plántulas de Dominico-Hartón y FHIA-21, 120 DDS y establecimiento de los tratamientos.

Material	Tratamiento	R. similis		Meloidogyne spp.		Helicotylenchus spp.		Tylenchus spp.	
		Raíces	Suelo	Raíces	Suelo	Raíces	Suelo	Raíces	Suelo
Dominico- Hartón	Fosfito de potasio	546	18	182	39	120	48	0	0
	Fosetil-Al	601	29	210	43	118	59	0	0
	ASM	349	23	112	35	60	61	0	9
	BABA	784	30	373	66	234	85	0	0
	Lixiviados de raquis	1.272	57	488	94	339	119	73	14
	Testigo relativo	2.750	135	1.670	157	1.102	195	0	0
	Testigo absoluto	3.852	162	2.590	196	1.406	228	92	20
FHIA-21	Fosfito de potasio	106	45	696	90	390	78	0	0
	Fosetil-Al	163	47	774	124	497	106	0	0
	ASM	79	43	645	101	246	85	0	0
	BABA	172	46	957	135	585	104	0	0
	Lixiviados de raquis	320	64	1.623	232	1.166	180	0	0
	Testigo relativo	728	74	3.640	408	1.942	282	0	0
	Testigo absoluto	1.383	99	5.529	521	2.488	325	0	0

Conclusiones

Con Fosfito de potasio, Fosetil-Al, Acibenzolar-s-metil (ASM) y Ácido DL-3-aminobutírico (BABA), el 100% de brotación ocurrió tres semanas después de la siembra y con lixiviados de raquis de plátano ocurrió cuatro semanas después de la siembra en plántulas de Dominico-Hartón y FHIA-21.

Aplicaciones continuas de los inductores de resistencia evaluados, redujeron las poblaciones de nematodos fitoparásitos en raíces y suelo de plántulas de Dominico-Hartón y FHIA-21.

Lixiviados de raquis de plátano evaporados al 50% causaron fitotoxicidad en plántulas de Dominico-Hartón y FHIA-21, ocasionado desarrollo y crecimiento deficiente; sin embargo, redujeron poblaciones de nematodos fitoparásitos en raíces y suelo de dichas plántulas, por lo que se recomienda realizar estudios con otras concentraciones.

La presencia de *Radopholus similis*, *Meloidogyne* spp. y *Helicotylenchus* spp. confirma la importancia de estos nematodos en plátano.

Agradecimientos

A la Vicerrectoría de Investigaciones y Posgrados de la Universidad de Caldas, por la financiación de esta investigación,

a M.Sc. Manuel Aristizábal Loaiza, por su asesoría estadística, y a Wilson Puerta y Bernardo Gutiérrez, por su colaboración en labores de campo y laboratorio, respectivamente.

Bibliografía

- AGRONET. 2010. Red de información y comunicación estratégica del sector agropecuario. Estadísticas. <http://www.agronet.gov.co/agronet-web1/Estad%C3%ADsticas/ReportesEstad%C3%ADsticos.aspx>
- Álvarez E., C. Grajales, C. J. Villegas & J. Loke. 2001. Control del Mildew polvoso (*Sphaerotheca pannosa* var. *rosae*) en rosa (*Rosa* sp.), usando un lixiviado de compost del raquis de plátano (*Musa* AAB). *Asocolflores* 62:41-47.
- Andreu A., M. G. Guevara, E. Wolski, G. Daleo & D. Caldiz. 2006. Enhancement of the natural disease resistance of potatoes by chemicals. *Pest Manag. Sci.* 62:162-170.
- Araya M. 2003. Situación actual del manejo de nemátodos en banano (*Musa* AAA) y plátano (*Musa* AAB) en el trópico americano. En: F. E. Rosales., y G. Rivas (Eds.), *Manejo Convencional y Alternativo de la Sigatoka Negra, Nemátodos y Otras Plagas Asociadas al Cultivo de Musáceas en los Trópicos*. (Guayaquil, Ecuador). Inibap. pp. 79-102.
- Arias O. 1999. Desarrollo del método de in-plant con bioroot en el cultivo de banano. *Memorias XI Congreso Nacional Agronómico y de Recursos Naturales: vol. 2. Manejo de cultivos*. San José (Costa Rica). p. 367.
- Becerra-Encinales J. 2010. Efecto de la micorrización sobre el manejo de nematodos fitopatógenos en plántulas de plátano híbrido "FHIA-20 AAAB". Tesis de Magister en Fitopatología. Facultad de Ciencias Agropecuarias, Universidad de Caldas, Manizales. 121 p.
- Berger S., A.K. Sinha & T. Roitsch. 2007. Plant physiology meets phyto-

- pathology: plant primary metabolism and plant pathogen interactions. *J. Exp. Bot.* **58**(15-16):4019-4026.
- Bolton M.D.** 2009. Primary metabolism and plant defense fuel for the fire. *Mol. Plant Microbe Interact.* **22**:487-497.
- Castillo G., B. Altuna, G. Michelena, J. Sánchez-Bravo & M. Acosta.** 2005. Cuantificación del contenido de ácido indolacético (AIA) en un caldo de fermentación microbiana. *Anales de Biología* **27**:137-142.
- Chinnasri B. & B.S. Sipes.** 2005. Effects of a systemic acquired resistance inducer on nematodes infecting pineapple. *Acta Hort.* **666**:213-222
- Chinnasri B., B.S. Sipes & D.P. Schmitt.** 2003. Effects of acibenzolar-s-methyl application to *Rotylenchulus reniformis* and *Meloidogyne javanica*. *J. Nematol.* **35**: 110-114.
- Cipollini D., C.B. Purrington & J. Bergelson.** 2003. Costs of induced responses in plants. *Basic Appl. Ecol.* **4**:79-85.
- Cohen Y.** 2001. The BABA story of induced resistance. *Phytoparasitica* **29**:375-378.
- Dietrich R., K. Ploss & M. Heil.** 2005. Growth responses and fitness costs after induction of pathogen resistance depend on environmental conditions. *Plant Cell Environ.* **28**:211-222.
- Eikemo H., A. Stensvand & A.M. Tronsmo.** 2003. Induced resistance as a possible means to control diseases of strawberry caused by *Phytophthora* spp. *Plant Dis.* **87**: 345-350.
- Escobar-Vélez J. H & J. Castaño-Zapata.** 2005. Manejo de las enfermedades causadas por *Mycosphaerella* spp. mediante la aplicación de ácidos fúlvicos. *Info Musa* **14**(2):15-17.
- Faize M., L. Faize, N. Koike, M. Ishizaka & H. Ishii.** 2004. Acibenzolar-s-methyl-induced resistance to Japanese pear scab is associated with potentiation of multiple defense responses. *Phytopathol.* **94**:604-612.
- Flegg J. J. M & D.J. Hooper.** 1970. Extraction of free-living stage from soil. In: J. F. Southey (ed). *Laboratory Methods for Work with Plant and Soil Nematodes*. Technical Bulletin 2. Her majesty's stationary office, London. pp. 5-22.
- Gentile S., D. Valentino & G. Tamietti.** 2010. Effectiveness of potassium phosphite in the control of chestnut ink disease. *Acta Hort.* (ISHS) **866**:417-424
- Guzmán P. O. A. & J. Castaño-Zapata.** 2004. Reconocimiento de nematodos fitopatógenos en plátanos Dominico-Hartón (*Musa* AAB Simmonds), África, FHIA-20 y FHIA-21 en la granja Montelindo, municipio de Palestina (Caldas), Colombia. *Rev. Acad. Colomb. Cienc.* **28**(107):205-302.
- Herms D.A. & W.J. Mattson.** 1992. The dilemma of plants: to grow or defend. *Quart. Rev. Biol.* **67**:283-335.
- Iriti M. & F. Faoro.** 2006. Fitness costs of chemically-induced resistance: double edged sword or (un)stable equilibrium?. *J. Plant Pathol.* **88**(1):5-6.
- Jackson T.J., T. Burgess, I. Colquhoun & G.E.S. Hardy.** 2000. Action of the fungicide phosphite on *Eucalyptus marginata* inoculated with *Phytophthora cinnamomi*. *Plant Pathol.* **49**:147-154.
- Kessmann H., T. Staub, C. Hofmann, T. Maetzke, J. Herzog, E. Ward, S. Uknes & J. Ryals.** 1994. Induction of systemic acquired resistance in plants by chemicals. *Annu. Rev. Phytopathol.* **32**:439-459.
- Kuc J.** 2001. Concepts and direction of induced systemic resistance in plants and its application. *Eur. J. Plant Pathol.* **107**:7-12.
- Lee T. T.** 1976. Insecticide-plant interaction: Carbofuran effect on indole-3-acetic acid metabolism and plant growth. *Life Sci.* **18**:205-210.
- Llive-Condor F. M.** 2009. Uso de extractos acuosos de raquis de banano y *Tagetes* spp. enriquecidos con bacterias y hongos endofíticos para el control biológico de *Radopholus similis* (Cobb) Thorne. Tesis, Mag. Sc. en Agricultura Ecológica, Centro Agronómico Tropical de Investigación y Enseñanza CATIE, Turrialba Costa Rica. 79 p.
- Lobato M.C., M.F. Machinandiarena, C. Tambascio, G.A.A. Dosio, D.O. Caldiz, G.R. Daleo, A.B. Andreu, & F.P. Olivieri.** 2011. Effect of foliar applications of phosphate on post-harvest potato tubers. *Eur. J. Plant Pathol.* **130**(2): 155-163.
- Márquez C. L & J. Castaño-Zapata.** 2007. Inducción de resistencia a sigatocas en plántulas de plátano Dominico-Hartón. *Agronomía* **15**(2):49-57.
- Márquez C. L. & J. Castaño-Zapata.** 2008. Efecto de tratamiento químico de la semilla de plátano Dominico-Hartón sobre la población de nematodos fitoparásitos. *Boletín Fitotecnia*. No. 133. Universidad de Caldas. Manizales. 2 p.
- Martínez H., Y. Peña & C. Espinal.** 2006. La cadena de plátano en Colombia: una mirada global de su estructura y dinámica 1991-2005. En: Ministerio de Agricultura y Desarrollo Rural. Documento de Trabajo No. 102. Bogotá, Colombia. En: http://cadenahortofruticola.org/admin/bibli/324caracterizacion_platano.pdf; consulta: agosto de 2010.
- Mogollón-Ortiz A. M.** 2011. Evaluación *in vitro* e *in situ* de inductores químicos de resistencia sobre *Mycosphaerella* spp. Tesis de Magister en Fitopatología. Facultad de Ciencias Agropecuarias, Universidad de Caldas, Manizales. 115 p.
- Olivieri F.P., M.L. Feldman, M.F. Machinandiarena, M.C. Lobato, D.O. Caldiz, G.R. Daleo & A.B. Andreu,** 2012. Phosphite applications induce molecular modifications in potato tuber periderm and cortex that enhance resistance to pathogens. *Crop Protection*, **32**: 1-6
- Oka Y., N. Tkachi & M. Mor.** 2007. Phosphite inhibits development of the nematodes *Heterodera avenae* and *Meloidogyne marylandi* in cereals. *Phytopathol.* **97**:396-404.
- Ramírez-Loaiza C.** 2010. Efecto de inductores de resistencia sobre las sigatocas negra (*Mycosphaerella fijiensis* Morelet) y amarilla (*Mycosphaerella musicola* Leach) en plátano cultivariedad Dominico-Hartón. Trabajo de grado de Ingeniera Agrónoma. Programa de Agronomía. Facultad de Ciencias Agropecuarias, Universidad de Caldas. 53 p.
- Rebollar-Alviter A., L.V. Madden & M.A. Ellis.** 2005. Efficacy of azoxystrobin, pyraclostrobin, potassium phosphite, and mefenoxam for control of strawberry leather rot caused by *Phytophthora cactorum*. *Plant Health Progress*. <http://www.plantmanagementnetwork.org/pub/php/research/2005/leather/>; consulta: agosto de 2010.
- Reuveni M., T. Zahavi & Y. Cohen.** 2001. Controlling downy mildew (*Plasmopara viticola*) in field-grown grapevine with β -aminobutyric acid (BABA). *Phytoparasitica* **9**(2):125-133.
- Riveros A. S.** 2001. Moléculas activadoras de la inducción de resistencia, incorporadas en programas de agricultura sostenible. *Rev. Manejo Integrado de Plagas* **61**:4-11.
- Ryals J., S. Uknes & E. Ward.** 1994. Systemic acquired resistance. *Plant Physiol.* **104**:1109-1112.
- Schneider M., P. Schweizer, P. Meuwly & J.P. Métraux.** 1996. Systemic acquired resistance in plants. *Intern. Rev. Cytology* **168**:303-340.
- Siemens D.H., H. Lischke, N. Maggiulli, S. Schürch & B.A. Roy.** 2003. Costs of resistance and tolerance under competition: the defense-stress benefit hypothesis. *Evolutionary Ecology* **17**:247-263.
- Thao H.T.B. & T. Yamakawa.** 2009. Phosphite (phosphorous acid): Fungicide, fertilizer or biostimulator? *Soil Science and Plant Nutrition* **55**:228-234.

MATEMÁTICAS

CÁLCULO EFICIENTE DEL ESTIMADOR JACKKNIFE PARA MÍNIMOS CUADRADOS LINEALES DE RANGO DEFICIENTE*

Héctor Jairo Martínez R.** , Ana María Sanabria R.***

Resumen

Martínez, H.J., A. M. Sanabria R.: Cálculo eficiente del estimador Jackknife para mínimos cuadrados lineales de rango deficiente. *Rev. Acad. Colomb. Cienc.* **36** (141): 415-422, 2012. ISSN 0370-3908.

En este artículo, extendemos al problema de mínimos cuadrados lineales de rango deficiente, el resultado presentado en [Martínez-Sanabria, 2006], el cual reduce de $m \left[\frac{n^2(m-1)}{2} + n(m-1) + \frac{n^3}{6} \right]$ a $m[3n + n^2]$ el costo del algoritmo standard para calcular el estimador jackknife para mínimos cuadrados lineales de rango completo.

Palabras Claves: Estimador jackknife, Mínimos cuadrados lineales, Rango completo, Rango deficiente.

Abstract

In this article, we extend to the linear least squares problem of rank deficient, the result given in [Martínez-Sanabria, 2006], which reduces from $m \left[\frac{n^2(m-1)}{2} + n(m-1) + \frac{n^3}{6} \right]$ to $m[3n + n^2]$ the standard algorithm cost of computing the jackknife estimator for the linear least squares problem of full range.

Key words: Jackknife estimator, Linear least squares problem, full range, rank deficient.

*Trabajo presentado en las *XV Jornadas en Estadística e Informática* de la ESPOL en Guayaquil, Ecuador, 2008. Los resultados previos a este trabajo se obtuvieron en el marco del proyecto de investigación *Cálculo Eficiente del Estimador Jackknife para Mínimos Cuadrados Lineales*, inscrito en la Vicerrectoría de Investigación de la Universidad del Valle.

**Profesor Titular, AA 25360, Departamento de Matemáticas, Universidad del Valle. *hector.martinez@correounivalle.edu.co*

***Profesora Titular, AA 25360, Departamento de Matemáticas, Universidad del Valle. *ana.sanabria@correounivalle.edu.co*

1. Introducción.

Los estimadores basados en técnicas de re-muestreo como el jackknife, por sus propiedades estadísticas [Efron, 1994], [Kovar-Rao-Wu, 1988], [Shao-Tu, 1996], son cada vez más usados, tanto en general, como en particular, en el problema de mínimos cuadrados lineales [Weber-Welsh, 1983], para reducir el sesgo de las estimaciones [Miller, 1974], y estimar varianzas [Wolter, 1985] e intervalos de confianza [Kleijnjen-et. al, 1987], principalmente. Además, en las dos últimas décadas, este tipo de métodos han ganado importancia debido a las facilidades computacionales de los nuevos tiempos. Pero, como paralelamente ha aumentado la dimensión de los problemas a resolver, las facilidades computacionales no eximen de la necesidad de buscar algoritmos más eficientes para los cálculos. En [Martínez-Sanabria, 2006], usando convenientemente propiedades básicas del álgebra lineal, se propone un algoritmo mucho más eficiente que el algoritmo standard para el cálculo de Estimador Jackknife para Mínimos Cuadrados Lineales (EJMCL), que funciona cuando el problema de estimación inicial es de rango completo.

En este artículo, proponemos una modificación al algoritmo propuesto en [Martínez-Sanabria, 2006], de tal manera que conserve la eficiencia sin requerir condición alguna sobre el problema inicial ni sobre los subproblemas involucrados en la estimación jackknife.

Para lograr este propósito, inicialmente, recordamos la definición del estimador jackknife para el problema de mínimos cuadrados lineales de rango completo, luego presentamos el algoritmo standard para el cálculo del EJMCL y los aportes, en este sentido, hechos por **Martínez y Sanabria** [Martínez-Sanabria, 2000] y [Martínez-Sanabria, 2006]. Posteriormente, sin

usar el supuesto de rango completo de la matriz inicial del Problema de Mínimos Cuadrados Lineales (PMCL), presentamos una nueva caracterización de la o las soluciones de los subproblemas de mínimos cuadrados (no necesariamente de rango completo), requeridas para el cálculo del EJMCL. Finalmente, con base en este resultado, proponemos la modificación al algoritmo planteado anteriormente, la cual es el objetivo central de este artículo.

2. Estimador Jackknife para Mínimos Cuadrados Lineales (EJMCL).

Como se planteó en [Martínez-Sanabria, 2000] y [Martínez-Sanabria, 2006], dado un parámetro θ y un estimador $T = t_m(Y_1, \dots, Y_m)$ de este parámetro, se puede construir otro estimador utilizando la técnica de jackknife, la cual consiste en corregir el estimador inicial con base en el promedio de los m estimadores que se obtienen al aplicar el procedimiento inicial de estimación a cada una de las submuestras que resultan al eliminar una observación de la muestra inicial.

Formalmente, dada Y_1, Y_2, \dots, Y_m , una muestra aleatoria de una población caracterizada por un parámetro θ y $T = t_m(Y_1, \dots, Y_m)$ un estimador de θ , se calculan los estimadores $T_i = t_{m-1}(Y_1, \dots, Y_{i-1}, Y_{i+1}, \dots, Y_m)$ para $i = 1, \dots, m$ y luego se calcula el estimador

$$\begin{aligned} T_J &= \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (mT - (m-1)T_i) \\ &= mT - (m-1) \sum_{i=1}^m \frac{T_i}{m} \quad (1) \\ &= T + (m-1) \left(T - \sum_{i=1}^m \frac{T_i}{m} \right) \end{aligned}$$

llamado estimador jackknife [Behar-Yepes, 1991], [Efron, 1994], [Miller, 1974], [Shao-Tu, 1996], [Kovar-Rao-Wu, 1988].

En particular, dado el conjunto de observaciones (a_i^T, α_i) , para $i = 1, \dots, m$, donde $a_i \in R^n$, $m \geq n$ y $\alpha_i \in R$, el problema de estimar x tal que $\alpha_i = a_i^T x$, por el método de los mínimos cuadrados, se reduce a encontrar \hat{x} tal que

$$\|A\hat{x} - y\|_2 = \min_{x \in R^n} \|Ax - y\|_2,$$

donde $A = [a_1, \dots, a_m]^T$ y $y = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)^T$, lo cual se conoce como el Problema de Mínimos Cuadrados Lineales (PMCL).

Así, el estimador jackknife para mínimos cuadrados es

$$x_J = m\hat{x} - (m-1) \sum_{i=1}^m \frac{\hat{x}_i}{m},$$

donde \hat{x}_i es tal que

$$\|A_i \hat{x}_i - y_i\|_2 = \min_{x \in R^n} \|A_i x - y_i\|_2,$$

con $A_i = [a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_m]^T$ y $y = (\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_m)^T$.

3. Algoritmos para calcular el EJMCL.

Por lo descrito en la sección anterior, el algoritmo para calcular el EJMCL se divide en tres pasos:

0. Dados $A \in R^{m \times n}$, $y \in R^m$,
1. Resolver $\min_{x \in R^n} \|Ax - y\|_2$, SALIDA: \hat{x} .
2. Para $i = 1, \dots, m$
Resolver $\min_{x \in R^n} \|A_i x - y_i\|_2$, SALIDA: \hat{x}_i .
3. Calcular $x_J = m\hat{x} - (m-1) \sum_{i=1}^m \frac{\hat{x}_i}{m}$.
SALIDA: x_J .

Si las matrices A y A_i , para $i = 1, \dots, m$, son todas de rango completo, los problemas de los

Pasos 1 y 2 se reducen a encontrar las soluciones únicas de las ecuaciones

$$A^T A x = A^T y \quad \text{y} \quad A_i^T A_i x = A_i^T y_i,$$

para $i = 1, \dots, m$. En otras palabras, dichos pasos se reducen a calcular

$$\hat{x} = (A^T A)^{-1} A^T y \quad \text{y} \quad \hat{x}_i = (A_i^T A_i)^{-1} A_i^T y_i,$$

para $i = 1, \dots, m$.

Para este caso, en [Martínez-Sanabria, 2000], los autores proponen un algoritmo que reduce el costo de los cálculos de \hat{x}_i , una vez \hat{x} está calculado.

Para $i = 1, \dots, m$.

- { Resolver $A_i^T A_i x = A_i^T y_i$ }
- Resolver $S z_i = a_i$.
- Calcular $\delta_i = a_i^T z_i$.
- Calcular $\sigma_i = 1 - \delta_i$.
- Calcular $\beta_i = z_i^T d - \alpha_i \delta_i$.
- Calcular $\hat{x}_i = \hat{x} + \left(\frac{\beta_i}{\sigma_i} - \alpha_i \right) z_i$.

SALIDA: \hat{x}_i .

Como soporte teórico de este algoritmo, con base en ciertas relaciones entre las matrices y los vectores involucrados [Martínez-Sanabria, 2000] y la propiedad de matrices invertibles dada por **Shermann-Morrison-Woodbury** [Dennis-Schnabel, 1983], **Martínez y Sanabria** obtuvieron el siguiente resultado.

Teorema 1 [Martínez-Sanabria, 2000] . *Dadas las matrices $A = [a_1, \dots, a_m]^T$ de orden $m \times n$ y $A_i = [a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_m]^T$ de orden $(m-1) \times n$, ambas de rango completo, y los vectores $y = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)^T \in R^m$ y $y_i = (\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_m)^T \in R^{(m-1)}$, la solución de $A_i^T A_i x = A_i^T y_i$ está dada por*

$$\hat{x}_i = \hat{x} + \left(\frac{z_i^T d_i}{\sigma_i} - \alpha_i \right) z_i,$$

donde \hat{x} es la solución de $A^T A x = A^T y$, z_i es la solución de $A^T A z = a_i$, $\sigma_i = 1 - a_i^T z_i$ y $d_i = A_i^T y_i$.

Más tarde, para fortalecer el resultado anterior, en [Martínez-Sanabria, 2006], los autores encontraron una caracterización del conjunto solución de $A_i^T A_i x = A_i^T y_i$, basada en la solución de $A^T A x = A^T y$, independientemente de si la matriz A_i es o no de rango completo.

Teorema 2. [Martínez-Sanabria, 2006] *Dada la matriz $A = [a_1, \dots, a_m]^T \in R^{m \times n}$ de rango completo y la solución \hat{x} de $A^T A x = A^T y$, donde $y = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)^T \in R^m$, si $\sigma_i = 1 - a_i^T z_i = 0$ y \hat{x}_i es una solución de $A_i^T A_i x = d_i$, entonces $\hat{x}_i = \hat{x} + \gamma z_i$ para algún $\gamma \in R$ y z_i la solución de $A^T A z = a_i$. (Además, se demuestra que si $\sigma \neq 0$, $\gamma = \frac{z_i^T d_i}{\sigma_i} - \alpha_i$)*

Este resultado, les permitió a **Martínez y Sanabria** implementar una ligera modificación del segundo paso del algoritmo propuesto en [Martínez-Sanabria, 2000], para seguir siendo eficientes en el cálculo del estimador jackknife para mínimos cuadrados lineales con la condición única que A sea de rango completo [Martínez-Sanabria, 2006]:

Para $i = 1, \dots, m$.

{ Resolver $A_i^T A_i x = A_i^T y_i$. }

- Resolver $S z_i = a_i$.

- Calcular $\delta_i = a_i^T z_i$.

- Calcular $\sigma_i = 1 - \delta_i$.

Si $\sigma_i \neq 0$,

{ Solución única }

$\beta_i = z_i^T d - \alpha_i \delta_i$.

$\gamma_i = \frac{\beta_i}{\sigma_i} - \alpha_i$.

Si no,

{ Escoja una de las infinitas soluciones }

$\gamma_i = 0$.

end si

$\hat{x}_i = \hat{x} + \gamma_i z_i$.

end para

SALIDA: \hat{x}_i .

Como este último algoritmo solo está garanti-

zando si la matriz A es de rango completo, nos vimos obligados a continuar con la búsqueda de resultados que nos permitieran una caracterización de la o las soluciones de $A_i^T A_i x = A_i^T y_i$, basada en una solución de $A^T A x = A^T y$, independientemente de si las matrices A y A_i son o no de rango completo. A continuación, presentamos los resultados de esta búsqueda.

4. Caracterización del conjunto solución de $A_i^T A_i x = A_i^T y_i$.

Lema. *Dada la matriz $A = [a_1, \dots, a_m]^T$ de orden $m \times n$ y una solución \hat{x} de $A^T A x = A^T y$, donde $y = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)^T \in R^m$, si $\sigma_i = 1 - a_i^T z_i = 0$, entonces $a_i^T \hat{x} - \alpha_i = 0$, donde z_i es una solución de $A^T A z = a_i$.*

Demostración: Si $S = A^T A$, $d_i = A_i^T y_i$, $A_i = [a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_m]^T \in R^{(m-1) \times n}$, $S_i = A_i^T A_i$, $S_i x_i = d_i$ y $y_i = (\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_m)^T \in R^{(m-1)}$, tenemos que, como $d = A^T y = d_i + \alpha_i a_i$, $S = S_i + a_i a_i^T$ (ver Lemas 1 y 2 en [Martínez-Sanabria, 2000]) y $S \hat{x} = d = d_i + \alpha_i a_i$, entonces $z_i^T S \hat{x} = z_i^T d_i + \alpha_i z_i^T a_i$. Además, como $S z_i = a_i$, se tiene que $a_i^T \hat{x} = z_i^T d_i + \alpha_i z_i^T a_i$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} a_i^T \hat{x} - \alpha_i &= z_i^T d_i + \alpha_i (z_i^T a_i - 1) \\ &= z_i^T S_i x_i + \alpha_i (z_i^T a_i - 1) \\ &= z_i^T (S - a_i a_i^T) x_i + \alpha_i (z_i^T a_i - 1) \\ &= z_i^T S x_i - z_i^T a_i a_i^T x_i + \alpha_i (z_i^T a_i - 1) \\ &= a_i^T x_i - z_i^T a_i a_i^T x_i + \alpha_i (z_i^T a_i - 1) \\ &= (1 - z_i^T a_i) a_i^T x_i + \alpha_i (z_i^T a_i - 1) \\ &= (1 - z_i^T a_i) (a_i^T x_i - \alpha_i), \end{aligned}$$

de donde resulta obvio que si $\sigma_i = 1 - z_i^T a_i = 0$, entonces $a_i^T \hat{x} - \alpha_i = 0$.

□

El Teorema 1 establece que si $\sigma_i = 1 - a_i^T z_i \neq 0$,

entonces A_i es de rango completo y

$$\widehat{x}_i = \widehat{x} + \left(\frac{z_i^T d_i}{\sigma_i} - \alpha_i \right) z_i .$$

Al igual que en [Martínez-Sanabria, 2006], veamos que, en caso que $\sigma_i = 0$, utilizando el Lema anterior, podemos determinar algunas soluciones de $A_i^T A_i x = A_i^T y_i$.

Teorema 3. *Bajo las mismas condiciones del Lema anterior, si $\sigma_i = 1 - a_i^T z_i = 0$, se tiene que $\widehat{x}_i = \widehat{x} + \gamma z_i$ es solución de $A_i^T A_i x = A_i^T y_i$, para todo $\gamma \in R$.*

Demostración: Usando la misma notación que en la demostración del Lema anterior, sea $\gamma \in R$,

$$\begin{aligned} S_i(\widehat{x} + \gamma z_i) &= (S - a_i a_i^T)(\widehat{x} + \gamma z_i) \\ &= S\widehat{x} + \gamma S z_i - a_i a_i^T \widehat{x} - \gamma a_i a_i^T z_i \\ &= d + \gamma a_i - a_i a_i^T \widehat{x} - \gamma a_i a_i^T z_i \\ &= d + \gamma a_i (1 - a_i^T z_i) - a_i a_i^T \widehat{x} . \end{aligned}$$

Usando la hipótesis $\sigma_i = 0$, por el Lema anterior, $a_i^T \widehat{x} = \alpha_i$ y por lo tanto

$$S_i(\widehat{x} + \gamma z_i) = d - a_i \alpha_i = d_i .$$

□

Para completar la caracterización de las soluciones de $A_i^T A_i x = d_i$, obtuvimos el siguiente resultado.

Teorema 4. *Bajo los supuestos del Lema anterior, si \widehat{x}_i es una solución de $A_i^T A_i x = d_i$, entonces $\widehat{x}_i = \widehat{x} + \gamma_i z_i$ para algún $\gamma_i \in R$ y z_i una solución de $A^T A x = a_i$. Además, si $\sigma_i = 1 - a_i^T z_i \neq 0$, entonces*

$$\gamma_i = \frac{a_i^T x - \alpha_i}{\sigma_i} . \quad (2)$$

Demostración: Usando la misma notación que en la demostración del Lema anterior, si

$$S_i \widehat{x}_i = d_i ,$$

entonces,

$$S \widehat{x}_i - a_i a_i^T \widehat{x}_i = (d - \alpha_i a_i) .$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} S \widehat{x}_i &= d - \alpha_i a_i + a_i a_i^T \widehat{x}_i \\ &= S \widehat{x} - \alpha_i a_i + a_i a_i^T \widehat{x}_i , \end{aligned}$$

y

$$S(\widehat{x}_i - \widehat{x}) = (a_i^T \widehat{x}_i - \alpha_i) a_i .$$

Así que

$$\widehat{x}_i - \widehat{x} = \gamma_i z_i ,$$

para algún $\gamma_i \in R$ y un z_i tal que $S z_i = a_i$. Como $\widehat{x}_i = \widehat{x} + \gamma_i z_i$ es solución de $S x_i = d_i$, entonces

$$(S - a_i a_i^T)(\widehat{x} + \gamma_i z_i) = d - \alpha_i a_i .$$

Y puesto que $S \widehat{x} = d$, entonces

$$\gamma_i S z_i - a_i a_i^T \widehat{x} - \gamma_i a_i a_i^T z_i = -\alpha_i a_i .$$

Ahora, como $S z_i = a_i$, se tiene que

$$\gamma_i (1 - a_i^T z_i) a_i = (a_i^T \widehat{x} - \alpha_i) a_i .$$

De aquí que $\gamma_i = \frac{a_i^T x - \alpha_i}{1 - a_i^T z_i}$, si $\sigma_i = 1 - a_i^T z_i \neq 0$ y, por el Lema anterior, γ_i será cualquier número real, si $\sigma_i = 0$ (ver Teorema 3).

□

Es de anotar que, si el problema original es de rango completo; es decir, S es invertible, este γ_i coincide con el escalar encontrado en [Martínez-Sanabria, 2000]. En este caso, $\widehat{x} = S^{-1} d = S^{-1} d_i + \alpha_i S^{-1} a_i$. Por lo tanto, $a_i^T \widehat{x} = a_i^T S^{-1} d_i + \alpha_i a_i^T S^{-1} a_i = z_i^T d_i + x_i a_i^T z_i$. Reemplazando este resultado en (2), tenemos que

$$\begin{aligned} \gamma_i &= \frac{z_i^T d_i + \alpha_i a_i^T z_i - \alpha_i}{\sigma_i} \\ &= \frac{z_i^T d_i - \alpha_i (1 - a_i^T z_i)}{\sigma_i} \\ &= \frac{z_i^T d_i}{\sigma_i} - \alpha_i . \end{aligned}$$

que es el escalar obtenido en el Teorema 1, demostrado en [Martínez-Sanabria, 2000].

5. Algoritmo modificado y generalizado para el cálculo del EJMCL.

Los resultados anteriores nos permiten implementar una ligera modificación del algoritmo propuesto en [Martínez-Sanabria, 2006] para seguir siendo eficientes en el cálculo del estimador jackknife para mínimos cuadrados lineales, aún en el caso que A sea de rango deficiente. Dicho algoritmo modificado y generalizado para calcular \hat{x}_i aparece a continuación.

Para $i = 1, \dots, m$.
 { Resolver $A_i^T A_i x = A_i^T y_i$. }
 - Resolver $Sz_i = a_i$.
 - Calcular $\delta_i = a_i^T z_i$.
 - Calcular $\sigma_i = 1 - \delta_i$.
 Si $\sigma_i \neq 0$,
 { Solución única }

$$\gamma_i = \frac{a_i^T \hat{x} - \alpha_i}{\sigma_i}$$

 Si no,
 { Escoja una de las infinitas soluciones }

$$\gamma_i = 0$$

 end si

$$\hat{x}_i = \hat{x} + \gamma_i z_i$$

 end para
 SALIDA: \hat{x}_i .

Al comparar este algoritmo con el propuesto en la Sección 5 de [Martínez-Sanabria, 2006], podemos concluir que la diferencia aparece por la posibilidad que existe que A sea de rango deficiente y por lo tanto que el PMCL inicial tenga infinitas soluciones. En este caso, con base en una solución del problema inicial, podemos calcular una solución de los subproblemas requeridos para la estimación de jackknife, simplemente calculando una solución de $A^T A z = a_i$

y un escalar apropiado (ver (2)).

Al igual que en [Martínez-Sanabria, 2006], si $\sigma_i = 0$ (subproblema de rango deficiente), el subproblema tiene infinitas soluciones, en donde sugerimos tomar como solución la misma que se tomo para el problema inicial ($\gamma_i = 0 \Rightarrow \hat{x}_i = \hat{x}$). En consecuencia, como se demostró en [Martínez-Sanabria, 2000], este algoritmo reduce el costo de solución de los subproblemas aunque no sean de rango completo, de $m \left[\frac{n^2(m-1)}{2} + n(m-1) + \frac{n^3}{6} \right]$ a $m[3n + n^2]$ el número de *flops* requeridos para el cálculo del estimador jackknife de mínimos cuadrados lineales (EJMCL) para un modelo lineal aún si este es de rango deficiente, siendo n el número de parámetros a estimar y m el tamaño de la muestra.

Es más, si no se necesitan los EMCL de cada una de las submuestras, se puede obtener el EJMCL sin calcular los EMCL, mediante la expresión

$$x_J = \hat{x} - \frac{m-1}{m} \sum_{i=1}^m \gamma_i z_i,$$

con la ventaja adicional de saber que algunos γ_i son cero, lo cual simplifica la sumatoria de la expresión anterior.

6 . Conclusiones

En este artículo, se ha caracterizado completamente el conjunto solución de los subproblemas de mínimos cuadrados lineales que resultan en el cálculo del estimador jackknife de mínimos cuadrados lineales de un modelo lineal, aún en el caso que éste sea de rango deficiente.

Este resultado permite modificar el algoritmo propuesto en [Martínez-Sanabria, 2006] para calcular el mencionado estimador, sin requerir que ninguno de los problemas involucrados (inicial o subproblemas) sean de rango comple-

to, manteniendo la misma eficiencia de cómputo.

Al igual que en [Martínez-Sanabria, 2000], este resultado permite hacer cálculos más eficientes siempre que el algoritmo que se utilice para resolver los diferentes subproblemas de mínimos cuadrados lineales requeridos por el estimador jackknife sea el mismo que se utilice para resolver el problema de mínimos cuadrados lineales inicial.

Queda como un reto para nosotros y nuestros lectores, desarrollar una teoría similar que permita caracterizar las soluciones de los subproblemas de mínimos cuadrados para el caso generalizado del estimador jackknife en el cual se

elimina más de una observación de la muestra inicial para plantear los subproblemas (*Estimador jackknife agrupado*).

7 . Agradecimientos

Nuestros agradecimientos al Departamento de Matemáticas de la Universidad del Valle por el apoyo logístico y económico tanto para el desarrollo como para la divulgación del presente trabajo. También, nuestro reconocimiento y agradecimientos al evaluador anónimo de la versión original de este trabajo por sus sugerencias para mejorar la presentación de los resultados.

Referencias

- [Behar-Yepes, 1991] **Behar, R. y Yepes, M.** (1991) *Sobre algunas técnicas de remuestreo: El método de jackknife*. Heurística, **No 6**, Págs. 49-58
- [Dennis-Schnabel, 1983] **Dennis, J.E. & Schnabel, R.B.** (1983) *Numerical methods for unconstrained optimization and nonlinear equations*. Prentice Hall, New Jersey, USA.
- [Efron, 1994] **Efron, B.** (1994) *The Jackknife, the Bootstrap and Other Resampling Plans* CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics, No. 38, Sixth Edition, SIAM, Philadelphia, PA, USA.
- [Kleijuen-et. al, 1987] **Kleijuen, JPC., Karremans, P. Oortwinj, W., Van Groenendaal, W.** (1987) *Jackknifing estimated weighted least squares*, Communications in Statistics: Theory and Methods **v.16**, Págs. 747-764.
- [Kovar-Rao-Wu, 1988] **Kovar, J., Rao, J. & Wu, CFJ.** (1988) *Bootstrap and other methods to measure errors in survey estimates*, Canadian Journal of Statistics **16**, Pág. 26-45.
- [Martínez-Sanabria, 2000] **Martínez, H.J. y Sanabria A.M.** (2000) *Cálculo eficiente del estimador jackknife para mínimos cuadrados lineales bajo condiciones de unicidad*. Matemáticas: Enseñanza Universitaria, **Vol VIII, Nos 1 y 2**, Págs. 29-43.

- [Martínez-Sanabria, 2006] **Martínez, H.J. y Sanabria A.M.** (2006) *Cálculo eficiente del estimador jackknife para mínimos cuadrados lineales de Rango Completo*. Revista de la Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, **Vol XXX**, Pág. 361-365.
- [Miller, 1974] **Miller, R.G.** (1974) *The Jackknife: a review*. Biometrika **61**, Pags. 1-15.
- [Shao-Tu, 1996] **Shao, J. and Tu, D.** (1996) *The Jackknife and the Bootstrap*, 2nd Printing, Springer Series in Statistics, New York. USA.
- [Weber-Welsh, 1983] **Weber, N.C. & Welsh, A.H.** (1983) *Jackknifing the general linear model*, Australian Journal of Statistics **25, No. 3**, Pags. 425-436.
- [Wolter, 1985] **Wolter, K.M.**, (1985) *Introduction to variance estimation*, First Edition, Statistics for Social and Behavioral Science, Springer, New York, USA.

EVALUACIÓN DE LA CASCARILLA DE HIGUERILLA COMO POSIBLE ADSORBENTE DE CONTAMINANTES FENÓLICOS EN FASE ACUOSA

Luisa Fernanda Navarrete Rodríguez, Zurelly Rodríguez Parra*

RESUMEN

Navarrete Rodríguez L.F., Z. Rodríguez Parra: Evaluación de la cascarilla de higuera como posible adsorbente de contaminantes fenólicos en fase acuosa. *Rev. Acad. Colomb. Cienc.* **36** (141): 415-420, 2012. ISSN 0370-3908.

Con el propósito de brindar valor agregado a la cascarilla de higuera como bio - adsorbente para el tratamiento de aguas residuales, se realizaron ensayos preliminares de retención en fase acuosa de fenol y p-nitrofenol a una temperatura de 25°C, considerando factores tales como concentraciones iniciales (30 – 60 ppm) y pH; los datos obtenidos fueron analizados de acuerdo a los modelos de Langmuir y Freundlich observando cantidades retenidas que van desde 7 hasta 15 ppm del compuesto en el material sin tratamiento alguno.

Palabras claves: cascarilla, higuera, contaminantes, aguas.

ABSTRACT

An investigation was initiated to evaluate the potential use of castor seed shell as a bio-adsorbent for wastewater treatment to reduce the adverse environmental impacts. Preliminary tests were conducted in aqueous phase retention phenol and p-nitrophenol at a temperature of 25° C, considering factors such as initial concentrations (30 - 60 ppm), pH and contact time. The data obtained were analyzed using Langmuir and Freundlich models, which showed 7 to 15 ppm of phenol and p-nitrophenol were retained of the compound in the untreated material.

Key words: seed shell, castor, wastewater.

Introducción

El agua es uno de los recursos naturales más abundantes en la tierra, aunque su disponibilidad para consumo se limita cada vez más debido a cambios climáticos, deforestación, crecimiento de la población y principalmente al incremen-

to en la industrialización, lo cual genera graves problemas de contaminación que proceden de fuentes puntuales como son los compuestos fenólicos: materia prima y/o productos básicos de las refinerías de petróleo, plantas de coque, metalurgia, galvanoplastia, curtiembres, fabricación de productos químicos, medicamentos, colorantes, insecticidas, pesti-

* Facultad de Ingeniería, Universidad Libre. Bogotá – Colombia. luisaf.navarrete@unilibrebog.edu.co

cidas, plásticos entre otros (Kujawski, 2004; Pérez, 2009; Agoubordea, 2009). Estos contaminantes son altamente tóxicos, no se degradan fácilmente, produciendo efectos adversos sobre ecosistemas terrestres y marinos.

Entre los diferentes métodos disponibles para remover contaminantes orgánicos e inorgánicos del agua se encuentran biodegradación anaerobia y aerobia, oxidación química con ozono, precipitación química, filtración por membrana, extracción con solventes, reducción electrolítica, adsorción con resina de intercambio iónico y carbón activado sin embargo, la utilización de dichos métodos implica altos costos y, en algunos casos requiere de pretratamientos y/o tratamientos adicionales. La búsqueda constante de alternativas ha centrado la atención en la naturaleza misma, contemplando el uso de materiales biológicos “biomasa” en la retención de contaminantes y tecnologías de recuperación con la posibilidad de regenerar dicho material de forma eficiente y rentable (Akçay, 2004; Alvarez, 2005; Sponza, 2005; Park, 2007; Chandra, 2003; Batista, 2009).

La biomasa básicamente es materia orgánica originada por desastres naturales y procesos antropogénicos tales como madera de bosques, residuos de procesos industriales, agrícolas y forestales; incluye igualmente componentes naturales derivados del crecimiento de la tierra y vegetación húmeda generados a través de fotosíntesis o de la digestión de alimentos tanto de animales como de seres humanos.

La capacidad de adsorción de la biomasa específicamente material lignocelulósico se debe a su naturaleza química superficial; variedad de compuestos que contienen como grupos funcionales hidroxilos, carboxilos, aminas entre otras, los cuales son capaces de retener el ion de interés, removiendo un amplio espectro de compuestos orgánicos e inorgánicos que se encuentran usualmente en las aguas residuales (Oladoja, 2008; Lesmana, 2009; Jianfeng, 2010).

En el presente trabajo se evalúa de forma preliminar el uso de la cascarilla de higuera como bioadsorbente, el cual a futuro puede ser empleado como tratamiento complementario en la disminución del impacto ambiental creado por la utilización de contaminantes fenólicos.

Experimental

Materiales y Reactivos: se emplea cascarilla de higuera, proveniente de la región de Duitama – Boyacá, cuya composición en lignina y celulosa corresponden a 57,6 % y 42,4 % respectivamente.

Soluciones acuosas de fenol y p-nitrofenol a partir de reactivos analíticos marca Merck. Se emplean soluciones de

NaOH y HCl en concentraciones 0,1 y 0,01 M, para ajustar el pH al valor deseado.

- *Pretratamiento:* la cascarilla se lava con agua para luego someterla a calentamiento a temperatura de 100 °C durante un periodo de tiempo de 5 horas, por último se realiza una reducción y homogenización de tamaño de partícula a 2 mm.

- *Propiedades superficiales:* la determinación de los grupos funcionales superficiales oxigenados se cuantifican por el método Boehm (Salame, 2003).

- *Adsorción fase acuosa:* los ensayos de adsorción se realizan a una temperatura de 25°C, previa determinación de las curvas de calibración y tiempos de equilibrio, empleando volúmenes de soluciones fenólicas de 50,0 mL en concentraciones que van desde 5 hasta 80 mg/L en valores de pH de 6,0, 10,0 y cantidades de 0,5000g del adsorbente. Las concentraciones se miden con un espectrofotómetro UV-VIS Spectroquant Pharo 300 Merck, a la longitud de onda de máxima absorción, las cuales corresponden a 274 y 346 nm para fenol y p-nitrofenol respectivamente. Los datos de adsorción se analizan empleando los modelos teóricos de Langmuir y Freundlich.

Resultados y Discusión

- *Pretratamiento:* reduce al máximo posibles interferencias debidas a la presencia de materia extraña y/o heterogeneidad de tamaño y por ende área superficial disponible, lo cual permite establecer la capacidad adsorbente natural del material lignocelulósico a emplear.

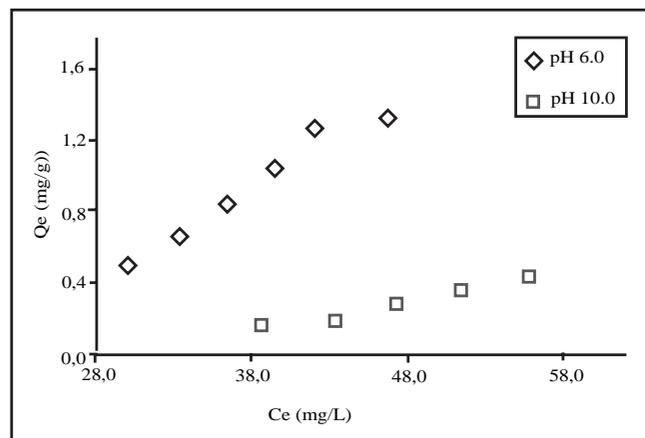
- *Propiedades superficiales:* la determinación de la acidez y basicidad total superficial de la muestra se puede apreciar en la **tabla 1**, en donde grupos funcionales tales como carboxilos, fenoles entre otros, se encuentran en mayor concentración, lo cual sugiere que la capacidad de retención que pueda llegar a presentar el material adsorbente se debe básicamente a posibles interacciones entra moléculas de adsorbato y grupos funcionales de superficie de carácter ácido.

Tabla 1: caracterización preliminar cascarilla de higuera

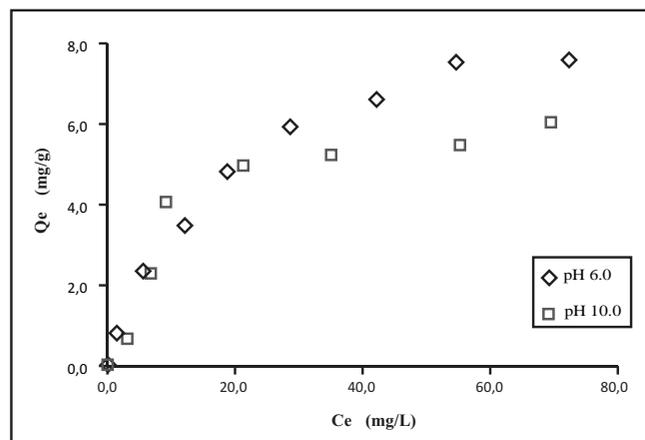
Característica	
Tamaño partícula (mm)	2,0
Acidez total (mequiv./g)	0.61
Basicidad total (mequiv./g)	0.39

- *Adsorción:* fenol y derivados cuando se encuentran en medio ácido son especies protonadas, mientras que en medio básico en su mayoría se hallan en forma aniónica, la conversión de una especie a otra proporciona un par adicional

de electrones que se encuentran disponibles al sistema conjugado del anillo aromático; el comportamiento del fenol y p-nitrofenol en el proceso de adsorción bajo influencia de la variación del pH de la solución, se refleja en las respectivas isotermas **gráficas 1a y 1b**.



a) Fenol



b) p-nitrofenol

Gráfica 1: Isotermas adsorción fenoles

En la **gráfica 1a** se observa que el pH modifica la cantidad de soluto retenido; el fenol con un pK_a de 9,96 predomina en forma molecular, cuando el pH de la solución se encuentra por debajo de dicho valor es decir a pH 6.0, se produce un incremento en la cantidad de fenol retenido, mientras que a pH de 10.0 la cantidad del compuesto es menor debido básicamente a que la forma disociada del fenol es más soluble en solución.

En solución acuosa el p-nitrofenol sigue los mismos principios del fenol **gráfica 1b** sin embargo, en los resultados obtenidos se aprecia una disminución considerable en la cantidad adsorbida, hecho que se atribuye directamente a la influencia que tiene la presencia del grupo nitro como desactivante del anillo aromático.

En la **tabla 2** se resumen los parámetros de linealización de los datos de adsorción, aplicando los modelos de Langmuir y Freundlich.

Al comparar la correlación lineal entre los dos modelos aplicados, se puede apreciar que ésta es ligeramente mayor para Freundlich, lo cual es un índice que el proceso de adsorción de los fenoles sobre la cascarilla de higuierilla como adsorbente se lleva a cabo preferencialmente en superficies heterogéneas

En el modelo de Freundlich el valor de la constante K_F es un índice de la capacidad de adsorción, la cual en general es mucho mayor para las soluciones que se encuentran a pH 6.0. En cuanto al valor de $1/n$ es una medida de la heterogeneidad de la superficie del sólido; valores cercanos a 0 indican superficies heterogéneas (Ahmaruzzaman, 2005; Ayranci, 2005), cuando $1/n$ toma valores menores que 1, significa que el proceso de adsorción es favorable en dichas superficies, hecho que resulta apreciable para el caso del fenol especialmente a un pH de solución en el que es menor que el pK_a del compuesto.

Tabla 2: parámetros linealización modelos Langmuir y Freundlich para fenol y p-nitrofenol

Compuesto	pH	Langmuir			Freundlich		
		Qmax	b	R	KF	1/n	R
Fenol	6.0	8.74	0.0824	0.959	0.792	0.571	0.975
	10.0	6.94	0.0847	0.905	0.449	0.667	0.909
p-nitrofenol	6.0	0.714	0.0146	0.888	5.23×10^{-4}	2.04	0.965
	10.0	NA	NA	NA	1.39×10^{-6}	3.12	0.976

Tal vez el parámetro más importante de comparación en el modelo de Langmuir es el valor de Q_{\max} , que estima la capacidad de adsorción del adsorbato, el cual para el fenol resulta ser considerablemente mayor en comparación con el p-nitrofenol, debido probablemente a la acidez misma del soluto.

Conclusiones

Los resultados preliminares obtenidos muestran que la cascarilla de higuera presenta un gran potencial como adsorbente natural alternativo de compuestos fenólicos en medio acuoso, en donde la adsorción se lleva a cabo sobre superficies heterogéneas, siguiendo básicamente el modelo de Freundlich.

Referencias Bibliográficas

- Agoubordea, L., Navia, R. 2009. Heavy metals retention capacity of a non-conventional sorbent developed from a mixture of industrial and agricultural wastes. *Journal of Hazardous Materials* **167**, 536–544.
- Ahmaruzzaman, M., Sharma, D.K. 2005. Adsorption of phenols from wastewater. *J. Colloid Interface Sci.* **287**, 14–24.
- Akcay, M., Akcay, G. 2004. The removal of phenolic compounds from aqueous solutions by organophilic bentonite. *Journal of Hazardous Materials* **B113**, 189–193.
- Alvarez, P., García-Araya, J.F., Beltrán, F.J., Masa, F.J., Medina, F. 2005. Ozonation of activated carbons: Effect on the adsorption of selected phenolic compounds from aqueous solutions. *Journal of Colloids and Surface Science* **283**, 503–512.
- Ayranci, E., Duman, O. 2005. Adsorption behaviors of some phenolic compounds onto high specific area activated carbon cloth. *Journal of hazardous material* **124**, 125–132.
- Batista, A., et al. 2009. Biosorption of Cr(III) using *in natura* and chemically treated tropical peats. *Journal of Hazardous Materials* **163**, 517–523.
- Chandra, K., Kamala, C., Chary, N., Anjaneyulu, Y. 2003. Removal of heavy metals using a plant biomass with reference to environmental control. *Int. J. Miner. Process* **68**, 37–45.
- Jianfeng, S., et al. 2010. The prediction of elemental composition of biomass based on proximate analysis. *Energy Conversion and Management* **51**, 983–987.
- Kujawski, W., et al. 2004. Removal of phenol from wastewater by different separation techniques. *Desalination* **163** 287–296.
- Lesmana, S., Febriana, N., Soetaredjo, F., Sunarsob, J., Ismadjia, S. 2009. Studies on potential applications of biomass for the separation of heavy metals from water and wastewater. *Biochemical Engineering Journal* **44**, 19–41.
- Oladoja, N., Aboluwoye, C., Oladimeji, Y., Ashogbon, A., Otemuyiwa, I. 2008. Studies on castor seed shell as a sorbent in basic dye contaminated wastewater remediation. *Desalination* **227**, 190–203.
- Park, H., et al. 2007. Removal of heavy metals using waste eggshell. *Journal of Environmental Sciences* **19**, 1436–1441.
- Pérez, A., et al. 2009. Biosorption of chromium (III) by orange (*Citrus citensis*) waste: Batch and continuous studies. *Chemical Engineering Journal* **155**, 199–206.
- Salame, I., Bandoz, T. 2003. Role of surface chemistry in adsorption of phenol on activated carbons. *Journal of Colloid and Interface Science* **264**, 307–312.
- Sponza, D., Selcuk, Ö. 2005. p-nitrophenol removal in a sequential anaerobic migrating blanket reactor (AMBR) / aerobic completely stirred tank reactor (CSTR) system. *Process Biochemistry* **40**, 1679–1691.