

# REVISTA DE LA ACADEMIA COLOMBIANA de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales

LA ACADEMIA ES ÓRGANO CONSULTIVO DEL GOBIERNO NACIONAL

VOLUMEN XXXIV

DICIEMBRE DE 2010

NÚMERO 133

DIRECTORA DE LA REVISTA: MARGARITA PEREA DALLOS



## CONTENIDO - CONTENTS

	Pág.		Pág.
<b>Antropología (Anthropology)</b>		<b>Geología (Geology)</b>	
Evolución y tamaño dental en poblaciones humanas de Colombia [Evolution of Dental Size in Human Populations from Colombia] <i>José V. Rodríguez C., Clemencia Vargas Vargas</i> .....	423	Algunos intentos de comprensión del origen geológico de la Sierra Nevada de Santa Marta durante el siglo XIX: los casos de Joaquín Acosta y Jorge Isaacs [Some attempts at a geological explanation for the origin of the Sierra Nevada de Santa Marta in the Nineteenth Century: the naturalists Joaquín Acosta and Jorge Isaacs] <i>Pablo Antonio Castro López, Agustín Cardona Molina</i> .....	497
<b>Botánica (Botany)</b>		<b>Matemáticas (Mathematics)</b>	
Nuevas especies colombianas de <i>Espeletiopsis</i> Cuatrec. y de <i>Espeletia</i> Mutis ex Humb. & Bonpl. (Asteraceae, Heliantheae, Espeletiinae) [Taxonomic new species of <i>Espeletiopsis</i> Cuatrec. and <i>Espeletia</i> Mutis ex Humb. & Bonpl. (Asteraceae, Heliantheae, Espeletiinae) from Colombia] <i>Santiago Díaz-Piedrahita, Betsy Viviana Rodríguez-Cabeza</i> ....	441	Productos fibrados de extensiones de Kummer y Artin Schreier [Artin-Schreier and Kummer extensions fibered products] <i>Adriana Alexandra Albarracín Mantilla, Álvaro Garzón Rojas</i> ....	513
Plantas de coca en Colombia. Discusión crítica sobre la taxonomía de las especies cultivadas del género <i>Erythroxylum</i> P. Browne (Erythroxylaceae) [Colombian coca plants. A critical discussion on taxonomic aspects of cultivated <i>Erythroxylum</i> species (Erythroxylaceae)] <i>Aida Galindo Bonilla, José Luis Fernández-Alonso</i> .....	455	New implicit multistep method for ODE's [Nuevo método implícito multipaso para ODE's] <i>Gustavo Boroni, Pablo Lotito, Alejandro Clause</i> .....	521
<i>Aristolochia pentandra</i> (Aristolochiaceae) in Colombia: biogeographic implications and proposed synapomorphies between the pentandrous species of <i>Aristolochia</i> and its South American sister group [ <i>Aristolochia pentandra</i> (Aristolochiaceae) in Colombia: Implicaciones biogeográficas y sinapomorfías propuestas entre las especies pentandras de <i>Aristolochia</i> y su grupo hermano en Sur América] <i>Favio González, Héctor Eduardo Esquivel, Gloria Andrea Murcia, Natalia Pabón-Mora</i> .....	467	Asymptotic behaviour of the Jacobi-Sobolev-type orthogonal polynomials. A non diagonal case [Comportamiento asintótico de polinomios ortogonales del tipo Jacobi-Sobolev. Un caso no diagonal] <i>Herbert Dueñas, Luis Garza</i> .....	529
<b>Física (Physics)</b>		A note on the Cauchy problem of fuzzy differential equations [Una nota sobre el problema de Cauchy para ecuaciones diferenciales difusas] <i>Elder de Jesús Villamizar, William González Calderón</i> .....	541
Un modelo inflacionario sin inflatones [An Inflationary Model Without Inflatons] <i>Gabriel Gómez, Yeizon Rodríguez</i> .....	479	<b>Vida Académica</b> Informe sobre las actividades desarrolladas durante el año académico 2009-2010 .....	553
		<b>Índice general del Volumen XXXIV, año 2010</b> .....	561
		<b>Constitución de la Academia</b> (Members of the Academy) .....	567
		<b>Publicaciones de la Academia</b> (Publications of the Academy) .....	571

# EVOLUCIÓN Y TAMAÑO DENTAL EN POBLACIONES HUMANAS DE COLOMBIA

José V. Rodríguez C.<sup>1</sup>, Clemencia Vargas Vargas<sup>2</sup>

## Resumen

**Rodríguez C., J. V., C. Vargas Vargas:** Evolución y tamaño dental en poblaciones humanas de Colombia. Rev. Acad. Colomb. Cienc. **34** (133):423-439, 2010. ISSN 0370-3908.

Se estudian las principales tendencias evolutivas en el tiempo y el espacio del tamaño dental (diámetros MD y VL de la corona) de poblaciones colombianas prehispánicas y contemporáneas mediante análisis multivariado (discriminante, componentes principales y conglomerados jerárquicos). Las muestras más antiguas (Tequendama, Checua) son las más grandes, las que hemos denominado Precerámico Temprano. El grupo precerámico tardío (Aguazuque) de la sabana de Bogotá fechado hacia el II milenio a. C. evidencia un marcado proceso de reducción en el tamaño total (TS) de los dientes de 11,9%, que se relaciona con drásticos cambios ambientales y del patrón de subsistencia, con una mayor inclusión de tubérculos de altura en la dieta alimenticia. En el Valle del Cauca entre el período Formativo (500 a.C. a 500 d.C.) y el Tardío (800 d.C. a 1600 d.C.) se evidencia igualmente una reducción dental de 8,5%. Durante el Tardío el tamaño dental se estabiliza y con el aporte hispánico en el siglo XVI se reporta una nueva reducción del tamaño dental en los mestizos de 4,0%. Comparativamente los muiscas se aproximan a Mesa de Los Santos (posiblemente guane) y valle del Magdalena; los dientes más pequeños se hallan en mestizos (Bogotá), Aguazuque y Valle Tardío; los más grandes en Tequendama, Valle Temprano, Cocuy y Silos. Comparados con grupos de Asia y Australia los análisis comparativos odontométricos indican mayor afinidad con el noreste de Asia y un distanciamiento significativo con relación al sureste de Asia. Se plantea que las presiones selectivas locales generaron un proceso micro evolutivo en los descendientes de las poblaciones originales del Noreste de Asia, dando lugar a una amplia diversidad poblacional. Se descarta cualquier relación evolutiva entre los paleoamericanos y las poblaciones macrodentes de Australo-Melanesia.

**Palabras clave:** odontometría, evolución, cambio ambiental, patrones de subsistencia, orígenes americanos.

1 Profesor Titular Dpto. de Antropología Universidad Nacional de Colombia, Miembro Correspondiente Academia Colombiana de Ciencias Exactas Físicas y Naturales.

2 Profesora Asociada Facultad de Odontología Universidad Nacional de Colombia.

### Abstract

Tooth size of 12 precolumbian and one contemporary samples were examined for evidence of their sexual and population variation. Population of Aguazuque circa II millennia B.C. show a dramatic reduction of tooth size about 11,9%, that may be explained by the change in the pattern of subsistence. Comparisons show striking sexual and intergrupal differences in total size (TS) of the crown teeth, especially with respect to populations of Australia-Melanesia.

**Key words:** tooth size, evolution, pattern of subsistence.

### 1. La odontometría en los estudios poblacionales

Las dimensiones dentales se han empleado en diversos estudios de la Antropología Dental tendientes a observar el pasado y presente de las poblaciones humanas, sus tendencias evolutivas, entre ellas la posición filogenética de *Homo antecessor* con relación al *Homo heidelbergensis* (Bermúdez *et al.*, 1997), o del Neandertal con el *Homo sapiens sapiens*, en la discusión sobre su continuidad o desaparición (Brace, 1984, 1986; Brace *et al.*, 1991; Kieser, 1990; Zoubov & Jaldeeva, 1989, 1993). También para analizar las relaciones biológicas entre diferentes poblaciones prehispánicas (Corruccini, 1972; Perzigian, 1976; Scott, 1979) e indígenas contemporáneos (Harris & Nweeia, 1980). Quizás la mayor aplicación ha sido la del estudio del dimorfismo poblacional y sexual en los procesos de identificación humana (Rodríguez, 2003).

Estas aplicaciones se apoyan en la ventaja que tienen los dientes al conservarse muy bien en el registro fósil homínido, y porque que las dimensiones dentales están influenciadas genéticamente con poca incidencia del medio ambiente (Towsend & Brown, 1978); por consiguiente determinados diámetros son característicos de ciertas poblaciones, lo que permite su diferenciación. En la identificación humana se aprovecha la ventaja de la erupción temprana de los dientes permanentes, cerca de los 6 años de edad, posibilitando su uso en individuos infantiles, algo difícil de emplear con los huesos largos. Esta utilidad se apoya en el hecho de que el fenotipo de un individuo es el resultado de la combinación de características físicas y fisiológicas expresadas como resultado de la interacción de la herencia y el medio ambiente. Sin embargo, algunos factores pueden alterar las dimensiones dentales como la elevada presencia de flúor durante la lactancia materna, algunas enfermedades genéticas, entre ellas la sífilis congénita, que deforma incisivos (con forma de barril) y molares (con forma de mora), como también el desgaste dental ya sea por abrasión, atrición o bruxismo. En general se plantea que las dimensiones dentales son el resultado de la acción de una variedad de genes ubicados en varios cromosomas (Hillson, 2002: 80).

Sobre la incidencia de los cambios en los patrones de subsistencia en la configuración de las arcadas y piezas dentales, es interesante traer a colación la hipótesis de la “atracción condilar” del español José Antonio Valverde (Arsuaga *et al.*, 2001: 60), según la cual, existe una relación funcional entre el tamaño de la arcada dentaria y el incremento de la potencia de trituración (en los consumidores de granos), dando lugar al acercamiento de los molares a los cóndilos; al contrario, los caninos se alejan del cóndilo (repulsión condilar) cuando se trata de incrementar la rapidez prensora, configurando dientes anteriores grandes y mayor prognatismo. Estas modificaciones tendrían relación con adaptaciones de la mano y de la posición bípeda en la manipulación de objetos pequeños. Por esta razón los parántropos poseían unos molares más grandes como parte de su adaptación a una dieta granívora. En los homínidos de nuestra especie se produjo una reducción del brazo de la resistencia, retrocediendo los molares, acercándose a los cóndilos.

Respecto al dimorfismo sexual, así como existen diferencias en el tamaño corporal en distintos hominoideos (cerca de 95% en gorilas, 75% en orangutanes y 19% en chimpancés), en los humanos oscila entre 4-10%, según la parte corporal que se evalúe. Para el caso de los dientes el dimorfismo es menor, oscilando entre 40% en gorilas hasta casi nulo en gibones. En las poblaciones humanas varía entre 3% en incisivos hasta 6% en caninos, especialmente en cuanto al diámetro vestibulo-lingual (Hillson, 2002: 81).

Habitualmente los estudios odontométricos se han encaminado a analizar las principales tendencias evolutivas en el ámbito de la gracilización y reducción (Brace *et al.*, 1991; Kieser, 1990), aunque también para establecer diferencias étnicas (Lavelle, 1984). Para tal efecto se han planteado varios índices que dan cuenta de la totalidad de las dimensiones dentales (*total size*, TS), consistente en la sumatoria de las áreas seccionales de cada clase de diente (*cross-sectional areas*), lo que facilita las comparaciones generales (Brace *et al.*, 1991: 37). Esto nos ha permitido establecer que durante el proceso evolutivo la tendencia

general ha sido la de la reducción del tamaño dental, donde la TS de los australopitecinos era de 2000 mm<sup>2</sup>, decreciendo a 1600 en *Homo erectus*, 1500 en neandertal, a 1429 en Australia del Sur y 1150 en europeos contemporáneos (Brace et al., 1991: 49). Esta tendencia se ha acelerado con el surgimiento del *Homo sapiens sapiens*, hace cerca de 40.000 años, y durante el Neolítico, hace aproximadamente 9.000 años, gracias a las innovaciones tecnológicas para el procesamiento de alimentos, entre ellas el uso de artefactos líticos para machacar y triturar en el primer caso, y a la introducción de la alfarería, para el segundo, produciendo una tasa de reducción del 1% por 1000 años. La explicación de este fenómeno se relaciona con el relajamiento de las fuerzas selectivas que mantienen la esencia dental (Brace et al., 1991: 48), al “probable efecto mutacional” (Calcagno & Gibson, 1988), al “efecto mutacional acumulado” que desajustó los sistemas correlacionados durante la ontogénesis (reduciendo la velocidad de crecimiento de los dientes), o “selección negativa” por enfermedades dentales (apiñamiento y caries) (Zoubov & Jaldeeva, 1989: 206), o al proceso adaptativo a un nuevo modo de vida asociado a la intensificación de la agricultura (Calcagno & Gibson, 1991; Christiensen, 1999; Schiulli & Mahaney, 1991).

En América los estudios odontométricos han sido de gran utilidad en la discusión sobre los orígenes de los paleoamericanos pues evidencian diferencias significativas con relación a las poblaciones macrodentes de Aus-

tralia y Sureste de Asia (Persigian, 1976). En Colombia han sido pocas las investigaciones adelantadas con fines comparativos (Correal et al., 2003; Harris & Nweeia, 1980; Pinzón & Rojas, 2006; Rodríguez, 2003; Vargas, 2010), que den cuenta de las tendencias evolutivas en el aparato masticatorio y su relación con los cambios en los patrones de subsistencia.

El presente reporte tiene como objetivo abordar la problemática de la incidencia de los cambios ambientales y de patrón de subsistencia en las dimensiones dentales de las poblaciones prehispánicas, y el impacto de la conquista europea en el proceso de mestizaje dental.

2. Los grupos analizados

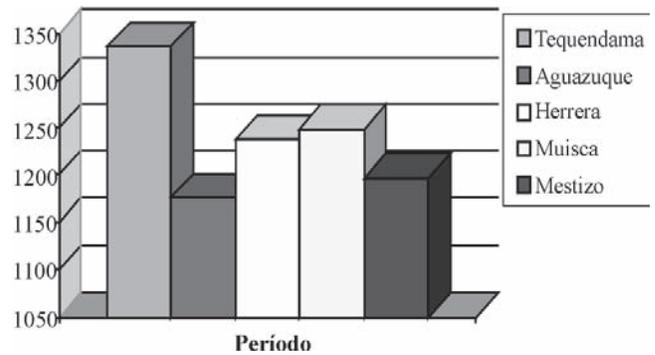


Figura 1. Variación temporal del tamaño dental (TS) en los Andes Orientales.

Tabla 1. Áreas de las clases dentales y total (TS) en grupos colombianos.

Grupo	Cronología	No.	AUM	ALM	AUP	ALP	AUC	ALC	AUI	ALI	TS
Tequendama	5000-3500 a. C.	28	372,0	382,0	146,5	122,2	66,4	60,0	117,0	68,9	1335,0
Aguazuque	3500-750 a. C.	42	322,0	326,8	125,7	105,8	69,6	53,0	106,0	67,1	1176,0
Herrera	750 a. C. 800 d. C.	16	336,6	366,0	121,0	113,1	67,2	51,8	110,0	72,8	1238,5
Muisca Sogamoso	300-1600 d. C.	206	342,8	363,4	129,0	114,1	68,7	56,1	114,0	68,2	1256,3
Muisca Bogotá	800-1600 d. C.	120	344,7	356,6	129,5	114,8	68,8	54,0	112,0	66,8	1247,2
Muisca Tunja	800-1600 d. C.	50	340,0	358,1	130,7	112,5	68,0	51,8	113,0	66,9	1241,0
Los Santos	800-1600 d. C.	54	344,4	367,4	137,3	115,3	64,0	54,9	108,0	67,2	1258,5
Cocuy	350-1600 d. C.	24	334,8	362,0	147,3	118,8	72,2	53,2	116,0	68,1	1272,4
Silos	800-1600 d. C.	10	346,1	361,9	142,2	126,4	66,4	56,6	117,0	66,8	1283,4
Valle Temprano	500 a. C. 500 d. C.	94	355,3	366,7	136,3	120,4	71,3	56,7	114,0	71,5	1292,2
Valle Tardío	800-1600 d. C.	23	310,0	367,0	114,0	104,6	63,1	51,0	106,0	67,0	1182,7
Valle del Magdalena	800-1600 d. C.	15	350,5	354,0	136,3	111,0	67,0	51,5	109,0	69,6	1248,9
Mestizo	1985 d. C.	38	324,1	331,6	127,0	114,3	67,9	55,2	106,0	71,4	1197,5

Las muestras analizadas son las mismas empleadas en el estudio de la diversidad morfológica dental de la tesis doctoral de Clemencia Vargas (2010), que incluye tres grupos muisca (Bogotá, Sogamoso, Tunja) (**Silva**, 1945; **Rodríguez**, 1999, 2007); tres del área chibcha del norte de los Andes Orientales (Silos, Cocuy, Los Santos) (**Rodríguez**, 1999, 2007); una serie del período Herrera de Madrid y Duitama (**Rodríguez & Cifuentes**, 2005); dos precerámicas tempranas de Tequendama y Checua integradas por ser contemporáneas (**Correal & Van der Hammen**, 1977; **Groot**, 1992) y tardía de Aguazuque (**Correal**, 1987, 1990); dos del Valle del Cauca (Temprano, Tardío) (**Rodríguez**, 2005); uno del Valle del Magdalena y uno mestizo de Bogotá (fosa común del cementerio del Sur) (**Rodríguez**, 2003). Infortunadamente, algunas series no son muy grandes y el grupo femenino está integrado por unos pocos individuos, lo que impide observar la variación sexual y apreciar de manera integral las relaciones biológicas de las poblaciones representadas, sus tendencias evolutivas y las modificaciones sufridas durante el proceso de mestizaje. Con el fin de ampliar la representatividad de las muestras, se fusionaron las series muisca en una sola, las tres del norte de la cordillera Oriental (Cocuy, Silos, Los Santos) en una denominada Chibchas septentrionales y las dos del Valle del Cauca en una sola muestra regional.

### 3. Las variables empleadas

De cada diente sano permanente se tomaron los diámetros mesodistal (MD) y vestibulo-lingual (VL) de la corona con un calibrador Siber Hegner (odontómetro), con décimas de aproximación (**Zoubov**, 1968). El primero se tomó como la mayor dimensión en sentido meso distal, paralela al surco central, en el punto de contacto interproximal. Su medición se dificulta allí donde el desgaste interproximal es severo, o el desgaste oclusal ha destruido más de la mitad de la corona, por esta razón algunos autores miden la longitud de la corona entre los puntos de contacto mesial y distal de cada corona, como si ésta estuviera en su posición normal (**Hillson**, 2002: 70). Lo recomendable es que cuando se presente un desgaste interproximal severo, se descarte la pieza para evitar mayores sesgos.

El diámetro vestibulo-lingual se mide como la mayor distancia entre las superficies bucal y lingual de la corona, con las puntas del calibrador paralelas a la superficie oclusal, en la parte de mayor prominencia. No presenta mayores problemas, exceptuando cuando el diente se encuentra rotado, por lo que se busca su posición anatómica original.

Los errores intra-inter observador se evaluaron mediante una muestra piloto, donde la primera observadora (**Vargas**) tomó la medida de 20 dientes, siendo revisados por el segundo observador (**Rodríguez**).

Con el propósito de obtener una visión global de las tendencias temporales y espaciales de las clases de dientes (molares, premolares, caninos, incisivos), se calcularon las áreas en mm<sup>2</sup> de las superficies oclusales de las coronas, mediante la multiplicación de MDxVL, obteniendo las áreas de los molares superiores (AUM), inferiores (ALM), premolares (AUP, ALP), caninos (AUC, ALC) e incisivos (AUI, ALI), y la sumatoria total (TS).

### 4. La variación sexual

Al comparar los grupos más grandes (Muisca, Chibcha septentrional, Valle del Cauca, Aguazuque), según el test de Kruskal-Wallis, encontramos que las dimensiones dentales que no manifiestan dimorfismo sexual son las medidas mesodistales de los dientes 18, 11, 46, 47 y 48. Las dimensiones vestibulares son las más adecuadas para diferenciar filiación sexual, especialmente de los dientes 17, 13, 41 y 44. En lo referente solamente al grupo más grande - Muisca- los diámetros mesodistales de los dientes 15, 14, 11, 41 y 44 no son significativos en la diferenciación sexual de este grupo (Tablas 2, 3, 4 y 5).

Al aplicar un procedimiento discriminante por sexo para los cuatro grupos, encontramos que se configura solamente una función canónica discriminante que clasifica correctamente el 100% de los casos, tomando solamente las variables VL17 (con mayor peso) y VL16, es decir de M1 y M2 inferiores.

Si comparamos las medidas dentales de poblaciones colombianas obtenidas por varios autores (**Álvarez**, 2002; **Evan**, 1994; **Gómez**, 2002; **Rodríguez**, 2003), encontramos que todas las dimensiones del grupo prehispánico masculino, excluyendo los diámetros mesodistales de I1 y I2 que son superiores a los del grupo masculino contemporáneo, y donde el tamaño dental femenino prehispánico se aproxima al masculino contemporáneo. El canino superior constituye el diente más dimórfico en lo concerniente a las dimensiones de la corona (MD y VL), pero el cuello viene a ser la estructura dental que observa las mayores diferencias en cuanto a su diámetro mesodistal (**Gómez**, 2002). En lo referente a las diferencias interobservadores, éstas se ubican en la medida del diámetro vestibulo-lingual, quizás porque algunos autores no miden la máxima extensión de esta dimensión.

**Tabla 2.** Test Kruskal-Wallis para sexo entre cuatro grupos prehispánicos de Colombia.

Diente	MD18	VL18	MD17	VL17	MD16	VL16	MD15	VL15	MD14	VL14	MD13	VL13	MD12	VL12	MD11	VL11
Chi cuadrado	0,08	2,19	1,35	5,67	0,53	2,19	1,79	4,29	2,19	2,68	5,33	5,40	4,74	3,61	,34	3,74
df	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Significado asintótico	0,77	0,14	0,25	0,02	0,47	0,14	0,18	0,04	0,14	0,10	0,02	0,02	0,03	0,06	0,56	0,05
Diente	MD41	VL41	MD42	VL42	MD43	VL43	MD44	VL44	MD45	VL45	MD46	VL46	MD47	VL47	MD48	VL48
Chi cuadrado	0,79	5,40	1,38	4,34	4,86	1,37	0,53	5,67	0,76	2,22	0,34	2,13	0,34	2,08	0,33	1,40
df	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Significado asintótico	0,38	0,02	0,24	0,04	0,03	0,24	0,47	0,02	0,38	0,14	0,56	0,14	0,56	0,15	0,56	0,24

**Tabla 3.** Coeficientes de la función canónica discriminante.

Medida	Función
VL17	17,491
VL46	3,807
Constante	-243,802

**Tabla 4.** Funciones de los centroides del grupo.

Sexo	Función
Masculino	3,035
Femenino	-3,035

**Tabla 5.** Coeficientes de la función clasificatoria (función lineal de Fisher).

Variable	Sexo	
	Masculino	Femenino
VL17	4379,104	4272,921
VL46	899,739	876,626
Constante	-30601,655	-29121,619

## 5. La variación intergrupar

Las mayores áreas de los molares superiores e inferiores se observan en Tequendama, mientras que las menores en Valle Tardío y Aguazuque. Los premolares superiores más grandes se ubican en Cocuy y Tequendama, los inferiores en Silos y Tequendama; entretanto los más pequeños de nuevo en Valle Tardío y Aguazuque (Tabla 1). Los caninos superiores de mayor tamaño se hallan en Cocuy, Valle Temprano y Aguazuque, y los más pequeños en Valle

Tardío, Los Santos y Tequendama. Los caninos inferiores de mayores dimensiones se aprecian en Tequendama, y los más pequeños en las poblaciones tardías. Los incisivos superiores más amplios se destacan en Tequendama, los de menor tamaño en Aguazuque y Mestizo. Los incisivos inferiores más grandes se observan en Herrera, Valle Temprano y Mestizo. Es decir, en sentido espacial los valles interandinos poseen los molares y premolares más grandes, pero los caninos e incisivos más pequeños, exceptuando los superiores.

El área de los molares superiores se relaciona positivamente y con valor estadístico significativo ( $r = 0,577^*$  a  $0,723^{**}$ ) con las áreas de molares inferiores, premolares superiores e inferiores, canino inferior e incisivos superiores ( $0,705^{**}$ ). Igualmente, el resto de áreas se relaciona con las otras clases de dientes, exceptuando con los caninos superiores e incisivos inferiores; estos últimos se relacionan solamente con el MD47 ( $0,584^*$ )<sup>3</sup>.

En el ámbito temporal podemos apreciar que los grupos más tempranos poseen los dientes más grandes, exceptuando Aguazuque que observa una drástica reducción del tamaño de los molares (16,2%), premolares (16,1%), caninos (3,1%), incisivos (7,3%), y total (11,9%), con relación a Tequendama (Fig. 1). Entre los períodos Herrera y Muisca se aprecia un incremento en molares, premolares y caninos superiores, premolares y caninos inferiores, y decrecimiento en molares e incisivos inferiores. Comparativamente entre los muisca prehispánicos y los mestizos contemporáneos hay una reducción de un 7,0% en los molares, aunque no se evidencia reducción alguna en

3 \* significativo a nivel 0,05; \*\* significativo a nivel 0,01.

premolares y caninos; en incisivos superiores es de 6,2%, y en incisivos inferiores apreciamos, por lo contrario, un incremento de 5,8%. Por su parte, entre Valle Temprano y Valle Tardío hay una reducción en molares (6,8%), premolares (17,4%), caninos (12,2%), e incisivos (4,8%).

Aunque se ha planteado que la reducción en *Homo sapiens* es de 1% por cada 1000 años (Brace *et al.*, 1987), de 4,4% en 2.400 años para Oaxaca (Christiansen, 1999: 306), en el caso de los Andes Orientales apreciamos que durante el II milenio a. C. (circa 1500 años) alcanza 11,9% en total, cifra muy elevada para los estándares internacionales, señalando que durante este período se registraron grandes transformaciones biológicas. Por esta razón, consideramos que el Precerámico de los Andes Orientales se puede dividir en dos grupos, según el tamaño dental y su contexto ambiental y arqueológico: 1. Precerámico Temprano (Tequendama, Checua) (Correal & van der Hammen, 1977; Groot, 1992), de dientes grandes, tecnología lítica de cazadores recolectores; 2. Precerámico Tardío (Aguazuque, Vistahermosa) (Correal, 1987, 1990), época de drásticos cambios ambientales por la sequía de orden global que redujo el nivel de las aguas entre 3500-2000 a. C. (van der Hammen, 1992: 110), modificando la anterior tecnología lítica que incluye cantos rodados con bordes desgastados y pesas para redes de pesca para una economía de amplio espectro, con mayor variedad de alimentos como pescado y vegetales (posiblemente arracacha, cubios, hibus, papa) (Correal, 1990). Seguramente como consecuencia de los cambios ambientales y tecnológicos se producen dientes pequeños en este último grupo.

La significativa reducción dental en casi todos los dientes del grupo Precerámico Tardío, debe estar relacionada con el incremento en el consumo de vegetales y pescado en la dieta alimenticia de la población entre el II milenio y primera mitad del I milenio a. C., cuadro no observado durante el Precerámico Temprano. El registro arqueológico de Aguazuque, Soacha, Cundinamarca, incluye cantos discoidales horadados empleados como pesas para redes, percutores para triturar o machacar, yunques, cantos rodados con bordes desgastados, molinos planos y restos de plantas de calabaza (*Cucurbita pepo*), íbia (*Oxalis tuberosa*) y ñame (*Dioscorea*) (Correal, 1990: 37-39, 247).

Como lo evidencian los análisis de isótopos estables del Precerámico Temprano (Tequendama, Checua y Potreroalto) con N15 en promedio de +8,1 y C13 de -19,2; de Aguazuque con N15 en promedio de +8,8 y C13 de -18,8 (Tabla 6); se plantea que su principal característica alimentaria era la dependencia de la recolección de plantas silvestres tipo C3 (tubérculos de altura), con alto contenido de proteína animal (N15), indicando una temprana ma-

nipulación de plantas silvestres como etapa previa a la domesticación de las mismas (Cárdenas, 2002: 45, 57). Las diferencias entre ambos es significativa, al igual que de caries (Tabla 7). En un individuo de Aguazuque datado en 775±35 años a. C. se reporta un valor de -11,0 para C13, lo que indica consumo de plantas C4 (entre ellas maíz) (van der Hammen *et al.*, 1990).

**Tabla 6.** Datos de isótopos estables (nitrógeno y carbono) y frecuencia de caries en grupos de la sabana de Bogotá.

Grupo	n	15N	13C	Caries
Precerámico Temprano	12	8,1	19,2	0,1
Precerámico Tardío	19	8,8	18,8	5,5
Formativo	1	9,0	15,8	14,0
Tardío (Muisca)	6	11,6	12,8	12,5

**Tabla 7.** Prueba Kolmogorov-Smirnov entre grupos precerámicos.

	15N	13C
Kolmogorov-Smirnov	0,892	1,213
Significado asintótico	0,404	0,105

En todos los períodos se aprecia un incremento en el consumo de carne, reducción en el consumo de plantas C3 (tubérculos de altura) y, en consecuencia incremento de plantas C4 (maíz y otros) (Cárdenas, 2002); también de caries por la mayor proporción en la dieta alimenticia de vegetales ricos en almidones, con diferencias significativas entre todos los grupos, particularmente entre los precerámicos (especialmente para 13C). Posiblemente la domesticación del curí y la incorporación del pescado incrementaron el consumo de proteína animal en los grupos sedentarios. Como se planteado desde la perspectiva zooarqueológica, desde Tequendama I (10.920 a. P.), Checua (7530 a. P.) y Nemocón 4 se tienen evidencias de domesticación de curí (*Cavia porcellus*) (Pinto *et al.*, 2002: 163). Los muiscas por su parte tenían grandes pesquerías (capitán, capitancito) en los ríos y lagunas de la sabana de Bogotá a los que ofrendaban para que no se agotaran sus recursos (Simón, 1981, III: 368).

Contrariamente a estas evidencias, para el ecosistema de los Andes Orientales se tiene la idea de una baja productividad vegetal, por lo que los cazadores recolectores habrían tenido la necesidad de buscar los recursos en tierras más templadas y cálidas, atraídos por una mayor oferta de plantas (Cárdenas, 2002: 68). No obstante, los estudios botánicos (Bukasov, 1981) han planteado la posibilidad de un temprano manejo de plantas, lo que se demuestra por la existencia de variedades silvestres de tubérculos comesti-

bles (arracacha, papa criolla, cubios, ibias) y la presencia de una gran diversidad de formas, señalando, además, la posibilidad de que los Andes Orientales hayan sido un centro primario de domesticación de plantas.

Este último planteamiento lo apoyan los estudios realizados en los sistemas cordilleranos Central (**Aceituno, 2003; Cano, 2004; López, 2004; Santos & Otero, 2003**) y Occidental (**Gnecco, 2000; Salgado, 1988**), donde se han excavado evidencias materiales (cantos rodados con bordes desgastados o azadas, placas de moler, hachas talladas con bordes pulidos, martillos percutores) y paleobotánicas (polen, fitolitos, almidones), que demuestran la gran diversidad de recursos vegetales aprovechados mediante desarrollo hortícola durante el Holoceno temprano y medio (VIII-IV milenios a. C.), como yuca (*Manihot*), amarantáceas, cucurbitáceas, smiláceas, maíz (*Zea mays*), yacón o manzana de tierra (*Polymniasonchifolia* Poepp.) de la familia de las asteráceas, indicando que hubo una temprana manipulación de los bosques por cazadores recolectores, pues el forrajeo de plantas implica un proceso de selección mediante la distribución de las semillas por las áreas de captación de recursos, la apertura de claros, el uso del fuego durante las estaciones secas, provocando la perturbación de la vegetación original con el respectivo crecimiento de herbáceas, frutales y otras plantas comestibles, en lo que se conoce como la “domesticación del bosque” (**Aceituno, 2003: 169**).

Es decir, que entre finales del III milenio a.C., especialmente hacia principios del I milenio a.C. (3.500-2.000 a. C.) se evidencia un cambio sustancial en el clima y en el patrón de subsistencia de las poblaciones precerámicas del altiplano Cundiboyacense, lo que debió ejercer una presión selectiva sobre el tamaño de los dientes, especialmente de los molares y premolares, tendiendo hacia su reducción. No obstante, este proceso no fue general para toda la región pues en Madrid 2-41, cerca de la antigua laguna de La Herrera, se reporta un esqueleto (No. 11) fechado en 150±50 a. C., con valores de N15 de +9,0 y C13 de -15,8, con dieta vegetariana de tubérculos de altura, y molares más grandes que Aguazuque (**Rodríguez & Cifuentes, 2005**).

Además de producir una reducción del tamaño dental, también se evidencia una tendencia hacia la braquicefalización y la reducción del aparato masticatorio, especialmente de la mandíbula (anchuras bicondilar, bigoniaca, mínima de la rama ascendente, altura mentoniana y de la rama ascendente, grosor del cuerpo mandibular) (Tabla 8). La rama ascendente se angosta y el ángulo se amplía para la inserción de un músculo masetero de menor tamaño. El cuerpo mandibular se angosta y se reduce la altura mentoniana. En la bóveda craneal la frente se amplía por la reducción de la presión lateral de los músculos temporales. Las apófisis mastoideas se angostan y se alargan, especialmente en el grupo masculino (**Correal, 1990; Rodríguez, 2001**). Final-

**Tabla 8.** Dimensiones craneales y mandibulares de Tequendama y Aguazuque (**Correal, 1990; Rodríguez, 2001**).

Grupo/variable/Sexo/Ds	Tequendama				Aguazuque			
	M		F		M		F	
Anchura frontal máxima	109,0	7,6	104,4	4,0	112,4	7,1	105,9	3,3
Altura mastoidea	25,7	4,4	19,5	0,7	26,9	4,1	22,1	3,0
Anchura mastoidea	13,3	1,1	11,0	2,8	12,4	2,1	11,1	3,3
Anchura bicondilar	122,1	4,7	110,0	7,1	116,9	3,6	110,7	4,7
Anchura bigoniaca	93,5	8,5	88,0	1,4	89,8	7,4	86,1	5,3
Longitud mandibular	78,3	3,6			78,5	5,0	71,0	4,9
Altura mentoniana	37,5	4,8			34,8	3,8	32,7	3,1
Altura cuerpo mandibular	30,3	5,2			29,4	2,7	26,7	3,8
Grosor cuerpo mandibular	12,3	2,2			10,2	1,3	9,7	2,1
Anchura mínima rama	36,4	2,2	33,0	2,9	34,6	2,5	32,2	2,4
Altura rama ascendente	64,8	3,3			64,5	3,4	58,1	4,2
Altura proyección de rama	64,8	3,3			62,9	4,9	54,6	6,8
Angulo rama ascendente	118,0	9,2			119,6	6,2	123,8	8,0

mente, surge la caries como enfermedad que se intensificará posteriormente en las poblaciones agrícolas (Polanco *et al.*, 1992).

**6. Análisis de conglomerados jerárquicos**

En síntesis, los grupos colombianos evidencian diferencias en el tiempo y el espacio, donde se observa como tendencia evolutiva la reducción del tamaño de los molares, premolares y caninos, como también de la mandíbula, aunque este proceso ha ido acompañado de un incremento de los incisivos inferiores.

Un cuadro similar se ha reportado en Oaxaca, México, donde en muestras que abarcan una época desde el Formativo temprano (1.200 a. C.) hasta el Posclásico (1200 d. C.) se observa una reducción del TS de 1.320 mm<sup>2</sup> a 1262 mm<sup>2</sup>, equivalente a 4,4% en casi 2.400 años, especialmente de los dientes posteriores que los anteriores, como consecuencia según el autor de un proceso de adaptación a un nuevo modo de vida, con intensificación de la dependencia de la agricultura (Christiensen, 1999: 308)

Con el fin de clasificar las series dentales según su tamaño, se aplicó un análisis de conglomerados jerárquicos, construyendo un dendrograma mediante distancias euclídeas al cuadrado y el método de agrupación de Ward, para visualizar el proceso de conformación de enjambres, según sus similitudes odontométricas. De esta manera se integran tres gran-

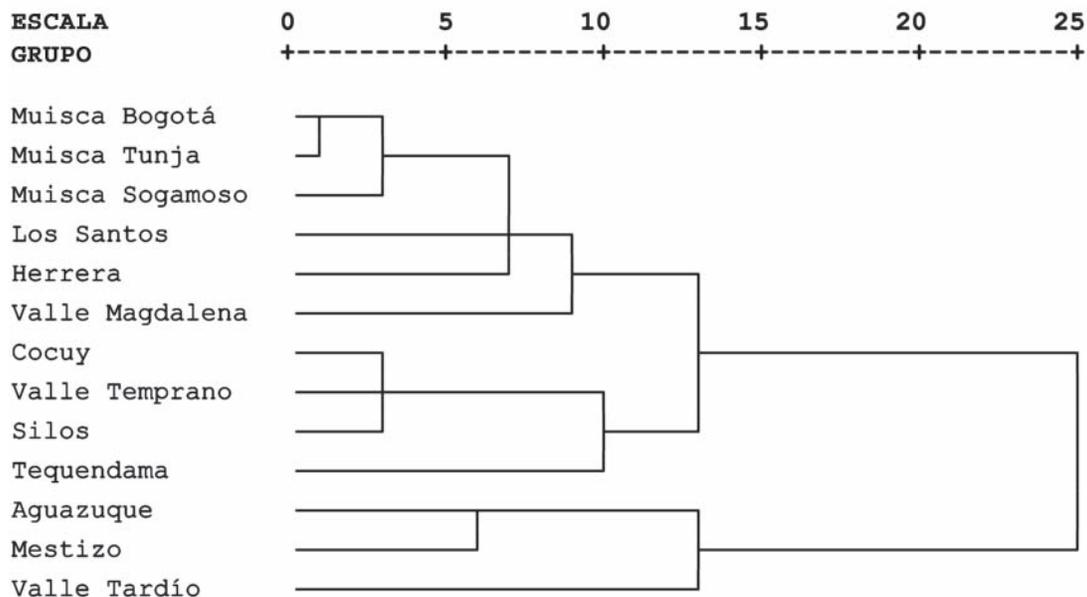
des enjambres (Fig. 2). 1. Grupo de dientes pequeños (Aguazuque, Mestizo y Valle del Cauca Tardío), 2. Grupo de dientes medianos (Muiscas de Bogotá, Tunja y Sogamoso, Los Santos, Herrera, Valle del Magdalena) y 3. Grupo de dientes grandes (Cocuy, Valle del Cauca Temprano, Silos y Tequendama). La posición taxonómica de Cocuy y Silos, al igual que la del Valle del Magdalena, puede estar sesgada estadísticamente por el pequeño tamaño de las muestras. Lo que sí queda claro, es que los grupos muiscas de Sogamoso, Tunja y Bogotá, a juzgar por las pequeñas distancias entre ellos, comparten rasgos dentales (morfológicos, odontométricos) y craneométricos comunes, señalando que poseen un tronco ancestral común reciente, de donde se desprendió la población que dio origen a los primeros habitantes del Valle del Cauca (Rodríguez, 2001, 2007).

**7. Las relaciones biológicas de los grupos de Colombia en el ámbito mundial**

Con el fin de contrastar la información odontométrica de los grupos colombianos en el ámbito mundial y abordar la problemática del poblamiento de Colombia y de América en general, se compararon con muestras de América, Asia, África y Oceanía (Kieser, 1990).

**7.1. Análisis de conglomerados jerárquicos**

El análisis de conglomerados jerárquicos mediante distancias euclídeas al cuadrado, según el método de Ward, dis-



**Figura 2.** Dendrograma de distancias odontométricas euclídeas al cuadrado entre grupos colombianos masculinos usando el método de Ward.

tancias reescaladas, evidencia la conformación de tres grandes enjambres de poblaciones (Tabla 9; Fig. 3): 1. Macrodonte, que vincula los grupos con los dientes más grandes del mundo (Australia, Melanesia, Nueva Guinea y África antigua); 2. Mesodontes, donde se incluye la gran mayoría de poblaciones americanas, tanto prehispánicas como contemporáneas, además de Java y África contemporánea; 3. Microdonte, que asocia a China, Ainu, Perú y Mestizo. Respecto a Colombia, se evidencia una gran afinidad entre los grupos Chibcha septentrional (Cocuy, Los Santos, Silos), con el Muisca y Valle del Cauca, en menor medida con el Valle del Magdalena, lo que concuerda con los estudios craneométricos (Rodríguez, 2001, 2007). Por el tamaño dental, Tequendama se aproxima a Indian Knoll, una muestra arcaica de Kentucky, Estados Unidos (Perzgian, 1976) y al grupo Esquimal (Kieser, 1990).

Este cuadro de afinidades biológicas por el tamaño dental, distingue de manera contundente a Australia y Melanesia de los grupos americanos prehispánicos, incluidos los precerámicos, lo que separa ambas líneas evolutivas. Algunos autores han planteado que la diferenciación entre los dolicocefalos paleoamericanos de los braquicefalos amerindios –más mongoloides– obedece a que proceden de diferentes oleadas migratorias, la primera y más antigua del sudeste asiático y la segunda del noreste de Siberia, negándose cualquier posibilidad de la influencia de factores internos como la reestructuración genética (González *et al.*, 2008; Neves *et al.*, 1991, 1999, 2007; Powell & Neves, 1999; Powell *et al.*, 1999). La deficiencia de este planteamiento estriba en que las comparaciones incluyen una gran proporción (más del 60%) de rasgos de la bóveda craneal, incluidas las ca-

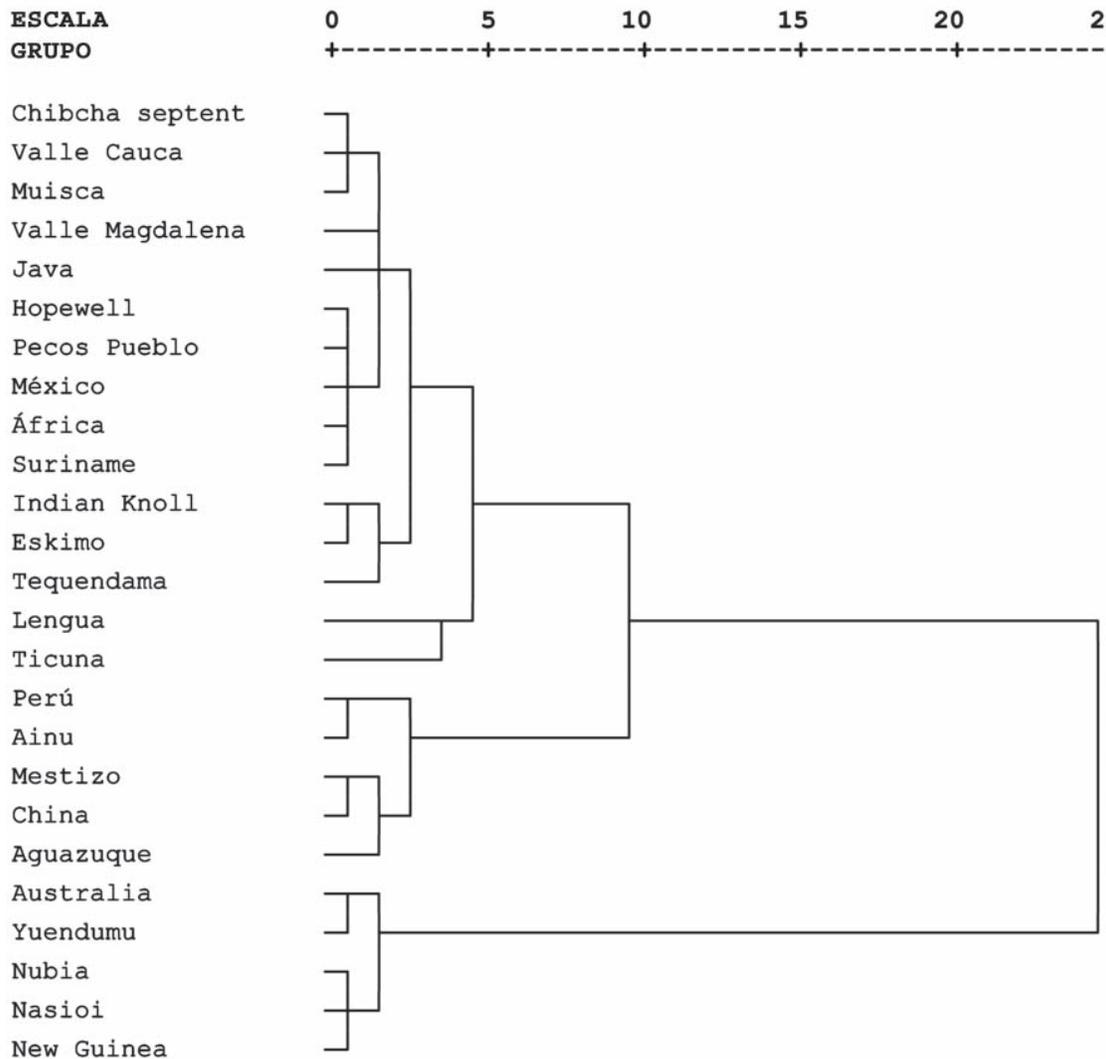


Figura 3. Dendrograma de distancias odontométricas mediante el método de Ward.

racterísticas de morfometría craneofuncional (**Pucciarelli**, 2004), cuya dolico-hipsicefalia comparten de manera similar paleoamericanos y australo-melanesios, como se había sugerido hace 60 años (**Rochereau**, 1938).

Por el contrario, los análisis craneométricos que se apoyan en un alto componente de medidas faciales de proyección, permiten diferenciar a los grupos mongoloides del Noreste de Asia y América, de rostro plano, de los grupos del Sudeste de Asia, caracterizados por el prognatismo y la nariz muy ancha y aplanada; también diferencia a las poblaciones circumárticas de las andinas, caribeñas y amazónicas, apoyando la idea de un proceso de reestructuración acaecido en el interior del continente americano, donde la evolución se debió presentar por la presión de fuerzas selectivas, entre ellas los cambios ambientales y la consecuente modificación de los patrones de subsistencia que condujeron a un proceso de gracilización del aparato masticatorio, y, por ende, de braquicefalización por la reducción de las fuerzas laterales sobre la bóveda craneal (**Rodríguez**, 2001, 2007).

### 7.2. Análisis de componentes principales

El análisis de componentes principales (CP) tendiente a establecer las tendencias en los conjuntos de variables que diferencian a las poblaciones humanas según sus dimensiones dentales, aplicando la rotación Varimax para optimizar las diferencias, con la normalización de Kaiser, conforma varios componentes, de los cuales los tres primeros explican el 72,7% de la variación (Tabla 9; Fig. 4). En el primero se incluyen, con mayor peso, las áreas de molares y premolares, VL47, VL16, VL17, VL44, VL1, VL46, VL45 y luego los diámetros mesodistales (MD16, MD17, MD11, MD42); es decir, que en la diferenciación de las poblaciones humanas, el factor más importante es el diámetro vestibulo-lingual, particularmente de M2 y M1, inferiores y superiores, y de los premolares el P1. En el segundo componente se vinculan los diámetros vestibulo-linguales de los dientes anteriores, 13, 15, 45, 44 y otros. En el tercer componente se hallan los diámetros MD de los caninos. La gráfica de distribución de los grupos comparados según los tres componentes agrupa a las series colombianas con las americanas y el noreste de Asia (China, Java, Ainu), separándolas de las del Sureste de Asia. El grupo diferente es el amazónico Ticuna de Colombia (**Harris & Nweeia**, 1980), que resalta por sus dientes grandes.

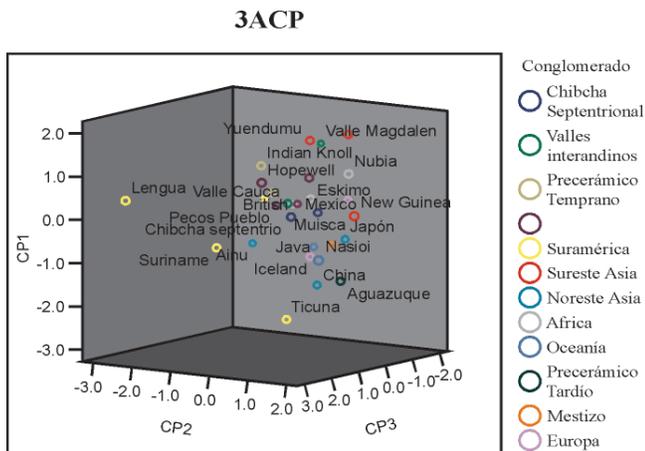
### 7.3. Análisis discriminante

El análisis discriminante se aplica con el fin de dividir las muestras comparadas según ciertos criterios, para luego hallar la forma de distinguirlas, basándose en características independientes derivadas de los mismos datos; esta

**Tabla 9.** Matriz de componentes principales (rotación Varimax).

Medida	Componentes					
	1	2	3	4	5	6
AUM	,696	,346	,296	,273	,426	
ALM	,821	,349	,294	,119	,215	,151
AUP	,382	,384	,455	,430	,470	
AUC	,163	,639	,641	,292		
MD18	,674		,150	,283	,529	
VL18	,423	,265	,170	,162	,655	
MD17	,724	,112	,169	,352	,157	
VL17	,588	,572	,101	,187	,345	
MD16	,565	,278	,500	,272	,211	-,126
VL16	,524	,640	,322	,136	,255	
MD15	,192		,529	,672	,133	-,155
VL15	,373	,544	,167	,189	,553	-,210
MD14	,152	,167	,537	,666		
VL14	,372	,625	,375	,314	,185	
MD13			,906	,310		
VL13	,221	,873	,159	,149		
MD12	,290	,183	,798	,153	,188	,165
VL12		,455			,557	,133
MD11	,485	,245	,271	,695		-,128
VL11		,820			,285	,226
MD41	,234	,238		,846	,114	
VL41	,260	,722	,119	,115	,167	-,442
MD42	,417	,116	,491	,347	,460	
VL42		,935				
MD43	,372	,138	,689	,366	,209	,162
VL43	,367	,813	-,109		,178	
MD44	,185		,372	,761	,277	,250
VL44	,646	,485	,146		,299	-,332
MD45			,465	,683		,447
VL45	,606	,509	,190		,277	-,277
MD46	,693	,183	,474	,200		-,286
VL46	,451	,451	,257	,115	,290	,500
MD47	,758			,167	-,114	-,171
VL47	,597	,534	,221	,210	,302	,214
MD48	,814	,149	,137	,117	,143	,264
VL48	,849	,188		,114	,162	,250

técnica genera unas funciones discriminantes basándose en las combinaciones lineales de las variables predictoras que proporcionan la mejor diferenciación entre los grupos (**Shennan**, 1992: 284).



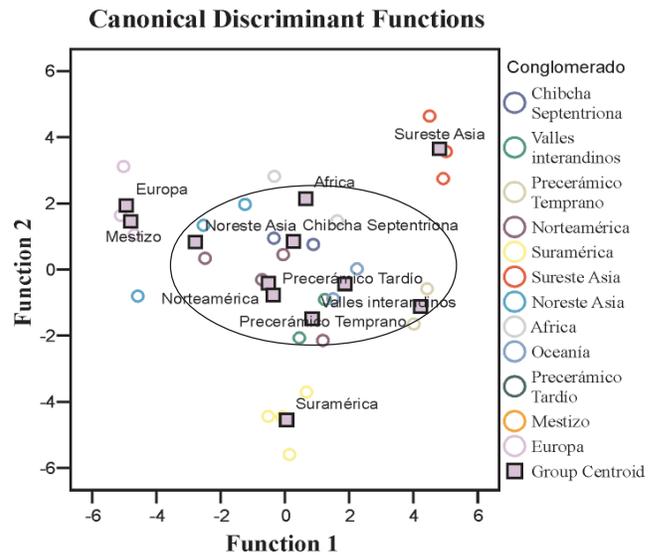
**Figura 4.** Gráfica de distribución de los grupos mundiales según los tres primeros componentes principales odontométricos.

Este análisis clasifica correctamente el 93,1% de los grupos seleccionados. En la primera función canónica discriminante tienen mayor peso MD11, MD46, VL12, VL18 y MD47 son las más relacionadas (Tabla 10; Fig. 5); en la segunda la gran mayoría de diámetros y áreas, especialmente VL43 y VL47, variables seleccionadas por el sistema en el análisis discriminante. El grupo más diferente es el Sureste de Asia por sus grandes dimensiones. Las otras series odontométricas se agrupan en un enjambre grande que incluye América y Noreste de Asia. El grupo Mestizo se aproxima al de Europa. Las distancias Mahalanobis (Tabla 11) señalan la gran afinidad entre los grupos Chibchas de Colombia con los Valles interandinos, Noreste de Asia y Precerámico Temprano, además de Norteamérica y Suramérica (región Andina). A juzgar por las grandes distancias con los grupos amazónicos, los andinos se habrían desarrollado independientemente de esta región, teniendo troncos ancestrales diferentes. Por su parte, las distancias entre el Sureste de Asia y el Noreste de Asia y América son significativamente grandes, pero muy próximas a Oceanía y África.

El análisis discriminante reitera lo planteado en otro tipo de estudios, tanto morfológico como odontométrico (Vargas, 2010), al igual que craneométrico (Rodríguez, 2001, 2007), en el sentido de que las poblaciones americanas se relacionan más con las del Noreste de Asia (Siberia, Mongolia, China) que con las del Sureste de Asia (Australia, Melanesia, Nueva Guinea).

### 8. La evolución del tamaño dental en Colombia

De acuerdo con los resultados aquí expuestos se pueden obtener algunas conclusiones que dan cuenta de las



**Figura 5.** Gráfica de dispersión de los grupos mundiales según dos funciones canónicas discriminantes odontométricas.

principales tendencias evolutivas de las poblaciones colombianas durante los últimos 10.000 años de su historia.

1. *Período precerámico temprano* (10.000 a 3.500 a. C.). Grupos de cazadores recolectores procedentes del Noreste de Asia atravesaron la región de Beringia hace varios milenios, cuyos rasgos arcaicos se reflejan en una dentición grande, aunque no de escala macrodonte como el Sureste de Asia. Remontándose por Centroamérica traspasaron el istmo de Panamá, y desde el Caribe ascendieron por el valle del río Magdalena, donde una línea habría traspasado la cordillera Oriental y otra la Central, dando origen a poblaciones que comparten un tronco ancestral Magdaleniense común (Valle del Cauca y Andes Orientales).

2. *Período precerámico tardío* (3.500-750 a. C.). En los Andes Orientales a raíz de los drásticos cambios ambientales que generaron un período de sequía se produjo un dinámico proceso de reestructuración biológica hacia el II milenio a. C. que condujo a la significativa reducción del tamaño dental (11,9%) -4,3% en 1.000 años- y de la mandíbula (17% en el grosor del cuerpo mandibular; 4,9% en la anchura mínima de la rama ascendente; 4% en la anchura bigoniaca), producto de la presión de fuerzas selectivas que acompañaron a los cambios de los patrones de subsistencia, entre ellos la intensificación en el uso de tubérculos de altura y el mejoramiento tecnológico para su procesamiento. La caries que se había mantenido en bajas proporciones en cazadores recolectores (menores a 2%) surge como una enfermedad que acompañará a las poblaciones agrícolas.

**Tabla 10.** Matriz de estructura de las funciones canónicas discriminantes.<sup>4</sup>

	Funciones					
	1	2	3	4	5	6
MD15**	,613*	,188	,390	,133	-,214	,395
VL13**	,445*	,272	,103	-,042	,294	,426
AUP**	,435*	,098	,272	,113	,303	,366
VL47**	,109	,637*	-,080	,223	,426	,212
AUM**	,156	,606*	,437	,276	-,042	,010
MD17**	,103	,484*	,411	,280	-,252	,289
VL44**	,134	,455*	-,047	,140	-,261	,267
VL45**	,084	,423*	-,112	,096	,064	,220
VL41**	,132	,378*	-,057	-,031	,155	,291
VL17**	-,289	,378*	,162	,265	,335	,106
MD13**	,258	,140	,713*	,044	-,013	,310
MD12**	,221	,288	,651*	,204	,094	,242
MD44	,241	-,028	,648*	,144	,648	,284
MD43**	,275	,115	,570*	,213	,231	,179
MD42**	,261	,282	,570*	,085	,028	-,004
MD14**	,485	,068	,566*	,306	,039	,407
MD45**	,252	-,075	,560*	-,031	,541	,294
MD41**	,094	-,051	,535*	,215	,114	,454
AUC**	,439	,236	,481*	,012	,201	,465
MD16**	,348	,142	,370*	,353	-,079	,148
MD48	,401	,116	,047	,830*	,023	-,365
VL48**	-,135	,481	,015	,697*	,020	-,258
ALM**	,134	,578	,008	,592*	,103	-,017
MD47**	,046	,205	-,198	,431*	-,224	-,017
VL43	,211	,543	-,140	,121	,783*	,116
VL11**	,344	,161	,028	-,044	,703*	,155
VL46**	-,157	,395	,094	,255	,536*	,174
VL42**	,157	,331	,031	-,151	,500*	,366
MD46**	,286	,213	,221	,293	-,418*	,312
VL12**	,079	-,045	-,102	,003	,411*	-,339
VL15**	,067	,136	,037	-,013	,327*	,188
VL14	,406	,210	,073	,019	,253	,850*
MD11	,166	,268	,608	,314	-,212	,623*
VL18	,438	,347	,335	-,436	-,090	-,615*
MD18**	,004	,345	,128	,185	-,094	-,521*
VL16**	,009	,323	,102	,253	,382	,418*

4 Correlaciones intergrupales combinadas entre variables discriminantes y las funciones canónicas discriminantes. Las variables se han ordenado por el tamaño absoluto de correlación con la función.

\* Mayor correlación absoluta entre cada variable y cualquier función discriminante.

\*\* Esta variable no se usó en este análisis.

**Tabla 11.** Distancias odontométricas Mahalanobis entre diferentes grupos mundiales.

Conglomerado	F	Chibcha septentrional	Valles interandinos	Precerámico temprano	Norteamérica	Suramérica	Sureste Asia	Noreste Asia	África	Oceanía	Precerámico tardío	Mestizo	Europa
Chibcha Septentrional	F		1,5	2,7	1,3	6,8	5,6	2,4	1,5	1,4	2,1	2,7	5,3
	Sig.		0,3	0,1	0,3	0,0	0,0	0,1	0,3	0,3	0,1	0,1	0,0
Valles interandinos	F	1,5		2,2	0,6	3,9	7,5	4,6	2,4	1,2	3,5	3,7	7,6
	Sig.	0,3		0,1	0,7	0,0	0,0	0,0	0,1	0,4	0,0	0,0	0,0
Precerámico Temprano	F	2,7	2,2		4,6	5,9	4,2	7,8	3,5	1,3	4,3	7,1	14,1
	Sig.	0,1	0,1		0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,3	0,0	0,0	0,0
Norteamérica	F	1,3	0,6	4,6		6,7	10,7	3,3	1,9	1,5	3,7	2,5	6,4
	Sig.	0,3	0,7	0,0		0,0	0,0	0,0	0,2	0,3	0,0	0,1	0,0
Suramérica	F	6,8	3,9	5,9	6,7		18,2	8,6	7,4	4,2	7,6	6,5	13,7
	Sig.	0,0	0,0	0,0	0,0		0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
Sureste Asia	F	5,6	7,5	4,2	10,7	18,2		12,4	2,9	4,2	9,4	9,2	17,4
	Sig.	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0		0,0	0,1	0,0	0,0	0,0	0,0
Noreste Asia	F	2,4	4,6	7,8	3,3	8,6	12,4		2,6	3,7	4,2	0,8	2,2
	Sig.	0,1	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0		0,1	0,0	0,0	0,6	0,1
África	F	1,5	2,4	3,5	1,9	7,4	2,9	2,6		1,3	5,3	2,7	4,6
	Sig.	0,3	0,1	0,0	0,2	0,0	0,1	0,1		0,3	0,0	0,1	0,0
Oceanía	F	1,4	1,2	1,3	1,5	4,2	4,2	3,7	1,3		3,5	4,1	8,2
	Sig.	0,3	0,4	0,3	0,3	0,0	0,0	0,0	0,3		0,0	0,0	0,0
Precerámico Tardío	F	2,1	3,5	4,3	3,7	7,6	9,4	4,2	5,3	3,5		3,9	7,7
	Sig.	0,1	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0		0,0	0,0
Mestizo	F	2,7	3,7	7,1	2,5	6,5	9,2	0,8	2,7	4,1	3,9		0,8
	Sig.	0,1	0,0	0,0	0,1	0,0	0,0	0,6	0,1	0,0	0,0		0,6
Europa	F	5,3	7,6	14,1	6,4	13,7	17,4	2,2	4,6	8,2	7,7	0,8	
	Sig.	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,1	0,0	0,0	0,0	0,6	

En el ámbito morfológico se observa un incremento de la rotación de los incisivos centrales entre Tequendama (66,7%) y Aguazuque (100%), como también del apiñamiento (Vargas, 2010). Este fenómeno se asocia con el planteamiento evolutivo del “probable efecto mutacional” (Brace, 1984), “selección negativa” (Zoubov, 1968) o “presión selectiva” por el cambio de modo de vida con intensificación de la agricultura (Christensen, 1999). A raíz de los drásticos cambios ambientales entre 3.500-2.000 años a. C. la

población de la sabana de Bogotá se vio obligada a depender más de los tubérculos de altura y del pescado como fuente de proteína, lo que incide en el tamaño del arco alveolar, generando apiñamiento y la ventaja selectiva la tendrían los dientes pequeños; para el caso de la caries los dientes con una superficie oclusal más simplificada serían más efectivos (Zoubov & Jaldeeva, 1989: 205).

En el campo social, el retraso en el crecimiento y la economía de mayor espectro (caza, recolección, pesca,

cultivos), tiene ventajas adaptativas, pues la reserva de vegetales facilita el sedentarismo, permite mayor contacto de los hijos con sus padres ampliando el período de aprendizaje, estableciendo una mayor exogamia, un territorio de captación de recursos y de relaciones sociales con otros grupos más extensos, y, por ende, mayor capacidad de supervivencia. En los Andes Septentrionales de Venezue-

la la denominada “revolución Neolítica” se ubica precisamente en el II milenio a. C. (Sanoja & Vargas, 2003: 194).

Por consiguiente, el cambio entre los doli-hipsicéfalos paleoamericanos (tipo Tequendama, Checua y Potreroalto), de dientes grandes, hacia los braquicéfalos de dientes pequeños no se produjo por oleadas migratorias tardías

**Tabla 12.** Distribución de áreas dentales en diferentes grupos mundiales (Fuente principal Kieser, 1990).

Grupo	Región	AUM	ALM	AUP	AUC
Muisca	Chibcha Septentrional	342,5	359,4	129,5	68
Chibcha septentrional	Chibcha Septentrional	342,0	367,5	138,0	70
Valle Cauca	Valles interandinos	350,0	366,5	134,0	70
Valle Magdalena	Valles interandinos	350,5	354,0	136,3	64
Tequendama	Precerámico Temprano	372,0	382,0	146,5	66
Aguazuque	Precerámico Tardío	322,0	326,8	125,7	72
Mestizo	Mestizo	328,6	335,1	124,9	73
Indian Knoll	Precerámico Temprano	378,1	376,4	137,6	68
Eskimo	Norteamérica	357,1	387,6	132,6	71,3
Hopewell	Norteamérica	345,6	377,2	133,4	65
Pecos Pueblo	Norteamérica	326,3	360,2	137,7	71
Mexico	Norteamérica	334,0	349,9	131,1	58
Perú	Suramérica	316,7	339,2	125,1	71
Lengua	Suramérica	370,6	368,4	144,6	73
Ticuna	Suramérica	326,2	336,0	138,6	73,1
Suriname	Suramérica	338,8	343,8	136,1	68,9
Australia	Sureste Asia	426,2	409,7	148,3	68
Yuendumu	Sureste Asia	401,2	408,4	149,9	73
New Guinea	Sureste Asia	395,7	391,2	154,4	73
China	Noreste Asia	333,5	332,2	135,2	77
Ainu	Noreste Asia	313,6	329,2	119,6	61
África	África	356,2	395,6	136,1	68
Nubia	África	376,7	395,8	148,9	71
Java	Oceanía	347,5	354,3	141,4	68
Nasioi	Oceanía	362,7	366,4	149,4	79
Islandia	Europa	347	337	134	69,7
Laponeses	Europa	334	357	125	67,2
Británicos	Europa	340	339	132	68,0

(Lleras, 1995), tipo mongoloide (González *et al.*, 2008), sino por los efectos mutacionales acumulados que relajaron la presión sobre el aparato masticatorio, es decir, por un proceso micro evolutivo (Rodríguez, 2007; Vargas, 2010).

3. *Periodo formativo* (750 a. C. a 800 d. C.). Hacia el I milenio a. C. el conocimiento de plantas condujo a la agricultura y a la introducción del maíz como producto vegetal básico en la alimentación local. El tamaño dental de los dientes posteriores (molares y premolares) se incrementa ligeramente en las poblaciones muiscas y chibchas septentrionales (0,8%). Durante este período se aprecia el proceso de braquicefalización y la introducción de la deformación cefálica como indicador social (Rodríguez & Cifuentes, 2005).

4. *Periodo tardío* (800-1600 d. C.). En Los Santos, Santander (grupo étnico tardío Guane), se manifiesta un incremento de los molares inferiores acompañado de una reducción de caninos e incisivos superiores. En las montañas santandereanas (grupo étnico tardío Chitarero) la dentición se mantiene más grande que en sus vecinos chibchas. Ambos procesos se pueden interpretar a la luz de su relativo aislamiento en condiciones montañosas de difícil acceso, que favoreció la endogamia y el incremento del tamaño dental (Zoubov & Jaldeeva, 1989: 207).

5. En el Valle del río Cauca se aprecia la misma tendencia hacia la drástica reducción dental (8,5%) entre el período Formativo (Temprano, 500 a. C. a 500 d. C.) y el Tardío (800-1600 d. C.), posiblemente como consecuencia de los drásticos cambios ambientales debido a las erupciones volcánicas del nevado del Huila que generó el hiato cronológico entre 500-800 d. C., y a los cambios en el patrón de subsistencia cuyas características no han sido definidas aún en los estudios arqueológicos (Rodríguez, 2005).

6. En el valle del río Magdalena la dentición permanece con valores similares a los grupos andinos chibchas y vallecaucanos tardíos, con la diferencia que los molares superiores son más grandes.

7. Con la llegada de los europeos en el siglo XVI se produjo un proceso de mestizaje que condujo a la reducción dental de la población híbrida, aunque con incisivos inferiores más grandes.

### Agradecimientos

Los autores manifiestan sus agradecimientos por la colaboración brindada durante la revisión de las colecciones óseas a los profesores Gonzalo Correal U. y Germán Peña del Instituto de Ciencias Naturales de la Universidad Nacional de Colombia; a Emilio Piazzini del

Instituto Colombiano de Antropología e Historia; a Leonardo Moreno de la Universidad Industrial de Santander; a Margarita Silva M. de la Universidad Pedagógica y Tecnológica de Tunja y a Martha H. Ardila de la Casa de Bolívar de Bucaramanga. Especiales agradecimientos al Dr. Héctor M. Pucciarelli de la Universidad de La Plata, Argentina, por sus observaciones y valiosas sugerencias, a quien al final convencimos con nuestra “propuesta microevolutiva”.

### Bibliografía

- Aceituno, F. J. 2003. “De la arqueología temprana de los bosques premontanos de la Cordillera Central colombiana”. En: Construyendo el pasado. Cincuenta años de arqueología en Antioquia, S. Botero ed. Medellín, Universidad de Antioquia, pp. 157-183.
- Álvarez, B. 2002. Dimorfismo sexual a partir de la odontometría y morfología de la corona del canino superior permanente en una población colombiana. Bogotá, Especialización en Antropología Forense, Universidad Nacional de Colombia.
- Arsuaga, J. L., C. Lorenzo, A. Gracia. 2001. “Los Homínidos en la hipótesis de Valverde”. *Mundo Científico* 225:58-63.
- Bermúdez, J. M., J. L. Arsuaga, E. Carbonell. 1997. “*Homo antecessor*, una nueva especie del Pleistoceno Inferior de Atapuerca”. *Mundo Científico* 181:649.
- Bermúdez, J. M., S. Sarmiento, E. Cunha. 2000. “Dimorfismo sexual en dientes humanos”. *La Recherche Mundo Científico* 214:17-21.
- Brace, C. L. 1984. Rates of hominid dental reduction in the late and Post-Pleistocene. *Am. J. Physical Anthropol.* 63(2).
- . 1986. “Modern human origins: narrow focus or broad spectrum?” *Am. J. Physical Anthropol.* 69:180.
- , S. L. Smith, K. D. Hunt. 1991. “What Big Teeth You Had Grandma!” In: *Advances in Dental Anthropology*, M. A. Kelley, C. S. Larsen eds. New York, Wiley-Liss, pp. 33-57.
- Bukasov, S. M. 1981. Las plantas cultivadas en México, Guatemala y Colombia. Turrialba, Costa Rica, Centro Agronómico Tropical Inv. Enseñanza.
- Calcagno, J. M., K. R. Gibson. 1988. “Human dental reduction. Natural selection or the probable mutation effect”. *Am. J. Physical Anthropol.* 77:505-517.
- . 1991. Selective Compromise: Evolutionary Trends and Mechanisms in Hominid Tooth Size. In: *Advances in Dental Anthropology*, M. A. Kelley y C. S. Larsen eds. New York, Wiley-Liss, pp. 59-76.
- Cano, M. C. 2004. “Los primeros habitantes de las cuencas medias de los ríos Otún y Consota”. En: *Cambios ambientales en perspectiva histórica. Ecorregión del Eje Cafetero*. Vol. 1. Pereira, Universidad Tecnológica de Pereira, pp. 68-91.
- Cárdenas, F. 2002. Datos sobre la alimentación prehispánica en la sabana de Bogotá. Bogotá, *Informes Arqueológicos del Instituto Colombiano de Antropología e Historia* No. 3.

- Christensen, A. F.** 1999. La microevolución odontométrica en Oaxaca. *Estudios de Antropología Biológica* IX:295-311.
- Correal, G.** 1987. "Excavaciones arqueológicas en Mosquera". *Arqueología, Rev. estud. Antrop.* Univ. Nal. 3:13-17.
- . 1990. Aguazuque. Evidencias de cazadores, recolectores y plantadores tempranos en la altiplanicie de la Cordillera Oriental. Bogotá, Fundación de Investigaciones Arqueológicas Nacionales, Banco de la República.
- , **T. van der Hammen.** 1977. Investigaciones arqueológicas en los abrigos rocosos del Tequendama. 12000 años de historia del hombre y su medio ambiente en la Altiplanicie de Bogotá. *Bibl. Bco. Popular.*
- , **L. Herrera, M. Cardale, C. A. Rodríguez.** 2005. "Estudio de los restos humanos y de fauna del sitio arqueológico Hacienda Malagana". *Revista de Arqueología del Área Intermedia* 5:191-249.
- Christensen, A. F.** 1999. "La microevolución odontométrica en Oaxaca". México, *Estudios de Antropología Biológica* IX:295-311.
- Evan, J. R.** 1994. Determinación de sexo mediante análisis discriminadorio de arcos dentales, a partir de modelos de una muestra de adolescentes en Bogotá. Bogotá, Tesis de Grado, Posgrado de Ortodoncia, Facultad de Odontología, Pontificia Universidad Javeriana.
- Gnecco, C.** 2000. Ocupaciones tempranas de bosques tropicales de montaña. Popayán, Universidad del Cauca.
- Gómez L.** 2002. Determinación de sexo a partir de odontometría del canino superior izquierdo en una población de morgue del Instituto Nacional de Medicina Legal y Ciencias Forenses. Bogotá, Especialización en Odontología Forense, Pontificia Universidad Javeriana.
- González R., M. C. Bortolini, F. R. Santos, S. Bonatto.** 2008. "The Peopling of America: Craniofacial Shape Variation on a Continental Scale and its Interpretation from an Interdisciplinary View". *Am. J. Physical Anthropol.* 137:175-187.
- Groot, A. M.** 1992. Checua. Una secuencia cultural entre 8 500 y 3000 años antes del presente. FIAN, Banco de la República.
- Harris, E. F., M. T. Nweeia.** 1980. "Tooth Size of Ticuna Indians, Colombia, with Phenetic Comparisons to Other Amerindians". *Am. J. Physical Anthropol.* 53:81-91.
- Kieser, J. A.** 1990. *Human Adult Odontometrics.* Cambridge University Press.
- Lavelle, C. L.** 1984. A Metrical Comparison of Maxillary First Premolar Form". *Am. J. Physical Anthropol.* 63:397-403.
- Lleras, R.** 1995. Diferentes oleadas de poblamiento en la prehistoria tardía de los Andes Orientales. *Boletín del Museo del Oro,* Banco de la República, 38-39:3-11.
- López, C. E.** 2004. "Entorno natural y generación de paisajes culturales en el piedemonte de la cordillera Central andina en escala de larga duración". En: *Cambios ambientales en perspectiva histórica. Ecorregión del Eje Cafetero.* Vol. 1. Pereira, Universidad Tecnológica de Pereira, pp. 54-67.
- Neves, W. A., D. Munford, M. C. Zanini, H. M. Pucciarelli.** 1999. "Cranial morphological variation in South America and the colonization of the New World: Towards a four migration model?". *Ciencia e Cultura J. Brazilian Assoc. Advancement of Science* 51(3/4):151-165.
- , **H. M. Pucciarelli.** 1991. "Morphological affinities of the first Americans: an exploratory analysis based on early South American human remains". *J. Human Evolution* 21:261-273.
- , **M. Hubbe, G. Correal.** 2007. "Human skeletal remains from Sabana de Bogotá, Colombia: A case of Paleoamerican morphology late survival in South America?" *Am. J. Phys. Anthropol.*
- Perzigian, A. J.** 1976. "The Dentition of the Indian Knoll Skeletal Population: Odontometric and Cusp Number". *Am. J. physical Anthropol.* 44:113-122.
- Pinto, M., H. Zúñiga, O. M. Torres.** 2002. Estudio sistemático del género *Cavia Pallas*, 1766 (*Rodentia, Caviidae*) en Colombia. Revisión del registro arqueológico colombiano. Bogotá, Academia de Colombiana de Ciencias Colección Jorge Álvarez Lleras No. 21.
- Pinzón, M., C. Rojas.** 2006. Morfología y odontometría de grupos muisca de la sabana de Bogotá. Bogotá, Carrera de Antropología, Universidad Nacional de Colombia.
- Polanco, H., B. Herazo, G. Correal.** 1992. "Morbilidad oral en cráneos prehispánicos de Aguazuque (Colombia)". *Revista Academia Colombiana de Ciencias* 18(70):291-300.
- Powell, J. F., W. A. Neves.** 1999. "Craniofacial morphology of the first Americans: pattern and process in the peopling of the New World". *Yearbook Phys. Anthropol.* 42:153-158.
- , **W. A. Neves, E. Ozolins, H. M. Pucciarelli.** 1999. "Afinidades biológicas extra-continetales de los dos esqueletos más antiguos de América: implicaciones para el poblamiento del Nuevo Mundo". México, *Antropología Física Latinoamericana* 2:7-22.
- Pucciarelli, H. M.** 2004. "Migraciones y variación craneofacial humana en América". *Complutum* 15:225-247.
- Rochereau, H. J.** 1938. "Contribución a la antropología colombiana. El origen de los indios tunebos". Bogotá, *Revista Acad. Col. Ciencias Exactas Fís. Nat.* 2(6):279-282.
- Rodríguez, J. V.** 1999. Los chibchas: pobladores antiguos de los Andes Orientales. *Adaptaciones bioculturales.* Bogotá, Fundación de Investigaciones Arqueológicas Nacionales.
- . 2001. "Craneometría de la población prehispánica de los Andes Orientales de Colombia: diversidad, adaptación y etnogénesis. Implicaciones para el poblamiento americano". En: *Los chibchas. Adaptación y diversidad en los Andes Orientales de Colombia,* J. V. Rodríguez ed. Bogotá, Universidad Nacional de Colombia y Colciencias, pp. 250-310.
- Rodríguez, J. V.** 2003. *Dientes y diversidad humana. Avances de la Antropología Dental.* Bogotá, ed. Guadalupe.
- . 2005. *Pueblos, rituales y condiciones de vida prehispánica de Colombia.* Bogotá, Universidad Nacional de Colombia.
- . 2007. "La diversidad poblacional de Colombia en el tiempo y el espacio: estudio craneométrico". Bogotá, *Rev. Academia Colombiana de Ciencias* 31(120):321-346.

- , **A. Cifuentes**. 2005. "Un yacimiento formativo ritual en el entorno de la antigua laguna de La Herrera, Madrid, Cundinamarca". *Maguaré* 19:103-132.
- Salgado, H.** 1988. Medio ambiente y asentamientos humanos precerámicos en el Calima medio. Cali, Instituto Vallecaucano de Investigaciones Científicas INCIVA.
- Sanoja, M., I. Vargas.** 2003. "La región geohistórica del noroeste de Venezuela y el poblamiento antiguo de la cuenca del lago Maracaibo". Medellín, *Boletín de Antropología Universidad de Antioquia* 17(34):185-208.
- Santos, G., H. Otero.** 2003. "Arqueología de Antioquia balance y síntesis regional". En: *Construyendo el pasado. Cincuenta años de arqueología en Antioquia*, S. Botero ed. Medellín, Universidad de Antioquia, pp. 71-123.
- Schiulli, P. W., M. C. Mahaney.** 1991. "Phenotypic Evolution in Prehistoric Ohio Amerindians: Natural Selection Versus Random Genetic Drift in Tooth Size Reduction". *Human Biology* 63: 499-511.
- Scott, E. C.** 1979. "Increase of Tooth Size in Prehistoric Coastal Peru, 10.000 B. P. – 1.000 BP." *Amer. J. Physical Anthropol.* 50:251-258.
- Silva, E.** 1945. Sobre Antropología Chibcha. Bogotá, *Boletín Arqueológico* 1(6):531-552.
- Toribio, L. R., M. Rubén, M. Rivero de la Calle.** 1995. "Identificación del sexo y el grupo racial por dimensiones dentarias". México, UNAM, *Estudios de Antropología Biológica* V:23-32.
- Townsend, G. C., T. Brown.** 1978. Heritability of Permanent Tooth Size. *Am. J. Physical Anthropol.* 49:497-504.
- Van der Hammen T.** 1992. Historia, ecología y vegetación. Bogotá, FEN Fondo de Promoción de la Cultura.
- , **G. Correal, G. J. Van Klinken.** 1990. "Isótopos estables y dieta del hombre prehistórico en la Sabana de Bogotá." *Boletín de Arqueología* 5(2):3-10.
- Vargas, M. C.** 2010. Morfología y odontometría dental de poblaciones de Colombia. Buenos Aires, Tesis Doctoral, Facultad de Odontología Universidad de Buenos Aires, Argentina.
- Zoubov, A. A.** 1968. Odontología. Metodica de las investigaciones antropológicas. Moscú, Nauka (en ruso).
- , **N. I. Jaldeeva.** 1989. La Odontología en la Antropología contemporánea. Moscú, Nauka (en ruso).
- , **N. I. Jaldeeva.** 1993. La Odontología en la antropofenética. Moscú, Nauka (en ruso).

*Recibido: enero 27 de 2010.*

*Aceptado para su publicación: noviembre 30 de 2010.*



# NUEVAS ESPECIES COLOMBIANAS DE *ESPELETIOPSIS* CUATREC. Y DE *ESPELETIA* MUTIS EX HUMB. & BONPL. (ASTERACEAE, HELIANTHEAE, ESPELETIINAE)

Santiago Díaz-Piedrahita<sup>1</sup>, Betsy Viviana Rodríguez-Cabeza<sup>2</sup>

## Resumen

**Díaz-Piedrahita, S., B.V. Rodríguez-Cabeza:** Nuevas especies colombianas de *Espeletiopsis* Cuatrec. y de *Espeletia* Mutis ex Humb. & Bonpl. (Asteraceae, Heliantheae, Espeletiinae). Rev. Acad. Colomb. Cienc. **34** (133 ): 441-454, 2010. ISSN 0370-3908.

Se nominan, describen e ilustran cuatro especies nuevas de Espeletiinae propias de la Cordillera Oriental de Colombia. La de *Espeletiopsis* Cuatrec. es propia del Santuario de Fauna y Flora Guantotá Alto Río Fonce en el departamento de Santander; las otras tres pertenecen al género *Espeletia* Mutis ex Humb. & Bonpl. y provienen respectivamente de los páramos de Rabanal en Ráquira, Parque Nacional Natural Pisba en Socotá y La Cortadera en Siachoque en el departamento de Boyacá.

**Palabras clave:** *Espeletia*, *Espeletiopsis*, Espeletiinae, Heliantheae, Asteraceae, Colombia, nuevas especies, botánica sistemática.

## Abstract

Three new species of *Espeletia* Mutis ex Humb. & Bonpl. and a new species of *Espeletiopsis* Cuatrec., all from the Cordillera Oriental of Colombia, are named, described and illustrated. These new taxa were recorded from northern Colombia, Guantotá Alto Rio Fonce Flora and Fauna Sanctuary in Santander and in the paramos of Rabanal in Ráquira, Pisba National Natural Park in Socotá and La Cortadera in Siachoque in Boyacá.

**Key words:** *Espeletia*, *Espeletiopsis*, Espeletiinae, Heliantheae, Asteraceae, Colombia, new species, systematic botany.

1 Miembro de número Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Apartado 44763, Bogotá D.C., Colombia. Correo electrónico: santiagodíaz@etb.net.co.

2 Maestría en Ciencias Biológicas –Línea Sistemática–, Universidad Nacional de Colombia, Correo electrónico: bvrodriguez@unal.edu.co  
betsyviviana@gmail.com

Los géneros *Espeletiopsis* y *Espeletia* pertenecen a la subtribu Espeletiinae, grupo propuesto por Cuatrecasas en 1976. Las especies de ambos taxones se concentran en territorio colombiano, particularmente en la Cordillera Oriental. Hasta el presente se conocían ca. 72 especies para *Espeletia* y ca. 24 para *Espeletiopsis*. Incluidas las especies propuestas en este trabajo se completan ca. 75 especies para *Espeletia* y ca. 25 para *Espeletiopsis*, donde ca. 66 especies de *Espeletia* y ca. 20 especies de *Espeletiopsis* son endémicas de Colombia. Cabe mencionar que, a partir de 2006, los autores de este escrito, con base en colecciones realizadas en los departamentos de Arauca, Boyacá y Santander, han publicado un total de 15 especies y una variedad, dando así continuidad a una investigación que se remonta a 1968 y que complementa los excelentes trabajos de don José Cuatrecasas, el mejor conocedor del grupo y autor de la clave de *Espeletiopsis* que se modifica y enriquece con esta publicación, pasando de 19 especies a 25. Esta cifra de especies y la de las de *Espeletia* podrán incrementarse en un futuro con base en nuevas recolecciones de áreas mal conocidas o como resultado de una revisión completa y detallada de los grupos.

**1. *Espeletiopsis laxiflora* S. Díaz & Rodríguez-Cabeza, sp. nov. Figs. 1, 3 A-B**

*Espeletiopsis sclerophyllae* (Cuatrec.) Cuatrec. affinis a qua imprimis differt foliis tenuibus anguste-ellipticis, indumento foliorum persistente utroque latere; ramis floriferis racemiformibus; tubis flosculorum pilosulis, lobis ipsis pilosulis.

**Typus:** COLOMBIA, SANTANDER: Santuario de Fauna y Flora Guanentá Alto Río Fonce, Municipio de Encino, Vereda Avendaños Tres, sector Páramo de Las Playas, 19 oct. 2008. *B. V. Rodríguez-Cabeza, H. Palacios, R. Rivero, & S. Estepa 1993*. Holotypus COL [546647, 546648, 546650, 546651], Isotypi COL [546649, 546652], HUA, UIS, UPTC.

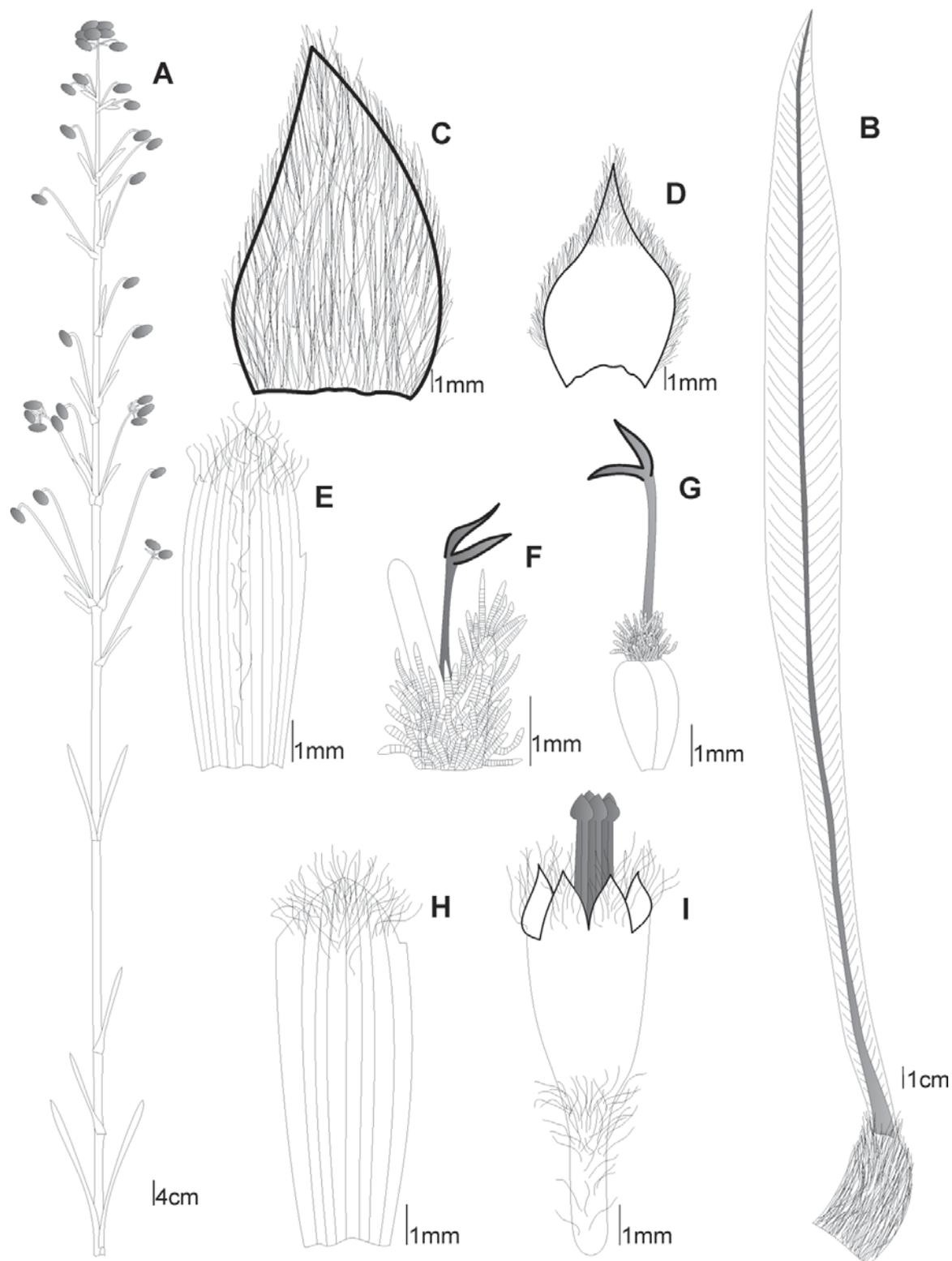
**Etimología:** El epíteto específico alude a la organización de las ramas floríferas alargadas, racemiformes y provistas de pocos capítulos.

Planta arrossetada con tallo subterráneo o con ejes hasta de 50 cm de altura. Hojas sésiles; vaina foliar de 5-6.5 cm long. x 2.8-3.8 cm lat., ovada, dorsalmente cubierta con indumento largo seríceo ebúrneo, lámina foliar de 49-56 cm long. x 3-4 cm lat., angosta elíptica, coriácea, cubierta en la haz por indumento lúteo, revestido de un estrato largo lutescente lustroso, envés densamente tomentoso similar en color al de la haz; base largamente atenuada de 5-8 cm long, con la lámina reducida a una pequeña membrana de 2-3 mm, ápice largamente agudo, margen entera, ligeramente revoluta,; nervio medio ensanchado hacia la base, cubierto

por indumento similar al de la lámina, prominente por el envés, nervios secundarios 11-15 por decímetro, que divergen en ángulo de 30-55°, conspicuos por el envés y cubiertos de indumento blanquecino.

Ramas floríferas 20 coetáneas, de 113-164 cm de largo total, cilíndricas y fistulosas, cubiertas con indumento seríceo lúteo revestido por un estrato blanquecino de pelos flocosos más largos y más densos hacia la parte vegetativa; porción vegetativa de 80-93.5 cm long., brácteas estériles alternas 6 (2-4 son basales), lineales, lámina de 8-18 cm long. x 0.6-0.8 cm lat., vaina 3-7 cm long.; porción reproductiva, un racimo alargado de 35-67 cm long., con 21-41 capítulos; brácteas florales de 2.5-8 cm long. x 0.4-0.6 cm lat., lineales; pedúnculos de 3-20 cm long con indumento tomentoso áureo rematados por 1-3 capítulos.

Capítulos reflejos, discoideos, pedicelados, involucro formado por 7 filarias, dispuestas en 2-3 series, de 9.2-14 mm long. x 5-9 mm lat., ovadas, con ápice agudo y con tinte rojizo, cubiertas completamente por indumento seríceo largo y denso por el envés y largo seríceo en el tercio superior, el resto glabro por la haz. Paleas de las flores femeninas de 6.5-8.5 mm long. x 2-5 mm lat., polimorfos (obovadas, elípticas, rómbicas o lineales), con ápice agudo y en las mas internas obtuso bruscamente acuminado, adaxialmente glabras, las mas externas abaxialmente cubiertas por denso indumento seríceo, las internas con una lista longitudinal de tricomas que se ensancha y se torna más densa hacia el ápice, quedando a cada lado un área glabra, nervios ligeramente visibles 5-9. Paleas de los flósculos de 7.5-9 mm long. x 2-4 mm lat., polimorfos (obovadas, oblanceoladas o elípticas), con ápice obtuso o acutado, adaxialmente glabras, abaxialmente con largos tricomas en la porción apical, con 9-13 nervios longitudinales. Flores femeninas 99-113 por capítulo, dispuestas en 8 series, corolas reducidas a un anillo de 0.5-1 mm long., densamente cubierto por largos tricomas pluricelulares, en ocasiones con una pequeña lengüeta lineal o lóbulo vestigial o rudimentaria, de 1.5-2.2 mm long.; pistilo de 3-5.5 mm long., estigma bífido, ramas estigmáticas de 1.5-2 mm long. Flósculos 158-198 por capítulo, de 7-9.5 mm long., infundiliformes, corola amarilla; porción tubular de 3-4 mm long., rodeada por largos tricomas pluricelulares que se tornan más densos hacia la parte superior, lóbulos de la corola triangulares, de 1.4-1.6 mm long. x 0.8-1.2 mm lat., externamente cubiertos por largos y densos tricomas pluricelulares; estambres exsertos adnatos a la porción tubular de la corola, filamento 4-4.5 mm long., anteras singenésicas de 2.7-3.5 mm long., con apéndice apical cocleariforme de 0.3-0.6 mm long.; pistilo de 7-9.2 mm long. Aquenios de 3-3.8 mm long. x 1.2-1.8 mm lat., obovados, trígonos, glabros y con tres costillas prominentes.



**Figura 1.** *Espeletopsis laxiflora* **A.** Esquema de la rama florífera; **B.** Perfil foliar; **C.** Filaria externa vista por el envés; **D.** Filaria media vista por la haz; **E.** Palea de las flores femeninas; **F-G.** Flor femenina; **H.** Palea de los flósculos; **I.** Flósculo hermafrodita. Diseño digital de Betsy Viviana Rodríguez-Cabeza, elaborado con base en el ejemplar tipo (B.V. Rodríguez-Cabeza *et al.* 1993 COL).

**Comentarios:** Esta interesante especie prospera en laderas de suelos secos con presencia de abundantes rocas de tamaño variable y con una vegetación de tipo pajonal-frailejónal, con dominancia de *Calamagrostis effusa* (Kunth) Steud., *Puya* sp., *Chusquea* sp., *Bartsia* sp., y arbustitos dispersos de dos especies de *Hypericum*, *Arcytophyllum nitidum* (Kunth) Schltdl. y *Diplostephium* sp. Los individuos de la población cubren densa y homogéneamente el sector, mezclándose en las zonas de mayor pendiente y aledañas a los matorrales del bosque altoandino con *Espeletiopsis guacharaca* (S. Díaz) Cuatrec. En las zonas de suelos húmedos donde abunda *Espeletia incana* Cuatrec., *Espeletiopsis laxiflora* está por lo general ausente. En relación con el estado de conservación, no se observaron rastros de quemadas, pero si abundante pastoreo de ovejas y vacas que amenazan las poblaciones conocidas.

A primera vista y por su hábito, la especie propuesta recuerda a *Espeletiopsis bogotensis* (Cuatrec.) Cuatrec., de la que se separa por presentar capítulos discoideos, pero su mayor afinidad ocurre con *Espeletiopsis sclerophylla* (Cuatrec.) Cuatrec., especie que también presenta las flores liguladas reducidas al tubo o a pequeños lóbulos incipientes. De esta especie se diferencia por poseer hojas más largas y delgadas (49-56 cm long. x 3-4 cm lat. vs. 26-46 cm long. x 4-5 (-9) cm lat.), angostamente elípticas (vs. obovadas a anchamente obovadas) y con indumento persistente en ambas caras (vs. lampiñas y pruinosas [las adultas] o puberulentas por la haz y amarillento tomentosas por el envés), mayor número de nervios secundarios por decímetro (11-15 vs. 10-11), vaina más larga (5-6.5 cm vs. 3-4 cm), así como por presentar ramas floríferas racemiformes (vs. corimbiformes) más largas (113-164 cm vs. 70-100 cm), filarias mayores (9.2-14 mm long. x 5-9 mm lat. vs 4-6 mm long. x 3-4 mm lat.) y en menor número por capítulo (7 vs. 9-12), flores liguladas en mayor número (99-113 vs. ± 34) y flósculos mayores (7-9.5 mm long. vs. 4.5-5 mm long.) con abundantes pelos en la porción tubular y en los lóbulos de la corola (vs. escasos tricomas en el ápice del tubo).

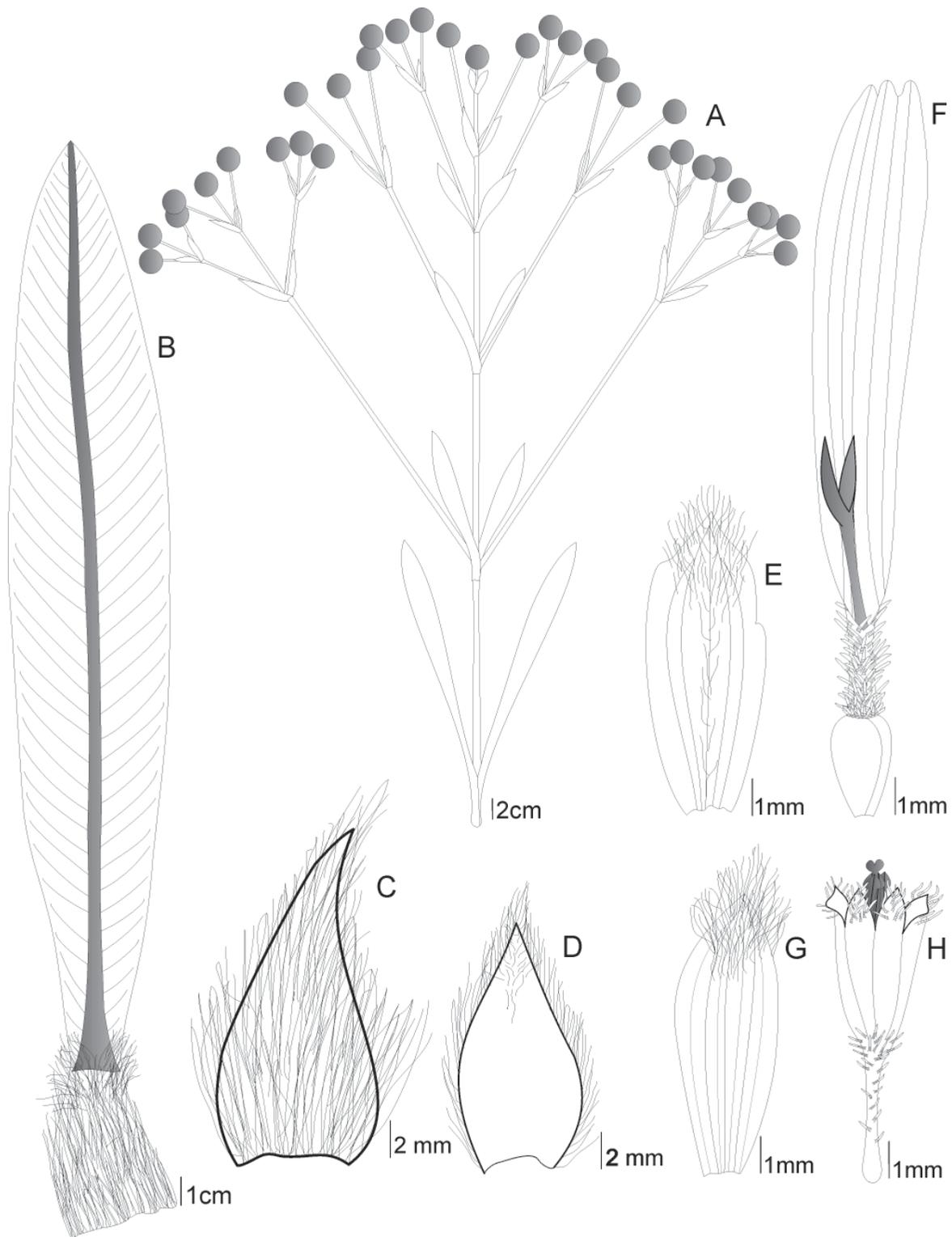
Con posterioridad a la publicación de la clave provisional para el género *Espeletiopsis* Cuatrec. (Cuatrecasas, 1996), han ingresado a este género cuatro nuevas especies descritas en su momento por Díaz-Piedrahita & Obando (2004), Díaz-Piedrahita, Rodríguez-Cabeza & Galindo-T. (2006) y Díaz-Piedrahita & Rodríguez-Cabeza (2008) incluyendo la que se da a conocer en este artículo. En el número total de especies debe incluirse también una a la que se le dio este estatus (Díaz-Piedrahita & Rodríguez-Cabeza 2008) pues con anterioridad se la trataba como una variedad de *Espeletiopsis jimenez-quesadae*.

Por este motivo consideramos oportuno publicar nuevamente la clave propuesta por Cuatrecasas, con las debidas modificaciones, quedando comprendida la totalidad de las especies reconocidas para este género.

1. Filarias lineares, linear-lanceoladas o angostamente triangulares. Flores femeninas conspicuamente liguladas, amarillas o blancas. Parte proximal y vegetativa de la sinflorescencia siempre con brácteas vegetativas. Vaina foliar oblonga. .... 2
- 1'. Filarias anchas, ovadas, triangular-ovadas u obovadas. Corolas periféricas conspicuamente liguladas o reducidas al tubo basal, a veces con minúsculas expansiones dentiformes laminares siempre más cortas que el estilo, amarillas o raramente purpúreas. Parte proximal y vegetativa de la sinflorescencia con o sin hojas estériles. Vaina foliar anchamente ovada o semicircular ..... 11
2. Flores femeninas blancas. Flósculos con lóbulos pilosos ..... 3
- 2'. Flores femeninas amarillas. Flósculos con lóbulos pilosos o glabros ..... 4
3. Superficie adaxial de la hojas con indumento aplicado y argenteado-seríceo ..... *E. pannosa*
- 3'. Superficie adaxial de las hojas con indumento velloso o sublanoso ..... *E. angustifolia*
4. Lámina foliar de hasta 25 cm long. x 0.3-1,5 cm lat., con indumento denso aplicado, seríceo-argentado ..... 5
- 4'. Lámina foliar mayor de 25 cm long. x 1,5 cm lat., con indumento densamente lanoso, velloso o seríceo, blanco o amarillo ..... 6
5. Sinflorescencia corimbosa bien desarrollada, con 20-40 capítulos. Flósculos con lóbulos de la corola ± pilosos. Lámina foliar 15-25 cm x 0.8-1.5 cm. .... *E. santanderensis*
- 5'. Sinflorescencia reducida a un escapo terminado por un solo capítulo. Flósculos con lóbulos de la corola glabros. Lámina foliar 4-6 cm x 0.3-0.9 cm ..... *E. caldasii*
6. Lámina foliar linear-oblonga, gruesa y subcoriácea, con indumento denso lanoso blanco que oculta la nerviación secundaria en ambas caras. Flósculos con tubo y lóbulos de la corola pilosos ..... *E. pozoensis*

- 6'. Lámina foliar ± oblongo-lanceolada, obovada o elíptica, coriácea y rígida, con nerviación secundaria aparente en ambas caras. Flósculos con tubo y lóbulos de la corola glabros o ligeramente pilosos .. ..... 7
7. Sinflorescencias que sobrepasan poco la altura de la roseta foliar; porción fértil algo alargada o tirsiforme, no estrictamente corimbosa (obcónica) ..... *E. colombiana*
- 7'. Sinflorescencias dos veces más largas (o aun más) que la roseta foliar; porción fértil corimbosa (obcónica) o paniculada alargada ..... 8
8. Lámina foliar obovado-oblonga, atenuada y aguda en el ápice, atenuada hacia la base en un pseudopecíolo corto, haz foliar verde. Flósculos hasta de 5 mm long., con tubo y lóbulos de la corola ligeramente pilosos ..... *E. petiolata*
- 8'. Lámina foliar más oblonga o elíptica, que se atenua sin formar pseudopecíolo, haz foliar con indumento blanquecino o ceniciento. Flósculos mayores a 5 mm long., con el tubo y lóbulos de la corola glabros o pilosos ..... 9
9. Lámina foliar, 30-42 cm long. x 2.5-5 cm lat., oblanceolado-oblonga, gruesa. Sinflorescencia perfectamente corimbosa, con el eje robusto y en línea ligeramente tortuosa, ± en zig-zag, porción vegetativa con 4-5 brácteas vegetativas basales y más de 5 en el eje ..... *E. muiska*
- 9'. Lámina foliar, 25-42.5 cm long. x 2-6.5 cm lat., lanceolado-oblonga o angosta elíptica. Sinflorescencia con el eje en línea más bien recta, porción vegetativa con 1-2 brácteas vegetativas basales y a veces hasta 5 en el eje ..... 10
10. Flósculos con lóbulos de la corola pilosos, limbo y tubo glabros. Lámina foliar lanceolado-oblonga, hasta de 35 cm long. y 5 cm lat ..... *E. funckii*
- 10'. Flósculos con lóbulos de la corola glabros o tenuemente pilosos, base del limbo y parte superior del tubo pilosos. Lámina foliar angosta elíptica, hasta de 42.5 cm long. y 6.5 cm lat ..... *E. betancurii*
11. Porción vegetativa de la sinflorescencia carente de brácteas estériles. Flósculos siempre con pelos glandulares en el tubo y en los lóbulos ..... 12
- 11'. Porción vegetativa de la sinflorescencia siempre con brácteas estériles. Flósculos a veces con pelos glandulares en el tubo y en los lóbulos ..... 15
12. Sinflorescencias dos o más veces más largas que las hojas de la roseta. Caulirrosula simple, erecta, sécil o hasta de ± 3 m de altura ..... *E. corymbosa*
- 12'. Sinflorescencias iguales en longitud o ligeramente más largas que las hojas de la roseta. Caulirrosula algo ramificada a veces simple ..... 13
13. Capítulos discoides, sésiles, arreglados en glomérulos de 3 a 6, dispuestos sobre pedúnculos de 3-10 mm. Flores femeninas de corola reducida a la parte tubular basal, a veces con minúsculas expansiones dentiformes que siempre son más cortas que el estilo y pasan inadvertidas. Caulirrosula erecta, ya simple ya ramificada ..... *E. garciae*
- 13'. Capítulos radiados, con pedicelos largos y delgados. Flores femeninas con corola ligulada, elíptica, más larga que estilo. Caulirrosula erecta simple o ramificada ..... 14
14. Caulirrosula con frecuencia dividida desde la base en varias caulirrosulas paralelamente ascendentes y erectas, de 1-3 m de altura. Lámina foliar, 34-43 cm long. x 5-8 cm lat., oblongo-lanceolada. Sinflorescencias con 40-120 capítulos, iguales o un poco más largas que las hojas de la roseta. Filarias anchamente ovadas ..... *E. pleiochasia*
- 14'. Caulirrosula simple, de hasta 1 m de altura. Lámina foliar 17-23.5 cm long. x 3.5-6 cm lat., obovada. Sinflorescencias con 14-23 capítulos, iguales o más cortas que las hojas de la roseta. Filarias obovadas ..... *E. rabanalensis*
15. Capítulos radiados. Flores femeninas con corola ligulada más larga que el estilo ..... 16
- 15'. Capítulos discoideos. Flores femeninas con corola reducida a la parte tubular basal, a veces con minúsculas expansiones dentiformes que siempre son más cortas que el estilo y pasan inadvertidas ..... 22
16. Caulirrosula simple.. ..... 17
- 16'. Caulirrosula con tallo ± ramificado, fruticoso, con hojas marcescentes (especies propias de Venezuela) ..... 21
17. Caulirrosula sécil. Sinflorescencias dos o más veces más largas que las hojas de la roseta; Lámina foliar, blanda, densamente cubierta de indumento

- cinéreo en haz y envés. Flores femeninas amarillas. Flósculos glabros ..... *E. bogotensis*
- 17'. Caulirrosula erecta, hasta de varios metros de altura, con tronco desnudo. Sinflorescencias desde inclusas hasta dos veces más largas que las hojas de la roseta. Lámina foliar coriácea, firme, glabra y verde por la haz. Flores femeninas amarillas o violado-purpúreas. Flósculos pilosos ..... **18**
18. Flores femeninas violado-purpúreas. Flósculos rojizos. Lámina foliar 40-50 cm long. x 12-15 cm lat. .... *E. purpurascens*
- 18'. Flores femeninas amarillas o verdoso-amarillentas. Flósculos verdosos. Lámina foliar variable, hojas mayores o menores que en la especie anterior **19**
19. Lámina foliar 20-30 cm long. x 5-7.5 cm lat., obovada y agudo acuminada. Flósculos 7-8 mm long ..... *E. sanchezii*
- 19'. Lámina foliar 50-70 cm long x 11-19 cm lat., ovado-lanceolada y aguda u ovada y obtusa. Flósculos 4-5 mm long ..... **20**
20. Lámina foliar oval-lanceolada a elíptica y aguda de 50-70 cm long. x 11-15 cm lat ..... *E. insignis*
- 20'. Lámina foliar oval-oblonga y obtusa hasta de 50 cm long. x 19-20 cm lat ..... *E. trianae*
21. Flores femeninas de color crema. Lámina foliar 30-40 cm long. x 4-5 cm lat. Capítulos con pedicelos de 2-4 cm long. Flósculos pilosos y glandulíferas *E. meridensis*
- 21'. Flores femeninas de color amarillo. Lámina foliar, 30-50 cm long. x 5-10 cm lat. Capítulos sésiles o subsésiles, en glomérulos. Flósculos glabros ..... *E. cristalinensis*
22. Caulirrosula sésil o subsésil. Sinflorescencias 2-3 veces más largas que las hojas de la roseta .... **23**
- 22'. Caulirrosulas con tallo alargado, erecto, de hasta 3 m de altura, densamente cubierto de hojas marcescentes. Sinflorescencias inclusas en la roseta o hasta dos veces más largas que las hojas ..... **24**
23. Lámina foliar gruesamente coriácea y rígida en vivo, peciolada, de 26-46 cm long. x 4-5(-9) cm lat., trasovado oblonga o trasovado lanceolada, por la haz verde amarillenta, con indumento pruinoso (adultas) o puberulento, por el envés amarillento tomentosa y peciolada. Flósculos escasamente pilosos en la porción superior del tubo y base de limbo ..... *E. sclerophylla*
- 23'. Lámina foliar coriácea y flexible en vivo, sésil, de 49-56 cm long. x 3-4 cm lat., angosto elíptica, largamente atenuada, con indumento seríceo áureo a grisáceo en ambas caras. Flósculos pilosos en el tubo y en los lóbulos de la corola ..... *E. laxiflora*
24. Lámina foliar, 36-58 cm long. x 3.5-12 cm lat., obovado-oblonga. Sinflorescencias 1.5-2 veces más largas que la roseta de hojas ..... *E. jimenez-quesadae*
- 24'. Lámina foliar 20-40 cm long. x 3-6 cm lat., angosto-elíptica. Inflorescencias inclusas en la roseta o ligeramente más largas que las hojas ..... *E. guacharaca*
2. *Espeletia raquirensis* Rodríguez-Cabeza & S. Díaz, sp. nov. **Figs. 2, 3 C-D**
- Espeletia chocontanae* Cuatrec. affinis a qua imprimis differt foliis numquam petiolatis et cum nervis secundariis ascendentibus, indumento sericeo aureo vestitis; ramis floriferis brevioribus cum duobus bracteis sessilibus atque floribus ligulatis numerosioribus.
- Typus:** COLOMBIA, BOYACÁ: Municipio de Ráquira, Vereda Firita, Peña Arriba, páramo de Rabanal, en límites con el municipio de Guachetá, vereda San Antonio (Cundinamarca). 320 m de altitud. N 05°24' W 073°36'. 12 ago 2008. B.V. Rodríguez-Cabeza, R. Galindo-T., & I. Cortez 1973. Holotypus COL [546637, 546638, 546640], Isotypi COL [546634, 546635, 546636], HUA, UIS, UPTC.
- Etimología:** El epíteto alude al municipio de Ráquira en Boyacá, donde se encuentra la localidad típica de la especie.
- Caulirrosula de hasta 1 m de altura. Hojas sésiles; vaina foliar de 5-6 cm long. x 4-4.5 cm lat., ovada, dorsalmente cubierta con largo y denso indumento seríceo con tinte espadíceo y cerúleo lustroso que tiende a áureo; lámina foliar de 32-34.5 cm long. x 4.5-6 cm lat., elíptica subcoriácea, con el ápice agudo y la base atenuada, está en su parte más angosta de 2-2.3 cm de lat., cubierta por indumento blanquecino amarillo lustroso en vivo que torna a ocráceo al secar, margen entera, nervio medio ensanchado hacia la base densamente cubierto en haz y envés por indumento ocráceo lustroso, nervios secundarios 14-19 por decímetro, conspicuos por el envés y divergiendo en ángulo de 40-55°.
- Ramas floríferas seis coetáneas, de 69.5-74.5 cm de largo; porción vegetativa de 16-35 cm long., cubierta por indumento



**Figura 2.** *Espeletia raquirensis* **A.** Esquema de la rama florífera; **B.** Perfil foliar; **C.** Filaria externa vista por el envés; **D.** Filaria interna vista por la haz; **E.** Palea de las flores femeninas; **F.** Flor femenina ligulada; **G.** Palea de los flósculos; **H.** Flósculo hermafrodita. Diseño digital de Betsy Viviana Rodríguez-Cabeza, elaborado con base en el ejemplar tipo (B.V. Rodríguez-Cabeza *et al.* 1973 COL).

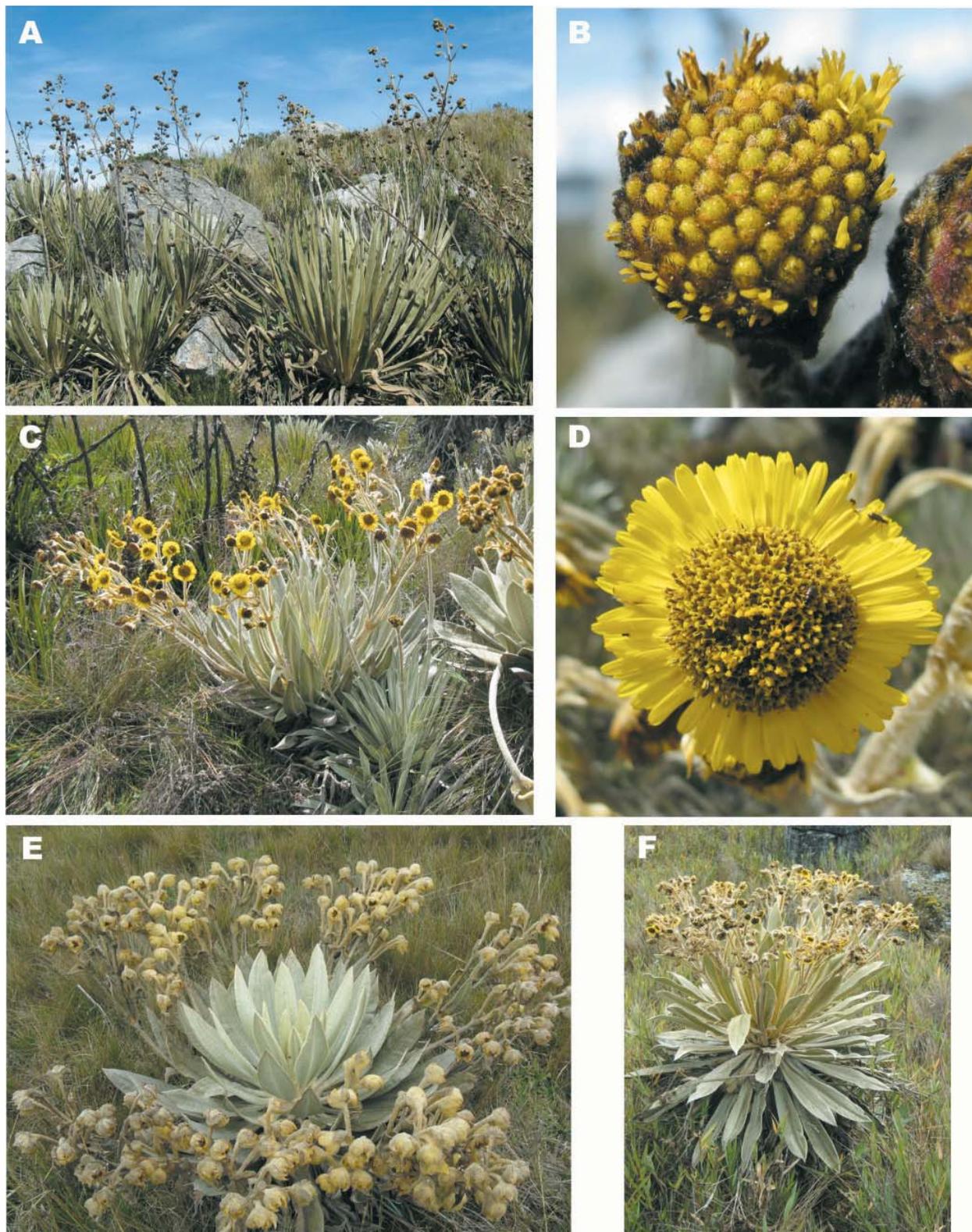


Figura 3. A-B *Espeletia laxiflora* A. Hábito; B. Detalle de un capitulo; C-D *Espeletia raquirensis* C. Hábito, D. Detalle de un capitulo; E. *Espeletia tibamoensis*; F. *Espeletia mirabilis*. Fotografías de Betsy Viviana Rodríguez-Cabeza.

denso lanoso similar al de los nervios centrales de las hojas; con un par de brácteas estériles en la base, con lámina de 16-26 cm long. x 2-3 cm lat., semejante a las hojas de la roseta, vaina 6-7 cm long.; porción fértil cubierta por indumento lanoso áureo y formando un tirso corimbiforme con 22-34 capítulos; brácteas florales decrecientes de 3.5-17.5 cm long. x 1.5-2.6 cm lat., lineales o angosto lineales, agudas en el ápice, amplexantes, siempre más cortas que los pedúnculos; pedúnculos de 10-32 cm long., pedicelos más cortos y decrecientes hacia el ápice.

Capítulos erectos, radiados, involucro con 8-12 filarias, dispuestas en 2-3 series, de 9-24 mm long. x 4-8.5 mm lat., ovadas o elípticas rostradas en el ápice, cara abaxial densamente cubierta por indumento largo seríceo, cara adaxial con indumento largo seríceo en tercio superior o en ápice, en las mas internas glabra. Paleas de las flores liguladas de 6-9.8 cm long. x 2-3.8 cm lat., angosto-obovadas, obovado-anguladas o elípticas, agudas en el ápice, margen entera o ligeramente dentada hacia el ápice, las mas externas cubiertas en el dorso por indumento largo seríceo, las internas con una lista longitudinal de tricomas que se ensancha y se torna más densa hacia el ápice, quedando a cada lado un área glabra, internamente glabras o con escasos tricomas en el ápice, todas en la cara ventral glabras, con 5-12 nervios longitudinales. Paleas de los flósculos 6.2-7.7 mm long. x 2-3 mm lat., elípticas o angosto-obovadas, agudas en el ápice, margen entera o con escasos dientes en el ápice, externamente con abundantes y largos tricomas en la zona apical, internamente glabras, con 7-9 nervios longitudinales. Flores femeninas liguladas 88-108 por capítulo, dispuestas en 6-8 series, corolas amarillas, de 12-16.5 mm de largo; porción tubular de 1.5-2.8 mm long., con abundantes y largos tricomas pluricelulares que se extienden a la base del limbo; limbo angosto-obovado, de 10.5-13.8 mm long. x 1.5-2.8 mm lat., con 2-3 dientes redondeados y obtusos, con 3-6 nervios longitudinales; pistilo de 4.3-7.5 mm long., estigma bifido, ramas estigmáticas de 1.8-3 mm de long. Flósculos 319-431 por capítulo, acampanados, de 7-8 mm de largo, amarillos; porción tubular de 3-3.7 mm long., con largos tricomas que se hacen más abundantes hacia el extremo superior y continúan en la base de la porción ensanchada; lóbulos de la corola de 0.6-1 mm long. x 0.5-0.8 mm lat., triangulares, agudos y con largos tricomas pluricelulares en la cara externa; estambres exsertos, filamentos de 2-2.6 mm long., adnatos a la porción tubular de la corola, anteras singenésicas de 2.5-3.1 mm long., apéndice apical triangular y cocleariforme de 0.5-0.6 mm long. x 0.3-0.4 mm lat.; pistilo de 7.2-8.5 mm long. Aquenios de 2.5-3.8 mm long. x 0.8-1.8 mm lat., obovados, triquetros, glabros y con costillas prominentes.

**Comentarios:** La única población conocida de *Espeletia raquirensis* cuenta con cerca de 600 individuos; se desarrolla en suelos húmedos, en asociaciones de tipo pajonal-frailejónal con especies como *Calamagrostis effusa* (Kunth) Steud., *Paepalanthus andicola* Körn., *Castilleja fissifolia* L.f., *Halenia asclepiadea* (Kunth) G. Don, *Orthrosanthus chimboracensis* (Kunth) Baker, *Puya* sp., arbustos de no más de 60cm de altura de *Arcytophyllum nitidum* (Kunth) Schldl., *Hypericum* sp. y *Aragoa* sp. y los frailejones *Espeletia barclayana* Cuatrec., *Espeletia murilloi* Cuatrec. y *Espeletia boyacensis* Cuatrec. Actualmente esta población está seriamente amenazada por la rápida expansión de cultivos de papa, el uso de tractores para el arado y la apertura de minas de carbón en las veredas Firita (Ráquira) y San Antonio (Guachetá).

Esta especie muestra su mayor afinidad con *Espeletia chocontana* Cuatrec., propia de los páramos de los municipios de Chocontá, Cogua, Zipaquirá, Tausa y Villapinzón en Cundinamarca, de la cual difiere por presentar hojas sésiles (vs. pseudopeciolas), con nervios ascendentes que divergen en ángulos de 40 - 55° (vs. perpendiculares), indumento seríceo amarillo lustroso con brillo metálico (vs. indumento lanoso afelpado blanco muy denso sobre la nerviación), inflorescencias más cortas (69.5-74.5 cm long. vs. 100 cm long.), abiertas y con menor número de capítulos (22-34 vs. 35-54), brácteas vegetativas en menor número (1 par vs. 3-4 pares), elípticas y sésiles (vs. lineales y largamente pseudopeciolas) y mayor número de flores liguladas por capítulo (88-108 vs. 50-65).

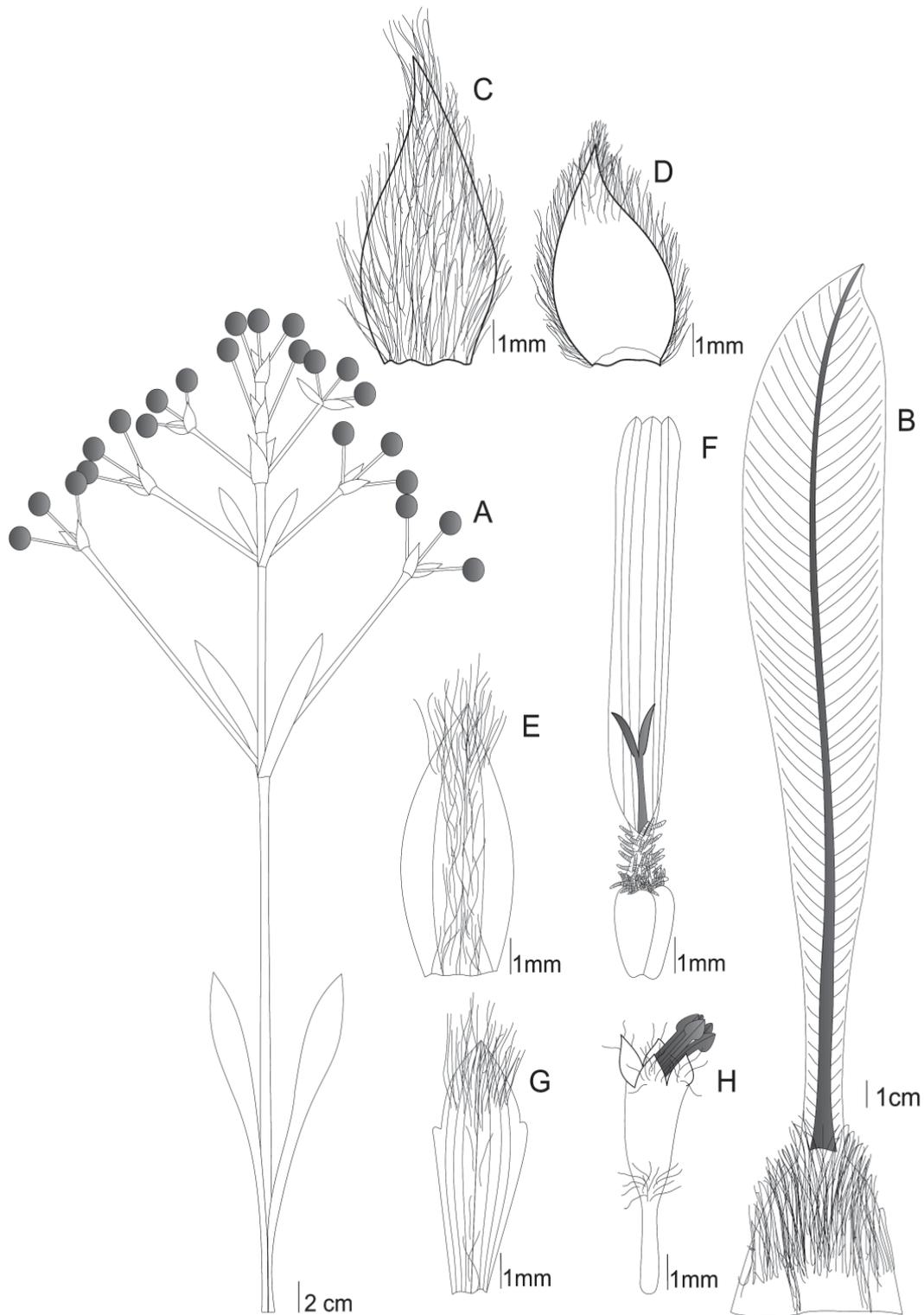
**3. *Espeletia mirabilis* S. Díaz & Rodríguez-Cabeza, sp. nov. Figs. 3 F, 4**

*Espeletia grandiflorae* Mutis ex Humb. & Bonpl. var. *grandiflorae* affinis a qua imprimis differt foliis numquam petiolatis ad basim attenuatis; ramis floriferis plurimis capitulatis; filariis paucioribus angustis; paleis flosculorum hermaphroditorum maioribus; floribus foemineis ligulatis minoribus, lobis florum discorum pilosis.

**Typus:** COLOMBIA, BOYACÁ: Parque Nacional Natural Pisba, Municipio Socotá, vereda Corral de Piedra, sector río Arzobispo, parte alta de Los Estupendos. 3550m de altitud. N 05°58'33" W 72°33'47". 14 sep 2008. B.V. Rodríguez-Cabeza, & L.A. Velasco 2001. Holotypus COL [546639], Isotypi COL [546641, 546642], HUA, UIS, UPTC.

**Etimología:** El epíteto específico alude a "Los Estupendos", nombre de la vereda donde crece la especie.

Caulirrosula de 1.20 m de altura. Hojas largamente pseudopeciolas; lámina de 26-35 cm long. x 4-4.7 cm lat.,



**Figura 4.** *Espeletia mirabilis* A. Esquema de la rama florífera; B. Perfil foliar; C. Filaria externa vista por el envés; D. Filaria media vista por la haz; E. Palea de las flores femeninas; F. Flor femenina ligulada; G. Palea de los flósculos; H. Flósculo hermafrodita. Diseño digital de Betsy Viviana Rodríguez-Cabeza, elaborado con base en el ejemplar tipo (B.V. Rodríguez-Cabeza *et al.* 2001 COL).

obovada, con ápice obtuso rematado en un acumen agudo, largamente atenuada hacia la base y formando un pseudopeciolo que se ensancha ligeramente hacia la vaina, haz y envés cubiertos de indumento seríceo áureo, que se torna más largo y denso en el envés, margen entera y levemente revoluta; nervio medio ensanchado hacia la base, impreso por la haz, prominente por el envés, nervios secundarios 16-19 por decímetro, ligeramente conspicuos por envés y divergiendo en ángulo de 40-50°, nervio central y nervios secundario con indumento más denso; vaina foliar de 5.5-6 cm long. x 4.5-5.5 cm lat., ovada o anchamente ovada, dorsalmente con indumento largo y denso seríceo áureo, que se va perdiendo hacia la mitad inferior, cara ventral con indumento denso y largo seríceo en la porción apical.

Ramas floríferas ca. 14 coetáneas, de 55.5-65 cm de largo total; porción vegetativa de 33.5-42.5 cm long., cubierta por indumento denso y largo seríceo áureo sobrepuesto por indumento largo flocoso blanquecino, con un par de brácteas vegetativas con lámina de 9-18.5 cm long. x 1.5-2.2 cm lat., semejantes a las hojas de la roseta, vaina 2-3.5 cm long., dispuestas generalmente a corta distancia de la base; porción fértil tirsóidea ligeramente corimbiforme, con 15-31 capítulos péndulos, brácteas fértiles más cortas que los pedúnculos y decrecientes hacia el ápice, de 3-10 cm long. x 1-1.5 cm lat., lineales u angosto ovadas, agudas en el ápice; pedúnculos de 4.5-20 cm long., pedicelos decrecientes hacia el ápice.

Capítulos radiados; involucreo con 10-11 filarias, dispuestas en 2-3 series, de 8.5-19 mm long. x 3.8-9 mm lat., por lo general ovadas a veces elípticas, agudas en el ápice, cara abaxial cubierta totalmente por indumento denso y largo seríceo, cara adaxial con largos tricomas hacia el tercio superior o restringidos al ápice, margen entera. Paleas de las flores liguladas de 6.8-8 mm long. x 2.3-3.8 mm lat., elípticas, ovadas u obovadas, agudas en el ápice, externamente con una lista longitudinal de tricomas que se ensancha y se torna más densa hacia el ápice, quedando a cada lado un área glabra o con largos tricomas solo en el ápice, internamente glabro o con escasos y largos tricomas en el ápice, nervios longitudinales 3-5; paleas de los flósculos de 6.7-7.8 mm long. x 1.8-2.7 mm lat., obovada u obovada-triangular, acutada o cuspidada, externamente con abundantes y largos tricomas hacia el ápice, internamente glabras, con 3-11 nervios longitudinales. Flores liguladas amarillas, 62-75 por capítulo, dispuestas en 6 series, corola de 11.8-14.5 mm largo; tubo de 1.3-2 mm long. con abundantes y largos tricomas que se extienden a la base del limbo; limbo de 10.1-12.6 mm long. x 1.3-2 mm lat., rectangular, con 5-9 nervios longitudinales, ligeramente atenua-

do hacia el tubo y rematado hacia el ápice por 2-3 dientes obtusos; pistilo de 4.3-5.5 mm de largo, estigma bífido, ramas estigmáticas de 1.5-2.5 mm de largo. Flósculos hermafroditas, 146-179 por capítulo, corola de 7-7.8 mm long., acampanada, amarilla; porción tubular de 2.7-3 mm long., con escasos y largos tricomas principalmente hacia el ápice, limbo glabro, lóbulos de la corola 1.2-1.3 mm long. x 0.5-0.8 mm lat., triangulares con largo pelos pluricelulares en la cara externa; estambres exsertos, filamentos de 2-2.8 mm long, adnatos a la porción tubular de la corola, anteras singenésicas de 2.8-3.4 mm long., con apéndice apical rómbico de 0.5-0.8 mm long.; pistilo de 7.3-8.2 mm de largo. Aquenios de 1.8-3 mm long. x 1-1.8 mm lat., triquetros, lisos y negros.

**Comentarios:** Especie afín a *Espeletia grandiflora* var. *grandiflora* Humb. & Bonpl. de los páramos de Cundinamarca, de la que difiere por presentar hojas sésiles y con la base largamente atenuada (vs. peciolada o pseudopeciollada), mayor número de capítulos (15-31 vs. 6-15), filarias angostas (3.8-9 mm lat. vs. 10-15 mm lat.) y en menor número (10-11 vs. 15-25), paleas de los flósculos mayores (6.7-7.8 mm long. x 1.8-2.7 mm lat. vs 5-6 mm long. vs. 2 mm lat.), flores liguladas menores (11.8-14.5 mm long. vs. 16-19 mm long.), tubo más corto (1.3-2 mm long. vs. 2-3 mm long.) y lóbulos de los flósculos largamente pilosos (vs. glabros).

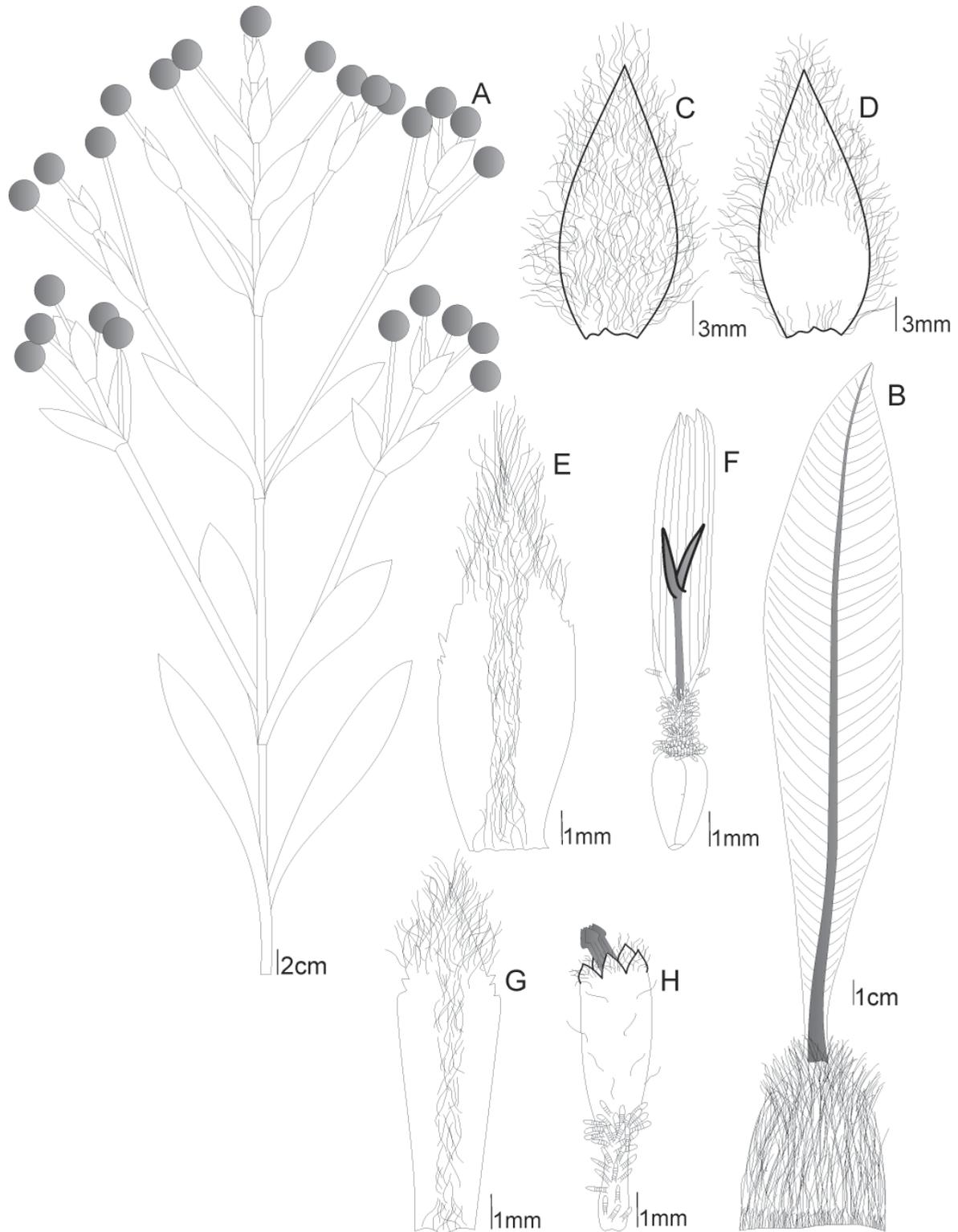
**4. *Espeletia tibamoensis* Rodríguez-Cabeza & S. Díaz, sp. nov. Figs. 3 E, 5**

*Espeletia* jaramilloi S. Díaz affinis a qua imprimis differt foliis petiolatis; ramis floriferis brevioribus, foliis ramealibus sterilibus in unicum jugum dispositis; filariis in cappitulo pluribus et maioribus; floribus foemineis copiosis et in septem series dispositis; flosculis in capitulo copiosis, lobis florum discorum extus pilosis.

**Typus:** COLOMBIA, BOYACÁ: Límites entre los municipios de Siachoque y Toca, veredas Cormechoque arriba y Tubenecos, páramo La Cortadera, sector Alto Tibamoa. 3600 m de altitud. 16 may 2008. *B.V. Rodríguez-Cabeza & A. Burgos 1959*. Holotypus COL [546643, 546645, 546646], Isotypi COL [546644, 546653], HUA, UIS, UPTC.

**Etimología:** El epíteto alude al Alto de Tibamoa, en el páramo de La Cortadera, localidad tipo de la especie.

Tallo erecto arrositado de hasta 2.50 m de altura. Hojas pecioladas, peciolo conspicuo de 1.5-2.3 cm long. x 7-9 mm long.; lámina foliar angosto-elíptica, de 26.5-34 cm long. x 4.2-6 cm lat., aguda en el ápice, atenuada hacia la base, cubierta en ambas caras por indumento tomentoso, en vivo blanco grisáceo que se torna más oscuro con la madurez y



**Figura 5.** *Espeletia tibamoensis* A. Esquema de la rama florífera; B. Perfil foliar; C. Filaria externa vista por el envés; D. Filaria externa vista por la haz; E. Palea de las flores femeninas; F. Flor femenina ligulada; G. Palea de los flósculos; H. Flósculo hermafrodita. Diseño digital de Betsy Viviana Rodríguez-Cabeza, elaborado con base en el ejemplar tipo (B.V. Rodríguez-Cabeza *et al.* 1959 COL).

se pierde ligeramente por la haz, en seco ferruginoso recubierto por una capa de indumento denso flocoso cinéreo, margen entera y ligeramente revoluta; nervio medio prominentemente algo ensanchado hacia la base, más grueso en el envés, nervios secundarios 8-16 por decímetro, divergentes en ángulo de 40-60°, conspicuos por el envés. Vaina foliar de 6.5-8 cm long. x 5-6.5 cm lat., anchamente ovada, a veces triangular, dorsalmente cubierta con indumento seríceo denso y largo, ventralmente con indumento denso hacia el ápice.

Ramas floríferas de 61-78 cm de largo, semileñosas, fistulosas; porción vegetativa de 10-24 cm long., cubierta de indumento denso lanoso, en vivo blanco, en seco espadíceo, sobrepuesto por indumento largo flocoso blanquecino o gris oscuro; un único par de brácteas estériles, basales, angosto obovadas, agudas en el ápice y amplexantes en la base, de 20-22 cm long. x 3-4 cm lat., semejantes en textura e indumento a las hojas de la roseta; porción fértil de 44-54 cm long., tirsóidea, corimbiforme, con 20-29 capítulos, cubierta por indumento denso lanoso áureo recubierto de indumento largo blanco y denso flocoso que torna a gris oscuro al madurar; pedúnculos de 5-26 cm long., brácteas florales de 5-16 cm long. (incluida la vaina) x 1.5-3.3 cm lat., las basales lineales y agudas en el ápice, las proximales elípticas u ovado agudas.

Capítulos radiados, ligeramente péndulos; involucreo de 15 filarias, dispuestas en 4 series, las exteriores de 20-29 mm long. x 11-16 mm lat., las intermedias e internas de 14-19 mm long. x 3.5-11 mm lat., variables en forma, ovadas, angosto ovadas, elípticas o rectangular oblongas, agudas en el ápice, reticuladas, margen entera, a veces las interiores con pequeños dentículos hacia el ápice, cara externa cubierta por indumento tomentoso largo y denso, cara interior con largos tricomas en la mitad superior o sólo hacia el ápice; paleas de las liguladas de 9-14 mm long. x 2.8-4.5 mm lat., angosto-ovadas, obovado-anguladas o lineales, acutadas, nerviación reticulada con un nervio principal o con 7-18 nervios longitudinales, margen liso o con 1-3 dientes en ápice, externamente con una lista longitudinal de tricomas que se ensancha y hace más densa hacia el ápice quedando a cada lado un área glabra, internamente glabras; paleas de los flósculos de 8-10 mm long. x 2-3 mm lat., obovado angostas u obovado anguladas, acutadas, con 5-7 nervios longitudinales, margen liso o con algunos dientes en el ápice, externamente denso y largo pilosa en ápice, internamente glabra. Flores liguladas 83-86 por capítulo, dispuestas en 7 series, corola amarilla, de 10-10.6 mm de largo; porción tubular de 1.8-2.5 mm long., cubierta completamente por abundantes y largos tricomas pluricelulares

que además forman una corona en su base; limbo angostamente oblongo con 4-7 nervios longitudinales, de 7.5-8.6 mm long. x 1.5-2 mm lat., en el envés con glándulas en su mitad inferior, ápice con 2-3 dientes agudos; pistilo de 6.7-8 mm long., estigma bífido, ramas estigmáticas de 1.8-2.2 mm long. Flósculos 135-169 por capítulo, corola ligeramente funeliforme amarilla, de 7-8 mm long.; porción tubular de 2-2.7 mm long., con abundantes y largos tricomas pluricelulares engrosados; porción ensanchada con abundantes y largos tricomas en la base, el resto ligeramente piloso, pelos más delgados, lóbulos triangulares, agudos en el ápice, con tricomas pluricelulares largos y caedizos de base glandular; estambres exsertos, filamentos de 2-2.5 mm long., anteras singenésicas de 2.9-3.7 mm long., apéndice apical cocleariforme de 0.5-0.7 mm long. x 0.3-0.5 mm lat.; pistilo de 7-8.5 mm long. Aquenios de 3 mm long. x 1-2 mm lat., obovados, triquetros, glabros y con costillas prominentes.

**Comentarios:** Esta hermosa especie crece en suelos de húmedos a muy húmedos, en una planicie cubierta de denso pajonal con escasos individuos de *Acaena cylindristachya* Ruiz & Pav., *Gentianella* sp., *Lupinus* sp., *Chusquea tesellata* Munro y pequeños arbustos de *Hypericum* sp. No se observaron poblaciones de otros frailejones. En relación con el estado de conservación, por décadas este páramo ha estado sometido a quemas y presencia de ganado por lo cual la población de *Espeletia tibamoensis* con cerca de 800 individuos se caracteriza por presentar plantas solitarias o en pequeños grupos de hasta 15 individuos, muy aislados entre sí, siempre con huellas de quemas. Por lo anterior, *Espeletia tibamoensis* se podría considerar como una especie amenazada, que requiere medidas de conservación y recuperación para evitar su desaparición.

Especie afín a *Espeletia jaramilloi* S. Díaz propia del páramo de Pisba en Boyacá, de la cual difiere por presentar hojas con peciolo conspicuo, vainas foliares mayores (6.5-8 cm long. x 5-6.5 cm lat. vs. 5.5 cm long. x 5 cm lat.), inflorescencias con porción vegetativa más corta (10-24 cm long. vs. 28-39.5 cm long.), y con único par de brácteas vegetativas (vs. 5 pares), filarias de mayor tamaño y en mayor número por capítulo (15 vs. 5-10), paleas de los flósculos más largas y más anchas (8-10 mm long. x 2-3 mm lat. vs. 6.5-7.5 mm long. x 1-1.5 mm lat.); flores liguladas más numerosas (83-86 vs. 74), más pequeñas (10-10.6 mm long. vs. 15-16 mm long.) con porción tubular más corta (1.8-2.5 mm long. vs. 3 mm long.) y dispuestas en 7 series (vs. 3 series). Flósculos con abundantes y largos tricomas en la porción tubular y que se extienden a la base de la corola, lóbulos con pelos largos en la cara externa (vs. glabros).

## Agradecimientos

Dejamos constancia de nuestro agradecimiento a Luis Antonio Velasco del Parque Nacional Natural El Cocuy por suministrarnos el material para describir *Espeletia mirabilis*. A Herber Palacios, Rafael Rivero y Nancy Rivera del Santuario de Flora y Fauna Guanentá quienes facilitaron la recolección del material de estudio. A la Unidad de Parques Nacionales Naturales de Colombia, Corpoboyacá y la Fundación Ecosistema Colombia por el apoyo y facilidades otorgadas. Igualmente agradecemos al padre Pedro Ortiz Valdivieso por la revisión de las diagnósicas latinas y a Robinson Galindo-T. por su constante apoyo en el estudio de los frailejones en las áreas protegidas del país.

## Bibliografía citada

- Cuatrecasas, J.** 1996. Clave provisional de las especies del género *Espeletopsis* Cuatrec. (Espeletiinae, Compositae). *Annales Jard. Bot. Madrid* **54**:370-367.
- Díaz-Piedrahita, S. & S. Obando.** 2004. Una especie nueva de *Espeletopsis* (Asteraceae, Heliantheae) de Colombia. *Rev. Acad. Colomb. Cienc.* **30**(116):331-352.
- , **B.V. Rodríguez-Cabeza & R. Galindo-T.** 2006. Interesantes novedades en Espeletiinae (Asteraceae-Heliantheae) de Colombia. *Rev. Acad. Colomb. Cienc.* **30**(116):349-352.
- & **B.V. Rodríguez-Cabeza.** 2008. Novedades en los géneros *Espeletia* Mutis ex Humb. & Bonpl. y *Espeletopsis* Cuatrec. (Asteraceae, Heliantheae, Espeletiinae). *Rev. Acad. Colomb. Cienc.* **32**(125):455-458.

Recibido: septiembre 10 de 2010.

Aceptado para su publicación: noviembre 30 de 2010.

# PLANTAS DE COCA EN COLOMBIA. DISCUSIÓN CRÍTICA SOBRE LA TAXONOMÍA DE LAS ESPECIES CULTIVADAS DEL GÉNERO *ERYTHROXYLUM* P. BROWNE (ERYTHROXYLACEAE)

Aida Galindo Bonilla<sup>1</sup>, José Luis Fernández-Alonso<sup>2</sup>

## Resumen

**Galindo Bonilla, A., J. L. Fernández-Alonso:** Plantas de coca en Colombia. Discusión crítica sobre la taxonomía de las especies cultivadas del género *Erythroxylum* P. Browne (Erythroxylaceae). Rev. Acad. Colomb. Cienc. **34** (133): 455-465, 2010. ISSN 0370-3908.

La botánica forense tiene alta demanda en Colombia en relación con material procedente de cultivos ilícitos, principalmente de plantas de “coca”. Se realizó el estudio taxonómico de las dos especies y cuatro variedades de *Erythroxylum* P. Browne (Erythroxylaceae) cultivadas en el país. Se plantea la hipótesis de hibridación entre *E. coca* Lam. y *E. novogranatense* (Morris) Hieron. y también entre las dos variedades de *E. coca* y se describen importantes cambios en la distribución de los taxones en el territorio nacional. Tanto la hibridación como los cambios en patrones de distribución se deben a la intervención antrópica.

**Palabras clave:** cocas cultivadas, *Erythroxylum*, *Erythroxylaceae*, cultivos ilícitos, botánica forense.

## Summary

Forensic botany is in high demand in Colombia in connection with plant material, mainly “coca” from illicit crops. The taxonomic study of the two species and four varieties of *Erythroxylum* P. Browne (Erythroxylaceae) cultivated in Colombia was carried out. Hybridization between *E. coca* and *E. novogranatense* and between the two varieties of *E. coca* is suggested, and important changes in the geographic distribution of all taxa are described. Both, hybridization and changes in distribution patterns are due to anthropic intervention.

**Key words:** cultivated cocas, *Erythroxylum*, *Erythroxylaceae*, illicit crops, forensic botany.

<sup>1</sup> Laboratorio de Botánica Forense. Instituto Nacional de Medicina Legal y Ciencias Forenses. Bogotá, Colombia. Correo electrónico: [agalindo@medicinalegal.gov.co](mailto:agalindo@medicinalegal.gov.co)

<sup>2</sup> Real Jardín Botánico CSIC, Plaza de Murillo 2, 28014 Madrid. Correo electrónico: [jlfernandeza@rjb.csic.es](mailto:jlfernandeza@rjb.csic.es)

Las investigaciones se realizaron en el Instituto Nacional de Medicina Legal y Ciencias Forenses- Laboratorio de Botánica Forense, Bogotá y en el Instituto de Ciencias Naturales de la Universidad Nacional de Colombia, Bogotá.

## I. Introducción

*Erythroxylum* es un género pantropical que cuenta con alrededor de 230 especies, de las cuales cerca de 190 se encuentran en el Neotrópico. A este género pertenecen las comúnmente denominadas “plantas de coca” (Plowman & Rivier, 1983, Plowman & Hensold, 2004), que en Colombia incluye cerca de 40 especies (Jara com. pers.). Schulz dividió el género en 17 secciones basándose principalmente en caracteres de la estípula foliar y las estrías presentes en ellas (Schulz, 1907). Plowman consideró que las especies del Neotrópico se separan sólo en dos grandes grupos; la sección *Archaerythroxylum* Schulz de estípulas lisas y la sección *Rhabdophylum* Schulz de estípulas estriadas, mientras que las otras secciones son artificiales (Plowman, 1989).

Únicamente dos especies de este género han sido cultivadas desde épocas prehispánicas; *Erythroxylum coca* Lam. y *E. novogranatense* (Morris) Hieron. En la literatura se reconocen las variedades taxonómicas *Erythroxylum coca* var. *coca*, *Erythroxylum coca* var. *ipadu* Plowman, *Erythroxylum novogranatense* var. *novogranatense* y *Erythroxylum novogranatense* var. *truxillense* (Rusby) Plowman. Estas plantas han sido del interés de botánicos, horticultores y farmacéutas desde principios del siglo XIX, lo cual produjo una historia compleja y un largo debate sobre su identidad taxonómica correcta (Plowman, 1982). Historia que llega hasta nuestros días cargada de un fuerte conflicto social relacionado con los cultivos ilícitos en Latinoamérica (Galindo & Fernández-Alonso, 2009).

Por otra parte, la botánica forense ha tenido un desarrollo relativamente reciente a nivel internacional aplicado a la identificación de material vegetal en la investigación criminal. En Colombia la tendencia presenta variaciones importantes debido al alto impacto de los cultivos ilícitos en el país, que a su vez esta fuertemente relacionado con la situación socio-política actual. La solicitud de servicio forense mas común ha sido la identificación de plantas procedentes de cultivos ilícitos, principalmente de las denominadas “plantas de coca” (Fernández-Alonso *et al.*, 2007; Galindo & Fernández-Alonso, 2009).

La necesidad de identificación forense en los potenciales cultivos ilícitos, ha obligado a realizar la revisión taxonómica de las plantas cultivadas del género *Erythroxylum* con el objeto de estudiar su delimitación y establecer el status taxonómico actual a partir de una muestra de la población reciente, detectando nuevos rangos de distribución y algunos aspectos interesantes de su morfología, que sugieren cambios concordantes con una dinámica poblacional alta.

## II. Materiales y métodos

Se realizó la revisión de la literatura disponible sobre la taxonomía, morfología, biosistemática, etnobotánica y demás aspectos informativos de las especies cultivadas (Galindo & Fernández-Alonso, 2009). Mediante las técnicas clásicas en taxonomía vegetal se analizaron caracteres de morfología externa, arquitectura foliar, cristales y polen, según los procedimientos que se describen a continuación.

### 1. Colecciones estudiadas

Para este estudio se revisaron algo más de 100 especímenes de la colección del Herbario Nacional Colombiano (COL) y por otra parte, 182 especímenes recolectados en cultivos actuales de Colombia, que debido a la connotación de ilicitud de los mismos, se contó con la colaboración de la Policía Antinarcóticos en el muestreo. De éstos, 61 muestras procedían de los principales núcleos de producción en 8 departamentos, 71 de dos cultivos experimentales autorizados por el gobierno colombiano y las restantes 50 provenían de material de estudio de casos nacionales analizados y emitidos previamente. La obtención de material vegetal procedente de cultivos ilícitos es prácticamente imposible para los colectores botánicos en condiciones normales, debido a la situación socio-política actual en relación con el fenómeno del narcotráfico y el conflicto armado, lo que resalta la importancia de esta muestra que representa los cultivos recientes en Colombia.

De estas muestras quedó testigo en el Herbario de Referencia Forense del Instituto Nacional de Medicina Legal y Ciencias Forenses (INMLyCF) y de las muestras de cultivo experimental en que se obtuvo material suficiente, se depositaron duplicados en el Herbario Nacional Colombiano (COL).

### 2. Morfología y anatomía

Para la observación morfológica y análisis de imágenes se empleó el estereo microscopio Olympus® SZX16, con objetivo 5.0x plan-apocromático, con la cámara digital Media Cybernetics® Evolution MP y software para manejo de imágenes Image Pro-Plus v6.2 de Media Cybernetics® del Laboratorio de Botánica Forense del INMLyCF.

Para la observación de granos de polen y superficie foliar, se tomaron muestras de los ejemplares procedentes de los cultivos experimentales en las secciones centrales de la lámina foliar y las anteras disponibles en los mismos individuos. Se empleó el microscopio electrónico de barrido (SEM) FEI®QUANTA 200 del Laboratorio de Microscopía Electrónica de la Universidad Nacional en modo de operación de vacío. Las muestras fueron metalizadas en un sputter Balzers® SDC-050 en vacío intermedio con argón sobre una placa de oro-paladio.

Para la observación de cristales, además de SEM, se empleó el microscopio óptico de luz transmitida y luz polarizada cruzada Olympus® BX51 del Laboratorio de Evidencia Traza del INMLyCF, para lo cual se realizó previamente la clarificación de las láminas foliares.

### 3. Terminología

Para la terminología empleada en la descripción de las estructuras morfológicas planas se siguió a **Moreno** (1984), **Font Quer** (1985) y **Hickey & King** (2000). Para arquitectura foliar se siguió la propuesta del **Leaf Architecture Working Group** (1999). En lo referente a los caracteres propios de *Erythroxylum* se siguió la terminología de **Schulz** (1931) y **Plowman** (1980a, 1980b, 1982, 1989). Para la lectura de los caracteres de cristales se tomó como referencia a **Metcalf & Chalk** (1950) y a **Parra & Flórez** (2001).

### 4. Análisis estadístico

Se realizaron análisis de estadística descriptiva sobre el material vegetativo y a partir de estos resultados los datos fueron evaluados mediante análisis multivariado de correspondencias múltiples, para determinar posibles tendencias o agrupamientos en los caracteres con respecto a las determinaciones taxonómicas mediante el programa estadístico SPAD v4.51 (CISIA, 2001).

## III. Discusión y resultados

El grupo de muestras estudiadas proveniente de los cultivos experimentales incluyó catorce variantes comerciales conocidas en Colombia hasta ahora, aunque hay al menos tres nuevas variantes registradas con posterioridad al desarrollo de este estudio. Las estudiadas son: “Amarga”, “Boliviana blanca”, “Boliviana negra”, “Boliviana roja”, “Chirosa”, “Crespa”, “Dulce”, “Gigante”, “Tingo maría”, “Tingo pajarita”, “Tingo llanera”, “Tingo negra”, “Patirroja” y “Pomarrosa”, cuyas denominaciones fueron establecidas probablemente para denotar características morfológicas externas, procedencia geográfica o propiedades de producción o resistencia con fines comerciales. Este grupo de cultivares se encuentra ubicado en un mismo terreno, de donde se tomaron las muestras en una determinada época del año. Con esto se minimizó la posible variación fenotípica relacionada con condiciones climáticas, tipo de suelo, fertilizantes y la aspersión aérea, entre otras variables muy difíciles de controlar cuando se realiza el muestreo de individuos procedentes de diferentes zonas del país y colectados en épocas diferentes.

Se evaluó la informatividad de los caracteres taxonómicos, teniendo como base las descripciones mencionadas

en la literatura y centrándose en el estudio de los caracteres vegetativos, debido a que un 95% de los casos judiciales evaluados en el desarrollo de la práctica pericial en botánica forense (**Fernández-Alonso et al.** 2007) y en el 80% de los especímenes recientes analizados en el presente estudio, no se dispuso de flores ni frutos. Por lo general este tipo de muestras recolectadas en cualquier época del año, son estériles porque difícilmente coinciden con la época de floración de las especies. Para las plantas procedentes del cultivo experimental se logró la revisión de los caracteres florales.

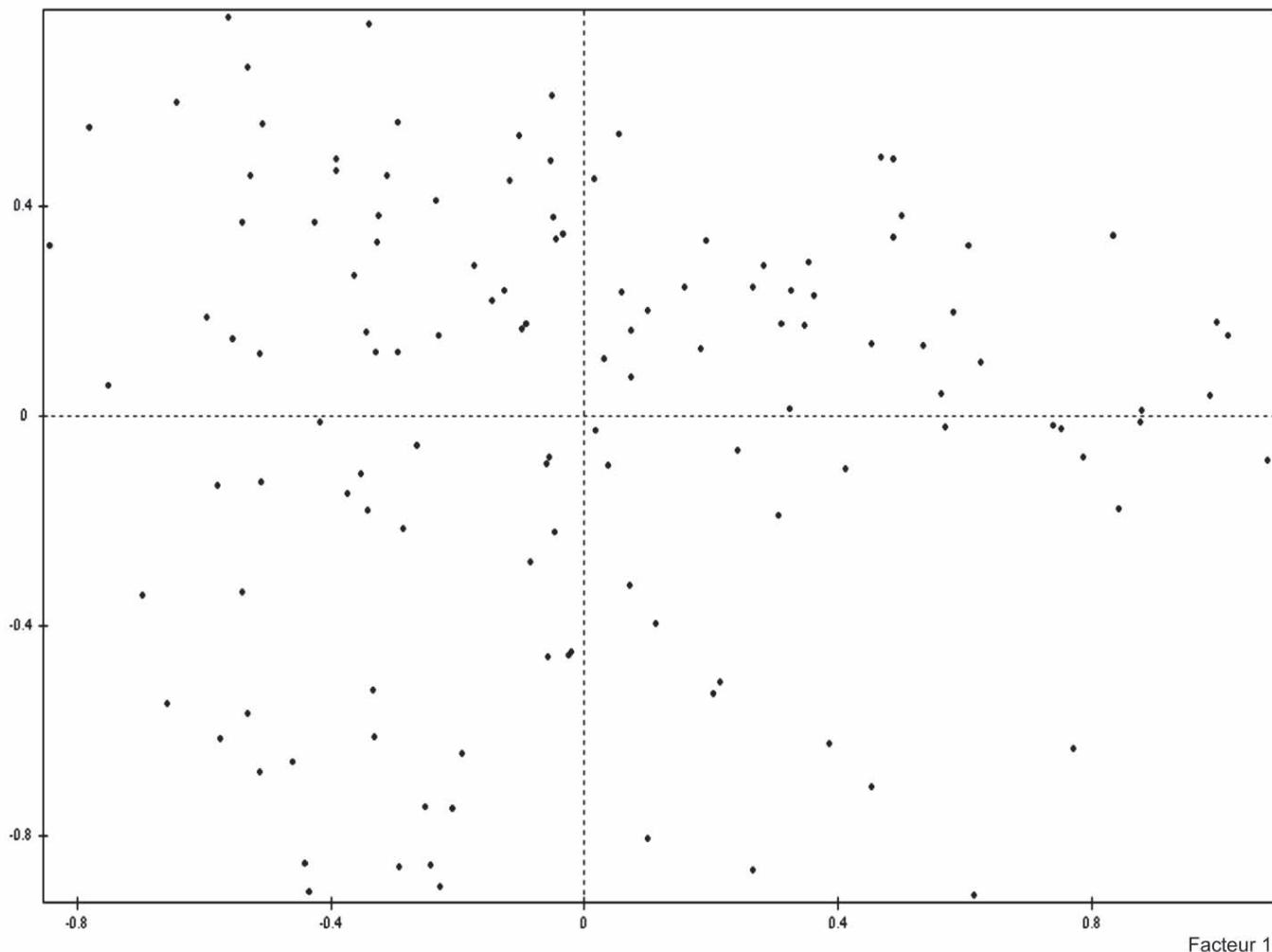
Con base en la información descriptiva de la literatura referente a *E. coca* y *E. novogranatense* (**Schulz**, 1931; **Machado**, 1972; **Ganders**, 1979a; **Plowman**, 1980a; 1980b; 1982; 1989; **Bohm et al.** 1982) y a la evaluación morfológica adelantada se realizaron las determinaciones taxonómicas preliminares, con lo que se obtuvo la determinación específica clara solo en el 32.0% de los individuos muestreados. En el 63.4% se observó generalmente una mezcla de los estados de carácter de una y otra especie en un mismo individuo, por lo que solo se logró una aproximación a la determinación específica a partir de la tendencia hacia alguna de las dos. En el restante 4.6% de las plantas evaluadas, los caracteres eran claramente intermedios entre las dos especies. En cambio, en la revisión realizada en los especímenes del Herbario Nacional Colombiano que datan de las décadas de los 70-80, no se observa esta mezcla de caracteres en las muestras y es más fácil hacer determinaciones acordes con la literatura. Esta diferencia entre el material histórico depositado en COL y el muestreo representativo de cultivos recientes, sugiere que las poblaciones actuales de plantas de coca cultivada en el país han sufrido cambios significativos en su morfología y en la distribución o representación actual en el territorio.

### 1. Caracteres morfológicos

#### 1.1 Caracteres vegetativos

Caracteres como fracturas en la corteza y tipo de lenticelas, forma de la lámina foliar, elevación de la vena media sobre la superficie adaxial de la lámina foliar, forma y margen de la estípula mostraron ser informativos para la determinación taxonómica específica. Por el contrario, otros caracteres vegetativos como color y textura de la corteza, erupción de las lenticelas, color, ángulos y forma de la base y ápice de la hoja, longitud del mucrón, presencia de areola central y líneas paralelas en la lámina, junto con el patrón de arquitectura foliar, no ofrecieron utilidad para determinación específica aunque en conjunto permiten asegurar la identificación a nivel genérico, en las pruebas periciales. En general se observó en el análisis de correspondencias múltiples una tendencia al agrupamiento, más que una segregación taxonómica definida (Gráfica 1).

Facteur 2



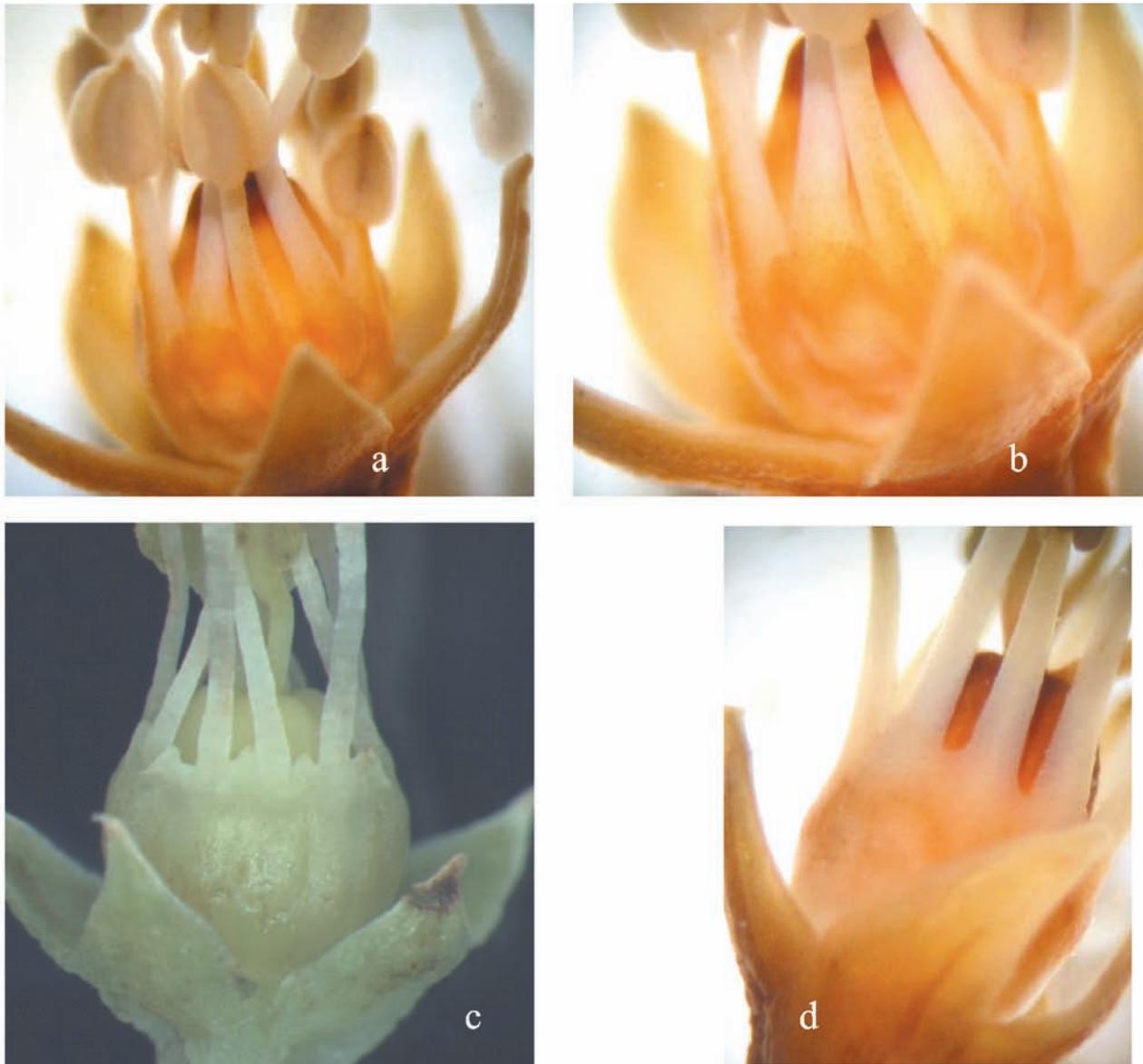
**Gráfico 1.** Resultado del análisis multivariado de correspondencias múltiples sobre los caracteres vegetativos en una muestra de población actual de las especies cultivadas del género *Erythroxylum* en Colombia.

Es importante resaltar que la presencia de líneas paralelas de la lámina foliar, registrada apenas en el 50% de las muestras analizadas, ha sido una característica frecuentemente referida como elemento identificador de las especies cultivadas. Si bien tradicionalmente para los campesinos, autoridades judiciales y en algunas aplicaciones forenses ha sido fuertemente valorada, otras especies del género comparten este carácter y por lo tanto no debe ser considerada como un carácter informativo de especie.

Se analizó la arquitectura foliar y se encontró un patrón conservado en todos los individuos, solo observándose diferencias sutiles entre ellos y ofreciendo poca información a nivel de especie o de variedad en la muestra estu-

diada, acorde con lo encontrado por **Rury** (1981), quien señaló que el patrón de venación en las hojas de "coca" es muy variable para ser un carácter diagnóstico que permita la determinación de especies cercanas.

Por otra parte, diferentes autores (**Schulz**, 1931; **Plowman**, 1989; **Idrobo** com. pers.) han empleado características vegetativas cuantitativas (p.e. dimensiones de lámina foliar y estípulas) como elementos discriminantes para la separación de las especies cultivadas. En todos los casos analizados se registraron valores superpuestos en caracteres como diámetro y longitud del pecíolo; ancho y largo de la lámina foliar y longitud de la estípula, lo que indica que son poco informativos para individualizar actualmente las especies de interés. (Tablas 1-3).

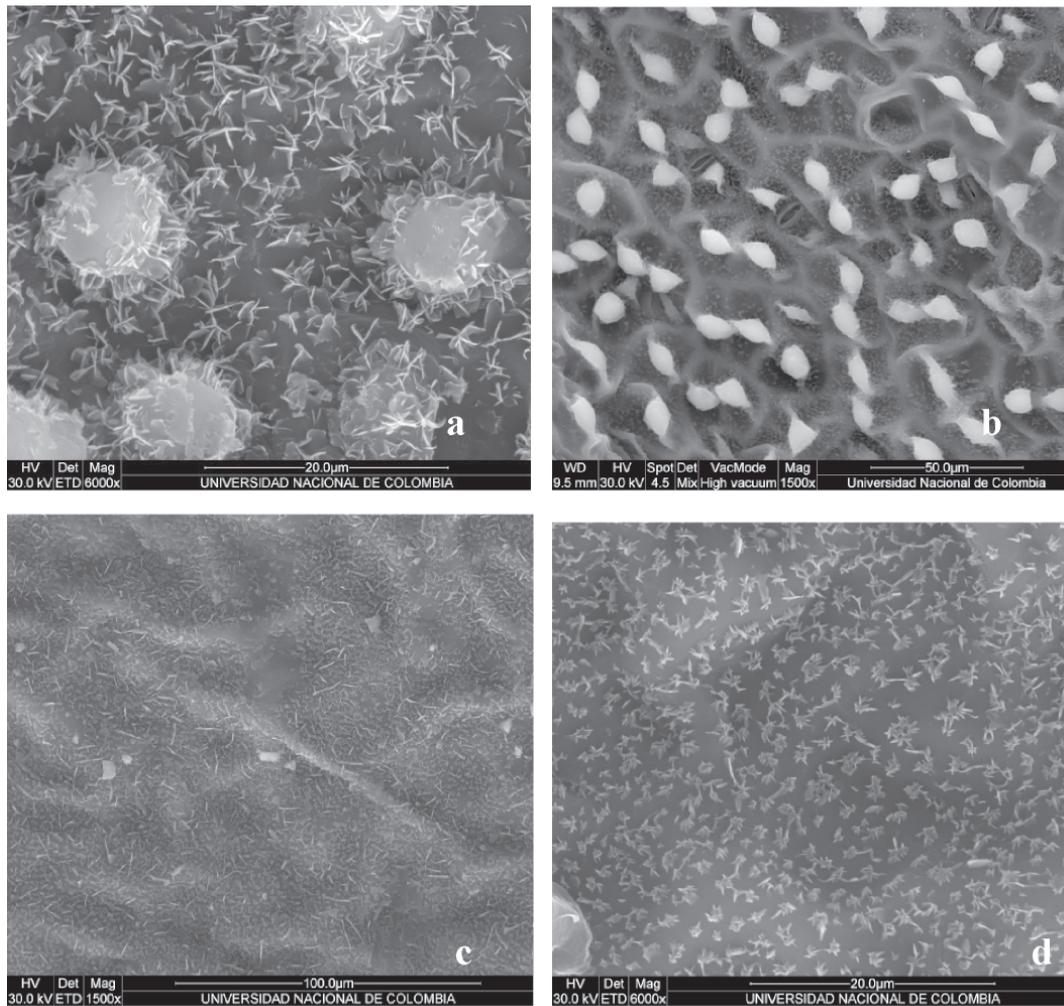


**Foto 1.** *E. novogranatense* var. *truxillense*. (a) Nótese el urcéolo que presenta un cambio en la coloración cerca al margen, simulando margen crenado, pero que al observarlo en una magnificación mayor (b) se observa liso. (A. Galindo & M. Tunjano-280), a diferencia del (c) margen crenado verdadero, *E. coca* var *ipadu* (A. Galindo & M. Tunjano-308). (d) Margen liso en *E. novogranatense* var. *novogranatense* (A. Galindo & M. Tunjano-288).

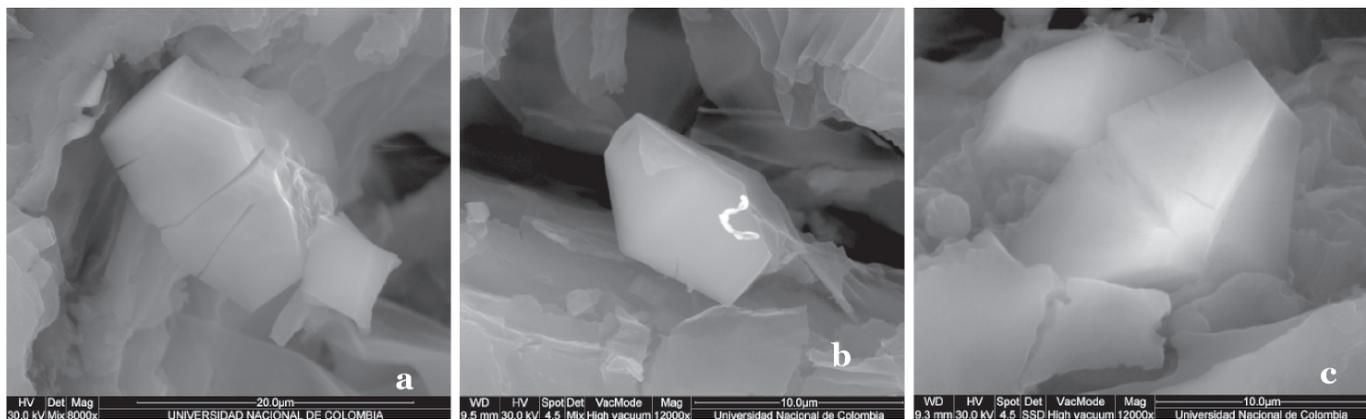
de *E. novogranatense*. En ejemplares de *E. novogranatense* var. *truxillense* se observaron papilas en domo (Foto 2).

Los cristales referidos en Cortella *et al.* (2001) como cúbicos, se observaron principalmente sobre las nerviaciones de las hojas, con forma piramidal, aristas lisas, caras terminales superior e inferior planas, simétricos con vértices angulosos, generalmente sin ornamentación,

aunque en una oportunidad se observó una depresión circular no profunda que parece corresponder a una ornamentación. Estas estructuras mostraron bi-refringencia a la luz polarizada cruzada y son similares a las encontradas en el eje caulinar de las especies cultivadas en el estudio de Cortés & Hernández (2008). No se apreciaron diferencias significativas de los cristales entre las variedades de las dos especies (Foto 3).



**Foto 2.** Papilas (a y b) y depósitos de cera (c y d) en la superficie abaxial de las láminas foliares de las especies cultivadas del género *Erythroxylum*. (a) *E. novogranatense* var. *novogranatense*. SEM. (A. Galindo & M. Tunjano-288) (b) *E. coca* cf. var. *ipadu* (A. Galindo & M. Tunjano-282). (c) *E. coca* var. *coca* (A. Galindo & M. Tunjano-276) (d) Estado intermedio (A. Galindo & M. Tunjano-284).



**Foto 3.** Cristales. SEM. (a) *E. coca* var. *coca* (A. Galindo & M. Tunjano-275) (b) *E. coca* cf. var. *ipadu* (A. Galindo & M. Tunjano-282). (c) Estado intermedio (A. Galindo & M. Tunjano-300).

Finalmente, se dispuso de material polínico en 9 de las 14 variantes comunes y en todos los casos se observaron granos isopolares, radiosimétricos, tricolporados, con superficie foveolada y un rango de tamaño de 15-25µm aproximadamente (Foto 4). Posiblemente *E. novogranatense* produce granos de polen de menor tamaño, pero es indispensable realizar más observaciones teniendo en cuenta la edad de la planta y su heterostilia porque probablemente inciden en el tamaño del grano (Ganders 1979a, 1979b).

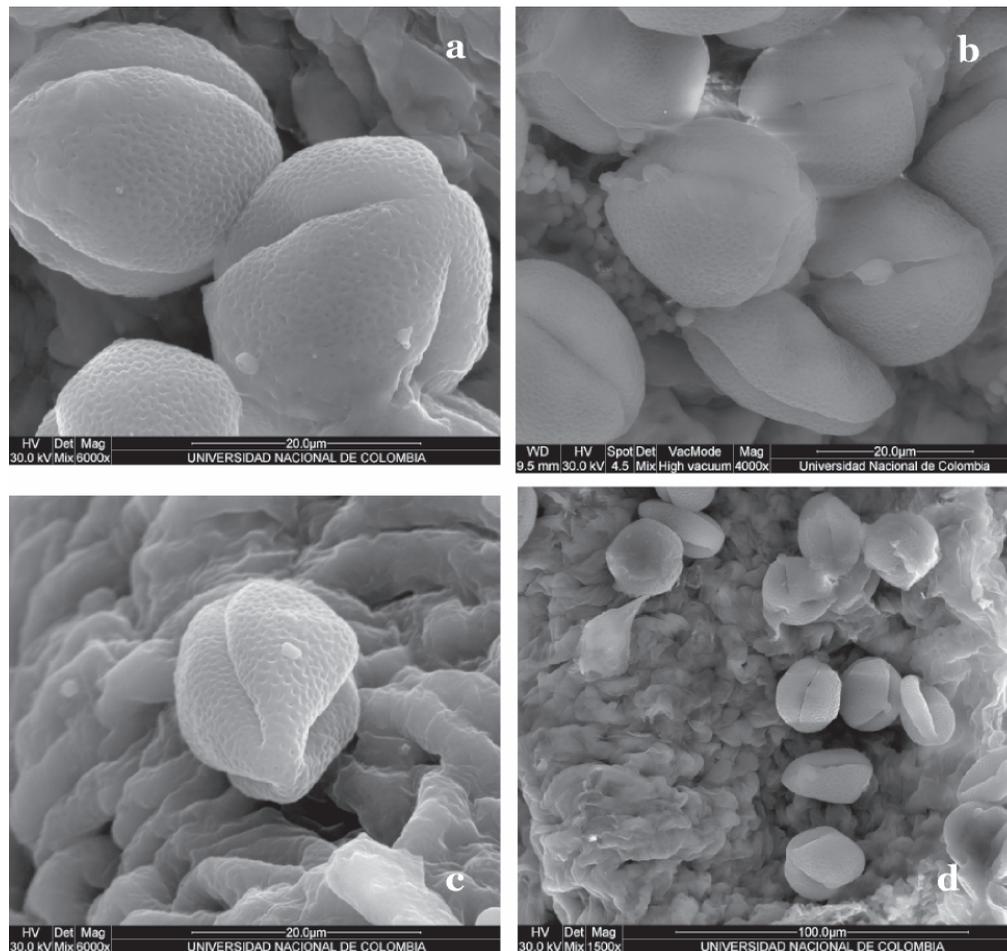
### 3. Sobre las especies cultivadas

#### 3.1 *Erythroxylum coca* Lam.

En los trabajos de Plowman se definieron las variedades taxonómicas *Erythroxylum coca* Lam. var. *coca* y *Erythroxylum coca* Lam. var. *ipadu* Plowman y el concep-

to que las definió se mantiene vigente en las colecciones de la época depositadas y revisadas en el Herbario Nacional Colombiano, pero en la muestra de plantas procedentes de los cultivos actuales en Colombia no se observaron diferencias tan marcadas como las de aquella época.

La variedad *ipadu* correspondía originalmente a pequeñas poblaciones de un verdadero cultigen que fue reproducido principalmente mediante esquejes por los indígenas de la cuenca del río Amazonas (Plowman, 1980b) y se ha postulado que esta variedad se originó a partir de la variedad “coca”. Desde 1982 ya se presentaban registros de su empleo como fuente de cocaína ilícita (Plowman, 1982) que aunque se ha incrementado, es probable que su utilización sea escasa en el ámbito comercial, lo que podría tener sustento en los estudios sobre el contenido de



**Foto 4.** Granos de Polen SEM. (a) *E. coca* var. *coca* (A. Galindo & M. Tunjano-276) (b) *E. coca* cf. var. *ipadu* (A. Galindo & M. Tunjano-282). (c) *E. novogranatense* var. *novogranatense*. SEM. (A. Galindo & M. Tunjano-288) (d) Estado intermedio (A. Galindo & M. Tunjano-284).

alcaloides de esta variedad que al parecer es el más bajo de las cuatro variedades cultivadas (Plowman & Rivier, 1983). Se apreciaron diferencias muy débiles entre estas variedades y por tanto es probable que las características que definirían la variedad *ipadu* se hayan diluido en procesos sucesivos de mezcla, en el curso de estos años probablemente con fines de mejoramiento en la productividad de los cultivos. No obstante, no se propone por el momento la sinonimización de la variedad *ipadu* a la variedad *coca* ya que se revisaron únicamente muestras procedentes de cultivos ilícitos en Colombia.

En un estudio previo se reportó el hallazgo de diferencias morfológicas y químicas entre dos colecciones de la variedad *ipadu* realizadas en 1973 y 1997 (Johnson *et al.* 1998) lo cual coincide con el presente estudio.

### 3.2 *Erythroxylum novogranatense* (Morris) Hieron

Hace más de veinte años la variante comercial de *E. novogranatense* var. *novogranatense* conocida como “coca colombiana” era poco empleada para extracción de cocaína debido a la dificultad del proceso (Plowman, 1982). Por el contrario, en este estudio se observó esta variedad en el 7.7% y en una alta proporción de casos periciales (Galindo, datos no publicados), correspondiente a la variante comercial “Tingo pajarita”. Esto indica que actualmente la variedad representa ventajas para el cultivo en territorio colombiano y posiblemente tiene mayor valor comercial que antes, aunque no es una de las preferidas, probablemente porque persisten dificultades para la extracción del alcaloide.

*E. novogranatense* var. *novogranatense* y *E. novogranatense* var. *truxillense* se encuentran actualmente representadas en los cultivos para producción de cocaína en Colombia y en las muestras estudiadas se observaron algunas diferencias con respecto a las descripciones originales, principalmente las dimensiones y forma de las hojas. La variedad *truxillense* guarda mayor similitud con *E. coca* que con la variedad *novogranatense* especialmente en estas dos últimas características, lo cual es consistente con las hipótesis que propone a *E. novogranatense* var. *truxillense* como descendiente de *E. coca* var. *coca* (Bohm *et al.* 1982).

### 3.3 *Erythroxylum coca* x *Erythroxylum novogranatense* (?)

Una pequeña proporción de la muestra (4,6%) correspondió a individuos que compartían características presentes en las dos especies cultivadas, sin que se pudiese establecer un criterio claro para su determinación específica. Este resultado y la alta proporción de individuos

determinados bajo tendencia son un importante indicador de que las poblaciones colombianas se encuentran en este momento en un probable proceso de hibridación cuyas características difieren notablemente de las delimitaciones y posibilidades de cruzamiento establecidas dos décadas atrás, lo que puede ser consecuencia de la fuerte manipulación y la intensidad en los cultivos buscando mayor productividad en cantidad de hoja producida y/o alcaloide extraído.

En un estudio anterior se concluyó mediante análisis de AFLPs que una fracción de su muestra de “coca” cultivada, indeterminada taxonómicamente y proveniente de Colombia, se separó en un cluster diferente del resto del material vivo, aislado 20 años atrás, apoyando la hipótesis de que la “coca” predominante hoy en Colombia es un híbrido (Johnson *et al.* 2003). Si bien sus conclusiones se basan en un cultivo vivo pero no completamente representativo de los cultivos actuales en Colombia, se establece un criterio desde el punto de vista genético que apoya la hipótesis de una posible hibridación.

## 4. Distribución geográfica

En cuanto a la distribución geográfica, según el registro de los lugares de procedencia de las colecciones históricas depositadas en COL y lo señalado por Plowman hasta 1989 (Plowman & Hensold, 2004), *E. coca* en Colombia se encontraba principalmente en la Amazonía y estaba menos representada en Caquetá, Tolima y Cauca. Según los registros actuales, las poblaciones se han desplazado hacia la región Andina, cubriendo el 40.6% del territorio aproximadamente. *E. novogranatense* por su parte se encontraba en algunos departamentos de las regiones Caribe, Pacífica, Andina y Amazónica, actualmente ampliando su rango a Boyacá y Santander, cubriendo aproximadamente el 62.5% del territorio nacional.

La distribución de los cultivos de las dos especies en Colombia, especialmente el de *E. coca* se ha ampliado de manera considerable desde los últimos registros en 1989 hasta hoy, con lo que se ha forzado su desplazamiento hacia zonas anteriormente no registradas y extendiéndose casi al 70% del territorio colombiano, lo cual concuerda con el reporte de 78.000 hectáreas cultivadas en 23 de los 32 departamentos por la ONU y el Gobierno de Colombia (2007).

## 5. Variantes de cultivo y nombres comerciales

Aunque los nombres comunes que se otorgan a los organismos en el comercio no tienen aceptación taxonómica formal, permiten registrar las variantes nuevas producidas por la selección artificial del cultivo intensivo. En la tabla 4, a continuación se relacionan las determinaciones

**Tabla 4.** Relación entre la determinación taxonómica de las muestras de plantas de *coca* cultivadas en Colombia y los nombres comunes conocidos actualmente. (Muestras cultivo experimental del Espinal, Tolima).

Determinación taxonómica	Variedad común
<i>Erythroxylum coca</i> Lam. var. <i>coca</i>	Amarga
	Boliviana Roja
	Chirosa
	Pomarrosa
<i>Erythroxylum coca</i> Lam. cf. var. <i>coca</i>	Boliviana Negra
<i>Erythroxylum coca</i> cf. var. <i>ipadu</i> Plowman	Dulce
	Patirroja
<i>Erythroxylum novogranatense</i> (Morris) Hieron. var. <i>novogranatense</i>	Tingo María
	Tingo Pajarito
<i>Erythroxylum novogranatense</i> (Morris) Hieron. var. <i>truxillense</i> Plowman	Crespa
	Tingo Negra
<i>E. coca</i> x <i>E. novogranatense</i> (?)	Boliviana Blanca
	Gigante
	Tingo Llanera

taxonómicas formales para las 14 variantes comunes de “coca” cultivadas en el país.

De acuerdo con la información preliminar recabada, se sabe que las variantes comunes “Amarga” y “Tingo maría” crecen adecuadamente en la zona Andina, especialmente en el departamento de Boyacá y ambas requieren de riego constante. La “Amarga” resiste bastante bien las épocas de sequía, produce pocas flores y semillas y se reproduce casi exclusivamente por esquejes, a diferencia de “Tingo maría”, que produce gran cantidad de flores y frutos, reproduciéndose muy fácilmente por semilla. En general, la mayoría de estas variantes comerciales son cosechadas a los 3 meses de la siembra, aunque algunas como la variedad “Dulce” son cosechadas a los 45 días. No se tienen registros de la planta conocida como “Cuarentana”, que debe su nombre al hecho de producir cosechas a los 40 días de la siembra.

#### IV. Conclusiones

Las especies vegetales *Erythroxylum coca* y *E. novogranatense* han sido empleadas por los pueblos indígenas de Latinoamérica desde la época prehispánica y durante los últimos tiempos han sido ampliamente explotadas en la producción ilícita de cocaína, siendo Colombia uno de los principales centros de producción. En este estudio se encontró que la muestra de plantas procedentes de cultivos ilícitos incluye las dos especies tradicionalmente cultivadas y además presenta diferencias en relación con los especímenes históricos preservados en la colección del Herbario Nacional Colombiano.

Desde hace más de dos décadas se están seleccionando individuos de manera intensiva, buscando optimizar la producción de hoja y/o contenido del alcaloide y debido al fuerte conflicto socioeconómico en el que se enmarca esta actividad, se vienen estableciendo cultivos en sitios donde anteriormente no se habían registrado. Esto podría explicar las variaciones observadas en la morfología de las especies, ahora cultivadas en áreas no reportadas previamente, lo que sugiere la posible hibridación entre *E. coca* y *E. novogranatense*, junto con la dilución de las características que definieron a *E. coca* var. *ipadu* en procesos sucesivos de mezcla con *E. coca* var. *coca*.

Aproximadamente cada 6-10 meses y durante los últimos cuatro años, se ha registrado la aparición de una nueva variante comercial que promete mejoras en el rendimiento o mayor resistencia a la aspersión aérea. Es probable que se esté planteando también la incorporación de las especies silvestres en los cultivos, como una estrategia de mejoramiento. De hecho, recientemente se han registrado especies silvestres en el contexto de los cultivos ilícitos (**Galindo**, datos no publicados).

Aunque ninguno de los caracteres vegetativos representa por sí mismo la informatividad de carácter diagnóstico, en el campo forense la determinación de las jerarquías supraespecíficas es útil para la investigación judicial, porque al reducir el universo de análisis ofrece elementos informativos al sistema judicial para que este, junto con otros elementos de juicio, pueda determinar la legalidad o ilicitud de un cultivo en el país.

Los análisis desarrollados establecen el punto de partida para continuar la exploración de caracteres anatómicos y moleculares con nuevas posibilidades para la identificación forense, cuyo principio de análisis es aplicable a otros grupos taxonómicos de interés en el mismo campo.

#### V. Agradecimientos

Esta investigación fue financiada por el Instituto de Medicina Legal y Ciencias Forenses, Subdirección Científica - División de Investigación Científica y Desarrollo Tecnológico- (Proyecto #525) y apoyada por el Instituto de Ciencias Naturales de la Universidad Nacional de Colombia. En la fase final del proyecto, el segundo autor contó con el soporte del Proyecto Intramural Especial del CSIC número 2009301071, que facilitó la finalización de este trabajo. Este artículo es parte del trabajo sustentado en la Tesis de Maestría en Biología de la Universidad Nacional de Colombia (**Galindo**, 2008).

Los autores agradecen a: Miguel Tunjano (Policía Nacional Antinarcóticos - Área de Erradicación de Cultivos

Ilícitos), por la ayuda en la colección del material de estudio y valioso conocimiento sobre las “cocas” cultivadas. Agradecen muy especialmente al profesor J. Idrobo (q.e.p.d.) quien compartió su amplio conocimiento y experiencia acerca de las cocas cultivadas; L.C. Jiménez por apoyo logístico; L. N. Parra por sus aportes en la discusión sobre cristales; J. Peláez por su apoyo en análisis de imágenes de microscopía con luz polarizada; W. Usaquén por su asesoría en el análisis estadístico; N. Olaya por las invaluable traducciones del latín y alemán, a M. A. Galindo por su corrección de estilo en este texto y la tesis de maestría a partir de la cual se escribió y también a un evaluador anónimo por importantes aportes para la preparación final del manuscrito.

## VI. Bibliografía

- Bohm, B. A., F. Ganders & T. Plowman.** 1982. Biosystematics and evolution of cultivated coca (*Erythroxylaceae*). *Sys. Bot.* **7**:121-133.
- CISIA.** 2001. Centre International de Statistique et d'Informatique Appliquées. Système Pour l'Analyse des Données. SPADâ Logiciel. Paris.
- Cortella, A. R., M. L. Pochettino, A. Manzo & G. Raviña.** 2001. *Erythroxylum coca*: microscopical identification in powdered and carbonized archeological material. *J. Archaeol. Sci.* **28**:787-794.
- Cortés, D. C. & E. Y. Hernández.** 2008. Caracterización anatómica del eje caulinar de las especies de interés forense: *Papaver somniferum* L., *Cannabis sativa* L. y las plantas cultivadas del género *Erythroxylum* P. Browne para la elaboración de un protocolo de trabajo en el Instituto Nacional de Medicina Legal y Ciencias Forenses. Trabajo de grado. Licenciatura en Biología. Universidad Distrital Francisco José de Caldas.
- Fernández-Alonso, J. L., A. Galindo & J. Idrobo.** 2007. Las plantas como evidencia legal. Desarrollo de la botánica forense en Colombia. *Rev. Acad. Colomb. Cienc.* **31**(119):181-198.
- Font Quer, P.** 1985. Diccionario de botánica. Novena reimpresión. Ed. Labor S. A. España.
- Galindo, A.** 2008. Revisión taxonómica de las especies cultivadas del género *Erythroxylum* P. Browne (*Erythroxylaceae*) y su aplicación en el contexto de la botánica forense en Colombia. Tesis de grado. Maestría en Biología. Universidad Nacional de Colombia.
- \_\_\_\_\_ & **J. L. Fernández-Alonso.** 2009. Especies cultivadas del Género *Erythroxylum* P. Browne. Revisión del tema desde la perspectiva forense. *Colombia Forense* **1**(1):9-17.
- Ganders, F. R.** 1979a. Heterostyly in *Erythroxylum coca* (*Erythroxylaceae*). *Bot. J. Linn. Soc.* **78**:11-20.
- \_\_\_\_\_. 1979b. The biology of heterostyly. *New Zealand J. Bot.* **17**:607-635.
- Hickey, M. & C. King.** 2000. The Cambridge illustrated glossary of botanical terms. Cambridge University press. UK.
- Idrobo, J. M.** Profesor del Instituto de Ciencias Naturales. Universidad Nacional de Colombia. Bogotá. 2006-2010.
- Jara, A.** Estudiante de maestría en Biología. Universidad Nacional de Colombia. Instituto de Ciencias Naturales. Bogotá. 2008-2009.
- Johnson, E. L. W. F. Schmidt & H.A. Norman.** 1998. Flavonoids as markers for *Erythroxylum* taxa: *E. coca* var. *ipadu* and *E. novogranatense* var. *truxillense*. *Biochem. Syst. Ecol.* **26**:743-759.
- \_\_\_\_\_. **J.A. Saunders, S. Mischke, C. S. Helling & S. D. Emche.** 2003. Identification of *Erythroxylum* taxa by AFLP DNA analysis. *Phytochemistry* **64**:187-197.
- Leaf Architecture Working Group.** 1999. Manual of Leaf Architecture. Morphological description and categorization of dicotyledonous and net-veined monocotyledonous angiosperms. Smithsonian Institute. USA.
- Machado, E.** 1972. El género *Erythroxylum* en el Perú. Las cocas silvestres y cultivadas del país. *Raymondiana* **5**(101):5-101.
- Metcalfe, C.R. & L. Chalk.** 1950. Anatomy of the Dicotyledons. Leaves, stem, and wood in relation to taxonomy with note on economic uses. Oxford at the Clarendon Press.
- Moreno, N. P.** 1984. Glosario botánico Ilustrado. Instituto Nacional de Investigaciones sobre recursos bióticos. Compañía editorial Continental. México.
- ONU- Oficina contra la droga y el delito & Gobierno de Colombia.** 2007. Colombia, monitoreo de cultivos de coca. Junio.
- Parra, L. N. & M. T. Flórez.** 2001. Propuesta de clasificación morfológica para los cristales alto-andinos colombianos. *Crónica Forestal y del Medio Ambiente* **16**:35-66.
- Plowman, T.** 1980a. The identity of Amazonian and Trujillo coca. *Bot. Mus. Leaflet.* **27**(1-2):45-68.
- \_\_\_\_\_. 1980b. Aspectos botánicos de la coca. En: F. R. Jerí (ed.). Actas del seminario interamericano sobre aspectos médicos y sociológicos de la coca y de la cocaína. Perú. p. 100-117.
- \_\_\_\_\_. 1982. The identification of coca (*Erythroxylum* species): 1860-1910. *Bot. J. Linn. Soc.* **84**:329-353.
- \_\_\_\_\_. 1989. *Erythroxylaceae*. En *Flora of Ecuador* **93**:1-32.
- \_\_\_\_\_. & **L. Rivier.** 1983. Cocaine and cinnamoylcocaine content of *Erythroxylum* species. *Ann. Bot.* **51**:641-659.
- \_\_\_\_\_. & **N. Hensold.** 2004. Names Types and distribution of neotropical species of *Erythroxylum* (*Erythroxylaceae*). *Brittonia* **56**(1):1-53.
- Schulz, O. E.** 1907. *Erythroxylaceae*. En: Engler, A. *Das Pflanzenreich.* **IV**(134)1-160.
- \_\_\_\_\_. 1931. *Erythroxylaceae*. En: Engler, A. *Die Natürlichen Pflanzenfamilien.* Band 19a:130-142.

Recibido: mayo 31 de 2010.

Aceptado para su publicación: noviembre 30 de 2010.

# **ARISTOLOCHIA PENTANDRA (ARISTOLOCHIACEAE) IN COLOMBIA: BIOGEOGRAPHIC IMPLICATIONS AND PROPOSED SYNAPOMORPHIES BETWEEN THE PENTANDROUS SPECIES OF *ARISTOLOCHIA* AND ITS SOUTH AMERICAN SISTER GROUP**

**Favio González<sup>1</sup>, Héctor Eduardo Esquivel<sup>2</sup>,  
Gloria Andrea Murcia<sup>3</sup>, Natalia Pabón-Mora<sup>4</sup>**

## **Abstract**

**González F., H. E. Esquivel., G. A. Murcia, N. Pabón-Mora:** *Aristolochia pentandra* (Aristolochiaceae) in Colombia: biogeographic implications and proposed synapomorphies between the pentandrous species of *Aristolochia* and its South American sister group. *Rev. Acad. Colomb. Cienc.* **34** (133): 467-478, 2010. ISSN 0370-3908.

Flowers of most *Aristolochia* species possess six stamens and six carpels; however, the c 40 species of subsection *Pentandrae*, which grow in S United States, Mexico, N Central America, Cuba, and Jamaica, have flowers with five stamens and five carpels. The sister group of this subsection consists of five hexandrous species from subtropical and temperate areas of South America, thus matching the puzzling temperate South America-Temperate North America disjunction. The synapomorphies that support such sister-group relationship and the monophyly of subsection *Pentandrae* are described. An important range extension of *A. pentandra* Jacq., which was recently found in the Island of San Andrés (Colombia), is reported, and an update of the description and typification of this species is provided.

**Key words:** Aristolochiaceae, Caribbean Flora, Flora of Colombia, Flora of San Andrés Island, phytogeographic disjunctions, Piperales.

1 Instituto de Ciencias Naturales, Universidad Nacional de Colombia, AA 7495, Bogotá, Colombia. Correo electrónico: fagonzalezg@unal.edu.co

2 Departamento de Biología y Herbario TOLI, Universidad del Tolima.

3 Corporación para el Desarrollo Sostenible CORALINA, San Andrés, Providencia y Santa Catalina.

4 The New York Botanical Garden, Bronx, NY 10458, USA.

## Resumen

Las flores de muchas especies de *Aristolochia* poseen seis estambres y seis carpelos; no obstante, las cerca de 40 especies que conforman la subsección *Pentandrae* y que prosperan en el sur de los Estados Unidos, México, norte de Centro América, Cuba y Jamaica, poseen cinco estambres y cinco carpelos. El grupo hermano de esta subsección es un conjunto de cinco especies hexandras de Sur América subtropical y templada, lo cual constituye un caso más de la enigmática disyunción biogeográfica entre el centro y sur de América del Sur y la zona templada y subtropical de América del Norte. Se describen las sinapomorfías que evidencian dicha relación de grupo hermano y que sustentan la monofilia de la subsección *Pentandrae*; a la vez, se reporta una extensión en el areal de *A. pentandra*, la cual fue recientemente detectada en la isla de San Andrés (Colombia) y se actualiza la descripción y la tipificación de la especie.

**Palabras clave:** Aristolochiaceae, flora del Caribe, flora de Colombia, flora de la isla de San Andrés, disyunciones fitogeográficas, Piperales.

## Introduction

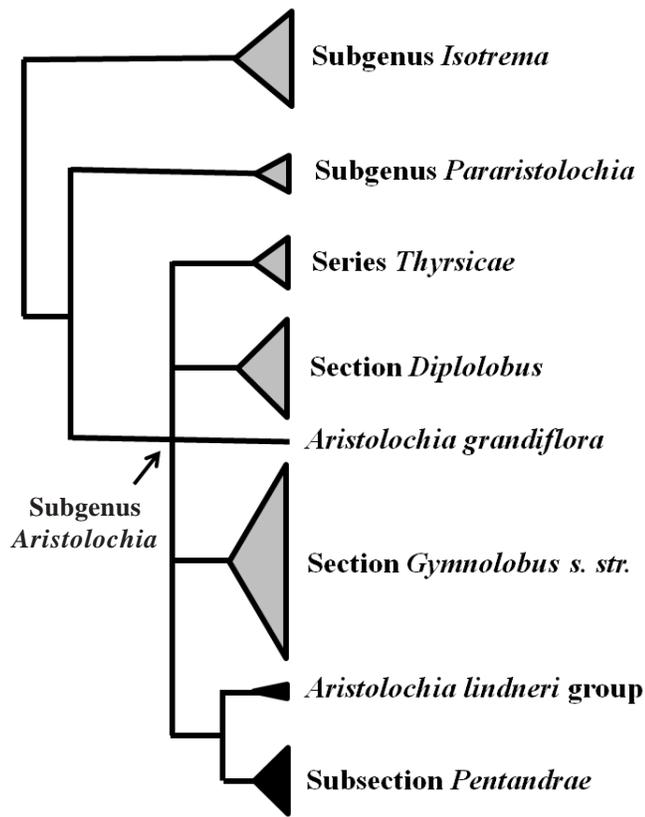
With about 500 species, the genus *Aristolochia* is the largest and the most widely distributed of the family Aristolochiaceae. Two of the plesiomorphic characters of *Aristolochia* are the presence of a completely inferior ovary formed by the congenital fusion of six carpels, and the congenital fusion of the six stamens with the stylar portion of the carpels, forming the typical gynostemium in the genus (González, 1999b; González & Stevenson, 2000, 2002; Kelly & González, 2003). However, the number of stamens and carpels varies from 5 to 24 and 5 to 6, respectively. Interestingly, flowers with more than six stamens are found only in some African and Malesian species of subgenus *Pararistolochia*, and can occur without affecting the 6-merous gynoecium, whereas the pentandrous condition is always associated to the presence of five carpels (González & Stevenson, 2000, 2002) and is characteristic of a group of species, most of which are found in S United States and N Mexico. Traditionally, these species constitute the subsection *Pentandrae*, one of the two subsections of *Aristolochia* subgenus *Aristolochia* section *Gymnolobus* proposed by Duchartre (1854, 1864). Pfeifer (1970) recognized thirty five species; since then, at least ten additional species from Mexico have been described by Calzada *et al.* (1997), Ortega & Ortega (1995), Santana-Michel (1995, 2002, 2007), Santana-Michel & Lemus-Juárez (1996), and Santana-Michel & Solís-Magallanes (2007).

Alternatively, the pentandrous species of *Aristolochia* have been segregated into a separate genus, *Einomeia*, by Rafinesque (1828), which was later emmended by Klotzsch (1859), and later accepted as a distinct genus by Huber (1985, 1993), and Mabberley (2008). However, recent

phylogenetic analyses (González, 1997, 1999b; González & Stevenson, 2002; Wanke *et al.*, 2006, and Wagner, 2010) have shown that the pentandrous species of *Aristolochia* are nested inside subgenus *Aristolochia* (Fig. 1), which discourages the recognition of the pentandrous lineage as a distinct genus. Molecular and morphological evidence supports the monophyly of *Aristolochia* subsection *Pentandrae* (González, 1997, 1999 b; González & Stevenson, 2002; Neinhuis *et al.*, 2005; Ohi *et al.*, 2006; Wanke *et al.*, 2006; Wagner, 2010). These analyses also suggest that the subsection is sister to an informal group herein called the ‘*A. lindneri* group’, and formed by five species from central and southern South America (Bolivia to Uruguay) including *A. burelae* Herzog, *A. lindneri* A. Berger, *A. lozaniana* F, González, *A. stuckerti* Speg. and *A. urbaniana* Taub. (cf. González, 1999 a, 1999 b, 2001; Murata *et al.*, 2001; Sugawara *et al.*, 2001; González & Stevenson, 2002; Ohi *et al.*, 2006; Wanke *et al.*, 2006; Wagner, 2010; Figs. 1, 2 D-G). Here we describe the morphological synapomorphies that support such relationship, and the monophyly of the pentandrous species of *Aristolochia*. Furthermore, we present an updated description and report a range extension for the type species of *Aristolochia* subsect. *Pentandrae* (*A. pentandra* Jacq.), based on new stations in Guatemala and Belize and on recent collections in the Caribbean island of San Andrés (Colombia); finally, lectotypes are here designated for *A. pentandra* and one of its synonyms, *A. hastata* Kunth.

## Methods

The study is based on field observations and collections made in S United States, Mexico, Guatemala, and the



**Figure 1.** Summary cladogram of *Aristolochia* based on the phylogenetic analyses by González (1997, 1999 b), Murata *et al.* (2001), Sugawara *et al.* (2001), González & Stevenson (2002), Neinhuis *et al.* (2005), Ohi *et al.* (2006), Wanke *et al.* (2006), and Wagner (2010). The size of each clade indicates the relative number of species. The clades treated in this paper are shown in black.

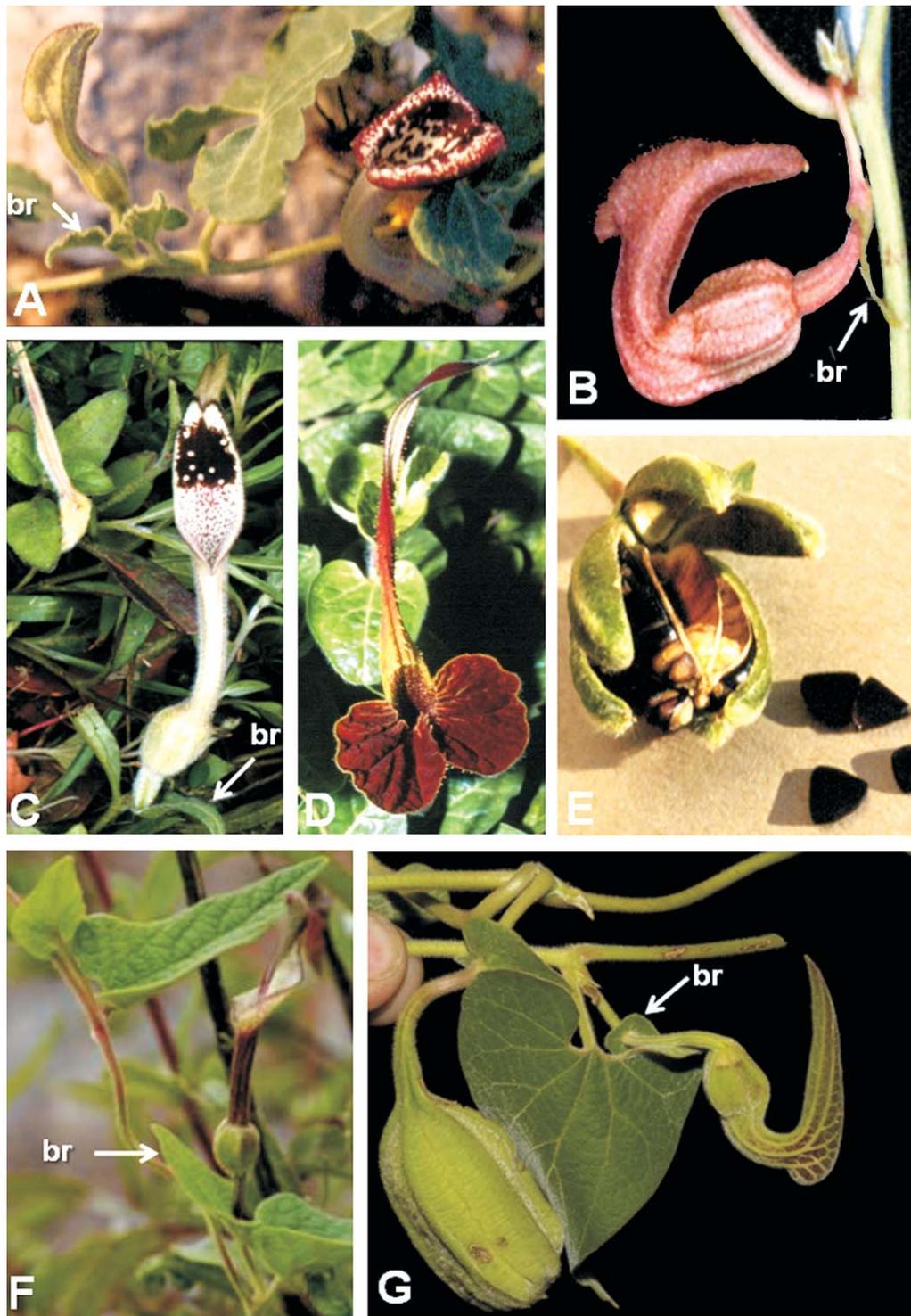
Caribbean island of San Andrés (Colombia), and the study of numerous herbarium specimens (mainly B, BM, COL, CORD, CTES, F, FLAS, G, GH, HBG, K, L, LE, LP, LPB, LIL, LPB, MEXU, MO, NY, P, S, SI, TEX-LL, U, UC, US, and W). The detailed list of specimens examined for the present study will be included in the monograph of Aristolochiaceae for Flora Neotropica, which is underway; however, it is available upon request to FG. For scanning electron microscopy studies, floral buds and floral organs were fixed in 70% ethanol, and dissected in 95% ethanol under a Leica 7.5 stereomicroscope. All the material was dehydrated through an ethanol series and critical point dried using a Samdri 790 CPD (Rockville, MD). Material was mounted on aluminum stubs with adhesive tabs (Electron Microscopy Sciences), sputter coated with gold palladium in a Hummer 6.2 sputter coater (Anatech, Springfield, VA), and examined and photographed in a Jeol JSM-5410 LV Scanning Electron Microscope operated at 10 kV.

## Results and discussion

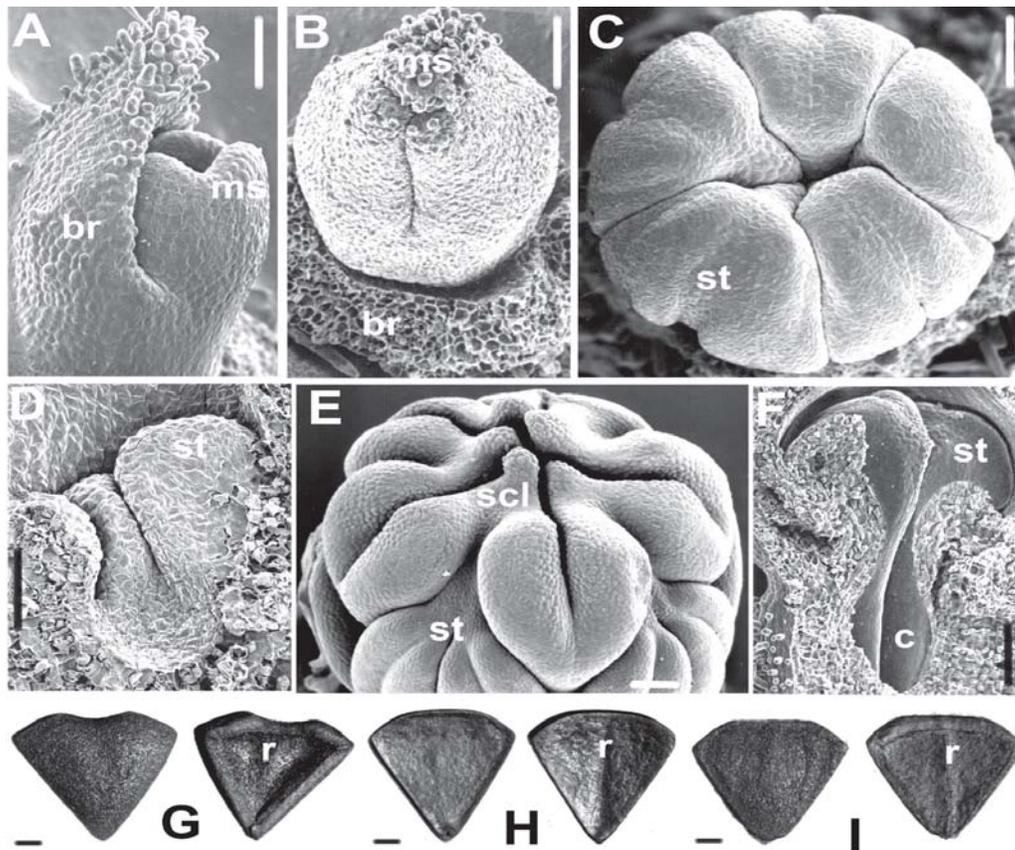
**Morphological synapomorphies.** - All the phylogenetic analyses based on molecular and morphological data (González, 1999 a, 1999 b, 2001; Murata *et al.*, 2001; Sugawara *et al.*, 2001; González & Stevenson, 2002; Ohi *et al.*, 2006; Wanke *et al.*, 2006; Wagner, 2010) that have included pentandrous species of *Aristolochia* strongly suggest that the sister group of this clade is the *A. lindneri* group, an informal assemblage of five species from subtropical and temperate areas of South America, including S and SE Brazil (*A. urbaniana*), the Chaco of Bolivia, Paraguay, and Argentina (*A. burelae*; Fig. 2G), mid-elevation (<1000 m) dry interandean valleys of Bolivia and Paraguay (*A. lindneri*; Fig. 2D-E), high-elevation (c 2000 m) dry interandean valleys of Bolivia (*A. lozaniana*; Fig. 2F), and areas between Argentina and Uruguay (*A. stuckertii*). Although these species result as sister taxa of subseries *Pentandrae*, they have flowers with six stamens and six carpels, as in most of the remaining species of *Aristolochia*. Thus, the presence of five stamens and five carpels is apomorphic for subseries *Pentandrae*.

The morphological characters that support the sister-group relationship between *Aristolochia* subsection *Pentandrae* and the *Aristolochia lindneri* group are the strong tendency to become herbaceous (Figs. 2, 4), the presence of one adaxial bract per flower (Figs. 2 A-C, F, G, 3 A, B, 4 A, D, E, G), the basipetal dehiscence of the capsule (Figs. 2E, 4G), and the triangular, flattened and smooth seeds, which are black or dark brown, have a prominulous raphe, and lack wings (Figs. 2E, 3G-I, 4G). The significance of the habit, the inflorescence and floral morphology, and the seed structure has been carefully examined by authors such as Huber (1985, 1993), González (1997, 1999a, b), González & Stevenson (2000, 2002), González & Rudall (2003), Wanke *et al.* (2006), and Wagner (2010), among others, who have recognized these characters as phylogenetically informative throughout *Aristolochia*. In turn, the monophyly of *Aristolochia* subsect. *Pentandrae* is supported by the consistent presence of two synapomorphies, the five stamens and the five carpels (Figs. 3 C-F, 4G).

Interestingly, all of the characters shared between the pentandrous species of *Aristolochia* and the *A. lindneri* group (included in the analyses by González, 1999 b, González & Stevenson, 2002, and Wanke *et al.* 2006) are also present in *A. grandiflora* Sw. (González, 1999 a, b, González & Stevenson, 2002), a species that ranges from Jamaica, Mexico and Central America to Colombia and Ecuador. Although the morphological characters support a close relationship of *A. grandiflora* with the pentandrous species



**Figure 2.** Representative species of the pentandrous Aristolochias (A-C) and the *Aristolochia lindneri* (D-G) clades. **A.** *Aristolochia coryi*, from Texas, USA (González 3612). **B.** *A. micrantha*, from N Mexico (González 3605). **C.** *A. erecta*, from Texas (González 3593). **D, E.** *A. lindneri*, from Bolivia (cultivated at BONN Botanical Garden). **F.** *A. lozani*, from Bolivia (Wanke s.n.). **G.** *A. burelae*, from Bolivia (Nee s.n.). **br**, bract. Photo credits: A-D, F. González; F: S. Wanke; G. M. Nee.

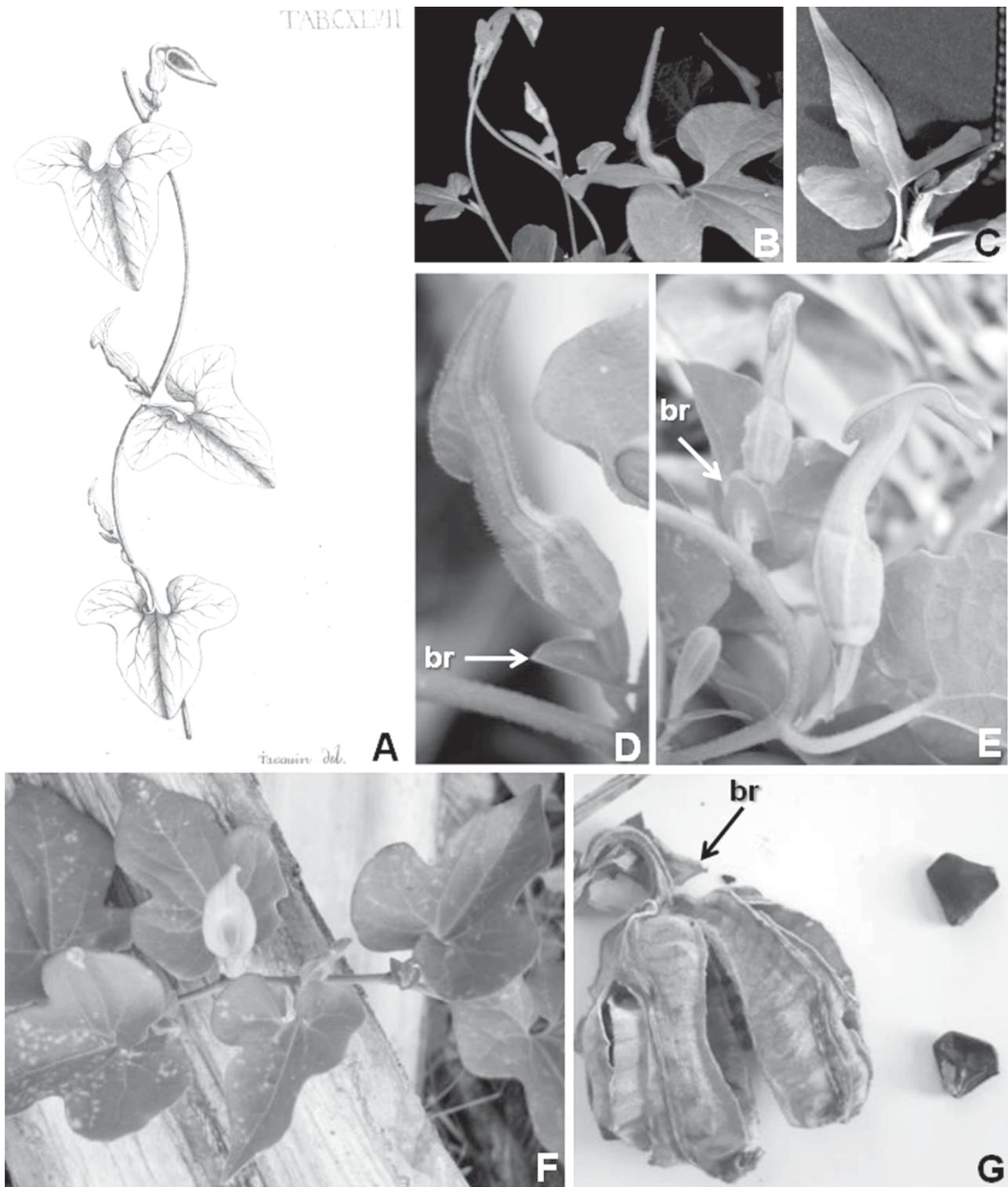


**Figure 3.** A-F. SEM images of floral morphology in *Aristolochia* subsection *Pentandrae* and *Aristolochia lindneri* group. **A.** Floral bud and bract of *A. pentandra* (González 3603, COL). **B.** Floral bud and bract of *A. lindneri* (González 3623, COL). **C-D.** Top view (**C**) and longitudinal section (**D**) of a young gynostemium of *A. erecta* (González 3593, COL). **E-F.** Top view (**E**) and longitudinal section (**F**) of an almost mature gynostemium of *A. pentandra* (González 3603, COL). **G-I.** Adaxial (right) and abaxial (left) views of seeds in *Aristolochia* subsection *Pentandrae* and *Aristolochia lindneri* group, under light stereomicroscopy. **G.** *A. (subsect. Pentandrae) watsoni* Wooton & Standley (Morris *et al.* 4663, NY); **H.** *A. lindneri* (Wood 17332, NY); **I.** *A. stuckerti* (Ibarrola 2503, NY). **br**, bract; **c**, carpel; **ms**, medial sepal; **r**, raphe; **scl**, stigmatic commissural lobe; **st**, stamen. Scale bars: 100  $\mu$ m in A-C, E, F; 50  $\mu$ m in D; 1 mm in G-I.

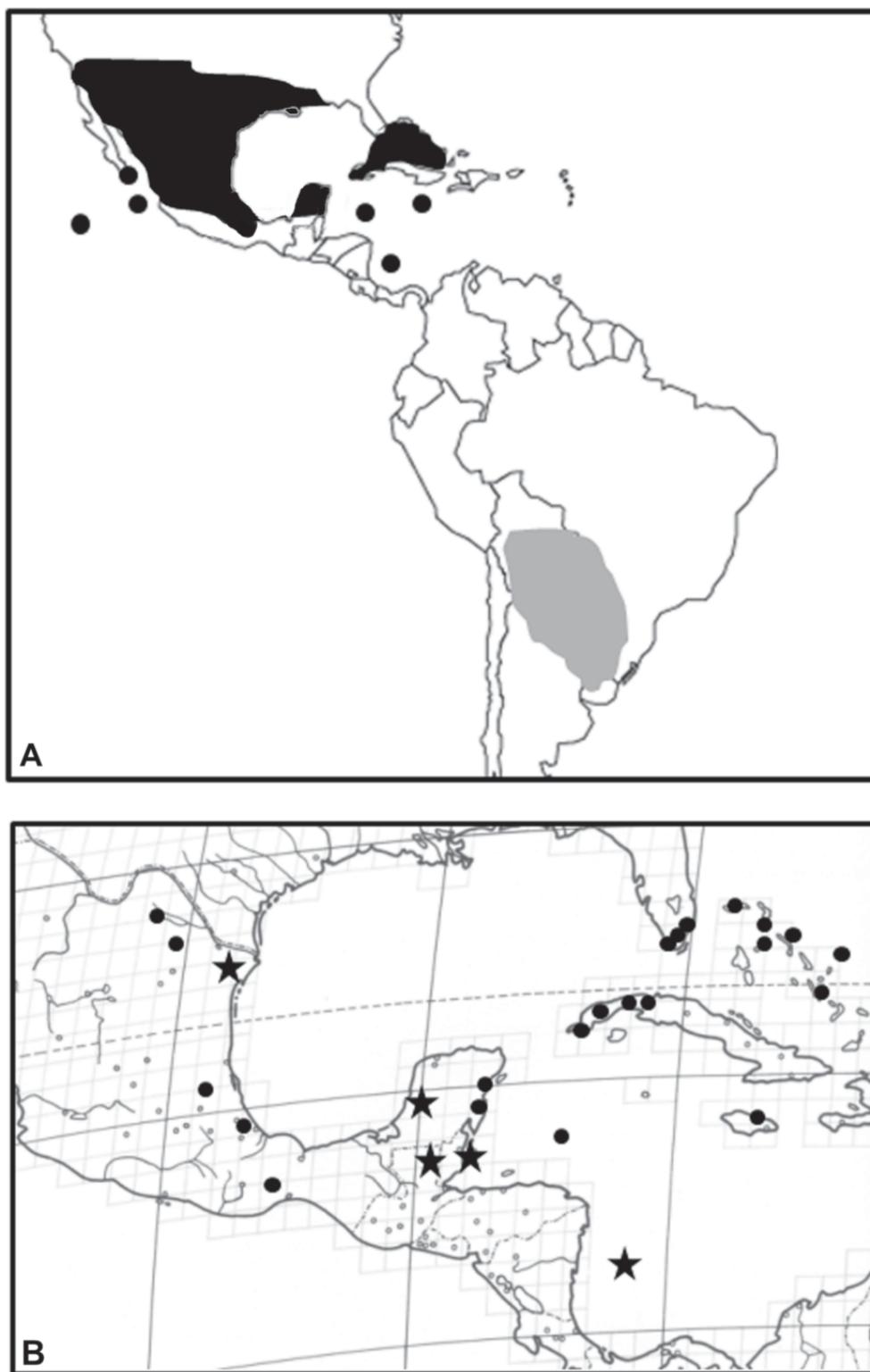
plus the *A. lindneri* group (González, 1999 b, González & Stevenson, 2002), DNA sequence-based analyses do not support such relationship (Fig. 1).

Most of the species of *Aristolochia* subsect. *Pentandrae* grow in the Sonoran province, which comprises mainly dry areas of the S United States and adjacent N Mexico (Fig. 5A). Only two species of this taxon have been reported in islands of the Pacific Ocean, both off Mexico: *A. tresmariae* Ferris, restricted to Maria Madre Island (Nayarit); and *A. islandica* Pfeifer, from the Revilla Gigedo Archipelago, at about 300 miles from Baja California. Only *Aristolochia pentandra* (out of c 40 pentandrous species) is found in the Bahamas, the West Indies, and now in the Caribbean island of San Andrés (Fig. 5B).

Despite the high diversification of the pentandrous species of *Aristolochia* in the continental Sonoran province (sensu Bray, 1898), the first pentandrous *Aristolochia*, *A. pentandra*, was described by Jacquin (1760, 1763; Fig. 4A), from “sylvis circa Havanam”, Cuba (Jacquin 1763: 234). *A. pentandra* is the type species of *Aristolochia* subsect. *Pentandrae*. This species is also the most widely distributed species of this subsection, as it reaches the Bahamas, the West Indies, and two small islands off the Caribbean coasts of Central America (Swan Island and the first records from San Andrés Island reported here; see below; Fig. 5B). A second Cuban species of *Aristolochia* with five stamens, *A. clementis*, has been described (Alain, 1948). However, flowers of this Cuban endemic can have five to six stamens and five to six carpels (Rankin



**Figure 4.** A. *Aristolochia pentandra*, lectotype (Jacquin, 1763, Table 147). B, C. Floral buds and flowers in anthesis of *A. pentandra* cultivated in Texas (González 3603, COL), seeds from Mexico. D-G. *A. pentandra* from San Andrés Island, Colombia. D-F. Floral buds and flowers in anthesis (Pabón-Mora & al. 232, NY). G. Capsule and seeds (Murcia 100, TOL1). br, bract. Photo credits: B-C, G: F. González; D-F: N. Pabón-Mora.



**Figure 5.** A. Disjunct distribution of the pentandrous species of *Aristolochia* (black area and black dots) and its sister group in South America (grey area). B. Map of distribution of *Aristolochia pentandra*. Locations newly reported here are labeled with a star.

Rodríguez, 1998); such intraspecific variation, along with the absence of the typical adaxial bract characteristic of all the species of *Aristolochia* subsect. *Pentandrae*, strongly suggests that this species does not belong to this subsection.

The distribution of the pentandrous species of *Aristolochia* and the five species of the *A. lindneri* group (Fig. 5 A) constitutes an additional example of the so-called (Johnston, 1940; Solbrig, 1972) the temperate South America-Temperate North America disjunction. This disjunction, often found in plants from semi-desertic or dry habitats, has been a matter of interest since Gray and Hooker's times (Bray, 1898; Campbell, 1944), and was considered by Solbrig (1972) to be the most puzzling intercontinental disjunction. Similar biogeographic disjunctions have been reported in members of the Hydrophyllaceae (Heckard, 1963), the two species of the family Koeberliniaceae (Takhtajan, 1997; Heywood *et al.*, 2007; Holmes *et al.*, 2008), and even at the population level in species of Apiaceae (Constance, 1963). A more detailed list of taxa showing such disjunction was given by Johnston (1940) and Solbrig (1972).

At least two competing scenarios have been proposed to explain such disjunct distributions. First, Johnston (1940) postulated the presence of an ancient distribution of desert/dry flora in the New World, and the connections between the deserts/dry floras of North- and Central America and those of South America. The second scenario is based on the long-distance dispersal and further *in situ* diversification of such taxa (Raven, 1963). However, more data are needed in order to explore which is the more acceptable explanation.

**Range extension of *Aristolochia pentandra*** (Fig. 4). According to Pfeifer (1970), this species grows in Florida and Texas (United States), Bahama Islands, western Cuba, Jamaica, Swan Islands (Honduras) and Mexico. While working on the monograph of Aristolochiaceae for Flora Neotropica, one of the authors (FG) found specimens of *A. pentandra* from Guatemala and Belize (Fig. 5 B). The specimens from the latter two countries, along with the specimens previously found in the Swan Islands (Honduras) remained as the southernmost stations for the species until recently, when two of us (GAM and NPM, Fig. 4 D-G) independently found it in the Caribbean island of San Andrés (Colombia), at approximately 12°35'16" N latitude. These findings now become the southernmost station of *A. pentandra*, and by extension, of the whole subsection *Pentandrae*. The station reported here is located about 5°S and 3°E of the closest locality in the Swan Islands (Honduras; Fig. 5 B).

*Aristolochia pentandra* Jacq., Enum. Syst. Pl. 30. 1760; Select. Stirp. Amer. Hist. 233-234, t. 147. 1763. **Lectotype, here designated:** Jacquin, Select. Stirp. Amer. Hist., 233-234, t. 147. 1763. *Einomeia pentandra* (Jacq.) Raf., Med. Fl. 1:62. 1828; Klotzsch in Monatsber. Königl. Preuss. Akad. Wiss. Berlin 1859:605. 1859.

*A. conferta* Miller, Gard. Dict. Ed. 8.n.11. 1768. (*ex char.*).

*A. hastata* Kunth, Nov. Gen. Sp. Pl. 2: 148, t. 116. 1817, *non* Nutt. (1818), *nec* Jack (1822), *nec* Jacq. (*sphalm.* = Jack.) *ex* Klotzsch (1859). *Einomeia hastata* (Kunth) Klotzsch, Monatsb. Acad. Berlin 1859: 625, t. 2. 1859. *Aristolochia pentandra* Jacq. var. *hastata* (Kunth) Duchartre in DC. Prodr. 15(1): 440. 1864. **Lectotype, here designated:** Cuba: "Havana", s.f. (fl), *A. Bonpland 1342* (P).

*Einomeia bracteata* Raf., Fl. Tellur. 4: 98. 1836. (*ex char.*).

*A. racemosa* Brandg., Univ. Calif. Publ. Bot. 6: 363. 1917. Type: Mexico: Veracruz, Zacuapan, Feb 1911 (fl fr), C. A. Purpus 5333 (Holotype UC; isotypes BM, F, GH, MO, NY, US).

*A. marshii* Standl., Publ. Field Mus. Nat. Hist. Chicago. Bot. Ser. 17: 238. 1937. Type: Mexico: Coahuila, Muzquiz, E. G. Marsh 10 (Holotype F).

Procumbent to twining, scarcely puberulous perennial herbs (Fig. 4 A, B, F). Rhizome cylindrical, to 8 x 1.5 cm. Petiole (1-)2-4.3 cm long, glabrescent; blade shape variable, usually ovate, sagittate, subhastate or slightly to deeply trilobed, lobes ascending to descending, (2.5-)5-9(-13.2) x (0.8-)1.4-7.5(13) cm, membranous, base cordate-lobed (cuneate), sinus 6-20(-25) mm in depth, glabrescent to scarcely puberulous above especially along the veins, glabrescent to minutely puberulous below, apex of the central and the lateral lobes usually acute. Bracts at about 1/10-1/2 from the length of the peduncle, sessile, ovate, 4-10(-20) x 2-6(-10) mm. Peduncle plus ovary c 1-2 cm long. Perianth puberulous on the outside, rectilinear to slightly bent; utricle obovoid, 7-10 x 4-5 mm, syrinx eccentric, c 1.5 mm long; tube slightly bent, 7-12 mm long, forming an angle of about 140-180° with the utricle; limb ovate and bright yellow in the West Indian and the San Andrés collections (Fig. 4 A, D-F), narrowly-ovate and reddish or pink except for the whitish fauces in the continental collections (Fig. 4 B, C), 17-26 x 7-11 mm, forming an angle of about 140-180° with the tube, acute at the apex; gynostemium about 3.5 x 1.5 mm. Capsule subglobose, 1-2.3 x 1-2 cm, glabrescent, dehiscent from the top to the bottom; seeds triangular, black to dark brown, 4-6 x 4-6 mm, about 1 mm thick, flattened, wingless, raphe prominent and with membranous extensions as large as the seed itself (Fig. 4 G).

**Distribution** (Fig. 5B). - South Florida (United States), Bahama Islands, Mexico, Cuba, Jamaica, Swan Islands (Honduras), Guatemala, Belize, and San Andrés Island (Colombia). It grows in a variety of habitats, such as dry thickets or deciduous forests, or in beach communities in rocky, limestone or sandy shores; occasionally, it also grows in “milpas” (Mexico). In the island of San Andrés only one small population has been detected, near disturbed sandy shores, along with *Ipomoea pes-caprae* (Convolvulaceae), *Morinda roioc* (Rubiaceae), *Sphagnetocola trilobata* (Asteraceae), and *Stachytarpheta jamaicensis* (Verbenaceae).

The island of San Andrés is an oceanic island formed by coral reef deposits during the Pliocene, which are on top of the Nicaragua/Hondura volcanic basement plate formed during the Miocene; however, there is no evidence of land connection between the island deposits and Central American mainland (**Barriga et al.**, 1969). The flora of the Archipelago of San Andrés and Providencia has been relatively well studied, and at least two major expeditions have included these islands, the “Fifth George Vanderbilt Expedition” in 1941, and the “Catherwood Chaplin West Indies Expedition” from the Academy of Sciences of Philadelphia in 1948, of which only the Pteridophytes were published (**Proctor**, 1950). Although extensive floristic and ethnobotanic work in the Archipelago has been published by **Toro** (1929), **Barriga et al.** (1969), **González et al.** (1995) and **Cabrera** (2005), *Aristolochia* was not recorded in any of these studies. Thus, this new record, along with the site in which *A. pentandra* grows in this island (extremely disturbed areas close to the beach, and near the local airport and some major harbours along the N end of the island) could well be a recent introduction from Jamaica, Swan Islands or Central America.

**Additional specimens seen (new records are indicated by an asterisk\*)**. - **UNITED STATES. FLORIDA**: Dade Co., 19-57-42, Biscayne National Monument, Elliott Key, 16 Feb 1978 (fl), *Avery 1823* (FLAS); Soldiers Key, 30 Nov 1904 (fl fr), *Britton 335* (F); south Florida, 1936 (fl), *Chapman 33* (US); south Florida, s.f. (fl), *Herb. Chapman 146* (F, FLAS); Dade Co., Elliott Key, 19 Jan 1966 (fr), *Craighead s.n.* (FLAS); Elliotts Key, 3 Oct 1939 (fl), *Fennell 1046* (UC); Miami, Mar-May 1877 (fl), *Garber s.n.* (F, FLAS, US); Hammocks, Soldier Key, 6 Jan 1909 (fl, fr), *Small & Carter s.n.* (FLAS, US); Hammocks, Pumpkin Key, Monroe Co., 9 Mar 1915 (fl fr), *Small & Carter 5674* (MO).

**BAHAMA ISLANDS**: Abaco, Old Kerris Point, 2 Jan 1905 (fl), *Brace 2000* (F, NY); Great Bahama, West End, 16 Apr-8 May 1905 (fl fr), *Brace 3534* (F, NY, US); Andros, road to Morgan’s Bluff, 4 Mar 1907 (fl), *Brace 6697* (F,

NY); Andros, Nicholl’s town and vic., road to Morgan’s Bluff, 5-6 Mar 1907 (fl fr), *Brace 6740* (F, NY); Great Bahama, Luland, Pinder’s Point, 5-13 Feb 1905 (fl fr), *Britton & Millspaugh 2500* (F, NY, US); Watlings Island, 15 Mar 1907 (fl fr), *Britton & Millspaugh 6214* (F, NY, US); Long Island, Clarence Town and vicinity, 16-19 Mar 1907 (fl fr), *Britton & Millspaugh 6257* (F, NY, US); Eleuthera, Harbour Island, 18 Feb-4 Mar 1907 (fl fr), *Britton 6391* (F, GH, NY, US); North Eleuthera, Ca. Ridley Head, 8 Jan 1874 (fl fr), *Correll 41020* (FTG, NY); Ridley Head Beach area, (fl fr), *Correll 41198* (FTG); Great Exuma, SE end of Orion Road, 9 Jan 1975 (fr), *Correll 44072* (FTG, NY); Little Abaco, W of Cedar Harbour, 17 Mar 1975 (fl fr), *Correll & Meyer 44731* (F, FTG, NY); Grand Bahama, Pinder’s Point, 25 Jan 1976 (fl fr), *Correll & Popenoe 46685* (F, FTG, GH, NY); Great Abaco, Green Turtle Cay, in vacant lot in New Plymouth, 27 Nov 1976 (fl fr), *Correll & Correll 47689* (F, FTG, NY); Long Island, ca. Clarence Town, 14 Mar 1977 (fl fr), *Correll 48149* (FTG, NY); Little Exuma, high coastal ridge NW of Williams Town, 4 Mar 1980 (fl fr), *Correll & Wasshausen 51204* (FTG, NY, US); Mayaguana, beach E of Abrahams Bay, 10 Feb 1973 (fl fr), *Gillis & Proctor 11634* (A, B); between Harbor Store and Post Office, Clarence Town, Long Island, 15 Jun 1974 (fl), *Hill 2155* (FTG, NY); North Bimini Island, May 1948 (fl fr), *Howard & Howard 10034* (A, FTG, GH, NY, S, UC, US); Nicols Town, Andros, 26 Mar 1890 (fl fr), *Nortrop & Nortrop 385* (F, GH, K, NY); San Salvador, near Graham’s Harbor, 13 Dec 1976 (fl), *Smith & Bacharach 216* (FTG); New Providence, along road near Sea House, 8 Jun 1909 (fl fr), *Wilson 8434* (F, K, NY).

**CUBA. LA HABANA**: Estación Central Agronómica, La Habana, 20 Sep 1904 (fl), *Baker 1815* (NY); prope Morro ad terram, 27 May 1914 (fl), *Ekman 1161* (G, NY, S); playa de Cajimar, 15-20 Mar 1906 (fl fr), *Hitchcock s.n.* (F); playa de Marianao, 24 Feb 1914 (fl), *Bro. León 4210* (NY); playa de Santafé, near sea shore, 7 Oct 1915 (fl fr), *Bro. León 5660* (NY); ca. Habana, 6 Sep 1923 (fl), *Bro. León 11518* (NY); Habana del Este, Cojimar, frente al paradero del ómnibus, 4 Ene 1992 (fr), *Rankin Rodríguez & Silva 69992* (K); Habana, 1864 (fl fr), *Schott 127* (BM). **PINAR DEL RÍO**: 10-12 Mar 1911 (fr), *Britton & Cowell 9908* (NY, US). **WITHOUT FURTHER DATA**: “Guio iter Cubense? *Malaspina? Nee?*, s.f. (fl), *Boldo s.n.* (MA)”; “in rupibus maritimis Cubae ad Matanzas” (fl), *Poeppig s.n.* (BR, LE); s.f. (fr), *de la Sagra 178* (G); (fl), *de la Sagra s.n.* (P); Nov 1822 (fl), *Herb. Shuttleworth s.n.* (BM); 1 May 1860-1864 (fl fr), *Wright 2610* (BM, G, GH, K, MA, NY, P).

**MEXICO. CAMPECHE**: Escarcega, margen oriental de la laguna de Silvituk, Silvituk, 1-2 km S de la carretera Escarcega-Xpujil, 18°37’50” N, 90°16’20” W, 21 Sep 1999

(fl fr), *Carnevali et al. 5745* (F, MO)\*. COAHUILA: Muzquiz, Apr 1938 (fl), *Marsh 1143* (F, TEX). NUEVO LEÓN: SE Monterrey on MEX 85, ½ m W on road to El Barreal, Jul-Aug 1971 (fl), 12 m, *Parker 473* (TEX); near Monterrey, 7 Sep 1902 (fl fr), *Pringle s.n.* (US); valley near Monterrey, 1600 ft, 22 Jul 1906 (fl fr), *Pringle 13804* (GH, L, S); valley near Monterrey, 1600 ft, 22 Jul 1906 (fl fr), *Pringle 13805* (GH, US); Sabinas Hidalgo, along the main highway in to Monterrey, 0.7 mi N of the bridge over the rio Sabinas, 300 m, 26°30' N, 100°12' W, 18 May 1995 (fl), *Westlund 5-18-88.1* (TEX). OAXACA: Tehuantepec, Jul 1936 (fl), *Matuda 585* (US). QUINTANA ROO: Coba, Jun-Jul 1938 (fl), *Lundell & Lundell 7753* (US). TAMAULIPAS: Cd. Victoria, hotel San Antonio, Av. Tijerino, Blvd. Tamaulipas, 18 Mar 1991 (fl), *Vincent & Lammers 4523* (UC)\*. VERACRUZ: Pr. Mirador, 3000-3800', s.f. (fl), "*Sartorius Pl. Mexicanae, Ed. Hohenacker*" (G); Tomata, Atzalan, 550 m, 25 Feb 1970 (fl fr), *Ventura 592* (CONN, NY, US). YUCATÁN: Opichen, alrededores de las grutas de Calcehtok, 20°33'00" N, 89°54'27" W, 20 Nov 1997 (fl), *Carnevali et al. 4716* (FLAS, MO, NY, TEX)\*; entrance to grotto above Calcehtok near Opichen, 5 Jan 1982 (fl), *Darwin et al. 2142* (S); above Calcehtok near Opichen, 5 Jan 1982 (fr), *Darwin et al. 2146* (S); 1895 (fl fr), *Gaumer 441* (BM, K, NY, P, S); Opichen, 1-2 km S del pueblo de Calcehtok, aprox. 20°33'00" N, 89°54'27" W, 30-100 m, 24 Feb 1999 (fl fr), *May & Chi 1416* (MO)\*; "Yucatán", 31 Mar 1866 (fl), *Schott 839* (BM). WITHOUT FURTHER DATA: Apr-May 1921 (fl fr), *Rutten & Rutten-Pekelharig 684* (U).

**JAMAICA:** Sandiger Küstenstreifen bei Silver Sands/Trelawny, ca. 1 m ub. NN, 17 Sep 1985 (fl), *Heckel 2248* (B); parish St. Ann, Dunns river beach, 16 Jan 1958 (fl), *Howard & Proctor 15058* (A); parish St. Ann, Casa Nina, 1 mi ENE of Ocho Ríos, 210 ft, Dec 1954 (fl), *Proctor 9561* (A, U).

**BELIZE:** Half Moon Caye, Lighthouse Reef, 17°12'16" N, 87°32'13" W, 21 Oct 1995 (fl), *Meerman s.n.* (NY)\*.

**GUATEMALA:** PETÉN: Westufer des Lago Petén Itzá: im Anwesen von Don Gabriel Uliva-Estrada (SW an den Chakmamantok-Felsen angrenzend), das ist 0.5 km NE Zentrum von San José, 115 msm, 16°59'8" N, 89°53'54' W, 29 Ago 1993 (fl fr), *Wallnöfer 6086* (MO, NY)\*.

**HONDURAS.** SWAN ISLANDS: Larger Island, 9 Apr 1913 (fl fr), *Nelson 18* (GH); ibid, 7 Apr 1913 (fl), *Nelson 39* (GH, US); Great Swan, 17°25' N, 83°56' W, 15-24 Aug 1971 (fl fr), *Proctor 32493* (BM, F, GH, TEX-LL).

**COLOMBIA:** SAN ANDRÉS Y PROVIDENCIA: San Andrés, Spratt Bight, 12° 35' 16.7" N, 81°41' 58.6", 1 msnm,

01 Nov 2009, *Murcia 100* (COL, TOLI)\*; Isla de San Andrés, Spratt Bight, 12° 35' 16.7" N, 81° 41' 58.6", 1 msnm, 04 Nov 2009, *Murcia 141* (COL, TOLI)\*; Isla de San Andrés, Spratt Bight, matorrales cerca del camino peatonal sobre la bahía, a 50 m al occidente de la casa de la Defensa Civil, 01 Abr 2010 (fl), *Pabón-Mora et al. 232* (COL, NY, TOLI)\*.

**Vernacular names** – Camote, camotillo, guaco (Mexico).

### Acknowledgements

The authors express their appreciation to the Corporación para el Desarrollo Sostenible CORALINA, San Andrés, Providencia y Santa Catalina, for financial support granted to GAM during her bachelor's thesis in Biology at the Universidad del Tolima. M. Nee (The New York Botanical Garden) and S. Wanke (Technische Universität Dresden, Germany), provided detailed information on the types of vegetation for *A. burelae*, *A. lindneri*, and *A. lozaniana* in Bolivia, as well as the pictures of *A. burelae* and *A. lozaniana* published here.

### Literature cited

- Alain, Bro.** 1948. *Aristolochia clementis*. Pp. 80-81 in León, Bro. & Bro. Alaín, Novedades de la Flora Cubana. Rev. Soc. Cub. Bot. 5:75-81.
- Barriga, E., J. Hernández, I. Jaramillo, R. Jaramillo, L. E. Mora-Osejo, P. Pinto & P. Ruiz.** 1969. La Isla de San Andrés. Contribución al conocimiento de su ecología, flora, fauna y pesca. Dirección de Divulgación Cultural, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá.
- Bray, W. L.** 1898. On the relation of the flora of the Lower Sonoran Zone in North America to the flora of the arid zones of Chili and Argentine. Bot. Gaz. 26:121-147.
- Cabrera, I.** 2005. Las plantas y sus usos en las islas de Providencia y Santa Catalina. Programa Editorial Universidad del Valle, Cali.
- Calzada, J. I., G. Flores & O. Téllez.** 1997. *Aristolochia davilae* (Aristolochiaceae), a new species from Nayarit, Mexico. Contr. Univ. Michigan Herb. 21:143-146.
- Campbell, D. H.** 1944. Relations of the temperate floras of North and South America. Proc. Calif. Acad. Sci. 25:139-146.
- Constance, L.** 1963. Amphitropical relationships in the herbaceous flora of the Pacific coast of North and South America: A symposium. Introduction and historical review. Quarterly Rev. Biol. 38:109-116.
- Duchartre, P.** 1854. Tentamen methodicae divisionis generis *Aristolochia*. Ann. Sci. Nat., Bot. ser. 4, 2:29-76.
- . 1864. Aristolochiaceae. Pp. 421-498 in A. P. de Candolle (ed.), Prodrum systematis naturalis regni vegetabilis, vol. 15(1):421-498. Treuttel et Würtz, Paris.
- González, F.** 1997. Hacia una filogenia de *Aristolochia* y sus congéneres neotropicales. Caldasia 19:115-130.

- \_\_\_\_\_. 1999 a. Inflorescence morphology and the systematics of Aristolochiaceae. *Syst. Geogr. Pl.* **68**:159-172.
- \_\_\_\_\_. 1999 b. A phylogenetic analysis of the Aristolochioideae (Aristolochiaceae). Ph. D. dissertation. The City University of New York, New York.
- \_\_\_\_\_. 2001. Una nueva especie de *Aristolochia* (Aristolochiaceae) de Bolivia. *Rev. Acad. Colomb. Ci. Exact. Fís. Nat.* **25**(95):225-228.
- \_\_\_\_\_, **J. N. Díaz & P. Lowy**. 1995. Flora Ilustrada de San Andrés y Providencia. Universidad Nacional de Colombia-Sena, Bogotá.
- \_\_\_\_\_, **& P. J. Rudall**. 2003. Structure and development of the ovule and seed in Aristolochiaceae, with particular reference to *Saruma*. *Plant Syst. Evol.* **241**:223-244.
- \_\_\_\_\_, **& D. W. Stevenson**. 2000. Gynostemium development in *Aristolochia* (Aristolochiaceae). *Bot. Jahrb. Syst.* **122**:249-291.
- \_\_\_\_\_, **& D. W. Stevenson**. 2002. A phylogenetic analysis of the subfamily Aristolochioideae (Aristolochiaceae). *Rev. Acad. Colomb. Ci. Exact. Fís. Nat.* **26**(98):25-60.
- Heckard, L. R.** 1963. The Hydrophyllaceae. *Quarterly Rev. Biol.* **38**:117-123.
- Heywood, V. H., R. K. Brummitt, A. Culham & O. Seberg**. 2007. Flowering plant families of the world. Royal Botanic Gardens, Kew.
- Holmes, W. C., K. L. Yip & A. Rushing**. 2008. Taxonomy of *Koerberlinia* (Koerberliniaceae). *Brittonia* **60**:171-184.
- Huber, H.** 1985. Samenmerkmale und Gliederung der Aristolochiaceen. *Bot. Jahrb. Syst.* **107**:277-320.
- \_\_\_\_\_. 1993. Aristolochiaceae. Pp. 129-137 in: K. Kubitzki, J. G. Rohwer & V. Bittrich (eds.), The families and genera of vascular plants, Vol. 2: 129-137. Springer, Berlin.
- Jacquin, N. J.** 1760. Enumeratio Systematica Plantarum quas in insulis Caribaeis vicinaque Americae continente detexit novas, aut jam cognitae emendavit. Apud T. Haak, Lugduni Batavorum (Leiden).
- \_\_\_\_\_. 1763. Selectarum Stirpium Americanarum Historia. Ex Officina Krausiana, Wien.
- Johnston, I. M.** 1940. The floristic significance of shrubs common to North and South American deserts. *J. Arnold Arbor.* **21**:356-363.
- Kelly, L. M. & F. González**. 2003. Phylogenetic relationships in Aristolochiaceae. *Syst. Bot.* **28**:236-249.
- Klotzsch, F.** 1859. Die Aristolochiaceae des Berliner Herbariums. *Monatsber. Königl. Akad. Wiss. Berlin* **1859**:571-625.
- Mabberley, D. J.** 2008. Mabberley's plant-book. A portable dictionary of plants, their classification and uses. Third edition. Cambridge University Press, Cambridge.
- Murata, J., T. Ohi, S. Wu, D. Darnaedi, T. Sugawara, T. Nakanishi & H. Murata**. 2001. Molecular phylogeny of *Aristolochia* (Aristolochiaceae) inferred from *matK* sequences. *Acta Phytot. Geobot.* **52**:75-83.
- Neinhuis, C., S. Wanke, K. Hilu, K. Müller & T. Borsch**. 2005. Phylogeny of Aristolochiaceae based on parsimony, likelihood, and Bayesian analyses of *trnL-trnF* sequences. *Plant Syst. Evol.* **250**:7-26.
- Ohi, T., T. Sugawara, H. Murata, S. Wanke, C. Neinhuis & J. Murata**. 2006. Molecular phylogeny of *Aristolochia* sensu lato (Aristolochiaceae) based on sequences of *rbcL*, *matK*, and *phyA* genes, with special reference to differentiation of chromosome numbers. *Syst. Bot.* **31**:481-492.
- Ortega, J. F. & R. V. Ortega**. 1995. Contribución al estudio de Aristolochiaceae de México, I. Una especie nueva de *Aristolochia* de Puebla, México. *Acta Bot. Mex.* **32**:39-45.
- Pfeifer, H. Wm.** 1970. A taxonomic revision of the pentandrous species of *Aristolochia*. University of Connecticut Publication Series, 134 pp.
- Proctor, G.** 1950. Results of the Catherwood Chaplin West Indies Expedition, Part. I. Plants of Cayo Largo (Cuba), San Andrés and Providencia. *Proc. Acad. Nat. Sci. Philadelphia* **102**:27-42.
- Rafinesque, C. S.** 1828. Medical Flora; or, Manual of medical botany of the United States of North America, vol. 1:61-65. Atkinson & Alexander, Philadelphia.
- Rankin Rodríguez, R.** 1998. Aristolochiaceae. Pp. 1-39 in Flora de la República de Cuba, fasc. 1 /2. Koeltz Scientific Books, Koenigstein.
- Raven, P.** 1963. Amphitropical relationships in the floras of North and South America. *Quarterly Rev. Biol.* **38**:151-177.
- Santana-Michel, F. J.** 1995. Una especie nueva de *Aristolochia* (subsección *Pentandrae*) del estado de Jalisco, México. *Bol. Inst. Bot. Univ. Guadalajara* **3**(1-3):87-90.
- \_\_\_\_\_. 2002. Una especie nueva de *Aristolochia* L., subsección *Pentandrae* (Aristolochiaceae) del estado de Colima, México. *Acta Bot. Mex.* **58**:63-67.
- \_\_\_\_\_. 2007. Una especie nueva de *Aristolochia* L., subsección *Pentandrae* (Aristolochiaceae) de la reserva de la biosfera Sierra de Manantlán, Jalisco, México. *Acta Bot. Mex.* **79**:81-87.
- \_\_\_\_\_, **& S. Lemus-Juárez**. 1996. *Aristolochia occidentalis* (Aristolochiaceae), una especie nueva de la subsección *Pentandrae* de Colima y Jalisco, México. *Acta Bot. Mex.* **36**:53-57.
- \_\_\_\_\_, **& J. A. Solís-Magallanes**. 2007. *Aristolochia emiliae* (Aristolochiaceae: subsección *Pentandrae*), una especie nueva de la costa de Jalisco, México. *Acta Bot. Mex.* **82**:7-13.
- Solbrig, O.** 1972. New approaches to the study of disjunctions with special emphasis on the American Amphitropical Desert disjunctions. Pp. 85-100 in D. H. Valentine (ed.), Taxonomy, Phytogeography and Evolution, Academic Press, London.
- Sugawara, T., J. Murata, S. Wu, T. Ohi, T. Nakanishi & H. Murata**. 2001. A cytological analysis of 24 taxa in *Aristolochia* subgenera *Siphisia* and *Aristolochia* (Aristolochiaceae). *Acta Phytot. Geobot.* **52**:149-158.
- Takhtajan, A. L.** 1997. Diversity and classification of flowering plants. Columbia University Press, New York.
- Toro, R.** 1929. Una contribución a nuestro conocimiento de la flora silvestre y cultivada de San Andrés. *Rev. Soc. Colomb. Cienc. Nat.* **6**(103):201-207.

**Wagner, S.** 2010. Evolution of shrubs and lianas within *Aristolochia* subgenus *Isotrema* – combining molecular phylogeny with biomechanical and anatomical approaches (Evolution von Wuchsformen innerhalb der *Aristolochia* Untergattung *Isotrema* - Molekulare Phylogenie kombiniert mit biomechanischen und anatomischen Untersuchungen). Dipl. Biol. Thesis, Fakultät Mathematik und Naturwissenschaften, Technischen Universität Dresden, Germany.

**Wanke, S., F. González & C. Neinhuis.** 2006. Systematics of pipevines: Combining morphological and fast-evolving molecular characters to investigate the relationships within subfamily Aristolochioideae (Aristolochiaceae). *Intl. J. Pl. Sci.* **167**:1215-1227.

Recibido: octubre 15 de 2010.

Aceptado para su publicación: noviembre 17 de 2010.

# UN MODELO INFLACIONARIO SIN INFLATONES

Gabriel Gómez<sup>1</sup>, Yeinzon Rodríguez<sup>2,3</sup>

## Resumen

**Gómez G. & Y. Rodríguez:** Un modelo inflacionario sin inflatones. *Rev. Acad. Colomb. Cienc.* **34** (133): 479-496, 2010. ISSN 0370-3908.

En la cosmología inflacionaria, los modelos más populares y exitosos son los del tipo slow-roll, los cuales satisfacen las condiciones requeridas para la solución de los problemas clásicos de la cosmología estándar. Sin embargo, estos modelos requieren de la existencia de campos escalares fundamentales, tales como el inflatón, los cuales aún no han sido observados en la naturaleza. A esta “dificultad” se suma el hecho de que estos modelos requieren de potenciales prácticamente planos para generar inflación. En este artículo, se construye un modelo inflacionario motivado por las dificultades que presentan los modelos del tipo slow-roll. En este modelo, se considera nuestro Universo a gran escala como un fluido perfecto constituido por vacío o constante cosmológica  $\Lambda$  (en cuyo caso es la única componente dominante) y radiación. Para dicho modelo, la expansión acelerada del Universo se sigue a partir de la transferencia de energía de vacío no sea transferida a la radiación, no se generará una época inflacionaria exitosa) sin la necesidad de campos escalares fundamentales tales como el inflatón. A medida que ocurra la transición, la densidad de energía asociada al vacío decaerá exponencialmente a densidad de energía de radiación, modificando el contenido energético del Universo y, consecuentemente, las ecuaciones de evolución que describen esta etapa inflacionaria. A partir de la dinámica del modelo, se obtienen soluciones analíticas exactas para el parámetro de Hubble y de expansión. Se calcula el monto de inflación y se establecen las condiciones necesarias para resolver los problemas de planitud, horizonte y de reliquias no deseadas. Adicionalmente, se determina la temperatura al final de este período inflacionario denominada temperatura post-inflacionaria.

**Palabras clave:** cosmología, modelos inflacionarios, fluidos interactuantes.

<sup>1</sup> Escuela de Física, Universidad Industrial de Santander, Ciudad universitaria, Bucaramanga 680002, Colombia, Correo electrónico: gabrielphysics@gmail.com

<sup>2</sup> Vicerrectoría de Ciencia, Tecnología, e Innovación, Universidad Antonio Nariño, Cra. 3 Este No. 47A-15, Bogotá, D. C. 110231, Colombia.

<sup>3</sup> Escuela de Física, Universidad Industrial de Santander, Ciudad universitaria, Bucaramanga 680002, Colombia, Correo electrónico: yrodrig@uis.edu.co

### Abstract

In the inflationary cosmology, the most popular and successful models are those of the slow-roll variety, which satisfy the required conditions to solve the classical problems of the standard cosmology. However, these models require the existence of fundamental scalar fields, such as the inflaton, that have not been observed yet in nature. Besides this “difficulty”, these models require almost flat potentials to generate inflation. In this paper, we build an inflationary model motivated by the difficulties presented by the slow-roll models. In this model, we consider our Universe at large-scales as a perfect fluid composed of vacuum or cosmological constant  $\Lambda$  (in which case this is the only dominant component) and radiation. The accelerated expansion of the Universe, for this model, is driven by the transfer of energy from vacuum to radiation (in the case that the vacuum energy is not transferred to radiation, a successful inflationary epoch will not be generated) without the need of fundamental scalar fields such as the inflaton. As the transition happens, the energy density associated to the vacuum will exponentially decay to radiation energy density, modifying the energy content of the Universe and, consequently, the evolution equations that describe this inflationary stage. From the dynamics of the model, exact analytical solutions for the Hubble and expansion parameters are obtained. The amount of inflation is calculated and the necessary conditions to solve the flatness, horizon, and unwanted relics problems are established. In addition, the temperature at the end of this inflationary period, which is called post-inflationary temperature, is calculated.

**Key words:** Cosmology, inflationary models, interacting fluids.

## 1. Introducción

Nuestro Universo debe presentar condiciones genéricas mediante las cuales el paradigma inflacionario, a través de un modelo adecuado, describa su evolución primordial (antes del Big Bang). A partir de esta idea se quiere obtener un modelo que reproduzca nuestro Universo actual bajo las condiciones requeridas para la solución de los problemas clásicos de la cosmología estándar. La cosmología moderna se apoya en el período primordial de expansión acelerada, conocido como inflación y propuesto por Alan Guth (Guth, 1981), el cual se define como una etapa primordial del Universo en donde la densidad de energía de vacío domina sobre la densidad de energía total, caracterizada por presión negativa y repulsión gravitacional. Dicha etapa de expansión acelerada produce un incremento del factor de escala  $a(t)$  de aproximadamente 27 ordenes de magnitud en un período de al menos  $10^{-36}$  s, e irregularidades capaces de generar formación de estructuras a gran escala a partir de inestabilidad gravitacional (Dodelson, 2003; Lyth & Liddle, 2009; Mukhanov, 2005; Weinberg, 2008).

Existen dos categorías en las cuales se puede clasificar un modelo inflacionario (Mukhanov, 2005), las cuales son de vieja inflación y de nueva inflación. La primera se caracteriza por campos escalares que tunelan de un estado de energía de vacío falso o metaestable a un estado de energía verdadero. La segunda se caracteriza por un potencial prácti-

camente plano en el cual el campo escalar, el inflatón, cae cuesta abajo hasta un mínimo, generando de esta forma inflación. Es inevitable que la clase de modelos de inflación vieja no proporcione una salida exitosa debido a ciertos inconvenientes como la imposibilidad de termalización en la nucleación de burbujas de vacío verdadero en el fondo de burbujas de vacío falso (Witten, 1984), debido a que toda su energía almacenada es concentrada en las paredes de ésta y no sufren cambios para colapsar.

La razón de que prevalezca la idea de la existencia de campos escalares fundamentales en la naturaleza corresponde a la necesidad teórica que requieren algunas teorías generales, tales como el Modelo Estándar de partículas elementales (Kane, 1993), que postula el bosón de Higgs para explicar el mecanismo mediante el cual las partículas adquieren masa, y la teoría de cuerdas (Polchinski, 1998), que postula como un ejemplo el Dilatón como componente de la materia oscura.

Sin embargo, el hecho de que no exista hasta la fecha evidencias observacionales de la existencia de tales campos escalares en la naturaleza (a pesar de los grandes esfuerzos en la búsqueda del Higgs en los experimentos en los aceleradores: Tevatron en el FERMILAB y LEP en el CERN) y de que estén presentes algunas dificultades en los modelos del tipo vieja y nueva inflación, motiva a proponer nuevos modelos inflacionarios alternativos a los tradicionales, siendo

un ejemplo el de inflación vectorial (**Golovnev, Mukhanov & Vanchurin**, 2008) basada en campos vectoriales fundamentales. Cabe notar que los campos vectoriales implican preferencia en la dirección y, por lo tanto, generan violaciones de la isotropía estadística (**Dimopoulos, Karčiauskas, Lyth & Rodríguez**, 2009). No obstante, los campos vectoriales fundamentales están presentes en la naturaleza y desde luego sí se han observado: como es el caso del fotón y de los bosones  $W^\pm$  y  $Z^0$  que son los mediadores de las interacciones electromagnética y débil respectivamente.

Según el modelo de Watson *et. al.* (**Watson, Perry, Kane & Adams**, 2007), que se desarrolla a profundidad en este artículo, no se requiere la presencia de campos escalares, inflatones, para generar inflación, sino de dos fluidos acoplados mutuamente: vacío y radiación, en la que el primero domina la densidad de energía. Al igual que otros modelos inflacionarios, este modelo debe ser capaz de solucionar los problemas clásicos de la cosmología estándar (problema de horizonte, de planitud y de reliquias no deseadas), y generar las condiciones primordiales requeridas por el Big Bang caliente (**Dodelson**, 2003; **Lyth & Liddle**, 2009; **Mukhanov**, 2005; **Weinberg**, 2008), tales como recalentamiento en el cual la densidad de energía de vacío se transforma en radiación.

## 2. Generalidades de la cosmología estándar

### 2.1. La métrica de Friedmann-Robertson-Walker

La característica más importante de nuestro Universo a gran escala es la aproximada homogeneidad e isotropía que se presenta en la distribución de galaxias. Esta característica constituye el *Principio Cosmológico* (**Mukhanov**, 2005), el cual es válido para regiones observables del Universo mayores a 100 Mpc, siendo 1 Mpc =  $3,26 \times 10^6$  años luz. Para regiones observables menores que dicha escala, el Universo presenta inhomogeneidades (galaxias, clusters, superclusters). Observaciones en la radiación cósmica de fondo demuestran que existen pequeñas fluctuaciones en la temperatura  $\frac{\delta T}{T}$  del orden de  $10^{-5}$  (**Komatsu et. al.**, 2011), es decir, que la distribución de densidad de energía a pequeñas escalas (menores que 100 Mpc) es inhomogénea.

La métrica que describe un Universo homogéneo e

isotrópo a gran escala, es decir, una que cumpla el Principio Cosmológico, es la métrica de Friedmann-Robertson-Walker (FRW) (**Dodelson**, 2003; **Lyth & Liddle**, 2009; **Mukhanov**, 2005; **Weinberg**, 2008)

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) \left[ \frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \right], \quad (1)$$

en donde  $t$  es el tiempo cósmico,  $r, \theta, \phi$  son las coordenadas espaciales comóviles,  $a(t)$  es el factor de escala del Universo, y  $K$  es la constante de curvatura de una hipersuperficie tridimensional (3D).

### 2.2. Tensor momentum-energía

A partir de la característica de homogeneidad e isotropía que presenta nuestro Universo a gran escala, el contenido energético del Universo se puede modelar como un fluido perfecto descrito por el tensor momentum-energía

$$T^{\mu\nu} = (\rho + P)u^\mu u^\nu - P g^{\mu\nu}, \quad (2)$$

siendo  $\rho$ ,  $P$  y  $u^\mu$  la densidad de energía, la presión y la cuadrivelocidad del fluido respectivamente. Además dicho fluido cumple la condición

$$T^{\mu\nu}{}_{;\mu} = 0, \quad (3)$$

en donde el punto y coma denota la derivada covariante<sup>4</sup>. Dicha condición se puede obtener a partir de las ecuaciones de campo de Einstein

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = -8\pi G T_{\mu\nu}, \quad (4)$$

en donde  $R_{\mu\nu}$  es el tensor de Ricci,  $R$  es el escalar de Ricci, y  $G$  es la constante de gravitación universal. La expresión (3) corresponde a la conservación local del cuadrimomentum (**Weinberg**, 1972).

En un sistema de referencia comóvil, localmente inercial, y cartesiano, la densidad de energía  $\rho$  es definida como  $T^{00}$ , la densidad de momentum como  $T^{0i}$ , y el tensor de esfuerzos como  $T^{ij}$ . Si la presión  $P$  es isotrópa, el tensor de esfuerzos es definido como  $T^{ij} = \delta_{ij}P$ . Asumir que la variación del tensor momentum-energía con respecto a la posición es prácticamente despreciable es equivalente a decir que el observador viaja con el fluido (**Malik & Wands**, 2009). El marco en reposo del fluido se define como aquél en que  $T^{0i} = 0$  y  $u^\mu = (1, 0, 0, 0)$ , en donde  $u^\mu$  es el cuadrivector velocidad. En general  $u_\mu u^\mu = 1$  (**Weinberg**, 1972).

<sup>4</sup>Otra manera de expresar la derivada covariante es a través del operador  $\nabla_\mu$ .

### 2.3. La ecuación de Friedmann

A partir de la componente 0 – 0 de las ecuaciones de campo de Einstein (c.f. Ec. (4)), se obtiene la ecuación más importante de evolución de nuestro Universo, la cual es la ecuación de Friedmann (Dodelson, 2003; Lyth & Liddle, 2009; Mukhanov, 2005; Weinberg, 2008)

$$H^2 = \frac{8\pi\rho}{3M_p^2} + \frac{\Lambda}{3} - \frac{K}{a^2}, \quad (5)$$

en donde  $H = \frac{\dot{a}}{a}$  es el parámetro de Hubble, el punto denota la derivación con respecto al tiempo cósmico  $t$ ,  $M_p$  es la masa de Planck que se relaciona con la constante de gravitación universal mediante  $M_p = (G)^{-1/2}$ , y  $K$  se relaciona con la geometría espacial del Universo: el Universo es plano si  $K = 0$ , finito o cerrado si  $K > 0$ , o infinito y abierto si  $K < 0$ .

Al definir  $\rho_\Lambda \equiv \frac{\Lambda M_p^2}{8\pi}$ , se toma  $\rho_t$  como la densidad de energía total tal que<sup>5</sup>  $\rho_t = \rho + \rho_\Lambda$ , de modo que la ecuación de Friedmann se puede escribir como

$$H^2 = \frac{8\pi\rho_t}{3M_p^2} - \frac{K}{a^2}. \quad (6)$$

De la ecuación de Friedmann, vemos que para un valor dado del parámetro de Hubble, hay una densidad particular conocida como la densidad crítica para la cual el Universo es espacialmente plano en la ausencia de una constante cosmológica

$$\rho_{cvi} = \frac{3H^2 M_p^2}{8\pi}. \quad (7)$$

Es usualmente más simple medir la densidad de energía como una fracción de la densidad crítica, definiendo el parámetro de densidad  $\Omega = \frac{\rho}{\rho_{cvi}}$ . Éste puede ser aplicado separadamente a diferentes contenidos energéticos del Universo, tales como materia no relativista, radiación y bariones. Se puede incluir también una contribución  $\Omega_\Lambda \equiv \frac{\Lambda}{3H^2}$  asociada a la constante cosmológica, tal que  $\Omega_{tot} = \Omega + \Omega_\Lambda$ <sup>6</sup>. Entonces la ecuación de Friedmann puede ser descrita como

$$\Omega_{tot} - 1 = \frac{K}{a^2 H^2}. \quad (8)$$

### 2.4. La ecuación de continuidad

La dependencia temporal de  $\rho$  está dada por la ecuación de continuidad (Dodelson, 2003; Lyth & Liddle, 2009;

Mukhanov, 2005; Weinberg, 2008)

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + P) = 0, \quad (9)$$

la cual corresponde a la componente 0 de la ecuación (3).

La anterior expresión se puede escribir de la forma

$$\dot{a} \left( \frac{d\rho}{da} \right) = -3H(\rho + P), \quad (10)$$

que a su vez es equivalente a la expresión

$$\frac{d(\rho a^3)}{da} = -P \frac{d(a^3)}{da}. \quad (11)$$

La anterior ecuación corresponde a la primera ley de la termodinámica para una expansión adiabática,  $dU = -PdV$ , en donde  $U = V\rho$  es la energía interna en un volumen  $V \propto a^3$ . La expansión de un Universo isótropo es de hecho adiabática porque no puede haber transferencia de energía de una región comóvil a otra, de acuerdo con el principio cosmológico.

### 2.5. El paradigma inflacionario

La definición exacta de inflación es simplemente una época durante la cual la expansión del Universo es acelerada

$$\text{INFLACION} \Leftrightarrow \ddot{a} > 0. \quad (12)$$

Existe una expresión alternativa equivalente a la condición de inflación que proporciona una interpretación más física

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{H^{-1}}{a} \right) < 0, \quad (13)$$

en donde  $\frac{H^{-1}}{a}$  corresponde al radio de Hubble comóvil, y es directamente proporcional al horizonte de partículas<sup>7</sup> comóvil.

La condición para que se dé inflación es que el horizonte de partículas comóvil, la cual es la más importante característica del Universo en expansión, decrezca con el tiempo (Dodelson, 2003; Lyth & Liddle, 2009; Mukhanov, 2005; Weinberg, 2008). Dicha condición impone un requerimiento sobre la naturaleza del contenido energético que genera inflación. Directamente de la ecuación de Friedmann (6) se encuentra que

$$\rho + 3P < 0. \quad (14)$$

Puesto que  $\rho$  es siempre positivo, es necesario que  $P$  sea negativo para satisfacer esta condición, la cual es independiente de la curvatura del Universo. Inflación fue generada

<sup>5</sup>Aquí  $\rho$  puede considerar tanto densidad de energía de materia como de radiación.

<sup>6</sup>El valor actual de  $\Omega_\Lambda$ , de acuerdo al último reporte de datos del satélite WMAP (Komatsu et al., 2011), es  $\Omega_{\Lambda 0} = 0,728 \pm 0,016$ .

<sup>7</sup>Se define como la distancia física que hay desde un punto A (nosotros) hasta un punto B (emisión de la radiación cósmica de fondo) de la cual se podría recibir información si la radiación siempre hubiese sido libre.

aparentemente por un tipo especial de contenido energético: uno con  $P < 0$ .

Una de las particularidades durante inflación es que el parámetro de Hubble  $H_I$  puede permanecer constante<sup>8</sup>. En este caso  $\frac{da}{a} = H_I dt$ , y el factor de escala evoluciona como

$$a(t) = a_e e^{H_I(t-t_f)}; \quad t < t_f, \quad (15)$$

en donde  $t_f$  es el tiempo al final de la inflación y  $a_e$  es el parámetro de expansión al final de inflación.

### 3. Poniendo a prueba un primer motor cósmico

En esta sección se inicia la construcción de un modelo inflacionario partiendo de un fondo métrico espacialmente homogéneo e isótropo para un universo constituido por dos fluidos desacoplados, uno de vacío y otro de radiación. Dichos fluidos actúan como fuente de la inflación cósmica. A partir de la ecuación de Friedmann se encuentra una solución para la evolución del factor de escala la cual debe ser consistente con la de un período inflacionario primordial. Esta primera condición determina “la eficiencia de este primer motor cósmico”.

#### 3.1. Evolución de la densidad de energía de vacío y de radiación en un Universo en expansión

Según la definición de la densidad de energía de vacío (parametrizada a través de una constante cosmológica  $\Lambda$ )  $\rho_\Lambda = cte$ , de aquí que su variación temporal sea nula. Considerando esta característica, se encuentra de la ecuación de continuidad (9) su ecuación de estado<sup>9</sup>  $P_\Lambda = -\rho_\Lambda$ .

En el contexto cosmológico, a un contenido energético que cumpla con la ecuación de estado  $P = \frac{\rho}{3}$  se le llama radiación<sup>10</sup>. Al reemplazar la ecuación de estado para la radiación en la ecuación de continuidad, se encuentra que su variación corresponde a la ecuación diferencial

$$\dot{\rho}_r = -4H\rho_r. \quad (16)$$

Expresando el parámetro de Hubble como  $H = \frac{\dot{a}}{a}$ , y separando las variables respectivas integradas bajo las condiciones

iniciales  $\rho_r(a_0) = \rho_{r0}$ , se consigue determinar una ecuación de evolución de la densidad de energía de radiación con el factor de escala  $a$

$$\int \frac{d\rho_r}{\rho_r} = -4 \int \frac{da}{a}, \quad (17)$$

$$\Rightarrow \rho_r = \rho_{r0} \left(\frac{a_0}{a}\right)^4. \quad (18)$$

Esta expresión implica que la densidad de energía disminuye como  $\rho_r \sim a^{-4}$  a medida que el universo se expande.  $\rho_{r0}$  es la densidad de energía inicial de radiación y  $a_0$  es el parámetro de expansión al comienzo de inflación.

La teoría corpuscular de la luz nos dice que la energía para cada fotón de radiación está dada por  $E = h\nu$ , en donde  $h$  es la constante de Planck y  $\nu$  su frecuencia. Por otra parte su frecuencia se da en términos de la velocidad de la luz  $c$  y su longitud de onda  $\lambda$ ,  $\nu = c/\lambda$ . Reemplazando esta expresión en la de la energía para el fotón y dividiendo por el volumen  $V$  para expresarla como una densidad de energía se encuentra que

$$\rho_\gamma \propto \frac{1}{\lambda V}. \quad (19)$$

Teniendo en cuenta que, debido al corrimiento al rojo  $\lambda \propto a$ , y que, debido a la expansión cósmica  $V \propto a^3$ , se obtiene

$$\rho_\gamma \propto \frac{1}{a \cdot a^3} = a^{-4}, \quad (20)$$

lo cual es consistente con lo encontrado en la ecuación de evolución (18) para la densidad de energía de radiación  $\rho_r$ .

#### 3.2. Solución del factor de escala y del parámetro de Hubble para un universo dominado por constante cosmológica y radiación

Al considerar un universo plano ( $K = 0$ ) dominado por constante cosmológica y radiación, es decir  $\rho_t = \rho_r + \rho_\Lambda$ , y al reemplazar la relación para la densidad de energía de radiación (18) en la ecuación de Friedmann (6) se obtiene

$$H^2 = \frac{8\pi\rho_{r0}a_0^4}{3M_p^2a^4} + \frac{8\pi\rho_\Lambda}{3M_p^2}. \quad (21)$$

Multiplicando y dividiendo por  $H_0^2$  cada término y considerando las definiciones

$$\rho_{cri} = \frac{3M_p^2H^2}{8\pi}, \quad (22)$$

<sup>8</sup>Esta es una condición suficiente mas no necesaria para generar inflación, y es satisfecha por los modelos del tipo slow-roll (Dodelson, 2003; Lyth & Liddle, 2009; Mukhanov, 2005; Weinberg, 2008).

<sup>9</sup>Esta ecuación de estado no es satisfecha por un ensamble de partículas sino, por ejemplo, por campos escalares en el estado de vacío.

<sup>10</sup>Las partículas asociadas a estos contenidos energéticos se les considera relativistas debido a que poseen velocidades cercanas a la de la luz, de lo contrario al contenido energético se le denomina materia y satisface la ecuación de estado  $P = 0$ .

y

$$\Omega = \frac{\rho}{\rho_{cri}}, \quad (23)$$

se obtiene una ecuación diferencial en términos del factor de escala

$$\dot{a}^2 = \Omega_{r0} \frac{H_0^2 a_0^4}{a^2} + \Omega_{\Lambda 0} H_0^2 a^2, \quad (24)$$

en donde<sup>11</sup>  $\Omega_{r0} = \frac{8\pi\rho_{r0}}{3M_p^2 H_0^2}$ ,  $\Omega_{\Lambda 0} = \frac{8\pi\rho_{\Lambda}}{3M_p^2 H_0^2}$ , y  $H_0$  es el parámetro de Hubble al inicio de este período.

La ecuación (24) es una ecuación diferencial de primer orden y de variables separables, por consiguiente se puede llevar a la forma

$$\frac{da}{dt} = \frac{H_0}{a} \sqrt{\Omega_{r0} + \Omega_{\Lambda 0} a^4}, \quad (25)$$

en donde se ha elegido que<sup>12</sup>  $a_0 = 1$ . Separando variables y factorizando  $\Omega_{r0}$ , se encuentra

$$\frac{1}{\sqrt{\Omega_{r0}}} \int \frac{ada}{\sqrt{1 + a^4 \frac{\Omega_{\Lambda 0}}{\Omega_{r0}}}} = \int H_0 dt. \quad (26)$$

La anterior expresión es equivalente a

$$\frac{1}{2\sqrt{\Omega_{\Lambda 0}}} \int \frac{du}{\sqrt{1 + u^2}} = H_0 t, \quad (27)$$

en donde se ha realizado la sustitución  $u = \sqrt{\frac{\Omega_{\Lambda 0}}{\Omega_{r0}}} a^2$ . Así, y al realizar una nueva sustitución  $u = \sinh \theta$ , se obtiene

$$\frac{1}{2\sqrt{\Omega_{\Lambda 0}}} \int \frac{\cosh \theta d\theta}{\sqrt{1 + \sinh^2 \theta}} = H_0 t, \quad (28)$$

cuya solución corresponde a

$$a(t) = \left( \frac{\Omega_{r0}}{\Omega_{\Lambda 0}} \right)^{\frac{1}{4}} \sinh^{1/2} \left[ 2\sqrt{\Omega_{\Lambda 0}} H_0 t \right], \quad (29)$$

en donde se ha ajustado la constante de integración asociada a la integral indefinida de tal manera que  $a(t=0) = 0$ .

A partir de la definición  $H = \frac{\dot{a}}{a}$  se obtiene para el parámetro de Hubble la solución

$$H(t) = \sqrt{\Omega_{\Lambda 0}} H_0 \coth \left[ 2\sqrt{\Omega_{\Lambda 0}} H_0 t \right]. \quad (30)$$

Si se sustituye la definición de cada parámetro de densidad asociado a cada componente en la ecuación (29), se determina la forma funcional del factor de escala. Dado que  $\left(\frac{\Omega_{r0}}{\Omega_{\Lambda 0}}\right)^{1/4} = \left(\frac{8\pi\rho_{r0}}{\Lambda M_p^2}\right)^{1/4} = c_0$  y el argumento del  $\sinh^{1/2}$  equivale a  $2\sqrt{\Omega_{\Lambda 0}} H_0 t = \sqrt{\frac{4\Lambda}{3}} t$ , se encuentra que la evolución temporal del factor de escala está en función de la densidad de energía inicial de radiación y de la constante cosmológica  $\Lambda$ .

$$a(t) = c_0 \sinh^{1/2} \sqrt{\frac{4\Lambda}{3}} t, \quad (31)$$

mientras que para el parámetro de Hubble, considerando que  $\sqrt{\Omega_{\Lambda 0}} H_0 = \sqrt{\frac{8\pi\Lambda M_p^2}{3M_p^2 8\pi H_0^2}} H_0 = \sqrt{\frac{\Lambda}{3}}$ , se encuentra que

$$H(t) = \sqrt{\frac{\Lambda}{3}} \coth \left( \sqrt{\frac{4\Lambda}{3}} t \right). \quad (32)$$

Analizando la Figura 1 se observa que, para un tiempo determinado  $t_0$ , existe un punto de inflexión el cual está asociado con el inicio de un período inflacionario. Dicho período se prolonga indefinidamente<sup>13</sup> y por consiguiente no corresponde a un período inflacionario primordial<sup>14</sup>. En la Figura 2 se presenta la evolución temporal del parámetro de Hubble, la cual sólo depende de la constante cosmológica  $\Lambda$ ; como se puede observar, el parámetro de Hubble disminuye continuamente en este modelo.

#### 4. Dinámica de un modelo inflacionario sin inflatones

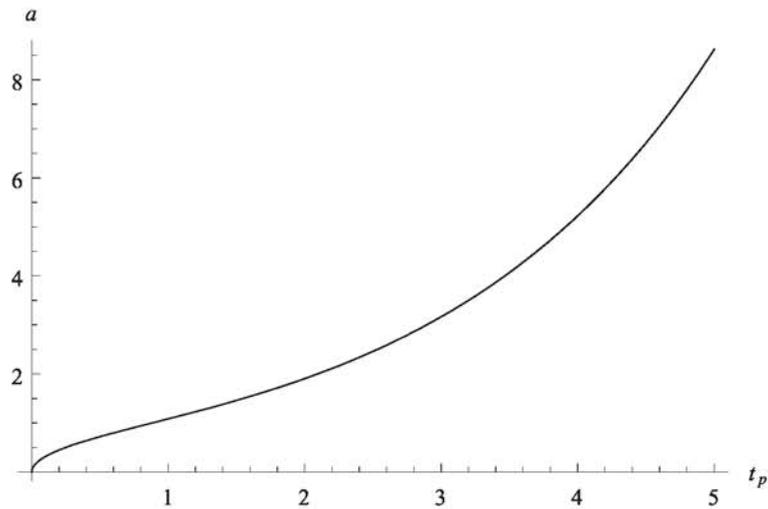
Habiendo probado previamente la insuficiencia del primer motor cósmico, se prosigue a perfeccionar su dinámica con el fin de que nuestro modelo sea consistente con un período inflacionario primordial. Por consiguiente, es necesario introducir un nuevo mecanismo para generar la expansión inflacionaria. Para ello es necesario considerar dos fluidos mutuamente acoplados en donde se produzca transferencia de energía de vacío a radiación.

<sup>11</sup>Nótese que la densidad de energía de vacío  $\rho_{\Lambda}$  no varía, a diferencia de la densidad de energía de radiación. De aquí que sea relevante denotar  $\rho_{r0}$ , como la densidad de energía de radiación inicial.

<sup>12</sup>Esto es posible debido a que el factor de escala no es una cantidad observable.

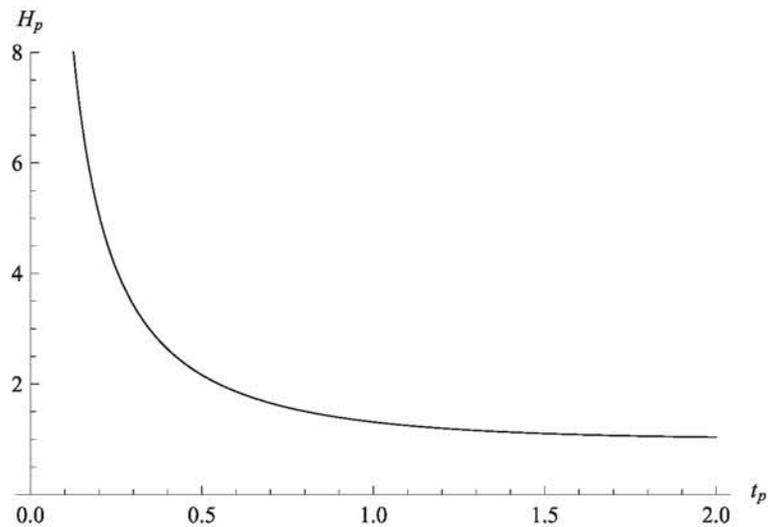
<sup>13</sup>Contrario al período inflacionario primordial el cual debe tener una duración finita.

<sup>14</sup>Por período inflacionario primordial se entiende un período en el que se da origen a las estructuras a gran escala (inhomogeneidades) y se identifica antes del Big Bang, a diferencia del período inflacionario que experimenta nuestro Universo actual que podría en esencia ser modelado con este primer motor cósmico.



**Figura 1: Evolución temporal del factor de escala para un universo compuesto por dos fluidos no interactuantes: constante cosmológica y radiación**

Se puede apreciar que para un tiempo determinado  $t_0$  (correspondiente a  $a_0 = 1$ ) existe un punto de inflexión el cual está asociado con el inicio de un período inflacionario ( $\ddot{a} > 0$ ). Aquí  $\Lambda = \frac{3}{4}M_p^2$ ,  $\rho_{r0} = \frac{3}{32\pi}M_p^4$ , y  $t_p = tM_p$  (unidades de tiempo de Planck), de tal manera que  $a(t_p) = \sinh^{1/2} t_p$ . El período inflacionario se prolonga indefinidamente y por consiguiente no corresponde a un período inflacionario primordial.



**Figura 2: Evolución temporal del parámetro de Hubble para un universo compuesto por dos fluidos no interactuantes: constante cosmológica y radiación**

Se puede apreciar que el parámetro de Hubble disminuye continuamente. Aquí  $\Lambda = \frac{3}{4}M_p^2$ ,  $H_p = HM_p^{-1}$  (unidades de energía de Planck), y  $t_p = tM_p$  (unidades de tiempo de Planck), de tal manera que  $H_p(t_p) = \frac{1}{2} \coth t_p$ .

#### 4.1. Ecuaciones de evolución para el fondo métrico

Nuestro Universo homogéneo e isótropo es gobernado por la ecuación de evolución

$$H^2 = \frac{8\pi\rho}{3M_p^2}. \quad (33)$$

Derivando la ecuación de Friedmann con respecto al tiempo cósmico se obtienen ecuaciones de evolución "alternativas" para el factor de escala y para el parámetro de Hubble<sup>15</sup>

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi}{3M_p^2}(\rho + 3P), \quad (34)$$

$$\dot{H} = -\frac{4\pi}{M_p^2}(\rho + P). \quad (35)$$

Las anteriores expresiones tienen como objetivo expresar las nuevas ecuaciones de evolución en términos de parámetros que caracterizan el fluido, tales como la densidad y la presión (las cuales actúan como fuente).

Se considera como fuente para las ecuaciones de evolución un fluido constituido por vacío (denotado con el subíndice  $\Lambda$ ) y radiación, tal que

$$\rho = \rho_\Lambda + \rho_r, \quad (36)$$

$$P = P_\Lambda + P_r. \quad (37)$$

Dichas componentes del fluido se caracterizan mediante las relaciones<sup>16</sup>

$$\rho_\Lambda = \frac{\Lambda M_p^2}{8\pi}, \rho_r = \frac{\rho_{ro}}{a^4}, \quad (38)$$

y sus respectivas ecuaciones de estado

$$P_\Lambda = -\rho_\Lambda, P_r = \frac{\rho_r}{3}. \quad (39)$$

Sustituyendo en las ecuaciones de evolución las componentes para la densidad de energía y presión (ecuaciones (36) y (37) respectivamente) y las respectivas relaciones para la presión de cada componente del fluido (39), se encuentra

$$H^2 = \frac{8\pi}{3M_p^2}(\rho_\Lambda + \rho_r), \quad (40)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{8\pi}{3M_p^2}(\rho_\Lambda - \rho_r), \quad (41)$$

$$\dot{H} = -\frac{16\pi}{3M_p^2}\rho_r. \quad (42)$$

De igual manera la ecuación de continuidad toma la forma

$$\dot{\rho}_\Lambda + \dot{\rho}_r = -3H(\rho_\Lambda + \rho_r + P_\Lambda + P_r), \quad (43)$$

$$\Rightarrow \dot{\rho}_\Lambda + \dot{\rho}_r + 4H\rho_r = 0, \quad (44)$$

dado que  $P_\Lambda = -\rho_\Lambda$  y  $\dot{\rho}_\Lambda \neq 0$ . De la ecuación (41) se determina que  $\ddot{a} > 0 \Leftrightarrow \rho_\Lambda > \rho_r$ , lo cual implica que la componente dominante del fluido debe ser el vacío, mientras que la componente subdominante debe ser la radiación. De esta manera se ha impuesto una condición sobre el contenido energético del Universo para poder generar un período inflacionario<sup>17</sup>.

#### 4.2. Transferencia de energía entre los fluidos interactuantes

En la solución (29) del factor de escala se tomó  $\Lambda = cte$  o lo que es equivalente  $\dot{\rho}_\Lambda = 0$  y como resultado de esta consideración se obtuvo una solución del factor de escala que no es consistente con la de una época inflacionaria primordial. Ahora, si se considera dependencia temporal en la densidad de energía de vacío<sup>18</sup> (Watson, Perry, Kane & Adams, 2007), las cuales surgen como producto de la interacción mutua de dos fluidos acoplados, uno de vacío y otro de radiación, se verá que dicho mecanismo conduce a un período inflacionario primordial.

Para cuantificar la interacción entre los fluidos es necesario definir la razón de transferencia de energía  $Q \equiv d\rho/dt$  asociada a cada constituyente de nuestro Universo como

$$\nabla_\mu T_\Lambda^{\mu 0} = Q_\Lambda = -\Gamma\rho_\Lambda, \quad (45)$$

$$\nabla_\mu T_r^{\mu 0} = Q_r = \Gamma\rho_\Lambda, \quad (46)$$

en donde  $\nabla_\mu T_{(\alpha)}^{\mu 0}$  es la derivada covariante del respectivo tensor momentum-energía.  $\Gamma$ , la cual se asume constante, es la razón de decaimiento y establece la razón a la que decae la densidad de energía de vacío en densidad de energía de radiación.

Las ecuaciones (45) y (46) describen un modelo fenomenológico de intercambio de energía entre fluidos, motivado por su simplicidad (al asumir  $\Gamma$  como una constante) y por la ausencia de una microfísica que permita entender el origen del fluido de vacío considerado y su interacción con el fluido

<sup>15</sup>En realidad se tiene sólo una ecuación de evolución adicional dado que las ecuaciones (34) y (35) son equivalentes.

<sup>16</sup>De nuevo, se ha escogido  $a_0 = 1$ .

<sup>17</sup>Esta condición proporciona un período inflacionario, pero no garantiza que sea primordial.

<sup>18</sup>Para este modelo se requiere no sólo que la densidad de energía de vacío domine sobre la densidad de energía de radiación, sino que también varíe temporalmente según (45).

de radiación. Existen escenarios alternativos, usando campos escalares, pero en esencia similares a este modelo que permiten describir la microfísica de interacción entre el vacío y la radiación (Abbott, 1985; Berera, Moss & Ramos, 2009; Freese, Liu & Spolyar, 2005; Freese & Spolyar, 2005); sin embargo, y dado que emplean campos escalares, estos escenarios carecen de una de las motivaciones del presente trabajo que es la implementación de un modelo inflacionario sin inflatones en vista de la ausencia de observaciones de partículas escalares fundamentales. Uno de estos escenarios corresponde a la bien conocida "inflación caliente" (Berera, Moss & Ramos, 2009); en él, la razón de decaimiento  $\Gamma$  es variable en el tiempo. Una descripción de la microfísica asociada al modelo estudiado en este artículo está más allá de los propósitos del presente trabajo.

### 4.3. Ecuación de continuidad modificada

Al considerar la transferencia de energía de un fluido a otro, se produce una modificación sobre la ecuación de continuidad que describe cada fluido individual (Malik & Wands, 2009)

$$\dot{\rho}_\alpha = -3H(\rho_\alpha + p_\alpha) + Q_\alpha, \quad (47)$$

en donde  $Q_\alpha$  determina la cantidad de energía transferida entre los fluidos. Por esta razón, se encuentra que la nueva ecuación de continuidad para cada fluido, considerando la transferencia de energía según (45) y (46), es respectivamente

$$T_{\Lambda;\nu}^{\nu 0} = \dot{\rho}_\Lambda = Q_\Lambda, \quad (48)$$

$$T_{r;\nu}^{\nu 0} = \dot{\rho}_r + 4H\rho_r = Q_r. \quad (49)$$

De esta manera se encuentra para cada componente del fluido su respectiva ecuación de continuidad modificada, (48) y (49), de acuerdo con (47). Como consecuencia, se tiene que la densidad de energía de radiación no sólo varía a medida que se expande el universo<sup>19</sup>, sino que se produce una contribución a su variación debido a la transferencia de energía. De igual forma  $\dot{\rho}_\Lambda \neq 0$ .

De acuerdo a lo observado en la Sección 2.2, las ecuaciones de campo de Einstein conllevan a la conservación local del cuadrivectorial sin importar si el fluido perfecto descrito por  $T_{\mu\nu}$  corresponde a un único fluido o a múltiples fluidos, en general, interactuantes. Ahora bien, teniendo en cuenta que para múltiples fluidos el tensor energía-momentum es

la suma de los tensores energía-momentum de los fluidos individuales

$$T^{\mu\nu} = \sum_\alpha T_{(\alpha)}^{\mu\nu}, \quad (50)$$

se obtiene que, para el modelo en cuestión que considera un fluido de vacío y otro de radiación,

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = \nabla_\mu (T_\Lambda^{\mu\nu}) + \nabla_\mu (T_r^{\mu\nu}) = 0. \quad (51)$$

De aquí se concluye que  $Q_\Lambda = -Q_r$ , lo cual explica la relación entre las ecuaciones (45) y (46). Las ecuaciones (45) y (46) nos dicen que el cuadrivectorial asociado a cada fluido es conservado localmente únicamente en el caso de que los fluidos no interactúen, de modo que  $Q_{(\alpha)} = 0$ .

### 4.4. Ecuaciones de movimiento para el fondo métrico considerando transferencia de energía de vacío a radiación

Sustituyendo las ecuaciones (45) y (46) en (48) y (49) respectivamente se obtiene que

$$\dot{\rho}_\Lambda = -\Gamma\rho_\Lambda, \quad (52)$$

y

$$\dot{\rho}_r = -4H\rho_r + \Gamma\rho_\Lambda. \quad (53)$$

De la ecuación diferencial (52) se puede obtener una solución para la evolución de  $\rho_\Lambda$  en términos de la razón de decaimiento  $\Gamma$

$$\int \frac{d\rho_\Lambda}{\rho_\Lambda} = \int -\Gamma dt, \quad (54)$$

con condición inicial  $\rho_\Lambda(t=0) = \rho_{\Lambda 0}$ . Así, para un tiempo  $t$ :

$$\rho_\Lambda = \rho_{\Lambda 0} e^{-\Gamma t}. \quad (55)$$

De esta manera se ha determinado la forma funcional en el tiempo en que ocurre el decaimiento de la densidad de energía de vacío a radiación. Consecuentemente, la fuente de las ecuaciones de evolución viene alterada acoplando las ecuaciones de evolución (33) y (35). Si se suman estas dos ecuaciones se obtiene

$$2H^2 + \dot{H} = \frac{16\pi}{3M_p^2}(\rho_\Lambda + \rho_r) - \frac{16\pi}{3M_p^2}\rho_r, \quad (56)$$

y por consiguiente, empleando la solución (55),

$$2H^2 + \dot{H} = \frac{16\pi}{3M_p^2}\rho_\Lambda, \quad (57)$$

<sup>19</sup>Recordando que, en este caso,  $\rho_r \propto a^{-4}$ .

<sup>20</sup>Al final del acoplamiento existirá un pequeño remanente de densidad de energía de vacío que permanecerá constante y dominará después de que la densidad de energía de radiación se haya diluido a través de la expansión del Universo.

$$\Rightarrow 2H^2 + \dot{H} = \frac{16\pi}{3M_p^2} \rho_{\Lambda 0} e^{-\Gamma t}. \tag{58}$$

Este acoplamiento se mantiene activo hasta que prácticamente toda la densidad de energía de vacío se transforma en densidad de energía de radiación<sup>20</sup>. El paso a seguir es obtener una solución para la ecuación (58)<sup>21</sup> por lo que se sugiere llevarla a otra forma y así poder obtener la solución del factor de escala. Reemplazando  $H = \frac{\dot{a}}{a}$  y derivando la mencionada ecuación con respecto al tiempo cósmico se encuentra

$$\frac{\ddot{a}a - \dot{a}^2}{a^2} + 2\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{16\pi}{3M_p^2} \rho_{\Lambda 0} e^{-\Gamma t}, \tag{59}$$

$$\Rightarrow \ddot{a}a + \dot{a}^2 = a^2 \frac{16\pi}{3M_p^2} \rho_{\Lambda 0} e^{-\Gamma t}. \tag{60}$$

Por otra parte  $\frac{d^2}{dt^2}(a^2) = 2(\ddot{a}a + \dot{a}^2)$ , entonces

$$\frac{d^2}{dt^2}(a^2) = a^2 \frac{32\pi}{3M_p^2} \rho_{\Lambda 0} e^{-\Gamma t}. \tag{61}$$

Definiendo el parámetro adimensional  $\tau^2 = \frac{128\pi\rho_{\Lambda 0}}{3M_p^2\Gamma^2} e^{-\Gamma t} \equiv \tau_0^2 e^{-\Gamma t}$  se tiene que

$$\frac{d^2}{dt^2}(a^2) = \frac{1}{4}\tau^2\Gamma^2 a^2. \tag{62}$$

Realizando la sustitución  $a^2 = y$ , su primera derivada es

$$\frac{dy}{d\tau} = \frac{dy/dt}{d\tau/dt} = \frac{2a(da/dt)}{-\frac{\Gamma}{2}\tau}, \tag{63}$$

y su segunda derivada es

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{d\tau^2} &= \frac{(d^2y/dt^2)(d\tau/dt) - (d^2\tau/dt^2)(dy/dt)}{(d\tau/dt)^2} \left(\frac{dt}{d\tau}\right), \\ \Rightarrow \frac{d^2y}{d\tau^2} &= \frac{(2\dot{a}^2 + 2a\ddot{a})(-\Gamma\tau/2) - (\Gamma^2\tau/4)2a\dot{a}}{\Gamma^2\tau^2/4} \left(\frac{-2}{\Gamma\tau}\right), \end{aligned} \tag{64}$$

$$\tag{65}$$

en donde  $\frac{dt}{d\tau} = \frac{-2}{\Gamma\tau}$ . De esta manera se obtiene

$$\frac{d^2y}{d\tau^2} = \frac{4}{\Gamma^2\tau^2} \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{2}{\Gamma\tau^2} \frac{dy}{dt}, \tag{66}$$

la cual, despejando  $\frac{d^2y}{dt^2}$ , conduce a

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{\Gamma^2\tau^2}{4} \frac{d^2y}{d\tau^2} + \frac{\Gamma^2\tau}{4} \frac{dy}{d\tau}. \tag{67}$$

Al introducir esta expresión en (62), se encuentra una ecuación diferencial lineal de segundo orden

$$\frac{\Gamma^2\tau^2}{4} \frac{d^2y}{d\tau^2} + \frac{\Gamma^2\tau}{4} \frac{dy}{d\tau} = \frac{1}{4}\tau^2\Gamma^2y, \tag{68}$$

$$\Rightarrow \tau^2 \frac{d^2y}{d\tau^2} + \tau \frac{dy}{d\tau} - \tau^2y = 0. \tag{69}$$

Esta ecuación es la de Bessel modificada (Abramowitz & Stegun, 1972; Arfken & Weber, 2005), y su solución es una combinación lineal de funciones de Bessel modificadas de primera especie  $I_0$  y de segunda especie  $K_0$ <sup>22</sup> respectivamente y de orden cero. Entonces la solución del factor de escala viene dada por

$$a^2 = \frac{4}{\Gamma} (\alpha_1 I_0(\tau) + \alpha_2 K_0(\tau)), \tag{70}$$

en donde  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  son constantes.

Al igual que en la Sección 3, se obtiene el parámetro de Hubble a partir de su definición  $H = \frac{\dot{a}}{a}$ :

$$2a\dot{a} = \frac{4}{\Gamma} (\alpha_1 I_0'(\tau) + \alpha_2 K_0'(\tau)) \frac{d\tau}{dt}, \tag{71}$$

con

$$\frac{dI(\tau)}{dt} = I'(\tau) \left(\frac{-\Gamma\tau}{2}\right), \tag{72}$$

en donde la prima indica la derivada con respecto al parámetro  $\tau$ . Las derivadas requeridas para las funciones de Bessel modificadas son

$$I_0'(\tau) = I_1(\tau), \tag{73}$$

$$K_0'(\tau) = -K_1(\tau), \tag{74}$$

en donde  $I_1(\tau)$  y  $K_1(\tau)$  son las funciones de Bessel modificadas de primera y segunda especie respectivamente y de orden uno. Finalmente, se encuentra que la evolución en el tiempo del parámetro de Hubble viene dada por

$$H = \frac{\Gamma\tau}{4} \left( \frac{\alpha_2 K_1(\tau) - \alpha_1 I_1(\tau)}{\alpha_2 K_0(\tau) + \alpha_1 I_0(\tau)} \right). \tag{75}$$

Las constantes  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$ <sup>23</sup> se determinan a partir de las condiciones iniciales  $H(t = 0) = H_b$  y  $a(t = 0) = 1$ , y sus valores corresponden respectivamente a

$$\alpha_1 = H_b \left[ K_1 \left( \frac{4H_b}{\Gamma} \right) - K_0 \left( \frac{4H_b}{\Gamma} \right) \right], \tag{76}$$

<sup>21</sup>Lo interesante de esta ecuación es que depende únicamente de la densidad de energía de vacío al inicio del período inflacionario y de cómo ésta decae en densidad de energía de radiación.

<sup>22</sup>Las funciones de Bessel modificadas de primera especie presentan un crecimiento de tipo exponencial mientras que las de segunda especie presentan una atenuación también de tipo exponencial.

<sup>23</sup>Observando cuál debe ser el valor de las constantes, se determina que  $\alpha_2 \gg \alpha_1$  para que el término  $\alpha_2 K_0(\tau)$  de la ecuación (70) domine sobre el otro término de tipo decreciente y proporcione una expansión acelerada. Lo anterior es debido a que  $K_0(\tau)$  crece a medida que transcurre el tiempo debido a la relación inversa  $\tau = \tau_0 e^{-\Gamma t/2}$ .

$$\alpha_2 = H_b \left[ I_1 \left( \frac{4H_b}{\Gamma} \right) + I_0 \left( \frac{4H_b}{\Gamma} \right) \right], \quad (77)$$

en donde se ha encontrado que  $\tau(t=0) = \tau_0 = \frac{4H_b}{\Gamma}$ .

La Figura 3 ilustra la evolución en el tiempo (en el rango  $800M_p^{-1} \leq t \leq 2000M_p^{-1}$ ) del parámetro de expansión para el modelo estudiado. En ella se identifica el final de inflación ( $t_e \simeq 1170 M_p^{-1}$ ) con el inicio de un período que corresponde a  $\ddot{a} < 0$ .

La Figura 4 presenta la evolución en el tiempo del parámetro de expansión, para los mismos valores de  $H_b$  y  $\Gamma$  usados en la construcción de la Figura 3, en los rangos  $700M_p^{-1} \leq t \leq 1200M_p^{-1}$  (Figura 4(a)) y  $0 \leq t \leq 2M_p^{-1}$  (Figura 4(b)). Se aprecia que el comportamiento del factor de escala es consistente con un período inflacionario primordial. Adicionalmente, se observa según la Figura 4(b), que inflación comienza cuando  $a(t=0) = 1$ , tal como se había escogido.

Con respecto al parámetro de Hubble, éste disminuye durante inflación (ver Figura 5). Se ha tomado como un ejemplo  $H_b = 0,916 M_p$  y  $\Gamma = 0,01 M_p$ , y se ha determinado que el valor del parámetro de Hubble al final de inflación corresponde a  $H_e \simeq 0,005 M_p$ .

#### 4.5. Parámetro de deformación

De manera similar a como se define uno de los parámetros de slow-roll para modelos escalares inflacionarios (Dodelson, 2003; Lyth & Liddle, 2009; Mukhanov, 2005; Weinberg, 2008), se define el parámetro de deformación asociado al modelo de inflación sin inflatones sin ninguna aproximación:

$$\hat{\epsilon}(t) \equiv -\frac{\dot{H}}{H^2} = -\frac{\ddot{a}/a}{H^2} + 1. \quad (78)$$

Éste es una función dependiente del tiempo debido a la transferencia de energía. Reemplazando las ecuaciones (33) y (34) en la definición anterior se obtiene

$$\hat{\epsilon}(t) = \frac{\rho + 3P}{2\rho} + 1 = \frac{3\rho + 3P}{2\rho}. \quad (79)$$

Sustituyendo las expresiones (36) y (37) se determina el parámetro de deformación

$$\hat{\epsilon}(t) = \frac{2\rho_r}{\rho_\Lambda + \rho_r}. \quad (80)$$

Otra manera de expresar tal ecuación es multiplicar y dividir por la densidad crítica  $\rho_c$ , de tal forma que  $\hat{\epsilon}(t)$ <sup>24</sup> queda expresado en términos del parámetro de densidad<sup>25</sup>; así

$$\hat{\epsilon}(t) = \frac{2\Omega_r}{\Omega_\Lambda + \Omega_r} = 2\Omega_r. \quad (81)$$

Para obtener una expresión que dé cuenta de la evolución del parámetro de densidad en términos de la densidad de energía de vacío, se despeja de la ecuación de Friedmann para el fondo métrico (Ec. (33))

$$2 = \frac{16\pi}{3M_p^2 H^2} (\rho_\Lambda + \rho_r), \quad (82)$$

$$\Rightarrow 2 = \frac{16\pi\rho_\Lambda}{3M_p^2 H^2} + \frac{16\pi\Omega_r\rho_c}{3M_p^2 H^2} = \frac{16\pi\rho_\Lambda}{3M_p^2 H^2} + 2\Omega_r, \quad (83)$$

en donde se ha hecho uso de la ecuación (7). De (81) y (55) se concluye que

$$\hat{\epsilon}(t) = 2 - \frac{16\pi\rho_{\Lambda 0}e^{-\Gamma t}}{3M_p^2 H^2}, \quad (84)$$

y de esta forma se ha obtenido una expresión para la evolución del parámetro de deformación<sup>26</sup>.

Para el análisis del parámetro de deformación es conveniente dirigir nuestra atención a la ecuación (80) e ignorar por un instante su forma exacta (84). Al inicio de inflación existe sólo una pequeña contribución de la densidad de energía de radiación a la densidad de energía total, de modo que el denominador en (80) está controlado por  $\rho_\Lambda$ . Así, puesto que  $\rho_\Lambda \gg \rho_r$ , se obtiene que

$$\hat{\epsilon} \ll 1. \quad (85)$$

Inflación termina cuando  $\ddot{a} = 0$ . De acuerdo a (41), esto ocurre cuando  $\rho_\Lambda = \rho_r$ , es decir, cuando el parámetro de deformación toma el valor

$$\hat{\epsilon} = 1. \quad (86)$$

Cuando prácticamente “toda” la densidad de energía de vacío es convertida en densidad de energía de radiación,  $\rho_r$  controla el denominador y por tanto  $\hat{\epsilon} \approx 2$ . El Universo en este momento está completamente lleno de radiación gracias a la producción de partículas.

El comportamiento de  $\hat{\epsilon}$ , de acuerdo al anterior análisis, puede ser visualizado en la Figura 6. Al inicio de inflación se tiene que  $\hat{\epsilon} \ll 1$  dado que  $\hat{\epsilon} \sim \rho_r$ . A medida que transcurre el tiempo la densidad de energía de radiación aumenta debido a la transferencia de energía hasta que domina el contenido energético del Universo, lo cual ocurre cuando  $\hat{\epsilon} \approx 2$ .

<sup>24</sup> $\hat{\epsilon}(t)$  se puede interpretar, según la expresión (81), como una medida de la cantidad de radiación existente en la etapa inflacionaria.

<sup>25</sup>El parámetro de densidad total cumple con la condición  $\Omega_{tot} = \Omega_\Lambda + \Omega_r = 1$  (c.f. Ec. (8)).

<sup>26</sup>No hay que olvidar que ahora el parámetro de Hubble evoluciona según la solución (75).

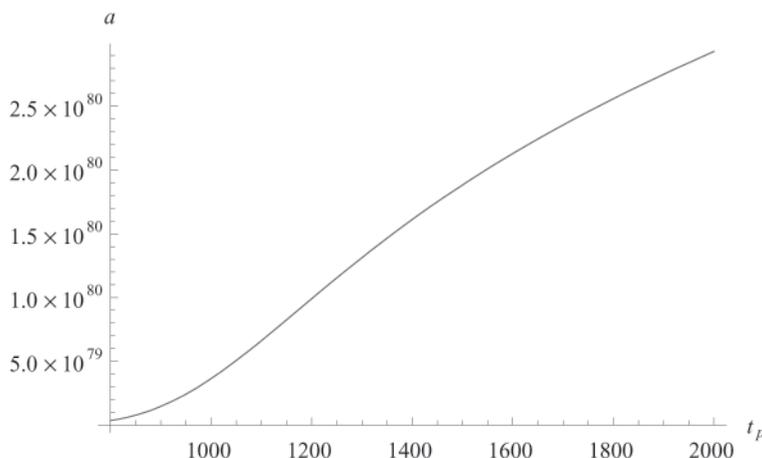


Figura 3: Evolución temporal del factor de escala para un universo compuesto por dos fluidos interactuantes: vacío y radiación

El período inflacionario termina justo cuando inicia  $\ddot{a} < 0$ , es decir en el punto de inflexión. En la construcción de esta gráfica, se ha tomado  $H_b = 0,916 M_p$  y  $\Gamma = 0,01 M_p$ . Las unidades de tiempo son tales que  $t_p = t M_p$  (unidades de tiempo de Planck).

#### 4.6. Parámetro de densidad

La evolución de la densidad de energía de cada componente del fluido relativa a la densidad total se determina a partir de la condición  $\Omega_{tot} = \Omega_r + \Omega_\Lambda = 1$ . De la ecuación (81) se encuentra que  $\Omega_r = \frac{\hat{\epsilon}(t)}{2}$ ; por lo tanto,  $\Omega_\Lambda = 1 - \frac{\hat{\epsilon}(t)}{2}$ .

En la Figura 7 se observa que la densidad de energía de vacío decae en densidad de energía de radiación. Cuando  $\rho_r = \rho_\Lambda$  se llega al final de inflación, el cual es indicado por la línea horizontal. Sin embargo, el acoplamiento se mantiene hasta que prácticamente toda la densidad de energía de vacío se ha transferido a densidad de energía de radiación con  $\Omega_r \simeq 1$ , quedando un pequeño remanente de energía de vacío que permanecerá constante.

#### 4.7. Estimativo del monto de inflación

El monto de inflación normalmente es cuantificado por el cociente entre el factor de escala en el tiempo final  $t_e$ , y el factor de escala en el tiempo inicial  $t_b$ . Dado que este cociente es típicamente una cantidad grande, se toma el logaritmo natural de éste, el cual proporciona el monto de inflación cuantificado en *e-folds* (Dodelson, 2003; Lyth & Liddle, 2009; Mukhanov, 2005; Weinberg, 2008)

$$N(t_e) \equiv \ln \frac{a(t_e)}{a(t_b)}. \quad (87)$$

Usando la ecuación (84) se encuentra que

$$H^2 = \frac{16\pi\rho_{\Lambda 0}e^{-\Gamma t}}{3M_p^2(2 - \hat{\epsilon}(t))}. \quad (88)$$

Por otra parte

$$H = \frac{\dot{a}}{a} = \frac{da}{dt} \frac{1}{a} = \left( \frac{16\pi\rho_{\Lambda 0}e^{-\Gamma t}}{3M_p^2(2 - \hat{\epsilon}(t))} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (89)$$

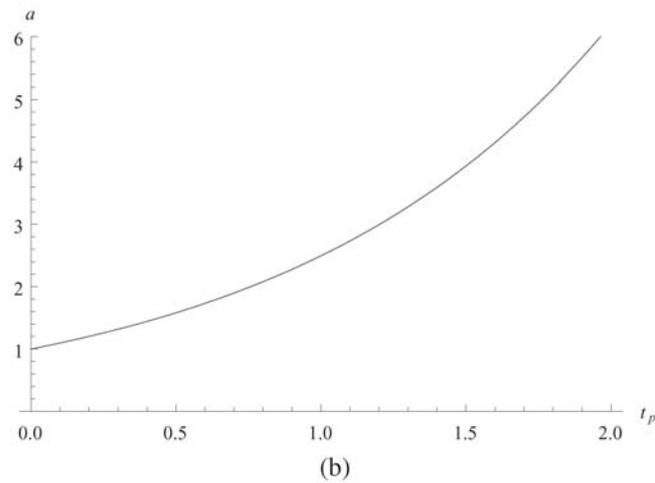
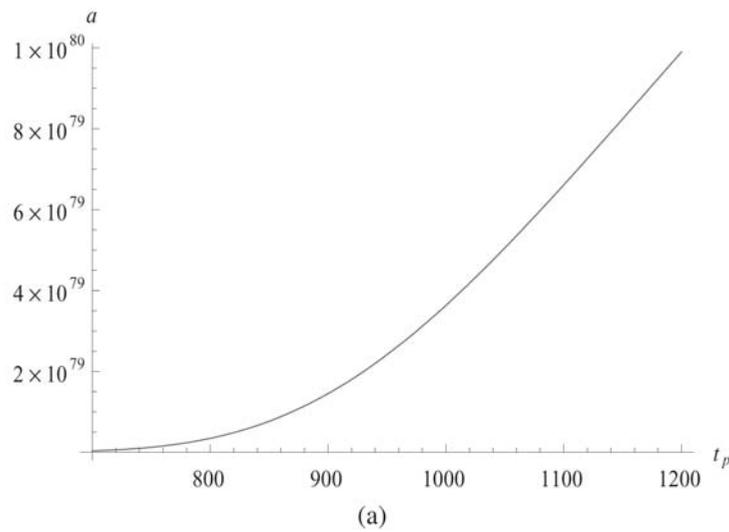
Separando las variables

$$\int \frac{da}{a} = \left[ \frac{16\pi\rho_{\Lambda 0}}{3M_p^2} \right]^{\frac{1}{2}} \int \frac{e^{-\Gamma t/2}}{\sqrt{2 - \hat{\epsilon}(t)}} dt, \quad (90)$$

y usando  $a(t_b = 0) = a_b$  y  $a(t)$  como límites de integración, se obtiene

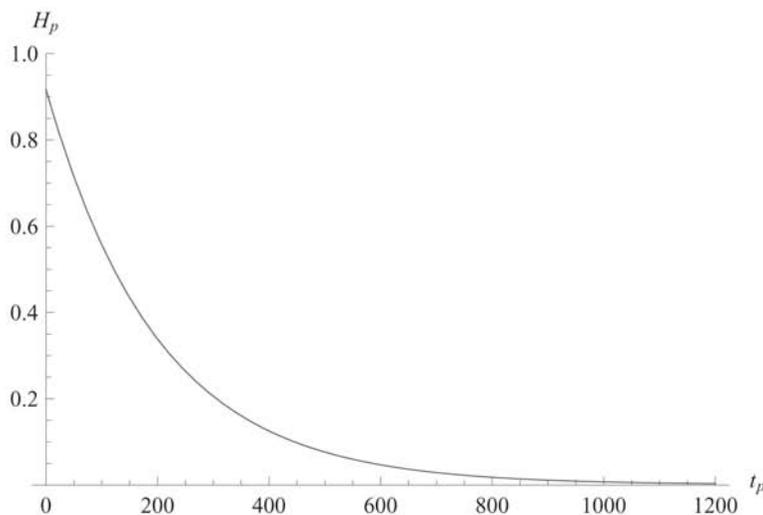
$$N(t) = \ln(a(t)/a_b) = \left[ \frac{16\pi\rho_{\Lambda 0}}{3M_p^2} \right]^{\frac{1}{2}} \int_0^t \frac{e^{-\Gamma t/2}}{\sqrt{2 - \hat{\epsilon}(t)}} dt. \quad (91)$$

Teniendo en cuenta la forma funcional de  $\hat{\epsilon}$ , esta integral es imposible de ser calculada exactamente por medios analíticos. Sin embargo, dado que  $\hat{\epsilon}(t)$  varía ligeramente en el período inflacionario desde  $\hat{\epsilon} \ll 1$  hasta máximo  $\hat{\epsilon} \approx 1$ , haciendo que el denominador de la expresión (91) varíe entre  $\sqrt{2}$  y máximo 1, y que  $e^{-\Gamma t_b/2} = 1$  mientras que  $e^{-\Gamma t_e/2} \ll 1$ , la mayor variación en el tiempo está asociada con la función exponencial, permitiendo aproximar muy bien la integral en la expresión (91) a la integral únicamente



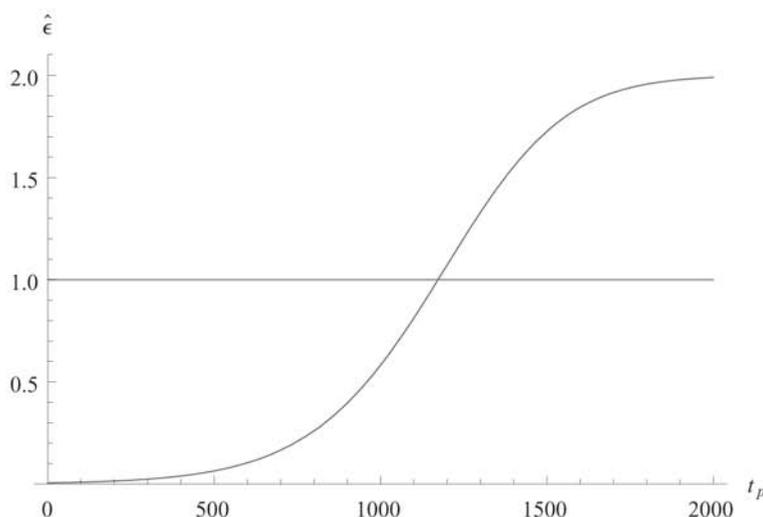
**Figura 4: Evolución temporal del factor de escala para un universo compuesto por dos fluidos interactuantes: vacío y radiación**

*El comportamiento del factor de escala es consistente con un período inflacionario primordial. (a) Durante inflación se observa un incremento de tipo exponencial en el factor de escala. (b) Para  $t = 0$  el factor de escala es igual a 1. En la construcción de estas gráficas se ha tomado  $H_b = 0,916 M_p$  y  $\Gamma = 0,01 M_p$ . Las unidades de tiempo son tales que  $t_p = tM_p$  (unidades de tiempo de Planck).*



**Figura 5: Evolución temporal del parámetro de Hubble para un universo compuesto por dos fluidos interactuantes: vacío y radiación**

Se aprecia que el parámetro de Hubble disminuye durante inflación. Se ha tomado  $H_b = 0,916 M_p$  y  $\Gamma = 0,01 M_p$ . Las unidades para el parámetro de Hubble y para el tiempo son tales que  $H_p = H M_p^{-1}$  (unidades de energía de Planck) y  $t_p = t M_p$  (unidades de tiempo de Planck) respectivamente. El valor del parámetro de Hubble al final de inflación corresponde a  $H_e \simeq 0,005 M_p$ .



**Figura 6: Evolución temporal del parámetro de deformación para un universo compuesto por dos fluidos interactuantes: vacío y radiación**

Al comienzo de inflación,  $\hat{\epsilon} \ll 1$  y además es proporcional a  $\rho_r$ . A medida que transcurre el período inflacionario, más y más energía de vacío es transferida a energía de radiación a través del acoplamiento  $\Gamma$ . La línea horizontal indica el final de inflación y corresponde a  $\hat{\epsilon} = 1$ . Se ha tomado  $H_b = 0,916 M_p$  y  $\Gamma = 0,01 M_p$ . Las unidades de tiempo son tales que  $t_p = t M_p$  (unidades de tiempo de Planck).

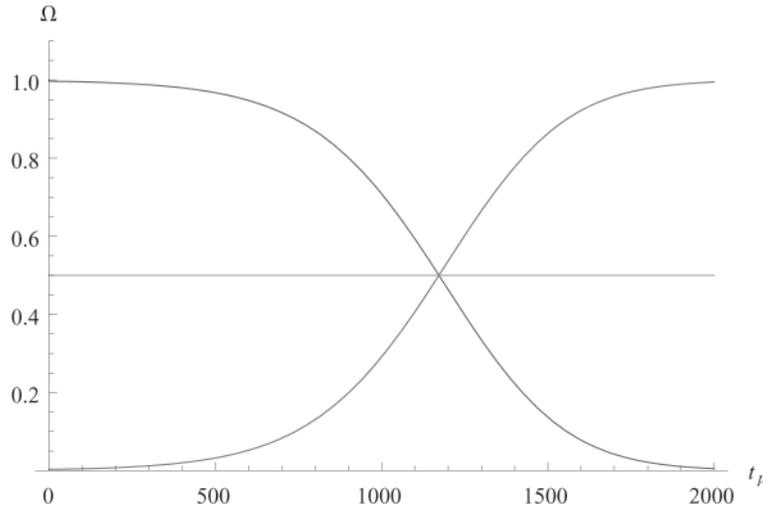


Figura 7: Evolución temporal del parámetro de densidad para un universo compuesto por dos fluidos interactuantes: vacío y radiación

Al comienzo de inflación, la densidad de energía de vacío domina sobre la densidad de energía total. No obstante, decaerá posteriormente en densidad de energía de radiación. Inflación termina cuando  $\rho_\Lambda = \rho_r$ , es decir, cuando  $\Omega_r = \Omega_\Lambda = 0,5$ . La línea roja (línea inferior a la izquierda) representa  $\Omega_r$  mientras que la azul (línea superior a la izquierda) representa a  $\Omega_\Lambda$ . La línea horizontal indica el final de inflación. Para esta gráfica se ha tomado  $H_b = 0,916 M_p$  y  $\Gamma = 0,01 M_p$ . Las unidades de tiempo son tales que  $t_p = t M_p$  (unidades de tiempo de Planck).

sobre la función exponencial:

$$\begin{aligned}
 N(t) &\approx \left[ \frac{16\pi\rho_{\Lambda 0}}{3M_p^2} \right]^{\frac{1}{2}} \left[ -\frac{2}{\Gamma} \frac{e^{-\Gamma t/2}}{\sqrt{2-\epsilon(t)}} \right] \Bigg|_0^t \\
 &\approx \left[ \frac{16\pi\rho_{\Lambda 0}}{3M_p^2} \right]^{\frac{1}{2}} \left( \frac{2}{\Gamma} \frac{1}{\sqrt{2}} \right) (1 - e^{-\Gamma t/2}), \quad (92) \\
 \Rightarrow N(t_e) &\sim \frac{8\rho_{\Lambda 0}^{1/2}}{M_p \Gamma}. \quad (93)
 \end{aligned}$$

De la ecuación de Friedmann (c.f. Ec. (33)) evaluada al inicio de inflación se tiene que

$$H_b = \frac{\sqrt{8\pi\rho_{\Lambda 0}^{1/2}}}{\sqrt{3}M_p}, \quad (94)$$

con lo cual se puede despejar  $\rho_{\Lambda 0}^{1/2}$  y sustituir este resultado en (93). Así,

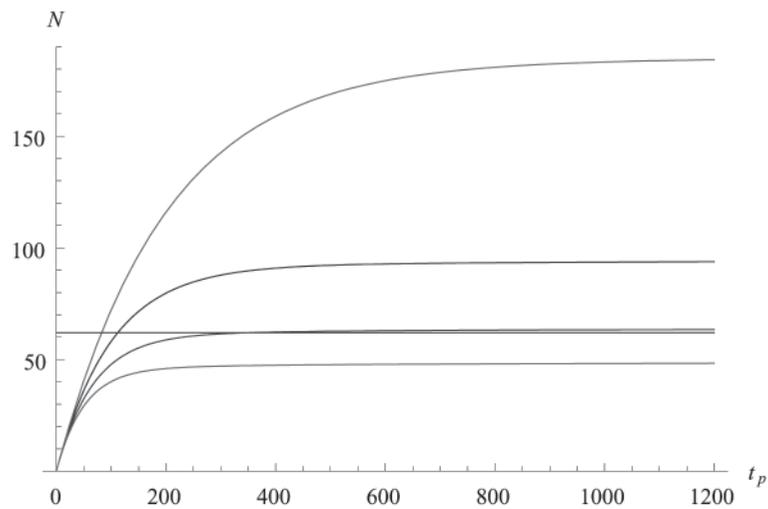
$$N \sim \sqrt{8} \frac{H_b}{\Gamma}. \quad (95)$$

Como un ejemplo, se puede considerar la escala de inflación<sup>27</sup> cerca a la escala de la masa de Planck, de modo que

$H_b \sim M_p$  GeV. Para resolver los problemas de horizonte, planitud, y de reliquias no deseadas, se requiere que  $N \geq 62$  e-folds (Lyth & Liddle, 2009). Entonces, para conseguir un período inflacionario adecuado, el valor de la razón de decaimiento  $\Gamma$  debe estar ligeramente por debajo de la escala de Hubble al inicio de inflación. De este modo,  $\Gamma \lesssim 0,04 M_p$ .

En la Figura 8 se presenta el monto de inflación  $N$ , calculado a partir de  $N(t) = \ln(a(t)/a_b)$  y de la expresión (70), en función del tiempo para diferentes valores de  $\Gamma$ . Antes de que termine inflación ( $t = t_e$ ) cada acoplamiento  $\Gamma$  debe proporcionar una cantidad de e-folds adecuada, de modo que se pueda resolver los problemas clásicos de la cosmología estándar. La línea horizontal indica la cantidad de e-folds que se debe producir antes de que inflación termine ( $N \geq 62$ ). De lo anterior, se observa la restricción  $\Gamma \leq 0,03 M_p$ , siendo consistente con el valor obtenido después de la ecuación (95) para obtener el estimativo del monto de inflación.

<sup>27</sup>La escala de inflación es de hecho desconocida. Sin embargo, debe ser consistente con la razón tensor-escalar debido a que la amplitud de las ondas gravitacionales primordiales generadas es proporcional a dicha escala (Dodson, 2003; Lyth & Liddle, 2009; Mukhanov, 2005; Weinberg, 2008).



**Figura 8: Monto de inflación en función del tiempo para un universo compuesto por dos fluidos interactuantes: vacío y radiación**

En esta gráfica se presenta el monto de inflación en función del tiempo para diferentes valores de  $\Gamma$ . De arriba a abajo:  $\Gamma = 0,01, 0,02, 0,03, 0,04$  en unidades de masa de Planck. Cuanto mayor es el acoplamiento  $\Gamma$ , más rápido termina inflación con  $t_e \approx 1170, 520, 320, 224$  en unidades de tiempo de Planck para los respectivos valores de  $\Gamma$ . La línea horizontal representa el monto mínimo requerido para solucionar los problemas de horizonte, planitud, y reliquias no deseadas,  $N = 62$ . Las curvas por encima de esta línea corresponden a modelos inflacionarios que resuelven adecuadamente estos problemas. En la construcción de esta gráfica, se ha tomado  $H_b = 0,916 M_p$ . Las unidades de tiempo son tales que  $t_p = tM_p$  (unidades de tiempo de Planck).

#### 4.8. Temperatura post-inflacionaria

Al final de inflación gran parte de la energía de vacío ha sido convertida en energía de radiación. Para este punto crucial de la historia del Universo se tiene una temperatura, la cual es característica según el modelo en consideración, denominada temperatura post-inflacionaria<sup>28</sup>  $T_r$  en la cual  $\rho_r = \rho_\Lambda = \rho_{\Lambda 0} e^{-\Gamma t_r}$ . De la ley de Stephan-Boltzman se obtiene una relación para la densidad de energía de radiación y la temperatura  $\rho_r = \frac{\pi^2}{30} g_*(T_r) T^4$  (Lyth & Liddle, 2009) en donde  $g_*(T_r)$  es el número de grados de libertad internos de la colección de partículas elementales que se tiene según el modelo de física de partículas que se considere<sup>29</sup>. Así

$$T_r = \left[ \frac{30}{\pi^2} \frac{1}{g_*(T_r)} \rho_{\Lambda 0} \right]^{1/4} e^{-\Gamma t_r/4}, \quad (96)$$

$$\Rightarrow T_r = 0,4 \rho_{\Lambda 0}^{1/4} e^{-\Gamma t_r/4}, \quad (97)$$

en donde se ha obtenido una expresión para la temperatura post-inflacionaria en términos de la densidad de energía de vacío inicial y la razón de decaimiento<sup>30</sup>.

Otra relación de utilidad es la ecuación de Friedmann al inicio de inflación

$$H_b^2 = \frac{8\pi\rho_{\Lambda 0}}{3M_p^2}, \quad (98)$$

de aquí que

$$\rho_{\Lambda 0}^{1/4} = \left( \frac{3}{8\pi} \right)^{1/4} (M_p H_b)^{1/2}. \quad (99)$$

Si se considera la escala de Hubble inicial  $H_b \simeq 10^{19}$  GeV, entonces

$$\rho_{\Lambda 0}^{1/4} \approx 0,58 \times 10^{19} \text{ GeV}. \quad (100)$$

En el estimativo del monto de inflación se observó que  $e^{-\Gamma t_e/2} \ll 1$ , lo cual implica que  $e^{-\Gamma t_e/2} \lesssim 10^{-2}$ , es decir, que esté al menos dos órdenes de magnitud por debajo de uno. De aquí que  $\Gamma t_r \gtrsim 9,21$ . Reemplazando este valor y el de  $\rho_{\Lambda 0}^{1/4}$  en la ecuación (97), se determina la temperatura post-inflacionaria para este modelo en particular

$$T_r \lesssim 10^{17} \text{ GeV}. \quad (101)$$

A partir del momento en que inflación termina, la radiación comienza a dominar, dando lugar a la época dominada por la radiación (Dodelson, 2003; Lyth & Liddle, 2009; Mukhanov, 2005; Weinberg, 2008).

## 5. Conclusiones

En este trabajo se estudió la dinámica de un modelo cosmológico para la evolución de nuestro Universo primordial (Watson, Perry, Kane & Adams, 2007), sin presencia de campos escalares, y se verificó que este modelo puede generar un período de expansión acelerada cuando se considera transferencia de energía de vacío a radiación. Dicha expansión se ve reflejada en la solución analítica del factor de escala  $a(t)$ . Adicionalmente, se determinó que este modelo puede generar una cantidad de e-folds necesaria para resolver los problemas clásicos de la cosmología estándar con  $N \geq 62$ . De igual forma, se encontró que este modelo puede proporcionar una temperatura al final de inflación  $T_r \lesssim 10^{17}$  GeV. Esta temperatura es consistente con el proceso de nucleosíntesis, para el cual la temperatura es  $T_N \sim 1$  MeV, es decir, inflación ocurre mucho antes que este período de tal forma que no interfiere con la producción de elementos ligeros (uno de los pilares observacionales del modelo estándar del Big Bang caliente). De esta manera, los valores encontrados anteriormente para cada una de las cantidades del modelo en cuestión son consistentes con un período inflacionario primordial (Dodelson, 2003; Lyth & Liddle, 2009; Mukhanov, 2005; Weinberg, 2008).

Bajo las condiciones requeridas en los cálculos previos, se determinaron los valores de los parámetros correspondientes para este modelo:

Razón de decaimiento  $\Gamma \lesssim 0,03 M_p$ ,

Escala de Hubble al inicio de inflación  $H_b \simeq M_p$ ,

Escala de Hubble al final de inflación  $H_e \simeq 0,005 M_p$ ,

Densidad de energía de vacío al inicio de inflación  $\rho_{\Lambda 0}^{1/4} \simeq 0,58 \times 10^{19}$  GeV.

Así, se determinó la viabilidad de un mecanismo alternativo de expansión acelerada para el Universo primitivo sin recurrir a campos escalares fundamentales (tales como el inflatón) como elementos indispensables en la construcción de escenarios inflacionarios.

<sup>28</sup>Esta temperatura es análoga a la temperatura de recalentamiento para modelos escalares inflacionarios del tipo slow-roll (Dodelson, 2003; Lyth & Liddle, 2009; Mukhanov, 2005; Weinberg, 2008).

<sup>29</sup>Para el caso de interés, se tomará el modelo estándar de partículas elementales con  $g_*(T_r) = 106,75$  (Lyth & Liddle, 2009).

<sup>30</sup>La ley de Stephan-Boltzman es válida en tanto haya equilibrio termodinámico local, lo cual no es estrictamente cierto en el modelo en consideración en donde los dos fluidos, el de vacío y el de radiación, están interactuando mutuamente. Sin embargo, y debido a que el cálculo de la temperatura se está realizando al final de inflación, se puede asumir con buena aproximación (véase las ecuaciones (45), (46), y (55)) que la interacción entre los fluidos para ese entonces es lo suficientemente débil de tal manera que la ley de Stephan-Boltzman brinda un valor correcto para  $T_r$ .

**Agradecimientos:** Y.R. cuenta con el apoyo financiero de COLCIENCIAS mediante proyecto de investigación número 1102-487-25992 CT-460-2009, y de la DIF (UIS) mediante proyecto de investigación número 5177.

## Referencias

- Abbott L. F.**, 1985. A Mechanism for Reducing the Value of the Cosmological Constant, *Phys. Lett. B* **150**, 427.
- Abramowitz M. & Stegun I.**, 1972. *Handbook of Mathematical Functions With Formulas, Graphs, And Mathematical Tables*, Dover Publications, New York, USA.
- Arfken G.B. & Weber H.J.**, 2005. *Mathematical Methods for Physicists*, Elsevier Academic Press, London, UK.
- Berera A., Moss I. G. & Ramos R. O.**, 2009. Warm Inflation and its Microphysical Basis, *Rep. Prog. Phys.* **72**, 026901.
- Dimopoulos K., Karčiauskas M., Lyth D.H. & Rodríguez Y.**, 2009. Statistical Anisotropy of the Curvature Perturbation from Vector Field Perturbations, *JCAP* **0905**, 013.
- Dodson S.**, 2003. *Modern Cosmology*, Elsevier Academic Press, London, UK.
- Freese K., Liu J. T. & Spolyar D.**, 2005. Inflating with the QCD Axion, *Phys. Rev. D* **72**, 123521.
- Freese K. & Spolyar D.**, 2005. Chain Inflation: Bubble Bubble Toil and Trouble, *JCAP* **0507**, 007.
- Golovnev A., Mukhanov V. & Vanchurin V.**, 2008. Vector Inflation, *JCAP* **0806**, 009.
- Guth A.**, 1981. Inflationary Universe: A Possible Solution To The Horizon and Flatness Problems, *Phys. Rev. D* **23**, 347.
- Kane G.**, 1993. *Modern Elementary Particle Physics*, Addison-Wesley, Redwood City, USA.
- Komatsu E. et. al.**, 2011. Seven-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Cosmological Interpretation, *Astrophys. J. Suppl. Ser.* **192**, 18.
- Lyth D.H. & Liddle A.R.**, 2009. *The Primordial Density Perturbation: Cosmology, Inflation, and the Origin of Structure*, Cambridge University Press, Cambridge, UK.
- Malik K.A. & Wands D.**, 2009. Cosmological Perturbations, *Phys. Rep.* **475**, 1.
- Mukhanov V.F.**, 2005. *Physical Foundations of Cosmology*, Cambridge University Press, Cambridge, UK.
- Polchinski J.**, 1998. *String Theory*, Cambridge University Press, Cambridge, UK.
- Watson S., Perry M.J., Kane G.L. & Adams F.C.**, 2007. Inflation Without Inflation(s), *JCAP* **0711**, 017.
- Weinberg S.**, 1972. *Gravitation and Cosmology*, John Wiley & Sons, New York, USA.
- Weinberg S.**, 2008. *Cosmology*, Oxford University Press, Oxford, UK.
- Witten E.**, 1984. Cosmic Separation of Phases, *Phys. Rev. D* **30**, 272.

Recibido: noviembre 9 de 2010.

Aceptado para su publicación: octubre 30 de 2010.

# ALGUNOS INTENTOS DE COMPRENSIÓN DEL ORIGEN GEOLÓGICO DE LA SIERRA NEVADA DE SANTA MARTA DURANTE EL SIGLO XIX: LOS CASOS DE JOAQUÍN ACOSTA Y JORGE ISAACS

Pablo Antonio Castro López<sup>1</sup>, Agustín Cardona Molina<sup>2</sup>

## Resumen

**Castro López, P. A., A. Cardona Molina:** Algunos intentos de comprensión del origen geológico de la Sierra Nevada de Santa Marta durante el siglo XIX: los casos de Joaquín Acosta y Jorge Isaacs. *Rev. Acad. Colomb. Cienc.* **34** (133): 497-511, 2010. ISSN 0370-3908.

La Sierra Nevada de Santa Marta ha sido objeto de investigaciones desde hace mucho tiempo, entre otras cosas por su carácter aislado del resto de la cadena montañosa de los Andes. En el presente trabajo se resaltan los aportes al conocimiento del origen y de las características geológicas de dicho macizo rocoso realizados por Joaquín Acosta (1800-1852) y Jorge Isaacs (1837-1895). Además, se hace una primera aproximación a lo que podría ser una filiación teórica y conceptual entre estos autores y algunos importantes geólogos y naturalistas europeos del siglo XIX, en el contexto de una historia de las ideas acerca de la orogénesis en Colombia.

**Palabras clave:** historia de las geociencias en Colombia, tectónica del Caribe, Sierra Nevada de Santa Marta, cambios en el nivel del mar, modelos orogénicos en Colombia en el siglo XIX.

## Abstract

The Sierra Nevada de Santa Marta, located in the northernmost part of Colombia, has been an object of scientific inquiry since at least the XIXth century, among other things because of its isolated character in relation to the Andean mountain chain. In this article we present some contributions to the knowledge of its origin and geological framework made by Joaquín Acosta (1800-1852) and Jorge Isaacs (1837-1895). Furthermore we establish a possible theoretical and conceptual relationship between these authors and some important European geologists and naturalists in the XIXth century, in the context of a history of ideas pertaining to orogenesis in Colombia.

**Key words:** history of geosciences in Colombia, Caribbean tectonics, Sierra Nevada de Santa Marta, sea-level changes, orogenic models in Colombia during the XIXth century.

<sup>1</sup> Profesor de Cátedra, Universidad EAFIT, Medellín.

<sup>2</sup> Instituto de Investigaciones Tropicales Smithsonian, Panamá. Dirección correspondencia: Calle 1 No. 43D-30 Apartamento 606, Medellín (Antioquia).

“La masa gigantesca de la Nevada [...] y el Shinundúa y las otras cúspides níveas que la circundan, irradian al despuntar el sol refle[j]os indescriptibles que se cruzan en el éter con los primeros rayos de la aurora: son como dos alboradas esplendentes que sorprendidas y en arrobamiento se contemplan. Duerme el valle a los pies, y sus llanuras de verdor amarillento bordadas por selvas serpeantes de color sombrío, aparecen a distancia veladas aún por vapores azulinos. En la hondonada, algún reflejo de las aguas del Cesar, o del Magdalena al Sudeste; y en esa dirección, líneas vagas de los ramales que bajan de la Cordillera central hasta inmediaciones del Banco: momentos después la di[a]mantina corona de la Sierra se apaga; parecen sus picos de amatista y lapislázuli, y el astro-rey difunde luz y vida sobre el hemisferio de América”<sup>3</sup>.

La Sierra Nevada de Santa Marta representa un elemento de relieve particular de la geografía colombiana. Su posición como pirámide erguida, aislada de la cadena montañosa Andina que se extiende de forma continua desde la Tierra del Fuego hasta el norte de Colombia, obedece a la compleja interrelación geológica entre Suramérica, el Caribe y el Pacífico.

Con unas cimas nevadas a una altura de aproximadamente 5900 metros sobre el nivel del mar y una fosa submarina de más de 4000 metros de profundidad bajo el mismo nivel, representa la montaña costera más grande del planeta.

No es de extrañarse que estas particularidades geográficas, además de ser un elemento fundamental para la cultura de los grupos indígenas que habitan la Sierra, hayan causado gran impresión en los primeros europeos que visitaron este macizo montañoso, lo mismo que en las generaciones posteriores de naturalistas y de geógrafos que han intentado comprenderla hasta el día de hoy.

Inclusive, ha sido un elemento partícipe de la literatura colombiana, como lo podemos entrever en el siguiente extracto de la novela *Cien Años de Soledad* de Gabriel García Márquez, que trata sobre el asentamiento final de Macondo:

“En su juventud, él [José Arcadio Buendía] y sus hombres, con mujeres y niños y animales y toda clase de enseres domésticos, atravesaron la sierra buscando una salida al mar, y al cabo de veintiséis meses desistieron de la empresa y fundaron a Macondo para no tener que emprender el camino de regreso”<sup>4</sup>.

Estos aspectos geográficos sumados a su biodiversidad, la cual se ha desarrollado por la continua variación altitudinal y por la distribución climática heterogénea entre sus diferentes flancos, han llevado a que esta región fuera declarada por la UNESCO, en el año de 1979, como Reserva de la Biosfera, del Hombre y de la Humanidad. En lo que respecta a Colombia, la Sierra Nevada también posee un importante parque natural en su territorio desde 1977: el Parque Nacional Natural Sierra Nevada de Santa Marta.

El afán de comprender el origen de esta zona montañosa, particularmente su carácter aislado de los Andes, despertó gran curiosidad y estimuló algunos esfuerzos investigativos durante el siglo XIX, gran cantidad de indagaciones científicas durante el siglo XX y nuevos trabajos exploratorios a comienzos del siglo XXI.

Si bien los esfuerzos de comprensión regional y local representan el pilar moderno y formal del conocimiento de esta región, en este breve texto queremos destacar algunas observaciones e interpretaciones, elaboradas durante el siglo XIX, sobre las características geológicas y tectónicas de la Sierra Nevada de Santa Marta (que en ese entonces se conocía también como Sierra Tairona). Dichas observaciones e interpretaciones se encuentran en textos no muy difundidos de dos personajes que, por otra parte, sí son bien conocidos en la historiografía colombiana: Tomás Joaquín Acosta Pérez (1800-1852) y Jorge Enrique Isaacs Ferrer (1837-1895).

Hay que aclarar, finalmente, que este escrito no pretende realizar una historia de las investigaciones geológicas e interpretaciones tectónicas acerca de la Sierra Nevada de Santa Marta. Esta tarea está por realizarse y creemos que podría rendir frutos bien interesantes, pues habría que incluir a los autores mejor conocidos del siglo XIX (como es el caso de Wilhelm Sievers y los mapas geográfico y geológico que elaboró, publicados en Alemania, en 1888) y relacionarlos con la secuencia de investigaciones durante los siglos XX y XXI.

Sin pretender ser exhaustivos, mostraremos a continuación una síntesis general de algunas de las principales investigaciones modernas acerca de la Sierra Nevada de Santa Marta como preámbulo para la presentación de la contribución realizada durante el siglo XIX por los personajes arriba mencionados.

3 Isaacs (1967), p. 70; publicado originalmente en 1884 en los *Anales de Instrucción Pública en los Estados Unidos de Colombia* (Bogotá).

4 García Márquez (2007), p. 19.

## Siglo XX y siglo XXI

Entre los grandes esfuerzos individuales por esclarecer las características geológicas y el origen de la Sierra Nevada podemos incluir el trabajo del geólogo suizo Augusto Gansser, prolífico viajero conocido ampliamente en la comunidad geológica internacional por ser uno de los más prominentes investigadores de la geología del Himalaya. Gansser, quien emprendió una travesía independiente a lo largo y ancho de la Sierra Nevada, consignó su conocimiento de los Andes y sus observaciones geológicas en un artículo publicado en una revista suiza de temas geológicos<sup>5</sup>, antes de dedicar su vida a la comprensión de las cadenas montañosas Alpina e Himalaya. En este trabajo se presenta una descripción litoestratigráfica bastante detallada de la Sierra Nevada, la cual viene acompañada por varias ilustraciones, entre ellas un mapa geológico. Además, se muestran algunos aspectos de las glaciaciones que se pueden evidenciar en la parte superior de este macizo montañoso, lo cual viene acompañado de un mapa de los glaciares de la parte central de la Sierra.

También se deben mencionar los trabajos de William MacDonald, estudiante de doctorado en la Universidad de Princeton durante la década de 1960, quien fuera supervisado por Harry Hammond Hess en el marco del Proyecto de Investigaciones Geológicas del Caribe (*Princeton Caribbean Geological Research Project*), dirigido por este último desde finales de la década de 1940. Es importante anotar que Harry Hess fue uno de los principales científicos asociados a la elaboración de la teoría de la tectónica de placas. MacDonald obtuvo importantes datos geofísicos y calculó los primeros datos geocronológicos para la Sierra Nevada de Santa Marta y los Andes Colombianos (MacDonald & Hurley, 1969; Case & Macdonald, 1973; Doolan, 1971). Estos datos llevaron a contextualizar la situación geotectónica de la Sierra Nevada de Santa Marta dentro de una perspectiva de correlación con la tectónica Andina y Caribeña. Casi simultáneamente con las investigaciones de MacDonald, el geólogo norteamericano Charles Tschanz lideró un trabajo de cartografía en la Sierra Nevada, el cual formaba parte de un proyecto institucional mucho más amplio denominado el Inventario Minero Nacional (1964-1970), que involucró al Ministerio de Minas colombiano, al Servicio Geológico de los Estados Unidos y a la Agencia para el Desarrollo Internacional del mismo país (USAID) (Irving, 1971). Tschanz estableció una im-

portante contextualización tectónica, y obtuvo importantes dataciones geocronológicas (Tschanz *et al.* 1969; 1974).

Dentro de estos trabajos, la incógnita sobre la continuidad de la Sierra Nevada y su relación con los Andes Colombianos fue explorada por Hermann Duque-Caro (1979), quien dentro de sus interpretaciones geológicas propone una serie de desplazamientos que llevan esta macizo rocoso a una posición próxima a la actual. En una línea de análisis similar están los análisis indirectos de Jim Kellog (1984) o Van der Hilst & Mann (1994) quienes, a partir de información sísmica, sugieren la existencia de una zona de subducción por debajo de Santa Marta.

Otros trabajos más particulares han incluido intentos de mejorar el conocimiento de los eventos ocurridos durante el período Cretácico, entre 120 y 70 millones de años atrás (Doolan, 1971), o la historia más antigua, representada por rocas con edades de alrededor de 1000 millones de años de antigüedad (Restrepo-Pace *et al.* 1997; Ordoñez *et al.* 1999; Cordani *et al.* 2005).

Recientemente, como fruto de un proyecto de cooperación interinstitucional entre ECOPETROL, el INGEOMINAS (Instituto Colombiano de Geología y Minería) y el INVEMAR (Instituto de Investigaciones Marinas y Costeras), así como de la participación de otras instituciones e individuos, fue realizada una nueva aproximación al conocimiento geológico y tectónico de la Sierra Nevada, cuyos resultados fueron publicados por la revista *Journal of South American Earth Sciences*, en un volumen especial (Ojeda & Cardona, 2010).

Si bien los detalles para un conocimiento absoluto sobre dos de los aspectos más intrigantes de la geología de la Sierra Nevada de Santa Marta, como son su aislamiento de la cadena Andina y su elevación, todavía son objeto de discusión y exploración, los trabajos recientes sugieren que la Sierra Nevada habría estado en continuidad con las cordilleras andinas, y habría sido separada de estas probablemente desde hace menos de 50 millones de años, por movimientos rotacionales que formarían simultáneamente las cuencas del Valle Inferior del Magdalena (Montes *et al.* 2010). El mecanismo generador de esta rotación estaría asociado con la migración hacia el este de la placa del Caribe, la cual es el límite norte de Suramérica (Bayona *et al.* 2010; Montes *et al.* 2010). De otro lado, su historia de levantamientos verticales está dividida en diferentes fa-

5 Gansser (1955). Como dato curioso, quisiéramos anotar que Gansser era además un montañista consumado y durante su estadía en Colombia realizó varios ascensos a picos importantes de nuestra orografía (Vega, 1996, p. 26-27; una fotografía de Gansser en 1951 en Colombia se puede ver en la p. 119).

ses durante el Cenozoico (**Cardona et al.** en revisión), de manera que las más importantes habrían ocurrido en el Paleoceno-Eoceno (entre 65 millones de años y 45 millones de años atrás), en el Oligoceno (entre 25 millones de años y 8 millones de años) y en el Mioceno Tardío (desde hace 8 millones de años). El mecanismo geológico de carácter regional que podría estar controlando su levantamiento estaría determinado por los cambios en las variables de convergencia de placas (velocidad y ángulo de convergencia), relacionados con la subducción de la placa del Caribe bajo Suramérica, y por el control que ejercen las grandes fallas regionales que limitan este macizo triangular (**Kellogg**, 1984; **Flores-Niño**, 2001; **Cerón-Abril**, 2008; **Cardona et al.**, en revisión).

En este esquemático y muy resumido preámbulo no pretendemos incluir todos los trabajos realizados acerca de la Sierra Nevada de Santa Marta y somos conscientes de dejar por fuera referencias fundamentales, como las obras de Victor Oppenheim y E. Reymond durante la década de 1940, por tomar solo dos ejemplos.

A continuación, nos ocuparemos entonces de nuestros dos personajes centrales y de sus textos y propuestas interpretativas.

## Siglo XIX

### Joaquín Acosta: Comisión Oficial en la Sierra Nevada y sus alrededores

Joaquín Acosta ha sido analizado como científico y naturalista en varios trabajos anteriores, en los que se ha destacado su polifacética vida en los campos de la geografía, la geomorfología y la geología (ver respectivamente **Sánchez**, 1999; **Hermelin**, 1993; **Espinosa**, 1994). Pero en estos trabajos no se había presentado aún una exposición detallada de las observaciones e interpretaciones de Acosta en relación con las características geológicas y el origen de la Sierra Nevada de Santa Marta.

Acosta viajó a la Sierra Nevada de Santa Marta y sus alrededores a finales de 1850 y principios de 1851 por orden del Gobierno Nacional de ese entonces<sup>6</sup>. Productos de

este viaje podemos mencionar, como mínimo, dos textos: el “Informe del Coronel Joaquín Acosta sobre los baldíos de Santa Marta y Valle de Upar (1851)”, escrito en Guaduas el 8 de marzo de 1851 (**Mantilla**, 2005, p. 196), y la carta enviada el 11 de abril del mismo año, también desde Guaduas, a Léonce Élie de Beaumont<sup>7</sup>, miembro de la Sociedad Geológica de Francia, que fue leída por éste último en la sesión de reuniones de dicha Sociedad del día 21 de junio de 1852<sup>8</sup> y luego publicada en las memorias de la misma (**Acosta**, 1852).

Es importante anotar que antes de realizar el viaje en Comisión Oficial del Gobierno Nacional, Acosta ya había explorado la región del Magdalena y el Valle de Upar. Estas exploraciones las habría realizado en agosto de 1849, recién desembarcado de su segundo viaje a Europa, y en marzo de 1850, partiendo desde su residencia en Guaduas (**Acosta de Samper**, 1901, p. 460, 465).

En el primer texto mencionado más arriba las alusiones a cuestiones geológicas o mineralógicas son bastante escasas, puesto que el objetivo del informe y su destinatario no exigían una mayor profundidad en estos temas. El objetivo del informe se centraba principalmente en establecer lugares adecuados para desarrollar proyectos de colonización en establecimientos agrícolas por parte de ciudadanos europeos en lugares pertenecientes a las provincias de Santa Marta y del Valle de Upar. El destinatario era el Gobierno Nacional, en cabeza del Señor Secretario de Relaciones Exteriores.

A continuación, citaremos de este texto la parte más relevante para nuestro objetivo:

“Dentro de los términos de la provincia del Valle de Upar en la misma Sierra Tairona o Nevada que divide esta provincia de la de Santa Marta he recorrido valles deliciosos en el lado oriental que tienen ventajas decididas sobre los de la pendiente occidental que acabo de mencionar. Aguas vivas frías y cristalinas, tierra vegetal inagotable porque la base es la roca porfirida alterada que los geólogos llaman *argilófera* que es blanda y cede sin cesar sus elementos fecundos al suelo superior...” (Cursiva en el original, **Mantilla**, 2005, p. 199.)

6 Las fechas límite serían: el 10 de diciembre de 1850, cuando se emite una orden del poder Ejecutivo, por medio del Secretario de Relaciones Exteriores, que solicita a Acosta hacer el recorrido de las provincias de Santamarta y Valle de Upar; y el 8 de marzo de 1851, que es la fecha en que escribe el Informe desde Guaduas (**Mantilla**, 2005, p. 196).

7 Léonce Élie de Beaumont (1798-1874) fue una figura prominente de la geología del siglo XIX en Europa, particularmente interesado en la caracterización, clasificación y comprensión del origen de las cadenas montañosas. Fue una de las personas que ayudó en la creación de la Sociedad Geológica de Francia en 1830 y, a partir de este año, fue uno de los Directores del proyecto estatal para confeccionar el Mapa Geológico de Francia (**Greene**, 1982, p. 76, 77).

8 Para ese entonces Acosta había fallecido, hecho que aconteció el 21 de febrero de 1852 (**Davis**, 1969, p. 163).

Nuestra interpretación es la siguiente: un elemento sustancial de la justificación de la escogencia del lugar mencionado por Acosta sería la composición geológica del subsuelo de dicho lugar, y los resultados de la descomposición de dichos materiales rocosos en forma de suelo, el cual contendría elementos adecuados al crecimiento de la vegetación<sup>9</sup>. En cuanto a la terminología geológica utilizada podemos mencionar los dos términos porfirida y argilófera<sup>10</sup>. Ambos parecen ser traducciones literales del francés, puesto que en el siguiente texto que reseñaremos de Acosta aparecen junto a otro conjunto más amplio de palabras y conceptos geológicos.

El segundo texto<sup>11</sup> sí está directamente relacionado con nuestro tema de interés: las características geológicas y el posible origen de la Sierra Nevada de Santa Marta, por lo que nos centraremos en él en el resto de esta sección.

Inicialmente, Acosta plantea la observación del carácter aislado del relieve conformado por la Sierra Nevada, en lo que sigue la postura de Alexander von Humboldt, según el mismo autor en su texto (Acosta, 1852, p. 396; no menciona cuál de las obras de Humboldt es la que utiliza para afirmar lo anterior, por lo que no sabemos en qué fecha lo dijo este último). Este aislamiento indicaría una separación del relieve andino de Colombia, especialmente de las cordilleras Central y Occidental. A continuación indica un argumento para sustentar el carácter aislado del macizo rocoso, el cual tiene que ver con dos hechos: el primero, es que el denominado Valle de Upar (cuenca del río Cesar) no tendría más de 200 metros de altura sobre el nivel del mar en su conjunto; en contraste con lo anterior, el segundo hecho es que en los alrededores de Santa Marta y Riohacha se pueden observar rocas metamórficas que prácticamente emergen del mar. Las rocas metamórficas son características de niveles relativamente profundos de la corteza terrestre y si las observamos hoy en día en la superficie, como parte de un conjunto montañoso, esto nos indicaría un levantamiento del relieve en algún momento de la remotísima historia tectónica de estas unidades litológicas (Acosta, 1852, p. 396-397).

En un segundo momento Acosta describe las características altitudinales y físicas del macizo montañoso,

mostrando a su vez que en sus exploraciones logró llegar hasta el límite inferior de la nieve, que él determina mediante una observación barométrica, dando como resultado un valor de 4687 metros. Adicionalmente, estima la altura del pico más alto del macizo en 5500 metros como máximo. Según parece, Acosta recorrió toda la base de la Sierra Nevada e hizo un recorrido ascendente, desde el sureste hacia el noroeste. En este recorrido describe una sucesión litoestratigráfica, como la denominaríamos hoy en día, la cual consiste en una descripción cualitativa de los diferentes conjuntos de rocas que se encuentran proyectándose en la superficie del relieve (Acosta, 1852, p. 397).

Además, realiza observaciones de tipo glaciológico, donde identifica características de antiguos niveles glaciares a alturas inferiores a aquellas donde se encontraban los glaciares en 1850 (Acosta, 1852, p. 397-398).

Un resumen de las observaciones estratigráficas de Acosta es el siguiente, en orden desde abajo hacia arriba del recorrido ascendente hecho por aquel (Acosta, 1852, p. 397):

- Granito con venas de cobre carbonatado verde y malaquita.
- Diques de pórfido con matriz de color violeta (pórfido violeta) y con cristales pequeños de feldespato tipo albita. En algunas partes esta roca se encuentra alterada y al material resultante se le denomina argilófera (*argilophyres*).
- Granito, nuevamente, más duro y sin alteraciones.
- Rocas sieníticas y euríticas en las altas cumbres de la Sierra Nevada.

Hay que anotar que Acosta observa bloques erráticos de “pórfido petro-silíceo [*péto-siliceux*]”, los cuales lo llevan a pensar en un segundo evento de intrusión pórfidica, posterior a la del pórfido violeta arriba mencionado (Acosta, 1852, p. 398).

En general, es claro para Acosta que en la Sierra Nevada no se encuentran rocas sedimentarias antiguas, o al menos no las observó durante sus recorridos. Además,

9 Debemos mencionar aquí que Louis Striffler (ver nota 16 para mayor información sobre este personaje) conoció el Informe de Acosta en 1876 cuando realizó sus exploraciones de la Sierra Nevada. De hecho, incluye una parte de él en su texto y, además, no está de acuerdo con la observación de Acosta relacionada con la fertilidad del suelo formado a partir de la roca porfirida (o porfiroide); para Striffler dicha fertilidad tiene otras causas menos geológicas (Striffler, 2000, p. 344, 349-350).

10 En la transcripción que incluye en su texto Striffler aparecen estos términos como *porfiroide* y *argilofira*, respectivamente (Striffler, 2000, p. 344).

11 Es importante mencionar que Acosta anunciaba este texto en el Informe de 1851 sobre baldíos en Santa Marta: “Estoy además preparando un pequeño trabajo sobre la constitución física de la Sierra Tairona que espero tenga alguna publicidad en Europa y llame por lo mismo la atención de los que quieran emigrar a América” (Mantilla, 2005, p. 205).

segmenta la Sierra Nevada en dos áreas: una suroriental, donde predominan las rocas de carácter ígneo, y otra noroccidental, cerca a Santa Marta, donde predominan las rocas metamórficas (esquistos talcosos [*stéaschistes*] y gnéises).

En cuanto a las observaciones tectónicas, podemos decir que Acosta plantea dos eventos de levantamiento del relieve, asociados a intrusiones y efusiones de rocas volcánicas de tipo porfídico, el primero de los cuales sería más antiguo que el levantamiento de la cadena de los Andes. Y habría un evento de hundimiento (disminución de altura del relieve) más reciente hasta la posición actual. Es de anotar que Acosta menciona en un aparte de su texto que en las montañas que constituyen la Sierra Nevada “se pueden indicar muchas direcciones de levantamiento” (Acosta, 1852, p. 398).

En este caso podríamos pensar que las observaciones de Acosta se podrían relacionar con dos propuestas teóricas planteadas durante la primera mitad del siglo XIX en Europa, para explicar el origen de las cadenas y sistemas montañosos. En el primer caso, la idea de que los eventos de levantamiento del relieve están asociados a intrusiones y efusiones de rocas volcánicas, idea que se puede asociar a la teoría de los “cráteres de elevación”, planteada por Leopold von Buch<sup>12</sup>. En el segundo caso, la referencia a las “direcciones de levantamiento” podría corresponder al modelo orogénico planteado por Élie de Beaumont, que se apoya en la noción de la contracción secular de la Tierra, la cual ocasionaría una reducción de su radio y, por ende, un reacomodamiento de la corteza más superficial del planeta. Dicho reacomodamiento se manifestaría en plegamientos externos de la corteza que seguirían un plan geométrico bien organizado y definido para cada época orogénica global, de ahí la importancia de las “direcciones de levantamiento” (Greene, 1982, pp. 87-90).

Una evidencia más concreta de esta última relación la podemos ver en la siguiente cita extraída del texto de Acosta titulado *Lecciones de Jeología*:

“Estas diferentes manifestaciones del fuego central con sus espantosas convulsiones, han aparecido en todos los períodos, í las rocas cristalinas que se produjeron al enfriarse las masas incandescentes, aparecen a la superficie, cortándose unas a otras en el orden de su antigüedad;

í en este mismo orden se levantaron las diversas cadenas de montañas, de modo que en las mas recientes todos los diversos estratos aparecen inclinados mas o ménos de ámbos lados del eje de la montaña. En las anteriores los estratos modernos guardan su horizontalidad, como depositados posteriormente al levantamiento, mientras que las capas mas antiguas se levantaron, í así sucesivamente en las demas; í de este modo, hace ménos de veinte años, Mr. Elie de Beaumont descubrió la edad relativa de las cordilleras que existen en Europa, con cálculo tan certero que obtuvo desde luego el asentimiento de los jeólogos de todas las naciones” (Acosta, 1850, p. 14).

Cerrando esta sección relacionada con Acosta podemos ver entonces que se presenta una clara relación conceptual y teórica entre la somera interpretación orogénica propuesta por él y el modelo de Élie de Beaumont para explicar el origen y la geometría de las cadenas montañosas en todo el planeta.

#### **Jorge Isaacs: Secretario de la Comisión Científica Permanente en el Estado Soberano del Magdalena**

Jorge Isaacs es una figura de renombre en la literatura colombiana, y no sólo por la fama de su novela *María*, pues recientemente se han realizado estudios monográficos que pretenden comprender la amplitud de su producción escrita sacándola de la camisa de fuerza que la tradición le ha impuesto como representante del romanticismo colombiano (Henao Restrepo, 2007).

En otros campos del conocimiento, en la historia social de las ciencias, se ha intentado resituar y comprender mejor la famosa polémica entre Isaacs y Miguel Antonio Caro en el marco de una historia de la apropiación del pensamiento de Darwin en Colombia (Restrepo & Becerra, 1995, pp. 552-553), lo que nos muestra la simpleza del encasillamiento al que ha sido sometido este personaje, dado que solo se le ha dado importancia por su papel en la historia de la literatura en Colombia. Por nuestra parte, el interés de este escrito es ilustrar una faceta menos conocida de Isaacs: sus observaciones geológicas y tectónicas, que debemos situar en el amplio abanico de sus preocupaciones intelectuales.

En su trabajo titulado *Las Tribus Indígenas del Magdalena* Jorge Isaacs describe inicialmente aspectos demográficos y de geografía política acerca del Estado Soberano

<sup>12</sup> El modelo orogénico denominado cráteres de elevación consiste en la idea de que la fuerza que hace emerger y levantarse a las cadenas montañosas proviene de la presión de grandes reservorios de material fundido en profundidad que se mueven hacia la superficie, y en este recorrido ocasionan el levantamiento axial de las cordilleras montañosas. Dicho levantamiento sería de carácter catastrófico, en el sentido de que se realizaría en un intervalo de tiempo relativamente corto. El resultado de este fenómeno se manifestaría en grandes masas de rocas plutónicas intrusivas bajo los ejes de los sistemas montañosos (Greene, 1982, pp. 83-84).

del Magdalena, como en ese entonces se denominaba a cierta parte del actual territorio del Norte de Colombia; indica y comenta además los trabajos anteriores sobre la región, pero no menciona el texto de Acosta analizado en este trabajo (aunque sí menciona el mapa geográfico de la Nueva Granada elaborado por Acosta en 1847 en París; **Isaacs**, 1967, p.32). Realiza una breve discusión sobre la continuidad fisiográfica de la Cordillera Oriental de los Andes colombianos en la región de La Guajira, basándose en las apreciaciones de investigadores anteriores y en sus propias observaciones de campo. En este punto quisiéramos indicar que Isaacs estuvo en la región del Magdalena entre octubre de 1881 y septiembre de 1882 como Secretario de la denominada Comisión Científica Permanente, creada por la administración de Rafael Núñez, entre otras cosas, con la intención de evaluar las posibilidades comerciales y prácticas de las muestras mineralógicas, botánicas, zoológicas, arqueológicas que dicha comisión debía recolectar y clasificar (**Obregón**, 1992, pp. 55-56; **Duque Gómez**, 1990, p. 413).

Isaacs retoma uno de los trabajos de Felipe Pérez<sup>13</sup> para indicar algunas observaciones en cuanto al origen y posterior evolución del macizo rocoso y montañoso de la Sierra Nevada de Santa Marta. Este último autor, según cita Isaacs en su texto, dijo lo siguiente<sup>14</sup>:

“<<Basta echar una mirada sobre el mapa del Estado del Magdalena para comprender que dicha sierra [Nevada de Santa Marta] no es una continuación de la gran Cordillera Oriental como se ha creído hasta aquí, sino que forma un sistema distinto. ¿Es ella un gran nudo aislado, o formaba parte de la continuación de los Andes al través de lo que son ahora las Antillas, y que en remoto tiempo era la prolongación del continente hasta su unión con la isla de Cuba y las penínsulas de Yucatán y Florida? No lo sabemos, pero sí es ésta nuestra opinión apoyada en la infinidad de islas que constituyen los archipiélagos de las grandes y pequeñas Antillas, acaso viejas y paralelas costas del mar Pacífico en tiempos antiquísimos. Esa porción de tierra sería entonces la verdadera América Central, y contribuiría a *regularizar* (?) la forma del Nuevo Mundo, tan desgastada hoy hacia el istmo de Panamá. Los puntos de rotura debieron ser pues la isla de Trinidad y lo que hoy forma el grupo de las Lucayas [Bahamas]>>”. (**Isaacs**, 1967, pp. 41-42; el signo

de interrogación y las cursivas del término “regularizar” fueron agregados por Isaacs, pues no aparecen en el texto original de **Pérez**, 1863, p. 561.)

Lo planteado por Pérez, según lo cita Isaacs, es un modelo tectónico para el origen de la Sierra Nevada, pero también para el actual mar Caribe y sus islas de borde, dentro de una concepción verticalista de los movimientos de la corteza terrestre.

Por otra parte, Isaacs menciona en una nota a pie de página una supuesta “teoría de Boussingault” relacionada con el hecho de que “la altitud de la Sierra Nevada ha ido disminuyendo después del movimiento plutónico que la hizo llegar a mayor elevación que todas las cumbres colombianas” (**Isaacs**, 1967, p. 42, nota 10). Se refiere a Jean-Baptiste Boussingault, el ingeniero francés que estuvo en la joven República de Colombia durante los años 1823 a 1832 aproximadamente (**Espinosa**, 1991). En este caso, la idea de un movimiento plutónico que levanta las cadenas montañosas o sistemas orográficos también podría ser, como en el caso de Acosta, prestada del modelo de Leopold von Buch que mencionamos atrás.

Pero lo mejor del asunto viene cuando el propio Isaacs, retomando la propuesta de Pérez y Boussingault, plantea su propio modelo geotectónico para explicar el origen de la Sierra Nevada en el contexto del origen del mar Caribe y de la dinámica tectónica de las cordilleras andinas en Colombia. A continuación, trataremos de resumir su modelo, teniendo como referencia la siguiente cita:

“Hé aquí lo probable. El estudio de aquel apiñamiento colosal de montes, independientes de las cordilleras andinas y como aislados por su grandeza, indica que de sus flancos y escarpas septentrionales desgajó un cataclismo ramas, enormes seguramente, que destrozadas se hundieron en el Océano, y fragmentos de ellas son, visibles aún, las islas que bordan el mar Caribe. Tal vez por efectos de la misma acción plutónica se elevó entonces la Sierra Nevada a la altitud que hoy tiene, y se levantaron a trechos las costas adyacentes hasta la desembocadura del Sinú, o poco menos. Y se vé: el Atlántico las cubrió en lejanas edades, y ahora deprimidas de nuevo y desgastándose, pretende otra vez arroparlas.” (**Isaacs**, 1967, pp. 70-71)

13 Felipe Pérez Manosalba (1836-1891) fue un “[p]olítico, escritor, periodista y geógrafo boyacense”. Abogado del Colegio del Rosario y miembro del partido liberal, específicamente del grupo de los radicales. Su hermano Santiago fue presidente durante el período 1874-1876. Fue el director de la compilación de los trabajos inacabados de la Comisión Corográfica, que se llevó a cabo a partir de 1861 por orden del gobierno nacional. Uno de los resultados principales de esta compilación fue la obra *Jeografía Física i Política de los Estados Unidos de Colombia*, en dos tomos, publicados en 1862 y 1863. (**Vásquez**, 2004.)

14 **Pérez**, 1863, Sección titulada: “Jeografía Física i Política del Estado del Magdalena”, PARTE FÍSICA, V. Montañas, p. 561.

En esta cita Isaacs retoma la propuesta de Felipe Pérez, que aparece atrás citada por él mismo, y desarrolla su interpretación del origen de la Sierra Nevada en el contexto del origen del mar Caribe y las islas que lo bordean, desde el punto de vista tectónico.

Primero que todo, Isaacs intenta argumentar que el recorrido actual del río Magdalena no era el que tuvo en tiempos antiquísimos; se propone demostrar que el río Magdalena corría anteriormente por donde ahora corren el río Cesar y el río Ranchería y, más específicamente, propone que la hoya hidrográfica de estos dos ríos fue formada por el cauce del antiguo río Magdalena, que desembocaba cerca a la actual ciudad de Riohacha. La evidencia de esto estaría hoy presente en el paralelismo casi completo que tienen los ríos Magdalena, Ariguani y Garupal; estos dos últimos descienden de la parte suroccidental y suroriental más extremas de la Sierra Nevada de Santa Marta (Isaacs, 1967 p. 71).

Luego, el autor propone que en esos remotos tiempos la Cordillera Central de los Andes colombianos tenía continuidad hacia el suroeste de la Sierra Nevada: sus ramales más septentrionales se confundían con los ramales más meridionales de ésta última; de hecho, continúa el autor, los denominados cerros de Chimichagua al norte de la Ciénaga de Zapatosa serían un remanente de la continuidad original de la Cordillera Central con la Sierra Nevada.

El escenario tectónico para explicar el cambio en el curso del río Magdalena involucra una interpretación del origen de los relieves montañosos de la Sierra Nevada y de la Cordillera Central: en tiempos remotos no existiría la Sierra Nevada tal y como se encuentra hoy en día, sino que sus relieves formarían parte de la continuación septentrional de la Cordillera Central, que a su vez, continuaría como parte del relieve continental que se extendería hacia la península de Yucatán y hacia la península de La Florida. Esto estaría relacionado con lo mencionado por Pérez más atrás, donde dice que el continente suramericano habría tenido continuidad hasta el área conformada actualmente por la península de Yucatán, la península de La Florida, la isla de Cuba y las demás Antillas Mayores, y las Antillas Menores con la isla de Trinidad como punto final. No es claro si Pérez o Isaacs pensaban que en esos tiempos remotos hubiese existido el Golfo de México o si también esa área habría sido ocupada por el relieve continental suramericano.

Todo, lo que actualmente es mar, habría sido tierra firme continental. Ahora bien, al parecer la cadena montañosa andina habría existido en su ubicación actual, pero siguiendo la hipótesis de Isaacs, en la parte que actual-

mente corresponde al Departamento del Magdalena (parte del antiguo Estado Soberano del Magdalena) se habría presentado una truncación de la Cordillera Central Andina debida al movimiento plutónico del que hablaba en la cita que hicimos de su texto, que habría desgajado los ramales antiguos de la cordillera andina que corrían hacia Yucatán y La Florida. Los remanentes actuales de esos antiguos ramales desprendidos serían las islas Antillas actuales. Pero durante dicho movimiento plutónico (también llamado cataclismo por Isaacs) se habría levantado la Sierra Nevada hasta su altura actual. Esto llevó a que el antiguo curso del río Magdalena fuera reorientado, pues la zona donde antes desembocaba se encontraba ahora más elevada, por lo que el río se represó en el área de la actual Ciénaga de Zapatosa. Simultáneo a este fenómeno, Isaacs indica que la Sierra Nevada llegó a estar tan alta que se crearon las acumulaciones de nieve que dieron origen a algunos ríos importantes de la zona, algunos de los cuales fueron a desembocar al norte, hacia el mar Caribe, pero otros más, en el sector meridional, fueron a desembocar al río Magdalena, represado en la Ciénaga de Zapatosa. (Se trata de los ríos Cesar, Badillo y Guatapurí.) Dichos ríos aprovecharon el antiguo y amplio lecho del río Magdalena para seguir su curso. Según Isaacs, una evidencia que demuestra esto es el hecho de que el río Cesar tiene un curso “perezoso e indeciso [...] pequeño e insuficiente para la hoya que recorre” (Isaacs, 1967, p. 71-72; cita en la p. 72).

Es importante anotar aquí que, aunque Isaacs no lo haga explícito en su texto, al parecer la continuidad original entre la Sierra Nevada y la Cordillera Central se habría visto interrumpida por la acción del río Magdalena, que estaba además represado en el sector de la actual Laguna de Zapatosa. No es claro si este proceso habría sido una erosión lenta y gradual de un segmento de cordillera montañosa, que habría dado origen al actual cauce del río Magdalena en su sector más septentrional, o si por el contrario habría sido un evento súbito de apertura del valle inferior del mismo río.

Resumiendo algunos aspectos de lo anteriormente expuesto podemos decir que Isaacs explica el aislamiento de los sectores suroeste y norte de la Sierra Nevada de Santa Marta: el aislamiento del suroeste se debería al cambio en el curso del río Magdalena, como lo mencionamos en el último párrafo; el aislamiento del norte se explicaría debido al movimiento plutónico y cataclísmico que habría desgajado los ramales cordilleranos originales que se extendían hacia el norte, como lo mencionamos más arriba.

Después de presentar su hipótesis, Isaacs prosigue citando a otros autores para sustentar sus puntos de vista, entre

los cuales menciona a Élisée Reclus<sup>15</sup> y a la pareja conformada por una persona de apellido Truchon y por Louis Striffler<sup>16</sup>.

En el caso de Reclus, este autor plantea la posibilidad de que en tiempos remotos la zona de los alrededores del nacimiento y curso superior del río Ranchería hubiese sido un gran lago formado por las aguas represadas del actual río Magdalena. Para esto menciona la existencia de ciertos depósitos y formas del paisaje que comprobarían sus afirmaciones (Isaacs, 1967, pp. 73-74).

En el caso de Truchon y Striffler, estos autores indicarían que la Sierra Nevada habría sido una “<<sublevación [sic] aislada que parece haberse interpuesto para impedir al Magdalena la salida por Riohacha>>” (cursiva en la cita que hace Isaacs, 1967, p. 74).

Llegados a este punto queremos resaltar una idea que nos surge con la lectura de las citas de Isaacs y con el resumen de sus observaciones: hasta este momento el autor invoca un fenómeno cataclísmico como factor ordenador de las formas del relieve actual y aún más, de las características hidrográficas de la zona. Este énfasis en el carácter cataclísmico del fenómeno que da origen a la Sierra Nevada se ve reforzado cuando, a continuación, Isaacs cita a Reclus y a José Carlos Manó para contrastar sus posturas frente a la suya propia.

José Carlos Manó<sup>17</sup>, fue el director de la Comisión Científica Permanente de la cual era Secretario Isaacs, y de quien éste tiene muy mala imagen y a quien critica en varios apartes del texto<sup>18</sup>. Para reforzar su visión cataclísmica Isaacs cita a Manó como un ejemplo de una visión más gradualista. Nos parece tan importante este punto que nos permitiremos citar íntegramente el texto de Manó que Isaacs incluye en su obra. El texto es el siguiente:

“<<Aunque haya tenido la fortuna de conseguir casi por completo mi principal intento, me ha visto, sin embargo, invenciblemente distraído desde mis primeros pasos por una de esas cuestiones *de ciencia pura*, de las cuales quería precisamente huir para el mejor desempeño del cometido que me fue confiado a la vez por el Congreso y el Gobierno de la Nación.

*Me refiero a la pasmosa tranquilidad con que se han verificado en esta parte septentrional de los Andes, toda la serie de los fenómenos geológicos que tan profundamente trastornaron la corteza terrestre en casi todos los demás puntos del orbe conocido.*

Aquí, las diferentes épocas geológicas que los geognostas caracterizan bajo los nombres de penéana, triásica, jurásica y cretácea, *no forman, se puede decir, sino un solo y único período, a pesar de la inmensidad de los tiempos que debieron transcurrir durante la lenta formación de sus potentísimas estratificaciones; y no constituye asimismo sino un solo piso perfectamente concordante, toda la serie de los terrenos o capas sedimentarias*, desde los calcáreos conchillares del “lías”, que presentan en los fósiles que forman inseparable cuerpo con la masa de dichos calcáreos, la tan característica quebradura espática y brillante, hasta las tobos postjurásicas>>”. (Cursivas en la cita tal cual la realiza Isaacs, 1967, p. 74-75)

Las cursivas que Isaacs resalta en este texto de Manó nos parece que evidencian su preocupación por enfatizar la visión gradualista de este último. Pero habría que aclarar que el mismo Manó indica que en otras partes del globo las épocas geológicas a las que corresponderían las unidades estratigráficas descritas sí fueron producto de

15 Élisée Reclus (1830-1905) fue un importante geógrafo francés, quien dejó tras de sí una abultada obra de “más de 30000 páginas”, y cuyos títulos más importantes son: *La Terre* (1868-1869, en 2 volúmenes), *Nouvelle Géographie Universelle* (1876-1894, en 19 volúmenes) y *L'Homme et la Terre* (1906, en 9 volúmenes). Estuvo en la costa caribe colombiana entre 1855 y 1857, específicamente en Riohacha y sus alrededores. Tuvo el proyecto de fundar una colonia agrícola en la Sierra Nevada de Santa Marta (Ramírez, 2006, p. 12, 6, 16-17). Existe un excelente sitio web con información sobre Reclus y la geografía de Colombia, el cual es administrado por David Ramírez, la misma persona que acabamos de citar, quien es historiador y estudiante de Maestría en Geografía Humana en la Universidad de São Paulo, en Brasil (<http://reclus.wordpress.com/>).

16 Louis Striffler (1815-1891) fue un ingeniero francés que estuvo durante casi cincuenta años en el Caribe colombiano, al cual llegó contratado por una compañía europea para realizar prospecciones mineras. Probablemente la persona de apellido Truchon (en francés: Troughon) corresponda a Amédée Trouchon, el mayor de los hermanos con quienes Striffler, junto a otros personajes, realizó un viaje a la Sierra Nevada de Santa Marta en 1876 (Striffler, 2000; la información aparece en el Prólogo, escrito por Rodolfo Segovia Salas, pp. 11-14). La cita de la obra de Truchon y Striffler, tal cual aparece en el texto de Isaacs, es: “Exploración minera practicada en el Estado del Magdalena. Corto folleto impreso en castellano – 1876” (Isaacs, 1967, p. 74, Nota 36).

17 José Carlos Manó fue nombrado por el Congreso de los Estados Unidos de Colombia en 1881 como Director de la mencionada Comisión (Obregón, 1992, pp.55-56). Al parecer, Manó estuvo posteriormente en Guatemala realizando trabajos de exploración minera en el Departamento de Huehuetenango, pues hay indicios de un Informe presentado por él al Gobierno de la República de Guatemala en 1883 (Hemmerling, 1984, p. 5).

18 La recepción del Informe de Manó sobre su labor como Director de la Comisión Científica Permanente no fue del todo positiva; al menos en ciertos círculos científicos de la Colombia decimonónica (Obregón, 1992, p. 56.)

fenómenos de gran trastorno de la corteza terrestre. Es decir, se trataría de un gradualismo muy localmente aplicado. Pero nos surge una inquietud, y es la siguiente: ¿por qué habla Manó de “un solo piso perfectamente concordante, toda la serie de terrenos o capas sedimentarias”, cuando Acosta se preocupaba en su texto antes analizado de la casi total ausencia de rocas sedimentarias antiguas? Podría ser que Acosta no las observara o que Manó especulara acerca de su presencia. No tenemos certeza en este punto.

Siguiendo con nuestro análisis, debemos transcribir a continuación la cita de Reclus que Isaacs realiza para contrastar su visión cataclísmica con la visión gradualista del primero:

“<<...no se puede dudar de que en otro tiempo un anchuroso lago se extendió entre la Sierra Nevada y el nudo de los Andes llamado Sierra Negra [Serranía de Perijá]. Quizá el río Magdalena atravesaba entonces este lago de agua dulce, tomando el lecho actual del Ranchería; paulatinamente, el levantamiento gradual de la Sierra Nevada derramaría el lago en el mar, rechazando el Magdalena más al Oeste, hacia el golfo que se extendía entre Cartagena y Santa Marta, y que después ha sido colmado por los aluviones del río.>>”. (Isaacs, 1967, pp. 73-74. Cursivas nuestras.)

Aunque en este texto Isaacs no resalta con cursivas los apartes gradualistas de Reclus, nosotros sí quisimos hacerlo para ilustrar dicha postura. Además, no es claro en las citas de Reclus si éste pensaba que la Cordillera Central era continua con la Sierra Nevada de Santa Marta, por lo que este punto queda abierto a futuras indagaciones.

Finalmente, como contraste, esto es lo que nos dice Isaacs al respecto del levantamiento de la Sierra Nevada de Santa Marta:

“...es tangible, por los asomos de poderosas eyecciones ígneas en las bases meridionales de la Sierra y en sus declivos a ese lado y al Occidente, que no fue gradual el levantamiento de las montañas, sino efecto de un cataclismo trastornador de los sistemas orográfico e hidrográfico de aquellas regiones, y que probablemente modificó la forma que en edad remotísima tuvo la América”. (Isaacs, 1967, p. 78, nuestras cursivas.)

En síntesis, es claro que Isaacs quiere enfatizar su visión cataclísmica del origen del levantamiento de la Sierra Nevada, frente a las visiones más gradualistas de Reclus y

Manó. No nos queda sino contextualizar esto en el marco de la famosa polémica entre catastrofistas y uniformitaristas que se llevó a cabo durante gran parte del siglo XIX y que marcó además las diferentes formas de comprender el origen de las cadenas montañosas del planeta. Podríamos asociar la visión cataclísmica de Isaacs con la postura catastrofista, y la visión gradualista de Reclus y Manó con la visión uniformitarista, aunque siempre con un alto grado de incertidumbre histórica (Greene, 1982, pp. 72-76).

Ahora bien, hasta aquí quedaría claro, aparentemente, que Isaacs plantea una visión catastrofista de los fenómenos geológicos asociados al levantamiento orogénico de la Sierra Nevada de Santa Marta. Pero en cuanto a sus observaciones de las evidencias de los cambios en el nivel del mar sufridos en la línea costera del Caribe colombiano, su posición no es tan catastrofista, aparentemente. Veamos a continuación por qué afirmamos esto.

Isaacs comienza su análisis citando al cronista Juan de Castellanos<sup>19</sup>, pero antes de esto justifica el valor histórico y geográfico de los cronistas, pues son en muchos casos fuentes fidedignas, como lo podemos ver en la siguiente afirmación: “Aquellos poetas cronistas fueron minuciosos y veraces casi siempre, y de aquí que sea imprescindible leerlos y comentarlos al escribir la historia de tales países” (Isaacs, 1967, p. 72-73). Sabemos que Castellanos no era un geólogo en el sentido moderno del término, pero sus observaciones sí se enmarcaban en la idea de que las líneas costeras han cambiado y mutado en el tiempo. Veamos la cita y la comentaremos después:

“<<Hay campo por allí muy extendido,  
Ya poblado de vacas y de yeguas,  
Cuyo compás se ve que mar ha sido  
Por espacio de dos y aun de tres leguas,  
E ya de tal manera retraído  
Que tiene para siempre hechas treguas,  
Dejando gran espacio descubierto  
Desde donde residen, que es el puerto.

Y así por las cabañas y el aprisco  
Do pastan los ganados destas gentes  
Se ven muchas horruras, mucho cisco,  
De marinas menguantes y crecientes,  
Y aquí y allí montones de marisco,  
Con otras muestras claras y patentes  
Por do conocerá quien puede vello  
Ser mar antiguamente todo ello>>”.

(Las cursivas las agregó Isaacs, 1967, páginas 76-77.)

<sup>19</sup> Juan de Castellanos (1522-1606) fue un cronista español que narra los hechos de la Conquista en su más famosa obra *Elegías de Varones Ilustres de Indias*, publicada a finales del siglo XVI. Además fue un soldado, un minero y un clérigo que vivió durante largas temporadas en el Nuevo Mundo, en el sector que corresponde actualmente a Colombia (Ceballos, 2004).

En este punto, Isaacs se introduce en el terreno del análisis de los cambios en la línea de costa en el tiempo, tomando como referencia el caso de la ciudad de Riohacha; a esta ciudad se refiere la descripción que aparece en la cita de Castellanos anterior (más o menos describiendo una situación en la mitad del siglo XVI). A continuación, Isaacs cita a otro escritor del período colonial, José Nicolás de la Rosa, esta vez del siglo XVIII, quien evidenciaría que el mar ha entrado de nuevo a las calles de Riohacha. Isaacs indicaría entonces dos entradas recientes del mar hacia el continente. Finalmente vuelve a citar a Reclus, para sustentar las variaciones del nivel del mar en los alrededores de Riohacha (Isaacs, 1967, pp. 77-78).

En la parte final, Isaacs se dedica a mostrar las evidencias de los cambios en el nivel del mar que han ocurrido en la costa que se extiende desde Riohacha hasta Cartagena, al menos. Específicamente se dedica a mostrar los cambios asociados a la inmersión que ha sufrido la línea de costa desde el año de 1843 hasta el año de 1881, que es cuando Isaacs describe los fenómenos mencionados (Isaacs, 1967, p. 78, 79).

Podríamos enumerar algunas de las evidencias a continuación:

- Una primera entrada y salida del mar estaría indicada por la siguiente observación: “Ocioso, es decir, que hasta en la extremidad interior de aquel golfo [de la bahía de Santa Marta] deben encontrarse a flor de tierra casi, restos de moluscos, políperos y peces, en terreno marino; todo lo cual demuestra que el desagüe del golfo tuvo lugar en una época relativamente cercana al año de 1526 [fecha de fundación de la ciudad de Santa Marta]” (Isaacs, 1967, p. 79).
- En el intervalo de tiempo transcurrido entre finales del siglo XVIII y el año de 1843 la línea de costa se hallaba más desplazada hacia el occidente, puesto que todavía un fuerte como el de Santa Bárbara, en la ciudad de Santa Marta, tenía espacio de playa entre sus bastiones fronterizos y el mar. En el año de 1881 “baten las olas los muros derruidos del fuerte, y las marejadas de leva han corrido ya por las calles de la ciudad” (Isaacs, 1967, p. 79).
- En la zona al sur de Santa Marta, en dirección a la ciudad de [San Juan de la] Ciénaga, también se evidencia esta entrada del mar hacia el continente. Un hecho lo ilustra bien: “...en los barrancos de Dorsino, socavados y carcomidos también, los oleajes derrumbaban momias o esqueletos de indígenas que seguramente fueron sepultados en cementerios distantes de

las antiguas playas” (Isaacs, 1967, p. 79). A esto podríamos agregar el hecho de que Isaacs calcula la erosión marina en este sector (Santa Marta-Ciénaga) en un valor de una milla durante cuatro o cinco décadas de duración del proceso. Finalmente, en Pueblo Viejo, la antigua iglesia se hallaba en 1881 a cuarenta metros de la costa, en el mar (Isaacs, 1967, p. 80).

- En el sector entre Barranquilla y Cartagena Isaacs sigue mostrando evidencias de los movimientos alternantes de emersión e inmersión de los terrenos continentales en relación al mar. Unos ejemplos son los siguientes: primero cita a Humboldt, quien habría indicado que la población de Turbaco estaría ubicada sobre “<<...una colina...Límpidas fuentes corren en distintas direcciones, naciendo de una roca caliza que contiene algunos restos de corales petrificados>>”. (Cursivas de Isaacs, 1967, p. 80.) Después indica Isaacs que muy cerca de este lugar, en la misma ciudad de Cartagena y sus alrededores, habría evidencias de la entrada del mar, cuyos resultados serían erosión de playas, el cubrimiento de antiguas riberas de ríos, destrucción de establecimientos humanos (casas de habitación y pozos de agua), zonas de cultivo, todo lo cual se habría tomado unos treinta años. Por otro lado, en Barranquilla Isaacs habría observado en el cementerio de la población, que estaría ubicado en el lugar más alto, “esparcidas las madreporas que los cavadores de sepulturas hallan a dos pies de profundidad o poco menos”. Y, finalmente, en la población de Malambo habría también “subsuelo marino”. Isaacs menciona que este mismo fenómeno se podría evidenciar al sur de Cartagena (Isaacs, 1967, p. 80-81).

Ahora bien, al cerrar esta presentación de evidencias del cambio en el nivel del mar Isaacs presenta dos interpretaciones sobre las causas de estos cambios. La primera se relaciona con el fenómeno cataclísmico que levantó la Sierra Nevada de Santa Marta y su posterior reacomodamiento hacia abajo; es decir, descenso de la altitud máxima que habría alcanzado la Sierra en el clímax del movimiento tectónico de levantamiento. Durante este descenso el mar estaría reacomodándose a su nivel pretérito al cataclismo mencionado, por lo que estaría reentrado al continente. La segunda interpretación aduce el “crecimiento progresivo de montañas submarinas en el mar Caribe, o fenómenos del mismo orden”, los cuales serían los causantes del aumento relativo del nivel del mar. No nos queda clara esta última interpretación, que el autor no desarrolla posteriormente. Como tampoco es claro si para Isaacs este fenómeno de los cambios en el nivel del mar se produce de manera súbita o gradual, o en otras palabras, si

plantea una visión catastrofista o uniformitarista en este asunto (**Isaacs**, 1967, p. 81).

Es de anotar que Isaacs muestra una preocupación que hoy en día podríamos denominar conservacionista, en el sentido de la necesaria protección de las poblaciones costeras dada la evidencia de la continua inmersión marina que se lleva a cabo durante las últimas décadas antes de 1881. Sus predicciones se centran en lo que les ocurrirá a Riohacha, Santa Marta, Ciénaga y Cartagena (**Isaacs**, 1967, pp. 81-82). Al final presenta un panorama bastante sombrío: “Sin embargo, es muy posible que en el transcurso de ochenta o cien años, apenas queden vestigios de estas poblaciones [Santa Marta y Riohacha], y que las naves de alto bordo suelten sus anclas en el sitio donde hoy se halla la ciudad que fundó Rodrigo de Bastidas”. (**Isaacs**, 1967, p. 82.)

Para concluir este aparte referido al texto de Isaacs quisiéramos retomar algunas indicaciones acerca de su competencia científica, especialmente en lo que atañe a las geociencias, basándonos en las afirmaciones que algunos investigadores de este personaje han hecho en artículos y textos diversos.

En un texto donde se relacionan la literatura y la etnología en la obra de Isaacs, José Eduardo Rueda Enciso nos muestra que este personaje tuvo una notable preocupación por las explotaciones mineras, especialmente luego de su viaje al Magdalena. Específicamente, Isaacs se preocupó por la potencial explotación de carbón en los alrededores de Aracataca, lo cual lo llevó a escribir un informe al respecto (*Hulleras de la República de Colombia en la Costa Atlántica*, 1890) y a solicitar una concesión de exploración y explotación bastante amplia, que no sólo incluía carbón, sino también petróleo. Dicha concesión abarcaba varias áreas que incluían puntos ubicados en el territorio que se extiende desde la Sierra Nevada de Santa Marta hasta el golfo de Urabá. También indica este autor que Isaacs realizó un segundo viaje al Magdalena y a la Guajira en el año de 1886. Adicionalmente, nuestro personaje vivió en Ibagué y exploró y explotó en sus alrededores algunos depósitos de oro (**Rueda Enciso**, 2007, p. 352). Antes de terminar esta relación quisiéramos anotar que, en contra de lo que se indica en muchas fuentes bibliográficas relacionadas con la vida de Jorge Isaacs, como en el artículo de Rueda Enciso citado, no fue él quien descubrió las minas de El Cerrejón (**Rueda Enciso**, 2007, pp. 354-355). Al menos esto es lo que analiza pormenorizadamente René de la Pedraja Tomán, con apoyo en fuentes impresas del siglo XIX, quien afirma que fue John May la persona que primero exploró e informó detalladamente de estos depósitos al gobierno nacional, entre los años de 1864 y 1865 (**de**

**la Pedraja**, 1981, pp. 353-358). Es interesante anotar que Isaacs critica duramente a May cuando se refiere al uso que de su Informe hacen varios geógrafos, como Felipe Pérez (**Isaacs**, 1967, p. 40). El informe de May al que hace alusión Isaacs fue enviado al “comité de tenedores de deuda colombiana” (**Pérez**, 1863, p.563); es probable que este Comité sea el mismo “<<Comité de tenedores de bonos hispanoamericanos>>” o la “<<Junta jeneral de tenedores de bonos de la Nueva Granada>>”, quienes firmaron un Convenio con el gobierno de la entonces denominada Confederación Granadina en noviembre de 1860 para la renegociación de la deuda externa del país. Uno de los puntos incluidos en la negociación implicaba la cesión de terrenos baldíos en Colombia a los tenedores de deuda europeos (**Junguito**, 1995, p. 109). Quién sabe si esto fue lo que motivó la elaboración del Informe referido por parte de John May.

En un artículo que trata sobre la vida política y empresarial de Isaacs, Alfonso Valencia Llano nos dice que este personaje habría descubierto minas de carbón de piedra en las montañas de Sumapaz en 1885; en el viaje a La Guajira de 1886 que mencionamos arriba, habría descubierto minas de fosfato de cal; y en el viaje a Urabá de 1887 habría descubierto “bancos de hulla, abundantes fuentes de petróleo y algunos depósitos de fosfato de cal” (**Valencia Llano**, 2007, p. 196).

Finalmente, quisiéramos terminar con los indicios que nos deja entrever un texto poco mencionado de Isaacs que se titula “Datos curiosos sobre volcanes”, escrito en julio de 1870. En este breve texto Isaacs retoma a otro cronista, Pedro Cieza de León, para indicar las apreciaciones sobre volcanes que éste hace, referidas, según Isaacs, al Nevado del Ruiz, y a otros dos volcanes: uno al sur de Colombia y el otro en el Ecuador. Pero lo interesante es que Isaacs agrega a estas descripciones la suya propia: se refiere a la existencia del cráter apagado de un volcán en la vía que de Cali conducía a Buenaventura, en esa época (**Cristina**, 2008, p. 73).

## Conclusiones

Podemos resumir, a grandes rasgos, los aportes más importantes de nuestros personajes intentando a su vez contrastarlos con algunas observaciones modernas acerca de la tectónica y de la historia geológica de la Sierra Nevada de Santa Marta. Por un lado, actualmente se acepta la continuidad entre la Sierra Nevada y las cordilleras andinas, al menos hasta hace unos 50 millones de años. Posteriormente se habría presentado una separación y traslación del núcleo de unidades litológicas que la constituyen hasta llevarlas a su posición actual. Esto aunado con

el proceso de levantamiento topográfico del macizo montañoso, durante el resto del Cenozoico (desde hace 50 millones de años).

Isaacs plantea la continuidad ancestral de la Sierra Nevada con la Cordillera Central de los Andes colombianos, tal cual lo hace Felipe Pérez, como vimos en la sección respectiva. Por otro lado, Acosta plantea un origen distinto para la Sierra Nevada y para la cadena de los Andes; de hecho, indica que la Sierra Nevada se levantó primero que la cadena de los Andes (Acosta, 1852, p. 397). No es claro entonces si piensa que había una continuidad pretérita entre la Sierra y la cadena andina.

Con las apreciaciones y observaciones precedentes queríamos simplemente resaltar a dos personajes que, a pesar de ser bien conocidos en otras áreas de la historia, no lo son tanto en relación con la historia de las geociencias en Colombia. Esto abriría la posibilidad de indagaciones históricas más amplias que busquen relacionar las actividades que las personalidades del siglo XIX colombiano desarrollaron en distintos campos del conocimiento, pues es claro que no podemos hablar aún de profesionales especializados en una ciencia en particular. A pesar de lo anterior, nuestros dos personajes pudieron plantear y esbozar novedosos e interesantes modelos geológicos y tectónicos, obviamente circunscritos a un ámbito teórico y conceptual muy diferente al actual.

Desde una perspectiva moderna de análisis tectónico, dos aspectos de la obra y del proceso de integración de la información realizado por estos y otros grandes naturalistas y curiosos de nuestra historia, tienen gran relevancia y vigencia para cualquier aproximación moderna a la comprensión de la Sierra Nevada de Santa Marta y la cadenas de montañas en general: en primer lugar, ambos autores, si bien se apropian de la tendencia conceptual de la época, integran observaciones geológicas de carácter objetivo, como lo son el análisis de las características litológicas y mineralógicas en campo, en particular el papel importante que juega la gran abundancia de rocas de origen magmático para la estructuración de su modelo geológico. De otro lado, el análisis moderno de cadenas de montañas u otros accidentes tectónicos ha vuelto a señalar la importancia de las peculiaridades que clásicamente se estudiaban en el ámbito de la geografía o de la geomorfología, como lo son los elementos fisiográficos o climáticos (en el caso de Acosta e Isaacs se resalta el valor que tiene la configuración de la topografía y los sistemas de drenajes para hacerse y responder preguntas sobre el origen de la Sierra y la cambiante dinámica de los grandes ríos del Norte de Colombia) (Burbank & Anderson, 2001).

## Bibliografía

- Acosta, J. 1850. Lecciones de Jeología, Bogotá: Imprenta del Neogranadino, por León Echeverría. 29 p.
- \_\_\_\_\_. 1852. "Lettre à M. Élie de Beaumont, relative à la géologie de la Nouvelle Grenade (Sierra Tairona)", Bulletin Société Géologique de France (París), 2<sup>a</sup> serie, Tomo IX:396-399.
- Acosta de Samper, S. 1901. Biografía del General Joaquín Acosta. Prócer de la Independencia, historiador, geógrafo, hombre científico y filántropo, Bogotá: Librería Colombiana (Camacho Roldán & Tamayo).
- Bayona, G., Jiménez, G., Silva, C., Cardona, A., Montes, C., Roncancio, J., Cordani, U. 2010. Paleomagnetic data and K–Ar ages from Mesozoic units of the Santa Marta massif: A preliminary interpretation for block rotation and translations. *Journal of South American Earth Sciences*, 29(4):817-831.
- Burbank, D. W. & R. Anderson. 2001. *Tectonic geomorphology*, Blackwell Science, Inc, 274p.
- Cardona, A., Valencia, V., Weber, M., Duque, J., Montes, C., Reiners, P., Domanik, K., Nicolescu, S., Villagomez, D. (En revisión). Transient Cenozoic tectonic stages in the southern margin of the Caribbean plate: U-Th/He Thermochronological constrains from Paleogene plutonic rocks in the Santa Marta Massif and Jarara Serranía, Colombia. *Geologica Acta*.
- Case, J. E., MacDonald, W. D. 1973. Regional Gravity Anomalies and Crustal Structure in Northern Colombia, *Geological Society of America Bulletin*, 84(9):2905-2916.
- Ceballos Gómez, D. L. 2004. Juan de Castellanos <http://www.lablaa.org/blaavirtual/biografias/castjuan.htm> (consultado el 29 de junio de 2010).
- Cerón-Abril, J. 2008. Crustal structure of the Colombian Caribbean basin and margins. PhD thesis, University of South Carolina. 165 p.
- Cordani, U. G., Cardona, A., Jimenez, D., Liu, D., and Nutman, A. P. 2005. Geochronology of Proterozoic basement inliers from the Colombian Andes: tectonic history of remnants from a fragmented Grenville belt. In: Vaughan, A. P. M., Leat P. T., Pankhurst, R. J. (eds.), *Terrane Processes at the Margins of Gondwana*. Geological Society of London, Special Publication 246, pp. 329-346.
- Cristina, M. T. (Edición crítica, prólogo, introducción y notas). 2008. Jorge Isaacs. *Obras Completas, Volumen IV: Escritos Varios*, Cali: Universidad del Valle y Bogotá: Universidad Externado de Colombia. 184 p.
- Davis, R. H. 1969. Acosta, Caro, and Lleras. Three essayists and their views of New Granada's national problems, Dissertation, PhD. in History, Nashville, Tennessee (E.E.U.U.): Vanderbilt University. 481 p.
- De la Pedraja, R. "La Guajira en el siglo XIX: Indígenas, contrabando y carbón", *Desarrollo y Sociedad (CEDE Uniandes, Bogotá)*, (6):329-359.
- Doolan, B. L. 1971. Structure and metamorphism of the Santa Marta area, Colombia, South America: Ph.D. dissertation. New York State University, Binghamton, N.Y. 200 p.

- Duque-Caro, H.** 1979. Major structural elements and evolution of northwestern Colombia. In: J. S. Watkins, L. Montadert, and P. W. Dickerson, eds., *Geological and geophysical investigations of continental margins: AAPG Memoir 29*, pp. 329-351.
- Duque Gómez, L.** 1990. "El Estado y la Ciencia en Colombia en el siglo XIX", *Rev. Acad. Col. Cien.*, **18**(66):405-414.
- Espinosa, A.** 1991. "La Misión Boussingault (1822-1831), sus resultados y su influencia en la ciencia colombiana", *Rev. Acad. Col. Cien.*, **18**(68):15-22.
- \_\_\_\_\_. 1994. "Un naturalista desconocido, el general Joaquín Acosta (1800-1852)", *Rev. Acad. Col. Cien.*, **19**(73):287-291.
- Flores-Niño, J. M.** 2001. Elastic Geomechanical Model of Bucaramanga and Oca Faults and the Origin of the Sierra Nevada de Santa Marta, Northern Andes, Colombia, American Geophysical Union Fall Meeting, *Eos Transactions*, **82**(47):F1162.
- Gansser, A.** 1955. Contribución a la geología y petrología de la Sierra Nevada de Santa Marta (Colombia, Suramérica), versión inédita. 66 p. [Versión original: "Ein Beitrag zur Geologie und Petrographie der Sierra Nevada de Santa Marta (Kolumbien, Südamerika), Schweizerische Mineralogische und Petrographische Mitteilungen, **35**(2):209-279.]
- García Márquez, G.** 2007. *Cien Años de Soledad*, Bogotá: Grupo Editorial Norma, S.A., Edición Conmemorativa, Real Academia Española, Asociación de Academias de la Lengua Española. 609 p.
- Greene, M. T.** 1982. *Geology in the Nineteenth Century. Changing Views of a Changing World*, Ithaca, N.Y.: Cornell University Press. 324 p.
- Hemmerling J., Helmuth O.** 1984. Consideraciones sobre la ley de canteras. Decreto No. 47-69 del Congreso de la República y proyecto de Decreto de Ley, Facultad de Ciencias Jurídicas y Sociales, Universidad Mariano Galvez de Guatemala, Tesis de grado. Versión consultada el 24 de junio de 2010 en Internet: <http://biblioteca.umg.edu.gt/digital/13687.pdf>
- Henao Restrepo, D. (compilador).** 2007. *Memorias del primer simposio internacional Jorge Isaacs. El creador en todas sus facetas*, Cali: Programa editorial Universidad del Valle. 510 p.
- Hermelin, M.** 1993. "Geomorphology in Colombia", en: H.J. Walker & W.E. Grabau, *The Evolution of Geomorphology*, John Wiley & Sons, pp. 107-111.
- Irving, E.** 1971. "La evolución estructural de los Andes más septentrionales de Colombia", *Bol. Geol. (Bogotá)*, **19**(2):i-xiv, 1-90.
- Isaacs, J.** 1967. *Las Tribus Indígenas del Magdalena*, Bogotá: Ediciones Sol y Luna, Biblioteca Schering Corporation U.S.A., Serie Viajes, No. 99. 220 p.
- Junguito Bonnet, R.** 1995. *La deuda externa en el siglo XIX. Cien años de incumplimiento*, Bogotá: Banco de la República y Tercer Mundo Editores. 292 p.
- Kellogg, J. N.** 1984. Cenozoic tectonic history of the Sierra de Perija, Venezuela-Colombia, and adjacent basins. in Bonini, W.E., Hargraves, R.B., and Shagam, R., eds., *The Caribbean-South American plate boundary and regional tectonics*. Geological Society of America Memoir, 162, pp. 239-261.
- Macdonald, W. D., Doolan, B. L., Cordani, U. G.** 1971. Cretaceous – Early Tertiary metamorphic K – Ar age values from the South Caribbean. *Geol. Soc. Am. Bull.*, **82**:1381-1388.
- \_\_\_\_\_. & **Hurley, P. M.** 1969. Precambrian gneisses from northern Colombia, South America. *Geol. Soc. Am. Bull.* **80**:1867-1872.
- Mantilla, L. C.** (Investigación de archivo y transcripción). 2005. "Informe del Coronel Joaquín Acosta sobre los baldíos de Santa Marta y Valle de Upar (1851)", *Boletín de Historia y Antigüedades (Bogotá)*, **92**(828):193-206.
- Montes, C., Guzmán, G., Bayona, G., Cardona, A., Valencia, V.** 2009. Clockwise Rotation of the Santa Marta Massif and Simultaneous Paleogene to Neogene Deformation of the Plato-San Jorge and Cesar-Ranchería Basins. *Journal of South American Earth Sciences*. **29**(4):832-848.
- Obregón Torres, D.** 1992. *Sociedades científicas en Colombia. La invención de una tradición, 1859-1936*, Bogotá: Banco de la República. 341 p.
- Ojeda, G. & Cardona, A.** (Editors), 2010. *Sierra Nevada de Santa Marta and Adjacent Basins*. *Journal of South American Earth Sciences*. **29**(4).
- Ordóñez Carmona, O., Pimentel, M. M., & De Moraes, R.** 2002. Granulitas de Los Mangos: un fragmento grenviliano en la parte SE de la Sierra Nevada de Santa Marta. *Rev. Acad. Col. Cien.* **26**:169-179.
- Pérez, F.** 1863. *Geografía Física i Política de los Estados Unidos de Colombia*, Tomo Segundo, Bogotá: Imprenta de la Nación. 650 p.
- Posada Carbó, E.** 1996. *The Colombian Caribbean. A Regional History*, New York: Oxford University Press. 300 p.
- Restrepo Forero, O. & Diego B. A.** 1995. "El Darwinismo en Colombia. Naturaleza y sociedad en el discurso de la ciencia", *Rev. Acad. Col. Cien.* **19**(74):547-567.
- Restrepo-Pace, P. A., Ruiz, J., Gehlers, G., & Cosca, M.** 1997. Geochronology and Nd isotopic data of Grenville-age rocks in the Colombian Andes: new constraints for Late Proterozoic-Early Paleozoic paleocontinental reconstructions of the Americas. *Earth and Planetary Science Letters*, (150):427-441.
- Rueda Enciso, J. E.** 2007. "Jorge Isaacs: de la literatura a la etnología," *Boletín de Antropología (Medellín)*, **21**(38):337-356.
- Sánchez, E.** 1999. *Gobierno y Geografía. Agustín Codazzi y la Comisión Corográfica de la Nueva Granada*, Bogotá: Banco de la República-El Áncora Editores. 690 p.
- Striffler, L. [sic].** 2000. *El Río Cesar. Relación de un viaje a la Sierra Nevada de Santa Marta en 1876*, Cartagena de Indias: Gobernación de Bolívar, Instituto Internacional de Estudios del Caribe. 479 p.
- Tschanz, C. M., Jimeno, A., Vesga, C.** 1969. *Geology of the Sierra Nevada de Santa Marta area (Colombia)*. Instituto de Investigaciones e Información Geocientífica, Minero-Ambiental y Nuclear. República de Colombia. 288 p.
- \_\_\_\_\_. **Marvin, R., Cruz, J., Mehnert, H., & Cebula, E.** 1974. Geologic evolution of the Sierra Nevada de Santa Marta. *Geol. Soc. Am. Bull.*, **85**:273-284.

**Valencia Llano, A.** 2007. "La actividad política y empresarial de un escritor vallecaucano. El caso de Jorge Isaacs", en: Darío Henao Restrepo (compilador), Memorias del primer simposio internacional Jorge Isaacs. El creador en todas sus facetas, Cali: Programa editorial Universidad del Valle, pp. 183-199.

**Van Der Hilst, R., & Mann, P.** 1994. Tectonic implications of tomographic images of subducted lithosphere beneath northwestern South America, *Geology*, (22):451-454.

**Vásquez, C.** 2004. "Pérez, Felipe", <http://www.lablaa.org/blaavirtual/biografias/perefeli.htm>, consultado el 24 de junio de 2010.

**Vega, C. M.** 1996. Erwin Kraus. El camino de la montaña, Bogotá: Diego Samper Ediciones. 308 p.

Recibido: agosto 6 de 2010.

Aceptado para su publicación: noviembre 30 de 2010.



# PRODUCTOS FIBRADOS DE EXTENSIONES DE KUMMER Y ARTIN-SCHREIER

Adriana Alexandra Albarracín Mantilla<sup>1</sup>, Álvaro Garzón Rojas<sup>2</sup>

## Resumen

**Albarracín Mantilla, A. A., A. Garzón Rojas:** Productos fibrados de extensiones de Kummer y Artin-Schreier. Rev. Acad. Colomb. Cienc. **34** (133 ): 513-520, 2010. ISSN 0370-3908.

En este artículo se construyen cuerpos de funciones algebraicas con cuerpo de constantes el cuerpo finito  $\mathbb{F}_q$  cuyo número de lugares de grado uno es “grande” en comparación con su género. Dichos cuerpos de funciones resultan del producto fibrado de extensiones de Kummer y Artin-Schreier.

**Palabras clave:** cuerpos de funciones algebraicas, cuerpos finitos, lugares racionales, extensiones de Kummer, extensiones de Artin-Schreier.

## Abstract

We construct algebraic function fields over the finite field  $\mathbb{F}_q$  with many rational points with respect to their genus. The curves constructed are fibre products of Kummer and Artin-Schreier covers of the projective line.

**Key words:** algebraic function fields, finite fields, rational places, Kummer extensions, Artin-Schreier extensions.

## 1. Introducción

Sean  $\mathbb{F}_q$  un cuerpo finito con  $q = p^n$  elementos,  $\overline{\mathbb{F}_q}$  una clausura algebraica de  $\mathbb{F}_q$  y  $f(x, y) \in \mathbb{F}_q[x, y]$  un polinomio absolutamente irreducible. Al conjunto de puntos

$$C_f = \{(\alpha, \beta) \in \overline{\mathbb{F}_q} \times \overline{\mathbb{F}_q} : f(\alpha, \beta) = 0\}$$

lo llamaremos *la curva algebraica afín inducida por el polinomio  $f(x, y)$* . Los puntos  $P = (\alpha, \beta) \in C_f$  tal que  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{F}_q \times \mathbb{F}_q$  los llamaremos *puntos racionales* de la curva  $C_f$  sobre  $\mathbb{F}_q$  y  $C_f(\mathbb{F}_q)$  denotará el conjunto de puntos racionales de la curva  $C_f$ .

<sup>1</sup> Escuela de Matemática, Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, Santander, Colombia. Correo electrónico: sadrialba@matematicas.uis.edu.coetb.net.co.

<sup>2</sup> Departamento de Matemáticas, Universidad del Valle, Cali, Valle, Colombia. Correo electrónico: alvarogr@univalle.edu.co

En 1940 **André Weil** [6] probó la hipótesis de Riemann para curvas sobre cuerpos finitos obteniendo como consecuencia de este resultado, una cota superior para el número de puntos racionales de una curva  $C$  de género  $g$  definida sobre un cuerpo finito de cardinalidad  $q$ , a saber:

$$|C(\mathbb{F}_q)| \leq q + 1 + 2g\sqrt{q}. \quad (1)$$

Posteriormente, en 1980, **V. D. Goppa** ([6]) introdujo los llamados códigos geométricos, esto es, códigos inducidos por curvas algebraicas, también conocidos como *códigos geométricos de Goppa*. En la construcción de códigos geométricos se destacan principalmente, dos propiedades que debe tener una curva de tal forma que el código inducido tenga buenos parámetros, estas son:

- 1 . La curva debe ser explícita, es decir debe obtenerse mediante una ecuación de la forma  $f(x, y) = 0$ .
- 2 . El número de puntos racionales de dicha curva debe estar cercano a la cota de Weil.

A partir de este hecho algunos matemáticos empezaron a trabajar en el mejoramiento de la cota de Weil y muchos otros encaminaron esfuerzos hacia la construcción de curvas con muchos puntos racionales.

En este artículo se construyen curvas algebraicas (cuerpos de funciones algebraicas) sobre cuerpos finitos con muchos puntos racionales (lugares de grado uno) entendiendo por esto, que el número  $N(F/\mathbb{F}_q)$  de puntos racionales satisface  $a \leq N(F/\mathbb{F}_q) \leq b$ , donde  $b$  es la cota de **Weil, Ihara** o **Serre** (véanse [7],[5]) para un cuerpo de funciones de género  $g$  y  $a = b/\sqrt{2}$ .

Dichas curvas serán obtenidas por medio de recubrimientos dobles de la recta proyectiva  $\mathbb{F}_q(x)$  mediante extensiones de Kummer y Artin-Schreier, Para la construcción de las extensiones de Kummer utilizaremos el método desarrollado en ([2]) el cual explicaremos en la sección 2.1.1. Para las extensiones de Artin-Schreier desarrollamos un método que nos permitirá escoger de una manera adecuada una función racional que definirá nuestra extensión y que a su vez garantizará la existencia de un buen número de lugares de grado uno.

## 2. Recubrimientos dobles

En esta sección construiremos cuerpos de funciones algebraicas  $E = E_1 E_2$  con cuerpo de constantes el cuerpo finito  $\mathbb{F}_q$  donde  $E_1$  está definido por una ecuación

de Kummer y  $E_2$  por una de Artin-Schreier, ( ver [8] ). Tales cuerpos de funciones serán construidos de forma tal que el número de lugares de grado 1 esté cercano bien sea a las cotas de Weil, Serre o Ihara.

**2.1. Construcción mediante extensiones de Kummer.** Sean  $r$  un divisor de  $q - 1$  y  $\mu(x) \in \mathbb{F}_q(x)$  una función racional en  $x$ . Supongamos que el polinomio

$$\varphi(T) \in \mathbb{F}_q(x)[T] = T^r - \mu(x)$$

es irreducible en  $\mathbb{F}_q(x)[T]$  y para cada  $\alpha \in \mathbb{F}_q$  definamos

$$\varphi_\alpha(T) := T^r - \mu(\alpha) \in \mathbb{F}_q[T].$$

Observe que si existe un elemento  $\beta \in \mathbb{F}_q$  tal que  $\mu(\beta)$  es una  $r$ -ésima potencia en el cuerpo  $\mathbb{F}_q$ , esto es,

$$(\mu(\beta))^{(q-1)/r} \equiv 1 \pmod{q-1}, \quad (2)$$

entonces el polinomio  $\varphi_\beta(T)$  se factoriza en  $\mathbb{F}_q[T]$  como

$$\varphi_\beta(T) = (T - \theta)(T - \tau\theta) \cdots (T - \tau^{r-1}\theta), \quad (3)$$

donde  $\tau$  es una raíz  $r$ -ésima de la unidad y  $\theta \in \mathbb{F}_q$  es tal que  $\theta^r = \mu(\beta)$ .

Sea  $y$  una raíz del polinomio  $\varphi(T)$  y consideremos la curva algebraica afín sobre el cuerpo finito  $\mathbb{F}_q$  definida por la ecuación  $\varphi(y) = \mu(x)$ .

Es claro que por cada elemento  $\gamma \in \mathbb{F}_q$  que satisface la ecuación (2) obtenemos  $r$  puntos sobre la curva

$$C_\varphi = \{(\alpha, \beta) \in \overline{\mathbb{F}_q} \times \overline{\mathbb{F}_q} : \varphi(\alpha, \beta) = 0\},$$

cuyas coordenadas son del tipo  $(\gamma, \tau^j\theta)$  con  $0 \leq j \leq r-1$ ,  $\tau$  como en (3) y  $\theta^r = \mu(\gamma)$ . En resumen, por cada elemento  $\gamma \in \mathbb{F}_q$  tal que  $\mu(\gamma)$  sea una  $r$ -ésima potencia en  $\mathbb{F}_q$ , tendremos  $r$  puntos racionales en la curva  $C_\varphi$ .

Dado que en este trabajo usaremos el lenguaje de los cuerpos de funciones, el párrafo anterior, puede ser reinterpretado como sigue:

El cuerpo de funciones algebraicas  $E_1 = \mathbb{F}_q(x, y)$  definido por la ecuación de Kummer  $\varphi(y) = y^r - \mu(x) = 0$ , satisface:

$$|C_\varphi(\mathbb{F}_q)| \geq r \cdot |\Lambda_\mu|, \quad (4)$$

donde

$$\Lambda_\mu = \{\gamma \in \mathbb{F}_q; \mu(\gamma) \text{ es una } r\text{-ésima potencia en } \mathbb{F}_q\},$$

y  $|C_\varphi(\mathbb{F}_q)|$  significará el cardinal del conjunto de lugares de grado uno (puntos racionales) del cuerpo de funciones  $E_1$  (de la curva definida por la ecuación  $\varphi(y) = 0$ ).

El número exacto de lugares de grado uno de  $E_1$  resultará de sumar al número obtenido en (4) aquellos puntos de rama de la función  $\mu(x)$ , (esto es, aquellos lugares que son ceros ó polos de  $\mu(x)$ ) que aporten lugares racionales .

*2.1.1. Construcción de un  $\mu(x) \in \mathbb{F}_q(x)$  apropiado.* En esta sección describiremos brevemente un método desarrollado en ([2]) y ([3]) para la construcción de una función racional  $\mu(x)$  de tal manera que el conjunto de elementos  $\alpha \in \mathbb{F}_q$  tales  $\mu(\alpha)$  sea una  $r$ -ésima potencia en  $\mathbb{F}_q$  sea “grande”.

Sean  $f(x)$  y  $\ell(x) \in \mathbb{F}_q[x]$  polinomios con las siguientes propiedades:

1.  $\text{m.c.d.}(f(x), \ell(x)) = 1$  en  $\mathbb{F}_q[x]$ .
2.  $\ell(x)$  tiene todas (o casi todas) sus raíces en  $\mathbb{F}_q$
3.  $\text{grad}(f(x)) \geq \text{grad}(\ell(x))$

Por el algoritmo de la división existen  $h(x), \mathcal{R}_\ell((f(x))) \in \mathbb{F}_q[x]$  tales que

$$f(x) = \ell(x)h(x) + \mathcal{R}_\ell((f(x))), \tag{5}$$

donde  $\mathcal{R}_\ell((f(x)))$  es el residuo de la división de  $f(x)$  por  $\ell(x)$ . Ahora, definamos la función racional  $\mu(x)$  como:

$$\mu(x) := \frac{f(x)}{\mathcal{R}_\ell((f(x)))}. \tag{6}$$

Observe que para todo  $\alpha \in \mathcal{V}_\ell := \{\alpha \in \mathbb{F}_q; \ell(\alpha) = 0\}$ , se tiene que

$$\mu(\alpha) = \frac{f(\alpha)}{\mathcal{R}_\ell((f(x))(\alpha))} = 1.$$

Esto es, la función racional  $\mu(x)$  toma el valor de 1 en el conjunto de ceros del polinomio  $\ell(x)$  y puesto que en  $\mathbb{F}_q$  existen todas las raíces  $r$ -ésimas de la unidad, entonces el cardinal del conjunto de lugares racionales del cuerpo de funciones  $E_1$  dada por la ecuación de Kummer,

$$y^r = \mu(x) := \frac{f(x)}{\mathcal{R}_\ell((f(x)))} \tag{7}$$

está íntimamente ligado al conjunto de ceros del polinomio  $\ell(x)$  en el cuerpo finito  $\mathbb{F}_q$ .

Nótese que en el proceso de cálculo del número de lugares de grado 1 en el cuerpo de funciones  $\mathbb{F}_q(x, y)/\mathbb{F}_q$  sólo hemos considerado los ceros del polinomio  $\ell(x)$  en  $\mathbb{F}_q$ , otros lugares de grado 1 pueden obtenerse de los puntos de rama y además del conjunto

$$\{\alpha \in \mathbb{F}_q; \mu(\alpha) = \zeta^r\},$$

con  $\zeta \in \mathbb{F}_q$ , y  $\zeta^r \neq 1$ .

En general, los lugares de grado uno del cuerpo de funciones  $E_1$  no provenientes de la ramificación, pueden obtenerse por el siguiente resultado, conocido como el teorema de Euler.

**Proposición 2.1.1.** *Sean  $p$  un número primo,  $q = p^n$  y  $\alpha \in \mathbb{F}_q$ . La congruencia  $x^r \equiv \mu(\alpha) \pmod{q}$  tiene  $\kappa = \text{m.c.d.}(r, q - 1)$  soluciones si y solamente si*

$$\mu(\alpha)^{(q-1)/\kappa} \equiv 1 \pmod{q}. \tag{8}$$

De acuerdo con la proposición anterior, tenemos que

$$\#N(\mathbb{F}_q(x, y)/\mathbb{F}_q) = r \cdot \text{grad}(d(x)) + \rho. \tag{9}$$

donde  $d(x)$  es el máximo común divisor entre  $x^q - x$  y el numerador de la función racional  $\mu(x)^{\frac{q-1}{r}} - 1$  y  $\rho$  es el número de lugares de grado uno obtenido de la ramificación de  $\mu(x)$ .

Como una ilustración de lo discutido anteriormente, sean  $q = p^n$  con  $n \geq 3$ ,  $f(x)$  y  $\ell(x)$  polinomios en  $\mathbb{F}_p[x]$  tales que,

$$f(x) = (x^p - x)^{p^{n-1}-1} \quad \text{y} \quad \ell(x) = \frac{x^q - x}{x^p - x},$$

es fácil verificar que  $f(x)$  y  $\ell(x)$  satisfacen la siguiente relación

$$f(x) = \ell(x) - \frac{x^{p^{n-1}} - x}{x^p - x},$$

esto es,

$$\mathcal{R}_\ell((f(x))) = -\frac{x^{p^{n-1}} - x}{x^p - x}.$$

**Proposición 2.1.2.** *El cuerpo de funciones  $E_1 = \mathbb{F}_q(x, y)/\mathbb{F}_q(x)$  donde  $y$  satisface la ecuación de Kummer,*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{F}_q(x, y) & & \\ \downarrow & \searrow & \\ \mathbb{F}_q(x) & \nearrow & y^r = \mu(x) = -\frac{(x^p - x)^{p^{n-1}-1}}{x^p - x} \end{array}$$

tiene género

$$g = \frac{(p^{n-1} - p - 2)(r - 1) + (p + 1)(r - d)}{2}$$

donde  $d = \text{m.c.d.}(r, p - 1)$  y el número de lugares racionales satisface

$$\#N(E_1) \geq r \cdot (q - p).$$

*Demostración.* Los lugares  $P_\alpha$ , correspondientes a  $x - \alpha$  con  $\alpha \in \mathbb{F}_p$  y el polo  $P_\infty$  de  $x$ , tienen índice de ramificación  $r/d$ , mientras que los lugares correspondientes a los ceros del polinomio  $\mathcal{R}_\ell(f(x))$ , estos son totalmente ramificados, con índice de ramificación  $r - 1$ . Luego la fórmula para el género se sigue de ([8], 3.4.12).

Para el cálculo del número de lugares racionales, observe que todo elemento  $\beta \in \mathbb{F}_q \setminus \mathbb{F}_p$  induce un lugar  $P_\beta$  en  $\mathbb{F}_q(x)$  que es totalmente descompuesto en la extensión  $\mathbb{F}_q(x, y)/\mathbb{F}_q(x)$ , además aquellos lugares de  $\mathbb{F}_q(x, y)$  que caen sobre  $P_\beta$  son racionales. Otros lugares de grado uno pueden obtenerse del análisis de la ramificación de  $\mu(x)$ .  $\square$

**Ejemplo 2.1.1.** Con  $p = 2$  y  $n = 3$  obtenemos que  $f(x) = x^3(x+1)^3$  y  $\ell(x) = x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = (x^3 + x^2 + 1)(x^3 + x + 1)$ , luego el cuerpo de funciones  $E_1 = \mathbb{F}_8(x, y)/\mathbb{F}_8(x)$  está definido por la ecuación

$$y^7 = \frac{x^3(x+1)^3}{x^2+x+1},$$

cuyo género es

$$g = \frac{(4-2-2)6 + 3(6)}{2} = 9.$$

En cuanto al número de lugares de grado uno sólo nos resta analizar los puntos de rama. Puesto que el grado de la extensión es primo, entonces todos los lugares serán ó totalmente ramificados ó no ramificados, de aquí que sólo aportan lugares racionales los correspondientes a  $x = 0$   $x = 1$  y el polo de  $x$  en  $\mathbb{F}_p(x)$ . En resumen tenemos

$$\#N(E_1/\mathbb{F}_8(x)) = 7 \cdot 6 + 3 = 45.$$

No se conoce un cuerpo de funciones definido sobre el cuerpo finito  $\mathbb{F}_8$  de género 9, con más de 45 lugares de grado uno, ver ([5]).

**Observación 2.1.1.** Tomando  $p = 2$  y  $n = 4$  en la Proposición 2.1.2, obtenemos con  $r = 15$  un cuerpo de funciones de género  $g = 49$  y 213 lugares de grado uno, nuevamente es el mejor que se conoce. Con  $p = 3$  y  $n = 3$  tenemos, con  $r = 2$  un cuerpo de funciones maximal, esto es con 48 lugares de grado uno y con  $r = 13$  un cuerpo de funciones de género 48 y cuyo número de lugares de grado uno 316, este valor es cercano a la mejor cota existente que es 325, ver [5].

**2.2. Construcción mediante extensiones de Artin-Schreier.** El objetivo de esta sección es el de

construir cuerpos de funciones  $E_2 = \mathbb{F}_q(x, z)/\mathbb{F}_q(x)$  definidos por medio de una ecuación de Artin-Schreier,

$$z^p - z = g(x), \quad (10)$$

con  $g(x) \in \mathbb{F}_q(x)$  apropiado.

Como veremos, el problema de encontrar lugares de grado 1 en este tipo de extensiones está estrechamente relacionado con el Teorema 90 de Hilbert en su versión aditiva, más precisamente:

**Teorema 2.2.1.** *Sea  $F$  una extensión finita de  $K = \mathbb{F}_q$ . Entonces para  $\alpha \in F$  tenemos  $Tr_{F/K}(\alpha) = 0$  si y sólo si  $\alpha = \beta^p - \beta$  para algún  $\beta \in F$ . Donde  $Tr_{F/K}$  es la función traza de  $F$  a  $K$ .*  $\square$

En efecto, observe que si  $F = \mathbb{F}_{q=p^n}$  y  $\alpha \in \mathbb{F}_q$  es tal que  $Tr_{\mathbb{F}_q/\mathbb{F}_p}(g(\alpha)) = 0$ , entonces por (2.2.1) existe un  $\beta \in \mathbb{F}_q$  tal que  $\beta^p - \beta = g(\alpha)$ , más aún, para cada elemento  $\zeta \in \mathbb{F}_p$ , se tiene que

$$(\beta - \zeta)^p - (\beta - \zeta) = \beta^p - \zeta^p - \beta + \zeta = g(\alpha)$$

esto es, por cada elemento en  $\alpha \in \mathbb{F}_q$ , tal que  $Tr_{\mathbb{F}_q/\mathbb{F}_p}(g(\alpha)) = 0$  tendremos  $p$  puntos racionales (lugares de grado uno) en la curva  $C$  definida por la ecuación  $z^p - z = g(x)$  (en el cuerpo de funciones definido por la ecuación de Artin-Schreier (10)).

Finalmente, para determinar el número de lugares de grado 1 de  $E_2$  que no provienen de la ramificación de  $g(x)$ , es necesario analizar el polinomio  $\delta(x) = \text{m.c.d.}(Tr_{\mathbb{F}_q/\mathbb{F}_p}(g(x)), x^q - x)$ .

A continuación exhibiremos dos métodos para la construcción de la función racional  $g(x)$  que definirá la extensión  $E_2$ .

**2.2.1. Método 1.** Sean  $q = p^n$  y  $\ell(x) \in \mathbb{F}_q[x]$  el cual es un producto de polinomios irreducibles de grado  $n$  sobre  $\mathbb{F}_p$ .

Si  $t(x)$  y  $\gamma(x) \in \mathbb{F}_q[x]$  tales que  $t(x)$  es un factor de  $\ell(x)$  y

$$\text{m.c.d.}(\gamma(x)^p - \gamma(x), t(x)) = 1,$$

entonces existen polinomios  $v(x)$  y  $\omega(x)$  tales que

$$t(x)v(x) + (\gamma(x)^p - \gamma(x))\omega(x) = 1; \quad (11)$$

dividiendo por  $\omega(x)$  obtenemos:

$$\frac{t(x)v(x)}{\omega(x)} + (\gamma(x)^p - \gamma(x)) = \frac{1}{\omega(x)}. \quad (12)$$

Ahora, si  $\alpha \in \mathbb{F}_q$  es un cero de  $t(x)$ , entonces

$$0 = Tr_{\mathbb{F}_q/\mathbb{F}_p} \left( \frac{1}{\omega(\alpha)} \right)$$

y en consecuencia por (2.2.1), existe  $\zeta \in \mathbb{F}_{p^n}$  tal que

$$\zeta^p - \zeta = \frac{1}{\omega(\alpha)}. \tag{13}$$

Observe que de acuerdo con la discusión anterior, debemos garantizar la existencia de un  $\gamma(x) \in \mathbb{F}_q[x]$  tal que  $\text{m.c.d.}(\gamma(x)^p - \gamma(x), t(x)) = 1$ , esta existencia será justificada en el siguiente resultado.

**Lema 2.1.** Con la notación anterior, si  $\gamma(x) = (x - \alpha)$  con  $\alpha \in \mathbb{F}_q$ , entonces

$$\text{m.c.d}(t(x), \gamma(x)^p - \gamma(x)) = 1.$$

*Demostración.* Dado que  $\gamma(x) = (x - \alpha)$  con  $\alpha \in \mathbb{F}_q$  entonces

$$\gamma(x)^p - \gamma(x) = (x - \alpha)^p - (x - \alpha) = x^p - x.$$

Si suponemos que  $\text{m.c.d}(t(x), \gamma(x)^p - \gamma(x)) \neq 1$  entonces  $(x^p - x)|t(x)$  y puesto que  $t(x)$  es un factor de  $\ell(x)$ , tenemos que  $(x^p - x)|\ell(x)$ , pero  $\ell(x)$  es un polinomio irreducible o producto de irreducibles sobre  $\mathbb{F}_p$ , con todos sus ceros en  $\mathbb{F}_q \setminus \mathbb{F}_p$ , entonces  $x^p - x$  no puede dividir a  $\ell(x)$  y en consecuencia

$$\text{m.c.d}(t(x), \gamma(x)^p - \gamma(x)) = 1. \quad \square$$

**2.2.2. Método 2.** Sea  $g(x) \in \mathbb{F}_q(x)$  una función racional en  $x$ ,  $h(x)$  el numerador de la función  $Tr_{\mathbb{F}_q/\mathbb{F}_p}(g(x))$  y  $\ell(x)$  un divisor de  $\text{m.c.d.}(h(x), x^q - x)$ .

El cuerpo de funciones  $E_2 = \mathbb{F}_q(x, z)$  será definido por medio de la ecuación de Artin-Schreier

$$z^p - z = g(x) \tag{14}$$

y denotaremos por  $\delta(x) = \text{m.c.d.}(Tr_{\mathbb{F}_q/\mathbb{F}_p}(g(x)), x^q - x)$ .

Luego  $E_2$  tendrá por lo menos  $p \cdot \text{grad}(\delta(x))$  lugares de grado uno, en virtud del Teorema 2.2.1.

**2.2.3. Aplicaciones de los Métodos 1 y 2.** Como ilustración de los métodos exhibidos tenemos: Los polinomios

$$f(x) = (x^p - x)^{p^{n-1}-1} \quad \text{y} \quad \ell(x) = \frac{x^q - x}{x^p - x},$$

satisfacen la siguiente relación

$$\ell(x) \cdot 1 - (x^p - x) \cdot (x^p - x)^{p-2} \cdot \frac{(x^{p^{n-1}} - x)^p}{(x^p - x)^p} = 1. \tag{15}$$

Luego, de acuerdo con la ecuación (13), tenemos,

**Proposición 2.2.1.** Para todo primo  $p \neq 2$ , el cuerpo de funciones  $E_2 := \mathbb{F}_q(x, z)/\mathbb{F}_q(x)$  donde  $z$  satisface la ecuación de Artin-Schreier,

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{F}_q(x, y) & & \\ \downarrow & \searrow & \\ \mathbb{F}_q(x) & & z^p - z = h(x) := -\frac{(x^p - x)^2}{(x^{p^{n-1}} - x)^p} \end{array}$$

tiene género

$$g = (p - 1) \left( \left( \sum_{i=1}^r \text{grad}(h_i(x)) \right) - 1 \right)$$

donde  $h_i(x)$  recorre todos los factores irreducibles del polinomio  $h(x)$  y el número de lugares racionales satisface

$$\#N(E_2) \geq p \cdot (q - p).$$

*Demostración.* En efecto, observe que todos los lugares  $P_{h_i(x)}$  inducidos por los factores del polinomio  $h(x)$  satisfacen  $\nu_P(h(x)) = p$ , luego por ([8], 3.3.7), existe un elemento  $z \in \mathbb{F}_p(x)$  tal que

$\nu_P(h(x) - z^p + z) \geq 0$  ó  $\nu_P(h(x) - z^p + z) = -m < 0$ , con  $m \not\equiv 0 \pmod{p}$ . Tal elemento reductor  $z$  es:

$$z = \frac{\zeta(x)}{(x^p - x)h(x)}$$

donde  $\zeta(x)^p = (x^p - x)^2$ , (dicho  $z$  es obtenido usando el algoritmo 3.2.2 de [1], pág 39), obteniendo después de la reducción  $\nu_P(h(x) - z^p + z) = -1$ , ahora la fórmula para el género se obtiene de la fórmula de Hurwitz. El valor del número de puntos racionales es claro.  $\square$

**Observación 2.1.** Observe que para  $p = 2$  en (15)

$$\ell(x) \cdot 1 + (x^2 + x) \cdot \frac{(x^{2^{n-1}} + x)^2}{(x^2 + x)^2} = 1. \tag{16}$$

Luego nuestro cuerpo de funciones  $E_2 := \mathbb{F}_{2^n}(x, z)/\mathbb{F}_2(x)$  esta definido por la ecuación

$$z^2 + z = \frac{(x^2 + x)}{(x^{2^{n-1}} + x)^2}$$

**Ejemplo 2.2.3.1.** (Método 1.) Sea  $p = 2$  y  $n = 3$ . El cuerpo de funciones  $E_2 := \mathbb{F}_8(x, z)/\mathbb{F}_2(x)$  definido a partir del método 1, está dado por la ecuación

$$z^2 + z = \frac{1}{(x^2 + x + 1)^2},$$

el cual tiene género 1 y 14 lugares de grado uno.

**Ejemplo 2.2.3.2.** (Método 2.) Sean  $p = 2, n = 6$  y

$$g(x) = \frac{(x + 1)^3}{x^3} \in \mathbb{F}_{64}(x). \text{ En este caso}$$

$$Tr_{\mathbb{F}_{64}/\mathbb{F}_2}(g(x)) = \frac{1}{x^{96}} + \frac{1}{x^{64}} + \frac{1}{x^{48}} + \frac{1}{x^{24}} + \frac{1}{x^{12}} + \frac{1}{x^6} + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x},$$

$$\text{y } \delta(x) = 1 + x^6 + x^{12} + x^{15} + x^{18} + x^{21} + x^{27} + x^{33} + x^{36} + x^{39}.$$

Ahora consideremos el cuerpo de funciones  $E_2 := \mathbb{F}_{64}(x, z)/\mathbb{F}_{64}(x)$  dado por la ecuación de Artin-Schreier

$$z^2 + z = \frac{(x + 1)^3}{x^3}.$$

Este cuerpo de funciones tiene género 1 y 81 lugares de grado uno, esto es,  $E_2$  es un cuerpo de funciones maximal.

**2.3. Ejemplos de recubrimientos dobles.** En esta sección construiremos un cuerpo de funciones  $E = E_1E_2$  de tal forma que  $E_1 = \mathbb{F}_q(x, y)$  está definido por una ecuación de Kummer del tipo (7) y  $E_2 = \mathbb{F}_q(x, z)$  está definido por una ecuación del tipo (10).

Dado que estamos interesados en construir recubrimientos dobles cuyo número de lugares racionales sea “grande” es deseable que el máximo común divisor entre los polinomios  $d(x)$  obtenido en la sección 2.1 y el polinomio  $\delta(x)$  obtenido en la sección 2.2, tenga grado lo más grande posible, pues por cada cero común de estos polinomios tendremos  $p \cdot r$  lugares racionales en la composición  $E = E_1E_2$ . Precizando lo anterior tenemos la siguiente proposición.

**Proposición 2.3.1.** Sean  $E = E_1E_2$  con  $E_1$  y  $E_2$  como antes. Si  $\tau(x) = m.c.d.(d(x), \delta(x))$ , entonces el número de lugares de grado uno del cuerpo de funciones  $E$  satisface

$$\#N(E/\mathbb{F}_q) \geq p \cdot r(\text{grad}(\tau)). \quad \square$$

**Ejemplo 2.3.1.** Sean  $E_1$  y  $E_2$  los cuerpos de funciones construidos en los ejemplos 2.1.1 y 2.2.3.1 respectivamente y sea  $E = E_1E_2$ . En este caso los polinomios  $d(x)$  y  $\delta(x)$  tiene como máximo común divisor a  $\tau(x) = \delta(x) = x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ , y en consecuencia

$$\#N(E/\mathbb{F}_8(x)) \geq 6 \cdot 2 \cdot 7 = 84.$$

Ahora analizamos los puntos de rama. Denotando por  $P_\infty, P_1$  y  $P_0$  los lugares de grado uno en la extensión  $\mathbb{F}_8(x, y)/\mathbb{F}_8(x)$  que caen sobre  $x = \infty, x = 1$  y  $x = 0$ ; observamos que existen 2 lugares en la extensión  $\mathbb{F}_8(x, y, z)/\mathbb{F}_8(x, y)$  que caen sobre cada uno de ellos.

Únicamente los lugares que caen sobre  $P_\infty$  son de grado 1.

De otro lado, sobre  $P_{\zeta_i}, i = 1, 2$  cae un lugar que no es de grado 1, por lo tanto tenemos sólo 2 lugares de grado uno provenientes de los puntos de rama y en consecuencia  $\#N(E/\mathbb{F}_8(x)) = 86$ .

Para el cálculo del género, observe que, el único lugar totalmente ramificado en  $\mathbb{F}_8(x, y, z)/\mathbb{F}_8(x, y)$  es  $P_{\zeta_i}, i = 1, 2$ , los lugares correspondientes a  $P_\infty, P_0$  y a  $P_1$  son no ramificados y por lo tanto el género está dado por

$$g(\mathbb{F}_8(x, y, z)/\mathbb{F}_8(x)) = 2 \cdot 9 + \frac{1}{2}(-2 + 16) = 25.$$

No se conoce un cuerpo de funciones sobre  $\mathbb{F}_8$  de género 25 que tenga más de 86 puntos racionales, ver [5].

**Ejemplo 2.1.** En este ejemplo construiremos un cuerpo de funciones algebraicas sobre el cuerpo finito  $\mathbb{F}_{16}$ , con género 20 y 127 lugares racionales. Este es el mejor valor conocido para (16, 20)

Sean  $p = 2, n = 4, \ell(x) = x^8 + x^7 + x^6 + x^4 + 1 \in \mathbb{F}_{16}[x]$  y  $f(x) = (x^2 + x + 1)^4 \in \mathbb{F}_{16}[x]$ .

Es fácil verificar que  $\mathcal{R}_\ell((f(x))) = x^6(x + 1)$ . Afirmamos que la extensión de Kummer  $E_1 = \mathbb{F}_{16}(x, y)$  de  $\mathbb{F}_{16}(x)$  dada por la ecuación:

$$y^5 = \frac{f(x)}{\mathcal{R}_\ell((f(x)))} = \frac{(x^2 + x + 1)^4}{x^6(x + 1)},$$

tiene género 6 y 65 lugares de grado uno, es decir  $E_1$  es un cuerpo de funciones maximal.

En efecto, para el cálculo del género, observe que los lugares correspondientes a  $x = 0, x = 1, x = \infty$  y  $x = \zeta_i$  con  $\zeta_i^2 + \zeta_i + 1 = 0$  e  $i = 1, 2$  (los cuales denotaremos por  $p_0, p_1, p_\infty$  y  $p_{\zeta_i}$  respectivamente) son totalmente ramificados, luego el género está dado por ([6], III.7.3.)

$$g(\mathbb{F}_{16}(x, y)/\mathbb{F}_{16}(x)) = 1 + 5(-1) + \frac{1}{2}(5(4)) = -4 + 10 = 6.$$

Para hallar el número de lugares de grado 1, resolvemos la congruencia (8) y obtenemos  $d(x) = x^{12} + x^9 + x^6 + x^3 + 1$ .

Observemos que  $\ell(x) \cdot (x^4 + x^3 + 1) = d(x)$ , donde los ceros del polinomio  $x^4 + x^3 + 1$  aportan quintas potencias diferentes de 1.

Entonces tenemos que

$$\#N(\mathbb{F}_{16}(x, y)) = 12 \times 5 + 5 = 65.$$

Este cuerpo de funciones es maximal puesto que

$$\#N(\mathbb{F}_{16}(x, y)) = q + 1 + 2g\sqrt{q} = 16 + 1 + 2(6)(4) = 65.$$

Ahora sea  $t(x) = x^4 + x + 1$  un factor de  $\ell(x)$  y  $\gamma(x) = x(x + 1)^5$ , es fácil comprobar que el polinomio  $\omega(x)$  correspondiente a la expresión obtenida en (11) es  $\omega(x) = x(x^2 + x + 1)$ , luego el cuerpo de funciones  $E_2$  dado por la ecuación de Artin-Schreier

$$z^2 + z = \frac{1}{\omega(x)} = \frac{1}{x(x^2 + x + 1)},$$

tiene género 20 y 127 lugares de grado uno.

Antes de iniciar los cálculos, denotemos por  $P_0, P_1, P_\infty$  y  $P_{\zeta_i}$   $i = 1, 2$ , los únicos lugares de  $E_1$  que caen sobre  $p_0, p_1, p_\infty$  y  $p_{\zeta_i}$  respectivamente

De acuerdo con ([8], 3.7.8) los únicos lugares que se ramifican en la extensión  $\mathbb{F}_{16}(x, z)/\mathbb{F}_{16}$  son  $P_0$  y  $P_{\zeta_i}$ , mientras que los lugares  $P_\infty$  y  $P_1$  son no ramificados, y por lo tanto, el género está dado por

$$g(\mathbb{F}_{16}(x, y, z)/\mathbb{F}_{16}(x)) = 2 \cdot 6 + \frac{1}{2}(-2 + 18) = 20.$$

Para el cálculo de lugares de grado uno, observe que existen 2 lugares en  $E_2$  que caen sobre  $P_\infty$  y  $P_1$ , estos lugares son de grado 1, así como también aquellos que caen sobre  $P_0$  y  $P_{\zeta_i}$ , por lo tanto tenemos 7 lugares de grado uno provenientes de los puntos de rama.

De otro lado, puesto que  $\delta(x) = (x + 1)d(x)$  entonces  $\tau(x) := \text{m.c.d}(d(x), \delta(x)) = d(x)$ , y en consecuencia

$$\#N(E/\mathbb{F}_{16}(x)) = 5 \cdot 2 \cdot 12 + 7 = 127.$$

**Ejemplo 2.3.2.** Sean  $p = 2, n = 3$  y  $g(x) = x \in \mathbb{F}_8[x]$ .

En este caso,  $h(x) = \text{Tr}_{\mathbb{F}_8/\mathbb{F}_2}(g(x)) = x^4 + x^2 + x$ , así, tomando  $\ell(x) = x^4 + x^2 + x$  y  $f(x) = (x^2 + x + 1)^2$  obtendremos un residuo  $\mathcal{R}_\ell(f(x)) = x + 1$ .

La extensión de Kummer  $E_1 = \mathbb{F}_8(x, y)$  de  $\mathbb{F}_8(x)$  dada por la ecuación:

$$y^7 = \frac{f(x)}{\mathcal{R}_\ell(f(x))} = \frac{(x^2 + x + 1)^2}{(x + 1)},$$

tiene género 6 y 30 lugares de grado uno.

Puesto que  $r$  es primo, sólo ocurre ramificación total, esto ocurre en los lugares  $p_1, p_{\zeta_i}$  y  $p_\infty$ , luego el género está dado por

$$g(\mathbb{F}_8(x, y)/\mathbb{F}_8(x)) = 1 + 7(-1) + \frac{1}{2}(4(6)) = -6 + 12 = 6.$$

Para hallar el número de lugares de grado 1, resolvemos la congruencia (8) y obtenemos  $d(x) = x^4 + x^2 + x$ .

Entonces tenemos que

$$\#N(\mathbb{F}_8(x, y)) = 4 \cdot 7 + 2 = 30.$$

Ahora consideremos la extensión  $E_2$  de  $E_1$  dada por la ecuación de Artin-Schreier

$$z^2 + z = x.$$

El único lugar totalmente ramificado es  $P_\infty$ . Para el cálculo de lugares de grado uno, observemos que existen 2 lugares que caen sobre cada uno de los 7 lugares que caen sobre  $p_0, 2$  lugares que caen sobre  $P_1$  y  $P_{\zeta_i}, i = 1, 2$  respectivamente y solamente un lugar que cae sobre  $P_\infty$  que además es el único de grado 1, por lo tanto tenemos sólo un lugar de grado uno proveniente de los puntos de rama.

De otro lado, por la escogencia de  $g(x)$  tenemos que  $\delta(x) = \ell(x)$  y por lo tanto

$$\tau(x) = x^4 + x^2 + x.$$

Puesto que el polinomio  $\tau(x)$  coincide con el polinomio  $\ell(x)$ , tenemos que

$$\#N(E/\mathbb{F}_8(x)) = 4 \cdot 2 \cdot 7 + 1 = 57.$$

No se conoce aún una curva (o su equivalente un cuerpo de funciones) sobre  $\mathbb{F}_8$  de género 15 con más de 57 lugares de grado uno.

**Ejemplo 2.3.3.** En este ejemplo construiremos dos cuerpos de funciones maximales sobre el cuerpo finito  $\mathbb{F}_{64}$ .

Sean  $\ell(x) = x^6 + x^5 + 1$  y  $f(x) = (x^2 + x)^6$ . Para esta escogencia obtenemos  $\mathbb{R}_{\ell_1}(f(x)) = 1$ . El cuerpo de funciones  $E_1 := \mathbb{F}_{64}(x, y)/\mathbb{F}_{64}(x)$  definido por la ecuación de Kummer:

$$y^9 = \frac{f(x)}{\mathbb{R}_{\ell_1}(f(x))} = x^5(x + 1),$$

tiene género 3 y 113 lugares racionales. En efecto, resolviendo la congruencia (8) obtenemos que  $d(x) = x^{12} + x^6 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = (x^3 + x + 1)(x^3 + x^2 + 1)\ell(x)$ , luego

$$\#N(\mathbb{F}_{64}(x, y)) = 12 \cdot 9 + 5 = 113.$$

Ahora consideremos la extensión  $E_2$  de  $E_1$  (véase el Ejemplo 2.2.3.2) dada por la ecuación de Artin-Schreier

$$z^2 + z = \frac{(x+1)^3}{x^3}.$$

El único lugar totalmente ramificado es  $P_0$  y los lugares correspondientes a  $P_\infty$  y  $P_1$  son no ramificados y por lo tanto el género está dado por

$$g(\mathbb{F}_{64}(x, y, z)/\mathbb{F}_{64}(x)) = 2 \cdot 3 + \frac{1}{2}(-2 + 10) = 10.$$

Para el cálculo de lugares de grado uno, observemos que existen 2 lugares que caen sobre cada uno de los 3 lugares correspondientes a  $P_\infty$ , 2 lugares que caen sobre  $P_1$  y únicamente un lugar que cae sobre  $P_0$  y todos son de grado 1, por lo tanto tenemos 9 lugares de grado uno provenientes de los puntos de rama.

Ahora, luego de hacer los respectivos cálculos, obtenemos que los lugares de grado uno en la extensión  $E$  que no provienen de la ramificación son precisamente aquellos  $P_{\alpha, \beta, \gamma}$  donde  $\alpha$  es un cero del polinomio  $d(x)$ , esto implica que

$$\#N(E/\mathbb{F}_{64}(x)) = 12 \cdot 2 \cdot 9 + 9 = 225.$$

Este cuerpo de funciones es maximal puesto que

$$\#N(\mathbb{F}_{64}(x, y, z)) = q+1+2g\sqrt{q} = 64+1+2(10)(8) = 225.$$

### Referencias

- [1] **R. Fraatz**, *Computation of Maximal Orders of Cyclic Extensions of Function Fields*. PhD Thesis. Universität Berlin, 2005.
- [2] **A. Garcia and A. Garzón**, *On Kummer Covers with many Points*. J.P.A.A. **185** (2003), 177–192
- [3] **A. Garcia and L. Quous**, *A construction of curves over finite fields*. Acta Arithmetica, **98** (2001), 181–195.
- [4] **G. van der Geer & M. van der Vlugt**, *Kummer covers with many points*. Finite Fields and their applications **6** (4) (2000), 327–341.
- [5] **G. van der Geer & M. van der Vlugt**, *Tables for the function  $N_q(g)$* , disponible en <http://www.wins.uva.nl/geer>.
- [6] **V. D. Goppa**, *Codes on algebraic curves*. Sov. Math. Dokl. **24** (1981), 170–172.
- [7] **Y. Ihara**, *Some remarks on the number of rational points of algebraic curves over finite fields*. J. Fac. Sci. Tokyo **28** (1981), 721–724.
- [8] **H. Stichtenoth**, *Algebraic Function Fields and Codes*. Springer-Verlag: Berlin, 1993.

Recibido el 19 de julio de 2009

Aceptado para su publicación el 15 de marzo de 2010

# NEW IMPLICIT MULTISTEP METHOD FOR ODE'S

Gustavo Boroni<sup>1</sup>, Pablo Lotito<sup>2</sup>, Alejandro Clause<sup>3</sup>

## Abstract

**Boroni, G., P. Lotito, A. Clause:** New Implicit Multistep Method for ODE's. Rev. Acad. Colomb. Cienc. **34** (133): 521-527, 2010. ISSN 0370-3908.

A new class of multistep methods for stiff ordinary differential equations is presented. The method is based on the transformation of the arguments of the original system into purely algebraic combinations of the solutions of previous steps. The scheme differs from the classical multistep methods in that the state variables, instead of functions of them, are approximated by means of linear combination of previous steps. A family of coefficients is deduced from a combined analysis of convergence order and stability. Numerical results are presented for three test problems.

**Key words:** multistep methods, ordinary differential equations, A-stability, convergence order.

## Resumen

Se presenta una nueva clase de método multipaso para ecuaciones diferenciales ordinarias con stiff. El método se basa en la transformación de los argumentos del sistema original en un sistema puramente algebraico utilizando las soluciones de los pasos anteriores. El esquema difiere de los clásicos métodos multipaso en que las variables de estado son reemplazadas por funciones, las cuales son aproximadas por medio de una combinación lineal de las soluciones previas. Una familia de coeficientes se deduce a partir de un análisis combinado de orden de convergencia y estabilidad. Por último se presentan resultados numéricos para tres problemas test.

**Palabras clave:** métodos multipaso, ecuaciones diferenciales ordinarias, A-estabilidad, orden de convergencia.

<sup>1</sup> Uncpba-Conicet, Argentina. Correo electrónico: gboroni@exa.unicen.edu.ar.

<sup>2</sup> Conicet, Argentina. Correo electrónico: plotito@exa.unicen.edu.ar.

<sup>3</sup> CNEA-Conicet, Argentina. Correo electrónico: clause@exa.unicen.edu.ar.

AMS Subject Classification 2010: 65L04, 65L05, 65L07.

## 1. Introduction

The use of implicit numerical methods is convenient when solving general stiff Ordinary Differential Equations (ODE) problems. Their use, in turn, requires the solution of a corresponding discrete problem, which is one of the main concerns in the actual implementation of the methods. Linear implicit multistep methods and, in particular, Backward Differentiation Formulae (BDF) [6] [2] are regularly used for the numerical solution of stiff initial value problems. In turn, implicit methods require solving at each integration step an algebraic problem, whose dimension is a multiple of the corresponding continuous one [3].

A high-quality numerical method to solve stiff ODE should have good accuracy and some wide region of absolute stability ([5], [8], [9] and [10]). The latter imposes a strong limitation on the choice of suitable methods for stiff problems.

In the present paper a new class of implicit multistep method is derived, having good stability and convergence properties compared with equivalent linear schemes. The difference with classical multistep methods is the transformation of the differential system into a purely algebraic system by introducing estimation functions not only for the derivatives but also for the state variables. In this sense, the methodology used in the current method can be understood as a variant of the basic theory of classical multistep methods. In the last section, numerical experiments are presented comparing the new method with BDF.

## 2. Linear Multistep Method

Let us consider the initial value problem (IVP) [7]

$$y^{(1)}(t) = f(y), y(t_0) = y_0 \quad (1)$$

where  $t \in [t_0, t_0 + Nh]$  ( $N$  being a natural number and  $h$  a constant time step),  $y : [t_0, t_0 + Nh] \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $y^{(1)}$  stands for the first temporal derivative, and  $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  is continuous and differentiable.

The classical linear multistep method can be written in the general form [2]

$$\sum_{i=0}^k \alpha_i y_{n-i} = h \sum_{i=0}^k \beta_i f(y_{n-i}), \quad (2)$$

where  $\alpha_i$ ,  $\beta_i$  are parameters to be determined and  $y_n = y(t_0 + nh)$ . The method is *explicit* if  $\beta_0 = 0$  and *implicit*

otherwise. A multistep method is of order  $p$  if and only if [3]:

$$\sum_{i=0}^k \alpha_i i^q = q \sum_{i=0}^k \beta_i i^{q-1} + O(h^p), \quad (3)$$

with  $0 \leq q \leq p$ . The well-known multistep scheme BDF is given by

$$\sum_{i=0}^k \alpha_i y_{n-i} = h \beta_0 f(y_n). \quad (4)$$

This scheme is a class of  $k$ -step formula of order  $k$ , and for  $k = 2$ , the BDF coefficients are [2]

$$\alpha_0 = \frac{3}{2}, \alpha_1 = -2, \alpha_2 = \frac{1}{2}, \beta_0 = 1. \quad (5)$$

## 3. New multistep transformation

The general multistep formula (*i.e.* Eq. 2) is essentially a transformation of the differential Eq. 1 into a purely algebraic equation by means of the estimators:

$$y^{(1)} \rightarrow \frac{1}{h} \sum_{i=0}^k \alpha_i y_{n-i}, f(y) \rightarrow \sum_{i=0}^k \beta_i f(y_{n-i}). \quad (6)$$

Let us propose the following alternative set of transformations:

$$y \rightarrow \sum_{i=0}^k A_i y_{n-i}, y^{(1)} \rightarrow \frac{1}{h} \sum_{i=0}^k B_i y_{n-i}. \quad (7)$$

where  $A_i$  and  $B_i$  are coefficients satisfying  $\sum_{i=0}^k B_i = 0$  and  $\sum_{i=0}^k A_i = 1$ . Eq. 7 lead to the following alternative multistep algebraic equation:

$$\frac{1}{h} \sum_{i=0}^k B_i y_{n-i} = f \left( \sum_{i=0}^k A_i y_{n-i} \right). \quad (8)$$

To make clear the deduction of the coefficients, let us consider a two-step instance of Eq. 8 ( $k = 2$ ). The general method to determine the coefficients  $A_i$  and  $B_i$ , can be generalized from this particular case.

**3.1. Convergence order.** Expanding  $y_{n-2}$  and  $y_n$  in Taylor series around  $(t-h)$  leads to:

$$\begin{aligned} y_n &= y_{n-1}^{(0)} + h y_{n-1}^{(1)} + \frac{h^2}{2} y_{n-1}^{(2)} + O(h^3), \\ y_{n-2} &= y_{n-1}^{(0)} - h y_{n-1}^{(1)} + \frac{h^2}{2} y_{n-1}^{(2)} + O(h^3), \end{aligned} \quad (9)$$

where  $y_n^{(k)}$  stands for the  $k$ -th derivative of  $y$  respect to time. Combining Eqs. 7 and 9 yields:

$$\begin{aligned} y_n^{(1)} &= (B_0 - B_2) y_{n-1}^{(1)} + \\ & (B_0 + B_2) \frac{h}{2} y_{n-1}^{(2)} + O(h^2), \\ y_n &= y_{n-1}^{(0)} + (A_0 - A_2) h y_{n-1}^{(1)} + O(h^2). \end{aligned} \tag{10}$$

Expanding now  $f_j$  around  $(t-h)$ , gives

$$f(y_n) = f(y_{n-1}) + \nabla^T f(y_{n-1}) y_{n-1}^{(1)} h + O(h^2), \tag{11}$$

where  $\nabla^T f(y_n)$  stand for the transpose gradient of  $f(y)$  (taken separately to each component  $f_j$  evaluated at  $y = y_n$ ).

Likewise, expanding the right term of the Eq. 8, gives:

$$\begin{aligned} f\left(\sum_{i=0}^2 A_i y_{n-i}\right) &= f^{(0)}(y_{n-1}) + \\ & (A_0 - A_2) \nabla^T f(y_{n-1}) y_{n-1}^{(1)} h + O(h^2). \end{aligned} \tag{12}$$

The relation between  $f(y_n)$  and  $\nabla^T f(y_n)$  with  $y_n^{(k)}$  can be found by successive differentiations of Eq. 1. Combining Eq. 10 to Eq. 12 yields:

$$\begin{aligned} (B_0 - B_2) y_{n-1}^{(1)} &= f(y_{n-1}), \\ (B_0 + B_2) y_{n-1}^{(2)} \frac{h}{2} &= (A_0 - A_2) \nabla^T f(y_{n-1}) y_{n-1}^{(1)} h, \end{aligned} \tag{13}$$

which leads to the following set of algebraic equations for the coefficients  $A_i$  and  $B_i$ :

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^2 A_i &= 1, \\ \sum_{i=0}^2 B_i &= 0, \\ (B_0 - B_2 - 1) f(y_{n-1}) &= 0, \\ (B_0 + B_2 - 2A_0 + 2A_2) \nabla^T f(y_{n-1}) f(y_{n-1}) &= 0. \end{aligned} \tag{14}$$

Eqs. 14 is a set of 4 algebraic equations with 6 unknowns. Therefore, there is a family of coefficients  $A_i$  and  $B_i$  that ensures  $O(h^2)$  convergence; that is:

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{1}{2} - \frac{B_1}{4} - \frac{A_1}{2}, \quad A_2 = \frac{1}{2} + \frac{B_1}{4} - \frac{A_1}{2}, \\ B_0 &= \frac{1}{2} - \frac{B_1}{2}, \quad B_2 = -\frac{1}{2} - \frac{B_1}{2}. \end{aligned} \tag{15}$$

**3.2. 0-Stability.** As the name implies, 0-stability is concerned whit what happens in the limit  $h \rightarrow 0$  [2]. The linear multistep method is 0-stable if all  $k$  roots  $\xi_i$  of the characteristic polynomial:

$$\rho(\xi) = \sum_{i=0}^2 B_i \xi^{2-i} = 0, \tag{16}$$

satisfy  $|\xi_i| \leq 1$ . If the root condition is satisfied, the method is accurate to order  $p$ . Therefore provided that the initial values are accurate to order  $p$ , the method is convergent to order  $p$ .

**Lemma 1.** *If  $B_1 \leq 0$ , then the roots  $\xi_1$  and  $\xi_2$  of  $\rho(\xi)$  verify that  $|\xi_i| \leq 1$ , for  $i = 1, 2$ .*

*Proof.* Applying Eq. 15 to Eq. 16 yields

$$\rho(\xi) = \xi^2 \left( \frac{1}{2} - \frac{B_1}{2} \right) + \xi B_1 - \frac{1}{2} - \frac{B_1}{2} = 0. \tag{17}$$

Then, the roots are

$$\xi_{1,2} = \frac{-B_1 \pm 1}{1 - B_1}. \tag{18}$$

Next, it can be observed that

$$|\xi_1| = \left| \frac{-B_1 + 1}{1 - B_1} \right| = 1, \tag{19}$$

and

$$|\xi_2| = \left| \frac{-B_1 - 1}{1 - B_1} \right| = \left| -1 - \frac{2B_1}{1 - B_1} \right| \leq 1, \tag{20}$$

for  $B_1 \leq 0$ .

**3.3. A-Stability.** The stability of the linear multistep method is given by the stability of the resulting difference equation [2]. Applying Eq. 8 for  $k=2$  to the linear test equation  $y = \lambda y$ , ( $\lambda \in \mathbb{C}$ ), yields:

$$\sum_{i=0}^2 (B_i - \lambda A_i) y_{n-i} = 0. \tag{21}$$

The stability of Eq. 21 is demonstrated by ensuring the stability of the difference equation. The difference equation is stable if all roots  $\xi_i$  of:

$$\phi(\xi) = \sum_{i=0}^2 (B_i - A_i h \lambda) \xi^{2-i} = 0, \tag{22}$$

satisfy  $|\xi_i| \leq 1$ .

When  $f$  is linear and  $k=2$ , a necessary condition for A-stability is given by [2]  $Re(z) \geq 0$ , where

$$z = \frac{\sum_{i=0}^2 B_i q^{2-i}}{\sum_{i=0}^2 A_i q^{2-i}}, \tag{23}$$

for all (unitary) complex numbers  $q = \cos \theta + i \sin \theta$ , for  $\theta \in [0, 2\pi]$ .

Figures 1 and 2 compare the absolute stability regions for the proposed method and the BDF method for different sets of coefficients. However, numerical computations show that, in the general case, those conditions are not sufficient. For example, for the values  $A_1 \geq 1/2$  and  $B_1 \leq 0$  the method is A-unstable.

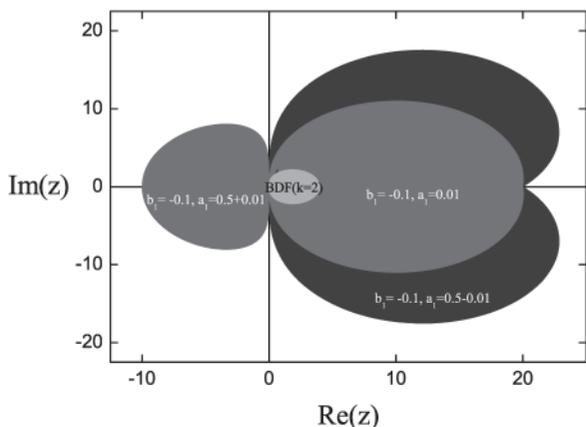


Figure 1. Absolute stability region of the present method and the BDF method

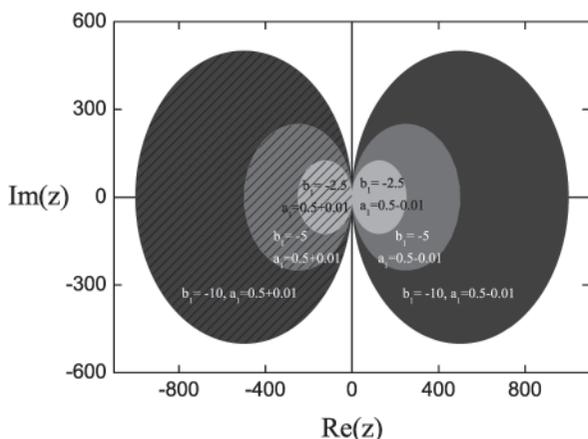


Figure 2. Absolute stability region of the present method and the BDF method

For the particular case of  $k=2$  a range for the coefficients that make our method A-stable can be found. We resume this result in the next lemma.

**Lemma 2.** *If  $B_1 \leq 0$ ,  $A_1 < 1/2$  and  $Re(z) < 0$ , then all the roots  $\xi$  of the  $\phi(\xi)$  verify  $|\xi| \leq 1$ .*

*Proof.* Applying into 15 and 16, the roots of the difference equation are:

$$\xi_{1,2}(z) = \frac{A_1 z - B_1 \pm \sqrt{1 - \left(B_1 - \frac{B_1^2}{2}\right) z - \left(1 - 2A_1 - \frac{B_1^2}{2}\right) z^2}}{1 - B_1 - \left(1 - A_1 - \frac{B_1}{2}\right) z} \tag{24}$$

The aim is to study the function  $\xi_{1,2}(z)$  of the complex variable  $z$ , for the values of  $A_1$ ,  $B_1$  and  $z$  defined in the hypothesis. First, observe that the denominator of Eq. 24 vanishes for

$$z = \frac{2B_1 - 2}{2A_1 - 2 + B_1}, \tag{25}$$

which is a real positive number, meaning that it will never occur as  $Re(z) < 0$ . Then  $\xi_{1,2}(z)$  is an analytic function in  $C_-$  and hence, by the *Principle of Maximum* [4], for every open and convex set  $\Omega \subset C_-$ , the maximum of  $|\xi_{1,2}(z)|$  in  $\Omega$  is obtained at the boundary. So, it is sufficient to prove that the following limit inequalities are verified:

$$\begin{aligned} \lim_{u \rightarrow -\infty} |\xi_{1,2}(u + iv)| &\leq 1, \quad \forall v \in \mathbb{R}, \\ \lim_{u \rightarrow \pm\infty} |\xi_{1,2}(u + iv)| &\leq 1, \quad \forall v \in \mathbb{R}_- \cup \{0\}. \end{aligned} \tag{26}$$

Which are easily verified for  $B_1 \leq 0$ ,  $A_1 < 1/2$  and  $Re(\lambda) < 0$ , as require the lemma, *q.e.d.*

**Remark.** Although the proposed scheme is A-stable for  $B_1 \leq 0$  and  $A_1 < 1/2$ , the numerical solution of the resulting algebraic system is compromised when the absolute values of these coefficients become too large. Heuristic tests have shown that efficient numerical schemes can be ensured keeping a lower bound of -5 for both coefficients.

#### 4. Numerical experiments

In order to assess its performance the new multistep method was applied to the integration of specific equations using  $B_1 = -1,5$  and  $A_1 = 0,1$ . This method was compared with the BDF and Adams-Bashforth-Moulton methods for  $k=2$ .

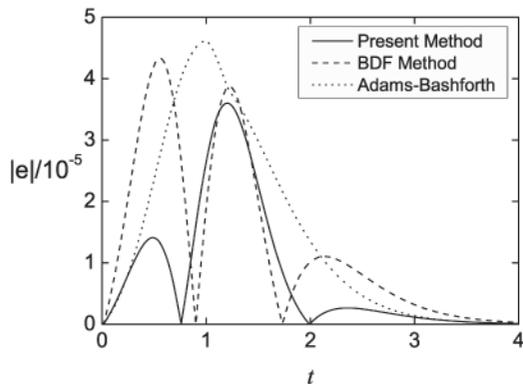
**4.1. Ricatti equation (m = 1).** Let us consider the following Ricatti equation [1]

$$y^{(1)} = -2 - y + y^2, \tag{27}$$

with initial value  $y_0 = 1,8$ . The exact solution is given by:

$$y(t) = 2 - \frac{3}{1 + 14e^{-3t}}, \tag{28}$$

Figure 3 shows the absolute difference between the analytic and the numerical solutions for  $h = 0.01$ . It can be observed that the numerical solutions obtained by all methods are similar; and these are always below the order  $O(h^2)$ .



**Figure 3.** Absolute difference  $|e|$  between the analytic and the numerical solutions ( $h = 0,01$ )

**4.2. Stiff linear case.** An example of a stiff linear equation is:

$$y^{(3)} = - (1003y^{(2)} + 3002y^{(1)} + 2000y), \quad (29)$$

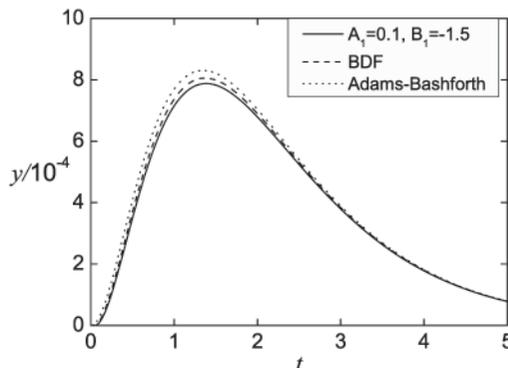
with initial value  $y_0 = 1$ ,  $y_0^{(1)} = -1,5$  and  $y_0^{(2)} = 2,5$ . The exact solution is given by:

$$y(t) = 0,5 (e^{-t} + e^{-2t}). \quad (30)$$

The stiffness ratio, given by [2]

$$R = \frac{\max_{1 \leq i \leq n} |Re(\lambda_i)|}{\min_{1 \leq i \leq n} |Re(\lambda_i)|}, \quad (31)$$

where  $\lambda_i$  are the eigenvalues of the Jacobian matrix, results  $R = 1000$ . This indicates that the stiffness of the system is very high.

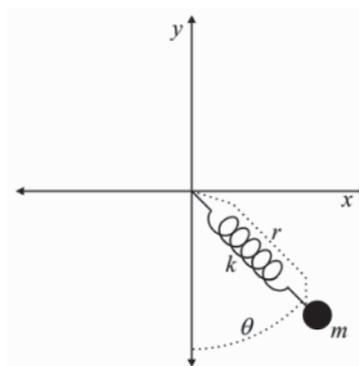


**Figure 4.** Absolute difference  $|e|$  between the analytic and the numerical solutions ( $h = 0,01$ )

Figure 4 shows the temporal evolution of the absolute difference  $|e|$  between the analytic and the numerical solutions for  $y$  ( $h = 0.01$ ). It can be seen that the three methods give very similar results, whose departure from the exact solution are always below the order of convergence.

**4.3. Elastic pendulum.** The elastic pendulum (figure 5) is represented by a fourth-order no-linear system whose natural variables are the string length,  $r$ , the inclination angle with respect to the vertical,  $\theta$ , and their respective temporal derivatives,  $z$  and  $w$ , that is [11]:

$$\begin{aligned} r^{(1)} &= z, \\ \theta^{(1)} &= w, \\ z^{(1)} &= rw^2 - \frac{k}{m} (r - L) + g \cos \theta, \\ w^{(1)} &= (-g \sin \theta - 2zw) \frac{1}{r}. \end{aligned} \quad (32)$$

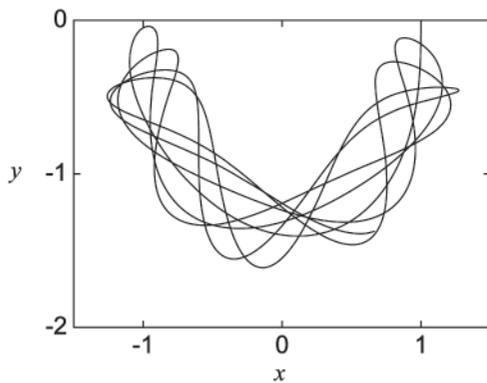


**Figure 5.** Elastic Pendulum

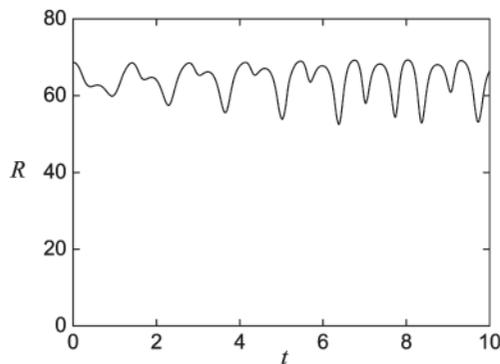
Comparisons were made using the following parameters and initial conditions:  $k = 7$ ,  $L = 1$ ,  $m = 0,1$ ,  $g = 9,8$ ,

$r_0 = 1$ ,  $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$ ,  $\dot{r}_0 = 0$  and  $\dot{\theta}_0 = 0$ . Figure 6 shows the trajectory of the mass in the  $(x, y)$  plane. Figure 7 shows that the stiffness ratio is always much greater than 1, which indicates that the stiffness of the system is high. Figures 8 and 9 shows the absolute differences,  $|e_r|$  and  $|e_\theta|$ , for the variables  $r$  and  $\theta$  calculated between the present method ( $B_1 = -1,5$  and  $A_1 = 0,1$ ) compared BDF ( $B_1 = -2$  and  $A_1 = 0$ ) and Adams-Bashforth-Moulton method, showing good agreement.

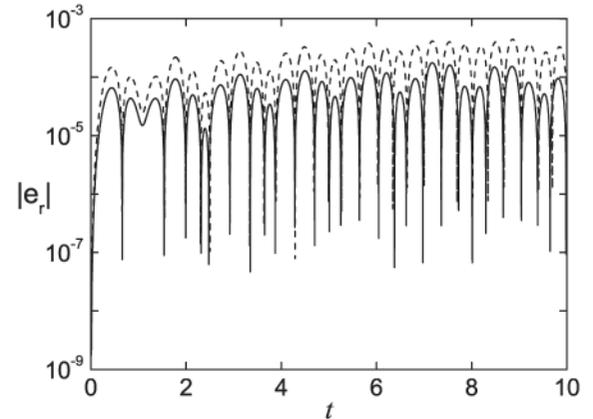
It can be seen that the differences do not escalate, remaining bounded even for very long times.



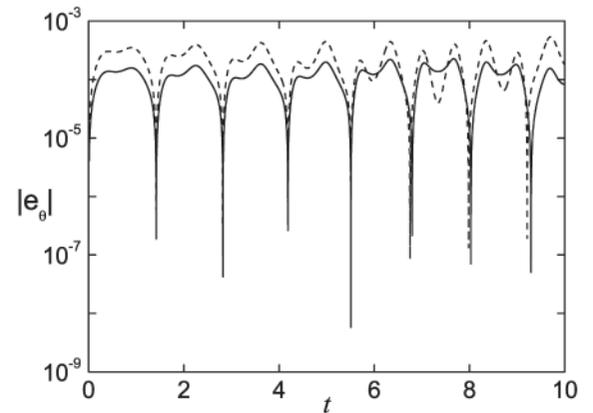
**Figure 6.** Trajectory of the mass tied to an elastic pendulum in the  $(x, y)$  plane



**Figure 7.** Temporal evolution of the stiffness ratio  $R$  of the elastic pendulum



**Figure 8.** Absolute difference  $|e_r|$  of the variable  $r$  calculated with present method ( $B_1 = -1,5, A_1 = 0,1$ ) and (solid) BDF ( $B_1 = -2, A_1 = 0$ ), (dashed) Adams-Bashforth-Moulton method. The time step is  $h = 0,01$



**Figure 9.** Absolute difference  $|e_\theta|$  of the variable  $\theta$  calculated with present method ( $B_1 = -1,5, A_1 = 0,1$ ) and (solid) BDF ( $B_1 = -2, A_1 = 0$ ), (dashed) Adams-Bashforth-Moulton method. The time step is  $h = 0,01$

Table 1 shows the ratio between the CPU time divided by the simulated time, for each method, with respect to the time step  $h$ . As expected, the time ratio decreases as  $h$  increases, being the present method better than the Adams-Bashforth-Moulton one.

**Tabla 1.** Ratios between CPU time and simulated time ( $B_1 = -1,5, A_1 = 0,1$ ).

$h$	Adams-Bashforth-Moulton	BDF	Present method
10-4	0.186	0.184	0.182
10-3	0.025	0.023	0.022
10-2	0.002	0.001	0.001

## 5. Conclusions

A class of second order multistep methods that produce good candidates for the solution of stiff problems was presented. The class includes as a special case the BDF method. The scheme differs from the classical multistep methods in that the state variables, instead of the functions of them, are approximated by means of linear combination of previous steps. This feature can be usefulness in the design of object-oriented numerical solvers, since the state variables are natural candidates for object definitions.

For a suitable choice of the parameters, the scheme was proved to be A-stable using the Maximum Principle of the theory of complex functions. With several numerical examples it has been also shown that the computation time is approximately the same as the BDF and Adams-Bashforth-Moulton methods, providing a larger stability region. Moreover, the results presented here open the possibility of extending the methodology to DAE systems, since its generalization is straightforward.

## References

- [1] **Abramowitz, M. and Stegun, I. A.** (Eds.). Riccati-Bessel Functions."§10.3 in *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*, 9th printing. New York: Dover, p. 445, 1972.
- [2] **Ascher U. and Petzold L.**, *Computer Method for Ordinary Differential Equations and Differential Algebraic Equations*. Siam. 1998.
- [3] **Butcher J.**, *Numerical Method for Ordinary Differential Equations*. Wiley. 2003.
- [4] **Conway J. B.**, *Functions of One Complex Variable*, Springer-Verlag, 1978.
- [5] **Dahlquist G.**, *A special stability problem for linear multistep methods*, BIT 3 27-43. 1963.
- [6] **Gear W.**, *Simultaneous Numerical Solution of Differential Algebraic Equations*, IEEE Transaction on Circuit Theory, Vol 18 Nro 1., pp. 89-95, (1971).
- [7] **Hairer E., Wanner G.**, *Solving Ordinary Differential Equations II: Stiff and Differential-Algebraic Problems*, Springer, Berlin, 1996.
- [8] **Enright W.H.**, *Second derivative multistep methods for stiff ordinary differential equations*, SIAM J. Numer. Anal. 11 321-331. 1974.
- [9] **Ismail G., Ibrahim I.**, *New efficient second derivative multistep methods for stiff systems*, Appl. Math. Model. 23 279-288. 1999.
- [10] **Lambert J. D.**, *Computational Methods in Ordinary Differential Equations*, John Wiley and Sons. 1972.
- [11] **Thompson J. and Stewart H.**, *Nonlinear Dynamics and Chaos*, Wiley. 1987.

Recibido en noviembre 10 de 2009

Aceptado para su publicación el 11 de noviembre de 2010



# ASYMPTOTIC BEHAVIOUR OF THE JACOBI SOBOLEV-TYPE ORTHOGONAL POLYNOMIALS. A NON DIAGONAL CASE

Herbert Dueñas<sup>1</sup>, Luis Garza<sup>2</sup>

## Abstract

**Dueñas, H., L. Garza:** Asymptotic behaviour of the Jacobi Sobolev-type orthogonal polynomials. A non diagonal case. *Rev. Acad. Colomb. Cienc.* **34** (133): 529-539, 2010. ISSN 0370-3908.

Consider the following Sobolev type inner product

$$\langle p, q \rangle_s = \int_{-1}^1 p(x)q(x)(1-x)^\alpha(1+x)^\beta dx + \mathbb{P}(1)' \mathbb{A} \mathbb{Q}(1), \quad (1)$$

where  $p$  and  $q$  are polynomials with real coefficients,  $\alpha, \beta > -1$ ,  $\mathbb{P}(x) = (p(x), p'(x))'$ , and

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} M_0 & \lambda \\ \lambda & M_1 \end{pmatrix}$$

is a positive semidefinite matrix, with  $M_0, M_1 \geq 0$ , and  $\lambda \in \mathbb{R}$ . The family of polynomials orthogonal with respect to (2),  $\{\tilde{P}_n^{\alpha, \beta}\}_{n \geq 0}$ , are called Jacobi Sobolev-type orthogonal polynomials. An expression that relates this family of polynomials with  $\{P_n^{\alpha, \beta}\}_{n \geq 0}$ , the usual Jacobi orthogonal polynomials, was obtained in [8]. Here, we obtain the outer relative asymptotic for  $\{\tilde{P}_n^{\alpha, \beta}\}_{n \geq 0}$ , as well as the corresponding Mehler–Heine formula.

**Key words:** Orthogonal polynomials, Sobolev-type inner products, Jacobi polynomials, Asymptotic behaviour, Zeros.

## Resumen

Consideremos el siguiente producto interno de tipo Sobolev

<sup>1</sup> Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, Colombia. Correo electrónico: haduenasr@unal.edu.co

<sup>2</sup> Facultad de Ciencias, Universidad de Colima, Bernal Díaz del Castillo No. 340, Colima, Colima, México. Correo electrónico: garzaleg@gmail.com

AMS Classification 2000: 33C47.

$$\langle p, q \rangle_s = \int_{-1}^1 p(x)q(x)(1-x)^\alpha(1+x)^\beta dx + \mathbb{P}(1)' \mathbb{A} \mathbb{Q}(1), \quad (2)$$

donde  $p$  y  $q$  son polinomios con coeficientes reales,  $\alpha, \beta > -1$ ,  $\mathbb{P}(x) = (p(x), p'(x))'$ , y

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} M_0 & \lambda \\ \lambda & M_1 \end{pmatrix}$$

es una matriz positiva semidefinida, donde  $M_0, M_1 \geq 0$ , y  $\lambda \in \mathbb{R}$ . La familia de los polinomios ortogonales con respecto a (2),  $\{\tilde{P}_n^{\alpha, \beta}\}_{n \geq 0}$ , se llaman polinomios del tipo Jacobi Sobolev. Una expresión que relaciona esta familia de polinomios con  $\{P_n^{\alpha, \beta}\}_{n \geq 0}$ , los polinomios ortogonales de Jacobi usuales, se obtuvo en [8]. Aquí obtenemos la asintótica relativa exterior para  $\{\tilde{P}_n^{\alpha, \beta}\}_{n \geq 0}$ , así como también la correspondiente fórmula de Mehler–Heine.

**Palabras clave:** Polinomios ortogonales, productos internos del tipo Sobolev, polinomios de Jacobi, comportamiento asintótico, ceros.

## 1. Introduction

Let us consider the inner product

$$\langle p, q \rangle = \int_{\mathbb{R}} p(x)q(x)d\sigma(x) + \mathbb{P}(c)' \mathbb{A} \mathbb{Q}(c), \quad (3)$$

where  $d\sigma$  is a nontrivial probability measure supported on the real line,  $\mathbb{A} \in \mathbb{R}^{(k, k)}$  is a positive semidefinite matrix,  $p, q$  are polynomials with real coefficients, and  $\mathbb{Q}(c) = (q(c), q'(c), \dots, q^{(k-1)}(c))'$ . The polynomials orthogonal with respect to (3) are called Sobolev–type orthogonal polynomials, and were introduced in [3].

Most of the work about the Sobolev–type polynomials has been done in the case that the orthogonality measure  $d\mu$  corresponds to classical polynomials. In [12], the author studied (3) with  $\mathbb{A}$  a diagonal matrix,  $d\sigma = x^\alpha e^{-x} dx$ ,  $\alpha > -1$  and  $c = 0$ . He obtained the second order differential equation satisfied by these polynomials.

The asymptotic properties of orthogonal polynomials with respect to (3) when  $\mathbb{A}$  a diagonal matrix have been studied in the literature by many authors. In particular, in [16] the authors consider the outer relative asymptotics, in a more general framework. There, they introduce a Sobolev inner product in terms of a measure of the Nevai class  $M(0, 1)$  (a family of measures with a positive a.e absolutely continuous component and supported in  $[-1, 1] \cup E$  where  $E$  is a discrete set with accumulation points in  $[-1, 1]$  that generalizes the Jacobi weight function) and analyze the outer relative asymptotics of the corresponding orthogonal polynomials according to the location of the point  $c$  with respect to the support of the measure. An extension of these results was done for the non diagonal case in [3], as well as in a more general context in [14] for many pass points located outside the support of the measure.

The asymptotic behaviour of the corresponding orthogonal polynomials in the particular case when  $k = 2$  was analyzed in [5] and [15], and some properties about the location of the zeros were studied in [13]. On the other hand, for  $k \geq 2$ ,  $d\sigma = x^\alpha e^{-x} dx$ ,  $c = 0$  and  $M_0 = M_1 = \dots = M_{k-2} = 0$ ,  $M_{k-1} > 0$ , the same problems were studied in [17], in the framework of the zero distribution, and the study of the asymptotic behaviour was developed in [9].

The nondiagonal case was considered for the first time in [4]. In this paper, the authors considered the Hermite Sobolev–type polynomials, orthogonal with respect to (3) with  $\mathbb{A}$  a  $2 \times 2$  symmetric matrix,  $d\sigma = e^{-x^2} dx$  and  $c = 0$ , studying the asymptotic behaviour of such polynomials.

The Laguerre Sobolev–type polynomials, for  $k = 2$ ,  $\mathbb{A}$  a nondiagonal matrix, and  $d\sigma = x^\alpha e^{-x}$ ,  $\alpha > -1$ , were studied in [10], where the authors studied the outer relative asymptotics with respect to the standard Laguerre polynomials, as well as an analog of the Mehler–Heine formula for the rescaled polynomials, and in [11], where the second order differential equation that these polynomials satisfy was deduced.

Finally, the study of the Jacobi Sobolev–type polynomials, orthogonal with respect to (3) where  $\mathbb{A}$  is a  $2 \times 2$  symmetric and nondiagonal matrix,  $d\sigma = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta dx$  and  $c = 1$ , started in [8]. There, the authors obtained a connection formula that relates the Jacobi Sobolev–type polynomials with some family of Jacobi polynomials, as well as the holonomic equation that they satisfy. In this contribution, we extend this analysis in order to find their asymptotic behavior. The structure of the manuscript is as follows. Section 2 is devoted to some preliminary results regarding basic theory of classical orthogonal polynomials. In Section 3, we present some of the results obtained in [8], as well as some new properties regarding the zeros of Jacobi Sobolev–type polynomials.

Finally, in Section 4 we present their outer relative asymptotic behavior, as well as their corresponding Mehler-Heine formula.

### 2. Preliminaries

Let  $\mu$  be a linear functional defined on  $\mathbb{P}$ , the linear space of polynomials with real coefficients. If  $\mu$  is quasi-definite (i.e., if the leading principal submatrices of the Hankel matrix associated with their moments  $\mu_n = \langle \mu, x^n \rangle$ ,  $n \geq 0$ , are non singular), then there exists a family of monic polynomials  $\{P_n\}_{n \geq 0}$  such that

$$(i) \quad \langle \mu, P_n(x)P_m(x) \rangle = 0, \quad n \neq m.$$

$$(ii) \quad \langle \mu, P_n^2(x) \rangle \neq 0, \quad n \geq 0,$$

where the degree of  $P_n$  is  $n$ .  $\{P_n\}_{n \geq 0}$  is said to be the sequence of monic polynomials orthogonal with respect to  $\mu$ , and satisfies the three term recurrence relation

$$xP_n(x) = P_{n+1}(x) + \beta_n P_n(x) + \gamma_n P_{n-1}(x), \quad n \geq 0, \quad (4)$$

where  $P_{-1}(x) = 0$ ,  $P_0(x) = 1$  and the recurrence coefficients  $\{\beta_n\}_{n \geq 0}$ ,  $\{\gamma_n\}_{n \geq 1}$  are real numbers with  $\gamma_n \neq 0$  for  $n \geq 0$ .

The  $n$ -th reproducing kernel associated with  $\{P_n\}_{n \geq 0}$  is defined by

$$K_n(x, y) = \sum_{k=0}^n \frac{P_k(x)P_k(y)}{\|P_k\|_\mu^2},$$

where  $\|P_k\|_\mu^2 = \langle \mu, P_k^2(x) \rangle$ .  $K_n(x, y)$  can also be expressed in terms of  $P_n$  and  $P_{n+1}$ , as follows

$$K_n(x, y) = \frac{P_{n+1}(x)P_n(y) - P_n(x)P_{n+1}(y)}{\|P_n\|_\mu^2(x - y)}, \quad (5)$$

for  $x \neq y$ , known in the literature as Christoffel-Darboux formula.

We denote by  $K_n^{(i,j)}(x, y)$  the  $i$ -th,  $j$ -th derivatives of  $K_n(x, y)$  with respect to the variables  $x, y$ , i.e.,

$$K_n^{(i,j)}(x, y) = \frac{\partial^{i+j}(K_n(x, y))}{\partial x^i \partial y^j}.$$

Then, it can be shown that

**Proposition 1.** [9] For every  $n \in \mathbb{N}$ ,

1.

$$K_{n-1}^{(0,j)}(a, a) = \frac{1}{\|P_{n-1}\|_\mu^2(j+1)} \left( P_{n-1}(a)P_n^{(j+1)}(a) - P_n(a)P_{n-1}^{(j+1)}(a) \right). \quad (6)$$

2.

$$K_{n-1}^{(j,j)}(a, a) = \frac{(j!)^2}{(2j+1)! \|P_{n-1}\|_\mu^2} \times \quad (7)$$

$$\left[ \left( P_{n-1}(a)P_n^{(2j+1)}(a) + P'_{n-1}(a)P_n^{(2j)}(a) \binom{2j+1}{1} \right) + \dots + \binom{2j+1}{j} P_{n-1}^{(j)}(a)P_n^{(j+1)}(a) \right] - \left[ P_n(a)P_{n-1}^{(2j+1)}(a) + P'_n(a)P_{n-1}^{(2j)}(a) \binom{2j+1}{1} \right] + \dots + \binom{2j+1}{j} P_n^{(j)}(a)P_{n-1}^{(j+1)}(a) \left. \right].$$

If the linear functional  $\mu$  is positive definite (i.e., if the leading principal submatrices of the Hankel matrix have positive determinant), then there exists the following integral representation

$$\langle \mu, p(x) \rangle = \int_E p(x)d\sigma(x), \quad p \in \mathbb{P}, \quad (8)$$

where  $\sigma(x)$  is a nontrivial probability measure supported on some subset  $E$  of the real line. In such a case, there exists a sequence of orthonormal polynomials  $\{p_n\}_{n \geq 0}$  associated with  $\mu$  that satisfies

$$\int_E p_n(x)p_m(x)d\sigma(x) = \delta_{n,m}, \quad n, m \geq 0. \quad (9)$$

The families of orthogonal polynomials more widely studied are the so-called classical orthogonal polynomials (Hermite, Laguerre, Jacobi and Bessel ). They can be characterized by the following properties

(a)  $\{P_n\}_{n \geq 0}$  is classical if and only if there exist sequences  $\{a_n\}_{n \geq 0}, \{b_n\}_{n \geq 0}$  and  $\{c_n\}_{n \geq 0}$ , with  $c_n \neq 0$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , such that

$$\phi(x)P'_n(x) = a_n P_{n+1}(x) + b_n P_n(x) + c_n P_{n-1}(x),$$

with  $\deg \phi \leq 2$ .

(b) They are solutions of a second order differential equation of the form

$$\phi(x)y''(x) + \tau(x)y'(x) + \lambda_n y(x) = 0,$$

where  $\phi$  and  $\tau$  are polynomials independent of  $n$ , which are specific for each family and whose degrees are at most 2 and 1, respectively.

This work deals with (monic) Jacobi polynomials, denoted by  $\{P_n^{\alpha,\beta}\}_{n \geq 0}$ . They are defined by the orthogonality relation

$$\int_{-1}^1 P_n^{\alpha,\beta} P_m^{\alpha,\beta} d\sigma(x) = \frac{2^{2n+\alpha+\beta+1} \Gamma(n+\alpha+1) \Gamma(n+\beta+1) \Gamma(n+\alpha+\beta+1) n!}{(2n+\alpha+\beta+1) (\Gamma(2n+\alpha+\beta+1))^2} \delta_{n,m},$$

for  $n, m \geq 0$ , where  $d\sigma(x) = (1-x)^\alpha (1+\alpha)^\beta dx$ ,  $\alpha > -1$  and  $\beta > -1$ . We will denote the corresponding inner product by  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\alpha,\beta}$ .

The following Proposition summarizes some well known properties (see [6], [7] and [18]) of Jacobi polynomials.

**Proposition 2.** Let  $\{P_n^{\alpha,\beta}\}_{n \geq 0}$  be the sequence of Jacobi monic polynomials.

1. For every  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$xP_n^{\alpha,\beta}(x) = P_{n+1}^{\alpha,\beta}(x) + \beta_n^{\alpha,\beta} P_n^{\alpha,\beta}(x) + \gamma_n^{\alpha,\beta} P_{n-1}^{\alpha,\beta}(x), \tag{10}$$

with

$$\begin{aligned} \beta_n^{\alpha,\beta} &= \frac{\beta^2 - \alpha^2}{(2n + \alpha + \beta)(2n + 2 + \alpha + \beta)}, \\ \gamma_n^{\alpha,\beta} &= \frac{4n(n + \alpha)(n + \beta)(n + \alpha + \beta)}{(2n + \alpha + \beta - 1)(2n + \alpha + \beta)^2(2n + \alpha + \beta + 1)}, \end{aligned}$$

$$P_0^{\alpha,\beta}(x) = 1, \text{ and } P_1^{\alpha,\beta}(x) = x + \frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta + 2}.$$

2. For every  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$(1 - x^2)(P_n^{\alpha,\beta}(x))' = a_n^{\alpha,\beta} P_{n+1}^{\alpha,\beta}(x) + b_n^{\alpha,\beta} P_n^{\alpha,\beta}(x) + c_n^{\alpha,\beta} P_{n-1}^{\alpha,\beta}(x), \tag{11}$$

where

$$\begin{aligned} a_n^{\alpha,\beta} &= -n, \\ b_n^{\alpha,\beta} &= \frac{2(\alpha - \beta)n(n + \alpha + \beta + 1)}{(2n + \alpha + \beta)(2n + 2 + \alpha + \beta)}, \text{ and} \\ c_n^{\alpha,\beta} &= \frac{4n(n + \alpha)(n + \beta)(n + \alpha + \beta)(n + \alpha + \beta + 1)}{(2n + \alpha + \beta - 1)(2n + \alpha + \beta)^2(2n + \alpha + \beta + 1)}. \end{aligned}$$

3. For every  $n \in \mathbb{N}$ , there exists a sequence of real numbers  $\{\lambda_n\}_{n \geq 0}$  such that  $P_n^{\alpha,\beta}(x)$  satisfies the second order linear differential equation

$$\phi(x)y'' + \psi_{\alpha,\beta}(x)y' = \lambda_n^{\alpha,\beta}y \tag{12}$$

with  $\phi(x) = 1 - x^2$ ,  $\psi_{\alpha,\beta}(x) = -(\alpha + \beta + 2)x + \beta - \alpha$  and  $\lambda_n^{\alpha,\beta} = -n(n + 1 + \alpha + \beta)$ .

4. For every  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$(P_n^{\alpha,\beta}(x))' = nP_{n-1}^{\alpha+1,\beta+1}(x). \tag{13}$$

5. For every  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$P_n^{\alpha,\beta}(x) = P_n^{\alpha+1,\beta}(x) - \frac{2n(n + \beta)}{(2n + \alpha + \beta)(2n + \alpha + \beta + 1)} P_{n-1}^{\alpha+1,\beta}(x). \tag{14}$$

6. For every  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$K_n(x, 1) = A_n P_n^{\alpha+1,\beta}(x), \text{ with } A_n = \frac{P_n^{\alpha,\beta}(1)}{\|P_n^{\alpha,\beta}\|_{\alpha,\beta}^2}. \tag{15}$$

7. For every  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$P_n^{\alpha,\beta}(1) = 2^n \frac{\Gamma(n + \alpha + 1) \Gamma(n + \alpha + \beta + 1)}{\Gamma(\alpha + 1) \Gamma(2n + \alpha + \beta + 1)}, \tag{16}$$

$$P_n^{\alpha,\beta}(-1) = (-2)^n \frac{\Gamma(n + \beta + 1) \Gamma(n + \alpha + \beta + 1)}{\Gamma(\beta + 1) \Gamma(2n + \alpha + \beta + 1)}. \tag{17}$$

8. For every  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\|P_n^{\alpha,\beta}(x)\|_{\alpha,\beta}^2 = \frac{2^{2n+\alpha+\beta+1} \Gamma(n + \alpha + 1) \Gamma(n + \beta + 1) \Gamma(n + \alpha + \beta + 1) n!}{(2n + \alpha + \beta + 1) (\Gamma(2n + \alpha + \beta + 1))^2}. \tag{18}$$

9. For every  $x$  outside  $[-1, 1]$

$$P_n^{\alpha,\beta}(x) \approx \frac{2^n n! \Gamma(n+\alpha+\beta+1)}{\Gamma(2n+\alpha+\beta+1)} (x-1)^{-\alpha/2} (x+1)^{-\beta/2} \times \left( (x+1)^{1/2} + (x-1)^{1/2} \right)^{\alpha+\beta} (2\pi n)^{-1/2} (x^2-1)^{-1/4} \left( x + (x^2-1)^{1/2} \right)^{n+1/2}. \tag{19}$$

10. (The Mehler–Heine formula) Let  $J_\alpha$  be the usual Bessel function of the first kind and  $\widehat{P}_n^{\alpha,\beta}(x) = \frac{\Gamma(2n+\alpha+\beta+1)}{2^n n! \Gamma(n+\alpha+\beta+1)} P_n^{\alpha,\beta}(x)$ . Then

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-\alpha} \widehat{P}_n^{\alpha,\beta} \left( 1 - \frac{z^2}{2n^2} \right) = \left( \frac{z}{2} \right)^{-\alpha} J_\alpha(z) \tag{20}$$

uniformly in every compact subset of the complex  $z$ -plane.

### 3. Jacobi Sobolev–type polynomials

Let  $p, q \in \mathbb{P}$ . We define the following Sobolev–type inner product

$$\langle p, q \rangle_s = \int_{-1}^1 p(x)q(x)(1-x)^\alpha(1+x)^\beta dx + \mathbb{P}(1)' \mathbb{A} \mathbb{Q}(1), \tag{21}$$

where  $\alpha, \beta > -1$ ,  $\mathbb{P}(x) = [p(x), p'(x)]'$ , and

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} M_0 & \lambda \\ \lambda & M_1 \end{pmatrix}$$

is a positive semidefinite matrix, with  $M_0, M_1 \geq 0$ , and  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Notice that if  $M_0 = 0$  or  $M_1 = 0$ , then  $\lambda = 0$ .

If we denote by  $\{\widetilde{P}_n^{\alpha,\beta}\}_{n \geq 0}$  the family of monic polynomials orthogonal with respect to (21), then it can be shown that

**Proposition 3.** [8] For  $n \geq 1$ ,

$$\widetilde{P}_n^{\alpha,\beta}(x) = P_n^{\alpha,\beta}(x) - \left( \mathbb{P}_n^{\alpha,\beta}(1) \right)' \left( \mathbb{I} + \mathbb{A} \mathbb{K}_{n-1}(1, 1) \right)^{-1} \mathbb{A} \begin{pmatrix} K_{n-1}(x, 1) \\ K_{n-1}^{(0,1)}(x, 1) \end{pmatrix}, \tag{22}$$

where

$$\mathbb{K}_{n-1}(1, 1) = \begin{pmatrix} K_{n-1}(1, 1) & K_{n-1}^{(1,0)}(1, 1) \\ K_{n-1}^{(0,1)}(1, 1) & K_{n-1}^{(1,1)}(1, 1) \end{pmatrix}.$$

It is also possible to obtain a connection formula that relates  $\{\widetilde{P}_n^{\alpha,\beta}\}_{n \geq 0}$  with  $\{P_n^{\alpha+2,\beta}\}_{n \geq 0}$ . Indeed,

**Theorem 4.** [8] For every  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\widetilde{P}_n^{\alpha,\beta}(x) = P_n^{\alpha+2,\beta}(x) + A_{n,\alpha,\beta} P_{n-1}^{\alpha+2,\beta}(x) + B_{n,\alpha,\beta} P_{n-2}^{\alpha+2,\beta}(x), \tag{23}$$

where

$$A_{n,\alpha,\beta} = -\frac{4n(n+\beta)}{(2n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta+2)} - C_{n,\alpha,\beta},$$

$$B_{n,\alpha,\beta} = \frac{4n(n-1)(n+\beta)(n+\beta-1)}{(2n+\alpha+\beta)^2(2n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta-1)} - D_{n,\alpha,\beta},$$

with

$$C_{n,\alpha,\beta} = \frac{\left( \mathbb{P}_n^{\alpha,\beta}(1) \right)' \left( \mathbb{I} + \mathbb{A} \mathbb{K}_{n-1}(1, 1) \right)^{-1} \Gamma(2n+\alpha+\beta) \mathbb{A} \begin{pmatrix} \frac{1}{n-1} \\ \frac{n+\alpha+\beta}{2(\alpha+1)} \end{pmatrix}}{2^{n+\alpha+\beta} \Gamma(\alpha+1) \Gamma(n+\beta) (n-2)!},$$

$$D_{n,\alpha,\beta} = \frac{\left( \mathbb{P}_n^{\alpha,\beta}(1) \right)' \left( \mathbb{I} + \mathbb{A} \mathbb{K}_{n-1}(1, 1) \right)^{-1} \Gamma(2n+\alpha+\beta-1) \mathbb{A} \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{n(n+\alpha+\beta+1)}{2(\alpha+1)} \end{pmatrix}}{2^{n+\alpha+\beta-1} \Gamma(\alpha+1) \Gamma(n+\beta-1) (n-2)! (2n+\alpha+\beta)}.$$

#### 4. Asymptotics of the Jacobi Sobolev-type orthogonal polynomials

In this section, we study the asymptotic behaviour of the Jacobi Sobolev-type orthogonal polynomials  $\widetilde{P}_n^{\alpha,\beta}(x)$ . From (19) and (23), the following Proposition is straightforward.

**Proposition 5.** For every  $x$  outside of  $[-1, 1]$ ,

$$\begin{aligned} \widetilde{P}_n^{\alpha,\beta}(x) &\simeq \left[ \frac{1}{4} (x + (x^2 - 1)^{1/2})^2 + \frac{A_{n,\alpha,\beta}}{2} (x + (x^2 - 1)^{1/2}) + B_{n,\alpha,\beta} \right] \times \\ &\frac{2^{n-2} (n-2)! \Gamma(n + \alpha + \beta + 1)}{\Gamma(2n + \alpha + \beta - 1)} \left( (x+1)^{1/2} + (x-1)^{1/2} \right)^{\alpha+\beta+2} \times \\ &(x-1)^{-(\alpha+2)/2} (x+1)^{-\beta/2} (x^2-1)^{-1/4} (2\pi n)^{-1/2} \left( x + (x^2 - 1)^{1/2} \right)^{n-3/2}. \end{aligned}$$

In order to obtain the outer relative asymptotics, we will start by finding explicit expressions for  $K_{n-1}(1, 1)$ ,  $K_{n-1}^{(0,1)}(1, 1)$  and  $K_{n-1}^{(1,1)}(1, 1)$ .

Using (15), we get

$$K_{n-1}(1, 1) = \frac{\Gamma(n + \alpha + 1) \Gamma(n + \alpha + \beta + 1)}{2^{\alpha+\beta+1} \Gamma(\alpha + 1) \Gamma(\alpha + 2) \Gamma(n + \beta) (n-1)!}.$$

On the other hand, from (6),

$$\begin{aligned} K_{n-1}^{(0,1)}(1, 1) &= \frac{1}{2 \left\| P_{n-1}^{\alpha,\beta} \right\|_{\alpha,\beta}^2} \left( P_{n-1}^{\alpha,\beta}(1) (P_n^{\alpha,\beta})''(1) - P_n^{\alpha,\beta}(1) (P_{n-1}^{\alpha,\beta})''(1) \right) \\ &= \frac{1}{2 \left\| P_{n-1}^{\alpha,\beta} \right\|_{\alpha,\beta}^2} \left( P_{n-1}^{\alpha,\beta}(1) n(n-1) P_{n-2}^{\alpha+2,\beta+2}(1) \right. \\ &\quad \left. - P_n^{\alpha,\beta}(1) (n-1)(n-2) P_{n-3}^{\alpha+2,\beta+2}(1) \right) \\ &= \frac{\Gamma(n + \alpha + 1) \Gamma(n + \alpha + \beta + 2)}{2^{\alpha+\beta+2} \Gamma(n + \beta) (n-2)! \Gamma(\alpha + 1) \Gamma(\alpha + 3)} \\ &= \frac{(n + \alpha + \beta + 1)(n-1)}{2(\alpha + 2)} K_{n-1}(1, 1), \end{aligned}$$

and, from (7), we get

$$\begin{aligned} K_{n-1}^{(1,1)}(1, 1) &= \frac{1}{3! \left\| P_{n-1}^{\alpha,\beta} \right\|_{\alpha,\beta}^2} \times \left[ \left( P_{n-1}^{\alpha,\beta}(1) (P_n^{\alpha,\beta})^{(3)}(1) + 3 (P_{n-1}^{\alpha,\beta})'(1) (P_n^{\alpha,\beta})^{(2)}(1) \right) \right. \\ &\quad \left. - \left( P_n^{\alpha,\beta}(1) (P_{n-1}^{\alpha,\beta})^{(3)}(1) + 3 (P_n^{\alpha,\beta})'(1) (P_{n-1}^{\alpha,\beta})^{(2)}(1) \right) \right] \\ &= \frac{\Gamma(n + \alpha + 1) \Gamma(n + \alpha + \beta + 2)}{3 \cdot 2^{\alpha+\beta+4} \Gamma(\alpha + 1) \Gamma(\alpha + 3) (n-2)! \Gamma(n + \beta) (2n + \alpha + \beta)} \times \\ &\quad \left[ \frac{(n-2)(n + \alpha + \beta + 2)[n(n + \alpha + \beta + 3) - (n-3)(n + \alpha + \beta)]}{(\alpha + 3)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{3n(n + \alpha + \beta)[(n-1)(n + \alpha + \beta + 2) - (n-2)(n + \alpha + \beta + 1)]}{(\alpha + 1)} \right] \\ &\quad \times \frac{\Gamma(n + \alpha + 1) \Gamma(n + \alpha + \beta + 2) k_0}{2^{\alpha+\beta+3} \Gamma(\alpha + 2) \Gamma(\alpha + 4) (n-2)! \Gamma(n + \beta)}, \end{aligned}$$

where  $k_0 = (-3\alpha - \beta + 2n\alpha + 2n\beta - \alpha^2 - \alpha\beta + n\alpha^2 + n^2\alpha + 2n^2 + n\alpha\beta - 2)$ . Thus,

$$K_{n-1}^{(1,1)}(1, 1) = \frac{(n + \alpha + \beta + 1)(n - 1)k_0}{4(\alpha + 1)(\alpha + 2)(\alpha + 3)} K_{n-1}(1, 1).$$

Therefore, if we define

$$k_1 = \frac{(n + \alpha + \beta + 1)(n - 1)}{2(\alpha + 2)},$$

$$k_2 = \frac{k_0}{2(\alpha + 1)(\alpha + 3)},$$

then we get

**Proposition 6.** For every  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$K_{n-1}(1, 1) = \frac{\Gamma(n + \alpha + 1)\Gamma(n + \alpha + \beta + 1)}{2^{\alpha+\beta+1}\Gamma(\alpha + 1)\Gamma(\alpha + 2)\Gamma(n + \beta)(n - 1)!}, \tag{24}$$

$$K_{n-1}^{(0,1)}(1, 1) = k_1 K_{n-1}(1, 1), \tag{25}$$

$$K_{n-1}^{(1,1)}(1, 1) = k_1 k_2 K_{n-1}(1, 1). \tag{26}$$

Notice that, when  $n \rightarrow \infty$ ,

$$k_1 \simeq \frac{n^2}{2(\alpha + 2)}, \tag{27}$$

$$k_2 \simeq \frac{(\alpha + 2)n^2}{2(\alpha + 1)(\alpha + 3)}. \tag{28}$$

On the other hand,

$$\begin{aligned} \mathbb{I} + \mathbb{A}K_{n-1}(1, 1) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} M_0 & \lambda \\ \lambda & M_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_{n-1}(1, 1) & k_1 K_{n-1}(1, 1) \\ k_1 K_{n-1}(1, 1) & k_1 k_2 K_{n-1}(1, 1) \end{pmatrix}, \\ &= K_{n-1}(1, 1) \begin{pmatrix} \frac{1}{K_{n-1}(1,1)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{K_{n-1}(1,1)} \end{pmatrix} + K_{n-1}(1, 1) \begin{pmatrix} M_0 & \lambda \\ \lambda & M_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & k_1 \\ k_1 & k_1 k_2 \end{pmatrix}, \\ &= K_{n-1}(1, 1) \begin{pmatrix} Y_1 & Y_2 \\ Y_3 & Y_4 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

with

$$\begin{aligned} Y_1 &= \frac{1}{K_{n-1}(1,1)} + M_0 + \lambda k_1, \\ Y_2 &= (M_0 + \lambda k_2) k_1, \\ Y_3 &= \lambda + M_1 k_1, \\ Y_4 &= \frac{1}{K_{n-1}(1,1)} + (\lambda + M_1 k_2) k_1, \end{aligned} \tag{29}$$

and thus

$$(\mathbb{I} + \mathbb{A}K_{n-1}(1, 1))^{-1} = \frac{K_{n-1}(1, 1)}{|\mathbb{I} + \mathbb{A}K_{n-1}(1, 1)|} \begin{pmatrix} Y_4 & -Y_2 \\ -Y_3 & Y_1 \end{pmatrix},$$

Also,

$$\begin{aligned} |\mathbb{I} + \mathbb{A}K_{n-1}(1, 1)| &= (K_{n-1}(1, 1))^2 \lambda^2 k_1^2 - (K_{n-1}(1, 1))^2 k_2 k_1 \lambda^2 - (K_{n-1}(1, 1))^2 M_0 M_1 k_1^2 \\ &+ (K_{n-1}(1, 1))^2 M_0 M_1 k_2 k_1 + 2K_{n-1}(1, 1) \lambda k_1 + M_1 k_2 K_{n-1}(1, 1) k_1 \\ &+ M_0 K_{n-1}(1, 1) + 1. \end{aligned}$$

We have two possible situations. First, if  $|\mathbb{A}| \neq 0$ ,

$$\begin{aligned} |\mathbb{I} + \mathbb{A}\mathbb{K}_{n-1}(1, 1)| &\simeq (K_{n-1}(1, 1))^2 \lambda^2 k_1^2 - (K_{n-1}(1, 1))^2 k_2 k_1 \lambda^2 \\ &- (K_{n-1}(1, 1))^2 M_0 M_1 k_1^2 + (K_{n-1}(1, 1))^2 M_0 M_1 k_2 k_1 \\ &= (K_{n-1}(1, 1))^2 (|\mathbb{A}| k_1 k_2 - |\mathbb{A}| k_1^2) \\ &\simeq |\mathbb{A}| \frac{n^2}{2(\alpha + 2)} \frac{n^2}{(\alpha + 1)(\alpha + 2)(\alpha + 3)} (K_{n-1}(1, 1))^2. \end{aligned}$$

On the other hand, if  $|\mathbb{A}| = 0, M_1 \neq 0$ ,

$$\begin{aligned} |\mathbb{I} + \mathbb{A}\mathbb{K}_{n-1}(1, 1)| &= 2K_{n-1}(1, 1)\lambda k_1 + M_1 k_1 k_2 K_{n-1}(1, 1) \\ &+ M_0 K_{n-1}(1, 1) + 1, \end{aligned}$$

and, as a consequence,

$$|\mathbb{I} + \mathbb{A}\mathbb{K}_{n-1}(1, 1)| \simeq M_1 k_1 k_2 K_{n-1}(1, 1).$$

Thus, we get

**Proposition 7.**

(i) If  $|\mathbb{A}| \neq 0$ ,

$$|\mathbb{I} + \mathbb{A}\mathbb{K}_{n-1}(1, 1)| \simeq \frac{n^4 |\mathbb{A}|}{2(\alpha + 1)(\alpha + 2)^2(\alpha + 3)} (K_{n-1}(1, 1))^2. \tag{30}$$

(ii) If  $|\mathbb{A}| = 0, M_1 \neq 0$ ,

$$|\mathbb{I} + \mathbb{A}\mathbb{K}_{n-1}(1, 1)| \simeq \frac{M_1 n^4 K_{n-1}(1, 1)}{4(\alpha + 1)(\alpha + 3)}. \tag{31}$$

Now, using the expressions obtained above, we proceed to estimate the asymptotics for the coefficients of the connection formula,  $A_{n,\alpha,\beta}$  and  $B_{n,\alpha,\beta}$ . We have

$$\begin{aligned} &\left( P_n^{\alpha,\beta}(1) \quad (P_n^{\alpha,\beta})'(1) \right) \begin{pmatrix} Y_4 & -Y_2 \\ -Y_3 & Y_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_0 & \lambda \\ \lambda & M_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{n-1} \\ \frac{n+\alpha+\beta}{2(\alpha+1)} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{n-1} \left[ (P_n^{\alpha,\beta}(1)Y_4 - (P_n^{\alpha,\beta})'(1)Y_3)M_0 + (-P_n^{\alpha,\beta}(1)Y_2 + (P_n^{\alpha,\beta})'(1)Y_1)\lambda \right] + \\ &\quad \left[ (P_n^{\alpha,\beta}(1)Y_4 - (P_n^{\alpha,\beta})'(1)Y_3)\lambda + (-P_n^{\alpha,\beta}(1)Y_2 + (P_n^{\alpha,\beta})'(1)Y_1)M_1 \right] \frac{n+\alpha+\beta}{2(\alpha+1)}. \end{aligned}$$

Thus, using (16)

$$\begin{aligned} C_{n,\alpha,\beta} &= \frac{\Gamma(2n+\alpha+\beta)\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}{2^{\alpha+\beta+1}\Gamma(\alpha+1)^2\Gamma(n+\beta)(n-2)! |\mathbb{I} + \mathbb{A}\mathbb{K}_{n-1}(1, 1)| \Gamma(2n+\alpha+\beta+1)} \times \\ &\quad \left[ \frac{1}{n-1} \left( 2 \left( \frac{M_0}{K_{n-1}(1,1)} + k_2 k_1 |\mathbb{A}| \right) + \frac{n(n+\alpha+\beta+1)}{(\alpha+1)} \left( \frac{\lambda}{K_{n-1}(1,1)} - |\mathbb{A}| k_1 \right) \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{n+\alpha+\beta}{2(\alpha+1)} \left( 2 \left( \frac{\lambda}{K_{n-1}(1,1)} - |\mathbb{A}| k_1 \right) + \frac{n(n+\alpha+\beta)}{(\alpha+1)} \left( \frac{M_1}{K_{n-1}(1,1)} + |\mathbb{A}| \right) \right) \right], \end{aligned}$$

and using (24) and (29), for  $|\mathbb{A}| \neq 0$ ,

$$C_{n,\alpha,\beta} = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\alpha+\beta+1) |\mathbb{A}| k_1 (-n^2 + 2(\alpha+1)k_2)}{2^{\alpha+\beta+1}\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\alpha+2)\Gamma(n+\beta)(n-1)! |\mathbb{I} + \mathbb{A}\mathbb{K}_{n-1}(1, 1)| (2n+\alpha+\beta)}.$$

From (27) and (30) we obtain

$$C_{n,\alpha,\beta} \simeq - \frac{2^{\alpha+\beta+1}\Gamma(\alpha+2)\Gamma(\alpha+3)\Gamma(n+\beta)(n-1)!}{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta)},$$

and, using the fact that

$$\Gamma(x) \simeq \sqrt{2\pi} x^{x-1/2} e^{-x},$$

we get 
$$C_{n,\alpha,\beta} \simeq \frac{-e^{2(\alpha+1)}2^{\alpha+\beta+1}\Gamma(\alpha+2)\Gamma(\alpha+3)\left(\frac{(n+\beta)n}{(n+\alpha+1)(n+\alpha+\beta+1)}\right)^n \times (n+\beta)^{\beta-1/2}n^{-1/2}}{(n+\alpha+1)^{\alpha+1/2}(2n+\alpha+\beta)(n+\alpha+\beta+1)^{\alpha+\beta+1/2}}.$$

Given that

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{(n+\beta)n}{(n+\alpha+1)(n+\alpha+\beta+1)}\right)^n = e^{-2\alpha-2},$$

then,

$$C_{n,\alpha,\beta} \simeq \frac{L_1}{n^{3+2\alpha}}, \tag{32}$$

where

$$L_1 = -2^{\alpha+\beta}\Gamma(\alpha+2)\Gamma(\alpha+3).$$

In a similar way, we can show that there exists a constant  $L_2$  such that

$$D_{n,\alpha,\beta} \simeq \frac{L_2}{n^{3+2\alpha}}, \tag{33}$$

with

$$L_2 = -2^{\alpha+\beta}(\alpha+2)\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\alpha+3).$$

For  $|\mathbb{A}| = 0$ ,  $M_1 \neq 0$ , on the other hand, using an analogous process, we can find constants

$$\begin{aligned} T_1 &= 2^{\alpha+\beta+1}(\alpha+3)\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\alpha+2), \\ T_2 &= -2^{\alpha+\beta+1}(\alpha+3)(\Gamma(\alpha+2))^2, \end{aligned}$$

such that

$$C_{n,\alpha,\beta} \simeq \frac{T_1}{n^{3+2\alpha}},$$

$$D_{n,\alpha,\beta} \simeq \frac{T_2}{n^{3+2\alpha}}.$$

In other words, the value of  $|\mathbb{A}|$  has no effect on the behavior of the coefficients of the connection formula. As a consequence

**Proposition 8.** We have

- (i)  $\lim_{n \rightarrow \infty} A_{n,\alpha,\beta} = -1$ ,
- (ii)  $\lim_{n \rightarrow \infty} B_{n,\alpha,\beta} = \frac{1}{4}$ .

Now, we are ready to estimate the ratio asymptotic for  $\{\widetilde{P}_n^{\alpha,\beta}\}_{n \geq 0}$ . Indeed,

**Theorem 9.** Let  $\{\widetilde{P}_n^{\alpha,\beta}\}_{n \geq 0}$  be the sequence of monic polynomials orthogonal with respect to (21). Then,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\widetilde{P}_n^{\alpha,\beta}(x)}{P_n^{\alpha,\beta}(x)} = 1,$$

uniformly on every compact subset of  $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$ .

*Proof.* Using (19) and (23) we get

$$\begin{aligned} \frac{\widetilde{P}_n^{\alpha,\beta}(x)}{P_n^{\alpha,\beta}(x)} &\simeq \frac{(n+\alpha+\beta+1)(n+\alpha+\beta+2)(x-1)^{-1}\left((x+1)^{1/2}+(x-1)^{1/2}\right)^2}{(2n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta+2)} \\ &+ A_{n,\alpha,\beta} \frac{(n+\alpha+\beta+1)\left((x+1)^{1/2}+(x-1)^{1/2}\right)^2(2\pi(n-1))^{-1/2}}{2n(x-1)(x+(x^2-1)^{1/2})(2\pi n)^{-1/2}} \\ &+ B_{n,\alpha,\beta} \frac{(2n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta-1)\left((x+1)^{1/2}+(x-1)^{1/2}\right)^2(2\pi n)^{1/2}}{4n(n-1)(x-1)(x+(x^2-1)^{1/2})^2(2\pi(n-2))^{1/2}}, \end{aligned}$$

where  $x$  is outside  $[-1, 1]$ . Therefore, as  $n \rightarrow \infty$ ,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\widetilde{P}_n^{\alpha,\beta}(x)}{P_n^{\alpha,\beta}(x)} &= \frac{\left((x+1)^{1/2}+(x-1)^{1/2}\right)^2}{4(x-1)} - \frac{\left((x+1)^{1/2}+(x-1)^{1/2}\right)^2}{2(x-1)(x+(x^2-1)^{1/2})} \\ &+ \frac{\left((x+1)^{1/2}+(x-1)^{1/2}\right)^2}{4(x-1)(x+(x^2-1)^{1/2})^2} \\ &= \frac{\left((x+1)^{1/2}+(x-1)^{1/2}\right)^2}{4(x-1)} \left(1 - \frac{1}{x+(x^2-1)^{1/2}}\right)^2 \\ &= \frac{\left(x+(x^2-1)^{1/2}-1\right)^2}{2(x-1)(x+(x^2-1)^{1/2})} = 1. \end{aligned}$$

In order to find a corresponding Mehler–Heine formula for the Jacobi Sobolev–type orthogonal polynomials  $\{\tilde{P}_n^{\alpha,\beta}\}_{n \geq 0}$ , we use the following notation

$$Q_n^{\alpha,\beta}(x) = \frac{\Gamma(2n + \alpha + \beta + 1)}{2^n n! \Gamma(n + \alpha + \beta + 1)} \tilde{P}_n^{\alpha,\beta}(x).$$

From (23) we get

$$\tilde{P}_n^{\alpha,\beta}(x) = P_n^{\alpha,\beta}(x) + C_{n,\alpha,\beta} P_{n-1}^{\alpha+2,\beta}(x) + D_{n,\alpha,\beta} P_{n-2}^{\alpha+2,\beta}(x), \tag{34}$$

Thus, from (34)

$$\begin{aligned} Q_n^{\alpha,\beta}(x) &= \widehat{P}_n^{\alpha,\beta}(x) + \frac{n + \alpha + \beta + 1}{2n} C_{n,\alpha,\beta} \widehat{P}_{n-1}^{\alpha+2,\beta}(x) \\ &+ \frac{(2n + \alpha + \beta)(2n + \alpha + \beta - 1)}{4n(n - 1)} D_{n,\alpha,\beta} \widehat{P}_{n-2}^{\alpha+2,\beta}(x), \end{aligned}$$

and therefore, using (32) and (33) we get

$$\begin{aligned} n^{-\alpha} Q_n^{\alpha,\beta} \left(1 - \frac{z^2}{2n^2}\right) &\approx n^{-\alpha} \widehat{P}_n^{\alpha,\beta} \left(1 - \frac{z^2}{2n^2}\right) + n^{-\alpha} \frac{L_1}{n^{3+2\alpha}} \frac{n + \alpha + \beta + 1}{2n} \widehat{P}_{n-1}^{\alpha+2,\beta} \left(1 - \frac{z^2}{2n^2}\right) \\ &+ n^{-\alpha} \frac{(2n + \alpha + \beta)(2n + \alpha + \beta - 1)}{4n(n - 1)} \frac{L_2}{n^{3+2\alpha}} \widehat{P}_{n-2}^{\alpha+2,\beta} \left(1 - \frac{z^2}{2n^2}\right) \\ &= n^{-\alpha} \widehat{P}_n^{\alpha,\beta} \left(1 - \frac{z^2}{2n^2}\right) + \frac{L_1}{n^{1+2\alpha}} \frac{n + \alpha + \beta + 1}{2n} n^{-(\alpha+2)} \widehat{P}_{n-1}^{\alpha+2,\beta} \left(1 - \frac{z^2}{2n^2}\right) \\ &+ \frac{(2n + \alpha + \beta)(2n + \alpha + \beta - 1)}{4n(n - 1)} \frac{L_2}{n^{1+2\alpha}} n^{-(\alpha+2)} \widehat{P}_{n-2}^{\alpha+2,\beta} \left(1 - \frac{z^2}{2n^2}\right). \end{aligned}$$

As a consequence, we get

**Theorem 10.** Let  $\{Q_n^{\alpha,\beta}\}_{n \geq 0}$  be the sequence of Jacobi Sobolev–type orthogonal polynomials defined previously. Then

1. If  $\alpha = -1/2$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-\alpha} Q_n^{\alpha,\beta} \left(1 - \frac{z^2}{2n^2}\right) = (z/2)^{-\alpha} J_\alpha(z) + \left(\frac{L_1}{2} + L_2\right) J_{\alpha+2}(z).$$

2. If  $\alpha > -1/2$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-\alpha} Q_n^{\alpha,\beta} \left(1 - \frac{z^2}{2n^2}\right) = (z/2)^{-\alpha} J_\alpha(z),$$

**Acknowledgements:** The authors thank the anonymous referee for its valuable comments. They contributed to greatly improve the contents and presentation of the manuscript.

**References**

[1] M. Alfaro, F. Marcellán, & M. L. Rezola, *Estimates for Jacobi-Sobolev type orthogonal polynomials*, J. Appl. Anal. **67** (1997), 157–174.  
 [2] M. Alfaro, F. Marcellán, M. L. Rezola, & A. Ronveaux, *On orthogonal polynomials of Sobolev type: Algebraic properties and zeros*, SIAM J. Math. Anal. **23** (1992), 737–757.  
 [3] M. Alfaro, F. Marcellán, M. L. Rezola, and A. Ronveaux, *Sobolev-Type orthogonal polynomials: The nondiagonal case*, J. Approx. Theory **83** (1995), 266–287.  
 [4] M. Alfaro, J. J. Moreno-Balcázar, A. Peña, & M. L. Rezola, *Asymptotics for a generalization of Hermite polynomials*, Asymp. Anal. **66** (2010), 113–117.  
 [5] R. Alvarez & J. J. Moreno-Balcázar, *Asymptotic properties of generalized Laguerre orthogonal polynomials*, Indag. Math. (N.S) **15** (2004), 151–165.  
 [6] G. E. Andrews, R. Askey, & R. Roy, *Special Functions*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications Vol **71**, Cambridge University Press, Cambridge (1999).  
 [7] T. S. Chihara, *An Introduction to Orthogonal Polynomials*, Gordon and Breach, New York, (1978).  
 [8] H. Dueñas & L. Garza, *Jacobi-Sobolev type orthogonal polynomials: Holonomic equation and electrostatic interpretation. A non diagonal case*, Submitted (2010).  
 [9] H. Dueñas & F. Marcellán, *The Laguerre–Sobolev–type orthogonal polynomials*, J. Approx. Theory **162** (2010), 421–440.  
 [10] H. Dueñas & F. Marcellán, *Asymptotic behaviour of Laguerre-Sobolev-Type Orthogonal Polynomials. A nondiagonal case*, J. Comput. Appl. Math. **235** (2010), 998–1007.  
 [11] H. Dueñas & F. Marcellán, *The holonomic equation of the Laguerre–Sobolev–type orthogonal polynomials: a non–diagonal case*. J. Difference. Equ. Appl. (2009) <http://dx.doi.org/10.1080/10236190903456063>  
 [12] R. Koekoek, *Generalizations of Laguerre Polynomials*, J. Math. Anal. Appl. **153** (1990), 576–590.  
 [13] R. Koekoek & H. G. Meijer, *A generalization of Laguerre Polynomials*, SIAM J. Math. Anal. **24** (1993), 768–782.

- [14] **G. López Lagomasino, F. Marcellán & W. Van Assche**, *Relative asymptotics for polynomials orthogonal with respect to a discrete Sobolev inner product*, *Constr. Approx.* **11** (1995), 107–137.
- [15] **F. Marcellán & J. J. Moreno-Balcázar**, *Asymptotics and Zeros of Sobolev Orthogonal Polynomials on Unbounded Supports*, *Acta Appl. Math.* **94** (2006), 163–192.
- [16] **F. Marcellán & J. W. Van Assche**, *Relative Asymptotics for Orthogonal Polynomials with a Sobolev Inner Product*, *J. Approx. Theory* **72** (2004), 193–209.
- [17] **H. G. Meijer**, *Zero distribution of orthogonal polynomials in a certain discrete Sobolev space*, *J. Math. Anal. Appl.* **172** (1993), 520–532.
- [18] **G. Szegő**, *Orthogonal Polynomials*, 4<sup>th</sup> ed., Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. Series, vol 23, Amer. Math. Soc., Providence, RI, (1975).

Recibido el 5 de julio de 2010

Aceptado para su publicación el 9 de noviembre de 2010



# A NOTE ON THE CAUCHY PROBLEM OF FUZZY DIFFERENTIAL EQUATIONS

William González-Calderón<sup>1</sup>, Elder Jesús Villamizar-Roa<sup>2</sup>

## Abstract

**González-Calderón W., E. J. Villamizar-Roa:** A note on the cauchy problem of fuzzy differential equations. *Rev. Acad. Colomb. Cienc.* **34** (133): 541-552, 2010. ISSN 0370-3908.

In this paper we analyze the existence and uniqueness of solutions for a fuzzy initial value problem of kind  $x'(t) = f(t, x(t))$ ,  $x(t_0) = x_0$ , where  $f : T \times X \rightarrow X$  is a fuzzy-valued mapping,  $T$  is a time interval,  $X$  is a class of fuzzy sets,  $x_0 \in X$  and  $t_0 \in T$ . We consider  $x'(t)$  as a generalization of the Hukuhara derivative.

**Key words:** Fuzzy-valued Mappings, Fuzzy Differentiability, Generalized Hukuhara Derivative, Fuzzy Differential Equations, Fuzzy Cauchy Problem.

## Resumen

En este artículo se analiza la existencia y unicidad de soluciones para el siguiente problema de valor inicial en el contexto difuso:  $x'(t) = f(t, x(t))$ ,  $x(t_0) = x_0$ , donde  $f : T \times X \rightarrow X$  es una aplicación con valores siendo conjuntos difusos,  $T$  es un intervalo de tiempo,  $X$  es una clase de conjuntos difusos,  $x_0 \in X$  y  $t_0 \in T$ . Se considera la derivada  $x'(t)$  como una generalización de la derivada de Hukuhara.

**Palabras claves:** Aplicaciones difusas, diferenciabilidad difusa, derivada de Hukuhara generalizada, ecuaciones diferenciales difusas, problema de Cauchy difuso.

<sup>1</sup> Universidad Industrial de Santander, Escuela de Matemáticas. A.A. 678, Bucaramanga, Colombia. Correo electrónico: wgonzalez@matematicas.uis.edu.co

<sup>2</sup> Universidad Nacional de Colombia-Medellín, Escuela de Matemáticas. A.A. 3840, Medellín, Colombia. Correo electrónico: ejvillamizarr@unal.edu.co, elderroa@hotmail.com

AMS Subject Classification 2010: 34A12, 03E72, 26E25.

## 1. Introduction

Theory of fuzzy differential equations is a useful tool for modeling dynamical systems under possible uncertainty [19]. Fuzzy differential equations have been able to solve some disadvantages presented in the ordinary case. In particular, first order fuzzy differential equations appear in varied real problems, as for instance, quantum optics, gravity, medicine, chaotic systems, engineering problems, population models, etc. In general terms, the Cauchy problem associated with a first order fuzzy differential equation can be expressed as

$$x'(t) = f(t, x(t)), \quad x(t_0) = x_0, \quad (1)$$

where  $f : T \times X \rightarrow X$  is a fuzzy-valued mapping,  $x_0 \in X, t_0 \in T$ ,  $T$  is an time interval and  $X$  is a class of fuzzy sets. So, to deal with the problem (1), we need to establish the sense of the derivative  $x'(t)$ . Initially, **Puri** and **Ralescu** [12] developed the concept of Hukuhara differentiability for fuzzy valued mappings (c.f. Definition 3.5). Under this setting, several results of existence and uniqueness of solutions of fuzzy differential equations (1) have been obtained (see for instance [7, 10, 11, 15, 16] and some references therein). However, this approach has the disadvantage that, in some cases, the support of the solutions have an increasing length as time  $t$  increases, which shows that this interpretation is not a good generalization of the corresponding crisp case (see [1]). In order to solve this difficulty, some approaches have been proposed. A first alternative is to replace the fuzzy differential equation in (1) by a family of differential inclusions (see [4, 5]). However, the approach of differential inclusions does not take into account the kind of fuzzy derivative of fuzzy-valued mapping. **Bede** and **Gal** [1] gave another possibility to solve this shortcoming by introducing a more general definition of derivative for fuzzy mappings, which allows to define the derivative for a larger class of fuzzy functions. This generalization of the Hukuhara derivative is obtained by considering the fuzzy lateral Hukuhara derivatives (c.f. Definition 3.6 below). Also, by interpreting the derivative  $x'(t)$  in the generalized Hukuhara sense, some results of existence of solutions for the initial value fuzzy problem (1) were obtained in [1, 3]. Recently, in [8], by utilizing the generalized differentiability, the authors investigate the problem of finding new solutions for a second order fuzzy differential equation. We also refer the work [20], which presents recent results related to the global existence of solutions for fuzzy second-order differential equations under generalized H-differentiability. On the other hand, in [17] the authors

investigate the first order linear fuzzy differential dynamical systems with fuzzy matrices. Especially, the authors discuss some properties of the 2D dynamical systems and describe their phase portraits. In this paper we prove the results of existence and uniqueness of solutions of the fuzzy initial value problem (1) developed in [1, 3, 7, 11, 15] (and some references therein), but assuming a more general definition of the derivative  $x'(t)$ . Indeed, we consider the derivative  $x'(t)$  as being the generalized Hukuhara derivative of the set-valued mapping  $x_\alpha$  defined by the  $\alpha$ -levels of the fuzzy set  $x(t)$  (c.f. Definition 3.9). This definition of differentiability will be called  $\alpha$ -differentiability and it generalizes the notion of differentiability used in [1, 2, 3, 7, 11, 15, 16] and some references therein. Some properties related with the differential calculus taking into account the notion of  $\alpha$ -differentiability are showed. In order to establish our existence result (c.f. Theorem 4.2) we prove an equivalence between the differential problem (1) and an integral formulation (c.f. Theorem 4.1). As our approach is based on the analysis of the set-valued mappings defined by the  $\alpha$ -levels of the respective fuzzy-valued mappings, we assume a more general continuity condition on  $f$ ; indeed we assume that  $f$  is a  $\alpha$ -continuous function with respect to the Hausdorff metric  $d$  (c.f. Definition 4.1).

The outline of this paper is the following: in Section 2 we recall some preliminaries about the general theory of fuzzy sets. In Section 3 we introduce the definition of  $\alpha$ -differentiability and give some results concerning the differential calculus. Finally, in Section 4, we analyze the Cauchy problem of first order fuzzy differential equations.

## 2. Preliminaries

Let  $\mathcal{K}^n$  be the collection of all nonempty-convex-compact subsets of  $\mathbb{R}^n$ . If  $A, B \in \mathcal{K}^n$  and  $\lambda \in \mathbb{R}$ , then the addition and the scalar multiplication in  $\mathcal{K}^n$  are defined as:

$$A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}, \quad \lambda A = \{\lambda a \mid a \in A\}. \quad (2)$$

In [14] was proved that  $\mathcal{K}^n$  is a commutative semigroup under the addition, which verifies the cancellation law. Furthermore, can be proved that  $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$ ,  $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$  and  $1A = A$  for  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ,  $A, B \in \mathcal{K}^n$ . Moreover, if  $\alpha, \beta \geq 0$ , then  $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$ .

The Hausdorff metric  $d$  on  $\mathcal{K}^n$  is defined as:

$$d(A, B) = \max \left\{ \sup_{a \in A} \inf_{b \in B} \|a - b\|, \sup_{b \in B} \inf_{a \in A} \|a - b\| \right\},$$

where  $A, B \in \mathcal{K}^n$  and  $\|\cdot\|$  denotes the Euclidean norm in  $\mathbb{R}^n$ . The couple  $(\mathcal{K}^n, d)$  is a complete metric space; moreover the metric  $d$  verifies the following properties: (i.)  $d(\lambda A, \lambda B) = |\lambda|d(A, B)$ , (ii.)  $d(A + C, B + C) = d(A, B)$  and (iii.)  $d(A + B, C + D) \leq d(A, C) + d(B, D)$ , for all  $A, B, C, D \in \mathcal{K}^n$  and  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

A fuzzy set  $u$  on  $\mathbb{R}^n$  is defined as a mapping  $u : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$ . For  $0 < \alpha \leq 1$ , the class  $[u]^\alpha = \{x \in \mathbb{R}^n \mid u(x) \geq \alpha\}$  denotes the  $\alpha$ -level of the fuzzy set  $u$ . For  $\alpha = 0$ , the support of  $u$  is defined as the set  $[u]^0 = \text{supp}(u) = \overline{\{x \in \mathbb{R}^n \mid u(x) > 0\}}$ .

Let  $\mathcal{F}^n$  be the class of fuzzy sets  $u : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$  such that  $u$  satisfies:

- (1)  $u$  is normal, that is, there exists  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  such that  $u(x_0) = 1$ ,
- (2)  $u$  is fuzzy convex, that is,  $u(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \min\{u(x), u(y)\}$  for any  $x, y \in \mathbb{R}^n$  and  $0 \leq \lambda \leq 1$ ,
- (3)  $u$  is upper semicontinuous,
- (4)  $[u]^0 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid u(x) > 0\}$  is compact.

Then, from the definition of  $\mathcal{F}^n$ , we have that  $[u]^\alpha \in \mathcal{K}^n$  for all  $0 \leq \alpha \leq 1$ .  $\mathcal{F}^1$  is often called the class of fuzzy numbers. Real numbers  $\mathbb{R}$  can be embedded in  $\mathcal{F}^1$  by using the application  $a \in \mathbb{R} \mapsto \chi_{\{a\}} \in \mathcal{F}^1$ . In general,  $\mathcal{K}^n$  can be embedded in  $\mathcal{F}^n$ . We recall that if  $u, v$  are two fuzzy sets, then  $u = v$  if and only if  $[u]^\alpha = [v]^\alpha$ , for all  $\alpha \in [0, 1]$ .

The following representation result is known as Negoita-Ralescu Theorem.

**Theorem 2.1** ([9]). *If  $u \in \mathcal{F}^n$ , then*

- (i)  $[u]^\alpha \in \mathcal{K}^n$  for all  $\alpha \in [0, 1]$ ,
- (ii)  $[u]^1 \subseteq [u]^\beta \subseteq [u]^\alpha \subseteq [u]^0$  for all  $0 \leq \alpha \leq \beta \leq 1$ ,
- (iii) If  $\{\alpha_n\} \subset [0, 1]$  is a nondecreasing sequence converging to  $\alpha > 0$ , then  $[u]^\alpha = \bigcap_{n=1}^\infty [u]^{\alpha_n}$ .

Conversely, if  $\{N_\alpha \mid \alpha \in [0, 1]\}$  is a family of subsets of  $\mathbb{R}^n$  satisfying (i) – (iii), then there exists  $u \in \mathcal{F}^n$  such that  $[u]^\alpha = N_\alpha$ , for all  $\alpha \in (0, 1]$ , and  $[u]^0 = \bigcup_{0 < \alpha \leq 1} N_\alpha \subseteq N_0$ .

According to the Zadeh Extension Principle [18], the operations of addition and scalar multiplication in  $\mathcal{F}^n$

are defined as:

$$(u + v)(x) = \sup_{y+z=x} \min\{u(y), v(z)\},$$

$$(\lambda u)(x) = \begin{cases} u(\frac{x}{\lambda}), & \lambda \neq 0, \\ \chi_{\{0\}}(x), & \lambda = 0, \end{cases} \tag{3}$$

where  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $x, y, z \in \mathbb{R}^n$  and  $\chi_{\{0\}}$  is the characteristic function of  $0 \in \mathbb{R}^n$ . By the Zadeh Extension Principle and Theorem 2.1, the following relations hold:

$$[u + v]^\alpha = [u]^\alpha + [v]^\alpha,$$

$$[\lambda u]^\alpha = \lambda [u]^\alpha, \forall u, v \in \mathcal{F}^n, \forall \alpha \in [0, 1]. \tag{4}$$

The Hausdorff metric  $d$  in  $\mathcal{K}^n$  can be extended to  $\mathcal{F}^n$  defining the distance

$$D(u, v) = \sup_{\alpha \in [0, 1]} d([u]^\alpha, [v]^\alpha), \quad \forall u, v \in \mathcal{F}^n.$$

The couple  $(\mathcal{F}^n, D)$  is a complete metric space [13]. The metric  $D$  verifies the following properties:  $D(\lambda u, \lambda v) = |\lambda|D(u, v)$  and  $D(u + w, v + w) = D(u, v)$ , for all  $u, v \in \mathcal{F}^n$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

### 3. $\alpha$ -continuity and $\alpha$ -differentiability

We start by recalling some properties related to the measurability and the integrability of fuzzy set-valued mappings (c.f. [7]). Let  $T = [a, b] \subset \mathbb{R}$  and consider  $\mathcal{K}^n$  endowed with the Hausdorff metric  $d$ . We recall that a fuzzy-valued mapping  $F : T \rightarrow \mathcal{F}^n$  is said to be strongly measurable, if for each  $\alpha \in [0, 1]$ , the set-valued mapping  $F_\alpha : T \rightarrow \mathcal{K}^n$  given by  $F_\alpha(t) = [F(t)]^\alpha$  is Lebesgue measurable. On the other hand, an application  $F : T \rightarrow \mathcal{F}^n$  is called integrally bounded, if there exists a real-value integrable function  $g$  such that for each  $y \in F_0(t)$  it holds  $\|y\| \leq g(t)$ . Now, we recall the integral of a fuzzy valued mapping.

**Definition 3.1** ([7]). Let  $T = [a, b] \subset \mathbb{R}$  and  $F : T \rightarrow \mathcal{F}^n$ . The integral  $\int_a^b F(t)dt$  is defined levelwise by

$$\left[ \int_a^b F(t)dt \right]^\alpha = \int_a^b F_\alpha(t)dt$$

$$= \left[ \int_a^b f(t)dt \mid f : T \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ is a measurable selection for } F_\alpha \right], \tag{5}$$

for all  $0 < \alpha \leq 1$ . A strongly measurable and integrally bounded mapping  $F : T \rightarrow \mathcal{F}^n$  is called to be integrable over the interval  $T$  if  $\int_a^b F(t)dt$  belongs to  $\mathcal{F}^n$ .

**Proposition 3.1** ([7]). *If  $F : T \rightarrow \mathcal{F}^n$  is a strongly measurable and integrally bounded mapping, then  $F$  is integrable.*

**Proposition 3.2** ([7]). *Let  $T = [a, b] \subset \mathbb{R}$  and  $c \in T$ . If  $F, G : T \rightarrow \mathcal{F}^n$  are integrable and  $\lambda \in \mathbb{R}$ , then*

- (i)  $\int_a^b F(t)dt = \int_a^c F(t)dt + \int_c^b F(t)dt$ ,
- (ii)  $\int_a^b (\lambda F(t) + G(t))dt = \lambda \int_a^b F(t)dt + \int_a^b G(t)dt$ ,
- (iii)  $D(F, G)$  is integrable,
- (iv)  $D(\int_a^b F(t)dt, \int_a^b G(t)dt) \leq \int_a^b D(F, G)(t)dt$ .

**Remark 3.1** ([7]). *If  $F : T \rightarrow \mathcal{F}^1$  is integrable such that  $F_\alpha(t) = [f_\alpha(t), g_\alpha(t)]$  for all  $\alpha \in [0, 1]$ , then  $\int_T F$  is obtained by integrating the  $\alpha$ -level curves, that is,*

$$\left[ \int_T F \right]^\alpha = \left[ \int_T f_\alpha, \int_T g_\alpha \right].$$

**Remark 3.2** ([7]). *Let  $A \in \mathcal{F}^n$  and consider the fuzzy-valued mapping  $F : T \rightarrow \mathcal{F}^n$  given by  $F(s) = A$  for all  $0 \leq s \leq t$ . Then*

$$\int_0^t F = tA.$$

**Definition 3.2.** *Let  $T = [a, b] \subset \mathbb{R}$ . A fuzzy-valued mapping  $F : T \rightarrow \mathcal{F}^n$  is continuous at a point  $t_0 \in T$ , if given  $\epsilon > 0$ , there exists  $\delta > 0$  such that  $D(F(t), F(t_0)) < \epsilon$ , for  $t \in T$  satisfying  $|t - t_0| < \delta$ .*

Throughout this paper we will consider the following definition of continuity for fuzzy-valued mappings, which generalizes Definition 3.2.

**Definition 3.3** ([11, 15]). *Let  $T = [a, b] \subset \mathbb{R}$ . A mapping  $F : T \rightarrow \mathcal{F}^n$  is said  $\alpha$ -continuous at  $t_0 \in T$ , if the set-valued mappings  $F_\alpha : T \rightarrow \mathcal{K}^n$  defined by  $F_\alpha(t) = [F(t)]^\alpha$ ,  $\alpha \in [0, 1]$ , are continuous at  $t = t_0$  with respect to the Hausdorff metric  $d$ , that is, fixed  $\alpha$  and given  $\epsilon > 0$ , there exists  $\delta(\epsilon, \alpha) > 0$  such that*

$$d([F(t)]^\alpha, [F(t_0)]^\alpha) < \epsilon,$$

for all  $t \in T$  with  $|t - t_0| < \delta$ . If  $F$  is  $\alpha$ -continuous for all  $t \in T$ , we simply say that  $F$  is  $\alpha$ -continuous.

**Proposition 3.3** ([15]). *Let  $T = [a, b] \subset \mathbb{R}$ . If  $F : T \rightarrow \mathcal{F}^n$  is  $\alpha$ -continuous, then  $F$  is integrable.*

Now we introduce the concept of  $\alpha$ -differentiability which will be used throughout this paper.

The *Hukuhara difference* ( $H$ -difference)  $A \ominus B$  for  $A, B \in \mathcal{K}^n$  (if it exists), is defined to be the set  $C \in \mathcal{K}^n$  such that  $A = B + C$ . In general  $A \ominus B \neq A + (-)B =$

$A - B$ . Based on the definition of  $H$ -difference, in [6], Hukuhara gave the following definition of Hukuhara differentiability for set-valued mappings.

**Definition 3.4** ([6]). *Let  $T = [a, b] \subset \mathbb{R}$  and  $G : T \rightarrow \mathcal{K}^n$ .  $G$  is Hukuhara differentiable ( $H$ -differentiable) at  $t_0 \in T$  if for  $h > 0$  small enough, the differences  $G(t_0 + h) \ominus G(t_0)$ ,  $G(t_0) \ominus G(t_0 - h)$  exist, and there exists  $G'(t_0) \in \mathcal{K}^n$  such that*

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{G(t_0 + h) \ominus G(t_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{G(t_0) \ominus G(t_0 - h)}{h} = G'(t_0),$$

where the limits are taken in the metric space  $(\mathcal{K}^n, d)$ . At the end points of the interval  $T$  one considers only the one-side derivatives.

Based on Definition 3.4, **Puri** and **Ralescu** [12] extended the notion of  $H$ -derivative of a fuzzy-valued mapping. In fact, for  $u, v \in \mathcal{F}^n$ , an element  $w \in \mathcal{F}^n$  (if it exists) such that  $u = v + w$ , is called the  $H$ -difference of  $u$  and  $v$  and it is denoted by  $u \ominus v$ . Then the following definition is established.

**Definition 3.5** ([12]). *Let  $T = [a, b] \subset \mathbb{R}$  and consider a fuzzy mapping  $F : T \rightarrow \mathcal{F}^n$ .  $F$  is said  $H$ -differentiable at a point  $t_0 \in T$  if for  $h > 0$  small enough, the differences  $F(t_0 + h) \ominus F(t_0)$ ,  $F(t_0) \ominus F(t_0 - h)$  exist, and there exists an element  $F'(t_0) \in \mathcal{F}^n$  such that*

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{F(t_0 + h) \ominus F(t_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{F(t_0) \ominus F(t_0 - h)}{h} = F'(t_0), \quad (6)$$

where the limits are taken in the metric space  $(\mathcal{F}^n, D)$ . At the end points of the interval  $T$  one considers only the one-side derivatives.

As pointed out in [1], the definition of  $H$ -derivative of a fuzzy-valued mapping is very restrictive. Indeed, if we consider a fuzzy number  $c$  and  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  a real-valued function, differentiable at  $t_0 \in (a, b)$  with  $g'(t_0) \leq 0$ , then the fuzzy-valued mapping  $f(x) = cg(x)$  is not  $H$ -differentiable at  $t_0$ . To solve this shortcoming, the authors of [1] introduced the notion of generalized derivative by taking into account the lateral types of  $H$ -derivatives, as follows.

**Definition 3.6** ([3, 1]). *Let  $T = [a, b] \subset \mathbb{R}$  and consider  $F : T \rightarrow \mathcal{F}^n$ .  $F$  is differentiable at  $t_0 \in T$ , in the generalized sense, if*

- (1) for  $h > 0$  small enough, the differences  $F(t_0 + h) \ominus F(t_0)$ ,  $F(t_0) \ominus F(t_0 - h)$  exist, and there exists  $F'(t_0) \in \mathcal{F}^n$  such that

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{F(t_0 + h) \ominus F(t_0)}{h} \\ = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{F(t_0) \ominus F(t_0 - h)}{h} = F'(t_0), \end{aligned} \tag{7}$$

or

- (2) for  $h < 0$  small enough, the differences  $F(t_0 + h) \ominus F(t_0)$ ,  $F(t_0) \ominus F(t_0 - h)$  exist, and there exists  $F'(t_0) \in \mathcal{F}^n$  such that

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{F(t_0 + h) \ominus F(t_0)}{h} \\ = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{F(t_0) \ominus F(t_0 - h)}{h} = F'(t_0), \end{aligned} \tag{8}$$

where the limits are taken in the metric space  $(\mathcal{F}^n, D)$ . At the end points of the interval  $T$  one considers only the one-side derivatives.

**Remark 3.3.** In [3] the authors considered the two cases 1 and 2 of Definition 3.6. In [1], in addition to cases 1 and 2 of Definition 3.6, the authors considered other two cases but in the other two cases, the derivative is trivial because it is reduced to a crisp set (c.f. Remark 2 in [3]).

An analogous definition holds for the case of set-valued mappings.

**Definition 3.7.** Let  $T = [a, b] \subset \mathbb{R}$  and consider  $G : T \rightarrow \mathcal{K}^n$ .  $G$  is differentiable at  $t_0 \in T$ , in the generalized sense, if

- (1) for  $h > 0$  small enough, the differences  $G(t_0 + h) \ominus G(t_0)$ ,  $G(t_0) \ominus G(t_0 - h)$  exist, and there exists  $G'(t_0) \in \mathcal{K}^n$  such that

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{G(t_0 + h) \ominus G(t_0)}{h} \\ = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{G(t_0) \ominus G(t_0 - h)}{h} = G'(t_0), \end{aligned} \tag{9}$$

or

- (2) for  $h < 0$  small enough, the differences  $G(t_0 + h) \ominus G(t_0)$ ,  $G(t_0) \ominus G(t_0 - h)$  exist, and there exists  $G'(t_0) \in \mathcal{K}^n$  such that

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{G(t_0 + h) \ominus G(t_0)}{h} \\ = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{G(t_0) \ominus G(t_0 - h)}{h} = G'(t_0), \end{aligned} \tag{10}$$

where the limits are taken in the metric space  $(\mathcal{K}^n, d)$ . At the ends points of the interval  $T$  one considers only the one-side derivatives. If  $G$  verifies (9) (respectively (10)) we say that  $G$  is differentiable in the generalized sense, in the first form, (respectively,  $G$  is differentiable in the generalized sense, in the second form).

On the other hand, in [11, 15], following notion of derivative was introduced, more general than Definition 3.5, by considering the Hukuhara-derivative of the respective set-valued mappings defined through the  $\alpha$ -levels.

**Definition 3.8** ([11, 15]). Let  $T = [a, b] \subset \mathbb{R}$ . A mapping  $F : T \rightarrow \mathcal{F}^n$  is differentiable at the point  $t_0 \in T$ , if for every  $\alpha \in [0, 1]$ , the set-valued mapping,  $F_\alpha(t) = [F(t)]^\alpha$  is Hukuhara differentiable at the point  $t_0$  according to the Definition 3.4 and the family  $\{F'_\alpha(t) \mid \alpha \in [0, 1]\}$  define a fuzzy set  $F'(t_0) \in \mathcal{F}^n$ .

In this paper we enlarge the class of generalized differentiable fuzzy-valued mappings given in Definitions 3.6 and 3.8 (consequently Definition 3.5), by considering the lateral type of Hukuhara-derivatives of the respective set-valued mappings defined through the  $\alpha$ -levels; more exactly, we have the following definition.

**Definition 3.9.** Let  $T = [a, b] \subset \mathbb{R}$  and consider  $F : T \rightarrow \mathcal{F}^n$ . We say that  $F$  is  $\alpha$ -differentiable at  $t_0 \in T$ , if for all  $\alpha \in [0, 1]$ , the set-valued mapping  $F_\alpha : T \rightarrow \mathcal{K}^n$  defined by  $F_\alpha(t) = [F(t)]^\alpha$  is differentiable at the point  $t_0$  in the generalized sense, and additionally, the family  $\{F'_\alpha(t_0) : \alpha \in [0, 1]\}$  defines a fuzzy set  $F'(t_0) \in \mathcal{F}^n$ . If  $F$  is  $\alpha$ -differentiable at  $t_0 \in T$ , then we say that  $F'(t_0)$  is the derivative of  $F$  at  $t_0$ . If for each  $\alpha \in [0, 1]$  the mapping  $F_\alpha$  is differentiable in the generalized sense according (9) (respectively (10)) in Definition 3.7, we say that  $F$  is  $\alpha$ -differentiable in the first form (respectively, second form).

**Remark 3.4.** The Definition 3.9 is a generalization of the notion of differentiability introduced by Seikkala [16] for studying fuzzy process. From Definition 3.9 it follows that if  $F$  is differentiable in the generalized sense according Definition 3.6, then  $F$  is  $\alpha$ -differentiable (differentiable in the sense of Definition 3.9). The converse result is not true.

**Example 3.0.1.** The existence of Hukuhara differences  $[u]^\alpha \ominus [v]^\alpha, \alpha \in [0, 1]$ , do not imply the existence of  $u \ominus v$ . In fact, consider for instance  $u : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  and

$v : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ , the fuzzy sets defined by

$$u(t) = \begin{cases} 1, & \text{if } t \in [-1, 1] \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$v(t) = \begin{cases} -t + 1, & \text{if } t \in [0, 1] \\ t + 1, & \text{if } t \in [-1, 0] \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

In this case, the Hukuhara differences between the  $\alpha$ -levels of  $u$  and  $v$  exist, that is,

$$[u]^\alpha \ominus [v]^\alpha = [-1, 1] \ominus [-1 + \alpha, 1 - \alpha] = [-\alpha, \alpha],$$

however the Hukuhara difference  $u \ominus v$  does not exist, since the family  $[-\alpha, \alpha]$ , with  $\alpha \in [0, 1]$ , does not define a fuzzy set (see Theorem 2.1).

The following example shows that the  $\alpha$ -differentiability does not imply the differentiability in the generalized sense according to the Definition 3.6.

**Example 3.0.2.** Let  $F : [0, 2] \rightarrow \mathcal{F}^1$  a fuzzy number defined as

$$F(t)(x) = \chi_{[-1,1]}(x), \quad \text{if } t \in [1, 2], x \in \mathbb{R},$$

and

$$F(t)(x) = \begin{cases} \frac{1}{(1-t)^2}(x+1), & x \in [-1, -1+(1-t)^2], \\ \frac{-1}{(1-t)^2}(x-1), & x \in [1, 1-(1-t)^2], \\ 0, & x \notin (-1, 1), \\ 1, & x \in [-1+(1-t)^2, 1-(1-t)^2], \end{cases}$$

if  $t \in [0, 1)$ . It is clear that the differences  $F(1) \ominus F(1-h), h > 0$ , do not exist (see Example 3.0.1). Hence,  $F$  is not differentiable in the generalized sense according to the Definition 3.6 at  $t_0 = 1$ . On the other hand, the family of set-valued mappings  $F_\alpha$  (associated to  $F$ ) are given by

$$F_\alpha(t) = \begin{cases} [-1 + \alpha(1-t)^2, 1 - \alpha(1-t)^2], & t \in [0, 1), \\ [-1, 1], & t \in [1, 2]. \end{cases}$$

Now we calculate the  $\alpha$ -derivative of  $F$  in the first form at  $t_0 = 1$ . It is clear that the differences of the  $\alpha$ -levels exist. Then

$$\begin{aligned} & \frac{F_\alpha(1) \ominus F_\alpha(1-h)}{h} \\ &= \frac{[-1, 1] \ominus [-1 + \alpha(1-(1-h))^2, 1 - \alpha(1-(1-h))^2]}{h} \\ &= \frac{[-1, 1] \ominus [-1 + \alpha h^2, 1 - \alpha h^2]}{h} = \frac{[-\alpha h^2, \alpha h^2]}{h} \\ &= h[-\alpha, \alpha] \xrightarrow{h \rightarrow 0^+} \{0\}. \end{aligned}$$

Moreover,

$$\frac{F_\alpha(1+h) \ominus F_\alpha(1)}{h} = \frac{[-1, 1] \ominus [-1, 1]}{h} = \{0\} \xrightarrow{h \rightarrow 0^+} \{0\}.$$

Then  $F'_\alpha(1) = \{0\}$  for all  $\alpha \in [0, 1]$ . Hence  $F$  is  $\alpha$ -differentiable at  $t_0 = 1$  and its  $\alpha$ -derivative is given by  $F'(1) = \chi_{\{0\}}$ .

**Theorem 3.1.** Let  $T = [a, b] \subset \mathbb{R}, F : T \rightarrow \mathcal{F}^1$  and denote by  $F_\alpha(t) = [f_\alpha(t), g_\alpha(t)]$ , the respective set-valued mapping defined by the  $\alpha$ -levels. Then

- (i) If  $F$  is  $\alpha$ -differentiable at  $t_0$  in the first form, then  $f_\alpha$  and  $g_\alpha$  are differentiable and  $[F'(t_0)]^\alpha = [f'_\alpha(t_0), g'_\alpha(t_0)]$ .
- (ii) If  $F$  is  $\alpha$ -differentiable at  $t_0$  in the second form, then  $f_\alpha, g_\alpha$  are differentiable and  $[F'(t_0)]^\alpha = [g'_\alpha(t_0), f'_\alpha(t_0)]$ .

*Proof:* The part (3.1) was proved in [15]. So, we will prove the part (3.1). By hypothesis, for  $h < 0$  small enough and given  $\alpha \in [0, 1]$  fixed but arbitrary, the differences  $F_\alpha(t_0+h) \ominus F_\alpha(t_0)$  and  $F_\alpha(t_0) \ominus F_\alpha(t_0-h)$  exist. Firstly note that by the definition of Hukuhara difference we get

$$\begin{aligned} F_\alpha(t_0+h) \ominus F_\alpha(t_0) &= [f_\alpha(t_0+h), g_\alpha(t_0+h)] \ominus [f_\alpha(t_0), g_\alpha(t_0)] \\ &= [f_\alpha(t_0+h) - f_\alpha(t_0), g_\alpha(t_0+h) - g_\alpha(t_0)]. \end{aligned}$$

Then, as  $h < 0$ , multiplying by  $1/h$  we obtain

$$\begin{aligned} & \frac{F_\alpha(t_0+h) \ominus F_\alpha(t_0)}{h} \\ &= \frac{1}{h} [f_\alpha(t_0+h) - f_\alpha(t_0), g_\alpha(t_0+h) - g_\alpha(t_0)] \\ &= \left[ \frac{g_\alpha(t_0+h) - g_\alpha(t_0)}{h}, \frac{f_\alpha(t_0+h) - f_\alpha(t_0)}{h} \right]. \end{aligned}$$

Taking the limit when  $h \rightarrow 0^-$  one can ensure the existence of  $g'_\alpha(t_0), f'_\alpha(t_0)$ , and for all  $\alpha \in [0, 1]$  it holds

$$\begin{aligned} F'_\alpha(t) &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{F_\alpha(t_0+h) \ominus F_\alpha(t_0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \left[ \frac{g_\alpha(t_0+h) - g_\alpha(t_0)}{h}, \frac{f_\alpha(t_0+h) - f_\alpha(t_0)}{h} \right] \\ &= [g'_\alpha(t_0), f'_\alpha(t_0)]. \end{aligned}$$

Analogously we obtain

$$\begin{aligned} & \frac{F_\alpha(t_0) \ominus F_\alpha(t_0-h)}{h} \\ &= \left[ \frac{g_\alpha(t_0) - g_\alpha(t_0-h)}{h}, \frac{f_\alpha(t_0) - f_\alpha(t_0-h)}{h} \right], \end{aligned}$$

and hence

$$\begin{aligned} F'_\alpha(t) &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{F_\alpha(t_0) \ominus F_\alpha(t_0 - h)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \left[ \frac{g_\alpha(t_0) - g_\alpha(t_0 - h)}{h}, \frac{f_\alpha(t_0) - f_\alpha(t_0 - h)}{h} \right] \\ &= [g'_\alpha(t_0), f'_\alpha(t_0)]. \end{aligned}$$

**Theorem 3.2.** *Let  $T = [a, b] \subset \mathbb{R}$ . If  $F : T \rightarrow \mathcal{F}^n$  is  $\alpha$ -differentiable, then it is  $\alpha$ -continuous.*

*Proof:* In [15] was proved that if  $F$  is  $\alpha$ -differentiable in the first form, then it is  $\alpha$ -continuous. In our case, let  $t, t + h \in T$  with  $h < 0$ ,  $h$  small enough and  $\alpha \in [0, 1]$ . By hypothesis, the differences  $F_\alpha(t + h) \ominus F_\alpha(t)$  exist. Now, by using the properties of the metric  $d$  we get

$$\begin{aligned} d(F_\alpha(t + h), F_\alpha(t)) &= d(F_\alpha(t) + F_\alpha(t + h) \ominus F_\alpha(t), F_\alpha(t)) \\ &= d(F_\alpha(t + h) \ominus F_\alpha(t), \{0\}) \\ &= |h|d\left(\frac{F_\alpha(t + h) \ominus F_\alpha(t)}{h}, \{0\}\right) \\ &\leq |h|d\left(\frac{F_\alpha(t + h) \ominus F_\alpha(t)}{h}, F'_\alpha(t)\right) + |h|d(F'_\alpha(t), \{0\}). \end{aligned}$$

As  $F$  is  $\alpha$ -differentiable in the second form, then if  $h \rightarrow 0^-$ , the right-hand side of last inequality tends to zero, and hence  $F$  is left  $\alpha$ -continuous. In an analogous way, by working with the difference  $F_\alpha(t) \ominus F_\alpha(t - h)$ , we can prove that  $F$  is right  $\alpha$ -continuous.

**Theorem 3.3.** *Let  $T = [a, b] \subset \mathbb{R}$ . If  $F, G : T \rightarrow \mathcal{F}^n$  are  $\alpha$ -differentiable at the point  $t \in T$  and  $\lambda \in \mathbb{R}$ , then  $(F + G)'(t) = F'(t) + G'(t)$  and  $(\lambda F)'(t) = \lambda F'(t)$ .*

*Proof:* The proof follows by using Lemma 3 in [14] and basic properties of the metric  $d$ .

**Theorem 3.4.** *Let  $T = [a, b] \subset \mathbb{R}$ . If  $F : T = [a, b] \rightarrow \mathcal{F}^n$  is  $\alpha$ -continuous, then*

- (a)  $G(t) = \int_a^t F$  is  $\alpha$ -differentiable in the first form and  $G'(t) = F(t)$  for all  $t \in T$ , and,
- (b)  $H(t) = \int_t^b F$  is  $\alpha$ -differentiable in the second form and  $H'(t) = -F(t)$  for all  $t \in T$ .

*Proof:* If  $F$  is  $\alpha$ -continuous, by Theorem 3.3 we conclude that  $F_\alpha$  is integrable; hence, the fuzzy-valued mappings  $G$  and  $H$  are well-defined. The proof in the case (3.4) was given in [15]. We will prove the case (3.4).

Let  $h < 0$  small enough such that  $a \leq t + h < t \leq b$ . By Theorem 3.2, item (3.2), it holds

$$\int_{t+h}^t F_\alpha + \int_t^b F_\alpha = \int_{t+h}^b F_\alpha,$$

that is,

$$\int_{t+h}^t F_\alpha + H_\alpha(t) = H_\alpha(t + h),$$

or equivalently

$$H_\alpha(t + h) \ominus H_\alpha(t) = \int_{t+h}^t F_\alpha.$$

Let  $\epsilon > 0$ . By properties of metric  $d$ , Remark 3.2 and the  $\alpha$ -continuity of  $F_\alpha$ , we have

$$\begin{aligned} d\left(\frac{H_\alpha(t + h) \ominus H_\alpha(t)}{h}, -F_\alpha(t)\right) &= \frac{1}{|h|}d(H_\alpha(t + h) \ominus H_\alpha(t), -hF_\alpha(t)) \\ &= \frac{1}{|h|}d\left(\int_{t+h}^t F_\alpha(s)ds, \int_{t+h}^t F_\alpha(t)ds\right) \\ &\leq \frac{1}{|h|} \int_{t+h}^t d(F_\alpha(s), F_\alpha(t))ds \leq \epsilon, \end{aligned}$$

for  $h < 0$  small enough. Consequently,

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{H_\alpha(t + h) \ominus H_\alpha(t)}{h} = -F_\alpha(t).$$

In an analogous way we get

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{H_\alpha(t) \ominus H_\alpha(t - h)}{h} = -F_\alpha(t).$$

**Theorem 3.5.** *Let  $T = [a, b] \subset \mathbb{R}$ ,  $F : T \rightarrow \mathcal{F}^1$  and denote by  $F_\alpha(t) = [f_\alpha(t), g_\alpha(t)]$ , the respective set-valued mapping defined through the  $\alpha$ -levels of  $F$ . If  $F$  is  $\alpha$ -differentiable in the second form on the interval  $T$ , with  $F'$  such that  $[F'(t)]^\alpha = [g'_\alpha(t), f'_\alpha(t)]$  verifies that  $g'_\alpha(t), f'_\alpha(t)$  are continuous functions on  $T$ , then for each  $s \in T$  we have*

$$F(s) = F(a) \ominus (-1) \int_a^s F'(t) dt. \tag{11}$$

**Remark 3.5.** In Theorem 3.5, in case when  $F$  is  $\alpha$ -differentiable in the first form on the interval  $T$ , we have that  $F(s) = F(a) + \int_a^s F'(t) dt$ . (c.f [11, 15]).

*Proof:* As  $F$  is  $\alpha$ -differentiable in the second form, from Theorem 3.1, part (3.1), we have that  $[F'(t)]^\alpha =$

$[g'_\alpha(t), f'_\alpha(t)]$ . Now, by using Remark 3.1, for each  $\alpha \in [0, 1]$ , we get

$$\begin{aligned} \left[ \int_a^s F'(t) dt \right]^\alpha &= \int_a^s [F'(t)]^\alpha dt \\ &= \left[ \int_a^s g'_\alpha(t) dt, \int_a^s f'_\alpha(t) dt \right] \\ &= [g_\alpha(s) - g_\alpha(a), f_\alpha(s) - f_\alpha(a)]. \end{aligned}$$

Consequently,

$$\begin{aligned} (-1) \int_a^s [F'(t)]^\alpha dt &= [f_\alpha(a) - f_\alpha(s), g_\alpha(a) - g_\alpha(s)] \\ &= [f_\alpha(a), g_\alpha(a)] \ominus [f_\alpha(s), g_\alpha(s)] \\ &= F_\alpha(a) \ominus F_\alpha(s) = [F(a)]^\alpha \ominus [F(s)]^\alpha. \end{aligned}$$

Then, for all  $\alpha \in [0, 1]$ , we obtain

$$[F(a)]^\alpha = [F(s)]^\alpha + (-1) \int_a^s [F'(t)]^\alpha dt,$$

that is,

$$[F(s)]^\alpha = [F(a)]^\alpha \ominus (-1) \int_a^s [F'(t)]^\alpha dt.$$

Therefore (11) is proved.

#### 4. Cauchy problem of fuzzy differential equations

**Definition 4.1** ([11, 15]). Let  $T = [a, b] \subset \mathbb{R}$ . A function  $f : T \times \mathcal{F}^n \rightarrow \mathcal{F}^n$  is called  $\alpha$ -continuous at a point  $(t_0, x_0) \in T \times \mathcal{F}^n$  provided for any fixed  $\alpha \in [0, 1]$  and for any  $\epsilon > 0$ , there exists  $\delta(\alpha, \epsilon) > 0$  such that

$$d([f(t, x)]^\alpha, [f(t_0, x_0)]^\alpha) < \epsilon, \tag{12}$$

whenever  $|t - t_0| < \delta(\epsilon, \alpha)$  and

$$d([x]^\alpha, [x_0]^\alpha) < \delta(\alpha, \epsilon), \quad t \in T, x \in \mathcal{F}^n.$$

The aim of this section is to analyze the existence and uniqueness of solutions of the fuzzy initial value problem

$$x'(t) = f(t, x(t)), \quad x(t_0) = x_0, \tag{13}$$

where  $x_0 \in \mathcal{F}^1$ ,  $f : T \times \mathcal{F}^1 \rightarrow \mathcal{F}^1$  is  $\alpha$ -continuous and  $x'$  denotes the  $\alpha$ -derivative of the mapping  $x$ . The following theorem gives an equivalence between the fuzzy differential equation and an integral formulation.

**Theorem 4.1.** Let  $f : T \times \mathcal{F}^1 \rightarrow \mathcal{F}^1$   $\alpha$ -continuous and  $x_0 \in \mathcal{F}^1$ . A mapping  $x : T \rightarrow \mathcal{F}^1$  is a solution of (13)

if and only if  $x$  is  $\alpha$ -continuous and verifies the integral equation

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds, \quad \forall t \in T, \tag{14}$$

or

$$x(t) = x_0 \ominus (-1) \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds, \quad \forall t \in T, \tag{15}$$

depending on the  $\alpha$ -differentiability considered, first or second form, respectively.

*Proof:* Using the arguments of [7], in [15] was proved that if the  $\alpha$ -differentiability is considered in the first form, then a function  $x : T \rightarrow \mathcal{F}^1$  is a solution of (13) if and only if  $x$  is  $\alpha$ -continuous and verifies the integral equation (14). We will prove the second equivalence. Firstly, we note that if  $x$  is a solution of (13) with the  $\alpha$ -derivative  $x'$  being considered in the second form, then from Theorem 3.2 it follows that  $x$  is  $\alpha$ -continuous. Moreover, Theorem 3.5 for all  $t \in T$ , implies that

$$x(t) = x_0 \ominus (-1) \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds = x_0 \ominus (-1) \int_{t_0}^t x'(s) ds.$$

On the other hand, by Theorem 3.3, if  $f$  is  $\alpha$ -continuous then  $f$  is integrable; hence, the integral in (15) has meaning. Moreover, if  $x$  is  $\alpha$ -continuous and verifies the integral equation (15), then by using Remark 3.1, the  $\alpha$ -levels of  $x$  (denoted by  $[x(t)]^\alpha = [x_\alpha^1(t), x_\alpha^2(t)]$ ) verify

$$\begin{aligned} [x(t)]^\alpha &= [x_\alpha^1(t), x_\alpha^2(t)] = [x_0]^\alpha \ominus (-1) \left[ \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds \right]^\alpha \\ &= [x_\alpha^1(t_0), x_\alpha^2(t_0)] \ominus (-1) \int_{t_0}^t [f(s, x(s))]^\alpha ds \\ &= [x_\alpha^1(t_0), x_\alpha^2(t_0)] \ominus (-1) \left[ \int_{t_0}^t f_\alpha^1(s, x(s)) ds, \int_{t_0}^t f_\alpha^2(s, x(s)) ds \right] \\ &= [x_\alpha^1(t_0), x_\alpha^2(t_0)] \ominus \left[ -\int_{t_0}^t f_\alpha^2(s, x(s)) ds, -\int_{t_0}^t f_\alpha^1(s, x(s)) ds \right], \end{aligned}$$

where  $f_\alpha^1, f_\alpha^2$  are defined such that

$$[f(s, x(s))]^\alpha = [f_\alpha^1(s, x(s)), f_\alpha^2(s, x(s))].$$

Consequently

$$\begin{aligned} [x_\alpha^1(t_0), x_\alpha^2(t_0)] &= \left[ -\int_{t_0}^t f_\alpha^2(s, x(s)) ds, -\int_{t_0}^t f_\alpha^1(s, x(s)) ds \right] \\ &\quad + [x_\alpha^1(t), x_\alpha^2(t)], \end{aligned}$$

and therefore

$$x_\alpha^1(t) = x_\alpha^1(t_0) + \int_{t_0}^t f_\alpha^2(s, x(s))ds,$$

$$x_\alpha^2(t) = x_\alpha^2(t_0) + \int_{t_0}^t f_\alpha^1(s, x(s))ds.$$

Thus,

$$(x_\alpha^1)'(t) = f_\alpha^2(t, x(t)), \quad (x_\alpha^2)'(t) = f_\alpha^1(t, x(t)),$$

or equivalently,

$$[x'(t)]^\alpha = [(x_\alpha^2)'(t), (x_\alpha^1)'(t)]$$

$$= [f_\alpha^1(t, x(t)), f_\alpha^2(t, x(t))]$$

$$= [f(t, x(t))]^\alpha, \quad \forall \alpha \in [0, 1],$$

which proves that  $x$  is a solution of the differential equation (13).

The following theorem gives us conditions on the existence (and, in a certain sense, the uniqueness) of solutions for the fuzzy initial value problem (13) when we consider the notion of  $\alpha$ -differentiability.

**Theorem 4.2.** *Let us suppose that the following conditions hold*

- (1) *A mapping  $f : R_0 \rightarrow \mathcal{F}^1$  is  $\alpha$ -continuous, where  $R_0 = \{t : |t - t_0| \leq \delta \leq a\} \times \{x \in \mathcal{F}^1 : D(x, x_0) \leq b\}$ ,  $a > 0, b > 0$ , and  $x_0 \in \mathcal{F}^1$ .*
- (2) *There exists  $K > 0$  such that for all  $(t, x), (t, y) \in R_0$ ,  $d([f(t, x)]^\alpha, [f(t, y)]^\alpha) \leq Kd([x]^\alpha, [y]^\alpha)$ , for all  $\alpha \in [0, 1]$ .*
- (3) *There exists  $q > 0$  such that for any  $t$  satisfying  $|t - t_0| \leq q$ , the sequence  $\tilde{x}_n(t) = x_0 \ominus (-1) \int_{t_0}^t f(s, \tilde{x}_{n-1}(s))ds$  are defined for all  $n \in \mathbb{N}$ .*

Then the fuzzy initial value problem (13) has two (unique) solutions  $x, \tilde{x}$ , with  $x$  being  $\alpha$ -differentiable in the first form,  $\tilde{x}$  being  $\alpha$ -differentiable in the second form, and defined on the interval

$$|t - t_0| \leq \delta = \min \left\{ a, \frac{b}{M}, q \right\}, \quad (16)$$

where  $M = D(f(t, x), \hat{0})$  for any  $(t, x) \in R_0$ , and  $\hat{0} \in \mathcal{F}^1$  is the fuzzy number defined by

$$\hat{0}(t) = \begin{cases} 1, & t = 0, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Moreover

$$D(x_n, x) \rightarrow 0, D(\tilde{x}_n, \tilde{x}) \rightarrow 0, \text{ on } |t - t_0| \leq \delta, \quad (17)$$

as  $n \rightarrow \infty$ , where  $x_n, \tilde{x}_n$  are the respective successive approximations given by

$$x_n(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x_{n-1}(s))ds, \quad n = 1, 2, \dots \quad (18)$$

$$\tilde{x}_n(t) = x_0 \ominus (-1) \int_{t_0}^t f(s, \tilde{x}_{n-1}(s))ds, \quad n = 1, 2, \dots \quad (19)$$

**Remark 4.1.** The importance of this theorem is that it guarantees the existence (and uniqueness) for fuzzy initial value problem by assuming a more general notion of differentiability, as was developed in [1, 3, 7, 11, 15]. Moreover, this theorem provides conditions for the implementation of a numerical method in order to obtain such solutions.

*Proof:* For the case of  $\alpha$ -differentiability in the first form, we obtain the existence of a unique solution  $x$  verifying  $D(x_n, x) \rightarrow 0$ , and  $x_n$  as in (18) (c.f. [11]). For the case of  $\alpha$ -differentiability in the second form, if  $t \in \{t : |t - t_0| \leq \delta \leq a\}$ , then for  $k = 1$

$$\tilde{x}_1(t) = x_0 \ominus (-1) \int_{t_0}^t f(s, x_0(s))ds,$$

and hence, from Theorem 4.1, the function  $\tilde{x}_1$  is  $\alpha$ -continuous on the interval  $|t - t_0| \leq \delta$ . Moreover, for all  $\alpha \in [0, 1]$ , by using (4) and properties of metric  $d$  given in Section 2, we have

$$d([\tilde{x}_1(t)]^\alpha, [x_0]^\alpha) =$$

$$d \left( [\tilde{x}_1]^\alpha, [\tilde{x}_1]^\alpha + (-1) \left[ \int_{t_0}^t f(s, x_0(s))ds \right]^\alpha \right) =$$

$$d \left( \left[ \int_{t_0}^t f(s, x_0(s))ds \right]^\alpha, \{0\} \right).$$

Consequently, taking the  $\sup_{0 \leq \alpha \leq 1}$  in the last equality we obtain

$$D(\tilde{x}_1(t), x_0) =$$

$$D \left( \int_{t_0}^t f(s, x_0(s))ds, \hat{0} \right) \leq$$

$$\int_{t_0}^t D(f(s, x_0(s)), \hat{0}) ds \leq$$

$$M|t - t_0| \leq M\delta \leq b,$$

provided  $|t - t_0| \leq \delta$ , where  $M = D(f(t, x), \hat{0})$ , for any  $(t, x) \in R_0$ . By an induction argument, assume that  $\tilde{x}_{n-1}(t)$  is  $\alpha$ -continuous on  $|t - t_0| \leq \delta$  and  $D(\tilde{x}_{n-1}(t), x_0) \leq M|t - t_0| \leq M\delta \leq b$ , provided

$|t - t_0| \leq \delta$ . Using (19) we have that  $\tilde{x}_n(t)$  is  $\alpha$ -continuous on  $|t - t_0| \leq \delta$  and

$$D(\tilde{x}_n(t), x_0) \leq M|t - t_0| \leq M\delta \leq b.$$

Consequently we have that the set  $\{\tilde{x}_n(t)\}_{n \geq 1}$  is a sequence of functions which are  $\alpha$ -continuous on  $|t - t_0| \leq \delta$  and  $(t, \tilde{x}_n(t)) \in R_0, |t - t_0| \leq \delta, n = 1, 2, \dots$

We will show that there exists  $\tilde{x} : \{t : |t - t_0| \leq \delta \leq a\} \rightarrow \mathcal{F}^1$  such that  $D(\tilde{x}_n(t), \tilde{x}(t)) \rightarrow 0$  uniformly on

$|t - t_0| \leq \delta$ , when  $n \rightarrow \infty$ . Note that by definition of

Hukuhara difference, we have

$$x_0 = (-1) \int_{t_0}^t f(s, x_0(s)) ds + \tilde{x}_1(t),$$

$$x_0 = (-1) \int_{t_0}^t f(s, x_1(s)) ds + \tilde{x}_2(t).$$

Then, by using the properties of the Hausdorff distance  $d$  (including the invariance with respect to translations), for any  $\alpha \in [0, 1]$  we obtain

$$\begin{aligned} d([\tilde{x}_2(t)]^\alpha, [\tilde{x}_1(t)]^\alpha) &\leq \dots \\ &\leq d\left([\tilde{x}_2(t)]^\alpha + \left[(-1) \int_{t_0}^t f(s, \tilde{x}_1(s)) ds\right]^\alpha, [\tilde{x}_1(t)]^\alpha + \left[(-1) \int_{t_0}^t f(s, x_0(s)) ds\right]^\alpha\right) \\ &\quad + d\left([\tilde{x}_2(t)]^\alpha + \left[(-1) \int_{t_0}^t f(s, \tilde{x}_1(s)) ds\right]^\alpha, [\tilde{x}_2(t)]^\alpha + \left[(-1) \int_{t_0}^t f(s, x_0(s)) ds\right]^\alpha\right) \\ &= d([\tilde{x}_0]^\alpha, [\tilde{x}_0]^\alpha) + d\left(\left[\int_{t_0}^t f(s, \tilde{x}_1(s)) ds\right]^\alpha, \left[\int_{t_0}^t f(s, x_0(s)) ds\right]^\alpha\right) \\ &\leq \int_{t_0}^t d([f(s, \tilde{x}_1(s))]^\alpha, [f(s, x_0(s))]^\alpha) ds \leq \int_{t_0}^t K d([\tilde{x}_1(s)]^\alpha, [x_0(s)]^\alpha) ds, \end{aligned}$$

and thus

$$\begin{aligned} D(\tilde{x}_2(t), \tilde{x}_1(t)) &\leq K \int_{t_0}^t D(\tilde{x}_1(s), x_0(s)) ds \\ &\leq MK \frac{|t - t_0|^2}{2!} \leq MK \frac{\delta^2}{2!}. \end{aligned}$$

By an induction argument, assume that

$$D(\tilde{x}_n(t), \tilde{x}_{n-1}(t)) \leq MK^{n-1} \frac{|t - t_0|^n}{n!} \leq MK^{n-1} \frac{\delta^n}{n!}.$$

We want to prove that

$$\begin{aligned} D(\tilde{x}_{n+1}(t), \tilde{x}_n(t)) &\leq MK^n \frac{|t - t_0|^{n+1}}{(n+1)!} \leq MK^n \frac{\delta^{n+1}}{(n+1)!}. \quad (20) \end{aligned}$$

In fact, as before, for all  $\alpha \in [0, 1]$  we obtain

$$\begin{aligned} d([\tilde{x}_{n+1}(t)]^\alpha, [\tilde{x}_n(t)]^\alpha) &\leq d\left(\left[\int_{t_0}^t f(s, \tilde{x}_n(s)) ds\right]^\alpha, \left[\int_{t_0}^t f(s, \tilde{x}_{n-1}(s)) ds\right]^\alpha\right) \\ &\leq \int_{t_0}^t d([f(s, \tilde{x}_n(s))]^\alpha, [f(s, \tilde{x}_{n-1}(s))]^\alpha) ds \end{aligned}$$

$$\leq \int_{t_0}^t K d([\tilde{x}_n(s)]^\alpha, [\tilde{x}_{n-1}(s)]^\alpha) ds.$$

Therefore

$$\begin{aligned} D(\tilde{x}_{n+1}(t), \tilde{x}_n(t)) &\leq K \int_{t_0}^t D(\tilde{x}_n(t), \tilde{x}_{n-1}(t)) ds \\ &\leq MK^n \int_{t_0}^t \frac{|s - t_0|^n}{n!} ds \leq MK^n \frac{\delta^{n+1}}{(n+1)!}. \end{aligned}$$

Consequently, according to the convergence criterion of Weierstrass, from (20) it follows that

$$D(\tilde{x}_n(t), \tilde{x}_{n-1}(t)) \rightarrow 0,$$

uniformly on  $|t - t_0| \leq \delta$ , as  $n \rightarrow \infty$ . Hence, there exists  $\tilde{x} : \{t : |t - t_0| \leq \delta \leq a\} \rightarrow \mathcal{F}^1$  such that  $D(\tilde{x}_n(t), \tilde{x}(t)) \rightarrow 0$  uniformly on  $|t - t_0| \leq \delta$ , as  $n \rightarrow \infty$ . As  $D(f(t, \tilde{x}_n(t)), f(t, \tilde{x}(t))) \leq KD(\tilde{x}_n(t), \tilde{x}(t)) \rightarrow 0$  uniformly on  $|t - t_0| \leq \delta$ , as  $n \rightarrow \infty$ , we have

$$\tilde{x}(t) = x_0 \ominus (-1) \int_{t_0}^t f(s, \tilde{x}(s)) ds.$$

Finally we will prove the uniqueness. In [11], by using the  $\alpha$ -differentiability in the first form, was proved that there exists a unique application  $x(t)$  defined on  $|t - t_0| \leq \delta$  which verifies (14). Now we consider the  $\alpha$ -differentiability in the second form and we suppose that there exists  $\tilde{y}(t)$ , defined on  $|t - t_0| \leq \delta$ , verifying (15). We need to show that  $D(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t)) \equiv 0$  for all  $t$  such that  $|t - t_0| \leq \delta$ . For all  $n \in \mathbb{N}$  and  $\tilde{x}_n$  defined as in (19), for all  $\alpha \in [0, 1]$  we have

$$\begin{aligned} & d([\tilde{y}(t)]^\alpha, [\tilde{x}_n(t)]^\alpha) \\ & \leq d\left(\left[\int_{t_0}^t f(s, \tilde{y}(s))ds\right]^\alpha, \left[\int_{t_0}^t f(s, \tilde{x}_{n-1}(s))ds\right]^\alpha\right) \\ & \leq \int_{t_0}^t Kd([\tilde{y}(s)]^\alpha, [\tilde{x}_{n-1}(s)]^\alpha)ds. \end{aligned}$$

Consequently, for all  $n \in \mathbb{N}$ , we get

$$D([\tilde{y}(t)]^\alpha, [\tilde{x}_n(t)]^\alpha) \leq K \int_{t_0}^t D(\tilde{y}(s), \tilde{x}_{n-1}(s))ds.$$

Note that  $D(\tilde{y}(t), x_0) \leq b$  on  $|t - t_0| \leq \delta$ . Therefore

$$D(\tilde{y}(t), \tilde{x}_1(t)) \leq bK|t - t_0|,$$

on  $|t - t_0| \leq \delta$ . By an induction procedures, if we assume that

$$D(\tilde{y}(t), \tilde{x}_n(t)) \leq bK^n \frac{|t - t_0|^n}{n!},$$

on  $|t - t_0| \leq \delta$ , we obtain

$$D(\tilde{y}(t), \tilde{x}_{n+1}(t)) \leq bK^{n+1} \frac{|t - t_0|^{n+1}}{(n + 1)!}.$$

Hence,  $D(\tilde{y}(t), \tilde{x}_n(t)) = D(\tilde{x}(t), \tilde{x}_n(t)) \rightarrow 0$ , when  $n \rightarrow \infty$  and  $t$  such that  $|t - t_0| \leq \delta$ .

**Example 4.0.3.** Consider the Cauchy problem given by

$$x'(t) = -x(t) + t + 1, \quad x(0) = C, \quad (21)$$

where  $C$  is a fuzzy interval, that is, an element of  $\mathcal{F}^1$  such that each  $\alpha$ -level of  $C$  is the compact interval  $C^\alpha = [c_1, c_2]$ . The problem (21) verifies the assumptions of Theorem 4.2 and thus, the existence of solution is guaranteed.

Now we will calculate explicitly the solution. We write the  $\alpha$ -levels of  $x$  as  $x_\alpha(t) = [u_\alpha(t), v_\alpha(t)]$ . If  $x'(t)$  is the  $\alpha$ -derivative of  $x$  in the first form, by Theorem 3.1 we have that  $x'_\alpha(t) = [u'_\alpha(t), v'_\alpha(t)]$ . Then, the fuzzy differential equation in (21) can be expressed as

$$\begin{aligned} [u'_\alpha(t), v'_\alpha(t)] &= -[u_\alpha(t), v_\alpha(t)] + t + 1 \\ &= [-v_\alpha(t) + t + 1, -u_\alpha(t) + t + 1]. \end{aligned}$$

Hence, we obtain the following system of Cauchy problems of ordinary differential equations

$$\begin{aligned} u'_\alpha(t) &= -v_\alpha(t) + t + 1, & u_\alpha(0) &= c_1, \\ v'_\alpha(t) &= -u_\alpha(t) + t + 1, & v_\alpha(0) &= c_2. \end{aligned}$$

The solutions of the last system are given by

$$u_\alpha(t) = \frac{c_1 + c_2}{2}e^{-t} + \frac{c_1 - c_2}{2}e^t + t$$

and

$$v_\alpha(t) = \frac{c_1 + c_2}{2}e^{-t} + \frac{c_2 - c_1}{2}e^t + t.$$

Thus, the solution of (21) by assuming the  $\alpha$ -derivative  $x'$  in the first form is

$$x(t) = t + \frac{c_1 + c_2}{2}e^{-t} + \frac{e^t}{2}[C + (-C)], \quad t \in T.$$

Now, if  $x'$  is the  $\alpha$ -derivative in the second form, by Theorem 3.1 we have that  $x'_\alpha(t) = [v'_\alpha(t), u'_\alpha(t)]$ . Then, the fuzzy differential equation in (21) can be expressed as

$$\begin{aligned} [u'_\alpha(t), v'_\alpha(t)] &= -[u_\alpha(t), v_\alpha(t)] + t + 1 \\ &= [-v_\alpha(t) + t + 1, -u_\alpha(t) + t + 1]. \end{aligned}$$

Hence, we obtain the following system of Cauchy problems of ordinary differential equations

$$\begin{aligned} u'_\alpha(t) &= -u_\alpha(t) + t + 1, & u_\alpha(0) &= c_1, \\ v'_\alpha(t) &= -v_\alpha(t) + t + 1, & v_\alpha(0) &= c_2. \end{aligned}$$

The solutions of the last system are given by

$$u_\alpha(t) = t + c_1e^{-t} \quad \text{and} \quad v_\alpha(t) = t + c_2e^{-t}.$$

Thus, the another solution of (21) by assuming the  $\alpha$ -derivative  $x'$  in the second form is

$$\tilde{x}(t) = t + Ce^{-t}, \quad t \in T.$$

### References

- [1] **Bede B. & Gal S.** *Generalizations of the differentiability of fuzzy-number-valued functions with applications to fuzzy differential equations*, Fuzzy Set and Systems **151** (2005) 581-599.
- [2] **Chalco-Cano Y. & Román-Flores H.** *Comparison between some approaches to solve fuzzy differential equations*, Fuzzy Set and Systems **160** (2009) 1517-1527.
- [3] **Chalco-Cano Y. & Román-Flores H.** *On new solutions of fuzzy differential equations*, Chaos Solitons & Fractals **38** (2008) 112-119.
- [4] **Diamond P.** *Time-dependent differential inclusions, cocycle attractors and fuzzy differential equations*, IEEE Trans. Fuzzy System **7** (1999) 734-740.
- [5] **Diamond P.** *Stability and periodicity in fuzzy differential equations*, IEEE Trans. Fuzzy System **8** (2000) 583-590.

- [6] **Hukuhara M.** *Intégration des applications mesurables dont la valeur est un compact convexe*, Funkcialaj Ekvacioj **10** (1967) 205-223.
- [7] **Kaleva O.** *Fuzzy differential equations*, Fuzzy Sets and Systems **24** (1987) 301-317.
- [8] **Khastan, A. & Nieto, J.** *A boundary value problem for second order fuzzy differential equations*. Nonlinear Anal. **72** (2010) 3583-3593.
- [9] **Negoita C. & Ralescu D.** *Applications of Fuzzy Sets to Systems Analysis*, Wiley, New York, (1975) 12-31.
- [10] **Nieto J.** *The Cauchy problem for continuous fuzzy differential equations*, Fuzzy Set and Systems **102** (1999) 259-262.
- [11] **Park J. & Han H.** *Existence and uniqueness theorem for a solutions of fuzzy diferential equations*, Internat. J. Math. & Math. Sci. **22** (1999) 271-279.
- [12] **Puri M. & Ralescu D.** *Differential of fuzzy functions*, J. Math. Anal. Appl. **91** (1983) 552-558.
- [13] **Puri M. & Ralescu D.** *Fuzzy random variables*, J. Math. Anal. Appl. **114** (1986) 409-422.
- [14] **Radström H.** *An embedding theorem for spaces of convex sets*, Proc. Amer. Math. Soc. **3** (1952) 165-169.
- [15] **Song S. & Wu C.** *Existence and uniqueness of solutions to Cauchy problem of fuzzy diferential equations*, Fuzzy Set and Systems **110** (2000) 55-67.
- [16] **Seikkala S.** *On the fuzzy initial value problem*, Fuzzy Sets and Systems **24** (1987) 319-330.
- [17] **Xu, J., Liao, Z. & Nieto, J.** *A class of linear differential dynamical systems with fuzzy matrices*. J. Math. Anal. Appl. **368** (2010) 54-68.
- [18] **Zadeh L.** *Fuzzy sets*, Information and Control **8** (1965), 338-353.
- [19] **Zadeh L.** *Toward a generalized theory of uncertainty (GUT-an outline)*, Information Sciences **172** (2005) 1-40.
- [20] **Zhang, D., Feng, W., Zhao, Y. & Qiu, J.** *Global existence of solutions for fuzzy second-order differential equations under generalized H-differentiability*. Computers and Mathematics with Applications, In Press, doi:10.1016/j.camwa.2010.06.038

Recibido el 4 de junio de 2010

Aceptado para su publicación el 31 de julio de 2010

# REVISTA DE LA ACADEMIA COLOMBIANA DE CIENCIAS EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES

## ÍNDICE GENERAL DEL VOLUMEN XXXIV, AÑO 2010

Número 130, páginas 3 - 132 (Marzo)  
Número 131, páginas 135 - 270 (Junio)  
Número 132, páginas 273 - 418 (Septiembre)  
Número 133, páginas 421-574(Diciembre)

### Vida Académica

Informe sobre las actividades desarrolladas durante el año académico 2009-2010 553

### Antropología

Evolución y tamaño dental en poblaciones humanas de Colombia 423

### Biología Marina

Bivalvos perforadores de madera en la Costa Pacifica Colombiana 277

### Biología Molecular

Non-GTPase proteins that share common motifs with g domains: convergent or divergent evolution or domain recombination? 289

### Botánica

Las gramíneas (Poaceae) de la Guayana colombiana: análisis sobre su composición, riqueza, endemismo e invasión 5

Más sobre *Matisia Gentryi* (Bombacaceae-Quararibeeae). Una especie promisoría y poco conocida del Chocó, Colombia 17

Mejoramiento nutricional de la rosa para el manejo de *Peronospora sparsa* Berkeley, causante del mildew veloso 137

Evaluación de caracteres del cáliz y de los estambres en la Tribu Merianieae (*Melastomataceae*) y definición de homologías 143

Novedades taxonómicas en el género *Columnnea* (*Gesneriaceae*) 301

Uso y manejo tradicional de plantas medicinales y mágicas en el Valle de Sibundoy, Alto Putumayo, y su relación con procesos locales de construcción ambiental 309

Nuevas especies colombianas de *Espeletiopsis* Cuatrec. y de *Espeletia mutis* ex Humb. & Bonpl. (*Asteraceae*, *Heliantheae*, *Espeletiinae*) 441

Plantas de coca en Colombia. Discusión crítica sobre la taxonomía de las especies cultivadas del género *Erythroxylum* P. Browne (*Erythroxylaceae*) 445

*Aristolochia pentandra* (*Aristolochiaceae*) in Colombia: biogeographic implications and proposed synapomorphies between the pentandrous species of *Aristolochia* and its South American sister group 467

### Ciencias de la Tierra

Isla de calor y cambios espacio-temporales de la temperatura en la ciudad de Bogotá	173
Assessing the effect of soil use changes on soil moisture regimes in mountain regions. (Catalan Pre-Pyrenees NE Spain)	327

### Entomología

Variables ambientales, sensores remotos y sistemas de información geográfica aplicados al estudio de la distribución de <i>Rhodnius prolixus</i> en Colombia	27
--	----

### Física

Comparación del módulo de elasticidad de espumas con base poliolefina, obtenidos en ensayos de compresión e indentación por caída de dardo. Curvas de amortiguamiento dinámico	185
¿Qué rayos sabemos?	193
Un modelo inflacionario sin inflatones	479

### Geología

Una revisión sobre el estudio de movimientos en masa detonados por lluvias	209
Algunos intentos de comprensión del origen geológico de la Sierra Nevada de Santa Marta durante el siglo XIX: los casos de Joaquín Acosta y Jorge Isaacs	497

### Historia y Filosofía de la Ciencia

Energía, entropía y religión. Un repaso histórico	37
---	----

### Matemáticas y Estadísticas

Estudio matemático del diseño precolombino de la espiral en el arte rupestre del noroccidente del municipio de Pasto (Colombia)	53
A unique continuation result for a generalized KDV type equation with variable coefficients	71
Polynomials with a restricted range and curves with many points	229
Productos fibrados de extensiones de Kummer y Artin Schreier	513
New implicit multistep method for ODE's	521
Asymptotic behaviour of the Jacobi Sobolev-type orthogonal polynomials. A non diagonal case	529
A note on the Cauchy problem of fuzzy differential equations	541

### Medio Ambiente

Co <sub>2</sub> y radiación solar: ¿causantes del calentamiento global?	339
Los rellenos sanitarios en Latinoamérica: caso colombiano	347

### Química

<i>Pseudopterogorgia Elisabethae</i> de San Andrés y Providencia, una pluma de mar con excelente potencial como fuente de productos naturales con aplicación industrial	89
Uso de métodos electroquímicos como herramientas para evaluar parámetros de interfase en sistemas heterogéneos metal/medio acuoso	241

Estudio de la hidrogenación en fase homogénea de oleato de metilo con catalizadores de Rutenio y Paladio	357
Modificación de una Bentonita Sódica mediante intercalación-pilarización y delaminación con Oligómeros de Cr o Sn.	373

### Zoología

Moluscos del Mioceno y del Pleistoceno de la isla de San Andrés (Mar Caribe, Colombia) y consideraciones paleobiogeográficas	105
Identificación de nematodos fitoparásitos en guayabo ( <i>Psidium guajava L.</i> ), en el municipio de Manizales (Caldas), Colombia	117
Reporte de un nuevo ejemplar de <i>Granastrapotherium snorki</i> en el Valle Superior del Magdalena, Desierto de la Tatacoa, Huila, Colombia	253
Estudio taxonómico de los crustáceos decápodos de agua dulce ( <i>Trichodactylidae, Pseudothelphusidae</i> ) de Casanare, Colombia	257
¿Es <i>Sayornis nigricans</i> ( <i>aves: Tyrannidae</i> ) un buen indicador de calidad ambiental en la zona urbana de Cali, Colombia?	373
La avifauna de la parte media del río Apaporis, Departamentos de Vaupés y Amazonas, Colombia	381
Ecology of non - marine Ostracoda from la Fe reservoir (El Retiro, Antioquia) and their potential application in paleoenvironmental studies	397

<b>Constitución de la Academia</b>	127, 267, 411, 569
------------------------------------	--------------------

<b>Publicaciones de la Academia</b>	129, 269, 415, 569
-------------------------------------	--------------------

<b>Lista de Evaluadores (Volumen XXXIV)</b>	565
---	-----

## ÍNDICE DE AUTORES

Albarracín Mantilla Adriana Alexandra	513	Martha Rocha de Campos	257
Boroni Gustavo	521	Martínez Hernán	209
Cala Vitery Favio	37	Martínez José Ignacio	397
Cantera K. Jaime R.	277	Mendoza-Cifuentes Humberto	143
Cardona Molina Agustín	497	Molina Gallego Rafael	365
Carriazo Baños José Gregorio	365	Moreno Guáqueta Sonia	365
Carriazo J. G.	185	Murcia Gloria Andrea	467
Castaño Zapata Jairo	117, 137	Noguera Katia M.	347
Castillo Carlos Fernando	137	Olivero Jesús T.	347
Castro López Pablo Antonio	497	Pabón-Mora Natalia	467
Chacón de Ulloa Patricia	373	Pardo Jaramillo Mauricio	253
Chomilier Jacques	289	Pineda-Barbosa Alfonso	289
Clausse Alejandro	521	Poch Claret Rosa María	327
Cuenú Cabezas Fernando	357	Pohl-Valero Stefan	37
Díaz M. Juan Manuel	105	Porta Casanellas Jaume	327
Díaz-Piedrahita Santiago	441	Quijano Vodniza Armando José	53
Domínguez Efraín	173	Quintero José Raúl	71
Dueñas Herbert	529	R. Sarmiento Heiner	339
Duque Carmenza	89	Ramírez Alberto	173
Esquivel Héctor Eduardo	467	Ramírez Sanabria Alfonso Enrique	357
Estela Felipe A.	373	Rodríguez - Pérez M. A.	185
Fernández-Alonso José Luis	17, 143, 455	Rodríguez C. José V.	423
Galindo Bonilla Aida	455	Rodríguez Cabeza Betsy Viviana	441
García Yuri C.	339	Rodríguez Yeinzon	479
García-Llano César Fernando	105	Rodríguez-Echeverry John James	309
Garza Luis	529	Saja de J. A.	185
Garzón Rojas Álvaro	229, 513	Salinas Trujillo Andrés Sebastian	357
Giraldo-Cañas Diego	5	Stiles F. Gary	381
Gómez Eduardo	137	Torres Saldarriaga Andrea	397
Gómez Gabriel	479	Torres Sánchez Horacio	193
González Favio	467	Valois-Cuesta Hamleth	17
González William	541	Vanoy Villamil Michael Nicolás	365
Guhl Felipe	27	Vargas Jiménez Luis Alfonso	357
Guzmán Piedrahita Oscar Adrián	117	Vargas Vargas Clemencia	423
Hernández Angélica	373	Vélez Jaime Ignacio	209
Hernández-Torres Jorge	289	Vera López Enrique	241
Jarauta-Bragulat Eusebio	327	Villamizar Elder de Jesús	541
Llano Germán A.	137	Zuluaga Moreno María Patricia	357
Loaiza Usuga Juan Carlos	327		
Lotito Pablo	521		

**DURANTE LA EDICIÓN DEL VOLUMEN XXXIV COLABORARON  
EN LA EVALUACION DE ARTÍCULOS**

Agamez Yazmín	Madriñan Santiago
Alba Nelly Cecilia	Magalhaes Celio
Albis Víctor	Malagón Dimas
Albis Víctor	Mantilla Ricardo
Andrade Gonzalo	Marcellán Francisco
Barrera Alejandro	Montaña Johny
Barrera Mario	Montoya Gerardo de Jesús
Bermejo Jaime	Parra Carlos
Bernal Jaime	Pelkowski Joaquín
Cantera Jaime	Pipoly John
Carvalho Cicero	Prieto Pedro
Castañeda Leonardo	Pucciarelli Hector
De Porta Jaime	Puyana Mónica
Deflere Thomas Richard	Quiroga Luis
Díaz Santiago	Rivera Orlando
Díaz Santiago	Rocha Martha
Ferro Cristina	Roldán Gabriel
Forero Enrique	Sánchez Clara Helena
Galeano Gloria	Silverstone Philip
García Manuel	Stashenko Elena
Granda Norberto	Stiles Frank Garfield
Guerrero Germán	Torres Celina
Hermelín Michel	Ulloa Carmen
Lederhos Cecilio	Vallejo Gustavo
Llinás Rodolfo	Zúñiga María del Carmen

