

REVISTA DE LA ACADEMIA COLOMBIANA de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales

LA ACADEMIA ES ÓRGANO CONSULTIVO DEL GOBIERNO NACIONAL

VOLUMEN XXXI

JUNIO DE 2007

NÚMERO 119

DIRECTOR DE LA REVISTA: PEDRO PRIETO



CONTENIDO - CONTENTS

	Pág.		Pág.
Botánica (Botany)		Historia y Filosofía de la Ciencia (History of Sciences)	
- Las plantas como evidencia legal. Desarrollo de la botánica forense en Colombia [Plants as legal evidence. Development of forensic botany in Colombia] <i>José Luis Fernández-Alonso, Aida Galindo Bonilla & Jesús M. Idrobo</i>	181	Los cuadernos de Julio Garavito una antología comentada [The notebooks of Julio Garavito an annotated anthology] <i>Clara H. Sánchez</i>	253
Ciencias de la Tierra (Earth Sciences)		Matemáticas (Mathematics)	
- Sistemas morfogénicos contrastados en el Norte de la Cordillera Central Colombiana [Contrasted morphogenic systems in the Northern Central Cordillera, Colombia] <i>Michel Hermelin</i>	199	- The best linear unbiased estimators of regression coefficients in a multivariate growth-curve model. A coordinate-free approach [Los mejores estimadores lineales insesgados de coeficientes de regresión en un modelo de curvas multivariadas de crecimiento. Una aproximación libre de coordenadas] <i>Gabriela Beganu</i>	267
Física (Physics)		- Nonlinearly degenerate wave equation $v_{tt} = c(v ^{n-1}v)_{xx}$ [Ecuación de ondas degenerada No linealmente $v_{tt} = c(v ^{n-1}v)_{xx}$] <i>Yun-Guang Lu</i>	275
- Uso de la técnica fotoacústica para la caracterización de café proveniente del eje cafetero colombiano [Characterization of originating coffee of the Colombian region by means the photoacoustic technique] <i>Hernando Ariza Calderón & Fernando Gordillo Delgado</i>	217	- A Characterization of weakly regular linear functionals [Una caracterización de funcionales lineales débilmente regulares] <i>Francisco Marcellán & Ridha Sfaxi</i>	285
- Producción y caracterización de películas cerámicas sintetizadas por el método SOL-GEL para aplicación anticorrosiva $\text{SiO}_2\text{-ZrO}_2$ sobre acero inoxidable y $\text{SiO}_2\text{-TiO}_2$ sobre acero al carbón [Production and characterization of ceramic films synthesized by using the method known as sol-gel for anticorrosive application: $\text{SiO}_2\text{-ZrO}_2$ on stainless steel and $\text{SiO}_2\text{-TiO}_2$ on coal steel] <i>Jorge H. Bautista-Ruiz, César Ortiz, Enrique Vera & Jorge E. Rodríguez-Páez</i>	235	Química (Chemistry)	
- Dinámica caótica de condensados de Bose-Einstein en trampas de potencial [Chaotic Dynamics of Bose-Einstein Condensates in Potential traps] <i>Oscar Y. Fajardo & Diógenes Campos</i>	241	- Oxidación de mercaptanos con ftalocianina de Co encapsulada en zeolitas X e Y con diferente fuerza básica [Mercaptans oxidation with Co phthalocyanines encapsulated X and Y with different basic strength] <i>Edgar Alberto Páez-Mozo, Fernando J. Hernández B. & Fernando Martínez Ortega</i>	297
		Zoología (Zoology)	
		- Nuevos registros de escarabajos coprófagos (Scarabaeidae: Scarabaeinae) para la Región Andina de Colombia. Parte I [New reports of dung beetles (Scarabaeidae: Scarabaeinae) for the Andean Region of Colombia] <i>Luz Astrid Pulido Herrera, Claudia Alejandra Medina & Raúl Antonio Riveros</i>	
		Constitución de la Academia (Members of the Academy)	
		Publicaciones de la Academia (Publications of the Academy)	313

LAS PLANTAS COMO EVIDENCIA LEGAL. DESARROLLO DE LA BOTÁNICA FORENSE EN COLOMBIA

por

José Luis Fernández-Alonso¹, Aída Galindo Bonilla² & Jesús M. Idrobo¹

Resumen

Fernández-Alonso, J.L., A. Galindo Bonilla & J.M. Idrobo: Las plantas como evidencia legal. Desarrollo de la Botánica Forense en Colombia. Rev. Acad. Colomb. Cienc. **31** (119): 181-198, 2007. ISSN 0370-3908.

La botánica aporta información de gran importancia en el ámbito forense para el estudio de la escena de los hechos en los procesos de investigación judicial. En Colombia, desde comienzos de siglo XX se vienen realizando solicitudes judiciales para determinar, la causa de muerte por ingestión de plantas tóxicas y más recientemente la identificación de elementos materia de prueba procedentes de los cultivos ilícitos. Acá se muestra el estado del tema en el país, con base en los registros oficiales del Instituto Nacional de Medicina Legal y Ciencias Forenses y del Instituto de Ciencias Naturales de la Universidad Nacional de Colombia, que reflejan un incremento de las solicitudes judiciales referentes a plantas de coca, amapola y marihuana. Se presentan algunos avances y perspectivas sobre el tema y se tratan las principales plantas de interés forense y algunos aspectos sobre protocolos de recolección, tratamiento e identificación de muestras.

Palabras clave: Amapola, *Banisteriopsis*, botánica forense, *Cannabis*, coca, cultivos ilícitos, *Erythroxylum*, marihuana, *Papaver*, sustancias alucinógenas, Yagé.

Abstract

Nowadays botany provides information of great importance inside a forensic context for the analysis of the crime scene in criminal investigations. In Colombia, since the beginning of the XX century, the Justice System has requested information on things like the cause of death due to the ingestion of toxic plants or, more recently, the identification of evidence coming from illicit plantations. In this paper it is presented an approximation to the state-of-the-art in the country based on official

¹ Instituto de Ciencias Naturales. Apartado aéreo 7495. Universidad Nacional de Colombia. Bogotá, D.C. Colombia. Correo electrónico: jlfernandez@unal.edu.co

² Grupo de Botánica Forense. Instituto Nacional de Medicina Legal y Ciencias Forenses. Calle 7a No. 12-61, Bogotá, Colombia. Correo electrónico: lienix_n@yahoo.com

records coming from the Instituto Nacional de MLYCF and Universidad Nacional de Colombia's Instituto de Ciencias Naturales, showing a great increase of the judicial demands on coca, opium and marijuana. Some advances and perspectives about the state of art and also the most important forensic plants and some topics about collection and preservation protocols for legal evidence are presented.

Key words: Amapola, *Banisteriopsis*, *Cannabis*, coca, *Erythroxylum*, forensic botany, hallucinogens, illicit crops, marijuana, *Papaver*, psicotropic substances, Yagé.

Introducción

a. La botánica forense

El conocimiento de las características detalladas de las plantas, aplicado desde la perspectiva forense (botánica forense), ha tenido un desarrollo relativamente reciente a nivel internacional (Bock *et al.*, 1997). La identificación de muestras vegetales o de fragmentos de ellas, ha sido de gran ayuda en diversos procedimientos forenses encaminados a rastrear y reconstruir eventos relacionados con intoxicaciones u otros daños físicos, en algunos casos fatales, y también puede ser pieza importante dentro el contexto criminalístico relacionando por ejemplo, una persona con la escena del delito. La presencia de partes o fragmentos vegetales (hojas, flores, frutos, semillas, polen, esporas, fitolitos o raíces) en prendas, contenido gástrico o cabellos, ha permitido la identificación precisa de la especie vegetal involucrada y como tal suministrar información sobre su lugar de procedencia, su posible toxicidad y otras propiedades importantes en el esclarecimiento de hechos delictivos.

Por otra parte, el estudio de algunos grupos vegetales particulares, como algas verdes y diatomeas, es de gran utilidad en investigaciones donde la sumersión es la probable causa de muerte; debido a que en algunos de estos casos el análisis patológico forense no permite determinarla. Así mismo, en el ámbito internacional, el estudio e identificación de polen y esporas en el sustrato, es una de las principales fuentes de información en el análisis forense y se encuentra bastante desarrollado en países como Estados Unidos, Inglaterra y Nueva Zelanda (Coyle, 2005). Por último, la dendrología y la dendrocronología han ofrecido también información valiosa en un campo muy restringido del ámbito forense, la determinación de la autenticidad de obras de arte o de instrumentos antiguos estableciendo la fecha aproximada de elaboración y también el sitio donde podrían haber sido construidos (Dickinson, 2000).

b. Desarrollo en Colombia

En Colombia el estudio de las plantas alucinógenas y/o tóxicas ha tenido un desarrollo importante desde el punto

de vista médico, farmacológico, veterinario y etnobotánico en general (Pérez Arbeláez, 1937; Schultes, 1986; Fonnegra & Jiménez, 1999). Sin embargo desde la perspectiva forense ha sido escasamente abordado y casi exclusivamente aplicado a la determinación taxonómica de especies procedentes de los cultivos ilícitos, en relación con la incautación de sustancias estupefacientes. Con menor frecuencia se ha solicitado la identificación de plantas tóxicas de diverso origen utilizadas en la elaboración de brebajes y venenos de tipo mágico-religioso o en prácticas de curanderismo o hechicería; o casos aislados en los que se solicita la identificación de frutos de plantas silvestres que por accidente han ocasionado envenenamientos fortuitos.

Se ha observado que la inadecuada formulación de plantas como medicina natural alternativa puede provocar, graves daños en la salud y con cierta frecuencia se requiere de la investigación judicial para determinar la causa de la muerte y en algunos casos la responsabilidad médica. La ingestión en forma de infusión con fines medicinales del falso “árnica de los páramos”, *Senecio formosus* Kunth (Asteraceae), Figura 1D, ha sido registrada por lo menos en 25 casos documentados como causante de la seneciosis, una enfermedad veno-oclusiva que causa daño al hígado (Toro *et al.*, 1997). En otros casos como el de la *cobalonga* o *pepa de cruz* (*Thevetia peruviana* (Pers.) K. Schum., Apocynaceae), Figura 1F, planta cultivada como ornamental y materia prima para elaboración de amuletos indígenas (Pérez-Arbeláez, 1937; 1978; Patiño, 2004), se han detectado frecuentes envenenamientos, debido a la toxicidad de su fruto, cuando ha sido empleado como remedio naturista para bajar de peso (González *et al.*, 2003). Otras veces el desconocimiento del modo de empleo (por ejemplo, sustancias de uso tópico que son ingeridas) o de la dosificación inapropiada, trae como consecuencia accidentes graves como ha ocurrido con el saúco (*Sambucus nigra* L.), el confrey (*Symphytum officinale* L.) y la peonía (*Abrus precatorius* L.), Figura 1.

El Instituto de Ciencias Naturales de la Universidad Nacional de Colombia, a través de su planta de botánicos



A



B



C



D



E



F

Figura 1.- Algunas plantas de interés forense, relacionadas con medicina popular. **A.** *Abrus precatorius* L. (Fabaceae), semillas maduras; de la Carpoteca del Herbario Nacional Colombiano. **B-C:** *Sambucus nigra* L. (Caprifoliaceae). **B.** Inflorescencia en plena antesis. **C.** Inflorescencia con los frutos inmaduros aun rojizos. **D.** *Senecio formosus* Kunth (Asteraceae), parte superior de la planta, fotografiada en páramos de la Cordillera Oriental de Colombia. **E.** *Symphytum officinale* L. (Boraginaceae), planta cultivada en Bogotá. **F.** *Thevetia peruviana* (Pers.) K. Schum. (Apocinaceae). Fruto y semilla, de la Carpoteca del Herbario Nacional Colombiano. (Fotografías J.L. Fernández-A.).

y con el apoyo del Herbario Nacional Colombiano, viene prestando colaboración desde su fundación en la identificación de muestras vegetales remitidas por las autoridades judiciales. Actualmente presta sus servicios a la Fiscalía General de la Nación (FGN), el Departamento Administrativo de Seguridad (DAS) y el Instituto Nacional de Medicina Legal y Ciencias Forenses, en relación con diferentes procesos judiciales. Durante los años 1970 a 2000 aproximadamente, el Profesor Roberto Jaramillo (q.e.p.d.) fue la persona que regularmente estudiaba y apoyaba a las autoridades judiciales en las consultas que estas hacían al Herbario Nacional Colombiano (El Tiempo, 1999). Por otra parte, el Instituto de Medicina Legal y Ciencias Forenses (IMLCF) tiene como misión prestar soporte científico a la administración de justicia en todo el territorio nacional (Artículos 35-36, Ley 938 de 2004) y es allí donde se concentra una parte importante de las solicitudes que sobre plantas hacen en el país la Policía Nacional, la Policía Judicial, la Policía Antinarcóticos y el Ejército Nacional, además de las entidades anteriormente mencionadas.

En este sentido y como respuesta conjunta a la necesidad de una exploración más detallada de las muestras vegetales y según lo sugiere la casuística nacional forense, recientemente se estableció el laboratorio de botánica forense del IMLCF, cuyo trabajo se viene desarrollando en estrecha colaboración con el ICN de la Universidad Nacional de Colombia, en donde los autores de este trabajo propusieron dos objetivos prioritarios por desarrollar: a) Suministrar herramientas apropiadas para la determinación taxonómica de las plantas psicotrópicas en el contexto forense y b) el estudio palinológico de las muestras de suelo. Así la exploración actual de caracteres morfológicos, anatómicos y moleculares explora líneas de investigación científica en el campo forense, ajustándose a las necesidades que actualmente demanda la sociedad colombiana.

Materiales y métodos

Para el estudio propuesto que incluye, por una parte la documentación histórica de los casos relacionados con las plantas de interés forense, por otra el estado actual de conocimiento botánico de los grupos de plantas de interés en Colombia y finalmente el desarrollo de procedimientos para el análisis pericial, se planteó el siguiente esquema de trabajo que comprende cuatro aspectos:

a. Revisión de la demanda de servicios en el análisis de material vegetal

Se revisó la demanda de servicios proveniente de las autoridades judiciales colombianas con respecto a ele-

mentos vegetales, durante los años 2000 a 2005. Para ello se consultaron como fuentes principales de información, la División de Referencia de Información Pericial (DRIP) del IMLCF y algunos de los libros que hacen parte del archivo histórico de la misma institución, en un periodo comprendido entre 1914 y 1917 como testimonio de las épocas tempranas de la prestación del servicio médico legal en Colombia. También se consultó a diferentes expertos forenses de la misma institución, sobre este aspecto. Igualmente se revisó el archivo de consultas del Herbario Nacional Colombiano, sobre determinaciones botánicas para autoridades judiciales en el periodo 2000-2005; consultas en la que participaron activamente uno de los autores (J. L. Fernández) y el profesor L. C. Jiménez. Por otra parte y en el curso de un año, uno de los autores (A. Galindo) acompañó regularmente al profesor Jiménez con el fin de evaluar el tipo de muestras que fueron recibidas para estudio. En este trabajo, se incluyó la información proveniente de Fiscalía General de la Nación, el Departamento Administrativo de Seguridad, el Ejército Nacional y la Dirección Nacional de Estupefacientes, cuando estuvo directamente relacionada con consultas al ICN o al IMLCF.

b. Información taxonómica sobre plantas psicotrópicas

Se adelantó la revisión de literatura taxonómica y nomenclatural de los géneros y especies de plantas psicotrópicas que presentaron los valores más altos en la demanda por servicios en Colombia. Posteriormente se hizo una revisión preliminar de los especímenes correspondientes a estos grupos, depositados en el Herbario Nacional Colombiano (COL) verificando los caracteres taxonómicos registrados en la literatura.

c. Protocolos para manejo de muestras vegetales y documentos técnicos asociados

Manejo de muestras. A partir de las solicitudes enviadas por las autoridades judiciales para determinación taxonómica al ICN y al IMLCF, se seleccionaron y recolectaron muestras fragmentarias (secciones de tallo, hojas, partes florales, frutos y semillas) principalmente de *Papaver somniferum* L., *Cannabis sativa* L., *Erythroxylum* P. Browne y *Brugmansia* Pers., para su estudio y conservación como parte de la colección de referencia del IMLCF y del ICN, a partir del material desechado. Por otra parte y con la valiosa colaboración de la División Antinarcóticos de la Policía Nacional de Colombia, se realizó un muestreo de las plantas de coca procedentes de los cultivos ilícitos de distintas regiones del país. A partir de estas muestras, se obtuvieron los pliegos testigo para el recién establecido Herbario de

Referencia Forense del IMLCF con los respectivos duplicados para el Herbario Nacional Colombiano.

Documentos técnicos. Para la elaboración de los protocolos estandarizados de trabajo para la determinación taxonómica de las especies de interés forense y de la guía para el manejo de muestras vegetales, se tuvieron en cuenta los aspectos curatoriales básicos de los herbarios (**Bridson & Forman**, 1992) y los requisitos para la emisión de informes periciales en Colombia, acordes con los requerimientos del nuevo Sistema Penal Acusatorio Colombiano (Ley 938 de 2004) y bajo las normas de calidad propias del IMLCF en el cumplimiento de sus funciones (IMLCF, 2004).

Resultados

Se presentan a continuación los resultados obtenidos en este estudio, agrupados según los ítems citados en la metodología: a. La demanda de servicios, b. Las principales plantas involucradas, c. Otros campos de acción. d. Los protocolos sobre muestras e información asociada y e. Las perspectivas del trabajo que aun está en etapa de desarrollo.

a. Demanda de servicios referentes a plantas psicotrópicas

Mediante la ley 53 de 1914 se estableció oficialmente el sistema médico-legal en Colombia y en consecuencia se creó la Oficina Central de Medicina Legal. Los documentos de registro de la época, señalan una apreciable cantidad de casos de investigación judicial sobre sustancias tóxicas procedentes de plantas relacionadas con envenenamientos (IMLCF, 1914 a 1917). Por ejemplo, en un informe pericial de octubre de 1914 se señala sobre las sustancias contenidas en unas botellas enviadas para determinar la presencia de tóxicos que: “en ninguna de esas sustancias encontramos el principio activo de la *Datura arborea* ni otras drogas venenosas o soporíferas” *sic* (IMLCF, 1914).

También era frecuente buscar venenos de origen vegetal y mineral en las vísceras de las personas que, a juicio del médico, fallecían por envenenamiento, principalmente por sustancias alcaloides, tal y como refiere el Dr. Lleras Codazzi en el informe de un análisis químico en que reconoce un principio activo similar al de la belladona, añadiendo que “las principales plantas que contiene dichos alcaloides son la belladona, el beleño y el borrachero o cacao sabanero” (IMLCF, 1914). También era común la búsqueda de estricnina, obtenida a partir de la nuez vómica, *Strychnos nux-vomica* L. (Loganiaceae). En 1937,

Pérez-Arbeláez presenta un completo registro de las plantas tóxicas de Colombia y su uso medicinal en la época. También se refiere al uso antiético que le daban algunas personas para causar daño o la muerte, y resaltaba la importancia de que los médicos y educadores conociesen las plantas medicinales.

Situación actual de la demanda

Aunque en general, la evidencia biológica forense que incluye material vegetal se ha asociado típicamente con casos de envenenamientos, asalto físico, asalto sexual y accidentes de tránsito (Coyle, 2005), actualmente se observa una tendencia diferente con respecto a otros países, debido a la fuerte incidencia de los procesos relacionados con los cultivos ilícitos.

Las plantas de las que se extraen sustancias que producen dependencia psíquica y/o física (principalmente marihuana, coca y amapola) y que se encuentran sometidas a control especial (Ley 30 de 1986 y normas complementarias), históricamente han sido analizadas mediante la detección química del alcaloide respectivo, junto con el reconocimiento botánico de algunos caracteres morfológicos. Actualmente el Grupo de Botánica Forense del INMLCF, junto con el Instituto de Ciencias Naturales de la Universidad Nacional de Colombia llevan a cabo el estudio detallado de los especímenes y en aquellos casos en los que el material es fragmentario, se realiza la detección química de alcaloides. El grupo de las plantas psicotrópicas representó el 31% del total nacional de muestras botánicas analizadas por el Laboratorio de Estupefacientes del INMLCF, con un ligero crecimiento desde el año 2000. La principal demanda durante el periodo de estudio (2000-2005), se concentró en la determinación taxonómica de muestras de marihuana (*Cannabis sativa* L.), amapola (*Papaver somniferum* L.) y coca (*Erythroxylum spp.*), plantas relacionadas con la producción de sustancias estupefacientes (DRIP, ICN). Las solicitudes provinieron de entidades judiciales como Fiscalía General de la Nación (FGN), Cuerpo Técnico de Investigación de la Fiscalía (CTI), Policía Nacional, Policía Antinarcóticos, Ejército Nacional y Departamento Administrativo de Seguridad (DAS).

Aunque son plantas relativamente familiares para las autoridades, la ley establece que un perito debe realizar la determinación formal (Ley 600 de 2000 y Ley 906 de 2004). En este sentido cabe resaltar que hubo varias ocasiones en las que se recibieron para estudio semillas que correspondían a plantas como el “cilantro” (*Coriandrum sativum* L., Apiaceae) y el “comino” (*Cuminum cyminum* L., Apiaceae) por su aparente parecido con las semillas de

marihuana. En otras ocasiones las muestras bajo sospecha correspondieron a semillas o fragmentos de flores u hojas de plantas tan diversas como el “trigo sarraceno”, *Fagopyrum esculentum* Moench. (Poligonaceae), o el “opio”, “bejuco de globo” o “vejiga”, tres especies del género *Cardiospermum* L. (Sapindaceae), el “tomillo” *Thymus* L. (Labiatae) o el “boldo” *Peumus boldus* Molina (Monimiaceae) por su posible relación con sustancias estupefacientes. Se han registrado también en el Herbario Nacional algunas consultas relacionadas con envenenamientos o intoxicaciones fortuitas por ingestión de frutos silvestres de *Pernetia prostrata* (Cav.) DC. (Ericaceae) o de *Coriaria ruscifolia* L. (Coriariaceae), al confundirlos con los frutos comestibles de “agraz” *Vaccinium floribundum* Kunth, “uva de monte” *Macleania rupestris* (Kunth) A.C. Sm. (Ericaceae) o de “nigüitas”, *Margyri-carpus pinnatus* (Lam.) Kuntze (Rosaceae).

A partir del año 2000 se estableció una comunicación formal entre el IMLCF y el ICN, para la resolución de casos complejos que requerían una evaluación experta desde el punto de vista botánico. Este nexo se consolida actualmente con el desarrollo conjunto de procedimientos de análisis botánico forense como apoyo a la administración de justicia en el país. Durante el año 2005, el ICN recibió 466 solicitudes para determinación de plantas psicotrópicas y comparando esta demanda con la de los últimos cinco años en la misma institución, se observa un aumento considerable; en el mismo periodo el IMLCF recibió aproximadamente 4900 solicitudes procedentes de todo el país y para esta entidad el comportamiento de las solicitudes se mantuvo estable y Bogotá, Cali y Medellín fueron las ciudades donde se presentó la más alta demanda por servicios. (Figura 2).

En el INMLCF la solicitud más frecuente correspondió a la identificación de plantas de marihuana, pero en

los dos últimos años, se observó un incremento notable en las determinaciones de plantas de coca (Figura 3). El año 2006 la demanda para esta plantas excedió más de cuatro veces las estadísticas de años anteriores, principalmente como consecuencia del desarrollo del plan de la Presidencia de la República para la erradicación manual de los cultivos ilícitos dentro del programa estatal de lucha contra el narcotráfico.

Las cifras indican que la determinación taxonómica de las plantas psicotrópicas es un renglón importante en el conjunto de preguntas que hace el sistema judicial a las ciencias forenses, principalmente sobre cultivos ilícitos y sustancias controladas. Implica a su vez que, comparado con este primer renglón, en la actualidad poco se emplea la determinación taxonómica como herramienta en otros aspectos del ámbito forense actual, por lo que se requiere adecuar y difundir este conocimiento a la realidad y necesidades del país. Por lo anterior, un aspecto fundamental en los peritajes forenses sigue siendo la determinación efectiva de las plantas psicotrópicas involucradas, es decir las plantas cultivadas del género *Erythroxylum* (cocas) y las especies *Cannabis sativa* (Marihuana) y *Papaver somniferum* (Amapola).

b. Principales plantas psicotrópicas de uso en Colombia

Se presenta una breve reseña de las plantas psicotrópicas sobre las cuales se presenta la mayor demanda por servicios para la determinación taxonómica en el país.

• *Erythroxylum* P. Browne (Erythroxylaceae). Figura 4.

Género pantropical que cuenta con alrededor de 230 especies, de las cuales cerca de 190 se encuentran en el Neotrópico y al que pertenecen las comúnmente denomi-

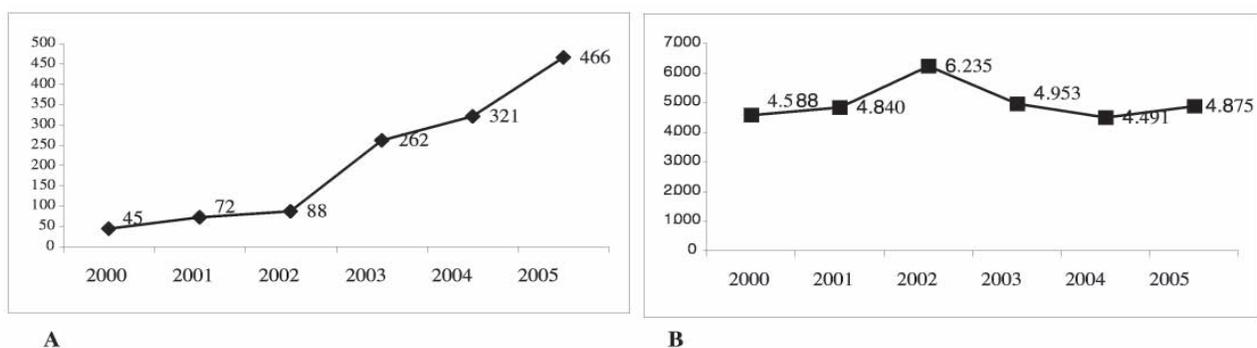


Figura 2. Demanda por servicio al año para determinaciones taxonómicas de autoridades judiciales colombianas al ICN (a) y al IMLCF (b), período 2000-2005.

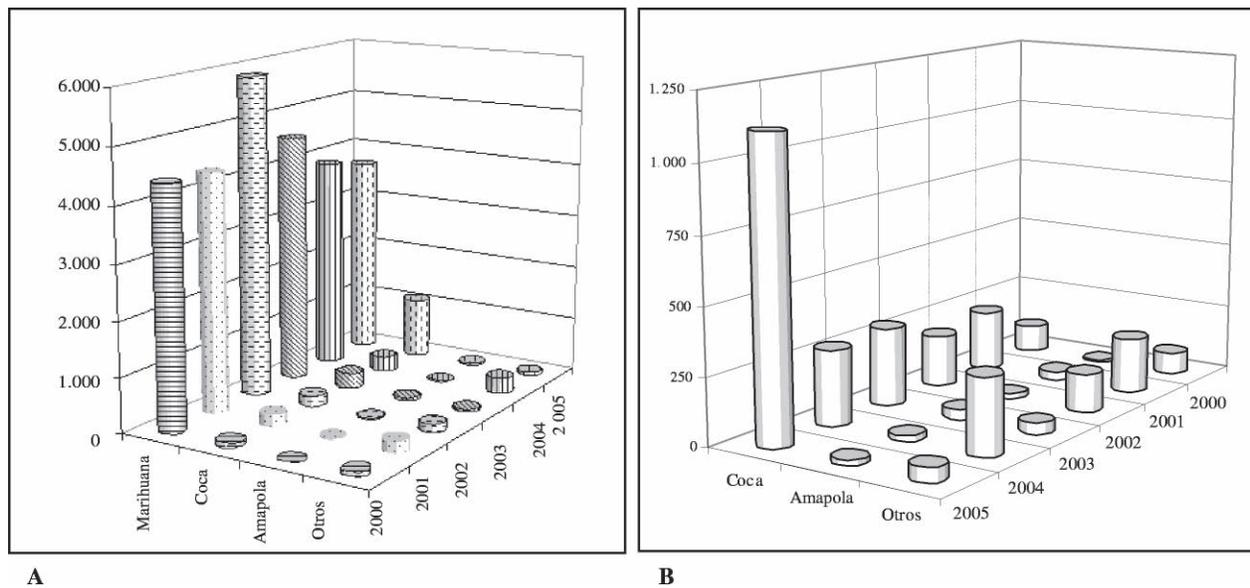


Figura 3. Demanda por servicio de determinaciones taxonómicas de autoridades judiciales colombianas al IMLCF, años 2000-2005. Se presentan los resultados según resultado registrado. **A.** Resultado total. **B.** Detalle de los grupos menos representativos para este periodo.

nadas plantas de coca (Plowman & Rivier, 1983; Plowman *et al.*, 2004).

El género incluye árboles pequeños o arbustos perennes o deciduos con algunas características diagnósticas que resumimos a continuación: catáfilos y estipulas foliares persistentes, láminas de vernación involuta que algunas veces imprime dos líneas paralelas en la superficie abaxial; flores braquistilas y dolicoctilas, éstas con estambres de longitud desigual, pétalos con apéndices en la superficie adaxial y lígula 2-lobada. Estilos 3, libres o parcialmente connados en la base. Fruto en drupa, rojo o púrpura, de 1 semilla, raramente 2 (Gentner, 1972; Plowman, 1980a; Plowman, 1989; Oliveira *et al.*, 2002).

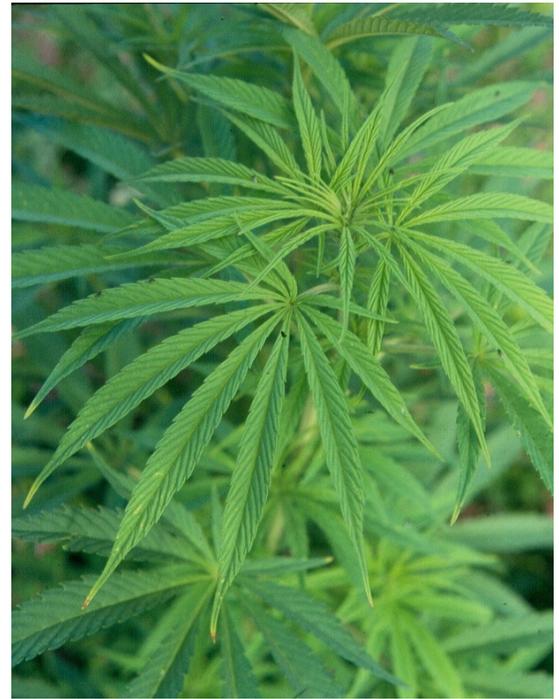
Taxonomía. Muchas de las especies del género son difíciles de distinguir debido a su gran variabilidad; especies silvestres como *Erythroxylum hondense* Kunth, *E. cataractarum* Spruce, *E. gracilipes* Peyritsch y *E. carthagenense* Jacq., están íntimamente relacionadas y son a menudo confundidas con las especies cultivadas (Plowman, 1980a; Holmstedt *et al.*, 1977). Por otra parte García-Barriga señala por lo menos 18 especies del género que tienen interés medicinal (García-Barriga, 1992) y que deben ser revisadas desde la aplicación forense (Figura 4). Aunque se consideraba que las plantas de coca correspondían a una sola especie domesticada, con base en estudios fitoquímicos y tradicionales (morfológicos, ecológicos y biogeográficos) actualmente se reconocen

dos especies; *Erythroxylum coca* Lam. (Figura 4A) y *Erythroxylum novogranatense* (Morris) Hieron. (Plowman, 1980b; Plowman & Rivier, 1983).

Etnobotánica. La coca, una de las plantas más antiguamente domesticadas, es nativa de la zona montañosa de los Andes orientales, donde su empleo se remonta a la época precolombina sudamericana (Rury *et al.*, 1983; Paz-Estensoro, 1988; Rottman, 1997; Díaz-Piedrahita, 1998). Aunque en la actualidad las plantas de coca se emplean de forma ilícita para la producción de cocaína, fué desde épocas precolombinas, no solo planta sagrada, sino motivo de complejas disputas y conflictos sobre su manejo. En las crónicas de Indias, José de Acosta ya observaba que la coca era muy preciada por los indígenas y que en alguna época, solamente era posible consumirla con el permiso expreso de su gobernante (Acosta, 1590). Aunque no era la élite quien tenía exclusivo acceso a la hoja, sino que hacía parte importante de la estructura cultural (Davis, 2001), también hay registros acerca del fuerte conflicto inter-étnico por la tierra y los cultivos de coca desde el siglo XVI en Perú (Rostworowski, 1988). Como se sabe, desde principios de 1860 hasta 1900, la cocaína aumentó en popularidad, primero como medicina prescrita por los médicos y con grandes avances en este campo; posteriormente el extracto de coca causó sensación como bebida social y fue convertida en bebida refrescante y estimulante. Finalmente, después de varios casos de toxi-



A



D



B



C



E

Figura 4. Plantas psicotrópicas. A-C: *Erythroxylum* (Erythroxylaceae). A. *E. coca* Lam., proveniente de cultivos. B. *E. citrifolium* A. St.-Hill. arbolito silvestre de los bosques húmedos, fotografiado en Santa María, Boyacá a 1100 m. C. *E. macrophyllum* Cav., arbolito silvestre, de los bosques de tierras bajas, en Santa María, Boyacá a 800 m. D-E- *Cannabis sativa* L. (Cannabaceae), plantas cultivadas. D. Detalle de las hojas. E. Detalle de la inflorescencia masculina. (Fotografías: A- Aida Galindo; B-E- J.L. Fernández-A.).

cidad aguda, pasó a ser de uso limitado y controlado mediante leyes sucesivamente restrictivas (Davis, 2001).

En fuerte contraste con el uso ancestral que durante más de 2500 años tuvieron las plantas de coca para la cultura indígena como parte vital de sus creencias, la historia reciente nos muestra una realidad muy diferente, con la producción industrial de cocaína, fenómeno que se ha incrementado mucho en los últimos tiempos (Henman, 1990). Hacia la década de los setenta, se detectó una disminución en el uso de las hojas de coca, mientras que el alcaloide extraído de ellas fue reemplazándolas poco a poco, ya que inicialmente algunos creían que tenían el mismo efecto (Plowman *et al.* 1982). Desde ese periodo de aceptación y consumo masivo hasta ahora, persiste la confusión entre la planta de coca y el alcaloide cocaína extraído de sus hojas (Plowman *et al.* 1982; Davis, 2001). En la década de los 1970 se estudiaron las hojas de las plantas de coca cultivada y al ser comparadas con 50 alimentos consumidos tradicionalmente en América Latina superan el promedio de estos últimos en calorías, proteínas, carbohidratos, fibra y con suficiente calcio, hierro, fósforo, vitamina A y riboflavina, de tal forma que 100 gramos de hojas satisfacen el complemento dietético diario de esos nutrientes para una persona (Duke *et al.*, 1975).

Varietades cultivadas. Probablemente *E. novogranatense* var. *truxillense* proviene de una hibridación ancestral de las especies *E. coca* y *E. novogranatense*, que se encuentran íntimamente relacionadas (Rury *et al.*, 1983). La coca colombiana, *E. novogranatense* var. *novogranatense* que es resistente a la sequía, se cultiva no obstante en tierras húmedas en las zonas montañosas; no se conoce fuera de los cultivos y las evidencias muestran que puede ser una de las especies más recientes. Por otra parte, se ha sugerido que la coca amazónica *E. coca* var. *ipadu*, proviene de los cultivos de coca de Bolivia y tampoco se ha encontrado en estado silvestre (Rury *et al.*, 1983). Actualmente se reconoce una variedad en las especies cultivadas, además de la variedad tipo de cada una; *E. coca* var. *ipadu* Plowman y *E. novogranatense* var. *truxillense* (Rusby) Plowman. De las cultivadas en Colombia se registran hoy por lo menos 7 u 8 nombres comunes; *Pajarito*, *Tingo María*, *Peruana*, *Dulce*, *Amarga*, *Caucana*, *Bolivianas blanca y roja* (ONU-Gobierno de Colombia, 2004; 2006; Galindo & Fernández-Alonso, (datos no publicados)) y más recientemente se menciona una nueva variedad "*Boliviana negra*" que se afirma en los medios de comunicación, ha sido modificada genéticamente (Davis, 2004).

Problemática actual en Colombia. Los cultivos ilícitos recientes se localizaban originalmente en regiones remotas y de difícil acceso, pero ultimamente se han ubicado en

áreas más desarrolladas, como la zona cafetera. Hasta hace 5 años, más del 69% de la coca crecía en pequeños parches y plantaciones de no más de 3 hectáreas (ONU-Gobierno de Colombia, 2004), pero los resultados del último censo muestran que a finales de 2005, Colombia tenía alrededor de 86, 000 hectáreas sembradas de coca y distribuidas en 23 de los 32 departamentos del país, lo que representa un aumento de 6, 000 hectáreas (7.5%) desde el 2004 (UN-Gobierno de Colombia, 2006). En nuestro país el narcotráfico que se había iniciado con los cultivos de marihuana en los años sesenta, se vigoriza con la generalización del cultivo y producción de coca a partir de los setenta, sufriendo una gran expansión debido a la campaña de erradicación y sustitución de cultivos en Perú y Bolivia. Todos estos cambios generaron un fuerte impacto ambiental; por ejemplo, las selvas húmedas han sido transformadas de forma drástica para destinarla a cultivos ilícitos, principalmente de coca, con el agravante de que los cultivadores se internan cada vez más en la selva (Márquez, 2001).

- *Cannabis* L. (Cannabaceae).

La familia Cannabaceae incluye dos géneros, *Humulus* L. y *Cannabis* L, siendo este último monoespecífico, cuya única especie *Cannabis sativa* L. (Figura 4D-E), es altamente variable (Small, 1975a; Small & Cronquist, 1976; Catalán 1995). El nombre genérico griego deriva del asirio "*cunabo*" y modificado posteriormente por "*canapa*", "*cañamo*", "*chanvre*", "*kinnab*" y en el árabe "*hachis*" (Díaz-Piedrahíta, 1998). El cañamo es una hierba anual, generalmente dioica que podemos reconocer a grandes rasgos por presentar: Hojas opuestas, palmatisectas, con abundantes tricomas y glándulas en la epidermis, tallo y hojas. Inflorescencia masculina paniculada, de flores pequeñas con cinco pétalos opuestos a los sépalos. Inflorescencia femenina pauciflora, con perianto corto, envuelto en una bráctea muy glandulosa; gineceo con ovario unilocular y con dos estigmas filiformes. Fruto en aquenio sésil con pericarpio cubierto por una membrana papirácea moteada o veteada.

Taxonomía. La variación morfológica en *Cannabis sativa* se debe principalmente a la selección artificial, la delimitación taxonómica infraespecífica es bastante difícil por la falta de acuerdo sobre la ubicación de grupos de taxones relacionados con la domesticación (Small & Cronquist, 1976). Durante los primeros años de la década de los setenta el debate se hizo más complejo dada la implicación legal en las cortes norteamericanas, debido a que algunos botánicos afirmaron entonces que *C. sativa* L. no era la única especie, sino que el género incluía por lo menos 4 especies más con las mismas propiedades en la producción de alucinógenos, conocidas todas comúnmen-

te como marihuana (**Schultes et al.**, 1970). Posteriormente se concluyó que todas correspondían a una sola especie, *Cannabis sativa* L. (**Small**, 1975 a, b, c, 1976).

Etnobotánica. Esta especie es una de las plantas más antiguas usadas por el hombre. Crece espontáneamente y es ubicua. Se cree que es una planta asiática y solo apareció en el nuevo mundo después de 1545 (**Small & Cronquist**, 1976). Las dificultades en la clasificación y en la determinación de su origen se deben a su larga y estrecha asociación con el hombre. Los registros más antiguos parecen ubicarla en el nordeste de Asia donde tuvo sus orígenes la civilización china, dejando un registro desde el neolítico hasta nuestros días. Probablemente uno de los primeros usos desde tiempos inmemoriales, fue como fibra para hacer ropas y redes de pesca. De gran importancia cultural, ha sido uno de los principales alimentos de la antigüedad y sus semillas fueron tan importantes para los chinos como otros cereales hasta el siglo VI d. C., aproximadamente. También se hace referencia en la antigua China a su uso como planta medicinal o sagrada, combinándola con el ginseng para comunicarse con los espíritus (**Li**, 1974).

Cultivos ilícitos. En Colombia la introducción de la marihuana en la Sierra Nevada de Santa Marta se realizó a principios del Siglo XVII, con fines de aprovechamiento para cáñamo que rápidamente fue desplazado por la cabuya (**Barbosa et al.**, 1986). Se reconoce el uso de esta planta con fines intoxicantes desde 1927, utilizada por braceros y marineros del Litoral Caribe colombiano. Sin embargo, tan sólo hasta 1945 se registraron los primeros cultivos clandestinos de marihuana de la Costa Atlántica (**Patiño**, 1969 en **Barbosa et al.**, 1986). Con la finalización de la Guerra de Vietnam en 1975, se incrementó el cultivo de marihuana con fines intoxicantes fomentado por los veteranos (**Barbosa et al.**, 1986, **Díaz-Piedrahíta**, 1998). Entre 1977 y 1979 se efectuó un proceso drástico de tala y quema indiscriminada de bosques en cotas por debajo de los 500 m. en el piedemonte de la Sierra Nevada de Santa Marta para el establecimiento de cultivos de marihuana (**Barbosa et al.**, 1986). Por otra parte la marihuana fue usada hasta mediados del siglo XX por las clases populares para aliviar los dolores relacionados con la artritis, remedios conocidos aun por los ancianos actuales. Era común llevar a los locales policiales un frasco con alcohol para que se le agregara marihuana decomisada, y fabricar así un emplasto medicinal. Posteriormente y tras la despenalización del uso de dosis personales, se extendió la costumbre de fumar marihuana con fines analgésicos, pero esa práctica de medicina alternativa se realiza sin control científico o institucional. (**González**, 2001).

• **Papaver** L. (Papaveraceae)

La familia Papaveraceae constituye un grupo bien definido, con 25 géneros y aproximadamente 200 especies de distribución predominantemente boreal (**Martínez**, 1982; **Novara**, 1993) y cuenta con plantas que producen gran diversidad de alcaloides, algunos de ellos muy tóxicos (**Font Quer**, 1988). El género *Papaver* L. comprende unas 80 especies originarias en su mayoría del hemisferio norte (**Molinari**, 1959; **Lidén**, 1995). El género incluye hierbas anuales o perennes con látex coloreado que además podemos caracterizar por los siguientes atributos: Hojas pinadamente incisas o divididas; flores solitarias, sépalos encerrando la corola, tempranamente caducos, pétalos 4, arrugados en el capullo; estambres numerosos y estigmas lineares, radialmente arreglados o en un disco sésil. Fruto en cápsula poricida, redondeada a oblonga, con disco estigmático. La amapola o adormidera, *Papaver somniferum* (Figura 5A-C) presenta tallo fistuloso, glauco-pruinoso; hojas glabras, las superiores sésiles, amplexicaules y lobuladas, las inferiores cortamente pecioladas, oblongas, más o menos lobadas, irregularmente dentadas. Flores glabras, largamente pedunculadas, pétalos orbiculares, enteros, ondulados, rojos, violáceos o rosados; cápsula globosa, de 5-6 x 4-5 cm aproximadamente; semillas subreniformes, escrobiculadas de ca. 1 mm (**Lidén**, 1995).

Etnobotánica. *Papaver somniferum* es originaria de las regiones del Mediterráneo oriental y ha sido cultivada para ornamento, consumo de las semillas en repostería tradicional y en la producción de morfina. A las cápsulas de amapola se les practican incisiones transversales y longitudinales para extraer el látex del que se obtiene el opio, y se han encontrado más de 20 alcaloides, de los cuales el más importante es la morfina, seguido de la codeína y la papaverina. Los panes obtenidos después del secado del látex suelen tener más de 12% de morfina (**Díaz-González**, 1986) y de esta, que es uno de los más efectivos analgésicos, se desarrolló el producto sintético heroína (**Mitev**, 2000). La producción del opio está centralizada en algunos países y Turquía ocupa el primer lugar, debido a que el opio que allí se produce contiene la mayor cantidad de alcaloides. Su uso como narcótico no es común entre la gente de ese país, no se extrae en la zona sino que se exporta a Europa y Estados Unidos y se usa en general con fines médicos (**Zhukovskii et al.**, 1975).

Varietades cultivadas. En el medio oriente se reconocen diferentes variedades dependiendo de las condiciones ecológicas y de la calidad del opio, que han recibido entre otros los nombres de: *spontaneum*, *tianshanicum*, *persicum*, *turcicum*, *chinense*, *tarbagataicum* y *songaricum*. Aparte



Figura 5. Plantas psicotrópicas. A-C. *Papaver somniferum* L., ampolva (Papaveraceae). A. Plantas ruderales que crecen en escombreras y márgenes de cultivos. B. Cápsulas de la planta. C. Variedad cultivada, en jardín. D-E: Bejuco del género *Banisteriopsis* (Malpighiaceae). D. *Banisteriopsis pubipetala* (A. Juss.) Cuatrec., con flores y frutos, especie silvestre en el piedemonte llanero, San Luis de Cubarral, Meta. E. *Banisteriopsis muricata* (Cav.) Cuatrec., fotografiado en la cuenca del Magdalena, en Suaita, Santander.

de la subespecie tipo, se reconoce la subespecie *P. somniferum* subsp. *setigerum* (DC.) Arcangeli, que en ocasiones es tratada en algunas floras como especie autónoma (*P. setigerum* DC), entre otros caracteres por presentar diferente número cromosómico (Garnock-Jones, 1990). Se trata de un planta nitrófila, primordialmente arvense o ruderal, que no es objeto de cultivo o aprovechamiento. Desde la

perspectiva forense, en esa zona es importante establecer la diferencia, porque está penalizada la posesión de *P. somniferum* pero no la de *P. setigerum*.

Problemática actual. El cultivo ilícito de ampolva en América Latina se desarrolla principalmente en Colombia y México, pero aunque no es representativo a escala global

es importante en el ámbito regional. El 1.28% de la producción mundial corresponde a Colombia y en México se presenta una tendencia decreciente con un potencial de 0, 41% de la oferta mundial (DNE, 2002). Los cultivos ilícitos de amapola en Colombia se siembran desde 2000 m hasta 3500 m sobre el nivel del mar y suele cultivarse junto con la arveja o maíz (DIRAN, 2004). En 1989 se registraron las primeras incautaciones de derivados de la amapola y lo que inicialmente se percibió como una sustitución de cultivos de coca, posteriormente se confirmó como una diversificación de los cultivos ilícitos en Colombia (DNE, 2002).

Otras plantas

Como se mencionó anteriormente, sobre *Erythroxylum coca*, *E. novogranatense*, *Cannabis sativa* y *P. somniferum* se concentra la mayor demanda por servicios en el ámbito judicial pero también existen registros de otras plantas, que son objeto de revisión con fines forenses. Desde 2003, se tiene registro de numerosos casos en los que las personas agredidas quedan en estado de indefensión a causa de la ingestión de la mezcla de yagé y borracheros (A. Gallego com. pers.).

- **Banisteriopsis** C. B. Rob. (Malpighiaceae).
Figura 5D-E.

La familia Malpighiaceae cuenta con aproximadamente 660 géneros y unas 1200 especies con distribución centrada en el Neotrópico y con algunos representantes en el Viejo Mundo. Las plantas del género *Banisteriopsis* (Figura 5), al que pertenece el yagé son principalmente bejucos, pero también hay arbustos y algunos árboles y su distribución se encuentra restringida a América. El yagé corresponde a varias especies del género *Banisteriopsis*, pero principalmente a *B. caapi* (Spruce ex. Griseb) Morton (Cuatrecasas, 1958; Gates, 1982), cuyo alcaloide principal es la harmalina, a la que anteriormente se le han dado diversos nombres con propiedades narcóticas y alucinógenas (Fisher, 1923), aunque se sabe que otras especies también son empleadas en la preparación del yagé en cantidades precisas, secreto conocido solamente por los chamanes y un número muy reducido de indígenas. En algunos estudios sobre las propiedades químicas del yagé, se ha determinado que dosis muy altas pueden causar la muerte a mamíferos como perros y ratones (García-Barriga, 1992; Mizrach, 2002). El “caapi” o bejuco “yagé” se encuentra en las hoyas de los ríos Amazonas, Caquetá, Orinoco, Vaupés, Putumayo, Apaporis y sus tributarios. Dos especies se emplean en la preparación del “Ocoó-yagé” por los indios Sionas y Kofanes: *B. rusbyana* (Niedenzu) Morton y *B. caapi*. En las grandes fiestas de los indígenas se preparan junto con el yagé, la chicha, el

curare y otras fórmulas utilizadas por ellos en la caza y demás rituales (Shultes, 1957).

- **Brugmansia** Pers. (Solanaceae). Figura 6.

Solanaceae es una familia de plantas herbáceas o leñosas, que producen una gran variedad de alcaloides y otras sustancias, siendo catalogada como una de las más importantes de la flora colombiana por su valor económico, alimenticio y farmacéutico (García-Barriga, 1992). Incluye 147 géneros y cerca de 2930 especies (Judd et al, 2004) con distribución centrada en Sudamérica (Hunziker, 1979). Un par de géneros con los que tradicionalmente ha habido problemas de circunscripción taxonómica son *Datura* y *Brugmansia* (Figura 6D-F), a los que pertenecen todas las variedades de borracheros y estramonios conocidos. Contrario a lo que se creyó durante casi dos siglos, todas son especies nativas de América. *Brugmansia* presenta especies arbustivas de Sudamérica (Figura 6D) y *Datura* especies herbáceas principalmente de México (Figura 6E-F). El género *Brugmansia* fue reconocido desde 1805, pero no ha sido extensivamente mencionado como tal hasta hace poco, debido al debate que se ha generado en relación con *Datura* (Symon et al., 1991a y b; Nee, 1991. Aunque recientemente se ha aportado evidencia que apoya la separación en géneros diferentes (Persson et al., 1999).

Los arbolitos del género *Brugmansia*, conocidos en Colombia como “borracheros”, “floripondios” o “cacao sabanero”, han sido ampliamente usados por la delincuencia común, porque de ellos se extrae la escopolamina o *burundanga*, que produce estados de inconsciencia y la persona queda en incapacidad de resistir. La escopolamina se extrae principalmente de la planta de origen híbrido *Brugmansia x candida* Pers. Otras especies relacionadas con esta son *B. arborea* (L.) Lagerh., *B. sanguinea* (Ruiz & Pav.) D. Don. y *B. suaveolens* (Willd.) Bercht. & J. Presl. y *B. x insignis* (Barb. Rodr.) Davis. Así mismo, las especies de *Datura*, *D. metel* L. y *D. stramonium* L., son utilizadas frecuentemente para la extracción de alcaloides.

- **Conium** L. (Apiaceae). Figura 6A-B

La *cicuta*, *Conium maculatum* L. (Figura 6), es una de las plantas más frecuentemente rastreadas en el contenido gástrico de las personas que fallecen por suicidio en Colombia y también se ha registrado dentro de la escena de los hechos, o en cercanías, preparada en infusión (N. Arredondo com. pers.). La cicuta era conocida como “angélica” en la Bogotá de principios de siglo XX y era estimada como ornamental (Pérez-Arbeláez, 1937). Hoy en día se sigue utilizando en algunos pueblitos del país donde se le pone en floreros para la buena suerte en las casas y en los negocios; o



Figura 6. Plantas de interés forense. A-B- *Conium maculatum* L., cicuta, (Apiaceae), planta ruderal en la Sabana de Bogotá. A. Detalle de la hoja. B. Umbela compuesta, con los frutos ya desarrollados. C. *Coriandrum sativum* L., cilantro (Apiaceae), frutos jóvenes, planta de huerta. D. *Brugmansia x insignis* (Barb. Rodr.) Lockwood & E.W. Davis, borrachero (Solanaceae), utilizada como arbusto ornamental en el piedemonte llanero. E-F. *Datura stramonium* L. estramonio, (Solanaceae), mala hierba, frecuente en cultivos abandonados y zonas habitadas, en climas fríos. (Fotografías: J.L. Fernández-A.).

se utilizan sus hojas como repelente para las pulgas. En la actualidad es una planta ruderal naturalizada en la sabana de Bogotá, donde crece en zonas altamente nitrificadas y modificadas por el hombre. La infusión de sus hojas se empleaba como narcótico fuerte en veterinaria y como estupe-

faciente o calmante de algunas dolencias humanas (Pérez-Arbeláez, 1937). Se han conocido también casos raros (no en Colombia) de intoxicación por esta planta al ser empleada como condimento y confundida con el perejil *Petroselinum crispum* (Mill.) A.W. Hill.

c. Otros campos de acción

En el análisis antropológico forense se ha observado que diversos grupos vegetales como algas y briófitos (Figura 7), encuentran en los restos óseos o prendas expuestas al ambiente, un medio adecuado para su crecimiento y proliferación (A. Galindo & A. Patiño, datos no publicados). Conocer la identidad taxonómica de estas plantas permite hacer una aproximación sobre el tiempo que ha tomado a la planta en proliferar en el hueso o la prenda en un ambiente determinado y así estimar cuanto tiempo han estado expuestos los restos en reducción esquelética o cuanto tiempo lleva expuesta una prenda al ambiente. Hasta el momento no se conocen estudios para Colombia que determinen tasa de crecimiento de briófitos, (Linares E. com. pers.). Otras veces se cuenta con fragmentos vegetales asociados con la escena de los hechos como frutos o semillas con adaptaciones para la dispersión por el hombre o animales, como ocurre con los “cadillos”, “pegapegas” y “amor-secos” pertenecientes a los géneros: *Bidens* L. (Asteraceae), *Cenchrus* L. (Poaceae); *Cyathula* Blume (Amaranthaceae), *Daucus* L. (Apiaceae), *Desmodium* Desv. (Fabaceae), *Pavonia* Cav. (Malvaceae) y *Plumbago* L. (Plumbaginaceae). En la Figura 7, se incluyen imágenes de algunas especies de estos géneros indicando su lugar de origen. Este tipo de información permite hacer estimaciones directas y muy útiles en el análisis criminalístico de la escena de los hechos.

Por otra parte, los tipos de suelos, al presentar variaciones reconocibles en las distintas zonas de un área específica, pueden ser tenidos en cuenta para establecer rangos y para discriminar muestras involucradas en los casos forenses. Así la geología forense se ocupa de establecer la relación existente entre el lugar de los hechos y las personas u objetos involucrados en la investigación (Molina & Moreno, 1995; Molina, 2004). Aproximadamente el 60% de los casos de suelos analizados en el IMLCF contiene fragmentos vegetales y de otros organismos (M. Molina, com. pers.) y como tal son susceptibles de evaluación biológica para complementar el análisis geológico. Este estudio se complementa a su vez con el análisis de los granos de polen y de macrorrestos vegetales del suelo, para recabar información sobre el tipo de vegetación de una región determinada.

d. Documentos sobre protocolos de muestras y herbario de referencia forense. Manejo y conservación de muestras vegetales

Habitualmente para los procesos de identificación de muestras vegetales forenses en el Instituto de Ciencias Naturales, se ha empleado como referencia el material

botánico estándar depositado en el Herbario Nacional Colombiano y la literatura disponible. Aunque anteriormente se conservaron solo algunas de las muestras provenientes de las consultas realizadas por las autoridades judiciales; la reciente selección y conservación de este tipo de muestras como material de referencia estable en las colecciones, ha resultado de gran relevancia para la resolución de las consultas actuales. Muchas de estas muestras fragmentarias (principalmente de frutos y semillas) han enriquecido la carpoteca del Herbario Nacional Colombiano y se utilizan también para el reconocimiento de muestras provenientes de estudios ecológicos, agronómicos, farmacológicos, etc. La recolección botánica especializada en aspectos forenses que se inicia en el IMLCF facilita el cotejo y la identificación de numerosas muestras vegetales fragmentarias, que habitualmente llegan para consulta de aspectos relacionados con requerimientos judiciales. Con respecto a las plantas de uso restringido, con la colaboración de la Policía Antinarcóticos de Colombia, se efectuó el muestreo representativo de las plantas de coca cultivadas en el país, con duplicados en el Herbario Nacional Colombiano. Este material de difícil consecución es actualmente objeto de evaluación detallada por parte de los autores, y permitirá presentar un diagnóstico real de las diferentes variedades o cultivariedades presentes en territorio colombiano.

Tomando como base el protocolo seguido en el ICN para la recepción de muestras botánicas (Fernández-Alonso, 2003) y teniendo en cuenta las particularidades de los elementos enviados por las autoridades judiciales, se elaboró el documento técnico forense para la recolección y manejo adecuado del material vegetal con fines forenses (Galindo, 2005). También se elaboraron los documentos técnicos requeridos para la práctica pericial rutinaria en botánica forense en el IMLCF junto con el Protocolo Estandarizado de Trabajo (PET) para la determinación de las principales plantas psicotrópicas, basado en la revisión de literatura de los grupos taxonómicos de interés y en la revisión de los especímenes de colección depositados en COL y en el Herbario del INMLyCF. Bajo esta misma metodología se continuará la revisión de otras especies psicotrópicas o tóxicas de interés forense, para la aplicación de los documentos técnicos respectivos en la práctica forense rutinaria.

e. Perspectivas futuras

Se ha iniciado la revisión taxonómica de las dos especies cultivadas del género *Erythroxylum* y de las especies silvestres morfológicamente similares a las cultivadas (todas adscribibles a la Sección *Archerythroxylum* Schutz).



Figura 7. Algunas especies de “cadillos” o “pega-pegas”. **A.** *Bidens rubifolia* Kunth (Asteraceae), arbusto frecuente en la Sabana de Bogotá. **B.** *Cenchrus echinatus* L. (Poaceae), de zonas cálidas y áridas. **C.** *Cyathula achyranthoides* (Kunth) Moq. (Amaranthaceae), ruderal en zonas húmedas tropicales. **D.** *Daucus montanus* Humb. & Bonpl. Ex Spreng. (Apiaceae), frecuente en potreros en las cordilleras. **E.** *Desmodium molliculum* (Kunth) DC., amor-seco (Fabaceae), frecuente en potreros de la Sabana de Bogotá. **F.** *Pavonia fruticosa* (Mill.) Fawc. & Rendle (Malvaceae), de zonas bajas y húmedas. **G.** *Plumbago scandens* L. (Plumbaginaceae), propio de zonas áridas. (Fotografías: J.L. Fernández-A.).

También se está efectuando una primera aproximación en el empleo de marcadores moleculares para conocer el estado actual de las poblaciones colombianas cultivadas. Este aspecto surgió como consecuencia del análisis preliminar de las plantas cultivadas de *Erythroxylum* en el país y responde a la necesidad de reconocer las diferentes variantes observadas. Se espera concluir la evaluación del material polínico en las muestras de suelo procedentes de la escena de los hechos remitidas a Geología forense, para hacer un diagnóstico sobre la informatividad de las estructuras vegetales. Así mismo, se busca establecer un protocolo de mayor espectro para el abordaje y toma de muestras de suelo con aprovechamiento de estas evidencias traza.

Actualmente se emplean caracteres morfológicos y anatómicos tradicionales para la determinación taxonómica, pero el estado de descomposición en que generalmente se encuentran las muestras forenses obligó a explorar y evaluar caracteres anatómicos y químicos complementarios y potencialmente informativos, para su posterior aplicación sobre material degradado. En este sentido se ha iniciado el estudio de anatomía de ejes caulinares y fitolitos en las especies aquí involucradas.

Conclusiones

Al analizar el estado del arte de la botánica forense en el país, se identificaron debilidades metodológicas y áreas de mayor interés que el objeto principal del presente trabajo. A principios del siglo XX, las solicitudes judiciales relacionadas con botánica en Colombia correspondían básicamente a casos de intoxicación por vegetales o sus extractos tóxicos, pero este aspecto cambió drásticamente desde la década de los setenta con la aparición y constante incremento de los cultivos ilícitos en relación directa con el narcotráfico. De acuerdo con la información analizada, durante los últimos cinco años, más del 95% de la demanda de servicios de identificación de plantas correspondió a *Erythroxylum*, *Cannabis* y *Papaver*. La pequeña fracción restante tiene que ver con otras plantas involucradas en envenenamientos provocados o accidentales, con plantas medicinales o sagradas (*Conium*, *Abrus*, *Thevetia*, *Sambucus*, *Senecio*, *Symphytum* y *Banisteriopsis*), y con robos o delitos sexuales (*Brugmansia*, *Datura*, *Plumbago*), tanto en el contexto urbano, como en el ambiente rural e indígena.

Las plantas involucradas actualmente en cultivos ilícitos corresponden sin excepción a variedades seleccionadas y por tanto sujetas a unos rangos de variación, aislamiento y distribución diferentes a los de las plantas silvestres. En este sentido la revisión y actualización de la

información taxonómica sobre ellas, ayuda a delimitar con más precisión si se trata o no de plantas cultivadas de uso restringido o de otras plantas silvestres, no involucradas en casos forenses. Como parte de este estudio y para facilitar el trabajo de identificación, se estandarizó un protocolo técnico de la recolección de muestras vegetales, útiles como elementos probatorios. También se estableció el procedimiento para el análisis y emisión de informes periciales de plantas psicotrópicas procedentes de cultivos ilícitos, procedimiento que se propone como punto de partida para estudios de esta índole en el Sistema Penal Acusatorio. El servicio forense de identificación taxonómica vegetal se verá fortalecido en el futuro en la medida en que se tengan herramientas apropiadas para el análisis de material vegetal fragmentario ó descompuesto y en tanto las autoridades judiciales tengan conocimiento del potencial informativo de este tipo de estudios.

Agradecimientos

Los autores agradecen a Miguel Tunjano por su apoyo en la recolección de material vegetal reciente y sus aportes desde el punto de vista agronómico de los cultivos; sin su ayuda muchos de los especímenes serían imposibles de obtener. Luis Carlos Jiménez por sus aportes acerca del material vegetal procedente de las autoridades judiciales y su siempre eficiente apoyo logístico; Bertha Benavides por su amable ayuda en la consecución de literatura. A Pedro Morales por su valiosa colaboración en las primeras exploraciones sobre botánica forense en Colombia, a Genoveva González, Amparo Vásquez, Luz Nelly Morales y Martín Molina por compartir su amplia experiencia forense, Ana María Berenguer, Nelson Téllez y Ricardo Mora por sus observaciones y pacientes revisiones en diferentes documentos, a Jairo Peláez, Ernesto Díaz, Consuelo Mora, Blanca Ovalle, Andrés Patiño y Angela Ortega, porque con rigor y afecto siempre han apoyado en el desarrollo de este tema. Al Instituto Nacional de Medicina Legal y Ciencias Forenses y al Instituto de Ciencias Naturales de la Universidad Nacional, por las facilidades dadas para el desarrollo de este trabajo. J. L. Fernández y A. Galindo agradecen al Profesor Jesús Idrobo, por su invaluable apoyo en el conocimiento de las plantas de coca y en general de los cultivos ilícitos en Colombia, al inicio de este trabajo. Nuestro agradecimiento también al profesor Santiago Díaz Piedrahita por la revisión y las valiosas sugerencias efectuadas al manuscrito.

Bibliografía

Acosta J. de. 1590. Historia natural y moral de las Indias. Crónicas de América. Ed. Jose Alcina Franch. Dastin S.L. Madrid, España.

- Barbosa, C., G. Rodríguez & A. Avellaneda.** 1986. Estudios ambientales en la Sierra Nevada de Santa Marta afectada por cultivos de marihuana y fumigación con glifosato, 1986. Informe de Comisión. Centro de documentación, Fundación Pro-Sierra Nevada de Santa Marta. Restitución Mama Coca
- Bock, J. & D. Norris.** 1997. Forensic botany: an under-utilized resource. *J. Forensic Sci.* 42(3): 364-367.
- Bridson, D. & L. Forman.** 1992. *The Herbarium handbook*. Royal Botanic Gardens, Kew. UK
- Catalán, P.** 1995. LXII Cannabaceae. En: S. Castroviejo et al. (eds.). *Flora ibérica: Plantas vasculares de la Península Ibérica e Islas Baleares*. Vol. III Plumbaginaceae- Capparaceae. Pág. 257-261. Real Jardín Botánico. Madrid.
- Coyle, H.M.** 2005 *Forensic Botany. Principles and applications to criminal casework*. CRC Press. Ed. H. M. Coyle. USA.
- Cuatrecasas, J.** 1958. *Prima Flora Colombiana* : 2. Malpighiaceae. *Webbia* 13: 343-664.
- Davis, W.** 2001. El Río. Exploraciones y descubrimientos en la selva amazónica. Banco de la República. El Áncora Eds. Bogotá, Colombia.
- Davis, J.** 2004. The Mystery of the Coca Plant That Wouldn't Die. *Wired Magazine*.
- Díaz-González, T.E.** 1986. XXXVIII Papaver. En: S. Castroviejo et al. (eds.) *Flora ibérica: plantas vasculares de la Península Ibérica e Islas Baleares*. Vol. I Lycopodiaceae- Papaveraceae. Pág. pp. 406-469. Real Jardín Botánico. Madrid.
- Díaz-Piedrahíta, S.** 1998. El medio ambiente colombiano y los cultivos ilícitos. *Rev. Acad. Colomb. Cienc.* XXII (83): 174-186.
- Dickson, A.** 2000. *Integrative plant anatomy*. Harcourt, Academic press. San Diego, California. EE.UU. Capítulos 12-16.
- DIRAN-ARECI.** 2004. *Guía de campo*. Policía Nacional de Colombia.
- Dirección Nacional de Estupefacientes (DNE).** 2002. Cultivos ilícitos y el programa de erradicación (Artículo 14 de la Convención de Viena de 1988, numerales 2 y 3). Ministerio de Interior y de Justicia de la República de Colombia.
- Duke, J., D. Aulik & T. Plowman.** 1975. Nutritional value of coca. *Bot. Mus. Leaf.* 24(6): 113-119.
- El Tiempo,** periódico diario. 1999. Abril 12-99. Lunes sección D página 1 medio ambiente.
- Fernández-Alonso, J.L.** 2003. *Herbario Nacional Colombiano. Instrucciones para entregar colecciones botánicas para determinación*. Universidad Nacional de Colombia. Facultad de Ciencias. Instituto de Ciencias Naturales. Colombia.
- Fisher, G.** 1923. Estudios sobre el principio activo del yagé. Tesis Universidad Nacional, Bogotá.
- Fonnegra, R. & S.L. Jiménez.** 1999. *Plantas medicinales aprobadas en Colombia*. Editorial Universidad de Antioquia. Medellín. Colombia.
- Font Quer, P.** 1988. *Plantas medicinales*. 11 edición. Editorial Labor S.A. España.
- Galindo, A.** 2005. Guía para la recolección y manejo de plantas psicotrópicas y material vegetal, para estudio botánico con fines forenses. Instituto Nacional de Medicina Legal y Ciencias Forenses. Colombia.
- García-Barriga, H.** 1992 *Flora Medicinal de Colombia*. Tomos I - III. Edit. Tercer Mundo. Colombia.
- Garnock-Jones P.J.** 1990. Alkaloid content of *Papaver somniferum* subsp. *Setigerum* from New Zealand. *New Zealand J. of Botany* 28: 367-369
- Gates, B.** 1982. *Banisteriopsis, Diplopterys* (Malpighiaceae). *Flora Neotropica* 30: 1-237.
- Gentner, W.** 1972. The genus *Erythroxylum* in Colombia. *Cespedesia*. 1(4): 481-561.
- González, G.** 2001. En duda virtudes de marihuana. *Tierramerica. Medio Ambiente y Desarrollo*. PNUMA, PNUD. Disponible en la página web: <http://www.tierramerica.net/2003/0119/articulo.shtml>
- González de, A., M. Peña, J. Pérez & M. Díaz.** 2003. Intoxicación por la administración de tabletas de *Thevetia peruviana* como tratamiento para bajar de peso: presentación de un caso. *Rev. Toxicol.* 20: 221-223.
- Henman, A.R.** 1990. Coca and cocaine: their role in "traditional" cultures in South América. *J. of Drug Iss.* (20) 4.
- Holmstedt, B.E. Jäättmaa, K. Leander, T. Plowman.** 1977. Determination of cocaine in some South American species of *Erythroxylum* using mass fragmentography. *Phytochemistry* 16: 1753-1755.
- Hunziker, A.** 1979. South American Solanaceae: a synoptic survey. *Trabajos del Museo Botánico. Universidad Nacional de Córdoba*. Tomo III No. 8: 48-96.
- Judd, W.S., C. Campbell, E. A. Kellogg, P.F. Stevens.** 1999. *Plant systematics, a phylogenetic approach*. Sinauer Associates. USA.
- IMLCF.** 1914. *Libros de registro de solicitudes judiciales de la Oficina Central de Medicina Legal*. Archivo General, Instituto Nacional de Medicina Legal y Ciencias Forenses de Colombia.
- _____. 2004. *Manual de Calidad de los Laboratorios Forenses DG-DGT-MOI*. Instituto Nacional de Medicina Legal y Ciencias Forenses de Colombia.
- Ley 30 de 1986 y normas complementarias. Por la cual se adopta el Estatuto Nacional de Estupefacientes y se dictan otras disposiciones. **Congreso de Colombia**
- Ley 600 de 2000, Julio 24 y Ley 906 de 2004, Agosto 31. Código de Procedimiento Penal. **Congreso de Colombia**.
- Ley 938 de 2004, Diciembre 30. Estatuto Orgánico de la Fiscalía General de la Nación. Título III, Artículos 35-36. **Congreso de Colombia**.
- Li, H.L.** 1974. The origin and use of *Cannabis* in eastern Asia linguistic-cultural implications. *Economic Botany* 28: 293-301.
- Lidén, M.** 1995. Papaveraceae. Ed. G. Harling & L. Anderson. *Flora of Ecuador* (69) 52: 3-5.
- Martínez, E.** 1982. Papaveraceae. *Flora de Veracruz*. Instituto Nacional de Investigaciones sobre recursos bióticos Xalapa, Veracruz, México. Fascículo 22: 1-3.

- Márquez, G.** 2001. De la abundancia a la escasez: la transformación de ecosistemas en Colombia. En: Palacios, G. (Ed.) Universidad Nacional de Colombia. UNIBIBLOS. Bogotá.
- Mitev, A.** 2000. Poisonous plants and animals: *Papaver somniferum*. http://library.thinkquest.org/C007974/1_1pop.htm.
- Mizrach, S.** 2002. Ayahuasca, chamanism and curanderims in the Andes. Disponible en la página web: <http://www.biopark.org>
- Molina, C.M.** 2004. La geología forense en Colombia. Revista virtual trazas. INML y CF. http://www.medicinalegal.gov.co/revista_trazas/geologia_forense.pdf
- Molina, C.M. & J. Moreno.** 1995. Elaboración de un modelo comparativo de suelos con base en análisis físicos, químicos y sedimentológicos para su aplicación en geología forense. Trabajo de grado. Universidad Nacional de Colombia.
- Molinari, E.P.** 1959. Plantas cultivadas en la República Argentina. Instituto de Botánica Agrícola. Vol. III. Fascículo 82:1-33.
- Nee, M.** 1991. *Datura* and *Brugmansia*: Two genera or one?. *Solanaceae Newsletter* 3 (2): 27-35.
- Novara, L.J.** 1993. *Papaveraceae*. Flora del Valle de Lerma. Aportes Botánicos de Salta. Serie Flora. Vol. 1 No. 25: 1-6.
- Oliveira, J. & A. Amaral.** 2002. *Erythroxylaceae*. En Flora Fanerogámica do estado de Sao Paulo. 2: 107-119.
- ONU- Oficina contra la droga y el delito & Gobierno de Colombia.** 2004. Colombia, coca cultivation survey. Junio.
- _____ 2006. Colombia, monitoreo de cultivos de coca. Junio.
- Patño V.M.** 1969. Plantas cultivadas y animales domésticos en América. Equinoccial. Vol. 4. Plantas Introducidas. Cali. Imprenta Departamental
- _____ 2004. Historia de la cultura material en la América Equinoccial; Vestidos, adornos y vida social. Vol. 4. Capítulo VII. Adornos y admiñculos para el arreglo de la persona. Publicación digital Biblioteca Luis Ángel Arango Banco de la República. <http://www.lablaa.org/blaavirtual/credencial/enero1990/enero1.htm>
- Paz-Estensoro V.** 1988 (Presidente Constitucional de la República de Bolivia). Ley del régimen de la coca y sustancias controladas No. 1008 de 19 de julio de 1988.
- Pérez-Arbeláez, E.** 1937. Plantas medicinales y venenosas de Colombia. Estudio botánico, étnico, farmacéutico, veterinario y forense. Ed. Cromos. Bogotá, Colombia.
- _____ 1978. Plantas útiles de Colombia. 4ª edición. Litografía Arco. Bogotá, Colombia.
- Persson, V., S. Knapp, & S. Blackmore** 1999. Pollen morphology and the phylogenetic analysis of *Datura* and *Brugmansia*.
- Plowman, T.** 1980a. The identity of amazonian and trujillo coca. *Botanical Museum Leaflets* 27(1-2): 45-68.
- _____ 1980b. Aspectos botánicos de la coca, pp. 100-117, en: F. R. Jeri (ed.). Actas del seminario interamericano sobre aspectos médicos y sociológicos de la coca y de la cocaína. Perú.
- _____ 1982. The identification of coca (*Erythroxylum* species): 1860-1910. *Bot. J. Linn. Soc.* 84: 329-353.
- _____ & **L. Rivier.** 1983. Cocaine and cinnamoylcocaine content of *Erythroxylum* species. *Annals of Botany* 51: 641-659.
- _____ 1989. *Erythroxylaceae*. En *Flora of Ecuador* 93: 1-32.
- _____ & **N. Hensold.** 2004. Names Types and distribution of neotropical species of *Erythroxylum* (*Erythroxylaceae*). *Brittonia* 56(1): 1-53.
- Rostworowski, M. de Diez Canseco.** 1988. Conflicts over coca fields in sixteenth-century Peru. Ann Harbor. University of Michigan Museum of Anthropology. *Memoirs of the Museum of Anthropology*.
- Rottman, A.** 1997 *Erythroxylum*: the coca plant. *Etnobotanical Leaflets*. <http://www.siu.edu/~ebl/leaflets/coca.htm>
- Rury, P.M. & T. Plowman.** 1983. Morphological studies of archeological and recent coca leaves (*Erythroxylum* spp.). *Botanical Museum Leaflets Harv. U.* 29: 297-341.
- Schultes, R.E.** 1957. The identity of the Malphigiaceae narcotics of South-America. *Bot. Mus. Leaflets. Harvard University* 18(1): 1-56.
- _____, **W. M. Klein, T. Plowman & T.E. Lockwood.** 1970. *Cannabis*: an example of taxonomic neglect. *Botanical Museum Leaflets* 23: 337-367.
- _____ 1986. De plantis toxicaris e mundo novo tropicale comentationnes - XXXVIII. *Etnopharmacological and alcaloidal notes on plants of the Northwest Amazon. Caldasia*15(71-75): 331-363.
- Small, E.** 1975a. Morphological variation of achenes of *Cannabis*. *Canadian J. Bot.* 53(10): 978-987.
- _____ 1975b. The case of the curious *Cannabis*. *Economic Botany* 29: 254.
- _____ 1975c. On toadstool soup and legal species of marijuana. *Plant Sci. Bull.* 21(3): 34-39.
- _____ 1976. The forensic taxonomic debate on *Cannabis*: semantic hokum. *J. For. Sci.* 21(2): 239-251.
- _____ & **A. Cronquist.** 1976. A practical and natural taxonomy for *Cannabis*. *Taxon* 25(4): 405-435.
- Symon, D. & L. Haegi** 1991a. *Brugmansia*: to be or not to be. *Solanaceae Newsletter* 3 (2): 25-26.
- _____ 1991b. *Datura* (Solanaceae) is a New World genus. *Solanaceae III: Taxonomy, Chemistry, Evolution*. Ed. Hawkes, Lester, Nee & Estrada. Royal Bot. Gardens Kew & Linn. Soc. London.
- Toro, G., E. Rojas & G. Arango.** 1997. Seneciosis. Enfermedad veno-oclusiva del hígado (EVOH) en Colombia. 1964-1996. Identificación, manejo y solución de un problema. *Rev. Acad. Col. Cien. Ex.* 21(79): 35-56.
- Zhukovskii, P.M. & Bazilevskaya N.A.** 1975. Opium poppy. La Turquie Agricole-Krashkaw. pp 476-507. Published for ARS-US department of agriculture and the National Science Foundation. USA.

Recibido el 7 de mayo de 2007.

Aceptado para su publicación el 15 de junio de 2007.

SISTEMAS MORFOGÉNICOS CONTRASTADOS EN EL NORTE DE LA CORDILLERA CENTRAL COLOMBIANA

por

Michel Hermelín¹

Resumen

Hermelín, H.: Sistemas morfogénicos contrastados en el Norte de la Cordillera Central Colombiana. Rev. Acad. Colomb. Cienc. **31** (119): 199-216, 2007. ISSN 0370-3908.

La regionalización de los procesos geomorfológicos en las montañas intertropicales ofrece varias dificultades que no se resuelven con la simple aplicación a los pisos altitudinales del concepto zonal, basado en la latitud. Se presentan diferencias notorias en los rangos y las frecuencias de los procesos que hacen necesaria una agrupación sui generis. En el caso de la región norte de la Cordillera Central de Colombia, la persistencia de los altiplanos, desarrollados sobre gruesos mantos de saprolitos, plantea la larga duración de procesos de meteorización química sin que intervengan simultáneamente fenómenos erosivos de importancia, tal como lo demuestra la preservación de minerales volcánicos procedentes de caídas de ceniza con edades hasta de 5 millones de años. Episodios erosivos cortos, evidenciados por capas de gravas intercaladas, no modificaron sustancialmente la topografía y se interpretan con base en datos obtenidos por fotoluminiscencia como resultado de condiciones más secas y más erosivas asociadas con el último máximo glacial. Por otra parte las vertientes sufren procesos erosivos intensos no sólo causados por fenómenos climáticos como aguaceros intensos y prolongados sino por sismos de magnitud >6.0 que generan múltiples procesos con grandes consecuencias tanto en modificación de geoformas como en suministro de sedimentos. Las condiciones anteriores dan como resultado la coexistencia de sistemas morfogénicos contrastados bajo condiciones climáticas similares.

Palabras clave: Geomorfología, procesos erosivos, altiplanos, Cordillera Central, Antioquia.

Abstract

Regional classification of geomorphic processes in intertropical mountains present several difficulties which cannot be solved through the simple application of zonality concept, based on latitudinal divisions, to altitude floors. Several notorious differences in un ranges and frequencies

appear, which render necessary a new grouping. For the northern Colombian Central Cordillera, the preservation of plateaus developed over thick saprolitized mantles signifies long periods characterized by predominant chemical weathering processes with almost complete absence of important erosion phenomena, as demonstrated by the persistence of volcanic minerals deposited by airfall ashes with ages reaching 5 M years. Short erosive episodes, evidenced by intercalated stonelines were unable to substantially modify topography and are interpreted, on the basis of photoluminescence data, as associated with LGM. On the other hand, slopes are exposed to intensive erosive processes, not only as consequence of intense and prolonged rain storms but also of 6.0 magnitude earthquakes which generate multiple slope movements and torrential floods which drastically modify geofoms and sediment supplies. These conditions result in the coexistence of contrasting morphogenic systems under similar climatic conditions.

Key words: Geomorphology, erosive processes, plateaus, Central Cordillera, Antioquia.

1. Introducción

La geomorfología es el estudio de los paisajes, y si se toma el sentido literal de la palabra, la rama de la ciencia que se ocupa de las formas de la Tierra. Sensus lato, el conocimiento de las geoformas pasa por el de los procesos que las originan (**Chorley et al.**, 1984., **Bloom**, 1998); sin embargo la relación procesos-forma dista mucho de estar resuelta. Falta además establecer si una geoforma está en equilibrio con las condiciones actuales o si ha sido heredada de condiciones ambientales distintas, y por lo tanto determinar su edad. Este trabajo intenta, en primer lugar, una revisión a la interpretación de las geoformas que existen en Colombia, con énfasis en su región noroccidental, pero sobre todo una aproximación a la importancia relativa de los procesos que las han originado en la región norte de la cordillera Central.

1.1. Consideraciones históricas

Históricamente, la primera interpretación que le dió el hombre al paisaje fue considerarlo como el resultado de una creación, conjunto de acciones inmutables atribuidas a una divinidad o a varias, según el grado de inspiración de las culturas respectivas.

La influencia de las creencias religiosas fue bastante más importante de lo que suele admitirse para el desarrollo conceptual de la geomorfología: efectivamente existió desde el nacimiento de disciplinas conexas, como la paleontología, la idea de asociar la desaparición de especies, que ahora sólo se conocen como fósiles, con la ocurrencia del diluvio universal, fenómeno profusamente comentado en las religiones judeocristianas. Basta con mirar los trabajos de **Hettner** (1892) y de **Grosse** (1926), excelentes exponentes de la ciencia alemana de fines del siglo XIX y de principios del XX para ver que los depósitos aluviales aún reciben allí el nombre de “diluvium”.

La reacción de la escuela originada por **Hutton**, (1795) difundida por **Playfair** (1808), desarrollada por **Lyell** (1830) y que inspiró la teoría de la evolución de Darwin, queda resumida en la muy citada frase del primero:

“No veo la evidencia de un principio, no percibo la señal de un fin”.

Esa es la piedra de toque que va a establecer la separación de los conocimientos geológicos con respecto a la tradición religiosa, separación que si bien es generalmente aceptada, sigue puesta en tela de juicio por las creencias fundamentalistas. Exceptuando estas aberraciones que suelen florecer en tierras del norte del Río Grande, como lo muestra la polémica reciente acerca de la “intelligent design”, se puede afirmar que las Ciencias de la Tierra (como las otras) han logrado en general liberarse de la influencia de la religión. Sin embargo este rechazo de la posición que se denominó originalmente catastrofismo aún tiene sus consecuencias. Darwin influenció a Davis, exponente de la geomorfología americana, quien tuvo mucha resonancia en Europa, particularmente en cuanto a la difusión de su ciclo geográfico, en el que se plantea una evolución lenta y casi imperceptible de los paisajes (expresada en términos antropocéntricos que aún subsisten: juventud, madurez, senectud) por medio de unos procesos erosivos que **Davis** (1901) nunca definió a cabalidad. Después de establecer su ciclo, desarrollado con base en observaciones efectuadas en condiciones húmedas y templadas, lo modificó para incluir como subdivisiones el ciclo glacial y el ciclo desértico.

Sin embargo la orientación estaba dada: durante mucho tiempo los geomorfólogos - y los geólogos - consideraron que la evolución de los paisajes debía seguir las reglas del “uniformitarianismo” huttoniano: los procesos actuales explican todo lo que se observa en la tierra, no sólo los paisajes sino las rocas. Además los paisajes se modifican a velocidades imperceptibles para los seres humanos.

Cuando en la década de 1920 **Bretz** (1969) interpretó, por cierto correctamente, las megaestructuras sedimentarias de las Channeled Scablands en los Estados Unidos, fue refutado y descalificado porque el tamaño de la inundación que deducía de sus evidencias era descomunal con respecto a las observadas hasta ese entonces. Sólo fue “rehabilitado” a fines de la década de 1980 por la Sociedad Geológica de América. Un caso similar ocurrió con la hipótesis de **Alvarez et al.**, (1980) acerca de las evidencias del impacto de un meteorito de gran tamaño ocurrido en el límite entre el Cretácico y el Cenozoico: la comunidad científica reaccionó con una incredulidad molesta que duró varias décadas.

Se puede por lo tanto afirmar que la duradera influencia de Davis, pese a publicaciones tempranas como las de **Acosta** (1846, 1851), seguirá teniendo una gran influencia en la interpretación de los paisajes colombianos.

1.2. Geomorfología como parte de las Ciencias de la Tierra

Aunque parezca abusivo, se podría asimilar a las Ciencias de la Tierra la anécdota que cuenta **Echavarría Olázaga** (1962) acerca de la economía: para enseñarle a su amo el rajá los fundamentos del conocimiento, un filósofo indio hizo traer a varios ciegos de nacimiento y los puso en presencia de un elefante. Cada ciego asió la parte del animal que tenía más cerca y cuando se le preguntó a cada uno qué era un elefante, las respuestas variaron entre serpiente (la trompa), cuerda (la cola), manta (una oreja), columna (una pata) y espolón (una defensa).

Las Ciencias de la Tierra en Colombia (como en otras partes del mundo), han sido disciplinas aplicadas para profesiones que tienden a considerarlas como propias, aunque realmente conformen un conjunto articulado: la geología nació como auxiliar de la minería; la edafología fue enseñada para los agrónomos, la hidrología para los ingenieros civiles, la biogeografía para los ingenieros forestales, la geomorfología para los geógrafos y la meteorología ... en el exterior, por lo menos hasta hace relativamente poco (**Hermelín**, 1999).

Sin embargo, ¿cómo entender el origen y la evolución de un paisaje sin tener una buena base de las disciplinas anteriores? En un momento dado de la historia de la tierra, la disponibilidad de agua, íntimamente ligada al clima, es tan fundamental como el conocimiento del material rocoso subyacente para poder entender los suelos, las geoformas, los procesos erosivos y la biota predominante.

Sin entrar a discutir en detalle dichas relaciones, se encuentran buenos ejemplos en los trabajos de **Erhart** (1955)

(biostasia, con predominio de cubierta boscosa tropical, exportación de cationes en solución y en las costas formación de barreras coralinas en ambientes desprovistos de turbidez; rexistasia, con erosión generalizada, producción de sedimentos detríticos, formación de sedimentos clásticos), o de **Tricart & Cailleux**, (1965) donde se oponen la edafogénesis, situación estable, a la morfogénesis, en la que se modifican las formas previa destrucción del suelo.

1.3. Las limitaciones de la geomorfología climática

Si bien se reconoce a **Humboldt** (1950; **Humboldt & Bonpland**, 1807) como el iniciador de la fitogeografía, la geomorfología climática sólo floreció, particularmente en Europa, hacia finales del siglo XIX a raíz de los viajes de los grandes naturalistas, particularmente alemanes, a las otras regiones del mundo (**Tricart et Cailleux**, 1964; **Derbyshire**, 1973, **Buedel**, 1982; **Gutiérrez**, 2001).

El razonamiento es a primera vista sencillo: a cada clima está asociado un conjunto de procesos y por lo tanto de geoformas características. El planeta puede dividirse en zonas latitudinales cuya característica principal es la cantidad de calor que reciben del sol, pero también la circulación de los vientos y la humedad disponible.

La división zonal iniciada por los edafólogos, encabezados por Dokuschaiev, fue seguida por los geomorfólogos (**Tricart & Cailleux**, 1964, **Buedel**, 1982), Si bien es cierto que hay conjuntos de procesos y de formas que sólo se dan en climas característicos (polar, desértico), también existen otros que son comunes a varias zonas: la división tiene que completarse con otras consideraciones, como la temperatura del mes más frío del año y el número de meses sin lluvia (**Chorley et al.**, 1984).

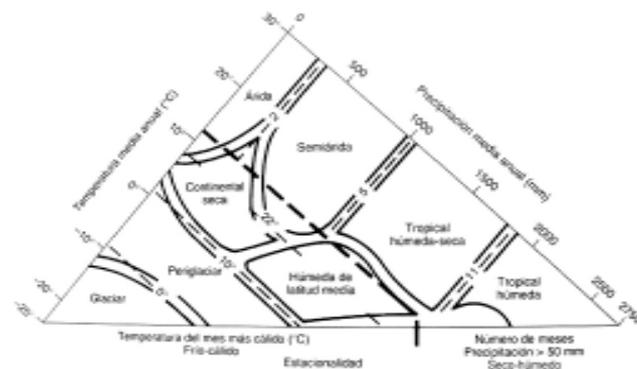


Figura 1. Triángulo de Chorley et al. (1984): regiones morfogénicas).

El otro problema que debe afrontar la geomorfología climática tiene que ver con el tiempo de formación de las geoformas específicas y su resistencia a cualquier cambio

climático posterior; nace entonces el concepto de geoformas heredadas, que corresponden a climas pasados y el de palimpsesto: como los antiguos pergaminos donde se escribía varias veces sin borrar del todo el escrito anterior, existen paisajes cuyos componentes son el resultado de la acción sucesiva, muchas veces incompleta, de paleoclimas sobrepuestos (**Chorley et al.**, 1984).

Pueden existir inclusive casos en los cuales, como para los inselbergs (en Colombia se utiliza el viejo término español peñol), la geoforma sea realmente el resultado de dos climas sucesivos: húmedo con meteorización química profunda seguido de erosión intensa (etchplanation) que elimina toda la capa de alteritas y sólo deja el piso rocoso. (**Botero**, 1963; **Linton**, 1955).

Finalmente otro problema que presenta la geomorfología climática es el hecho de que algunos fenómenos climáticos actúan directamente sobre las rocas (por ejemplo la gelifracción) mientras que otros, como la meteorización química, están condicionados por la atmósfera, el agua corriente y la presencia de suelo con materia orgánica que acidifica el agua lluvia. (Fig. 2) Se presentan, por lo tanto, dudas acerca de la velocidad a la cual ocurren los procesos y por lo tanto acerca del tiempo necesario para su desarrollo.

2. Climas y montañas

2.1. Los climas de las montañas ecuatoriales

¿Es una montaña alta, localizada cerca del ecuador, un microcosmos del planeta? La respuesta parece simple, pues como lo pretende Holdridge (en **Espinal**, 1977); en su diagrama (Fig. 3), bastaría con sustituir latitud con altitud: la zona polar quedaría reemplazada por el piso nival, y así sucesivamente. Sin embargo la situación real dista mucho de ser así. En primer lugar, si bien es cierto que los pisos van desde biotemperaturas de 30°C en el nivel del mar hasta temperaturas de 0°C o inferiores, hay diferencias notorias (**Tricart et al.**, 1962):

- En primer lugar no existen entre los trópicos estaciones térmicas como en latitudes medias. En Colombia la máxima diferencia entre la temperatura media del mes de Diciembre sólo difiere a lo sumo de un grado de la temperatura media de Junio (IGAC, 2002).
- En segundo lugar la duración de los días prácticamente no varía, a lo largo del año, siendo la diferencia máxima en el centro del país sólo de unos 15 minutos.
- En tercer lugar la secuencia altitudinal puede iniciarse en la base con climas semidesérticos (Guajira) o hiperhúmedos (Chocó). (**Espinal**, 1977; **Espinal et al.**, 1977).

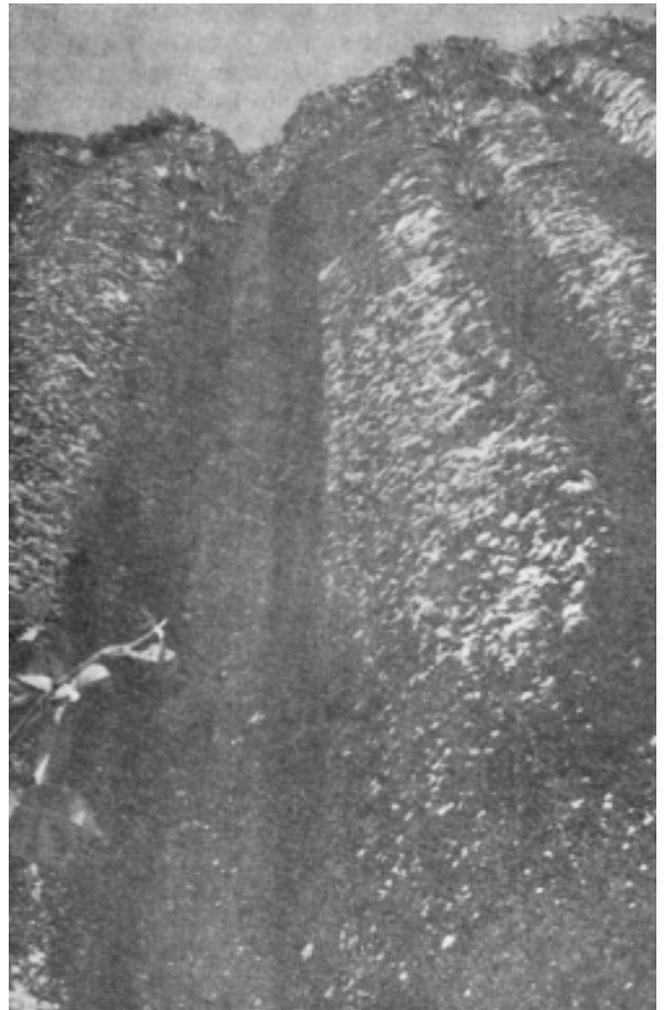


Figura 2. Acanaladuras en el peñol de Guatapé.



Figura 3. Diagrama de Holdridge.

- A lo largo de las pendientes pueden presentarse depresiones secas y máximos pluviométricos (**Khobzi & Usselmann**, 1974) y eso se refleja también en la altura a la que aparecen los glaciares.
- La lluvia varía en función del traslado de la zona de convergencia intertropical, con una precipitación bimodal en la zona andina y unimodal en los Llanos Orientales y la Guajira. La topografía también tiene una influencia marcada sobre la precipitación.
- La densidad de la atmósfera también disminuye hacia arriba.

El clima de los Andes daría lugar para muchas más observaciones, iniciadas por Caldas, Humboldt y Boussingault y refinadas recientemente por autores como **Jaramillo** (2006) y **Mesa et al.** (1997). Sin embargo el tema por ahora más importante es el de la distribución de los pisos altitudinales de las montañas tropicales en función de los procesos geomorfológicos que allí ocurren. Al respecto varios autores han producido contribuciones como **Tricart et al.** (1962) y **Mainquet-Michel** (1963) para los Andes Venezolanos de la región de Mérida y los Andes de Perú; **Bik** (1967) para las montañas Centrales de Nueva Guinea; **Bartels** (1984) para la Sierra Nevada de Santa Marta; **Thouret** (1983) para la Cordillera Central. En forma más general, **Khobzi & Usselman** (1974), (Cuadro 1) **Hermelín** (1976) y **Flórez** (s.f., 2003, 2005) (Cuadro 2) han intentado una separación en pisos altitudinales (escalonamiento, según el término utilizado por **Gutiérrez**, 2001) para Colombia.

Cuadro 1. Principales sistemas geomorfológicos según **Khobzi & Usselmann** (1974)

Glaciares y formas asociadas Piso periglacial Páramos inferiores Vertientes boscosas de las cordilleras Depresiones secas de las cordilleras Regiones selváticas Regiones secas

Cuadro 2. Sistemas morfogénicos principales según **Flórez** (2003)

Alta montaña Montaña media Montaña baja Depresiones tectónicas Litorales Dominio amazónico Dominio orinoqués Sistemas insulares
--

2.2. Procesos Geomorfológicos en las montañas tropicales húmedas

La descripción y la distribución de los diferentes procesos que modelan la superficie de la tierra en las montañas tropicales parece relativamente sencilla, como sería una simplificación de la figura 1, pero la realidad es mucho más compleja por varios motivos:

- La dificultad que aún existe para identificar la importancia relativa y actual de dichos procesos (p. e. **Khobzi**, 1981).
- La presencia de procesos externos que actúan en varios pisos altitudinales: ríos, movimientos en masa por ejemplo.
- La existencia de procesos exogénicos que tienen una ocurrencia muy espaciada pero que revisten una importancia fundamental en la evolución de los paisajes: los aguaceros excepcionalmente fuertes en las zonas pendientes (p.e. **Hermelín**, 1993).
- La ocurrencia de fenómenos endógenos como los sismos, y las erupciones volcánicas, que presentan efectos similares a los anteriores (**Cárdenas**, 2005; **Velásquez**, 2005; **Wilches-Chaux**, 2005).
- La influencia de movimientos tectónicos recientes o por lo menos cuaternarios complica a menudo la interpretación de los paisajes, muchas veces ya modificados por los productos volcánicos (p.e. **Toro et al.**, en prensa).
- Finalmente la intervención humana ha causado grandes cambios que se reflejan tanto en la aparición de procesos nuevos como en tasas de sedimentación extremadamente altas (p.e. **Restrepo et al.**, 2006).

Pese a las dificultades anteriores, muchos autores han podido estudiar tanto en Colombia como en otros países tropicales los procesos característicos de cada piso:

- Los pisos glaciales, periglaciales y los páramos han sido estudiados en Venezuela y Colombia por **Schubert** (1979) **Brunschweiler** (1981), **Khobzi**, 1981 **Zuluaga & Mattson** (1981), **van der Hammen**, 1979; 1984) entre otros.
- Las pendientes boscosas también han sido el objeto de numerosos estudios, entre los cuales se cuentan los de **Ruxton** (1967) en Nueva Guinea, **Imeson & Vis** (1983), **Thouret & Fabre** (1989) y de **Greiff et al.**, (2002) para Colombia, entre otros.

- Los cambios climáticos recientes han dejado huellas que a menudo pueden ser confundidas con las de procesos actuales o subactuales, particularmente en las zonas periglaciales (p.e. **van der Hammen**, 1984).

Los paisajes más característicos del norte de la Cordillera Central son sus altiplanos modelados a partir de rocas ígneas cretácicas y sus vertientes empinadas, internas (como el Valle de Aburrá) y externas (como el frente de erosión del Magdalena (**Botero**, 1963)). Serán por lo tanto analizados detalladamente a continuación.

3. Los altiplanos del Norte de la Cordillera Central

3.1. Superficies de erosión

Botero (1963) englobó lo que ahora se reconocen como altiplanos norte y altiplano sur en su macizo oriental, que va desde el cañón del Río Cauca hasta el frente de erosión del río Magdalena (Fig. 4). Los altiplanos, separados por el Valle de Aburrá, se extienden de 6 a 7° de latitud norte aproximadamente y se caracterizan por una topografía masiva, con entalles de ríos limitados a zonas fracturadas (Fig. 5). Están en su mayoría situados sobre el Batolito Antioqueño, rodeados por las rocas metamórficas que éste intruyó.

Page & James (1981a) plantean la existencia en la zona de 4 superficies de erosión:

- Pre Cordillera Central
- SI (cordillera Central) (Llanos de Cuivá, La Unión) formada Oligoceno al Mioceno
- SII (Río Negro) formada durante el Mioceno-Plioceno, a partir de las observaciones de **Soeters** (1981).
- Superficie SIII (El Peñol)
- Superficie IV (actual)

El esquema propuesto por **Page & James** (1981a) implica levantamientos sucesivos de la Cordillera Central que culminan al iniciarse el Cuaternario. Se planteó la posibilidad de que la superficie inicial fuera una sola y que los niveles observados fueran el resultado de fallamientos en bloques ocurridos durante el levantamiento (**Hermelín**, 1983; 1988).

El análisis morfotectónico de **Toro et al.** (sometido), basado en consideraciones estadísticas de la topografía de la región circundante a Medellín, les permite señalar

la existencia de 4 niveles de altiplanos entre 2100 y 2750 m sobre el nivel del mar, separados por elementos tectónicos y relacionados con la actividad tectónica.

Por otra parte resultados preliminares recientes (**Rendón et al.**, en preparación) obtenidos a partir de la determinación del espesor de saprolitos derivados del Batolito Antioqueño indican una mayor profundidad para las superficies más altas, lo que parecería conformar la hipótesis de levantamientos sucesivos. (Cuadro 3).

Cuadro 3. Profundidades de los saprolitos derivados de plutones granodioríticos en la región central de Antioquia.

Lugar	Profundidad Min (m)	Profundidad Max (m)	Promedio (m)
Llano de Ovejas	55.7	101.6	73.1
Llanos de Cuivá	52	88.6	69.22
La Unión	32.9	51.5	43.84
Llano Grande	30	44.6	34.92
Aeropuerto	50.4	62.8	54.6

3.2. Meteorización química

La meteorización química intensa (**Reiche**, 1950, **Carrol**, 1970; **Ollier**, 1969; **Hermelín**, 1979; 1981), características del trópico húmedo, acompañada por una escasa erosión en los altiplanos, ha producido saprolitos de gran espesor (**Botero**, 1963; **Feininger**, 1971; **Hoyos et al.**, 1985; **Rendón et al.**, en preparación) (Fig. 6). El Batolito Antioqueño, como cuerpo ígneo homogéneo, ofrece una serie de ventajas para estudiar los productos de meteorización de sus componentes. Los principales procesos son:

- la hidrólisis, que afecta principalmente los feldespatos, transformándolos isovolumétricamente (**Millot & Bonifas**, 1955) en arcillas caoliníticas. Los minerales ferromagnesianos comunes (biotita y hornblenda) se transforman en óxidos e hidróxidos de hierro mezclados con caolinita.

El cuarzo permanece estable hasta que en una etapa más avanzada de meteorización se vuelve sacaroidal y pulverulento. También en caso de meteorización máxima aparece la gibbsita como producto de neoformación de la caolinita. Los minerales accesorios como el circón el apatito y la magnetita no suelen ser afectados.

- el proceso paralelo a la hidrólisis es el de oxidación-reducción. En general predominan las condiciones oxidantes, excepto en las cercanías de las

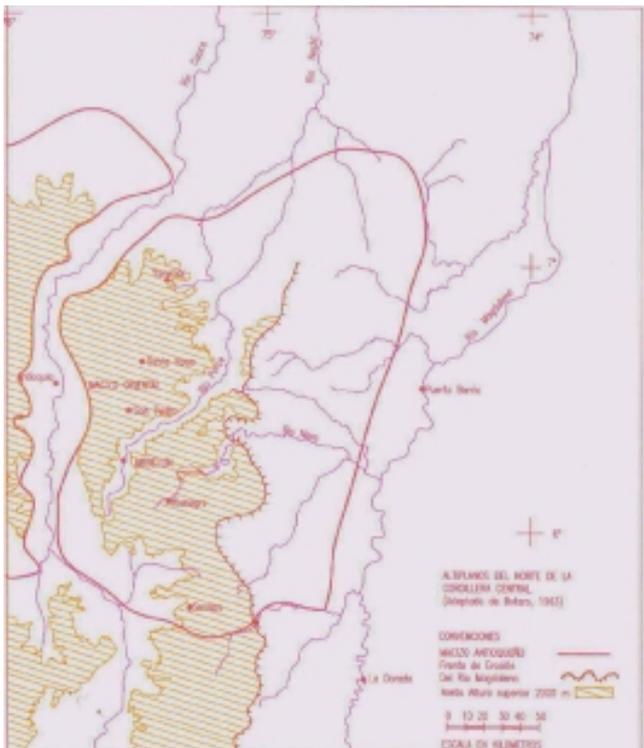


Figura 4. Macizo oriental del norte de la Cordillera Central, según Botero (1963).



Figura 5. Foto área oblicua altiplano de Rionegro (SII).

corrientes donde la reducción mezclada con la hidrólisis produce un saprolito blanco (caolinita) con manchas grises (ferromagnesianos descompuestos y reducidos (Fig. 7). En la actualidad se están realizando estudios sobre la evolución de los mine-



Figura 6. Corte vertical de 27 m en saprolito derivado del Batolito Antioqueño, 5 km al oeste de Rionegro.



Figura 7. Vista detallada del saprolito.

rales ferromagnesianos así como sobre una sustancia de color negro que aparece en la periferia de los minerales oscuros que sufren meteorización, pero también en venas y en forma de manchas discretas en medio de feldspatos (Hermelin, *et al.*, en curso). Se ha interpretado tradicionalmente esa sustancia como un óxido de manganeso (G. Botero, comunicación verbal), pero observaciones microscópicas preliminares parecen indicar más bien la presencia de hematita, posiblemente con características de hierro especular.

3.3. Los saprolitos

El saprolito, en cortes recientes, siempre aparece húmedo pero nunca saturado. Preserva, en forma muy exac-

ta, tanto el volumen como las estructuras que existían en la roca fresca, pese a que su densidad en seco puede haber pasado de 2.7 a 1.5 y aún 1.3 g/cm³ (**Hermelín, et al.**, 1983; **Hoyos et al.**, 1985). A pesar de ofrecer permeabilidades bajas (10⁻⁸ cm s⁻¹) el saprolito parece ser un vehículo importante en la alimentación del nivel freático de los altiplanos. Aún queda mucho por hacer en la comprensión de este fenómeno, en particular en cuanto a la importancia de las diaclasas en el proceso.

Otro tema que merece ser investigado es el de la retención por parte de los minerales ferruginosos de neoformación del campo magnético terrestre, existente en el momento de la reacción, fenómeno que recibe el nombre de “chemical remnant paleomagnetism”. En Colombia se han hecho determinaciones de edades preliminares con base en ese método (**Page & James**, 1981a). En la actualidad se está obteniendo una calibración por medio de comparación con otros métodos para datar las formaciones superficiales de los altiplanos (**Sierra et al.**, en preparación).

Los gruesos saprolitos derivados del batolito ofrecen la posibilidad de determinar edades de formación a partir del CRPM (Chemical remnant paleomagnetism). Hasta ahora sólo se han hecho ensayos sistemáticos en formaciones superficiales de poco espesor en Australia (Pr. M. Thomas, comunicación verbal, 2006).

3.4. Tasas de meteorización:

Los altiplanos han sido interpretados todos como el resultado de una larga exposición a los fenómenos de meteorización química sin que ocurran fenómenos erosivos destructores (**Shlemon**, 1979; **Page & James**, 1981a). Una evaluación directa de la edad del altiplano de Río Negro (S II según Page y James) basada en la datación de circones volcánicos encontrados en el Oriente Antioqueño es de unos 6 Ma (**Toro et al.**, sometido) Ese dato lleva a pensar que esa preservación de tipo “biostasia” (**Erhart**, 1955), se caracteriza por el único proceso de “erosión química” de **Tricart & Cailleux** (1964) es decir pérdida de cationes en solución, exportados por el sistema fluvial con la consiguiente formación de saprolitos bajo la protección de un manto pedológico y de una cubierta vegetal permanente. Con el fin de conocer la tasa de meteorización química, se efectuó el análisis de los cationes transportados en las corrientes del oriente Antioqueño (**Geale & Hermelín**, 1988) y se llegó a la conclusión que en áreas correspondientes a formaciones vegetales de tipo bosque muy húmedo tropical, la sílice en solución transportada por los ríos era del orden de 10 veces mayor que el promedio mundial. Por otra parte, a partir de los datos obtenidos

por **Geale & Hermelín** (1988) se puede calcular la velocidad de formación de saprolito. Si se consideran espesores promedio de 80m, se deduce que se requieren del orden de 5 Ma para que el frente de meteorización llegue a esa profundidad (**García & Hermelín**, 2004). Se trata obviamente de una aproximación que no tiene en cuenta cambios climáticos y de altura, pero se considera que el razonamiento es fundamentalmente correcto por los resultados obtenidos (Cuadro 4) y variando la manera de efectuar los cálculos.

Cuadro 4. Resultados utilizando sólo el Si disuelto en las aguas superficiales

	Río Calderas	Río Tafetanes	Q. Jaguas	Q. Juanes
T _{M-kg} (kg/ha-año)	379.27	370	599.29	354.31
T _{Ma} (m/Ma)	34.5	33.6	54.5	32.2
Años (para formar 80 m de saprolito)	2 320 274	2 378 404	1 468 408	2 483 722
Años para formar 200 m de saprolito	5 800 685	5 946 009	3 671 020	6 209 305

Existen métodos más perfeccionados para datar el saprolito, como el desarrollado recientemente por **Vasconcelos & Conway** (2003). Se espera poder utilizarlos más adelante.

Finalmente la utilización de métodos basados en isótopos de oxígeno y de hidrógeno contenidos en los saprolitos debería permitir obtener la historia térmica de las aguas de meteorización durante el levantamiento de la cordillera.

3.5. Terrazas

Las terrazas de la región de Río Negro fueron estudiadas inicialmente por **Hermelín & Durango** (1976), sin la posibilidad de datarlas en esa época. Un poco más tarde, **Page & James** (1981a) utilizando paleomagnetismo residual químico remanente (RCPM) obtuvieron dataciones preliminares que las señalan como cuaternarias. Análisis recientemente realizados con el método de OSL (Luminiscencia óptica) en las terrazas del Llano de Ovejas dan para los depósitos aluviales superiores edades de 56 000 a 92 300 años BP, (**López et al.**, en prensa) que corresponderían a los estadios isotópicos marinos No 3 y 4 (**Clapperton**, 1993; **van der Hammen & Hooghiemstra**, 2000). Más dataciones por ese método están en curso para los depósitos aluviales de la zona de Río Negro.

3.6. Línea de piedras

Este término es una traducción literal de “stone line”, (nappe de gravats, de los autores franceses, línea de cantos en **Gutiérrez** (2001) y designa una capa delgada (máximo unos 30 cm de espesor) caracterizada por una acumulación de materiales gruesos como cuarzos angulares o redondeados, nódulos de gibbsita o restos de costras de óxidos e hidróxidos de hierro. Estos materiales han sufrido un desplazamiento superficial corto sobre la superficie del terreno, como se evidencia en muchos afloramientos del Oriente Antioqueño y del Llano de Ovejas (**Hermelín**, 1993). En el Oriente Antioqueño la línea de piedras suele estar asociada con un horizonte gris (ambiente reductor), en la base de las capas de cenizas volcánicas que recubren la mayor parte de la topografía suave de los altiplanos antioqueños (Fig. 8). Dataciones por trazas de fisión de circones de origen volcánico localizados arriba y abajo de la línea de piedras indican para esos cristales edades de 340 000 a 430 000 años BP (**Toro et al.**, 2006). Dataciones recientes de tiempo de enterramiento de granos de cuarzo basados en OSL (Luminiscencia óptica) en los Llanos de Ovejas dan edades de 18900 y 21800 Años B P (**López et al.**, en prensa). Esas fechas corresponden al inicio de un período seco y frío del pleniglacial. Por razonamiento geomorfológico, **Hermelín** (1993) había sugerido la coincidencia cronológica del emplazamiento de la línea de piedras con el estadal de Fúquene en la Cordillera Oriental. Las dataciones con OSL parecen confirmar esa hipótesis. La línea de piedras sería el resultado de un época relativamente corta durante la cual la vegetación arbórea desapareció y se produjeron fenómenos erosivos laminares generalizados en las vertientes de las colinas de los altiplanos. Se deduce la corta duración del evento porque los suelos derivados del saprolito del Batolito Antioqueño (capas anaranjadas y rojizas) por bioturbación fueron preservados en buena parte durante ese evento erosivo. Se están adelantando mediciones similares para la línea de piedras del Oriente Antioqueño.

Por otra parte se han observado líneas de piedras en zonas más pendientes como la cuenca alta del río Medellín (**Toro et al.**, 2003) y en el norte del departamento de Caldas, lo que indica seguramente un origen regional de tipo climático

3.7. Cenizas volcánicas

Una de las características de los altiplanos antioqueños es su recubrimiento por cenizas volcánicas: su espesor aumenta hacia el sur y su fuente principal es el macizo del Ruiz-Tolima. Fueron inicialmente estudiadas por edafólo-

gos (**Fernández y Santa**, 1964) pero atrajeron la atención de las otras ramas de las Ciencias de la Tierra (**Hermelín**, 1973; 1975a; 1975b; 1977a; 1978a; 1984a, 1984b; 1992a; 1992; **Hermelín & Velásquez**, 1983; **Toro & Hermelín**, 1993; **Toro**, 1999; **Toro et al.**, en prensa) por las grandes posibilidades cronoestratigráficas y geomorfológicas que ofrecen: no sólo son la confirmación de la estabilidad de los altiplanos desde el episodio del emplazamiento de la línea de piedras, sino que desempeñan un papel predominante en la infiltración y la preservación del agua y de la vegetación. (Fig. 9).

El estudio mineralógico de su fracción arena (minerales primarios) ha permitido distinguir por lo menos 5 eventos de emplazamiento, pese a no presentar suelos enterrados. Este último fenómeno se atribuye a un suministro de tefras en cantidades demasiado limitadas que no “sellaron” el suelo preexistente: por lo tanto el horizonte A de éste siguió creciendo hacia arriba, asimilando los nuevos aportes, tal como se pudo observar en los límites de Cundinamarca con Boyacá (Villapinzón) en 1983, unos meses después de la erupción del cráter Arenas.

Se está preparando un análisis sistemático de la presencia de cuarzo en los perfiles, que permita eventualmente establecer una cronología detallada por medio de OSL.

Las vertientes del norte de la Cordillera Central presentan evidencias de numerosos movimientos en masa y sus respectivos depósitos. **Botero** (1963) cartografía en el Valle de Aburrá la enorme extensión de lo que él llamó “taludes”, que corresponde a depósitos de vertiente producidos por deslizamientos y flujos de muchas procedencias litológicas y procesos. Sin embargo no les atribuyó un significado especial y no discutió su génesis. **Shlemon** (1979) los analizó, así como el origen del Valle de Aburrá y **Page & James** (1981b) los consideraron los grandes movimientos de vertientes como procesos de gran importancia en la generación de los paisajes de la cordillera Central. En este capítulo se tratará de explorar el tema de la estabilidad de las vertientes, sin pretender aportar respuestas definitivas a ese tema complejo.

Se examinarán varios ejemplos, empezando por el Valle de Aburrá, que por un alto grado de urbanización ha recibido mucha atención; el caso de San Carlos, (Antioquia) localizado en el “frente de erosión del río Magdalena” (**Botero**, 1963) también merece ser analizado por la ocurrencia de un fenómeno muy significativo de 1990, que fué bien documentado. Finalmente se presentarán algunos casos complementarios de otras áreas, que permitirán completar ese panorama sobre la dinámica de las vertientes del norte de la Cordillera Central.

4. Las Vertientes de la Región Norte de la Cordillera Central

A diferencia de los altiplanos, donde los fenómenos erosivos son escasos, en las vertientes ocurren a menudo fenómenos como movimientos de vertientes y crecientes torrenciales que dejan a veces evidencias cuya preservación es aleatoria. El trabajo de Botero no discute a fondo los procesos de vertiente. En cambio **Shlemon** (1979) analiza el origen de los depósitos del valle de Aburrá y **Page & James** (1981b) consideran los grandes movimientos de masa como procesos de gran importancia en la Cordillera Central. En este capítulo se explora el tema de la estabilidad de las vertientes y por medio de varios ejemplos (Valle de Aburrá, frente de erosión del Magdalena, entre otros) se analiza el tema.

4.1. Valle de Aburrá

Botero (1963) cartografió el centro del departamento de Antioquia y a partir de ese trabajo se fueron desarrollando mapas posteriores que en general conservaron sus unidades litológicas (INGEOMINAS, 1999). Botero identificó y mapeó la enorme extensión de los depósitos de vertiente (taludes) pero no les dedicó análisis alguno. En cambio **Shlemon** (1979) discutió ampliamente su posible origen así como el del Valle de Aburrá.

Con base en su similitud con el valle de Caracas, **Hermelín** (1977a), planteó la posibilidad de un origen tectónico, idea ampliada **Hermelín** (1982) y discutida más detalladamente (**Hermelín et al.**, 1984a, 1984b, **Salinas & Hermelín**, 1988).

La primera determinación de edad del Valle de Aburrá y de sus depósitos se hizo por CRPM sobre material arcilloso intercalado en una terraza basculada de un antiguo afluyente occidental del Río Medellín (zona de la Tablaza, La Estrella) y arrojó un comportamiento magnético invertido (**W. Page**, comunicación personal, 1980): por primera vez se sabía que existían en el Valle de Aburrá depósitos que no habían sido emplazados en los últimos milenios. De ese depósito y de otros producidos por flujos de lodo con cenizas volcánicas de caída se obtuvieron por trazas de fisión de circones valores de unos 2 millones de años. (**Toro et al.**, 1996) Posteriormente se encontraron en otros depósitos sepultados del suroriente del Valle de Aburrá cenizas volcánicas que fueron datadas por el mismo método con edades mínimas de 2.6 Ma BP. (**Rendón et al.**, 2006).

Otras muestras obtenidas en depósitos aluviales localizados en la parte superior de la vertiente suroriente del Valle de Aburrá (Envigado-La Fé) dieron edades de 4.0 Ma BP, lo que indica que en esa fecha seguramente no se

había iniciado la apertura del valle en esa zona. El valle por lo tanto parece haber iniciado su apertura entre 4.0 y 3.0 Ma BP. (Fig. 10).

Es sorprendente que depósitos de vertientes tan antiguos y tan expuestas a los procesos erosivo sigan presente allí. Se iniciará pronto un estudio sistemático de dichos depósitos por medio de CRPM.

Por otra parte los hallazgos de **Rendón** (2003) parecen confirmar un origen tectónico, no sólo por el control ya definido de fallas (**Toro et al.**, 2003) sino también porque ensayos geoelectrónicos de precisión indican que en la zona del Aeropuerto Olaya Herrera (Suroccidente del Valle de Aburrá) existen depósitos de sedimentos aluviales de más de 270 m de espesor.

Pese a la estabilidad de muchos depósitos antiguos, siguen ocurriendo deslizamientos catastróficos como el de Villa Tina en 1985 (Fig. 11) (**Bustamante**, 1988; **García**, 2004) y los de La Estrella en 2000 (**Cadauid et al.**, 2004; **Cadauid & Hermelín**, 2005), así como avenidas torrenciales como la de la Quebrada La García en Bello en 2005 (L. J. Mejía, geóloga, comunicación verbal, 2006) que causó 23 víctimas.

Se han realizado además estudios acerca de la cuenca del Río Medellín (Alto de San Miguel) (**de Greiff et al.**, 2004) así como de la variación geoquímica de sus aguas superficiales (**Osorio et al.**, 2003) y de las propiedades hidrológicas de los suelos derivados del Plutón de Altavista (**Patiño et al.**, 2004) A pesar de los estudios anteriores y de numerosos otros, tanto geotécnicos como hidrológicos y geohidrológicos, el grado de conocimiento que se tiene acerca de los procesos actuales que actúan sobre las vertientes del Valle de Aburrá aún es muy insuficiente, si se tiene en cuenta la gran densidad de población que lo habita. Se está, en este momento, completando una red hidrometeorológica detallada y de estaciones geomorfológicas que permiten entender mejor el comportamiento de esas laderas.

4.2. El frente erosivo del Magdalena

Con este término describe **Botero** (1963) las fuertes pendientes y cañones entre 2 100 y 1 000 m que separan la superficie de erosión de Rionegro (II según **Page & James**, 1981a) de las tierras más bajas localizadas hacia el este.

Estudios geomorfológicos realizados en esa zonas para el ISA (**Hermelín et al.**, 1983) en la zona de los embalses no revelaron evidencias de fenómenos como el aguacero catastrófico que ocurrió el 1° de septiembre de 1990: en



Figura 8. Línea de piedras, Oriente Antioqueño.

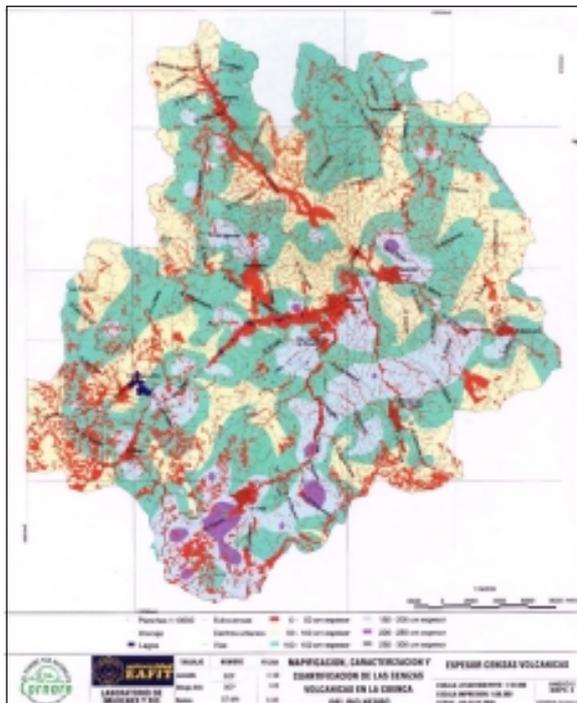


Figura 9. Distribución de las cenizas volcánicas en la zona de Rionegro.



Figura 10. Dataciones de cenizas volcánicas asociadas con depósitos de vertientes en el valle de Aburrá.



Figura 11. El deslizamiento de Villa Tina.



Figura 12. Deslizamientos en San Carlos, 1990.



Figura 13. Deslizamientos de Murindó.

esa fecha cayeron en 2 horas 208 mm de agua y en el resto de la noche 23 mm más sobre una superficie de unos 11 km². (**Hermelín et al.**, 1992; **Hermelín et al.**, 1992a, 1992b) **Velásquez & Hermelín**, 2005; **Velásquez et al.**, 1991) como consecuencia de ese evento se produjeron más de 1000 movimientos de masa (Fig. 12) en el área directamente afectada tanto en las vertientes como por causa directa de la socavación de los cauces por los flujos torrenciales; se generaron flujos de lodo torrenciales que causaron grandes daños en toda la zona y arrastraron bloques hasta de 8 m de diámetro. El material total (bloques y arena) del materia removido fue calculado en por lo menos 1.15×10^6 m³. La tasa de denudación, calculada en forma preliminar en 70 mm a⁻¹ para el área directamente afectada, fue para el evento casi 10 veces la calculada anteriormente. Con base en correlaciones de cenizas volcánicas, se estimó que la recurrencia de este tipo de eventos puede ser de unos 3 en los últimos 10 a 20 000 años. Se puede concluir (**Velásquez et al.**, 2002) que la importancia de este tipo de eventos sobre la modelación de los paisajes de las vertientes es mucho mayor que lo que previamente se había pensado.

4.3. Otros casos

En otras regiones del país se pueden citar otros casos recientes de eventos catastróficos (algunos autores usan el término “convulsivo”, tal vez más apropiado) (**Clifton**, 1988):

- en Marsella (cordillera Central, Risaralda) (**Curvelo et al.**, 1992) ocurrieron en 1991 fenómenos de menor magnitud de los de San Carlos igualmente producidos por un fuerte aguacero cuya intensidad no pudo ser determinada
- en Murindó (cordillera Occidental, vertiente occidental) dos sismos ocurridos en 1992 provocaron el desencadenamiento de decenas de miles de movimientos de vertiente (Fig.13) que a su vez produjeron “palisadas”, represas de troncos de madera formados en la zona más plana de las cuencas (**Velásquez**, 2005; **Martínez et al.**, 1992).
- en Tapartó (cordillera Central, vertiente oriental, Departamento de Antioquia) otro aguacero causó grandes estragos en 1993 (**Piedrahita & Hermelín**, 1996; 2005). En este caso existen antecedentes de por lo menos un evento igual ocurrido a principios del siglo XX.
- en la cuenca del Río Paez (cordillera Central, Departamento del Cauca) (**Wilches-Chaux**, 2005) un sis-

mo produjo en 1994 una serie de eventos catastróficos: deslizamientos y creciente torrencial que arruinaron la región.

La importancia de eventos como el sismo y los deslizamientos ocurridos en la frontera panameña en la década de 1970 fue señalada por **Garwood et al.**, (1979) desde el punto de vista biológico, sugiriendo estos autores la posible desaparición de especies endémicas.

La existencia de estos fenómenos convulsivos y su influencia en la evolución del relieve no pueden ser subestimadas. Significan grandes liberaciones de energía que modifican sustancialmente y en forma brusca el paisaje de las áreas donde ocurren. Sin embargo el conocimiento que se tiene acerca de ellos sigue siendo limitado por causas que incluyen:

- su ocurrencia poco frecuente
- la ausencia de información histórica y prehistórica
- el crecimiento rápido de la vegetación después de su ocurrencia, lo que complica o impide totalmente percibir su rastro.
- la ocurrencia de muchos de estos eventos en zonas relativamente poco pobladas, que antes de existir los medios de observación satelitales podían pasar completamente desapercibidos.

Al sur de la zona descrita se debe contar con la influencia directa de los volcanes, que además de causar tragedias como las de Armero y Chinchiná causan por medio de lahares grandes cambios tanto erosionales como deposicionales (p.e. **Thouret et al.**, 1989).

Si bien es cierto que aún no se tiene informaciones suficientes para cuantificar la importancia relativa de estos fenómenos en cuanto a la producción de sedimentos y a la evolución del relieve, se trata sin lugar a dudas de un tipo de erosión cuya distribución, intensidad y frecuencia debe merecer más atención por parte de los geomorfólogos que estudian el trópico.

5. Influencia humana en la evolución del relieve

En términos globales, se acepta ahora que el volumen de material movilizado por el hombre en la superficie del planeta supera el que mueven los procesos naturales, incluyendo la tectónica de placas (**Hooke**, 2000)

En un país como Colombia, la influencia humana ha ido creciendo desde la época prehispánica (**Cavelier de Ferrero et al.**, 1990) y hoy en día se manifiesta práctica-

mente en todo el territorio nacional en función de la densidad de su población (**Hermelín**, 1992; **Flórez**, 2003) **Poveda & Mesa** (1995) discuten por ejemplo la influencia de la deforestación sobre la dinámica hidrológica; otros autores analizan los efectos de la urbanización (**Adarve & Hermelín**, en preparación; **Cadavid et al.**, 2004; **Cadavid & Hermelín**, 2005), de la ganadería (**Aristizábal & Hermelín**, en preparación) de la urbanización campestre (**Hermelín**, 1989, 1992) y de la minería (**Hermelín & Velásquez**, 1984).

Por otra parte trabajos recientes de **Restrepo** (2005) y **Restrepo et al.**, (2006) muestran, para la cuenca del Río Magdalena, la gran importancia de la influencia humana sobre la producción de sedimentos en sus afluentes. Estudios más detallados permitirán en un futuro cercano identificar más precisamente dicha influencia, tratando de contrastar la producción de sedimentos en los altiplanos con respecto a las áreas de pendientes mayores.

6. Conclusiones

El itinerario seguido en este trabajo parece llegar a una conclusión que siempre ha sido considerada como bastante obvia: los sistemas erosivos de las pendientes montañosas son más afectadas por los procesos erosivos que los de las áreas más planas. Sin embargo surgen consideraciones que son del caso discutir:

- no se trata de un aumento paulatino de la eficiencia de los procesos erosivos sino de verdaderos umbrales, que posiblemente se puedan cuantificar cuando estén disponibles métodos modernos de cartografía digital suficientemente detallados: ciertos procesos de vertientes, por ejemplo, causados por sismos o por aguaceros fuertes sólo aparecen a partir de determinadas pendientes.
- aunque el uso de la tierra por el hombre revista importancia en la aparición de determinados movimientos en masa, a partir de ciertos umbrales (p.e. ondas sísmicas o pluviosidad), esta diferencia desaparece, tal como se pudo observar en San Carlos o en Murindó.
- en la comprensión de la dinámica de las vertientes de las montañas tropicales deben participar todas las Ciencias de la Tierra y deben conjugarse tanto las observaciones en tiempo real como la interpretación de las evidencias de eventos pasados. Esta segunda tarea es naturalmente mucho más fácil de realizar en las zonas de altiplanos que en las vertientes, donde los depósitos suelen ser rápidamente erosionados. Sin

embargo cualquier generalización puede significar errores, como se analizó en el caso del valle de Aburrá.

- las tasas de denudación de los altiplanos están entre las más bajas del mundo. Su preservación misma durante por lo menos 5 a 6 millones de años, parece algo excepcional ya que las primeras decenas de metros del material que lo forma consiste en saprolito, altamente susceptible a cualquier tipo de erosión cuando está expuesto en superficie.
- por otra parte las observaciones puntuales realizadas en las vertientes apuntan en la misma dirección que los resultados de **Restrepo** (2005): las tasas de transporte de sedimentos en los ríos colombianos están entre las más altas del mundo, rompiendo así con la vieja tradición de afirmar que en el trópico húmedo la erosión es inhibida por la cubierta de bosques. Sin embargo la conexión entre los dos procesos (producción de material suelto en las vertientes y su transporte medido en zonas más planas de las corrientes fluviales) no parece estar totalmente clarificada.

Se espera que este recorrido, que seguramente planteó más dudas que soluciones, contribuya a motivar más estudios acerca de la dinámica de las montañas del trópico.

Bibliografía

- Acosta, J.** 1846. Relation de l' eruption boueuse sortie des volcan de Ruiz et de la catastrophe de Lagunilla dans la République de la Nouvelle Grenade Comptes Rendus Académie des Sciences de Paris, Tome 22, p. 709-710.
- . 1851. Sur les montagnes de Ruiz et de Tolima et les éruptions boueuses de la Madeleine. Lettres a Elie de Beaumont, Bull. Soc. Géologique de France, 2^e éme serie, tome 8, p. 489-497.
- Adarve, D. & Hermelín, M.**, en preparación. Influencia de la urbanización sobre la estabilidad de las vertientes: el caso de San Antonio de Prado.
- Alvarez, L.W., Alvarez, W., Asaro, F. & Michel H.V.** 1980. Extraterrestrial cause for the Cretaceous-Tertiary extinction: experimental results and theoretical interpretation Science v. 208, p. 1095-1108.
- Aristizábal, A.F. & Hermelín, M.**, en preparación. Aparición de caminos de ganado en vertientes con pastos en los alrededores de Medellín, Cordillera Central, Colombia. (para ser sometido a la Revista Brasileira de Geomorfología).
- Bartels, G.** 1984. Los pisos morfoclimáticos de la Sierra Nevada de Santa Marta (Colombia) in Studies on Tropical Andean Ecosystems, Vol. 2: La Sierra Nevada de Santa Marta (Colombia) Transecto Buriticá La Cumbre, Th. van der Hammen & P.M. Ruiz, Editores, p. 99-129.

- Beniston, M.** 2000. Environmental change in mountains and uplands London: Arnold, 172 p.
- Bik, M.J. J.** 1967. Structural geomorphology and morphoclimatic zonation in the Central highlands, Australia New Guinea in Landform Studies from Australia and New Guinea, J.N. Jennings & J.A. Mabbutt, Editors, Australia National University Press, Canberra, p. 26-63.
- Bloom, A.L.** 1998. Geomorphology, a Systematic Analysis of Cenozoic Land forms. Prentice-Hall, Saddle River, USA, 482 p.
- Botero, G.** 1963. Contribución al conocimiento de la Geología de la zona central de Antioquia. Anales Facultad de Minas No. 57, 101 p., Medellín.
- Bretz, J.H.** 1969. The Lake Missoula floods and the Channeled Scablands J. Geology v. 77, p. 503-543.
- Brunnschweiler, D.** 1981. "Glacial and periglacial forms systems of the Colombian Quaternary". Rev. CIAF No. 6 (1-3): 53-76.
- Buedel, J.** 1982. Climatic Geomorphology (Translated by L. Fischer & D. Busche) Princeton University Press, Princeton.
- Bustamante, M.** 1988. Los desastres en Medellín, naturales? Segunda Conferencia Riesgos Geológicos Valle de Aburrá, 39 p.
- Cadavid, M.F., de Greiff, P. & Hermelín, M.** 2004. Lessons learned from the May 2000 catastrophic events in the town of la Estrella, Antioquia, Colombia. Journal of Human Security and Development, v. 1 p. 75-90.
- _____ & **Hermelín, M.** 2005. La avenida torrencial de La Estrella, Antioquia de 2000. In Desastres de Origen Natural en Colombia 1979-2204. Fondo Editorial Universidad EAFIT-Universidad del Valle OSSO, p.187-198.
- Caldas, F. J. de.** 1951. Memoria sobre la nivelación de las plantas que se cultivan en la vecindad del Ecuador. Revista Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales v. 8 No. 30 p. 168-172.
- Cárdenas, C.** 2005. Erupción de 1985 del Volcán Nevado de Ruiz; el despertar del león dormido. Desastres de Origen Natural en Colombia 1979-2204. Fondo Editorial Universidad EAFIT-Universidad del Valle OSSO, p. 39-53.
- Carroll, D.** 1970. Rock Weathering. New York, Plenum Press, 203 p.
- Cavelier de Ferrero, I., Mora, S. & Herrera de Turbay, L. F.** 1990. Estabilidad y dinámica agrícola: las transformaciones de una sociedad agrícola, in: Ingenierías prehispánicas, Fondo FEN Colombia. Instituto Colombiano de Antropología. Colcultura, p. 73-110.
- Chorley, R.J., Schumm, S.A., Sudgen, D.E.** 1984. Geomorphology. Methuen, London, 607 p.
- Clapperton, C.** 1993. Quaternary Geology and Geomorphology of South America. Elsevier Science Publishers, 779 p.
- Clifton, H.** 1988. Sedimentologic relevance of convulsive geologic events, in H. Clifton, Editor: Sedimentologic consequences of convulsive geologic events, Special Paper, Geological Society of America No. 229, p. 1-5.
- Curvelo, C., Osorio, V. L. & Hermelín, M.** 1992. Estudio de los fenómenos ocurridos en la Cuenca del Río San Francisco a raíz del aguacero del 20 de Marzo de 1991. Memorias II Conferencia Latinoamericana sobre Riesgo Geológico Urbano y II Conferencia Colombiana sobre Geología Ambiental, v.2., p. 147-176.
- Davis, W.M.** 1901. The Geographical Cycle. Geographical essays. p. 249-278. Dover publications, INC.
- de Greiff, P., Hermelín, M. & Rendón D. A.** 2004. Procesos erosivos en una microcuenca andina: el valle alto del Río Medellín, Cordillera Central, Antioquia. Revista Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales v. 28 No 109, p. 487-496.
- _____ & **Toro, G.** 2002. Erosion rates obtained by fission track dating in soils derived from volcanic ashes in the Central Cordillera, Colombia. International Symposium on Land Use Change and Geomorphic, Soil and Water Processes in Tropic Mountain Areas, Quito, Cuenca, Ecuador. Book of Abstracts, p. 29.
- Derbyshire, E.** Editor, 1973, Climatic Geomorphology, MacMillan, London, 296 p.
- Durango, J. & Hermelín, M.** 1975. Quaternary Alluvial Deposits in the Rio Negro Area (Antioquia, Colombia). Abstracts, International Symposium on Quaternary; Boletín Paranaense de Geociencias, No. 33, p. 32.
- Echavarría Olózaga, H.** 1962. El Sentido Común en la Economía Colombiana. Norma, Cali, 371p.
- Erhart, 1955.** La Génèse des sols en tant que phénomène géologique. Masson, Paris, 90p.
- Espinal, L.S.** 1977. Zonas de vida o formaciones vegetales de Colombia. Memoria explicativa sobre el mapa ecológico de Colombia. IGAC, Bogotá.
- _____, **Tosi, J., Montenegro, E., Toro, G. & Díaz Granados, G.** 1977. Mapa Ecológico de Colombia. IGAC, Bogotá, escala 1:1.500.000
- Feininger, T.** 1971. Chemical weathering and glacial erosion of crystalline rocks and the origin of till USGS Professional Paper 750C, p. C65-C81.
- Fernández, E. & Santa, N.** 1964. Estudio general de los suelos del Oriente Antioqueño. IGAC, Bogotá., L6-4, 94p.
- Flórez, A.** 1986. Geomorfología del Área Manizales-Chinchina, Cordillera Central, Colombia. Tesis, Universidad Amsterdam, 158p.
- _____ 2003. Colombia: evolución de sus relieves y modelados. Universidad Nacional, Bogotá, 238 p.
- _____ 2005. Aspectos geomorfológicos del área del Transecto Tatamá (Cordillera Occidental de Colombia) in La Cordillera Occidental de Colombia, Transecto Tatamá, Studies on Andean Ecosystems, v. 6, p. 117-153.
- Flórez, A., s. f.** Escalonamiento geomorfológico de los Andes Centrales de Colombia in Análisis Geográficos, IGAC, No 11, p. 85-104.
- Folster, H. & von Christen, H.** 1977. The influence of Quaternary upplifts on the altitude zonation of mountain soils on diabase and volcanic ash in humid parts of the Colombian Andes. Catena v.3 p. 233-263.

- García, C.** 2004. El deslizamiento de Villatina. Desastres de Origen Natural en Colombia 1979-2204, Fondo Editorial Universidad EAFIT-Universidad del Valle OSSO, p. 55-64.
- _____ & **Hermelín, M.** 2004. Cálculo preliminar de la tasa de meteorización del Batolito Antioqueño, Cordillera Central, Colombia. *Revista Brasileira de Geomorfología*, v. 5 p. 43-53.
- Garwood, N.C., Janos, D.R. & Brokaw, N.** 1979. Earthquake-caused landslides: a major disturbance to tropical forests. *Science*, v. 205, p. 997-999.
- Geale, B. & Hermelín, M.** 1988. Influencia de la meteorización química en la composición de las aguas superficiales del Batolito. *Memorias III Simposio Colombiano de Hidrogeología*, Bogotá . p. 129-150.
- Grosse, E.** 1926. *El Terciario Carbonífero de Antioquia*. Resmer, Berlin, 361p.
- Gutiérrez, M.** 2001. *Geomorfología climática*. Omega, Barcelona, 642 p.
- Hermelín, M.** 1973. Depósitos y actividad volcánica cuaternarios en el norte de la Cordillera Central: Revisión de Literatura. *Suelos Ecuatoriales* , v. 5. No. 2, p. 43-60.
- _____ 1975a. Primera excursión del V Congreso Latinoamericano de la Ciencia del Suelo, Medellín. Guía: Geomorfología y Pedogénesis del Oriente Antioqueño. Mimeografiado, 27 p.
- _____ 1975b. Segunda excursión del V Congreso Latinoamericano de la Ciencia del Suelo, Medellín. Guía: Geomorfología y Pedogénesis del Valle de Aburrá y Área Norte del Macizo Antioqueño: mimerografiado, 3 p.
- _____ 1976. Bases para un estudio geomorfológico del Departamento de Antioquia, *Boletín de Ciencias de la Tierra*. No. 1 p. 49-76.
- _____ 1977a. Quaternary Volcanic ashes in the Northern Central Cordillera, Colombia. Abstract. Xth INQUA Congress. Birmingham, Great Britain, p. 205.
- _____ 1977b. Estudio geomorfológico del Valle de Aburrá y del Oriente Cercano (Departamento de Antioquia). Informe al Plan Metropolitano, 42 p.
- _____ 1978a. Guía para la excursión: "Geomorfología del Valle de Aburrá y Oriente Antioqueño" del II Congreso Colombiano de Geología; manuscrito, 20 p.
- _____ 1978b. Geomorfología del Valle de Aburrá , Antioquia. Resumen. Segundo Congreso Colombiano de Geología. Bogotá , p. 48.
- _____ 1979. Classification of silicates based on their susceptibility to weathering in the humid tropics. Abstracts, International Seminar on Lateritisation Processes. Trivandrum, India, p.1.
- _____ 1981. Clasificación de algunos minerales con base en su resistencia a la meteorización en condiciones tropicales húmedas. 117p., U. Nacional, Manuscrito.
- _____ 1982. El origen del Valle de Aburrá : evolución de las ideas; *Boletín de Ciencias de la Tierra*, U. N., Medellín. No 7-8 p. 47-65.
- _____ 1983. Aspectos genéticos de algunas propiedades de los regolitos, *Memorias de la V Conferencia Regional de Geotecnia*, Armenia.
- _____ 1984a. El estudio de las cenizas volcánicas cuaternarias en el Departamento de Antioquia. *Revista Dyna* (Facultad de Minas, Medellín). No. 103. p 53-58.
- _____ 1984b. Utilización de cenizas volcánicas cuaternarias en la planeación y el manejo de cuencas. *Memorias Primer Seminario Latinoamericano sobre Presas y Embalses*. Bogotá. Tomo II. p. 16-23.
- _____ 1988. Aspectos Geológicos y Geomorfológicos del Área de Jurisdicción de CORNARE. Informe CORNARE.
- _____ 1989. Estudio de la llanura aluvial de la Quebrada La Mosca, Guarne, Informe a CORNARE.
- _____ 1992. Los suelos del Oriente Antioqueño como recurso no renovable, *Bull Institut Français Etudes Andines*, Lima. v. 21 (1) (Perú) p. 25-36.
- _____ 1993. Stone lines in the Antioquia highlands. *Quaternary of South America and Antarctic Peninsula* (Balkema, Amsterdam). v. 8 p. 137-156.
- _____ 1999. La Ley de Ordenamiento Territorial: un desafío para las Ciencias de la Tierra en Colombia. In *Situación de las Ciencias de la Tierra en Colombia*, Sociedad Geográfica de Colombia, Academia de Ciencias Geográficas, Bogotá, p. 135-146.
- Hermelín, M.**, en preparación. La huella del hombre.
- Hermelín, M, Alvarez, C. H & Trujillo, R.** 1984a. Aspectos geomorfológicos y estructurales del Valle Norte de Aburrá. *Memorias I Seminario Riesgo Geológico en el Valle de Aburrá*.
- _____ **Arroyave, M. & Jaramillo, J. M.**, en curso. Estudio con difracción y respetografía de rayos X de la meteorización del Batolito Antioqueño.
- _____ & **Durango, J.** 1976. Quaternary Alluvial Deposits in the Rio Negro Area (Antioquia, Colombia). Abstracts, International Symposium on Quaternary; *Boletín Paranaense de Geociencias*, No. 33, p. 32.
- _____ **Hoyos, F, Gutiérrez, A, Zuluaga, J &.** 1983. Physico-mechanical characteristics of saprolite and mudflow deposits derived from igneous and metamorphic rocks in the Central Cordillera, Colombia; genetic aspects, *Bulletin of the International Association of Engineering Geology*. Int. Assoc.Engin. Geology Bull. No 28. p.129-132.
- _____ & **Marín, W.** 1983. Estudio Geomorfológico de las cuencas de los Ríos Nare y San Carlos, Informe a ISA (Contrato UN/ISA).
- _____ **Toro, G. E, Velásquez, A, Alvarez, C.H, Trujillo, R, Cuadros, M. Ospina, C & Bustamante, M.** 1984. El origen del Valle de Aburrá (20 páginas). *Memorias I Seminario Riesgo Geológico en el Valle de Aburrá*.
- _____ **Mejía, O. & Velásquez, E.** 1992a. Erosional and depositional features produced by a convulsive event, San Carlos, Colombia, Sept. 21st, 1990. *Bull. Intern Assoc. Engineering Geology*, v. 45, p. 89-95.

- _____ **Toro, G. E & Velásquez, A.** 1984b. Génesis de los depósitos de vertiente en el sur del Valle de Aburrá. Memorias I Seminario Riesgo Geológico en el Valle de Aburrá.
- _____ **Velásquez, E. & Mejía, O.** 1992. Consideraciones sobre las Cenizas Volcánicas de la Región de San Carlos, Antioquia, Colombia. Memorias III Conferencia Latinoamericana sobre Riesgo Geológico Urbano. II Conferencia Colombiana de Geología Ambiental. v. I. p. 449-460.
- _____ **& Velásquez, A.** 1983. Correlaciones estratigráficas de cenizas volcánicas del Departamento de Antioquia, manuscrito.
- _____ 1984. Evolución reciente de la Quebrada Iguaná: Aspectos Humanos. Memorias I Seminario Riesgo Geológico en el Valle de Aburrá.
- Hermelín, M., Velásquez, E. & Mejía, O.** 1991. Algunas reflexiones acerca de la catástrofe del 21 de Septiembre de 1990 en San Carlos, Antioquia, AGID Report No 16 Environmental Geology and Applied Geomorphology in Colombia p. 115-128.
- Hettner, A.** 1892. Die Kordillere von Bogotá Supplement Hefte 104, Pertermans Mitteilungen Traducido por E. Guhl, Banco de la República, Bogotá, 351p. (1966).
- Hoyos, F, Hermelín, M, & Toro, G. E.** 1985. Régimen de aguas subterráneas en suelos residuales derivados de rocas ígneas y metamórficas en la Cordillera Central de Colombia, II Seminario Colombiano de Hidrogeología, p. 107-125.
- Hooke, R.L.** 2000. On the history of humans as geomorphic agents Geology v. 28 p. 843-846.
- Humboldt, F.A., & Bonpland, A.** 1807. Ideas para una geografía de las plantas Bogotá: Jardín Botánico Celestino Mutis, Litografía Arco, 178p (1985).
- Humboldt, F.A von** 1950. Geografía de las plantas, cuadro físico de las regiones ecuatoriales. Revista Academia Colombiana de Ciencias Exactas Físicas y Naturales. v 8 No. 29 p. 65-103.
- Hutton, J.** 1795. Theory of the Earth, with proofs and Illustrations, Edinburg, Royal Society.
- IGAC.** 2002. Atlas de Colombia. Imprenta Nacional, Bogotá, 342 p.
- Imeson, A.C., & Vis, M.** 1983. Los procesos de erosión bajo bosque en suelos cenizas volcánicas en La Cordillera Central Colombiana, Transecto Parque Los Nevados (Introducción y datos iniciales) Th. van der Hammen, A. Pérez P & P. Pinto P., Editores VI, studies on tropical Andean Ecosystems, p. 88-112.
- Ingeominas,** 1999. Mapa geológico del Departamento de Antioquia. 1: 1. 400.000, Bogotá, Ingeominas.
- Jaramillo, A.** 2006. Clima andino y café en Colombia. Cenicafé, Federación Nacional de Cafeteros de Colombia, Chinchina, 192 p.
- Khobzi, J.** 1981. Aspectos de geomorfología periglacial, glaciaria y fluvio-glaciaria en las montañas húmedas norandinas. Geología Norandina v.3. p. 37-43.
- _____ **& Usselman, P.** 1974. Problemas de Geomorfología en Colombia Bull. Inst. Fr; Etudes Andines (Lima), 1.3, No 4, p. 59-86.
- Linton, D.L.** 1995. The problems of tors. Geographical Journal, V. 121, p. 65-85.
- López, G. I, Hermelín, M.,García, C., Toro, G.E., Rink, W.J.,** en prensa. Evaluation of the evolution of a high plateau in the northern Central Cordillera of the Andes, Colombia, South America: first optical ages and preliminary results. Submitted to a Geomorphology.
- Loughnan, F.C.** 1976. Chemical weathering of silicate minerals. Catena v3. p. 233-263.
- Lyell,** 1830. Principles of Geology, Penguin Book, London, 471 p.
- Maignuet-Michel, M.** 1963. Quelques aperçus sur les manteaux de décomposition des roches dans les Andes Vénézuéliennes de Merida Mémoires et Documents, v. 4, CRDCG, CNRS, Paris, 100p., planchas.
- Martínez, J. M., Parra, E., Paris, G., Forero, C., Bustamante, M., Cardona, O.D., Jaramillo, J. P.** 1992. Los sismos del Atrato Medio 17-18 de Octubre de 1992, noroccidente de Colombia. Revista Ingeominas, No. 4 p. 35-76.
- Millot, G. & Bonifas, M.** 1955. Transformations isovolumétriques dans les phénomènes de lateritisation et de bauxitisation Bull. Ser. Carte Géologique v 8. p. 1-20.
- Mesa, O, Poveda, G., & Carvajal, L.F.** 1997. Introducción al clima de Colombia. Universidad Nacional de Colombia, Medellín, 390 p.
- Ollier, C.D.** 1969. Weathering Oliver & Boyd Ltd, Edinburgh: Oliver & Boyd Ltd, 304 p.
- Osorio, J.C., López, R., J. E & Hermelín, M.** 2003. Balance Geoquímico para la cuenca alta del Río Medellín, Cordillera Central (Antioquia, Colombia). Revista de la Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, v. 27, No 102, p 71-84.
- Page, W.D. & James, M.E.** 1981a. "The Antiquity of the erosion surfaces and the Late Cenozoic deposits near Medellín, Colombia: implications to tectonics and erosion rates" Rev. CIAF, 6 (1-3): 421-454.
- _____ 1981b. Landslides and mudflows, major contributors to the landscape in Northwest Colombia. Revista CIAF v.6, p. 455-468.
- Patiño, J. E., Montoya, J. J., Botero, V. & Hermelín, M.** 2004. Zonificación geomorfológica de una microcuenca del occidente del valle de Aburrá. Boletín de Ciencias de la Tierra, Medellín, No. 16, p. 23-36.
- Piedrahita, I, & Hermelín, M.** 1996. Amenazas geológicas por eventos torrenciales en la vertiente occidental del Río San Juan, Antioquia. VII Congreso Colombiano de Geología. IV Conferencia Colombiana de Geología Ambiental. Conferencia No 13 (Abstracts).
- _____ 2005. La avenida torrencial del Río Tapartó, (Antioquia) de 1993. Desastres de Origen Natural en Colombia 1979-2204, Fondo Editorial Universidad EAFIT-Universidad del Valle OSSO, p. 109-120.
- Playfair, J.** 1802. Illustrations of the Huttonian Theory of the Earth Dover, New York, 528 p.
- Posada, B. O., Toro, G.E. & Hermelín, M.** 2003. Quaternary volcanic ashes indicators for land degradations in the Northern Andes,

- Colombia (Abstract) Regional Geomorphology Conference: Geomorphic Hazards: toward the prevention of disasters; México City, México. Abstracts Volume, p. 67.
- Poveda, G. & Mesa, O.** 1995. Efectos hidrológicos de la deforestación. *Energética* No. 16. p. 91-102.
- Reiche, P.** 1950. A survey of weathering processes and products. The U of New Mexico Press, Albuquerque, 95 p.
- Rendón, D.A.** 2003. Tectonic and sedimentary evolution of the upper Aburra Valley, Northern Colombian Andes, MSc Thesis, Shimane University, Japan, 123 p.
- _____ **Hermelín, M. & Toro, G.E.** en preparación. Interpretation of saprolite thicknesses determined by geoelectrical methods on the Batolito Antioqueño, Central Cordillera, Colombia (para ser sometido a la Revista Brasileira de Geomorfología).
- _____ **Toro, G.E. & Hermelín, M.** 2006. Chronostratigraphic model for the slope deposits in the upper Aburrá Valley. Abstract, I.A.G, Regional Conference on Geomorphology, IV Brazilian Symposium on Geomorphology, Goiania, Brasil: Tropical and subtropical Geomorphology.
- Restrepo, J.D.** Editor, 2005. Los sedimentos del río Magdalena: reflejo de la crisis ambiental Fondo Editorial U. EAFIT, 267 p.
- _____ **Kjerfve, B., Hermelín, M. & Restrepo, J.C.** 2006. Factors controlling sediment yield in a major South American drainage basin: the Magdalena River, Colombia Journal of Hydrology, v. 316, p. 213-232.
- Ruxton, B.P.** 1967. Slopewash under nature primary rainforest. in Landform Studies from Australia and New Guinea, J.N Jennings & J.A. Mabbutt, Editors, Australia National University Press, Canberra, p. 85-94.
- Salinas, I. & Hermelín, M.** 1988. Cartografía e interpretación de formaciones superficiales en el Valle de Aburrá. Memorias 2ª Conferencia de Riesgos Geológicos en el Valle de Aburrá, 14 p.
- Schubert, C.** 1979. La zona del páramo: morfología glacial y periglacial de los Andes de Venezuela in El Medio Ambiente Páramo, Actas del seminario de Mérida, Venezuela, CEA-IVIC, UNESCO, CIFCA. p. 11.23.
- Shlemon, R.J.** 1979. Zonas de deslizamientos en los alrededores de Medellín Antioquia (Colombia). Publicaciones Geológicas Especiales INGEOMINAS, No. 5, 45 p.
- Sierra, G. M., Toro, G. E., López, G. I., García, C & Hermelín, M.** en preparación. Comparación de métodos de datación para las formaciones superficiales del Oriente Antioqueño. Proyecto financiado por U. EAFIT. COLCIENCIAS.
- Soeters, R.** 1981. "Algunos datos sobre la edad de dos superficies de erosión en la cordillera Central de Colombia". Rev. CIAF, v. 6 (1-3): p. 525-528.
- Thouret, J.C.** 1983. Aspectos y problemas geomorfológicos In la Cordillera Central Colombiana, Transecto Parque Los Nevados, Studies on Tropical Andean Ecosystems, v. 1, p. 56-87.
- _____ **& Fabre, D.** 1989. Procesos morfodinámicos sobre las vertientes de la Cordillera Central in La Cordillera Central Colombiana Transecto Parque Los Nevados, Study of Tropical Andean Ecosystems, v. 3, Th. van der Hammen, H de Vries, S, Diaz & V. J. Alvarez, Editores, p. 279-291.
- _____ **Gourgaud, A., Vatin-Perignon, N. & Calvache, M.L.** 1989. The eruption of the Nevado del Ruiz on the 13th November 1985. in La Cordillera Central Colombiana, Transecto Parque los Nevados (segunda parte) v. 3, Study of Tropical Andean ecosystems, J, Cramer, Berlin.- Stuttgart, p. 217-278.
- _____ **& Pérez, A.** 1981. Geodinámica actual y reciente de las vertientes de la Cordillera Central. Revista CIAF v. 6, p. 587-608.
- Toro, G.E.** 1999. Téphrochronologie de la Cordillère Centrale, PhD Thesis, Université Joseph Fourier, Grenoble, 302 p.
- _____ **& Hermelín, M.** 1993. Stratigraphy of volcanic ashes from South Antioquia, Colombia: possible climatic implications. Quaternary of South America and Antarctic Peninsula, V. 8 p. 201-217.
- _____ **Hermelín, M, Schwabe, E., Posada, B.O, Silva, D. & Poupeau, G.** 2006. Fission-track datings and geomorphic evidence for long-term stability in the Central Cordillera highlands, Colombia. Zeitschrift für Geomorphologie, supplement band, Band 145, p. 1-16.
- _____ **Rendón, D. A. & Ríos, V.** sometido. Geomorphologic frame and morphotectonic analysis of the north of the Central Cordillera of Colombia. Submitted to Geomorphology.
- _____ **Restrepo J. J., Poupeau, G., Hermelín, M., Saenz, E. & Ardimousa, A.** 1996. Terraza pliocénica tardía al Sur del Valle de Aburrá por datación por trazas de fisión: implicaciones sobre la edad del valle. VII Congreso Colombiano de Geología, II Seminario sobre el Cuaternario de Colombia, Conferencia No. 9 (Abstracts).
- _____ **Schwabe, E., Hermelín, M.** 2003. Síntesis de las Dataciones por Trazas de Fisión del Norte de la Cordillera Central de Colombia y Análisis Tentativo de las áreas fuente y de la evolución del paisaje. IX Congreso Colombiano de Geología, Resúmenes, p. 189.
- Tricart, J. & Cailleux, A.** 1964. Introduction a la Géomorphologie Climatique Société D' Édition D' Enseignement Supérieur, Tome I. p. 306.
- _____ 1965. Traité de Géomorphologie. Le modelé des régions chaudes forêt et savanes Société d' Édition d' Enseignement Supérieur, Tome v, p. 322.
- _____ **& Raynal, R.** 1962. Les particularités de la morphogénèse dans les régions de montagne CEDES. Paris, 136 p.
- Van der Hammen, Th.** 1979. Historia y Tolerancia de Ecosistemas Parameros in El Medio Ambiente Páramo, M. L. Salgado- Labouriau, Ed., CFA- IVIC- Unesco- CIFCA, Mérida, Venezuela.
- _____ 1984. Datos sobre la historia de clima, vegetación y glaciación de la Sierra Nevada de Santa Marta in La Sierra Nevada de Santa Marta (Colombia) Transecto Buritaca. La Cumbre Th. van der Hammen & P. Ruiz, Editores, Studies on Tropical Andean Ecosystems, v. 2, p. 561-580.

- _____ & **Hooghiemstra, H.** 2000. Neogene and Quaternary history of vegetations, climate and plants diversity in Amazonia. *Quaternary Science Reviews*, v. 19 p. 735-742.
- Vasconcelos, P. M. & Conway, M.** 2003. Geochronology of weathering and landscape evolution, Dugald River valley, NW Queensland, Australia. *Geochem. & Cosmoch. Acta*, v. 67, p. 2913-2930.
- Velásquez, A.** 2005. Los terremotos del Atrato Medio-Murindó en Octubre de 1992. *Desastres de Origen Natural en Colombia 1979-2204*. Fondo Editorial Universidad EAFIT-Universidad del Valle OSSO, p. 91-108.
- Velásquez, E. & Hermelín, M.** 2005. El evento de San Carlos (Antioquia) de 1990. *Desastres de Origen Natural en Colombia 1979-2204*, Fondo Editorial Universidad EAFIT-Universidad del Valle OSSO, p. 77-90.
- _____ & **Mejía, O.** 1991. Movimientos de Masa causados por el aguacero de Septiembre 21 de 1990 en San Carlos, v. 1, *Memorias IV Congreso Colombiano de Geotécnica*, Bogotá p. 567-582.
- _____ **Mejía, O., & Hermelín, M.** 2002. El evento torrencial de Septiembre de 1990 en San Carlos (Colombia) y sus consecuencias catastróficas. In *Desastres Naturales en América Latina*. José Lugo Hubp & Moshe Inbar (compiladores). Fondo de Cultural Económica, México, p. 335-348.
- Wilches-Chaux, G.** 2005. El terremoto, la avalancha y los deslizamientos de la cuenca del Río Paéz (Cauca), 1994. *Desastres de Origen Natural en Colombia 1979-2204*. Fondo Editorial Universidad EAFIT-Universidad del Valle OSSO, p.121-133.
- Zuluaga, J.E & Mattson, L.** 1981. Glaciaciones en la Cordillera Occidental de Colombia, Páramo de Frontino. *Revista CIAF*, v. 6, p. 639-654.

Recibido el 21 de marzo de 2007.

Aceptado para su publicación el 10 de abril de 2007.

USO DE LA TÉCNICA FOTOACÚSTICA PARA LA CARACTERIZACIÓN DE CAFÉ PROVENIENTE DEL EJE CAFETERO COLOMBIANO

por

Hernando Ariza Calderón¹ & Fernando Gordillo Delgado²

Resumen

Ariza Calderón, H. & F. Gordillo Delgado: Uso de la técnica fotoacústica para la caracterización de café proveniente del eje cafetero colombiano. Rev. Acad. Colomb. Cienc. **31** (119): 217-234, 2007. ISSN 0370-3908.

La producción de café en almendra así como tostado y molido requiere actualmente de criterios científicos de certificación que permitan el acceso a mercados especializados con precios más justos para el productor. En esta dirección, es muy importante la caracterización básica que se haga del material. En este trabajo se presentan resultados del estudio de la difusividad térmica del café verde, así como de la pigmentación del mismo luego de ser tostado y molido usando la técnica fotoacústica (FA), los cuales muestran una estrecha relación entre los parámetros correspondientes y variables como: la humedad del grano, variedad y condiciones de cultivo.

Palabras clave: Café, fotoacústica, difusividad térmica, espectroscopía.

Abstract

Nowadays the production of green beans and roasting and ground coffee in Colombia request of a scientific certification criteria that allows the access to specialized markets with prices more fair for the producer. In this way, is very important the basic characterization that it makes over the material. In this work the results of the study of green coffee thermal diffusivity, as well as its pigmentation after roasting and ground using the photoacoustic (PA) technique are shown. The analysis of these results indicates a narrow relation between the respective parameters and variables as: bean moisture, variety of the plant and grown conditions.

Key words: Coffee, photoacoustic, thermal diffusivity, spectroscopy.

¹ Laboratorio de optoelectrónica. Universidad del Quindío Apdo. Postal **2639** Armenia, Quindío, Colombia. Correo electrónico: heariza@uniquindio.edu.co.

² Laboratorio de optoelectrónica. Universidad del Quindío Apdo. Postal **2639** Armenia, Quindío, Colombia. Correo electrónico: fgordillo@uniquindio.edu.co.

Introducción

La difusividad térmica es una importante propiedad de transporte necesaria para el modelaje y cálculos de transferencia adyacente de calor en las operaciones básicas del procesado de alimentos, tales como secado, tostión, enfriamiento o congelación; ya que está relacionada con la velocidad con la cual se propaga el calor en un material. La difusividad térmica, α , de un material se define como la razón entre el calor transportado por conducción y la capacidad térmica de una masa unitaria. En el caso del café en almendra, es obvia la importancia de conocer este parámetro pues la calidad de la bebida depende de las condiciones en el tostado del grano, como: temperatura y tiempo. Por ello es necesario conocer si existen o no diferencias en este parámetro, relacionadas con determinadas variables que permitan una clasificación del café para ser tostado bajo condiciones óptimas.

De igual manera, es importante conocer el contenido de pigmentos del café producido en la región, pues está relacionado con el sabor y las propiedades alimenticias del mismo; en el caso particular de carotenos y flavonoides, estos proveen de características antioxidantes y de vitaminas al café, respectivamente^{1,2}. Y el suministro de esta información al consumidor puede dar lugar a una mejor comercialización del producto.

Por otro lado ha comenzado a darse un aumento en los cultivos orgánicos debido a su aparición como alternativa a la crisis del sector agrícola y ecológico³⁻⁵, pues estos productos favorecen el medio ambiente, la salud del consumidor y tienen un precio más favorable para el productor. Sin embargo, los procesos de certificación para este tipo de café, así como para cualquier otro tipo de café especial, son generalmente costosos y dispendiosos.

La difusividad térmica, estrechamente relacionada con las características químicas del material, así como espectros relacionados directamente con la absorción de materiales opacos en formas sólidas o en polvo, pueden ser medidos usando el efecto fotoacústico. En este trabajo se presentan los resultados del estudio de la difusividad térmica del café verde, así como de la pigmentación del mismo luego de ser tostado y molido usando la técnica FA, los cuales muestran una estrecha relación entre los parámetros correspondientes y variables como: la humedad del grano, variedad y condiciones de cultivo.

Materiales, métodos y experimentación

El efecto fotoacústico se presenta al radiar con luz, de manera periódica, una muestra que puede ser sólida, líquida

o gaseosa, ópticamente transparente u opaca. La luz periódica es absorbida y el proceso de desexcitación no radiativa da lugar a calentamiento periódico en la muestra, este calor puede ser transmitido a una delgada capa de aire que se encuentre en contacto con ella, causando cambios periódicos muy leves en la temperatura de la capa de aire y por lo tanto en su presión, creándose una onda sonora que puede ser detectada. Este efecto fue descubierto por primera vez en 1880 por Alexander Graham Bell, pero no fue hasta que Rosencwaig y Gersho argumentaron sólidamente su teoría⁶, que comenzó a usarse con mucha eficiencia como técnica de caracterización óptica⁷⁻⁹ y térmica^{10,11}. En espectroscopía, este efecto ha permitido medir de manera muy exacta la absorbancia de materiales en diferentes estados, ya que la señal que se detecta, emana directamente de la muestra, evitando los problemas de dispersión de luz que se tienen en los espectrofotómetros¹².

La técnica de espectroscopía FA en el rango visible del espectro electromagnético aplicada a muestras orgánicas vegetales, da información acerca de los pigmentos que contienen, lo cual no es posible hacer usando el principio del espectrofotómetro, debido a que regularmente estas muestras son opacas. La pigmentación de un material orgánico está estrechamente relacionada con su color; ya que los pigmentos absorben selectivamente las diferentes longitudes de onda que conforman la luz visible.

Las muestras de café orgánico en cereza de diferentes variedades a las cuales se les hizo un estudio espectroscópico (caturre, Colombia y arábigo), fueron recolectadas desde diferentes alturas geográficas-entre 1400 y 1962 m sobre el nivel del mar- de diferentes fincas ubicadas en los departamentos del Quindío y Risaralda. Esta recolección de muestras de café orgánico garantizó el aislamiento de las variables que tienen que ver con el tratamiento del cultivo (abonos, fertilizantes, desyerba, etc.), ya que los cultivos de este tipo se hacen sin ayuda de agentes químicos. Además este tipo de café es de gran importancia, pues su valor comercial es más alto y principalmente los países europeos están demandando hoy en día productos agrícolas orgánicos, más saludables y con un proceso de cultivo que proteja el ecosistema¹³. Actualmente algunos productores del departamento del Quindío están comenzando a hacer exportaciones de café orgánico, razón por la cual la acreditación de este producto es muy valiosa en este momento.

Una vez recogidas las muestras de café en fruto se les hizo un proceso de beneficio húmedo convencional¹⁴ que consistió en descerezado manual, desprendimiento de mucílago por fermentación durante 16 horas, lavado con agua, y secado al sol hasta alcanzar una humedad de

aproximadamente 11%, la cual fue medida usando un medidor UNIMETER DIGITAL XL. Luego del proceso de beneficio, se procedió a realizar el tostado de una parte de la muestra trillada usando una mufla¹⁵. El tostado se hizo a una temperatura de $210 \pm 1^\circ\text{C}$ durante 10 minutos en un horno con silo giratorio, hasta alcanzar una pérdida de peso entre 14 y 17%. Para seleccionar el tamaño de grano entre 250 y 315 μm se usaron tamices metálicos. En la figura 1 se muestran los diferentes estados en el proceso para obtener el café en polvo.

En el equipo de espectroscopía FA se usa una lámpara de arco de Xenón de 1000 W, con un sistema adaptado de filtro de agua, que además de dirigir la luz con alta eficiencia al interior de un monocromador SPEX 270M, filtra el infrarrojo, de tal forma que se obtiene, a la salida del monocromador, luz fría; lo cual garantiza que al trabajar con alta potencia (entre 500 y 700 W) la muestra no sea calentada por un fenómeno distinto al de absorción óptica. También a la salida del monocromador están ubicados dos filtros, uno infrarrojo y uno ultravioleta que garantizan la eliminación de armónicos. La luz de diferente longitud de onda que sale del monocromador (en el rango de 480 a 800 nm), luego de ser modulada (chopeada) a una frecuencia de 17 Hz, es conducida por una fibra óptica de sílica fundida (260-2200 nm) hasta una celda FA cerrada fabricada en nuestro laboratorio.

La muestra es colocada herméticamente dentro de la celda que está conectada a un micrófono de condensador. La señal FA se produce debido al calentamiento periódico de la muestra a causa de las desexcitaciones no radiativas. Esta señal es llevada a un amplificador lock-in SR830, el cual toma como referencia la frecuencia de modulación, garantizando la ausencia de ruido proveniente de otras fuentes. El montaje experimental usado se ilustra en la figura 2.

Las propiedades termofísicas influyen directamente en el diseño de cualquier proceso térmico ya que están involucradas en la transferencia de masa y energía térmica, y tienen una estrecha relación con la estructura celular y química de los materiales. Normalmente se utilizan modelos basados en la composición básica de los materiales (alimentos, proteínas, aceites, agua, etc.) para calcular indirectamente estas propiedades¹⁶, una de estas es la difusividad térmica, propiedad clave para el análisis del transporte de calor por conducción en los materiales.

Desde hace unos veinte años, la técnica FA ha atraído considerable atención, llegando a ser hoy en día una herramienta muy importante para la investigación en el área

de ciencias de materiales y usada extensamente en muchos otros aspectos de la ciencia y la tecnología^{17,18}. En particular, con esta herramienta no destructiva, es posible estimar de manera directa la difusividad térmica, a, de materiales ópticamente opacos o transparentes, en estado sólido, líquido o gaseoso¹⁹. La difusividad térmica de un material, indica la razón a la que el calor se distribuye en un material. Dicha razón depende no solamente de la conductividad térmica del material, sino también de la razón a la cual puede almacenar la energía. Este parámetro de transporte térmico, único para cada material y por ende relacionado con su microestructura y composición química^{20,21}, es de especial interés para la optimización de procesos de almacenamiento, congelación y tostado de alimentos²². En el caso del café en almendra es obvia la importancia de conocer este parámetro físico, pues la calidad de la bebida depende de las condiciones en el tostado del grano. Por ello es necesario medir de manera eficiente la difusividad térmica, posiblemente relacionada con determinadas variables en las condiciones de cultivo, como tipo de suelo, piso térmico, variedad, etc., lo cual puede dar lugar a una clasificación del café para ser tostado bajo condiciones óptimas.

De las mismas muestras de café descritas anteriormente, previamente beneficiadas, fueron seleccionados los granos de café verde en almendra para medir difusividad. Con este objetivo se les hizo un proceso de adelgazamiento hasta alcanzar espesores de capa externa de aproximadamente 600 μm , conservando la forma superficial convexa del grano como se observa en la figura 3.

Para las medidas de difusividad térmica, se usó un haz de luz proveniente de un láser de Argón Modu-Láser, línea de emisión 488 nm; a una potencia de 10 mW. Este haz de luz monocromática se conduce hasta la muestra; que es colocada en una celda FA abierta²³, directamente encima del orificio del caparazón de un micrófono común de electro, sellando la unión herméticamente con ayuda de grasa, de tal manera que queda un pequeño espacio con aire entre la muestra y la membrana del micrófono. Antes de hacer incidir este haz sobre la muestra, la luz se pulsó a través de un chopper mecánico de bajas frecuencias el cual funciona a pasos de hasta 0.01 Hz en un rango que va desde 0.15 a 4.5 Hz. Cuando esta luz modulada es absorbida por la muestra, su superficie se calienta periódicamente y este calor se transporta a través de ella mediante el fenómeno de conducción, cuando el calor se propaga hasta el aire que hay entre la muestra y la membrana del micrófono, causa cambios de presión en esta región, lo cual es detectado como sonido

Tipo café	Pergamino	Almendra	Tostado	Molido
Café bueno orgánico				
Café bueno tecnificado				
Café malo naranja				

Figura 1. Muestra de café tostado y molido.

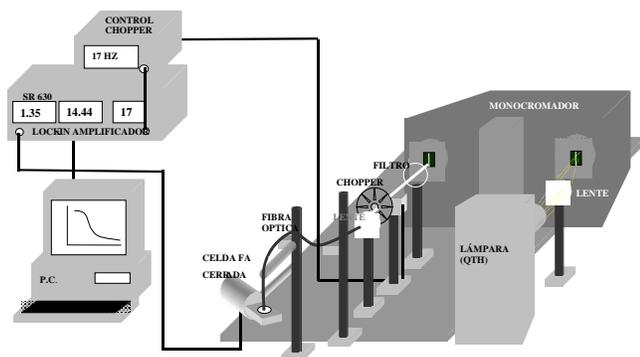


Figura 2. Montaje experimental inicial del sistema de espectroscopia FA.



Figura 3. a) Muestra de café pergamino. b) Muestra de café verde (en almendra) adelgazada conservando la forma convexa del grano. En la parte inferior se muestra la capa exterior estudiada con un espesor de aproximadamente 600 μm .

por el micrófono. El montaje experimental se muestra en la figura 4. La señal de voltaje alterno que arroja el micrófono es analizada de acuerdo con la teoría FA para obtener, por ajuste, la difusividad térmica²⁴.

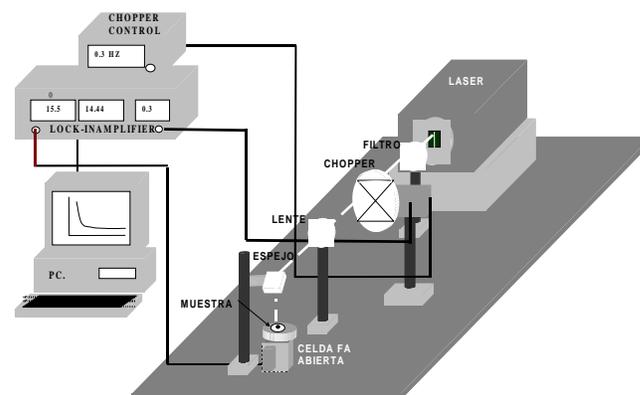


Figura 4. Montaje experimental del sistema de FA de celda abierta.

Resultados y discusión

1. Espectroscopia

Las muestras de café en polvo colocadas formando una capa compacta en la cavidad cilíndrica de la celda FA,

son ópticamente opacas y por lo tanto en ellas la profundidad de penetración óptica μ_β , es mucho menor que su espesor l ($\mu_\beta \ll l$). Además, por tratarse de una muestra orgánica su difusividad, α , es baja ($< 0.003 \text{ cm}^2/\text{s}$) y su coeficiente de extinción es alto ($10^4 \leq \epsilon \leq 5 \times 10^4 \text{ mol}^{-1}\text{cm}^{-1}$), así que es posible estimar los valores de $\mu_\beta = l/\beta$ y de $\mu_s = \sqrt{\alpha/\pi f}$, donde β es el coeficiente de absorción óptica, α es la difusividad térmica y f es la frecuencia de modulación usada, que en este caso fue de 17 Hz. De tal manera que para todas las medidas se cumple que la longitud de difusión térmica de la muestra es menor que su espesor, pero mayor que la longitud de absorción óptica, $\mu_s < l$, $\mu_s < \mu_\beta$. Así que las medidas realizadas se hicieron en el régimen de muestra ópticamente opaca y térmicamente gruesa, y por lo tanto de acuerdo con el modelo de Rosencwaig-Gersho la señal FA compleja es directamente proporcional al coeficiente de absorción óptico, β , y por ende a la absorbancia de la muestra. Lo cual se puede expresar de la siguiente manera:

$$Q = \frac{j\beta\mu_s\mu_g}{2} \left(\frac{\mu_s}{k_s} \right) Y, \quad (1)$$

donde Q es la envolvente compleja de la variación de presión sinusoidal producida por efecto FA, los sub-índices, s y g , se refieren a la muestra sólida y al gas usado en la celda (regularmente es aire); k , la conductividad térmica del material y Y , un factor constante. La amplitud y la fase de esta cantidad compleja son proporcionales al coeficiente de absorción óptico y están dadas por:

$$S = \sqrt{Q_{real}^2 + Q_{imag}^2} \quad (2)$$

$$\phi = \arctan(Q_{imag}/Q_{real}) \quad (3)$$

Estas dos cantidades fueron leídas desde el amplificador Lock-in de manera separada en función de la longitud de onda, obteniéndose dos espectros relacionados con la absorbancia de cada muestra, lo cual ayudó a solucionar el problema de saturación esperado para polvos de pigmentos orgánicos que tienen un coeficiente de absorción alto, pues se tienen dos puntos de referencia para hacer el análisis cualitativo de los espectros, y a su vez, existen reportes de que la fase es menos influenciada por este problema²⁵. No obstante, también es frecuente el uso del método de dilución con polvos blancos estándar como Al_2O_3 , TiO_2 y MgO , que da la oportunidad de investigar especies absorbidas sobre estas superficies de óxidos básicos o ácidos, evitando la saturación de la señal^{26, 27}. En este trabajo para algunos casos se mezcló con una proporción de 0.3 gr. de MgO

por gramo de café en polvo. Los espectros obtenidos para las muestras usando la técnica FA, son mostrados en las figuras 5 y 6. El uso del método de dilución, empleando MgO , no redujo significativamente el problema de saturación, así que los espectros de amplitud fotoacústica son curvas que decaen de manera diferente, definiéndose con mucha claridad una banda ancha en el inicio del espectro, centrada alrededor de 500 nm la cual puede ser relacionada con la absorción de carotenos²⁸. No obstante, el espectro de fase no fue afectado por esta saturación, y muestra claramente algunos centros de absorción de estos y de otros pigmentos, especialmente clorofila. Comparando estos resultados para las diferentes muestras es posible ver que en la muestra M4 es más notoria la absorción del pigmento capsorubina y clorofila a ubicados alrededor de 510 nm y 666 nm, respectivamente. Las demás muestras además contienen pigmentos que absorben a bajas energías como zeaxantina (493 nm), aunque en una pequeña proporción. También es posible ver que existen otras bandas particulares de cada muestra entre 510 y 660 nm, estos pueden estar relacionados con la absorción de otro tipo de componentes del café como óxidos metálicos, cenizas, etc.

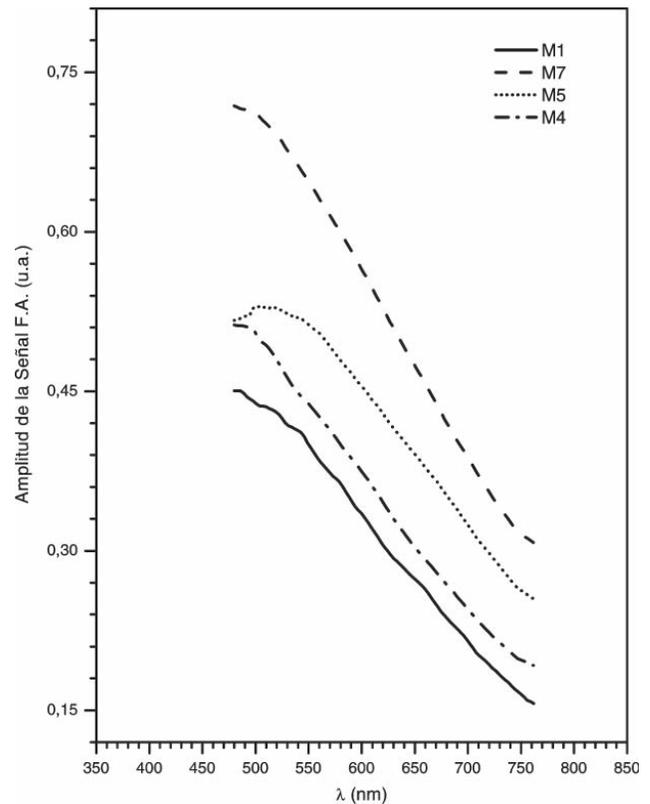


Figura 5. Amplitud de la señal fotoacústica para las muestras: M1(1700 m), M4 (1605 m), M5(1600 m), y M7 (1485 m), luego de ser tostadas y molidas. a) diluidas en un 30% de su peso en MgO .

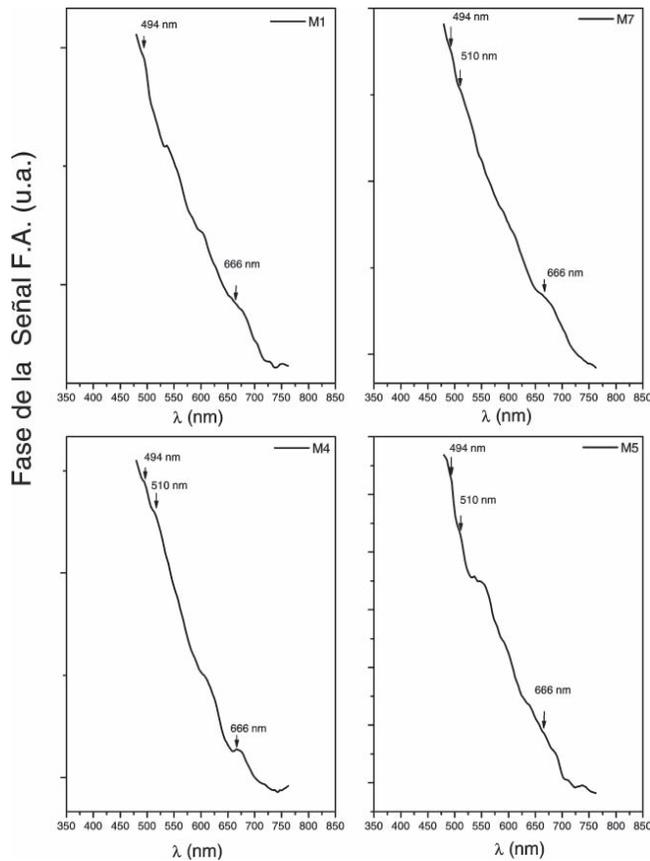


Figura 6. Fase de la señal fotoacústica para las muestras: M1(1700 m), M4(1605 m), M5(1600 m), y M7(1485 m) y luego de ser tostadas y molidas, diluidas en un 30% de su peso en MgO.

La humedad inicial es otro parámetro fundamental tanto para los compradores de café como para los tostadores, regularmente debe estar entre 11 y 13% para evitar la aparición de hongos durante el almacenamiento y transporte del café verde, y sirve para establecer un tiempo aproximado de tuestión.

En la figura 7, se muestra el comportamiento de la fase de la señal fotoacústica para la muestra M1 tostada y molida con contenidos iniciales de humedad diferentes. En los espectros obtenidos se puede ver que para la humedad más alta es escasa la presencia de carotenos, la cual va creciendo cuando aumenta la humedad, lo contrario sucede para la clorofila *b*, observándose la aparición de clorofila *a* para la muestra con menor humedad. Así que es posible decir, que el proceso de tuestión con humedades iniciales bajas separa en mayor proporción a los pigmentos y brinda al producto mayor riqueza de nutrientes y posiblemente mejores propiedades organolépticas.

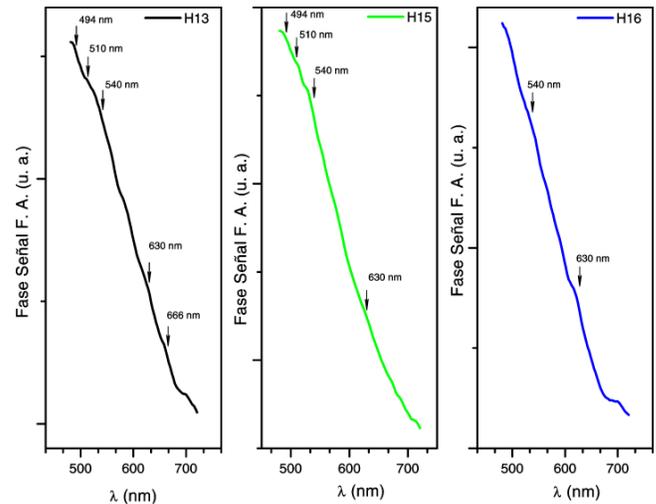


Figura 7. Fase de la señal fotoacústica para las muestras con humedad inicial: 13,15 y 16 % las cuales fueron tostadas y molidas, se comparan con los espectros de las muestras diluidas en un 30% de su peso en MgO.

El espectro de un material es como su huella, la cual lo identifica y sirve para diferenciarlo de otros. Es muy común el uso de medidas de transmisión de luz para obtener espectros de absorbancia, sobretodo en el infrarrojo con el uso del análisis discriminante factorial, pero dichas medidas están restringidas a muestras transparentes y además presentan un alto grado de error debido a los problemas de dispersión de luz. La técnica fotoacústica ha mostrado ser una solución a este problema pues permite analizar muestras opacas, con una superficie no homogénea en cualquier estado. En la industria del café se necesita constantemente de procedimientos que permitan evaluar la procedencia y calidad del producto final²⁹: café tostado y molido, ya que existen en el mercado muchos tipos de café especial: de altura, suave, amargo, orgánico, descafeinado, etc., los cuales presentan características organolépticas y de composición diferentes y por tanto tienen un valor agregado. Con el fin de observar la reproducibilidad de los espectros que se van a comparar, se realizó un estudio estadístico en el cual se escogió de manera aleatoria uno de los espectros obtenidos de cada tipo de café, para efectuar la división entre éste y cada uno de los espectros correspondientes al mismo tipo, luego se observó la desviación promedio de los puntos respecto a uno (1), que sería el resultado de la división si los espectros fueran idénticos. En la tabla 1 se muestra el resultado de estas operaciones, en donde se observa que la desviación promedio es muy cercana a cero, lo que indica que el método de preparación de las muestras fue similar en todas las ocasiones, y que fueron aisladas variables como la pérdida de humedad, la temperatura de tuestión etc. Así que es posible afirmar que las variaciones

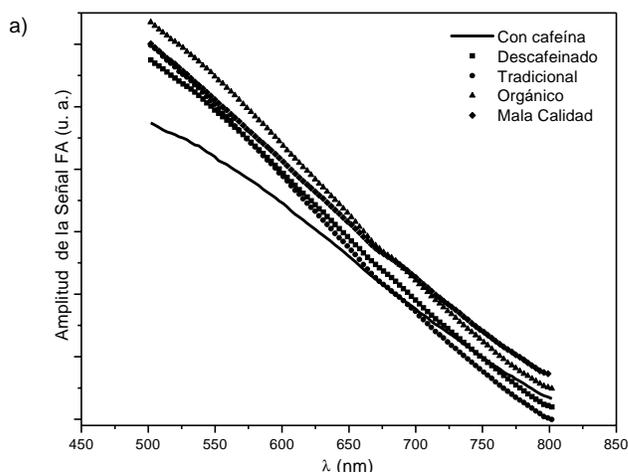
Tabla 1. Desviación de las medidas con respecto a un espectro patrón.

Característica	Muestra	Desviación
Tradicional	T1	0
	T2	0.02242
	T3	0.06821
	T4	0.05231
Orgánico	O1	0
	O2	0.21014
	O3	0.10478
	O4	0.1658
Café de mala calidad	M1	0
	M2	0.01677
	M3	0.05919
	M4	0.01231
	M5	0.02928
Cafeína	C1	0
	C2	0.05602
	C3	0.06498
Descafeinado	D1	0
	D2	0.05063
	D3	0.02513

en las condiciones ambientales que pueden ocurrir en el tiempo, no contribuyeron significativamente en las medidas.

Después de obtener varios espectros de la amplitud de la señal FA para las diferentes muestras de café relacionadas en la tabla 1, se procedió a promediar los correspondientes a cada tipo de café (cafeína, descafeinado, tradicional, y de mala calidad) con el fin de tener un espectro de absorción óptica de cada uno y poder determinar diferencias entre ellos. En la figura 8 se observan diferencias en la forma de los espectros de absorción y por lo tanto en la pigmentación del café.

En las figuras 9a y 9b se muestran los espectros de café normalizados en los cuales se puede apreciar que en la región entre 650 y 800 nm, el espectro correspondiente a la muestra de mala calidad decae en forma más lenta que el de orgánico, el cual a su vez decae más lentamente que el de café tradicional. En la figura 9c se observa también que el espectro de la muestra con Cafeína decae más lentamente que el correspondiente a la descafeinada. Esto indica que es posible con base en la diferencia de forma de los espectros, discriminar el tipo del café tostado y molido. También se observa que a medida que aumenta la longitud de onda se puede tener una mejor resolución para discriminar cada tipo, lo cual sugiere tratar de desplazar el rango de medida hacia longitudes de onda más altas.

**Figura 8.** Amplitud de la señal FA para las diferentes muestras de café.

En las figuras 10 a) y 10 b) se muestran los espectros de absorción tomados con espectrofotómetro a la bebida de café, utilizando una proporción de un gramo por cada 10 mililitros de agua destilada a 100°C. Se observa un leve corrimiento del centro de absorción correspondiente al café de mala calidad con respecto al del café orgánico, lo que permite concluir que no hay diferencia notoria entre la pigmentación de una bebida preparada con café orgánico y una preparada con café tradicional.

Sin embargo, esta diferencia es más grande cuando se comparan los espectros correspondientes a café de baja y de alta calidad. Por este método no fue posible observar otro tipo de diferencia relevante entre los diferentes tipos de muestra.

Ya que los espectros de absorción FA muestran diferencias en su forma para los diferentes tipos de café, se realizó la resta selectiva entre ellos con el objetivo de determinar posibles centros de absorción para cada muestra, en otras palabras, para separar las componentes que tienen en común. La figura 11 permite observar los resultados de este proceso. La línea OM resulta de restar al espectro de café orgánico patrón de alta calidad, el correspondiente de mala calidad. El resultado de esta resta muestra un centro de absorción alrededor de 550 nm (visible), propio de la primera muestra, lo cual indica una tendencia del café de alta calidad a absorber más en la región de alta energía, donde los carotenos absorben. La diferencia entre los espectros patrón correspondientes a café tradicional y orgánico, representada en la figura como TO, muestra una tendencia a aumentar debido a la presencia de componentes propias del café orgánico a partir de

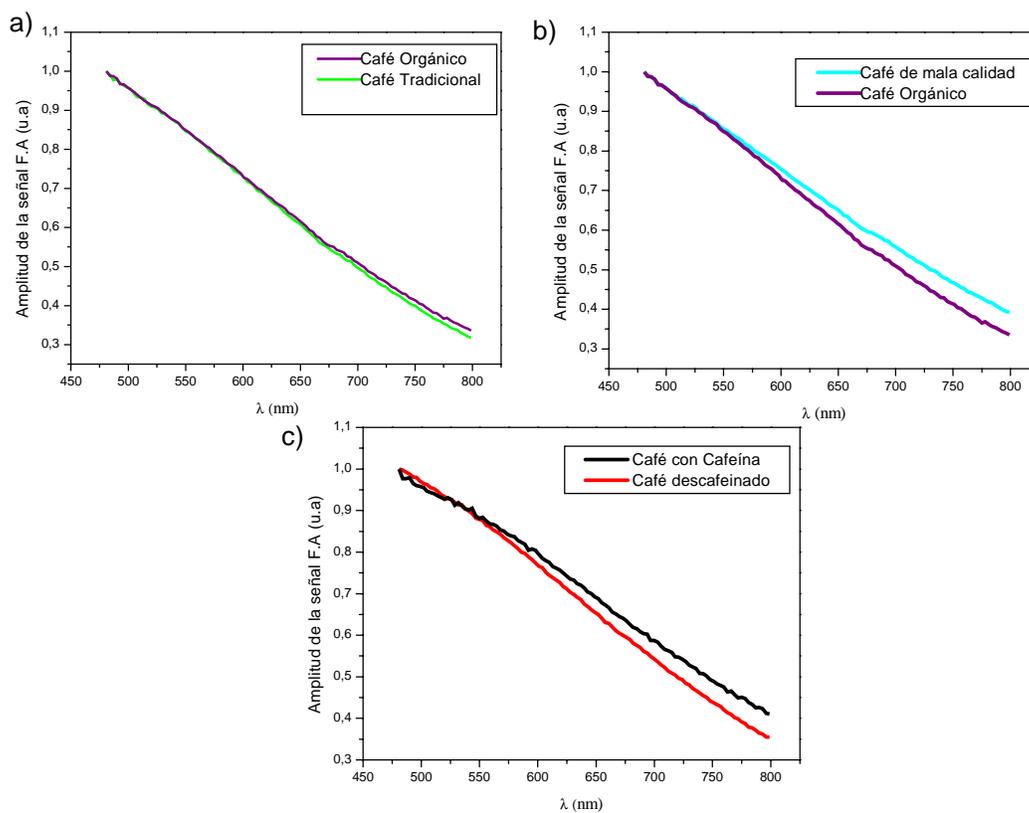


Figura 9. a) amplitud de la señal FA comparando café orgánico con café tradicional b) Amplitud de la señal FA comparando café de mala calidad con café orgánico, c) amplitud de la señal FA comparando café con y sin cafeína.

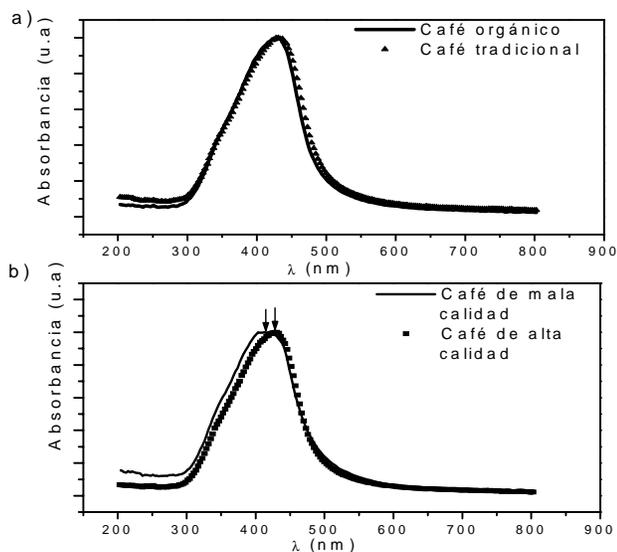


Figura 10. Medidas tomadas a muestras en infusión de café, con espectrofotómetro: a) para café orgánico y tradicional y b) para café de buena y mala calidad.

500 nm respecto al café cultivado tradicionalmente, este resultado indica que es posible que la diferencia en la absorción sea mas notoria en el rango del infrarrojo.

De igual manera la línea CD, resultado de la resta entre los espectros de las muestras de café con cafeína y descafeinado, refleja la existencia de una componente particular del café con cafeína que absorbe alrededor de 660 nm y presenta una tendencia a aumentar para bajas energías como en el caso anterior, resultado que está de acuerdo con lo reportado, ya que según estos, la cafeína tiene sus principales centros de absorción en el rango del infrarrojo cercano, por lo cual se tiene la posibilidad de diferenciar entre estos dos tipos de café.

Debido a que la variedad del café es de gran importancia, se analizó el comportamiento en los espectros de fotoacústica para las tres variedades que principalmente son cultivadas en Colombia: arábigo, caturra y variedad Colombia. Como es posible ver en la figura 12, existe una gran diferencia en la forma de los espectros, y debido a

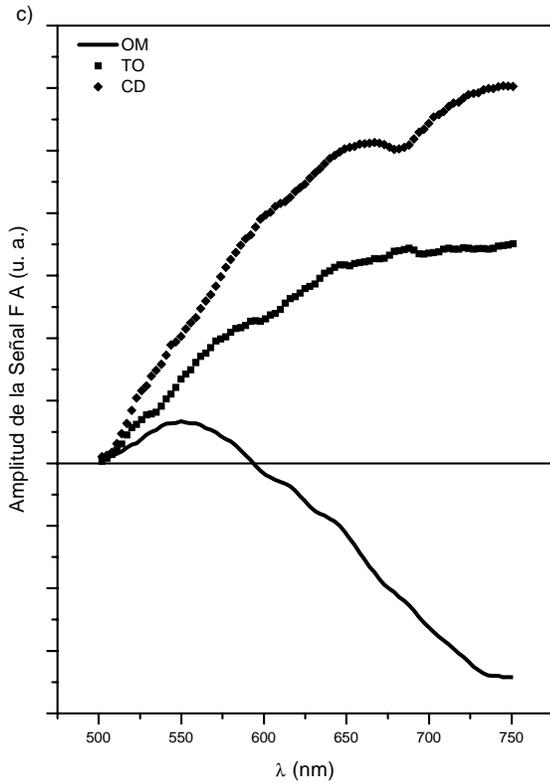


Figura 11. Resta entre las amplitudes de la señal FA para café: orgánico-mala calidad (OM), orgánico-tradicional (TO), con cafeína-descafeinado (CD).

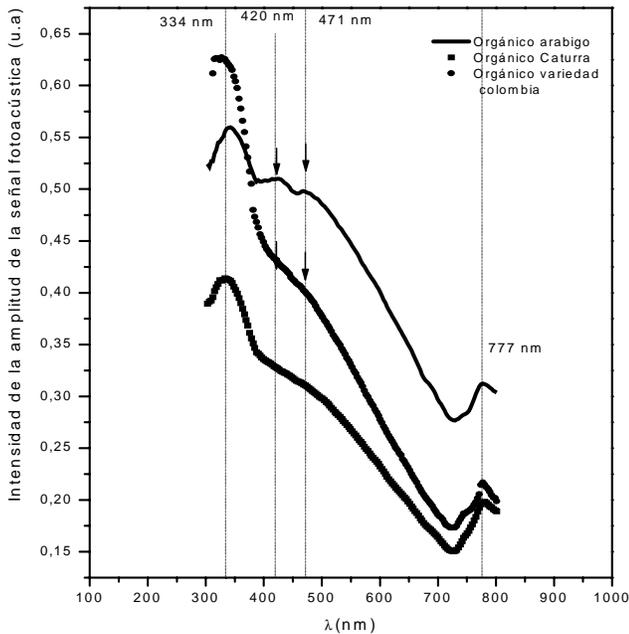


Figura 12. Espectro de absorción fotoacústica para muestras de café tostadas y molidas utilizando frutos de plantas de diferente variedad.

que el rango de medida pudo ser expandido, se detecta en la amplitud de la señal FA de todas las muestras una banda centrada en 334 nm que puede ser atribuida a la absorción del pigmento capsaicina³⁰ y es más pronunciada para la muestra de café variedad Colombia. Así mismo se puede ver que para la muestra correspondiente a café variedad arabigo, se marcan dos bandas más: una situada alrededor de 420 nm relacionada con la absorción sobrelapada de luteína, clorofila *a* y violaxantina; y la otra en 471 nm, relacionada con la absorción de luteína, neoxantina y β-caroteno³¹.

Teniendo en cuenta la teoría de correlación se encontraron los diferentes coeficientes al comparar los espectros de intensidad de la señal FA para muestras de las variedades: arábigo, variedad Colombia y caturra (ver tabla 2). Se puede ver que con un umbral de 0.999 se pueden comparar los espectros correspondientes a café de la misma variedad.

Tabla 2. Valores de correlación entre los espectros promedio correspondientes a diferentes variedades de café.

	Arabigo	Variedad colombia	caturra
Arabigo	0.9992	0.9511	0.9782
Variedad colombia		0.9991	0.9929
Caturra			0.9984

Con el objetivo de encontrar una relación entre los espectros medidos y pruebas de taza de la bebida preparada con estas muestras, se realizó un estudio simple de catación con un panel de 3 catadores. Los resultados para las muestras relacionadas en la figura 12, se muestran en la tabla 3. En esta tabla se puede ver una diferencia entre las propiedades organolépticas del café orgánico y el tradicional, así como entre café de variedad caturra y variedad Colombia. Sin embargo, estas diferencias no son tan fuertes como para poder establecer un criterio de comparación sencillo, y hacer mayor número de pruebas para hacer un análisis estadístico, es una tarea difícil pues se necesita gran cantidad de muestra preparada y de un gran número de personas entrenadas para tal fin.

2. Difusividad térmica

La difusividad térmica α , de un material se define como la razón entre el calor transportado por conducción y la capacidad térmica de una masa unitaria, y puede ser estimada por:

$$\alpha = \frac{\lambda}{\rho C_p} \quad (\text{m}^2/\text{s}). \quad (4)$$

Tabla 3. Resultados de valoración organoléptica dados por un panel de 3 catadores. La escala que fue tomada en cuenta es la siguiente, (9): buena, equilibrada. (8,7,6): buena. (5): verde, astringente. insípida. (4): baja. (3): reposo, quemado, muy amargo. (2): fermento, metálico, sucio. (1): fenol.

Variedad	Tipo cultivo	Aroma	Acidez	Amargor	Cuerpo	Impresión global
caturro	orgánico	5.5	3.83	4.5	5.33	4.75
v. colombia	orgánico	6.25	5.16	5.5	5.83	5.25
caturro	tecnificado	6.25	5.33	6.16	6.16	6.25
v. colombia	tecnificado	6	6.66	4.66	5.83	6

Donde λ es la conductividad térmica (W/mK), ρ es la densidad (kg/m^3), y C_p es el calor específico (J/kg K). La difusividad térmica puede ser determinada experimentalmente de manera directa, o indirectamente de la ecuación anterior. En el caso de la técnica FA, el calentamiento es producido por iluminación óptica modulada periódicamente y la señal obtenida sobre la cara opuesta de la muestra de espesor l es dada por una fórmula general del tipo:

$$S = S_o(\omega) e^{(-\sigma l + j\omega t)}. \quad (5)$$

La cual se puede expresar de acuerdo con el modelo de difusión térmica unidimensional de Rosencwaig-Gersho^{32, 33} como:

$$S = S_o(\omega) e^{j \left[\frac{\pi}{2} - \arctan \left(\frac{\tan \left(\frac{f}{f_c} \right)}{\tanh \left(\frac{f}{f_c} \right)} \right) \right]} \quad (6)$$

Donde la amplitud de la señal FA, $S_o(\omega)$, es dada por la siguiente expresión [34]:

$$S_o(\omega) = C_0 \frac{1}{f \sqrt{\cosh \left(2 \sqrt{\frac{f}{f_c}} \right) - \cos \left(2 \sqrt{\frac{f}{f_c}} \right)}}, \quad (7)$$

siendo C_0 una constante relacionada con las propiedades térmicas del aire, la intensidad de la luz y las características geométricas de la celda, f es la frecuencia de modulación y $f_c = \alpha/\pi l^2$ es un parámetro denominado frecuencia de corte y representa el valor de la frecuencia de modulación para la cual la longitud de difusión térmica $\mu = \sqrt{\alpha/\pi f}$, es igual al espesor de la muestra, l .

Como es posible ver de la ecuación (6) existen discontinuidades en el comportamiento de la fase debidas a la presencia de la función tangente. Entonces, de la fase de la señal FA en función de la frecuencia es posible obtener también f_c y por lo tanto el valor de α .

En el régimen de muestras ópticamente opacas (longitud de penetración óptica $<$ espesor de la muestra) y térmicamente gruesas ($l \gg \mu$), de acuerdo con la ecuación (7), la amplitud de la señal FA se comporta como $(1/f) \exp(-\sqrt{f/f_c})$.

La difusividad térmica de las muestras de café de la especie caturra en grano, seleccionadas por procedencia geográfica y adelgazadas alrededor de 600 μm , fue medida de manera indirecta ajustando la amplitud de la señal FA en el régimen térmicamente grueso (ver Figura 13)³⁵. Este valor es comparado con el obtenido de la fase de la misma señal, usando el criterio de retardo en la fase FA. Los valores de difusividad hallados se reportan en la tabla 4.

De los valores dados en la tabla 4, se puede ver que no existen cambios importantes en la difusividad térmica obtenida a partir del ajuste de la amplitud FA para muestras de café en grano verde con la variación de la altura geográfica del cultivo, y no es posible hacer comparaciones cuantitativas, debido a la dimensión de los errores experimentales, fundamentalmente debidos al error en el instrumento de medida de espesor que fue usado inicialmente en el estudio. Sin embargo, se puede decir que el valor de la difusividad térmica se mantiene alrededor de 0.002 cm^2/s , lo cual está en buen acuerdo con las medidas para café verde reportadas en otros trabajos de aproximadamente 0.0016 cm^2/s . Aunque la difusividad presenta poca variación con la altura del piso térmico de cultivo, en la muestra M9, se nota un comportamiento levemente diferente. Esto puede ser debido al tipo de suelo del cultivo de donde fue recogida, pues según el estudio de suelos realizado por la Federación de Cafeteros de Colombia, el suelo de cultivo de donde se recogió esta muestra es clasificado como Montenegro, mientras que el tipo de suelo de cultivo para la M5 es Chinchiná y para las demás muestras es Quindío. Es necesario hacer un estudio particular, para verificar si existe una relación entre difusividad térmica y tipo de suelo.

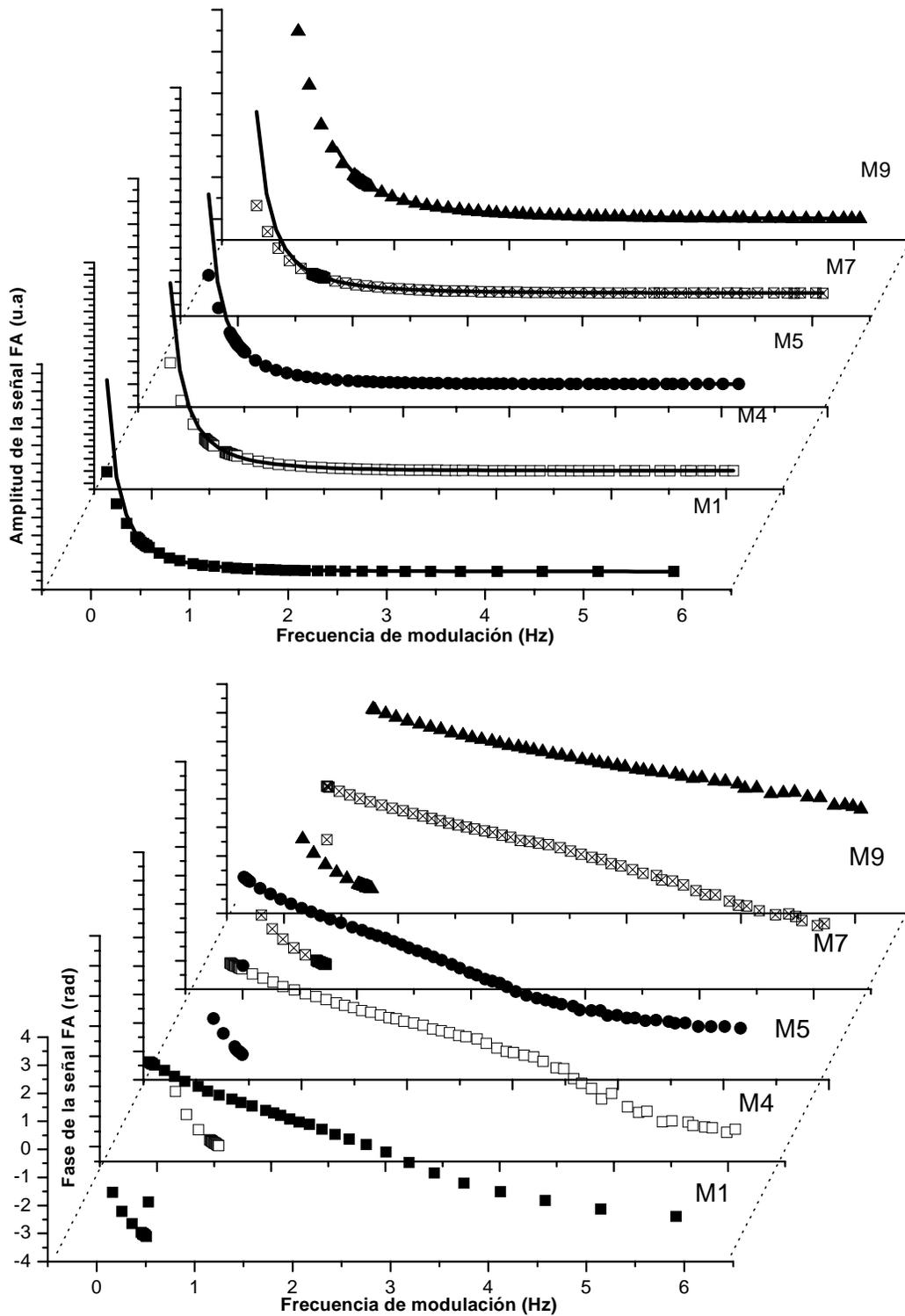


Figura 13. Señal FA obtenida por celda abierta de las diferentes muestras a) Amplitud de la señal FA en función de la frecuencia de modulación, los puntos indican los resultados experimentales y la línea corresponde al ajuste hecho con la ecuación 7. b) Fase de la señal FA en función de la frecuencia de modulación. Es posible apreciar el atraso para la fase en cada caso, este valor fue calculado tomando el promedio en los puntos de la discontinuidad.

Tabla 4 Lista de las muestras usadas en este trabajo. Se muestra la difusividad obtenida para cada muestra, usando el ajuste de la amplitud (columna 4) y el criterio de retardo en la fase (columna 5). Los errores son altos debido a que como instrumento de medida de espesor se usó un tornillo micrométrico con un error instrumental de $\pm 10\mu\text{m}$.

Muestra	Altura geográfica (m)	Espesor (μm)	Difusividad térmica (amplitud) (cm^2/s)	Difusividad térmica (fase) (cm^2/s)
M1	1700	577	0.0021 \pm 0.0002	0.0022 \pm 0.0002
M4	1605	616	0.0023 \pm 0.0002	0.0029 \pm 0.0002
M5	1600	586	0.0022 \pm 0.0002	0.0019 \pm 0.0002
M7	1485	551	0.0022 \pm 0.0002	0.0028 \pm 0.0002
M9	1325	501	0.0027 \pm 0.0002	0.0024 \pm 0.0002

Con el fin de comparar, se revisó el comportamiento de la amplitud de la señal FA para algunas muestras recolectadas de diferentes alturas geográficas de la región de Apía Risaralda, cuya descripción detallada se da en la tabla 5. En las curvas de amplitud de la señal FA en función de la frecuencia se observó un buen ajuste con el modelo teórico en el régimen térmicamente grueso, y se detectó el mismo comportamiento en la fase de la señal FA, cuando la frecuencia de choqueo llega al límite del mismo régimen.

Los valores de la difusividad térmica de todas las muestras de café, medidos de manera indirecta ajustando la amplitud de la señal FA, son comparados en la tabla 5 con los obtenidos de la fase de la misma señal, usando el criterio de retardo en la fase de la señal FA; discontinuidad justificada por el mismo modelo físico citado anteriormente (ecuación 7).

El valor promedio de la difusividad térmica para cada muestra, clasificada por altura geográfica del cultivo, se

Tabla 5 Se tabuló la difusividad obtenida para cada muestra, usando el ajuste en la amplitud (columna 4) y el criterio de retardo en la fase (columna 5).

Muestra	Unidad de suelo	Altura geográfica (m)	Espesor (μm)	difusividad térmica (amplitud) (cm^2/s)	difusividad térmica (fase) (cm^2/s)
M1675A	Chinchiná	1675	607	2.22x10 ⁻³	2.36x10 ⁻³
M1675B	“	1675	607	2.44x10 ⁻³	2.35x10 ⁻³
M1675C	“	1675	612	2.43x10 ⁻³	2.47x10 ⁻³
M1700A	Catarina	1700	633	2.27x10 ⁻³	2.59x10 ⁻³
M1700B	“	1700	619	2.22x10 ⁻³	2.41x10 ⁻³
M1700C	“	1700	627	2.15x10 ⁻³	2x10 ⁻³
M1760A	Chinchiná	1760	635	2.27x10 ⁻³	2.11x10 ⁻³
M1760B	“	1760	637	2.1x10 ⁻³	2.19x10 ⁻³
M1760C	“	1760	623	2.18x10 ⁻³	2.15x10 ⁻³
M1830A	Chinchiná	1830	562	2.24x10 ⁻³	2.28x10 ⁻³
M1830B	“	1830	594	2.42x10 ⁻³	2.17x10 ⁻³
M1830C	“	1830	562	2.46x10 ⁻³	2.49x10 ⁻³
M1962A	Catarina	1962	643	2.15 x10 ⁻³	2.1 x10 ⁻³
M1962B	“	1962	607	2.43 x10 ⁻³	2.35 x10 ⁻³
M1962C	“	1962	619	2.39x10 ⁻³	2.1x10 ⁻³

presenta en la tabla 6 considerando las medidas realizadas usando el ajuste de la amplitud y el criterio de retardo en la fase de la señal FA para tres granos por muestra. De estos valores promedio se puede ver que existen leves variaciones en la difusividad térmica para las muestras de café verde con el cambio de la altura geográfica del cultivo como se muestra en la figura 14. El valor de la difusividad térmica se mantiene alrededor de 0.002 cm²/s, igual que para las muestras provenientes del Quindío³⁶. Aunque la difusividad presenta poca variación con la altura del piso térmico de cultivo, la muestra proveniente de menor altura M1675, tiene una difusividad térmica mayor a las demás muestras. Esto puede ser un buen indicativo de la tendencia al aumento en la difusividad térmica con la altura geográfica, de acuerdo con lo obtenido para muestras provenientes de la región del Quindío³⁷.

En la figura 15 se muestra el comportamiento de la amplitud de la señal FA para la muestra de café orgánico tomada de una altura de 1700 m sobre el nivel del mar con diferente contenido de humedad (8-16%). En la tabla 7 se

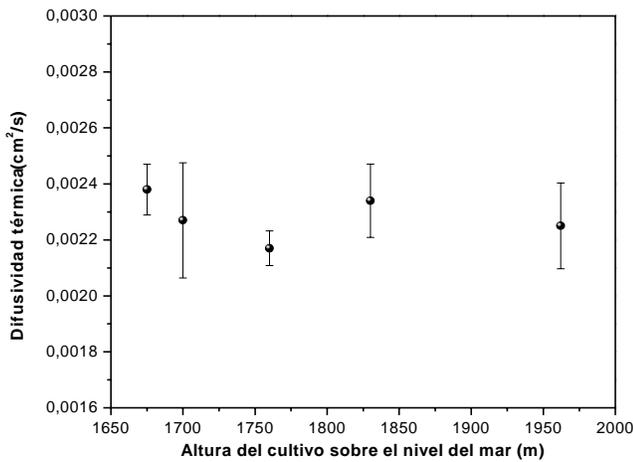


Figura 14. Difusividad térmica promedio de las muestras provenientes de diferentes alturas geográficas.

reportan los valores de las difusividades obtenidas por ajuste de la amplitud y del retardo observado en la fase de la señal FA de acuerdo con el modelo usado en el análisis anterior (ecuación 7).

En la figura 16, igual que para las muestras antes analizadas, es posible observar el retardo en la fase de la misma señal para las muestras con diferente grado de humedad, lo que también está de acuerdo con el modelo teórico.

En la tabla 7 se puede notar que los valores obtenidos utilizando el criterio del retardo en la fase, corroboran

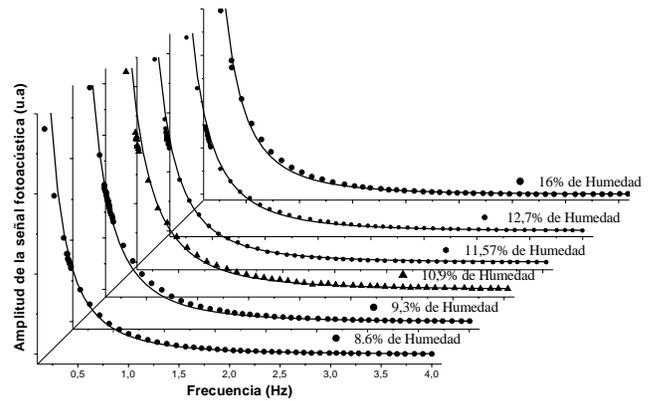


Figura 15. Amplitud de la señal FA en función de la frecuencia de modulación, para muestras de café orgánico con diferentes porcentajes de humedad, los puntos indican los resultados experimentales y la línea corresponde al ajuste hecho con el modelo de Rosenzweig-Gersho.

Tabla 6. Difusividad térmica promedio obtenida para cada muestra, usando los valores hallados del ajuste en la amplitud y del criterio de retardo en la fase de la señal FA.

Muestra	difusividad térmica (cm ² /s)	Error (cm ² /s)
M1675	0.0024	±0.0001
M1700	0.0023	±0.0002
M1760	0.0022	±0.0001
M1830	0.0023	±0.0001
M1962	0.0023	±0.0002

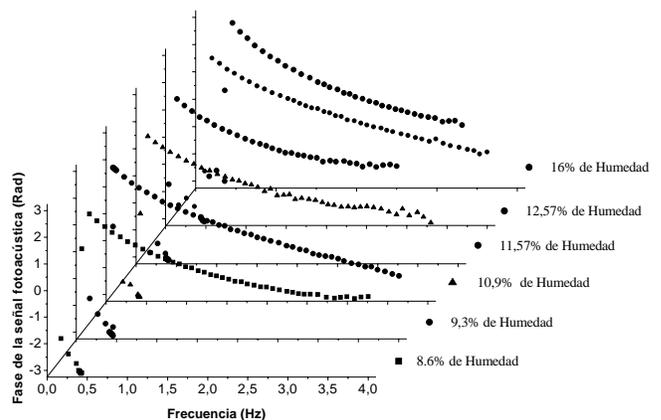


Figura 16. Fase de la señal FA en función de la frecuencia de modulación, para muestras de café orgánico con diferentes porcentajes de humedad, los puntos indican los resultados experimentales; es posible apreciar el atraso en la fase para cada una de las medidas, este valor fue calculado tomando el promedio en los puntos de la discontinuidad.

Tabla. 7. Lista de difusividades térmicas ajustando la amplitud (columna 3) y la fase (columna 4), variando el porcentaje de humedad del grano.

Humedad %	Espesor (μm)	difusividad térmica (amplitud) cm^2/s	difusividad térmica (fase) (cm^2/s)
8,6	607	0.0019 ± 0.0001	0.00210 ± 0.00002
9,3	732	0.0019 ± 0.0002	0.00185 ± 0.00002
10,9	606	0.0022 ± 0.0001	0.00221 ± 0.00002
11,6	588	0.0021 ± 0.0001	0.00214 ± 0.00002
12,7	563	0.0023 ± 0.0002	0.00234 ± 0.00002
16	587	0.0029 ± 0.0003	0.00279 ± 0.00004

coherentemente los encontrados ajustando la amplitud; también se detecta una dependencia lineal de la difusividad térmica con el porcentaje de humedad de las muestras como se observa en las figuras 17 y 18. Ya que los valores obtenidos del criterio del retardo en la fase presentan menos error, se puede considerar que la dependencia entre difusividad térmica y porcentaje de humedad en el grano de café, H, se puede representar por la función obtenida del ajuste lineal en la figura 18:

$$\alpha = mH + b = 1.09953 \times 10^{-4} H + 9.71601 \times 10^{-4}, \quad (8)$$

Debido a que la estructura celular del grano se puede ver seriamente afectada por el uso de químicos, se analizó la relación entre esta y la difusividad térmica, para muestras cultivadas con y sin el uso de químicos. En las imágenes obtenidas por medio del microscopio óptico para el café

tradicional presentadas en la figura 19 se observan manchas que pueden estar relacionadas con la presencia de agroquímicos, como también tejidos con células de formas irregulares, ausencia de pared celular, cambios bruscos en los espacios intercelulares, de tal forma que las células se encuentran dispersas por todo el tejido con muy poco orden, lo cual es confirmado por el histograma, donde se nota poca uniformidad del área celular. En el café orgánico estas manchas no se encontraron y en todas ellas se observaron células con tejidos y paredes muy bien definidas, con espacios intercelulares en promedio de $3.9 \pm 0.1 \mu\text{m}$ y áreas de $25.2 \pm 0.2 \mu\text{m}^2$ como se muestra en la figura 20. El análisis detallado de la estructura celular de café orgánico y tradicional por medio de microfotografías se muestra en la tabla 8.

En la figura 21 se muestran los histogramas realizados con las medidas de difusividad térmica, hechas a muestras de café caturra tradicional y orgánico (ver tabla 9),

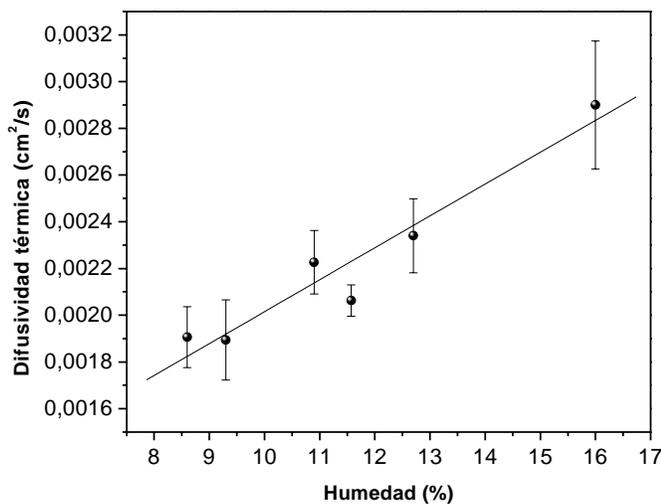


Figura 17. Difusividad térmica obtenida ajustando la amplitud de la señal FA en función del porcentaje de humedad del grano.

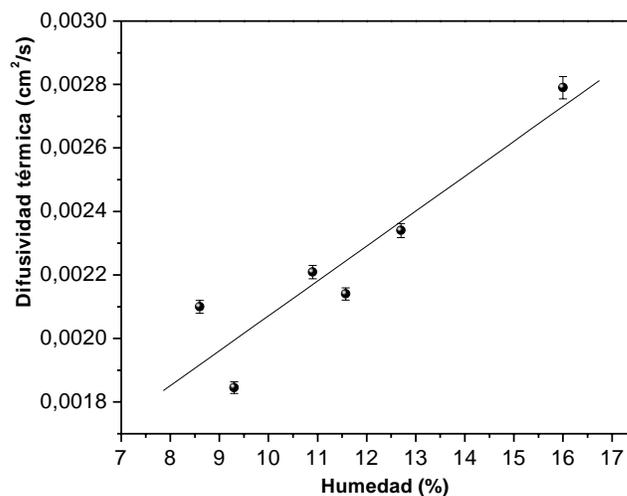


Figura 18. Difusividad térmica obtenida del retardo observado en la fase de la señal FA en función del porcentaje de humedad del grano.

Tabla 8. Análisis detallado de la estructura celular de café orgánico y tradicional por medio de microfotografías

	CAFÉ ORGÁNICO		CAFÉ TRADICIONAL	
ESPACIOS INTERCELULARES	3.9µm² ± 0.1		No presenta espacios intercelulares uniformes	
ÁREA MANCHADA ACEITE	9.2µm² ± 0.1		5.2µm² ± 0.1	
COLOR ÁREA MANCHADA ACEITE	ROJO	204.7±0.45	ROJO	206.7 ± 0.3
	VERDE	167.1±1.52	VERDE	167.1 ± 1.8
	AZUL	128.1±1.35	AZUL	135.1 ± 1.2
ÁREA MANCHADA AGROQUÍMICOS	No presenta área manchada por agroquímicos		3.14± 0.2/22.38 µm²	
COLOR MANCHA AGROQUÍMICOS	No presenta área manchada por agroquímicos		ROJO	195.7 ± 1.1
			VERDE	94.3 ± 0.7
			AZUL	14.7 ± 1.7
ÁREA DE ACEITE CAPA EXTERNA	6.2µm² ± 0.1		2.3 µm² ± 0.2	
ÁREA DE ACEITE CAPA MEDIA	10.3µm² ± 0.2		5.6 µm² ± 0.2	
ÁREA DE ACEITE CAPA INTERNA	20.8µm² ± 0.2		8.6 µm² ± 0.3	

Tabla 9. Valores de difusividad térmica encontrados para café orgánico y tradicional

Muestra	Frecuencia de Corte	Espesor (cm)	Difusividad térmica (amplitud) (cm²/s)	Difusividad térmica (fase) (cm²/s)	Difusividad promedio (cm²/s)
Café tradicional	0,17109	0,0568± 0.0002	0,0017± 0.0001	0,00177± 0.00001	0,0018± 0.00004
	0,14952	0,0602± 0.0002	0,0017± 0.0001	0,00170± 0.00001	
	0,18939	0,0599± 0.0001	0,0021± 0.0002	0,00199± 0.00001	
	0,16384	0,0592± 0.0001	0,0018± 0.0001	0,00181± 0.000003	
	0,14906	0,0594± 0.0001	0,0017± 0.0001	0,00166± 0.000004	
	0,17519	0,0596± 0.0001	0,0020± 0.0002	0,00193± 0.000004	
	0,16117	0,0597± 0.0001	0,0018± 0.0001	0,00192± 0.000003	
	0,1444	0,0600± 0.0001	0,0016± 0.0002	0,00163± 0.000003	
	0,13075	0,0591± 0.0001	0,0014± 0.0001	0,00158± 0.000002	
	0,1412	0,0594± 0.0001	0,0016± 0.0001	0,00175± 0.000003	
0,17268	0,0594± 0.0001	0,0019± 0.0001	0,00195± 0.000002		
Café orgánico	0,23855	0,0578± 0.0002	0,0025± 0.0001	0,00262± 0.00002	0,0022± 0.00004
	0,23879	0,0583± 0.0002	0,0026± 0.0001	0,00268± 0.00002	
	0,16688	0,0607± 0.0001	0,0019± 0.0001	0,00193± 0.00001	
	0,18239	0,0605± 0.0002	0,0021± 0.0002	0,00212± 0.00001	
	0,19011	0,0602± 0.0002	0,0022± 0.0002	0,00218± 0.00001	
	0,2028	0,0595± 0.0002	0,0023± 0.0003	0,00232± 0.00001	
	0,18859	0,0598± 0.0002	0,0021± 0.0002	0,00205± 0.00001	
	0,19328	0,0598± 0.0002	0,0022± 0.0003	0,00209± 0.00001	
	0,18224	0,0599± 0.0001	0,0021± 0.0001	0,0022± 0.000001	
	0,19608	0,0589± 0.00002	0,0021± 0.0001	0,00215± 0.000001	
0,18634	0,0592± 0.00004	0,0021± 0.0002	0,00204± 0.000002		

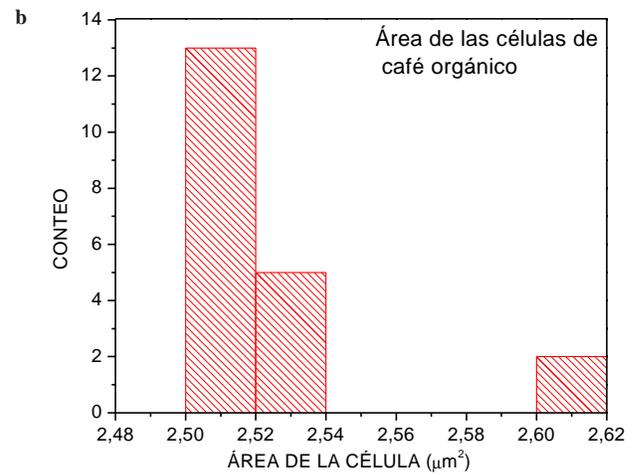
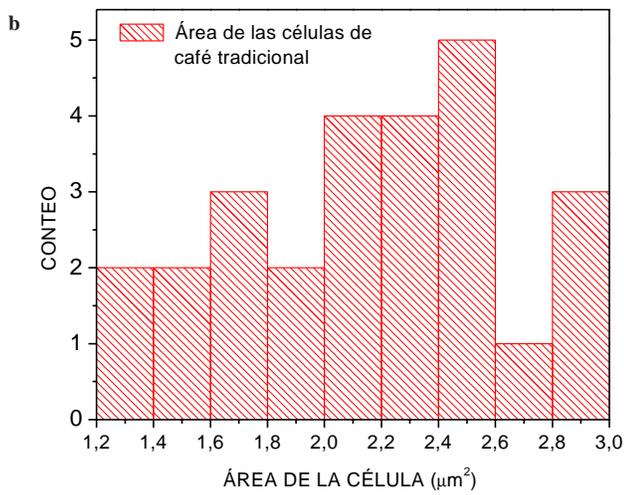
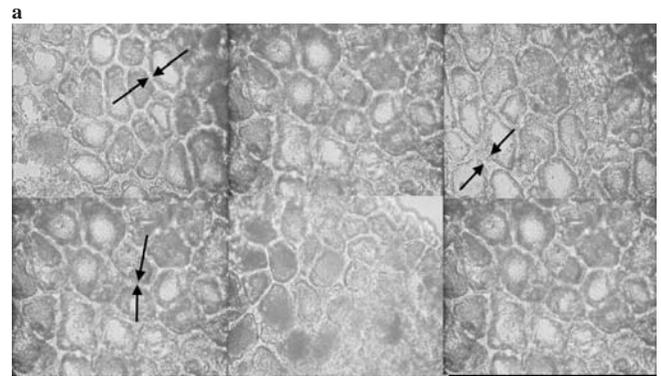
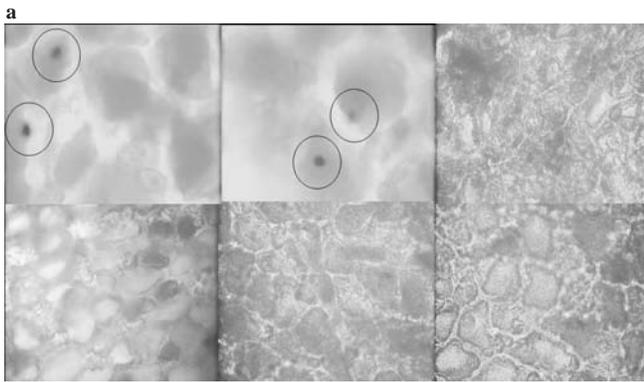


Figura 19. a) Imágenes de la estructura celular del café tradicional, b) histograma que muestra el comportamiento de la distribución del área celular.

Figura 20. a) Imágenes de la estructura celular del café orgánico, b) histograma que muestra el comportamiento de la distribución del área celular.

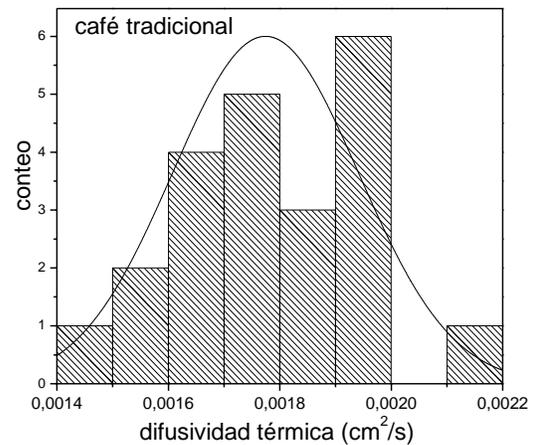
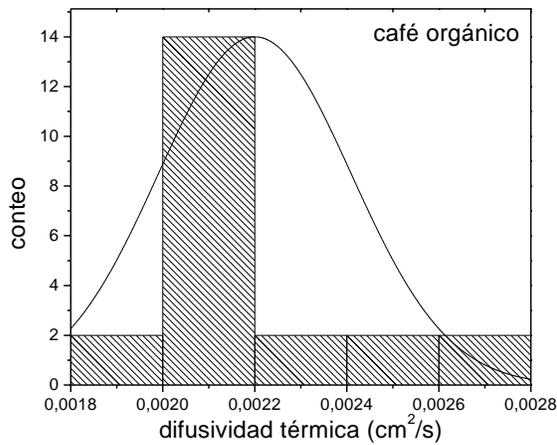


Figura 21. Histograma de los valores obtenidos de difusividad térmica para el café orgánico y tradicional.

para estas últimas se observa homogeneidad en la concentración de los datos en el rango de 0.0020 cm²/s a 0.0022 cm²/s, la cual puede asociarse con el nivel de organización de la estructura celular y la composición química de este tipo de café; a diferencia de estos, los datos obtenidos para muestras de café tradicional tienen un comportamiento muy heterogéneo, asociado posiblemente con irregularidades en el espaciado intercelular y la concentración de sustancias anormales generadas por el uso de abonos y pesticidas químicos, presentada en las microfotografías de la figura 19.

Conclusiones

Por medio de la espectroscopía fotoacústica, considerando en particular la fase de la señal, poco afectada por problemas de saturación, fue posible estudiar la influencia de variables como: altura, humedad inicial de la muestra y condiciones de cultivo; en la pigmentación del café tostado y molido la presencia de otros pigmentos que absorben cerca del ultravioleta.

Adicionalmente, se realizaron medidas de difusividad térmica usando la técnica FA de celda abierta para muestras de café en grano verde usando el criterio relativamente novedoso de retardo en la fase de la señal FA. Este retardo se pudo observar de manera experimental, debido a que se trabajó en un rango de frecuencias de choppeo cercanas a la frecuencia de corte para la muestra (0.16-5 Hz), utilizando un chopper construido en nuestro laboratorio. Los valores obtenidos de difusividad térmica no mostraron una relación bien determinada con la variable altura, pero se pudo determinar un comportamiento casi lineal entre esta y el contenido de humedad del grano; la relación fue más determinante al encontrar una menor dispersión de estos valores para muestras de café orgánico, centrada en 0.0022 cm²/s, comparada con los del café tradicional centrados en 0.0018 cm²/s. En este caso también se logró disminuir el error en la medida con la utilización de un láser de baja potencia, pero situado a una corta distancia de la celda, y de un medidor de espesores con un error instrumental de $\pm 1 \mu\text{m}$.

Finalmente, los resultados muestran, que se tienen evidencias claras basadas en la morfología celular y medidas de difusividad térmica, que pueden llevar a establecer un criterio de certificación de café orgánico; y que la forma de los espectros de muestras de café tostado y molido son diferentes, dependiendo de la calidad, origen y humedad inicial del grano. De tal forma que un estudio de correlación establece, por comparación con una muestra patrón, la identidad del café.

Agradecimientos

Agradecemos muy especialmente al ingeniero Carlos Alberto Zuluaga y a la cooperativa de café orgánico TATAMÁ por su colaboración en la consecución de las muestras, a COLCIENCIAS y la Universidad del Quindío por el soporte económico para la realización de estos estudios.

Bibliografía

1. **C.W. Chen, C.K. Shu, C.T. Ho, J.** 1996. *Agric. Food Chem.* **448**: 2361.
2. **S. Valtueña, D. Del Rio, N. Pellegrini, D. Ardigó, L. Franzini, S. Salvatore, P. M. Piatti, P. Riso, I. Zavaroni and F. Brighenti.** 2006. *European Journal of Clinical Nutrition* advance online publication; 10.1038/sj.ejcn.16024852006 ISSN: 0954-3007.
3. **Puerta G. I.** 1999. *Cenicafé*, **50**(1), 78.
4. **Yilmaz Murat.** 2006. *Development* **49**: 40-44.
5. **Ospina Salazar Orlando, Duque Orrego Hernán, Farfán Valencia Fernando.** 2003. *Cenicafé*, **54** (3): 197-207.
6. **A. Rosencwaig and A. Gersho, J.** 1976. *Appl. Phys.* **47**: 64.
7. **N. Alonso Vante.** 2005. *Electroquímica y electrocatálisis. Técnicas de investigación aplicada a sistemas electroquímicos in situ y ex situ*, El Cid Editor, 175-193.
8. **A. Rosencwaig.** 1980. *Photoacoustics and Photoacoustic Spectroscopy*. Wiley, New York.
9. **H. Vargas and L.C.M. Miranda.** 1988. *Phys. Rep.*, **161**: 45-101.
10. **M. J. Adams , G. F. Kirkbright.** 1977. *Analyst*, **102**: 678.
11. **N.F. Leite, N. Cella, H. Vargas, L.C.M. Miranda. J.** 1987. *Appl. Phys.* **61**: 3025.
12. **F. Gordillo D, J.G. Mendoza A.** 2001. *Rev. Col. Fis.* **33**, 2, 164.
13. **CONSEJO MEXICANO DEL CAFÉ, A.C,** www.sagarpa.gob.mx/Cmc/cafe04sp7.htm
14. **G. I Puerta.** 2000. *Cenicafé*, **51**(1), 5.
15. **J.J Castaño., M. Torres L.** 1999. *Cenicafé*, **50**(4): 259.
16. **Joseph Irudayaraj,** 2001. *Food processing operations Modeling desing and analysis*, New York.
17. **M. Bianchi Méndez.** 2005. *Estudio de la naturaleza y distribución de defectos en obleas de GaAs mediante técnicas de inyección de haces*, Universidad Complutense de Madrid, 33-36.
18. **F. Gordillo D, Mendoza J.G. A.** 2001. *Rev. Col. Fis.* **33**, 2: 164.
19. **H. Vargas, L.C.M. Miranda.** 1987. In *Photoacoustic and Thermal wave phenomena in Semiconductors*, Elsevier, New York.
20. **S.O. Ferreira, C. Ying, I.N. Bandeira, L.C.M. Miranda, H. Vargas.** 1998. *Phys. Rev. B*, **39**,11. 1967-7970.

21. **G. Ziegler, D.P.H. Hasselman. J.** 1981. *Mater. Sci.* **16**: 495.
22. **O. Ochoa, A. Amézquita, F. Chejne.** 2006. Propiedades termofísicas de la carne: revisión del estado del arte. *Red Dyna*, 1-18. (<http://site.ebrary.com/lib/bibliouquindiosp/Doc?id=10125684&ppg=3>)
23. **Balderas J.A., Mandelis A. J.** 2001. *Appl. Phys.* **90** (5): 2273.
24. **F. Gordillo-Delgado, L. F. Marín-Ramírez, J.A. Herrera-Cuartas, H. Ariza-Calderón.** 2004. *Revista Colombiana de Física*, **360** (2): 286.
25. **J.C. Roark, R.A., Palmer.** 1978. *Chem Phys Lett*, **60**: 112.
26. **H.D. Breuer, H. Jacob.** 1980. *Chem Phys Lett*, **73**: 172.
27. **L. W. Burggraf, D.E. Leyden.** 1980. *Appl Phys*, **51**: 4985.
28. **T.W. Goodwin.** 1988. *Plant Pigments*, Academic Press, Londres, 1-60.
29. **G. Downey, J. Bousson. J.** 1996. *Sci Food Agric.* **71**: 41-49.
30. **T. Suzuki, K. Iwai.** 1984. *Alkaloids*. Academia Press. New Cork, 227-299.
31. **Z. Guiwen, C. Hua, L. Siquan, S. Qingde.** 1990. *Springer Series in Optical sciences*. Vol. 62. Photoacoustic and photothermal phenomena 2. Gerermany. 442-444.
32. **Rosencwaig A. and Gersho A. J.** 1976. *Appl. Phys.* **47**: 64.
33. **Marquezini M.V., Cella N., A. Mansanares M., Vargas H. & Miranda L.C.M.** 1991. *Meas. Sci. Technol.* **2**: 396.
34. **Calderón A., Muñoz Hernández R., Sánchez Sinécio F and J. App. Phys.** 1998. **84**: 6327-6329.
35. **R. T. Suimm,** 1983. *Appl. Phys. Lett.* **42**: 955.
36. **A. E. Kostaropoulos, G. D. Saravacos.** 1997. *Journal of food engineering*, **33**: 101-109.
37. **F. Gordillo-Delgado, L. F. Marín-Ramírez, J.A. Herrera-Cuartas, H. Ariza-Calderón.** 2004. *Revista Colombiana de Física*, **36(2)**: 485.

Recibido el 31 de mayo de 2007

Aceptado para su publicación el 20 de junio de 2007

PRODUCCIÓN Y CARACTERIZACIÓN DE PELÍCULAS CERÁMICAS SINTETIZADAS POR EL MÉTODO SOL-GEL PARA APLICACIÓN ANTICORROSIVA: $\text{SiO}_2\text{-ZrO}_2$ SOBRE ACERO INOXIDABLE Y $\text{SiO}_2\text{-TiO}_2$ SOBRE ACERO AL CARBÓN

por

Jorge H. Bautista-Ruiz¹, César Ortiz¹, Enrique Vera¹ & Jorge E. Rodríguez-Páez²

Resumen

Bautista-Ruiz, J.H., C. Ortiz, E. Vera & J.E. Rodríguez-Páez: Producción y caracterización de películas cerámicas sintetizadas por el método SOL-GEL para aplicación anticorrosivo $\text{SiO}_2\text{-ZrO}_2$ sobre acero inoxidable y $\text{SiO}_2\text{-TiO}_2$ sobre acero al carbón. Rev. Acad. Colomb. Cienc. **31** (119): 235-240, 2007. ISSN 0370-3908.

En el presente trabajo se indica la metodología utilizada para consolidar soles estables y componer películas delgadas cerámicas de $\text{SiO}_2\text{-ZrO}_2$ y $\text{SiO}_2\text{-TiO}_2$, a partir del tetrabutóxido de titanio (TBT), tetra etil-ortosilicato (TEOS) y tetrabutóxido de zirconio (TBZ) utilizando el método SOL-GEL. El estudio se centró principalmente en la caracterización de las propiedades dieléctricas del cerámico mediante Espectroscopia de Impedancia Electroquímica (EIS). Adicionalmente, se llevó a cabo un análisis con Microscopía Electrónica de Barrido (SEM) para determinar la homogeneidad de los recubrimientos. Se encontró que para las mismas condiciones de concentración y velocidad de extracción la respuesta anticorrosiva de las películas cerámicas depositadas sobre sustratos de acero AISI304 es más eficiente que para las películas depositadas sobre acero al carbón.

Palabras clave: SOL-GEL, corrosión, técnicas electroquímicas, SEM.

¹ Grupo de Superficies, Electroquímica y Corrosión –GSEC-, Departamento de Física, Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia. Tunja, Colombia.

² Departamento de Física. Universidad del Cauca. Popayán, Colombia.

Abstract

This paper presents the methodology employed to consolidate stable sol and to make up thin ceramics films of $\text{SiO}_2\text{-ZrO}_2$ and $\text{SiO}_2\text{-TiO}_2$ from Tetrabutoxytitanium (TBT), Tetraethylorthosilicate (TEOS) and the Tetrabutoxyzirconium (TBZ) by using the method known as sol-gel. This study is focused mainly on the characterization of the dielectrics properties of the ceramic one by means of Electrochemical Impedance Spectroscopy (EIS). Additionally, it was carried out an analysis with Scanning Electronic Microscopy (SEM) to determine the homogeneity of the coatings. It was found that for the same concentration conditions and extraction speed the anticorrosive answer of the ceramic films deposited on stainless steel AISI304 substrates is more efficient than for the films deposited on steel to the coal.

Key words: SOL-GEL, corrosion, electrochemical technique, SEM.

1. Introducción

El procedimiento sol-gel es uno de los métodos de síntesis de materiales que presenta gran interés en la actualidad [1, 2, 3]. Este procedimiento consta de tres partes principalmente: la preparación del sol, la gelación del mismo y la eliminación del solvente [1]. El sol puede producirse a partir de una sal inorgánica o un precursor molecular, principalmente metal-alcóxidos. En el seno del sistema se forma una red molecular debido a reacciones de condensación, principalmente de especies hidrolizadas, y la microestructura que se conforma depende fuertemente de las condiciones experimentales. La hidrólisis del precursor molecular, su reacción con el agua, usualmente se realiza en presencia de un catalizador ácido o básico el cual permite un control de la velocidad y extensión de la reacción de hidrólisis [4]. Diferentes ácidos han sido usados: HCl [5], HNO_3 [6] o CH_3COOH [7].

El mayor problema que se presenta, en la obtención de cerámicos multicomponentes, es la conformación de un gel homogéneo debido a que las velocidades de hidrólisis y condensación de los metal-alcóxidos correspondientes a los cationes de interés pueden ser diferentes.

Los sistemas bicomponentes que se analizan en este trabajo son el $\text{SiO}_2\text{-TiO}_2$ y $\text{SiO}_2\text{-ZrO}_2$. Con estos sistemas es posible la elaboración de vidrios que presenten baja expansión térmica [8], y alto índice de refracción [9], y recubrimientos antirreflexivos o anticorrosivos [10].

La caracterización de las capas aplicadas sobre los diferentes sustratos se realiza mediante Microscopía Electrónica de Barrido (SEM) para obtener información de la topografía. En la evaluación de las propiedades dieléctricas se utiliza la técnica de Espectroscopia de Impedancia Electroquímica (EIS) [11, 12, 13] evaluando las propiedades anticorrosivas de las películas.

2. Procedimiento experimental

En la figura 1 se indica el procedimiento de conformación de los soles estables para la obtención de los recubrimientos de los sistemas $\text{SiO}_2\text{-TiO}_2$ y $\text{SiO}_2\text{-ZrO}_2$.

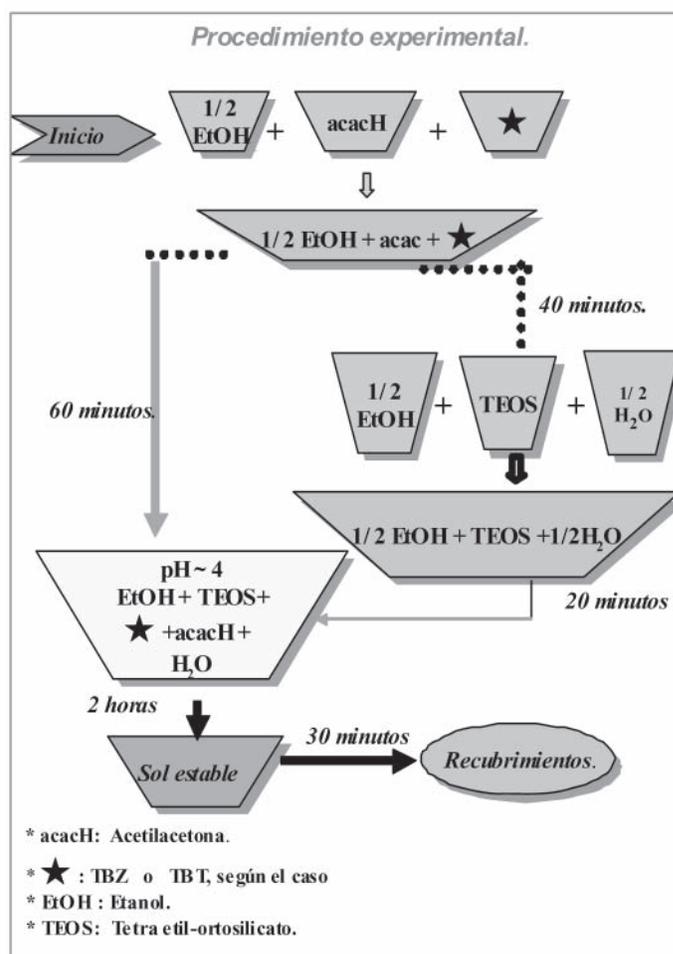


Figura 1. Proceso para el conformado de soles estables.

Para conformar el sol del sistema $\text{SiO}_2\text{-TiO}_2$ se parte de los alcóxidos respectivos que son el Tetrabutóxido de titanio (TBT) y el Tetraetilortosilicato (TEOS). De igual forma para el sol del sistema $\text{SiO}_2\text{-ZrO}_2$ a partir del Tetrabutóxido de zirconio (TBZ) y TEOS.

En la obtención de los recubrimientos del sistema $\text{SiO}_2\text{-TiO}_2$ los sustratos utilizados fueron chapas de acero al carbón de 1,5 cm. x 3 cm., pulidas a brillo metalográfico y desengrasadas con acetona. Luego se llevaron a 100 °C en mufla para evaporar el solvente. Se obtuvieron las películas cerámicas mediante la técnica de inmersión, utilizando una velocidad de 3.69 cm./min. previa obtención del sol estable en concentración de 90/10: Ti/Si.

La deposición del sistema $\text{SiO}_2\text{-ZrO}_2$, se efectuó sobre sustratos de acero inoxidable AISI 304 de 1.5 cm. x 5 cm., a las cuales se les realizó una limpieza con acetona y ultrasonido. Luego se colocaron en un horno a 100°C para evaporar los solventes. A continuación se conformaron las películas por medio de la técnica de inmersión con velocidad de 3.69 cm./min. previa obtención de los soles, como muestra la figura 1, en concentración de 90/10: Zr/Si, y con un tiempo de envejecimiento de 180 horas.

El sinterizado de las películas cerámicas, obtenidas de los dos sistemas conformados, se realizó en mufla a una velocidad de calentamiento de 6.5°C/min. desde temperatura ambiente hasta 500°C y se mantuvo allí una hora, luego se dejó enfriar hasta alcanzar la temperatura ambiente.

La caracterización de los recubrimientos se desarrolló así: en los análisis de Microscopía Electrónica de Barrido se utilizó un equipo LEO 430. Espectroscopia de Impedancia Electroquímica se realizó con un equipo ZAHNER IMG por medio de una celda con un electrodo de referencia de Ag/AgCl, contraelectrodo de Platino y la muestra a analizar como electrodo de trabajo. En este último análisis se barrieron frecuencias desde 10^5 a 10^{-2} Hz; voltaje aplicado de 15 mV en un área de exposición de 1 cm². Como solución de trabajo, para realizar las pruebas, se utilizó Na_2SO_4 al 1 Molar con un pH de 5.5.

3. Resultados y discusión

3.1 Sistema $\text{SiO}_2\text{-ZrO}_2$

La micrografía de SEM, figura 2, muestran la topografía de la película cerámica. En ella se evidencia la película depositada sobre el sustrato de acero inoxidable AISI304, destacándose la relativa homogeneidad del recubrimiento.

En la figura 2 es evidente la formación de muy pocos poros no generalizados y la presencia de rayones sobre la película, estos últimos son réplica de los defectos que se encuentran en la superficie del sustrato debido al proceso de pulido del mismo. Los poros que se forman se generan durante la etapa de sinterización debido a un proceso inadecuado de éste o posiblemente por incrustación de impurezas al momento de conformar la película.

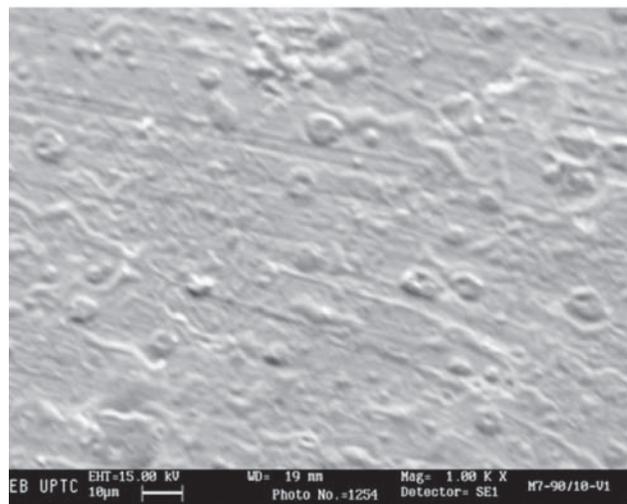


Figura 2. Micrografía de SEM de una película $\text{SiO}_2\text{-ZrO}_2$ depositada sobre acero AISI 304

Los diagramas de Bode mostrados en la figura 3, son la correlación de la información obtenida mediante EIS de la impedancia y la frecuencia. El análisis de EIS se centra, principalmente, en los valores de resistencia a la polarización, R_p . Esta R_p es la resistencia que el recubrimiento opone al paso de iones desde la solución de trabajo al sustrato, impidiendo que este se corra. En términos generales cuando un recubrimiento registra un alto valor de resistencia a la polarización se podrá concluir que es buen protector anticorrosivo.

En la gráfica de la figura 3 es necesario distinguir dos regiones con respecto al logaritmo de la impedancia, estas son: los puntos más altos determinan los valores correspondientes a la resistencia de polarización y, los puntos más bajos suministran la información acerca del valor de la resistencia de la solución de trabajo. Con estas indicaciones, se observa como la resistencia de polarización disminuye a medida que se aumenta el tiempo de inmersión de las películas en la solución de trabajo. Para un tiempo de 52 horas el valor de R_p es cercano a $2,5 \times 10^5$ Ohms; para 77 horas aproximadamente $1,4 \times 10^5$ Ohms y, para 167 horas un valor alrededor de $5,3 \times 10^4$ Ohms. El sustrato muestra una R_p cercana a 473 Ohms. En la gráfica de la figura 3, el valor de la resistencia de la solución (R_s) tiene un valor promedio de 18,7 Ohms. En relación a lo

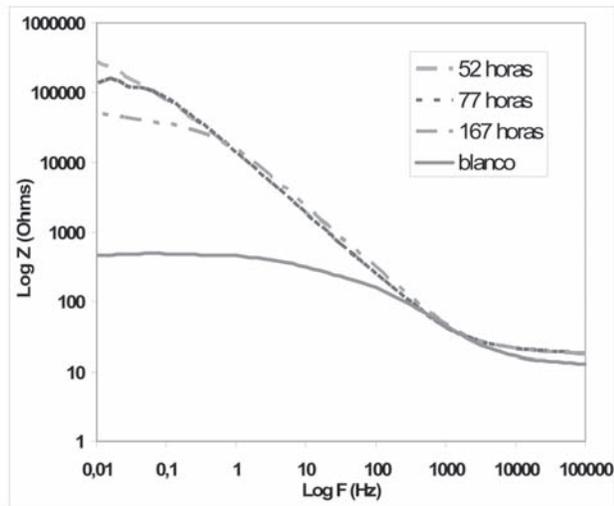


Figura 3. Curvas de EIS para películas de $\text{SiO}_2\text{-ZrO}_2$ y el sustrato de acero AISI 304

mencionado anteriormente, se advierte que los recubrimientos cumplen con alguna acción anticorrosiva debido a la degradación que sufren al contacto con la solución de Na_2SO_4 .

El comportamiento que muestran los recubrimientos en la gráfica de la figura 3 en cuanto a la disminución de la resistencia de polarización en función del tiempo se explica por la aparición de poros durante el proceso de sinterización. Estos pequeños poros permiten el paso de los iones de la solución al sustrato de acero. Esto se confirma con la micrografía de SEM de la figura 2.

3.2 Sistema $\text{SiO}_2\text{-TiO}_2$

La figura 7 muestra la topografía de la película cerámica del sistema $\text{SiO}_2\text{-TiO}_2$ depositada sobre sustratos de acero al carbón. En ella se observan "fibras" entrecruzadas, zonas de ampollamientos, poros y grietas. Los ampollamientos y las estructuras "fibrosas" pueden deberse a efectos del pH ácido del sol del cual se obtienen los recubrimientos, generando oxidaciones previas en el sustrato que influyen en una mala adhesión de la película cerámica y por tanto la presencia de las imperfecciones anteriormente mencionadas. Las grietas, posiblemente referidas a fuerzas de tensión en la interfase sustrato-recubrimiento, se generan durante la etapa de sinterización debido a las diferencias en los coeficientes de dilatación del sustrato (acero al carbón) y la película cerámica. Los poros se forman por una evaporación brusca de los disolventes debido a una alta velocidad de sinterizado utilizada en el proceso de densificado de las películas.

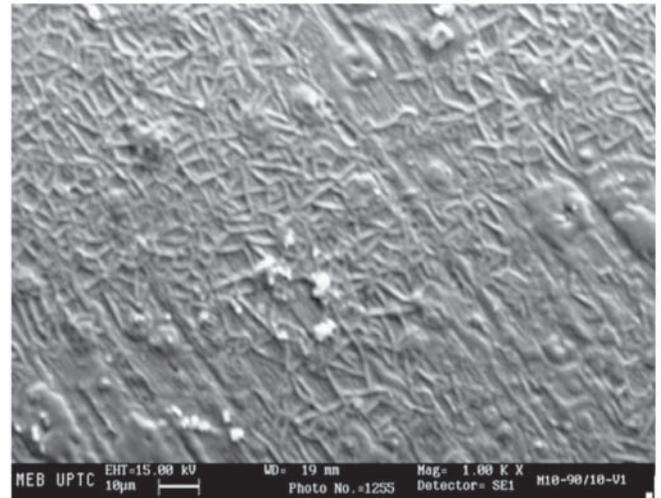


Figura 4. Micrografía de SEM de una película $\text{SiO}_2\text{-TiO}_2$ depositada sobre acero al carbón.

La figura 5 muestra los diagramas de Bode para el sistema $\text{SiO}_2\text{-TiO}_2$ depositado sobre sustratos de acero al carbón. Se observa como la resistencia de polarización disminuye bruscamente a medida que se aumenta el tiempo de inmersión de las películas en la solución de trabajo. Para un tiempo de 0 horas R_p tiende a valores superiores de 10^6 Ohms. A 22 horas el valor de R_p es cercano a 10^5 Ohms; a 25 horas aproximadamente $5,8 \times 10^4$ Ohms y, para 39 horas un valor alrededor de 208 Ohms. El sustrato muestra una R_p alrededor de 76,8 Ohms. El valor de la resistencia de la solución (R_s) tiene un valor promedio de 18,7 Ohms. Se evidencia una deficiente acción anticorrosiva de las películas debido a su alta degradación se encuentran en contacto con la solución de trabajo, esto se debe a las imperfecciones (poros, grietas y ampollamientos) que presenta la película.

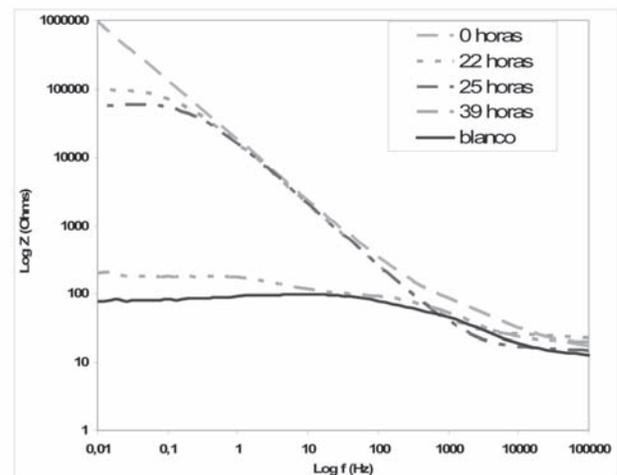


Figura 5. Curvas de EIS para películas de $\text{SiO}_2\text{-TiO}_2$ el sustrato de acero al carbón

Una característica fundamental de la Espectroscopia de Impedancia Electroquímica es permitir la simulación del comportamiento de la interfase sustrato-película mediante el acople de elementos resistivos, capacitivos y en casos muy especiales, elementos inductivos. Por este motivo, los comportamientos de las figuras 3 y 5 se pueden simular con un circuito eléctrico equivalente como el mostrado en la figura 6. Este circuito es conocido como celda de Randles, el cual indica que la capacitancia de la doble capa esta en paralelo con la impedancia debido a la reacción de traslado de iones.

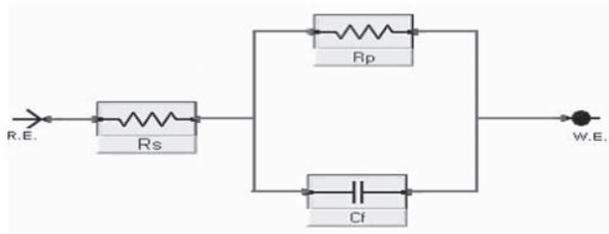


Figura 6. Circuito eléctrico que simula el comportamiento de los recubrimientos.

Para el circuito equivalente de la figura 6 se definen los elementos así: R_s corresponde a la resistencia de la solución de trabajo y es debida a la solución en la cual se sumerge el sustrato recubierto, el valor se encuentra a altas frecuencias; R_p , la resistencia al paso de iones su valor se determina a bajas frecuencias en el digrama de bode. C_f corresponde a la impedancia de la doble capa, este condensador, representa la acumulación de carga en la interfase del recubrimiento y la solución.

4. CONCLUSIONES

De acuerdo a los resultados obtenidos en el presente trabajo, y a lo anunciado durante el análisis de los mismos, se puede concluir, con relación al sistema $\text{SiO}_2\text{-ZrO}_2$ lo siguiente:

- Debido a que los recubrimientos son muy delgados, se nota bastante el efecto del sustrato. Los análisis de EIS indican que las películas depositadas sobre acero inoxidable muestran un efecto de barrera anticorrosiva en presencia de la solución Na_2SO_4 . Con el tiempo la barrera se deteriora permitiendo la interacción directa de la solución con el sustrato (AISI304).

- Al producir películas por la metodología Sol – gel, con características anticorrosivas se deben mejorar algunas condiciones como la velocidad de densificado con el fin de aumentar las condiciones de sellado, y aumentar el espesor de las películas. Las condiciones de preparación superficial del sustrato también se deben optimizar. Esto permitirá obtener películas con un buen desempeño anticorrosivo.

En cuanto al sistema $\text{SiO}_2\text{-TiO}_2$:

- Al depositar películas cerámicas sobre sustratos de acero al carbón no se obtienen buenos resultados debido a la acidez del sol que afecta al sustrato oxidándolo. Esto impide que la película se adhiera correctamente y no presente una adecuada uniformidad como lo muestra los estudios de SEM

- Los Análisis de EIS muestran que las películas depositadas son muy porosas y no ayudan a reducir la corrosión degradándose en muy poco tiempo. Lo que implica que no es posible recubrir acero al carbón por esta metodología.

REFERENCIAS

- [1].- C. J. Brinier, G. W. Scherer, *Sol-Gel Science: the physics and chemistry of sol-gel processing*, Academic Press, Inc. 1990.
- [2].- L. L. Hech, D. R. Ulrich (editores), *Science of Ceramic Chemical Processing*, John Wiley & Sons, Inc. 1986.
- [3].- L. Klein (editor), *Sol-gel technology for thin films, fibers, performs, electronics and specialty shapes*, Noyes Publications, Park Ridge, N. Y. 1988.
- [4].- L. C. Klein, *Ann. Rev. Mater Sci.*, 15, 227(1985)
- [5].- K. Kamiya, S. Sakka, J. Ito, *J. Chem. Soc. Japan*, 85, 599 (1977).
- [6].- J. B. Blum, S. R. Gurkovich, *J. Mater. Sci.*, 20, 4479 (1985).
- [7].- K. Kamiya, S. Sakka, *J. Non-Cryst. Solids* 52, 357(1982).
- [8].- S. Doeuff, M. Henry, C Sanchez, J. Livage, *J. Non-Cryst. Solids* 89, 206-216 (1987).
- [9].- J. Livage en *Better Ceramic Through chemistry*, editors C. J. Brinker, D. E. Dark, D. R. Ulrich, *Mat. Res. Soc. Symp. Proc. Vol. 73*, Material Research Society, 717-724 (1986).
- [10].- W. C. La Course, S. Kim, en *Science of Ceramic Chemical Processing*, editors L. L. Hench, D. R. Ulrich, John Wiley & Sons, Inc, 304 – 310(1986).
- [11].- F. Mansfeld, Evaluation of corrosive degradation in coated steel using alternating current impedance spectroscopy, *Corros. Sci.* 52 (6) (1996)417

[12].- M. Stratmann, K. Hoffmann, in: *Proceedings of the Ninth European Congress of Corrosion*, Utrecht, The Netherlands, p. CO-70 (1989).

[13].- L.F. Vesga, E Vera, J.H. Panqueva, Use of the Electrochemical Impedance Spectroscopy to evaluate the performance of a primer applied under different

the performance of a primer applied under different surface preparation method. *Progress in Organic Coatings*, 39, 61-65 (2000).

Recibido el 10 de marzo de 2006

Aceptado para su publicación el 7 de abril de 2007

DINÁMICA CAÓTICA DE CONDENSADOS DE BOSE-EINSTEIN EN TRAMPAS DE POTENCIAL

por

Oscar Y. Fajardo¹ & Diógenes Campos^{2,3}

Resumen

Fajardo, O.Y. & Campos, D.: Dinámica caótica de condensados de Bose-Einstein en trampas de potencial. Rev. Acad. Colomb. Cienc. **31** (119): 241-251, 2007. ISSN 0370-3908.

Se estudia la dinámica caótica de condensados de Bose-Einstein (BEC) dentro de trampas de potencial mediante el uso de una formulación hamiltoniana y un espacio de fase generalizado. El inicio del comportamiento caótico en el sistema se identifica mediante la técnica de secciones de Poincaré y el espectro de evolución; la cuantificación del grado de caoticidad del sistema, en varios escenarios, se hace con base en los exponentes de Lyapunov y la entropía de Kolmogorov-Sinai (KS).

Palabras clave: Condensado de Bose-Einstein, sección de Poincaré, exponentes de Lyapunov, entropía de Kolmogorov-Sinai.

Abstract

Chaotic dynamics of Bose-Einstein Condensates in Potential traps. An analysis of chaotic dynamics of Bose-Einstein Condensate (BEC) within potential traps is presented by using a Hamiltonian formulation and a generalized phase space. Onset of chaotic behavior of the system is identified by taking advantage of Poincaré sections and evolution spectrum; chaoticity degree is measured by means of Lyapunov exponents and Kolmogorov-Sinai (KS) entropy.

Key words: Bose-Einstein Condensates, Poincaré section, Lyapunov exponents, Kolmogorov-Sinai entropy.

1. Introducción

Bajo condiciones apropiadas un sistema de bosones presenta el fenómeno de condensación de Bose-Einstein (BEC) que es una propiedad de origen cuántico; para su realización experimental se requiere un proceso de enfriamiento del sis-

tema mediante técnicas apropiadas con trampas láser. La formación de un condensado de Bose-Einstein (BEC) se origina en una transición de fase de carácter estadístico que se presenta tanto en un gas ideal de partículas cuánticas bosónicas como en un gas de átomos bosónicos interactuantes; el BEC se forma a temperaturas muy cercanas al cero absoluto.

¹ Escuela de Física, Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia. E-mail: yofar008@yahoo.es

² Facultad de Ciencias Naturales, Universidad Jorge Tadeo Lozano, Bogotá. E-mail: dcampos@utadeo.edu.co.

³ Miembro de Número, Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Bogotá.

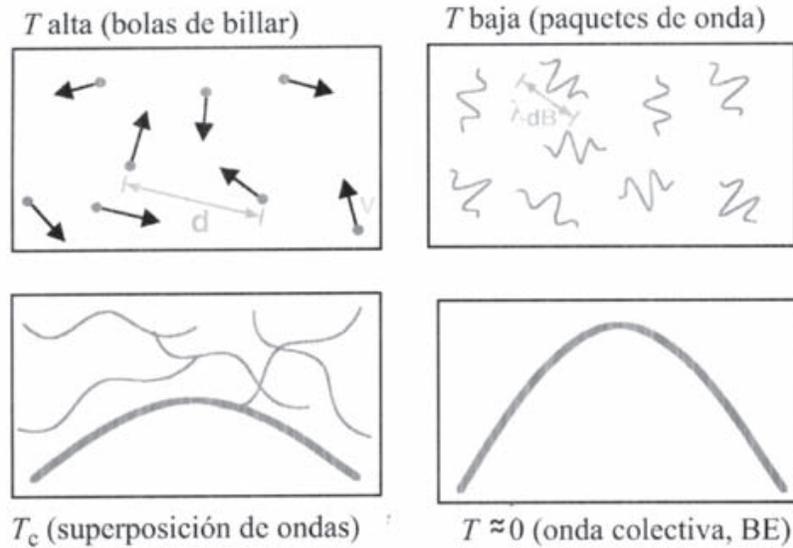


Figura 1: Esquema para describir la aparición del condensado de Bose Einstein: a medida que baja la temperatura del sistema las partículas cambian su comportamiento. Adaptada de <http://online.kitp.ucsb.edu/online/lecture/ketterle/oh/08.html>.

Para entender el proceso que da lugar al BEC conviene recordar algunos conceptos teóricos básicos: (a) En la mecánica clásica el estado de una partícula de masa m se identifica por sus variables de posición y de momento, (\mathbf{r}, \mathbf{p}) . (b) En la mecánica cuántica existe la dualidad onda-partícula en la que ellas se propagan como ondas pero se detectan como partículas. (c) La naturaleza del comportamiento de las partículas, clásico o cuántico, depende del resultado de comparar la distancia típica d entre las partículas del sistema y la longitud de onda de de Broglie (ver figura 1)

$$\lambda_{dB} := \frac{2\pi\hbar}{p} = \sqrt{\frac{2\pi}{3}} \frac{2\pi\hbar}{\sqrt{2\pi mkT}}, \quad (1)$$

donde \hbar es la constante de Planck (reducida) y T la temperatura del sistema. (d) A altas temperaturas, $\lambda_{dB} \ll d$ el comportamiento es clásico como si las partículas fuesen bolas de billar; a bajas temperaturas, $\lambda_{dB} < d$, las partículas se comportan como ondas con la longitud de onda de de Broglie; cuando $\lambda_{dB} \approx d$, se alcanza la temperatura crítica T_c que permite la superposición de ondas de materia y la existencia del fenómeno de condensación de BE; a muy bajas temperaturas, $T < T_c$, $\lambda_{dB} \gg d$, todo el condensado se comporta como una onda de materia gigante. La temperatura crítica T_c depende de la masa y del espín de los bosones, al igual que del número de partículas por unidad de volumen.

El comportamiento de un átomo del condensado se describe por la ecuación de Gross-Pitaevskii (GP) (Dalfvo,

1999),

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V_{ext}(\mathbf{r}) + \nu_0 U_0 |\Psi(\mathbf{r}, t)|^2 \right) \Psi(\mathbf{r}, t), \quad (2)$$

que es una ecuación de Schrödinger no lineal, donde ν_0 es el número de partículas en el condensado y $U_0 = 4\pi\hbar^2 a_s/m$ una constante de acoplamiento que describe la interacción entre pares de partículas, con a_s la longitud de dispersión de ondas- s , y $V_{ext}(\mathbf{r})$ el potencial externo que mantiene confinado el condensado.

El propósito de este trabajo es aplicar la ecuación de Gross-Pitaevskii en varios escenarios (figura 2):

1. Condensado de BE en una red óptica inclinada (figura 2, izquierda), que se describe por la expresión

$$V_{ext}(x) = V_0 \cos\left(\frac{2\pi x}{d}\right) + Fx, \quad (3)$$

con parámetros apropiados (V_0, d, F). La red inclinada se genera en la práctica como una superposición de dos ondas láser que se propagan en direcciones contrarias y presentan un desfase que varía linealmente. Se genera así una onda plana de longitud de onda λ , que genera una constante de red $d = \lambda/2$. En el marco de referencia no inercial de la onda, este efecto se contextualiza como una inclinación de la red.

2. Condensado de BE en un potencial tridimensional armónico

$$V_{ext}(\mathbf{r}) = \frac{m}{2} (\omega_1 x^2 + \omega_2 y^2 + \omega_3 z^2), \quad (4)$$

en un régimen fuertemente repulsivo (figura 2, centro), donde $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ son frecuencias que caracterizan la trampa.

3. Condensado de BE en un potencial tipo cosenoidal (figura 2, derecha), de la forma

$$V_{ext} = V_0 \cos(\kappa x), \quad \text{con } \kappa = \frac{2\pi}{d}. \quad (5)$$

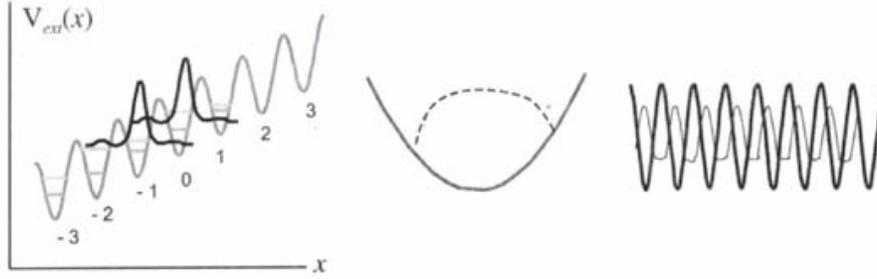


Figura 2: Descripción de los tres escenarios empleados: (Izquierda) BEC dentro de una red óptica inclinada modelado empleando los estados de W-S más bajos en cada pozo. (Centro) Perfil de un BEC dentro de un potencial tipo armónico y en el régimen de interacción fuertemente repulsivo. (Derecha) Perfil de un BEC dentro de un potencial tipo cosenoidal.

2. Condensado de BE en una red óptica inclinada

Los estados de Bloch son los estados propios del hamiltoniano asociado con una partícula que se mueve en una red periódica, ecuación (3) con $F = 0$. Si la red tiene una inclinación ($F \neq 0$), los estados propios del hamiltoniano son los estados de Wannier-Stark (WS). Estos estados se pueden emplear para estudiar un condensado de Bose-Einstein dentro de una red óptica inclinada; es decir, un sistema con un gran número de partículas interactuantes (Thommen, 2003).

2.1. Descripción del modelo

Desígnese como $\varphi_{nm}(x)$ el estado de Wannier-Stark localizado en el pozo n de la red y rotúlese con el índice m las diferentes bandas en ese pozo. Estos estados, que son altamente localizados, son invariantes ante traslaciones de un número entero de pasos de red,

$$\begin{aligned} \varphi_{nm}(x) &= \varphi_{0m}(x - n) \\ E_{nm} &= E_{0m} + n\omega_B. \end{aligned} \quad (6)$$

La ecuación de Gross-Pitaevskii (2) toma la forma

Este trabajo se fundamenta en los artículos de Thommen *et al* (2003), Salasnich (2000) y van Noort *et al* (2007). El propósito es el estudio de los escenarios ya citados con el fin de entender los regímenes dinámicos que se originan en la evolución temporal. El énfasis se centra en el estudio de la evolución temporal del sistema y, en la última parte, en la dinámica espacial.

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial t} &= \\ \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V_{ext}(x) + U_0 |\Psi(x, t)|^2 \right) \Psi(x, t), \end{aligned} \quad (7)$$

donde la energía potencial $V_{ext}(x)$ es dada por (3). La función de onda del condensado de BE se expande ahora en términos de los estados de Wannier-Stark más bajos en la red inclinada, que denominaremos como $\varphi_n(x)$:

$$\Psi(x, t) = \sum_n C_n(t) \varphi_n(x), \quad C_n(t) = \sqrt{I_n} e^{i\theta_n}; \quad (8)$$

los coeficientes de la expansión son números complejos que se escriben como el producto de un módulo por una fase, lo que permite interpretar I_n como la población de condensado localizada en el pozo n -ésimo.

El sistema dinámico que rige la evolución de la población

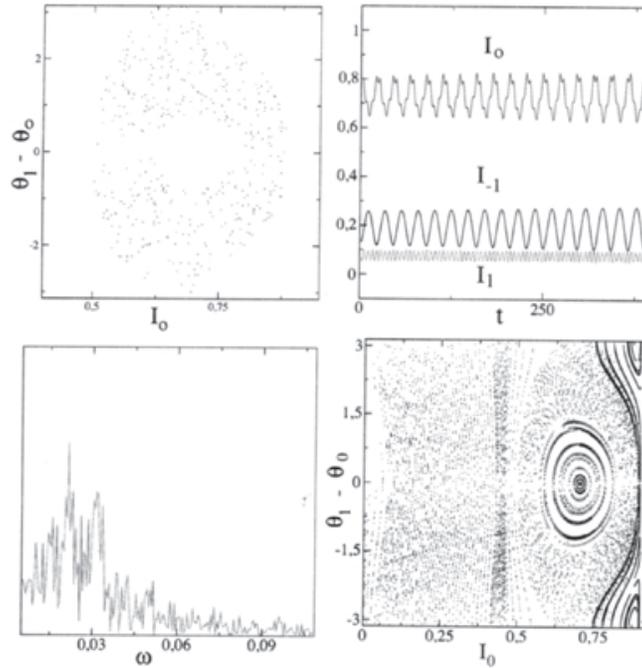


Figura 3: Caracterización dinámica, con condición inicial ($I_{-1} = 0.1, \theta_{-1} = 0, I_0 = 0.78, \theta_0 = 0, I_1 = 0.12, \theta_1 = 0$). La sección de Poincaré individual (superior izquierda) despliega características de comportamientos caóticos, predicción confirmada por el espectro de evolución (inferior izquierda) de la condición inicial simulada. (Inferior derecha) Sección de Poincaré mostrando los diferentes regímenes dinámicos del sistema.

y de la fase del pozo n -ésimo de la red es de la forma

$$\begin{aligned} \dot{I}_n &= \epsilon f(I_{n-1}, I_n, I_{n+1}, \theta_{n-1}, \theta_n, \theta_{n+1}), \\ \dot{\theta}_n &= -nF - \sigma_g I_n + \epsilon S(I_{n-1}, I_n, I_{n+1}, \theta_{n-1}, \theta_n, \theta_{n+1}), \end{aligned} \tag{9}$$

donde ϵ es un parámetro de control, cuyo valor lo determina el grado de interacción entre las fracciones de condensado de pozos adyacentes ($n - 1, n, n + 1$); $f(\dots)$ y $S(\dots)$ son funciones apropiadas; σ_g es un parámetro que depende de valores característicos del sistema.

Como se puede ver, el sistema no perturbado admite la estructura ángulo-acción; es decir, si $\epsilon = 0$,

$$I_n = I_n(0) = \text{constante}, \quad \theta_n = \theta_n(0) + \omega_n t,$$

donde

$$\omega_n = \omega_n = -nF - \sigma_g I_n = n w_B + \frac{U_o \chi_{ooo}}{h} I_n \tag{10}$$

es una frecuencia característica del sistema no perturbado (χ_{ooo} es una constante). Las trayectorias tienen lugar sobre toroides en el espacio de fase.

La condición inicial del sistema dinámico (9) se fija distribuyendo el condensado entre los pozos de la red inclinada. A partir de este estado inicial se sigue la evolución temporal del condensado en cada uno de los pozos de la red, para lo cual se hace uso de variables canónicamente conjugadas $\{I, \theta\}$, que corresponden a la población y a la fase del condensado, respectivamente.

2.2. Resultados numéricos

En el caso de acoplamiento entre los pozos, se tiene $\epsilon \neq 0$ en las ecuaciones (9). Los resultados de la simulación que se presentan aquí, que se obtuvieron al emplear un método de paso adaptativo tipo Runge-Kutta para evoluciones temporales no muy lejanas, muestran los aspectos más relevantes de la topología del espacio de fase del sistema. Existen dos grandes regiones, una completamente regular de toroides conectados ligeramente deformados y una zona en la cual coexisten algunos comportamientos regulares dentro de un mar caótico. Se muestra el espectro de evolución de una trayec-

toría perteneciente a este último régimen (ver figura 3) que, como se puede ver, revela características propias de una evolución caótica.

Los comportamientos caóticos se presentan en la región del espacio de fase para la cual las frecuencias del sistema no perturbado se relacionan en forma racional, caso en el cual se tiene una resonancia:

$$\frac{\omega_n}{\omega_m} = \frac{a}{b}, \quad a \text{ y } b \text{ enteros.}$$

Cuando $a = b = 1$ (resonancia 1:1), la condición de resonancia es $hw_B = U_0\chi_{000}(I_0 - I_1)$.

En conclusión, como lo muestra el análisis, la dinámica del condensado BE dentro de una red óptica inclinada tiene un variado comportamiento: el espacio de fase consiste principalmente de dos regiones, una regular en la cual el sistema oscila periódicamente y la otra en la cual el condensado se caracteriza por movimientos caóticos originados cerca de la condición de resonancia. Se ha empleado un espacio de fase generalizado, donde el rol principal lo desempeña los coeficientes utilizados en la expansión de la función onda del condensado.

3. Condensado de BE en un potencial armónico

En esta sección se sigue a Salasnich (2000) para analizar la dinámica de un condensado de Bose-Einstein dentro de una trampa modelada por el potencial (4), en un régimen de interacciones repulsivas con un número grande de átomos en estado de condensación. El análisis se realiza a partir de un sistema dinámico de carácter hamiltoniano que describe la evolución temporal de un conjunto $\{q_i\}$ de coordenadas generalizadas. Dichas coordenadas están directamente relacionadas con los coeficientes utilizados en la expresión de una clase de soluciones analíticas encontradas para la densidad del condensado, por lo tanto el análisis dinámico de este sistema es un mecanismo válido para inspeccionar la evolución del condensado en las condiciones señaladas.

3.1. Descripción del modelo

Supóngase que el condensado está en condiciones tales que $N|a_s/a_h| \gg 1$, con a_s la longitud de onda- s , que mide esencialmente el rango y el tipo de interacción entre partículas, a_h un parámetro que caracteriza el diámetro medio del condensado y $N = \nu_0$ el número de bosones presentes en el condensado. Esta última relación esencialmente es una escala que enuncia el rango en el cual los efectos de interacción llegan a ser importantes para la dinámica del sistema, ya que expresa la importancia de la interacción átomo-átomo comparada a la energía cinética de las partículas (Dalfovo, 1999).

$$\frac{E_{interaccion}}{E_{cinetica}} \propto N \frac{|a_s|}{a_h}$$

En este régimen y para este tipo de trampa, la ecuación de GP puede ser reescrita en forma de dos ecuaciones con características formales semejantes a ecuaciones hidrodinámicas acopladas que describen la naturaleza coherente del sistema (Salasnich, 2000).

Escribese la función de onda en términos de un módulo ρ que describe la densidad del condensado y de una fase S que lleva la información de la coherencia del sistema:

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \sqrt{\rho(\mathbf{r}, t)} e^{iS(\mathbf{r}, t)}, \quad (11)$$

expresando $\rho(\mathbf{r}, t)$ en la forma $\rho(x, y, z, t) = a_0(t) - a_1(t)x^2 - a_2(t)y^2 - a_3(t)z^2$, en la región en que es positiva. La transformación de variables $(a_1, a_2, a_3) \rightarrow (q_1, q_2, q_3)$, con $a_i = m\omega_i^2(2qq_i^2q_1q_2q_3)^{-1}$, conduce al siguiente sistema dinámico de carácter hamiltoniano:

$$\begin{aligned} \dot{q}_\perp &= 2p_\perp, & \dot{p}_\perp &= -2q_\perp + \frac{2}{q_\perp^3 q_3}, \\ \dot{q}_3 &= \lambda^2 p_3, & \dot{p}_3 &= -q_3 + \frac{1}{q_\perp^2 q_3^2}, \end{aligned} \quad (12)$$

donde $\{q_\perp, q_3\}$ son coordenadas que describen la parte axial y longitudinal del condensado, respectivamente. El carácter hamiltoniano del sistema dinámico anterior permite analizar la evolución temporal del condensado por medio del comportamiento temporal de coordenadas canónicamente conjugadas, $\{(q_\perp, p_\perp), (q_3, p_3)\}$. Por otro lado, la integración del sistema dinámico permite la visualización de los diferentes regímenes dinámicos.

3.2. Resultados numéricos

Los resultados numéricos, que se obtuvieron al simular el sistema vía un método de composición de 8° orden, revelan un espacio de fase desplegando características regulares para energías muy cercanas al mínimo de energía potencial del sistema (ver figura 4, superior izquierda). Para mayores energías el espacio de fase presenta características mezcladas; una gran parte del espacio de fase accesible es cubierto por órbitas caóticas que coexisten con pequeñas regiones de naturaleza regular (figura 4).

El análisis muestra que el inicio de comportamientos caóticos se da para energías cercanas a $E = 2.925$ (figura 4, superior derecha), lo cual corresponde a un incremento de $\chi = 17\%$ respecto al mínimo de energía potencial. Incrementos de energía a partir de este valor producen un fortalecimiento de la región caótica y la subsecuente destrucción de toroides que estaban ligeramente deformados. La caracterización cuantitativa confirma estas conclusiones, mostrando un progresivo incremento del valor de la entropía de Kolmogorov-Sinai en función de la energía del sistema (ver figura 5 y 6).

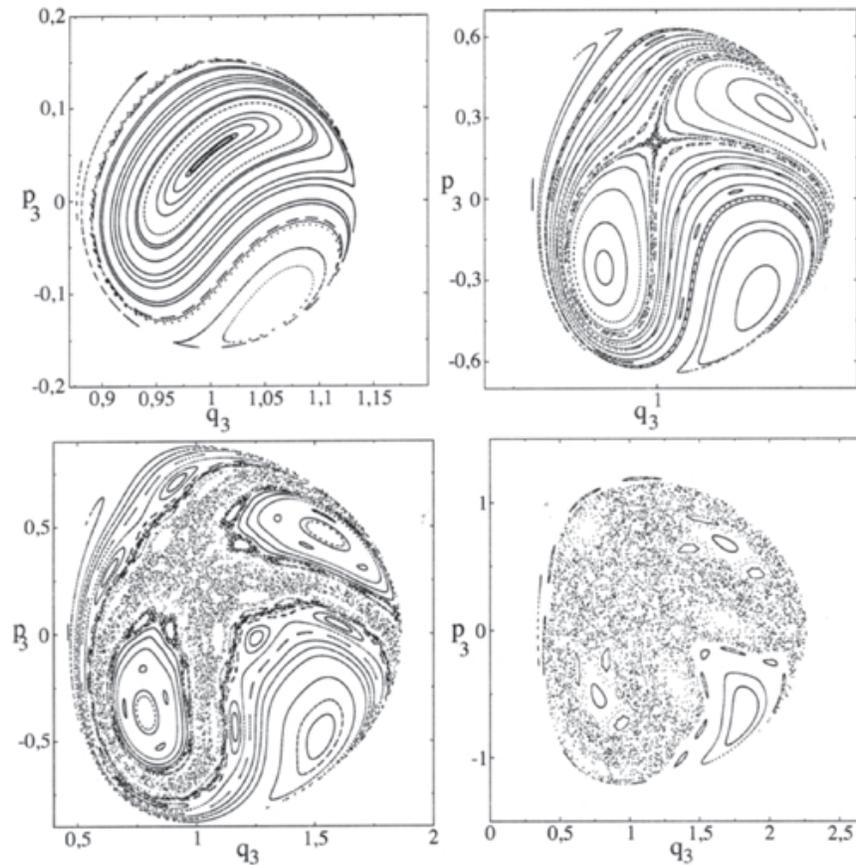


Figura 4: Caracterización cualitativa de la dinámica del condensado de BE; en esta figura se muestra la transición orden-caos con ayuda de las secciones de Poincaré. Se destaca el inicio de comportamientos caóticos para una energía del sistema $E = 2.925$, conclusión confirmada y cuantificada posteriormente. Superior izquierda: $E = 2.525$, $\chi = 1$, la dinámica del sistema es enteramente regular. Superior derecha: $E = 2.925$, $\chi = 17$, aparecen los primeros comportamientos caóticos, contextualizados en la destrucción de los primeros toroides del sistema. Inferior izquierda: $E = 3.275$, $\chi = 31$, el incremento de la energía del sistema conlleva un número mayor de toroides destruidos y de ahí un fortalecimiento de la región caótica. Inferior derecha: $E = 4.0$, $\chi = 60$, gran parte del espacio de fase accesible al sistema es cubierto por una mar caótica y solo sobreviven pequeñas regiones con dinámica regular.

Durante las simulaciones numéricas se rastreó la preservación del volumen en el espacio de fase, empleando para ello el criterio $\sum_i \lambda_i$, que es útil para sistemas hamiltonianos.

El análisis numérico que se realizó muestra que los efectos no-lineales, producto de la interacción entre partículas, se incrementan fuertemente con el aumento de la energía del sistema, al igual que por el cambio en la anisotropía de la trampa; en estos casos las trayectorias caóticas llegan a

ocupar grandes regiones del espacio de fase accesible.

4. Condensado de BE en un potencial cosenoidal

En la tercera y última parte de este trabajo, se inspecciona el comportamiento espacial de la función de onda de un condensado dentro de una red óptica de estructura espacial de tipo cosenoidal, ecuación (5). La función de onda del sistema se expresa en términos de una amplitud a lo largo de la

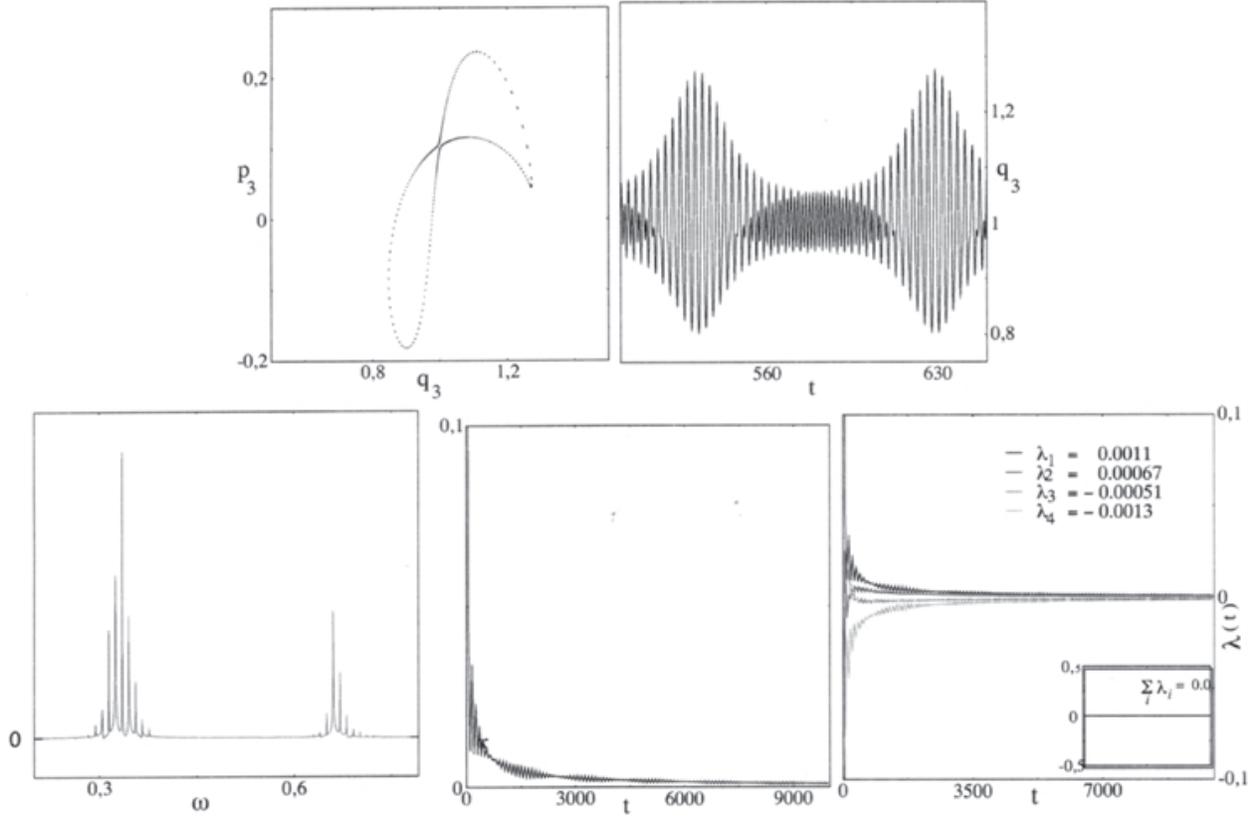


Figura 5: Caracterización dinámica de la condición inicial ($q_3 = 1.0$, $p_3 = 0.1$) correspondiente a la energía ($E = 2.6$, $\chi = 4$). La sección de Poincaré revela características de comportamientos regulares, conclusión confirmada por el espectro de evolución y los picos bien definidos característicos de comportamientos periódicos y cuasiperiódicos. La caracterización cuantitativa revela una convergencia ($t \rightarrow \infty$) de los exponentes de Lyapunov y del valor de la entropía de Kolmogorov-Sinai hacia cero y una preservación del volumen en el espacio de fase ($\sum_i \lambda_i = 0$).

red y una fase. Se obtiene un sistema dinámico para la amplitud, semejante al del modelo de Duffing, más un término adicional que se origina en la red óptica; el sistema dinámico tiene todas las características formales de un forzamiento, por lo cual se acuña en la literatura el nombre de término de forzamiento, mientras que para el modelo se usa el nombre de tipo Duffing forzado (van Noort *et al.*, 2007).

El espacio de fase del sistema revela una topología en la cual una región caótica está rodeada por curvas suaves, típicas de comportamientos regulares. Esta característica se presenta a partir del momento en el que los comportamientos caóticos entran en escena, como es indicado por los resultados numéricos incluidos en la última parte de esta sección.

4.1. Descripción del modelo

Para estudiar el comportamiento de un condensado dentro de una red óptica espacialmente periódica, seguimos a (van Noort *et al.*, 2007) y analizamos la evolución espacial de la amplitud.

Acéptese para la función de onda unidimensional del condensado de BE la forma

$$\Psi(x, t) = R(x)e^{i[\theta(x) - \mu t]} \quad (13)$$

donde $R(x)$ y $\theta(x)$ son una funciones reales que representan la amplitud y fase de la función de onda, respectivamente. Al introducir este expresión en la ecuación de Gross-Pitaevskii,

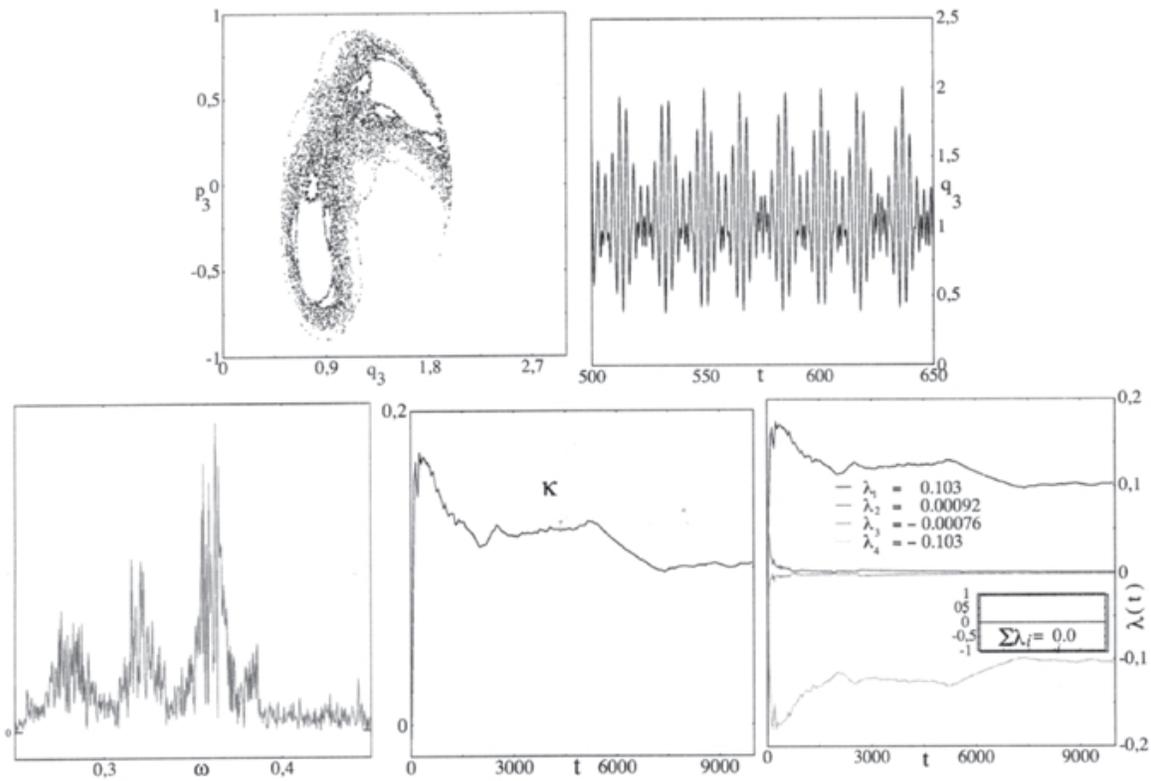


Figura 6: Caracterización dinámica de la condición inicial ($q_3 = 1.05, p_3 = 0.25$) correspondiente a la energía ($E = 3.5, \chi = 40$). La sección de Poincaré revela características de comportamiento caótico, predicción confirmada por el espectro de evolución y el inicio de formación de un fondo ancho. La caracterización cuantitativa revela un grado de caoticidad ($\lambda > 0$) como lo indica el valor del máximo exponente de Lyapunov ($\lambda_1 = 0.103$) y el valor positivo de la entropía de Kolmogorov-Sinai ($\kappa = 0.103$). La eficiencia de los algoritmos se verifica examinando la preservación del volumen en el espacio de fase ($\sum_i \lambda_i = 0$) y la verificación de la importante característica de organización en parejas con aproximadamente igual valor numérico y de signo contrario en el espectro de Lyapunov como se espera para este tipo de sistema.

(2), después de separar la parte real e imaginaria se obtiene:

$$\hbar\mu R(x) = -\frac{\hbar^2}{2m}R''(x) + \left[\frac{\hbar^2}{2m}(\theta'(x))^2 + g|R(x)|^2 + V_{ext}(x) \right] R(x) \quad (14)$$

$$0 = \frac{\hbar^2}{2m} [2\theta'(x)R'(x) + R(x)\theta''(x)] \quad (15)$$

con $'' \equiv d^2/dx^2$. Tomando las soluciones de ondas planas (el caso específico $\theta(x) = 0$) el sistema resultante se simplifica

en la forma

$$R''(x) = -2 \left\{ \frac{m\mu}{\hbar} - \frac{m}{\hbar^2} V_{ext}(x) \right\} R(x) + \frac{2mg}{\hbar^2} R^3(x), \quad (16)$$

que es una ecuación de tipo Duffing con un término de forzamiento que se origina en la estructura de la red.

Después de aplicar la regla de la cadena y reescalar el período de forzamiento a 1, $\xi = x/T \text{ mod } 1$, se obtiene el sistema dinámico

$$\begin{aligned} S(x) &= R'(x) \\ S'(x) &= -\frac{\partial}{\partial R} U(\xi, R) \quad \text{donde: } ' \equiv \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \xi' &= 1. \end{aligned} \quad (17)$$

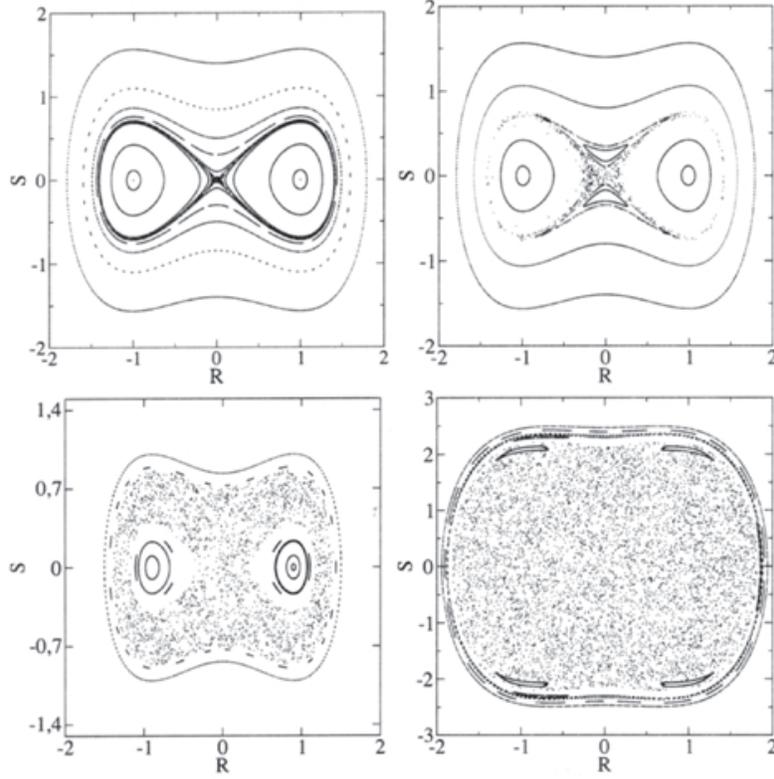


Figura 7: Secciones de Poincaré ilustrando la transición orden-caos en el sistema. La amplitud $R(X)$ de la función de onda presenta características de tipo periódico y cuasiperiódico para magnitudes del potencial de forzamiento $V_1 = 0.001$, superior derecha. Para valores del potencial cercanos a $V_1 = 0.007$ se presentan los primeros comportamientos caóticos producto de la destrucción de algunos toroides, superior izquierda. Para valores mayores la extensión de región caótica presenta un fuerte incremento, haciéndose notar una coexistencia de un mar caótico siempre rodeado de algunos toroides preservados, $V_1 = 0.1$ inferior derecha e $V_1 = 1.0$ inferior izquierda, respectivamente.

Se trata de un sistema dinámico hamiltoniano,

$$\begin{aligned}
 H(R, S, \xi) &= \frac{1}{2}S^2 + U(R, \xi) \quad \text{con} \\
 U(R, \xi) &= Z_2(\xi)R^2 + Z_4(\xi)R^4, \\
 Z_2 &= T^2 \left(\frac{m\mu}{\hbar} - \frac{m}{\hbar^2} V_{ext}(x) \right), \\
 Z_4 &= -\frac{T^2 mg}{2\hbar^2}.
 \end{aligned} \tag{18}$$

Hágase ahora uso de la forma explícita del potencial, $V_{ext}(x) = V_1 \cos(\kappa x)$, $\kappa = \frac{2\pi}{T}$, para obtener así el siste-

ma dinámico

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial T}{\partial S} &= S, \\
 \frac{\partial V}{\partial R} &= \alpha_1 R + V_1 \cos(\kappa x) R - \alpha_3 R^3, \\
 x' &= 1,
 \end{aligned} \tag{19}$$

con los parámetros

$$\alpha_1 = \frac{2T^2 m\mu}{\hbar}, \quad \alpha_3 = \frac{2T^2 mg}{\hbar^2}.$$

4.2. Resultados numéricos

La simulación dinámica del sistema, que se realizó mediante un método de composición de 8° orden, revela que para pe-

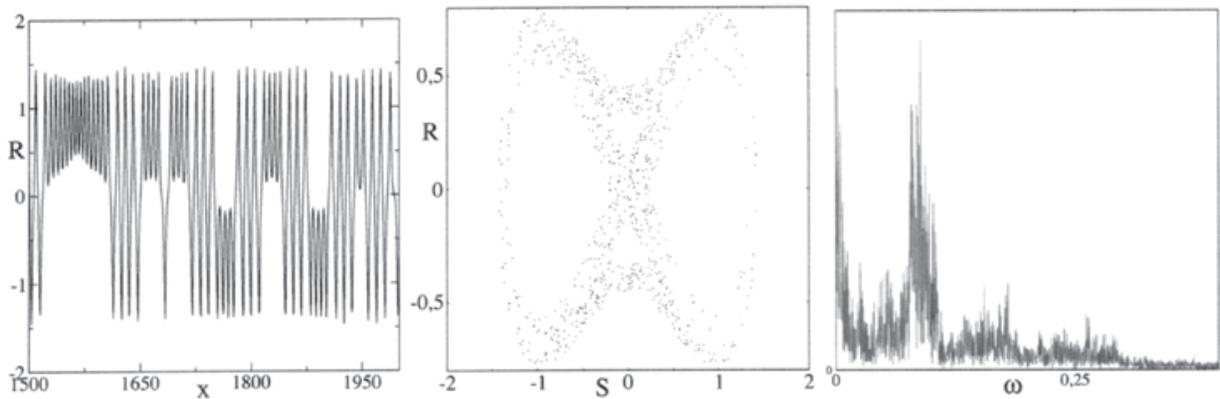


Figura 8: Caracterización del comportamiento caótico en $V_1 = 0.02$, correspondiente a la condición ($R = 0.01, S = 0.01$). La sección individual y el espectro de evolución indican un comportamiento caótico.

queños valores del potencial la dinámica del sistema es enteramente de tipo regular, como lo indican las secciones de Poincaré en la figura 7. El inicio de comportamientos caóticos se presenta cerca del valor de potencial $V_1 = 0.007$; para valores más grandes se presenta un ensanchamiento de esta región.

Otra característica relevante es la coexistencia de dos regiones bien definidas, una región enteramente caótica y la otra de tipo regular rodeando la anterior, para potenciales mayores al que produce el inicio de caos. Estas conclusiones son ratificadas por las secciones de Poincaré presentadas y el espectro de evolución calculado para la trayectoria mostrada (figura 8). Todas las gráficas corresponden al conjunto de parámetros ($\alpha_1 = -1, \alpha_3 = -1$), pero las mismas características se observan para otros valores, con la única condición que $g < 0$ para la cual el análisis dinámico presentado es válido.

5. Conclusiones

En resumen, en este artículo se analizó la evolución dinámica de la población del condensado para diferentes regímenes dinámicos y en varios escenarios importantes. Como principal resultado se resalta la posibilidad de comportamientos caóticos en su evolución tanto en el aspecto temporal como en el espacial, conclusión confirmada por los resultados cualitativos y cuantitativos obtenidos a través del empleo de la técnica de secciones de Poincaré, espectros de evolución así como de exponentes de Lyapunov. Para información básica sobre estos conceptos consultar, por ejemplo, **Ott, 1993**,

o **Campos & Isaza, 2002**.

En el primer escenario estudiado, un condensado de BE dentro de una red óptica inclinada, la existencia de comportamientos caóticos se presenta para valores del parámetro de interacción entre pozos cercanos a $0.15/1.99$.

En el segundo escenario, condensado de BE sujeto a un potencial de trampa tipo armónico, el inicio de comportamientos caóticos tiene lugar para valores de la energía cercanos a $E = 2.925$, valor que corresponde a un incremento del 17% con respecto al mínimo de energía potencial del sistema.

En el tercer escenario, estructura espacial periódica, el inicio de comportamientos caóticos se da para un valor del potencial cercano a $V_1 = 0.007$.

Agradecimientos

Uno de los autores (OYF) agradece las lecciones recibidas en el curso *Métodos de simulación en Física* impartido por el profesor Jose Daniel Muñoz de la Universidad Nacional de Colombia.

Referencias

- Thommen Q., Garreau J.C., and Zehnlé V.**, 2003. "Classical Chaos with Bose-Einstein Condensates in Tilted Optical Lattices", *Phys. Rev. Lett.* **91** 210405-1.
- Salasnich L.**, 2000. "Resonances and Chaos in the Collective Oscillations of a Trapped Bose-Einstein condensates", *Phys. Lett. A* **266** 187.
- van Noort M., Porter M.A., Yi Y., and Chow S.N.**, 2007. "Quasi-periodic Dynamics in Bose-Einstein Condensates in Periodic Lattices", *Phys. Rev. Lett.* **98** 155502-1.

ces and Superlattices”, *Journal of Nonlinear Science* **17** 59.

Dalfovo F., Giorgini S., Pitaevskii L., and Stringari S., 1999. “Theory of Bose-Einstein condensation in trapped gases”, *Rev. Mod. Phys.* **71**, 463.

Ott E., 1993. *Chaos in dynamical systems*, Cambridge University Press.

Campos, D. & Isaza, J. F., 2002. *Prolegómenos a los sistemas dinámicos*, Universidad Nacional de Colombia, El Malpensante, Bogotá.

Recibido el 25 de junio de 2007.

Aceptado para su publicación el 12 de julio de 2007.

LOS CUADERNOS DE JULIO GARAVITO UNA ANTOLOGÍA COMENTADA

por

Clara H. Sánchez¹

Resumen

Sánchez, Clara H.: Los cuadernos de Julio Garavito. Una antología comentada. Rev. Acad. Colomb. Cienc. **31** (119): 253-266, 2007. ISSN 0370-3908.

Julio Garavito Armero es sin duda uno de los más renombrados científicos colombianos del siglo XIX y comienzos del XX. Conocido como matemático y astrónomo, una buena parte de su obra publicada, fue reproducida en la Revista de la Academia Colombiana de Ciencias cuando su primer presidente, **Jorge Álvarez Lleras**, su alumno, se propuso reproducir la obra de “científicos del pasado”, entre los cuales se privilegió a **Garavito**. En el Observatorio Astronómico donde fue director desde 1891 hasta poco antes de su muerte en 1920 se encuentran una serie de cuadernos en los cuales existen algunos de los borradores de sus publicaciones, y de otros artículos que se quedaron inéditos, y estudios de temas de su interés en diversas áreas. Los temas que allí se encuentran son muy variados y en ellos podemos apreciar los múltiples intereses de **Garavito** y algunas de las notas que tomó de fuentes que se usó en sus cursos de cálculo infinitesimal y de mecánica analítica en la Universidad Nacional. Una antología del contenido de estos cuadernos es lo que hacemos en este trabajo.

Palabras clave: Garavito, historia de la matemática, Colombia, siglos XIX y XX.

Abstract

Julio Garavito Armero is one of the most renowned Colombian scientists. Known as a mathematician and astronomer, his published papers were reproduced in the Revista de la Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales by his former student **Jorge Álvarez Lleras**, who intended to republish the works of past Colombian scientists

¹ Departamento de Matemáticas, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá. E-mail: chsanchez@unal.edu.co
AMS Classification 2000: 01A55, 01A60, 01A70.

in this journal. In the National Observatory, in Bogotá, there are extant notebooks containing drafts of his published papers, and many unpublished notes seemingly arising from his readings in mathematics, mechanics and another various matters. These notebooks show how diverse were **Garavito's** interests. In this paper we present a commented selection of his unpublished notes.

Key words: Garavito, History of science, mathematics, Colombia, 19th and 20th Centuries.

Introducción

La ley 128 de 1919 ordenó la edición de las obras de **Julio Garavito Armero** y la erección de su busto en el jardín del Observatorio Astronómico.² El busto se colocó en 1945 pero la edición de sus obras completas continúa pendiente. Aunque **Garavito** es reconocido como uno de los científicos colombianos más notables, no se ha hecho aún una biografía seria sobre su vida, que contenga un análisis crítico de su obra. El ensayo biográfico y literario de **Jorge Álvarez Lleras**³ en los *Anales de Ingeniería*, publicado a un mes de su muerte, es un panegírico al maestro; más significativos por su estilo ponderado son los obituarios de **Ricardo Lleras Codazzi** en *El Catolicismo*⁴ y el de **Melitón Escobar** en *El Espectador*⁵ en los cuales si bien hacen también un elogio a **Garavito**, dejan, sin embargo, entrever algunas de sus debilidades. En la historia que sobre el Observatorio Astronómico hizo **Alfredo Bateman**,⁶ con motivo de los 150 años de su fundación, o en el artículo que

publicó en el *Magazine Dominical de El Espectador*, con motivo del centenario de su nacimiento, no aporta mucho más de lo que ya fue descrito y analizado por los autores citados anteriormente.⁷ Todos ellos destacan en **Garavito** sus múltiples intereses: matemáticas, física, astronomía, psicología, economía política, meteorología, y filosofía. **Garavito** era un ingeniero de su tiempo, tanto los ingenieros de la Escuela de Ingeniería de Bogotá, como los de la Escuela de Minas de Medellín debieron desempeñar muy variados oficios.

Trabajos recientes han cuestionado la labor de **Garavito** como físico y como matemático. Se le critica, entre otras cosas, el haber rechazado las geometrías no euclidianas y la teoría de la relatividad como teorías válidas en la matemática y la física respectivamente.⁸ Hay que anotar que la aceptación de las geometrías no euclidianas abrió el camino para la teoría de la relatividad especial de **Einstein**, pues su concepción del espacio-tiempo no es euclidiana como lo demostrara **Poincaré**,

²Obsérvese que el año de la ley es el inmediatamente anterior al de su deceso.

³**Álvarez Lleras, Jorge**, 1920: *Julio Garavito Armero. Ensayo biográfico y literario*. Anales de Ingeniería, Vol. XXVII, No. 325, págs. 362-420.

⁴**Lleras Codazzi, Ricardo**: *Julio Garavito Armero (Notas íntimas)*, El Catolicismo, marzo 20 de 1920.

⁵**Escobar, Melitón**: *Dr. Julio Garavito (1865-1920)*, El Espectador, 6 de junio de 1920.

⁶**Bateman, Alfredo**, 1954: *Julio Garavito Armero en el Observatorio Astronómico de Bogotá*. Monografía Histórica. Ediciones Universidad Nacional, págs. 135-158.

⁷**Bateman, Alfredo**, 1965: *El Centenario del Sabio Garavito. "Mostrar la Luna"*, Magazine Dominical, Domingo 10 de enero de 1965. págs. 4D-5D.

⁸**Campos Sánchez, Alberto**, 1984: *La polémica Garavito-Alancar Silva sobre la teoría racional de las curvas*. Lecturas Matemáticas 5 (1-2-3) (1984), 79-97. **Mayor, Alberto**, 1985: *Matemática y subdesarrollo: La disputa sobre su enseñanza en la ingeniería colombiana de principios del siglo XX*. Revista de Extensión Cultural. Universidad Nacional, Medellín, No. 19, págs. 14-24. **Martínez-Chavanz, Regino**, 1986: *El pensamiento físico y epistemológico de Garavito*. Revista Naturaleza, Bogotá, No. 4 (1986) 15-25. **Martínez-Chavanz, Regino**, 1987: *Ensayo sobre la penetración de las ideas relativistas y cuánticas en Colombia*. Informe de investigación. Centro de Investigaciones de la Universidad de Antioquia, Medellín, junio de 1987. **Albis, V. S.**, 1997: *Vicisitudes del postulado euclídeo en Colombia*. Rev. Acad. Colomb. Cienc. 21 (80), 281-293. **Sánchez, C. H.** 2002: *Cien años de historia de la matemática en Colombia*. Rev. Acad. Colomb. Cienc. 26, 239-260. **Martínez-Chavanz, Regino & Michel Paty**, 2004: *Formación y desarrollo de la cultura científica en Colombia: La Física de 1880 a 1940*. En *Formación de cultura científica en Colombia. Ensayos sobre Matemáticas y Física*. Obra colectiva. Editores **Luis Carlos Arboleda** y **Michel Paty**. Artes Gráficas del Valle, Cali, 2004. *Colección de los trabajos de los participantes en el proyecto terminado Ecos-Nord*, entre el Equipo REHSEIS, CNRS y la Université Paris 7-Denis Diderot, París, y la Universidad del Valle, Cali, Colombia). 2004. **Martínez-Chavanz, Regino**, 2005a: *La recepción de la física moderna en Colombia*. Saber y Tiempo (Buenos Aires) n° 18 (2005) 41-69. **Martínez-Chavanz, Regino**, 2005b: *La recepción de la relatividad en Colombia*. Ponencia en el Simposio Internacional Einstein. Universidad del Valle, Cali, Colombia, 28 de noviembre al 2 de diciembre de 2005. Prepublicación en CD-Rom, 2005. Aparecerá en las Memorias. **Martínez-Chavanz, Regino**, 2006: *Einstein y su recepción en Colombia*. Praxis filosófica (Universidad del Valle, Cali, Colombia). Nueva serie n° 22 (ene.-jun. 2006) 29-112.

en 1905, y lo desarrollara **Minkowski**, en 1908; no aceptar las primeras dificulta entender la segunda como “verdadera” teoría sobre nuestro mundo exterior. Existe una polémica entre los historiadores sobre la culpabilidad de **Garavito** en el evidente retraso de la matemática y la física en Colombia en la primera mitad del siglo XX, por su rechazo a esas teorías.⁹ Como líder de las ciencias físico matemáticas en Colombia por treinta años, se le reprocha no haber creado escuela¹⁰ y mantener, además, una actitud conservadora hacia los avances de la ciencia.¹¹

Quienes lo defienden¹² argumentan que hay que tener en cuenta el ambiente político y cultural de la Regeneración y los gobiernos conservadores que le siguieron en los cuales se formó como ingeniero y profesor de matemáticas y luego ejerció su profesión desde la dirección del Observatorio; ese ambiente no era el más favorable para una apertura mental que permitiera la aceptación de esas teorías. Se argumenta igualmente que la aceptación de las mismas no fue inmediata por parte de los científicos en el mundo entero, ¿por qué aquí iba a ser diferente?

En el caso de las geometrías no euclidianas hay que anotar que ya habían sido aceptadas por la comunidad matemática desde la década de 1870 luego que **Beltrami** probara en 1868 que las geometrías no euclidianas eran tan lógicamente consistentes como la geometría de **Euclides**. Además, se ha comprobado que los argumentos de **Garavito** para desbaratar en sus escritos las geometrías no euclidianas son circulares.¹³

Otro es el caso de la teoría de la relatividad de **Einstein** pues apenas en 1905 se publicó su teoría y su entendimiento y aceptación duró unos años.¹⁴

Una de las características de **Garavito** y de la mayoría de los autores de publicaciones científicas de su

época es que no dan sus referencias, o si las dan, lo hacen de manera muy precaria, citando el apellido de un autor, pero poco más. Reconstruir las fuentes de las que bebió **Garavito** no es tarea fácil, pero es tarea fundamental para evaluar su obra; también lo es, claro está, conocer el contexto familiar, político y cultural en el cual vivió y se desempeñó profesionalmente.

En un informe sobre historia de la física de **Regino Martínez-Chavanz**¹⁵ se mencionan unos cuadernos de **Garavito** que se encuentran en el Observatorio. En alguna de mis múltiples conversaciones con **Jorge Arias de Greiff** sobre la historia de las matemáticas y la ingeniería en Colombia y particularmente sobre el trabajo matemático de **Garavito**, él me invitó al Observatorio a mirar los cuadernos y hacer un trabajo sobre ellos. Era el año de 1998 y durante muchas horas recorrí hoja por hoja los cuadernos de **Garavito**. Buscaba hallar en ellos datos relevantes para la historia de las matemáticas en Colombia. Tuve un sentimiento fuerte al encontrarme con la vida interior de uno de los personajes más notables de la historia de Colombia. La revisión de esos cuadernos fue un viaje al mundo no solo científico de **Garavito** sino personal del autor. La imagen que tenía de un personaje autoritario y pedante, se fue debilitando al conocer de cerca a través de sus cuadernos, no solo sus inquietudes científicas, sino sus reflexiones sobre el hombre, la vida, la muerte. Vi al hombre, no al “sabio matemático”.

Aportes a una biografía

Garavito nació en Bogotá el 5 de enero de 1865. Su familia quedó en bancarota y tuvieron que trasladarse a Fusagasugá; su padre murió cuando el tenía 8 años y la familia quedó bajo el sustento de su hermano mayor **José María** a quien quiso entrañablemente, como puede leerse en sus reflexiones a su muerte.¹⁶ Obtuvo su

⁹**Garavito, J.** 1917: *¿Bancarrotas de la ciencia?* Anales de Ingeniería, Vol. 25, 101–107, 203–215.

¹⁰En 1931 en la sección editorial de los Anales de Ingeniería se refieren a **Garavito** como un “aventajadísimo matemático, genio analítico por excelencia, que no pudo formar escuela ni dejó obra perdurable aceptada por la ciencia universal.”

¹¹Dice **Álvarez Lleras** en *op. cit.*, pág. 363, que su “obra [es] esencialmente conservadora”.

¹²**Arboleda, L. C. & Anaconda, M.**, 1994: *Las geometrías no euclidianas en Colombia. La apuesta euclidiana del profesor Garavito (1865-1920)*. *Quipu*, 11 (1), 7–24. **Arias de Greiff, Jorge**, 1993: *Historia de la astronomía en Colombia*. Bogotá. Academia Colombiana de Ciencias.

¹³Véanse **Albis**, *op. cit.* y **Albis González, Víctor S. & Luis Moreno Armella**, 1976: *Una hipótesis equivalente al postulado euclídeo de las paralelas*. *Boletín de Matemáticas* 10, 78–85.

¹⁴“Por lo general un físico necesita unos cinco años de contacto con las ideas de la relatividad para sentirse a gusto ... no porque sean complejas ni oscuras, sino tan sólo por lo terriblemente extrañas”. *Física para poetas*. **March, Robert H.**. Siglo XXI Editores, 1982, México.

¹⁵**Martínez-Chavanz, Regino**, 1988: *El desarrollo de la Física en Colombia de 1860 a 1960*. Prepublicación. Universidad de Antioquia, 1988.

¹⁶Un obituario a la muerte de su hermano **José María Garavito Armero**, ocurrida el 25 de abril de 1904, se encuentra en el cuaderno No. 10, págs. 44–56. Allí hace un relato autobiográfico. Contiene datos interesantes sobre la época.

título de bachiller en el Colegio de San Bartolomé en 1883 y la Guerra del 85 le hizo aplazar su ingreso a la Universidad. En 1887 ingresó a la Escuela de Ingeniería de la Universidad Nacional y se matriculó en los cursos de Geometría Práctica, Trigonometría y Geometría Analítica. En 1888 tomó los cursos más avanzados de matemáticas: Geometría Descriptiva, Cálculo Infinitesimal y Mecánica Racional, con el profesor **Andrés Arroyo**. De esto queda testimonio en el cuaderno No. 32, en la numeración que vamos a adoptar más adelante.

En los dos siguientes años tomó los cursos propios de la Ingeniería: Materiales de Construcción, Arte de Construir, Maquinaria e Hidráulica, Física Industrial, Arquitectura Civil y Comunicaciones y el curso de Geometría y Geodesia. Para finalizar sus estudios habilitó las asignaturas de Álgebra y Geometría Superiores indispensables para terminar su Plan de estudios. En 1891 presentó dos tesis, una para obtener el título de Profesor en Ciencias Matemáticas y otra para el título de Ingeniero. Sus calificaciones son todas de "5, aprobado con plenitud". Pero no hay que sorprenderse pues era requisito indispensable, según el reglamento de la Escuela, obtener esa calificación para aprobar las asignaturas. Para lograrlo había la posibilidad de habilitar, o de presentar exámenes preparativos al final de los estudios. También era indispensable tener certificado de buena conducta. Las fuentes para estos datos se encuentran en el Archivo Histórico de la Facultad de Ingeniería que ahora reposan en el Archivo General de la Universidad; particularmente el "kárdex" de **Garavito** como estudiante se encuentra en el Legajo No. 7 Expedientes de Grado 1889-1891. Su tesis para obtener el título de Profesor en Ciencias Matemáticas, se encuentra en la Biblioteca de Ingeniería.

El título de *Profesor en Ciencias Matemáticas* fue el resultado de una fuerte polémica que se dio, a finales de la década de los años 80 del siglo XIX, sobre la enseñanza de las matemáticas en la Escuela de Ingeniería. Algunos como **Miguel Triana** sostenían que la carrera debía reducirse a cuatro años y los cursos de matemáticas debían enseñar lo estrictamente necesario para la práctica de la ingeniería y otros como **Manuel Antonio Rueda** querían mantener el espíritu del Colegio Militar con el que se creó la carrera de ingeniería en 1847 bajo el gobierno del General **Mosquera**. De hecho, **Rueda** opinaba que nuestro país necesitaba buenos profesores de matemáticas y buenos ingenieros y como no

estábamos en condiciones de tener separadamente un Instituto de Matemáticas y una Escuela de Ingeniería la solución estaba en formar simultáneamente en la Escuela a los Ingenieros y a los profesores. Es así como una reforma de 1888 creó el título de *Profesor de matemáticas*, el cual requería la elaboración de una tesis. Alrededor de 50 ingenieros de la Escuela obtuvieron el título aunque apenas treinta y seis de las tesis reposan en la Biblioteca de la Facultad de Ingeniería.¹⁷

Garavito fue el primero en obtener el título de Profesor. Para solicitar su "opción a grado" presentó un trabajo titulado *El juego de la aguja* en el cual hace los cálculos para encontrar una aproximación del número π , basado en un artículo del libro *Récréations Scientifiques* de **Gaston Tissandier**.¹⁸ Se trata de usar el cálculo de probabilidades para hallar esa aproximación, haciendo lanzamientos de una aguja sobre unas líneas separadas por una distancia ℓ . La solución fue dada originalmente por el Conde de **Buffon** en 1760. Cabe señalar que **Garavito** tuvo afición a la probabilidad, pues encontramos por lo menos en dos ocasiones, en el Cuaderno No. 5 (págs. 63-66), con el título de *Lotería china*, el estudio del siguiente problema:

Sean m objetos. Se escogen n objetos de los m . Luego se sacan a la suerte n objetos sucesivamente sin volver a introducir los que se sacan. Se pregunta por la probabilidad para que j objetos escogidos coincidan con otros tantos sacados a la suerte.

Una resolución tiene en rojo la anotación "Resolución original" y está fechada en 16/10/11. Hay también una nota que dice, "Rectificada como perfecta", con la fecha 25/11/12.

Con lo anterior queremos destacar que **Julio Garavito** fue un digno heredero de la tradición forjada en el Colegio Militar que se desvaneció con el cambio de siglo. Ya lo había intuido su profesor **Luis María Lleras** cuando le dijo a su hijo **Ricardo**:¹⁹

Ese hombre que se expresa con tanta dificultad es, de todos los estudiantes que he conocido, el único que tiene verdadero espíritu matemático; fíjate como razona, en el rigor de su lógica y en lo profundo de su análisis y verás que es realmente una inteligencia superior: el será el Lino de Pombo de tu época.

La celebración de los 200 años del Observatorio fue una excelente ocasión para realizar un inventario sobre

¹⁷Sánchez, C. H., 2002, *op. cit.*

¹⁸Tissandier, Gaston, 1884: *Les Récréation Scientifiques ou l'enseignement par les jeux*. Paris, G. Masson, Éditeur, págs. 156-160.

¹⁹Lleras Codazzi, *op. cit.*

los cuadernos de Garavito y preparar este trabajo que me permite compartir con la comunidad académica y científica mis apreciaciones sobre ellos. En sus cuadernos encontramos manuscritos sobre muy diversos temas como veremos; aquellos sobre análisis matemático y sobre geometrías no euclidianas fueron la razón para revisar exhaustivamente los cuadernos. Me encontré además con sus reflexiones filosóficas y con algunos de sus sentimientos más profundos.

Los cuadernos. Descripción general

En el Observatorio Astronómico se encuentran 43 cuadernos de diferentes tamaños, manuscritos, en tinta, de puño y letra de **Garavito**. Desde el punto de vista de la apariencia física podemos dividir los cuadernos en tres grupos:

1. **Cuadernos negros:** cuadernos de 20 x 22cm. con hojas rayadas de tapa negra semidura, con diferente número de hojas. Son los marcados del 1 al 8 y el 10.

2. **Cuadernos de colores:** cuadernos de 20 x 25 cm. marcados del 20 al 35, 37 a 41, en su mayoría con hojas cuadrículadas de pocas hojas y tapas de papel de diferentes colores.

3. **Cuadernos grandes:** cuadernos de 30 x 20 cm. en su mayoría, de tapa dura, algunos de ellos para uso en contabilidad.

Varios de ellos contienen hojas sueltas de papel periódico con anotaciones en lápiz. Todo indica que **Garavito** trabajaba en lápiz sobre papel periódico y cuando tenía claridad sobre lo que estudiaba lo pasaba a limpio en tinta. En algún momento (quizás entre 1919 y 1920, al conocer la Ley 128 de 1919) debió hacer un repaso de sus escritos, pues en tinta roja se leen comentarios como los siguientes: publicado, inédito, demostración original, inconcluso. Una comparación con lo publicado es tarea que queda pendiente.

Algunos cuadernos tienen en la tapa un membrete con un número que va del 1 al 36; sin embargo en el Observatorio no están los cuadernos que deberían tener los números 9, 11, 13 a 18, 24, 25, 31, y 33. Hay además 20 cuadernos sin marcar, los cuales, para referirme a su contenido, numeré del 37 al 56, según el orden en que llegaron a mis manos. Por eso no tienen una secuencia cronológica que sería lo natural.

Hay uno que perteneció a su hermano **Justino**, el marcado con el número 47, que tiene tapa verde con un avestruz en la carátula.

El contenido de los cuadernos es muy variado; más precisamente, encontramos manuscritos sobre álgebra, geometría, trigonometría esférica, análisis matemático, mecánica racional, mecánica analítica, astronomía, meteorología, probabilidad, actuaría, economía política, psicología y filosofía.

También hay allí mezclados con sus intereses científicos, reflexiones sobre la vida y la muerte, que reflejan estados depresivos ante la muerte de sus seres queridos o ante la incomprensión de sus contemporáneos por su pensamiento.

Diversos temas son tratados en un mismo cuaderno; son pocos los que se dedican a un solo tema. Varios están marcados en la carátula y anuncian los contenidos respectivos; más de uno empieza por los dos lados, por ejemplo los número 20 y 32.

Algunos de los escritos están firmados con fecha, otros son difíciles de ubicar en el tiempo. Los borradores de varios de sus trabajos publicados se encuentran en esos cuadernos. La gran mayoría contienen estudios no concluidos y ejercicios resueltos de asuntos de su interés.

El cuaderno número 50 tiene la fecha más antigua 1886, y trata de asuntos varios de matemáticas. El cuaderno que tiene la fecha más reciente, 1916, es el número 6.

Con el fin de mostrar concretamente la diversidad de temas que se pueden encontrar en ellos me permito dar un ejemplo: El cuaderno marcado con el número 2, contiene la preparación de alguna de sus clases de mecánica racional; una reflexión sobre la muerte, y el estudio de un complicado ejercicio de geometría que requiere para su solución nueve ecuaciones con 12 incógnitas. Las páginas 72 a 85 están dedicadas a la solución del problema y tiene una nota que dice: "problema no concluido." Este cuaderno tiene numerosas hojas sueltas de papel periódico con anotaciones sobre física, astronomía, mecánica racional, ecuaciones de segundo orden. Y una que llama especialmente la atención: *una receta para hacer vino de moras*.

Dada la cantidad de cuadernos y multiplicidad de documentos que se encuentran en los mismos he escogido para este trabajo unos pocos de ellos, concentrando mis esfuerzos en las notas que tienen que ver con matemáticas, y las que tienen que ver con sus reflexiones de tipo filosófico.

Todas ellas las citaré dando el número del cuaderno y las páginas en las que se encuentra.

Las matemáticas

Las geometrías no euclidianas. En el cuaderno No. 4 (43-108, 111-137) se encuentran dos borradores de su artículo sobre las geometrías no euclidianas publicado en los Anales de Ingeniería.²⁰

Existen cuatro trabajos que analizan a profundidad ese artículo; tres desde el punto de vista matemático hechos por **Julio Carrizosa Valenzuela** en 1921²¹, el venezolano **Francisco J. Duarte** en 1946²² y **Víctor S. Albis** en 1997²³ y uno desde el punto de vista histórico epistemológico de **Arboleda** y **Anaconda** en 1994.²⁴ Los primeros señalan los errores de **Garavito** al intentar demostrar las fallas de **Lovachevsky** y el último intenta justificar esos errores por la cosmovisión que del mundo tenía **Garavito**.²⁵ Basten solo unos párrafos para conocer el tono de **Garavito** sobre el tema:

Se necesita una perversión intelectual como la que existe hoy en europa (sic) para poder digerir la geometría no euclidiana. El cerebro no se perfecciona indefinidamente sino se transforma con la herencia de los antepasados. La herencia de diez o veinte generaciones hacen (sic) sustituir en la masa cerebral las intuiciones propias de la naturaleza por el convencionalismo nominalista hasta el punto de conferir a las palabras y a las convenciones una realidad mayor que la de los hechos mismos. Las ideas de Einstein sobre el eje de los tiempos demuestra de manera palmaria como se pueden formar generaciones de locos intelectuales, es decir de gentes que nacen locas sin volverse locas. (4, 83).

En tales geometrías se ha cometido simplemente un error de lenguaje, pues se ha llamado recta a una línea que no es recta y plano a una superficie que no es plana. Los nombres siendo convencionales los razonamientos quedan impecables y no es posible hallar contradicción! (4, 97).

Lobachevskinn (sic) no admite la existencia de figu-

ras semejantes lo cual está en fragante contradicción con nuestro concepto sobre la manera de ser del espacio. Tal conclusión hubiese servido como demostración del postulado euclídeo pues se pondría de manifiesto la íntima correlación del postulado con otros conceptos evidentes respecto de nuestra manera de ver respecto de la recta y del plano y en general del espacio.

Sin embargo Lobachevski (sic) bajo la influencia del método tautológico de Aristóteles no podía razonar como lo hemos indicado pues desconocía la verdadera índole del raciocinio. (4, 108) Desgraciadamente no conocemos la obra original de Lobatcheffsky (sic) en donde el acertijo ha debido quedar muy bien encubierto. En la Geometría de Rouche (sic) y Camberouse (sic) como se trata de una simple nota al final del segundo tomo [Nota II] la cuestión no podía quedar bien disimulada y no puede ocultarse ni a un mal estudiante de álgebra. (4, 134).

El análisis matemático. Sin duda una de sus preocupaciones fue el curso de cálculo que por muchos años estuvo a su cargo en la Facultad de Ingeniería. Según datos tomados del archivo histórico de la Facultad de Ingeniería, **Garavito** asumió el curso desde 1891, año de su graduación como ingeniero y profesor de ciencias matemáticas y estuvo a su cargo hasta pocos meses antes de morir cuando lo reemplazó uno de sus alumnos, **Jorge Acosta Villaveces**. De sus clases quedó un "libro"²⁶ con las notas tomadas por los estudiantes **José Antonio Muñoz T.** y **E. Merchán C.**, quienes en la introducción afirman que

Las presentes conferencias han sido formadas ya sea de los apuntes originales del profesor, ya de los sacados por nosotros en clase, sirviéndonos de guía especialmente en la parte del cálculo integral del texto de Sturm.

La tesis de maestría de **Graciela Villegas**,²⁷ en Historia de las Matemáticas en la Universidad del Valle, bajo

²⁰Nota sobre la fórmula fundamental de la trigonometría plana no euclídea en la Geometría hiperbólica. Anales de Ingeniería, Vol. 24, págs. 224-234, 353-362, 465-469.

²¹Carrizosa Valenzuela, J. 1921: *Las geometrías no euclídeas y las objeciones de Garavito*. Universidad, Números 19, 20, 21. Publicación de la Universidad Nacional de Colombia.

²²Duarte, Francisco J. 1946: *Sobre las geometrías no euclidianas. Notas históricas y bibliográficas*. Rev. Acad. Colomb. Cienc. xx (25-26), 63-80.

²³Albis, op. cit.

²⁴Arboleda & Anaconda, op. cit.

²⁵En Sánchez, C. H., 2002, *op. cit.*, se encuentra un breve recuento de esos trabajos.

²⁶Conferencias de Cálculo Diferencial e Integral sacadas por José Antonio Muñoz T. y E. Merchán C. Profesor Julio Garavito A. Universidad Nacional de Colombia, Facultad de Matemáticas e Ingeniería, Bogotá, 1912.

²⁷Villegas, Graciela, 1992: *Sobre el curso de cálculo diferencial e integral "à la Cauchy" de Julio Garavito, 1912*. Tesis de maestría, Universidad del Valle. Cali. 236-237.

la dirección de **Luis Carlos Arboleda**, hace un estudio de estas notas. Cito parte de sus conclusiones pues son de la mayor relevancia para lo que sigue.

Puede decirse que las notas del curso de cálculo de dictado por el profesor Julio Garavito en 1912, en esencia fueron redactas dentro del estilo de Cauchy, al menos en lo que concierne a las nociones básicas.

Ello se pone de manifiesto sobre todo en el esmero en definir el concepto de límite y de utilizarlo para definir a su vez la continuidad, la derivada, y la convergencia.

Teniendo en cuenta las características de los textos europeos descritos en el capítulo 5, el nivel matemático del curso se encuentra dentro de los promedios internacionales de difusión generalizada, en la que los casos patológicos no penetran la cultura del discurso pedagógico.

Son muchas las notas teóricas y los ejercicios resueltos de cálculo diferencial y de análisis que se encuentran en los cuadernos. Destacamos los siguientes:

El primer cuaderno se titula *Ecuaciones diferenciales del Curso de Análisis Matemático de la Escuela Central por P. Appell, 1898*.²⁸ **Garavito** dedica las primeras 91 de las 135 páginas que tiene el cuaderno al estudio de las ecuaciones diferenciales de primero y segundo orden, hasta los sistemas de ecuaciones diferenciales simultáneas de una variable. Al revisar la copia que se encuentra en los Fondos Lleras, Soriano y Caro de la Biblioteca Leopoldo Guerra Portocarrero de la Universidad Nacional, en Bogotá, se observa que **Garavito** estudió los capítulos XVIII a XXI de la primera edición del libro de **Appell**; como el cuaderno no tiene ninguna fecha de referencia no sabemos exactamente cuándo estudió el tema. Tiene además al final llamados para ver el **Sturm**²⁹ y el **Jordan**³⁰, dos tratados franceses de la época sobre análisis matemático. Cabe anotar que **Villegas** no menciona el de **Appell** entre los textos franceses analizados en el capítulo quinto de su tesis.

Las demás páginas 93 a 135 las dedica a las *Nociones relativas a las compañías de seguros de vida*. Nociones básicas de actuaría que le permiten hacer cálculos para el costo de las primas de los asegurados y de las reservas

que deben tener las compañías. El tema de la actuaría y su fundamento teórico en la probabilidad son motivo de varias notas en los cuadernos, como puede verse, por ejemplo, en (5, 63–72; 87–100).

Los pequeños cuadernos 21 y 23, de 12 y 16 hojas respectivamente, están dedicados por completo al análisis matemático. El primero dedica 20 páginas a las nociones preliminares del cálculo comenzando por definir el concepto de cantidad y rápidamente llega al concepto de función como cantidad variable y al concepto de límite, el cual define como sigue:

Se llama límite de una cantidad variable a una cantidad fija a la cual se aproxima indefinidamente la cantidad variable sin llegar jamás a ella pero pudiendo hacerse la diferencia tan pequeña como se quiera.

Esta es la típica definición que se da en libros como el de **Sturm**, la cual proviene de **A.–L. Cauchy** y enseñaba ya en 1851 **Aimé Bergeron** en el Colegio Militar.³¹ Dado que el cuaderno no está fechado, no puedo afirmar con certeza que se trate de uno de *los apuntes originales del profesor* de que hablan en 1912 **Muñoz & Merchán**, en la introducción de sus *Conferencias de Cálculo Diferencial e Integral*.³² En todo caso esta nota se enmarca en el espíritu cauchysiano de los cursos que tradicionalmente se venían dictando en el Colegio Militar y la Universidad Nacional.

El cuaderno 23, titulado *Apuntes de Análisis Matemático 1897*, sorprende al abrirlo, pues la primera página tiene por título *Teoría de grupos*. Allí encontramos las siguientes definiciones:

Se llama grupo a un conjunto o colección de puntos de la misma clase de variables pudiendo ser en número limitado o ilimitado. Punto límite de un grupo á (sic) un punto límite de una serie [sucesión] de puntos pertenecientes al grupo. El conjunto de los puntos límites de un grupo E forma otro grupo E' llamado grupo derivado del grupo E. Se llaman grupos perfectos a los grupos que contienen a su derivado.

El lenguaje anterior es el lenguaje de la teoría de conjuntos de **Cantor**, sólo que **Garavito** tradujo del

²⁸ **Appell**, P., 1898: *Éléments d'analyse mathématique*, París, 720 págs.

²⁹ **Sturm**, Ch. *Cours d'analyse*, París, Gauthier-Villars, 1888. Hubo varias ediciones.

³⁰ **Jordan**, C. *Cours d'analyse de l'École Polytechnique*. París Gauthier-Villars, 1909. Tercera edición.

³¹ **Albis-González**, V. S. & **Clara H. Sánchez**, 1999: *Descripción del curso de cálculo diferencial de Aimé Bergeron en el Colegio Militar*. Rev. Acad. Colomb. Cienc. **23** (86), 73–79.

³² *Op. cit.*

francés “ensemble” por “grupo” en lugar de “conjunto”. Los conceptos de *conjunto derivado* y *conjunto perfecto* son de **Georg Cantor** y aparecieron por primera vez en sus artículos de 1872 cuando resolvió problemas del análisis por medio de una técnica nueva, la que hoy llamamos teoría de conjuntos, teoría matemática del infinito que acepta el infinito en acto.³³

El tema aparece de nuevo en el cuaderno 26, en la primera página, bajo el título *Resumen del curso de análisis de la Escuela Politécnica*. La primera definición que encontramos es la de número irracional por medio de una versión de la definición de **Dedekind** usando cortaduras. Y en la página 7 al lado del título *II Grupos* está escrito en lápiz, entre paréntesis, *Conjuntos*.

Las notas contenidas en estos cuadernos corresponden a una selección de temas de los primeros cinco capítulos del libro *Cours d'analyse de l'École Polytechnique*, de **Camille Jordan**.³⁴

Tuvo, pues, **Garavito** contacto con la entonces naciente teoría de conjuntos y las primeras nociones de topología conjuntista. En particular con la notación y el lenguaje $\epsilon - \delta$ de **Weierstrass**, que hace desaparecer a los infinitesimales de los cursos de análisis y cálculo. Son, sin embargo, muy pocas las hojas en estos cuadernos en los cuales estudia esos conceptos novedosos para su época en Colombia.

El cuaderno número 5 lleva por título *Cuestiones diversas de matemáticas puras y aplicadas* y está firmado en 1901. Efectivamente encontramos una variedad enorme de temas, ejercicios de física, de probabilidad, del libro de **Sturm**, etc.

El cuaderno 30 contiene un resumen de 14 páginas sobre funciones elípticas. El 31 contiene ejercicios resueltos del primer tomo del libro de cálculo de **Sturm**. Una *Teoría de los polígonos planos* con la cual según **Lleras Codazzi** pretendía hallar las soluciones de una ecuación algebraica de grado n y algunas nociones de variable compleja que están relacionadas con ese tema.³⁵ Llama función monódroma a lo que hoy conocemos como función analítica; él mismo señala la sinonimia pero preferirá el primer término en sus escritos. El cuaderno

50 se titula *Curso de cálculo infinitesimal* y tiene fecha de 1900. El documento tiene mezcla de letras, quizás un primer intento por redactar con sus alumnos un texto de cálculo. Las primeras 37 páginas están dedicadas a las definiciones de los conceptos básicos del cálculo diferencial comenzando por el de “cantidad infinitesimal”. De la página 39 a la 50 se encuentra la traducción de las primeras páginas de las *Lezioni di calcolo infinitesimale* por **Ernesto Pascal**.³⁶ Lo interesante es que allí se trata de funciones reales de variable real. Es pues otro intento de **Garavito** por conocer las novedades en la enseñanza del cálculo.

Es de anotar que en 1899 se cerró la Universidad Nacional y se reabrió apenas en 1903. Durante este tiempo cuenta **Lleras Codazzi** que **Garavito** permaneció activo en el Observatorio y que allí continuó estudiando y trabajando con un grupo de estudiantes que al reabrirse la Escuela de Ingeniería validaron los cursos que con él hicieron durante el cierre.³⁷

El texto de **Sturm** se siguió usando como texto básico para la enseñanza del cálculo en la carrera de ingeniería de la Universidad Nacional hasta la mitad del siglo XX, los primeros cursos sobre teoría de conjuntos los hizo **Francisco Vera** en 1942, un exilado español en la Facultad de Ingeniería; pero apenas en los cincuenta, con la creación de la carrera de matemáticas, la matemática moderna arraigó en nuestro país.³⁸ Lo interesante al revisar los cuadernos de **Garavito** es que intentó adentrarse en ese nuevo mundo, pero es claro que abandonó en las primeras páginas de los textos utilizados el estudio del cálculo con ese nuevo tratamiento, y prefirió quedarse con el clásico **Sturm**, que pervivió en Colombia como en Francia hasta bien entrado el siglo XX.

Reflexiones filosóficas

El cuaderno marcado con el número 3 es quizás uno de los más ricos en reflexiones filosóficas sobre la naturaleza humana. Contiene varios ensayos cortos de los cuales seleccioné algunas citas por el interés que me suscitaron. Igualmente de otros cuadernos seleccioné otros apartes de tipo filosófico.

³³**Sánchez, C. H.** *El surgimiento de la teoría de conjuntos*. Cuadernillo, II Coloquio Distrital de Matemáticas, Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, 1985, 62 páginas.

³⁴**Jordan, C.**, *Cours d'analyse de l'École Polytechnique*. 3 Vols. 1882-1887.

³⁵**Lleras Codazzi**, *Op. cit.*

³⁶De este libro existen varias ediciones, de las cuales he podido identificar las siguientes: la primera de 1895, la tercera de 1911 y la quinta de 1924, todas publicadas en Milán (Italia) por el reconocido editor científico **Ulrico Hoepli**.

³⁷**Lleras Codazzi**, *op. cit.* Véase también la pág. 388 del ensayo de **Álvarez Lleras**, citado anteriormente.

³⁸**Sánchez, C. H.**, 2001: *50 años de matemáticas modernas en Colombia*. Boletín de matemáticas. Nueva Serie. 8 (2), 3-28.

Teoría general de los fenómenos físicos (3, 104-120)³⁹

Hoy que el decadentismo científico ha llegado al extremo de tratar de explicar la inercia de la materia por la Self inducción (sic), séanos permitido hipotetizar sin que por eso se nos tache de audacia, pues no imponemos moda, sino al contrario nos sometemos a ella. Antes era una falta contra la ciencia hacer hipótesis para explicar hechos oscuros; ahora es moda hacer hipótesis oscuras para explicar hechos claros. Ya que los electricistas no han logrado explicar la gravitación vamos a explicarla por nuestra cuenta y riesgo y para ello nos serviremos de un lenguaje que no sea pedantezco a fin de que se nos perdone la pedantería.

Fatuidad Humana (3, 1-6). Reflexión sobre la definición de hombre como animal racional. Para **Garavito** los seres humanos poco tenemos de racionales y al compararnos con los animales nos considera menos que una larva. Sus disquisiciones tienen que ver con reflexiones políticas y morales. Su mente matemática le hace probar sus afirmaciones rigurosamente! "Hemos dicho que el hombre es un animal fatuo y vamos a probarlo con hechos de nuestra Patria."

Voltaire descubrió que no había diablo; esto lo ignoran los conservadores de Colombia: los filósofos positivistas han descubierto que el diablo es útil; no por lo diablo, sino por lo que tiene de coco; esto lo ignoran los radicales de Colombia. D'Alambert descubrió que Dios no había dado derecho a los Reyes para gobernar a los pueblos, y Rouseau reemplazó el falso derecho-divino por un contrato social. Puesto en práctica el Pacto Rouseau, el fiasco que produjo fue espantoso. Esto lo ignoran los conservadores y los liberales de Colombia por no haberlo aprendido en libro. Los sociólogos modernos han comprendido que si bien D'Alambert dijo la verdad, Rouseau se equivocó y que el Contrato Social no es más cierto que el derecho divino. ... Sin embargo en Colombia hay ardientes Republicanos que se pavonean de libres pensadores porque han aprendido en libro que no existe el Diablo! El hombre obra sensatamente cuando se guía por el instinto, pues el instinto no se equivoca.

Causas del atraso (sic) relativo en Colombia (3, 183-193; 195-220). Dos versiones sobre el asunto se encuentran en el cuaderno. Es mejor preguntarse por las

causas del progreso, de esta manera podemos hacer algo para salir del atraso. Como siempre **Garavito** en sus argumentos recurre a los métodos de la mecánica para hacer analogías en sus raciocinios. Son para él causas del progreso la laboriosidad y la alta densidad de población, pero ésta depende del clima, y afirma

Como la raza que puebla a Colombia es en su mayoría española, es natural que esta circunstancia sea otra causa de atraso (sic). ¿La frecuencia de nuestras guerras civiles es causa o efecto del atraso (sic)? En resumen: El clima y la raza parecen ser las únicas causas del atraso en nuestro país. La acción del clima es inevitable dados los medios que actualmente posee la humanidad. La influencia de [la] raza puede que estribe en cierto defecto remediable por medio de la educación. El defecto de la raza española es el desorden en todos sus quehaceres, la poca importancia que confiere a todo aquello que no le suministra un placer o diversión inmediato.

La vida (3, 220-222)

La vida contiene implícitamente una incógnita revelde (sic). Esto es, dicen los evolucionistas la tendencia constante hacia grados cada vez más completos de correspondencia entre el ser viviente y el medio en que vive; pero con esto no enuncian sino una ley general de la mecánica que abraza el orden biológico. ... [La vida] es dicen los epicuros el placer; pero el placer no puede existir por si solo; las percepciones sensibles son oscilaciones entre el placer y el dolor. [La vida] es, dicen los creyentes, una prueba, una estación para otra nueva vida; pero la incógnita subsiste y solo cambia de lugar. ¿Cuál es la incógnita? Jamás lo sabremos. Es imposible expresar la verdad en las lenguas humanas porque la verdad no se presta sino a una interpretación única y precisa y cada frase del lenguaje se presta a indefinidas interpretaciones.

Con estos pensamientos está en total contravía con la ideología conservadora que quería hacer de la herencia española, particularmente del lenguaje uno de los puntos centrales de la identidad nacional. Para **Garavito** las lenguas humanas solo sirven para la galantería, la hipocresía y la mentira. Curiosamente, según **Lleras Codazzi**,⁴⁰ **Garavito** tenía problemas de comunicación verbal! Quizás eso le causó problemas de comunicación con sus congéneres, y le creó esos sentimientos tan fuertes en contra de su especie.

³⁹La siguiente nota tiene las iniciales D.A.L.V.S. que parecen ser la fuente que toma para sus notas.

⁴⁰Ob. cit.

El rey Midas (3, 225-228)

Equivocación funesta es la que ha considerado la miseria como efecto inmediato de la escasez (sic) cuando únicamente estriba en la desigualdad distribución del trabajo colectivo.

Con base en una versión del cuento del Rey Midas, **Garavito** analiza la afirmación anterior.

Post tenebrae ¿Para qué vivo? (3, 229-232)

He aquí una pregunta que el hombre se hace cuando se hace conciente, es decir, cuando el espíritu puede pensar independientemente de las sugerencias del organismo. ... seres humanos, entes ridículos, llenos de pretensiones y de vicios! Si la naturaleza es inconsciente la vida se puede explicar como un accidente de las infinitas combinaciones y transformaciones de la materia y del movimiento pero no como su fina. Si la naturaleza es conciente, la vida no puede ser su fina, por lo menos la vida humana; solo podría ser una faz, la faz pueril. La vida tiene un sentido, dice Tolstoy, este sentido es sufrir la voluntad de Dios: Este concepto que me hubiera hecho reír hace diez años, no nos sorprende hoy, al contrario nos admira. He ahí la respuesta que el hombre se hace cuando se hace conciente. Yo me inclino a admitir la respuesta de Tolstoy porque en ella siento algo más que la inteligencia amenazada de un hombre. Fecha: 12/10/1907.

Se dice ordinariamente, y lo que es peor se cree generalmente, que el hombre es un animal racional. Esto es falso, el hombre no es un animal racional, es un animal fátuo; posee el veneno y la envidia de la víbora, la petulancia del pisco (pavo común) y la lujuria del pollino; sus buenas calidades son escasas y su instinto de conservación muy débil, como el de la polilla, lo que prueba su inferioridad individual. Sin embargo la especie humana domina el mundo a pesar de la inferioridad de los individuos que la componen y esto proviene de ser sociable, pues en la unión está la fuerza. La sociedad reúne y conserva con el nombre de ciencia, todas las chispas de la razón que han tenido los hombres de todos los tiempos, y con el nombre de religión y de moral todos los preceptos que tienden a la conservación de la especie. Por si solo el individuo humano vale menos que una larva.

*¿Qué idea ha encontrado más rápida y entusiasta acogida que la Soberanía Popular? Ninguna. ¿Y habrá, entre las utopías inventadas por el hombre, otra más ridícula y funesta que la República? Tampoco. [En nota añadida posteriormente, **Garavito** afirma que: *Esto era una equivocación. La República con todas sus turbulencias es preferible a la tiranía de un hombre estúpido.*] El mayor número de animales es más racional que el más racional de los hombres. ¿Qué gato ha sacrificado su bienestar personal por defender la fe o la libertad? Y ¿Cuántos hombres no han incurrido en esa insensatez? El gato sabe que el universo ha sido hecho para él y que se acaba cuando muere. El hombre ignora eso en absoluto. Fecha: 12/10/1907*

¿Cuál es el objeto de la vida? (5, 100-104)

El amor, responde la juventud, la Gloria responde la necedad; el dinero responde el egoísmo. El tiempo de amar pasa con los años, la gloria es una palabra vana; pero el dinero es útil a toda edad, mientras impere este régimen económico social, esto es mientras exista la especie humana. En los cuentos infantiles se enseña el triunfo de la virtud, el premio de la virtud. En la vida práctica solo tiene premio el egoísmo. ... Los que tienen el mejor concepto de la vida son los que han sabido gozar más de ella. Pero el egoísmo tiene dos formas: el libertino y el avaro. ... Si los seres humanos fueren todos cuerdos y no cobardes serían libertinos lo cual tendría la enorme ventaja de que la especie humana se acabaría. Lo que sea por una errónea educación, sea por un atavismo aberrante confieren a la vida una trascendencia especial y orientan sus acciones tras los vanos ideales: lo bueno, lo verdadero, lo bello ... son sorprendidos a la postre por una gran desilusión. Han malgastado estúpidamente su vida!!! Fecha: 24/1/1913.

Valor de la Ciencia (5, 105-113)⁴¹

¿Ahora cuál es el alcance de la cinematografía de Einstein? Hela aquí: La velocidad de la luz en el vacío es constante con relación a un sistema cualquiera y su aplicación práctica es que la velocidad de la luz con relación a la Tierra fuera de la atmósfera es la misma en todos los sentidos.

⁴¹Por la similitud del título y la fecha de la nota (02/12/1912), podemos suponer que conocía el libro de **Poincaré**: *El valor de la ciencia*. Librería Gutenberg de José Ruiz: Madrid, 1906, traducido por **Emilio González Llana**.

*Si Galileo hubiese sabido que pasados tres siglos y medio después de su abjuración ante el Santo Oficio, la más sublime intelectualidad del centro mundial mas sabio del mundo sostenía la hipótesis de la velocidad de la luz, de seguro que no hubiera protestado de su abjuración en su célebre *E pour si move* (sic). [Lo correcto es: *E pur si muove*] Fecha: 02/12/1912.*

Garavito deja ver su rechazo a las teorías de **Einstein** a pesar de su aparente admiración por él. Esta es la conclusión final a la que llega después de una corta disquisición sobre las teorías ondulatoria y "balística" de la luz. Intenta ser siempre muy riguroso en la sustentación de sus ideas, pero se pierde en el camino.

Para terminar, hago una selección de citas que muestran estados de ánimo bastante oscuros, reflexiones muy drásticas y negativas sobre los seres humanos, críticas fuertes a los gobiernos de su época. Citas que nos permiten entrar en el mundo íntimo de un personaje que se ha constituido en uno de los mitos de la historia de la ciencia en Colombia.

Recuerdos (6, 239-240)

El presente me desagrada, el porvenir me asusta, mientras que el pasado tiene para mi atractivos. Siento al recordar los hechos pasados algo como una dulzura melancólica. Los años pasan ante mi espíritu como pasan ante mi vista los wagones (sic) de un tren; pero no así propiamente sino en cuanto a la rapidez porque el paso de un wagon no me impresiona, mientras el año que pasa deja en mi ánimo un vacío, algo como un amigo que muere.

Cada vez que oigo ciertos retazos de música: El baile de las horas, El azul Danubio, La Cármen (sic), (ilegible) ... se me humedecen los ojos -¿Por qué? No lo sabría explicar bien, pues no hay nada de notable en esos recuerdos.

El pasado me arrastra ¿no será esto un síntoma de muerte? ¿Morir no es acaso dejarse arrastrar por el pasado? Para mi los muertos son mis amigos les profeso cariño porque han coexistido con épocas que me han sido gratas. Por eso visito a los muertos.

El Cementerio para mi es el lugar más agradable, siento alegría al penetrar en él. Es mi propia casa, lo siento así y no soy romántico. Mi hermano Fernando es de ese mismo sentimiento.

El cariño al pasado es lo que nos hace visitar el Cementerio. Tiene dos fechas: 12/5/11 y 12/31/16.

El fanatismo (8, 69-97)

¿Lo que se llama fuerza nerviosa es acaso algo que pueda escaparse a las leyes generales de la materia? ¿El amor y el odio no serán atracciones y repulsiones nerviosas? ¿Los mismos fenómenos telepáticos de que tanto se ha hecho alarde en estos últimos tiempos, si es que tienen algo de positivo, no podrán explicarse satisfactoriamente como fenómenos de auto-inducción nerviosa semejante a la self-inducción eléctrica? ...

Durante la vida, el individuo, dotado de un sistema nervioso, está percibiendo continuamente en sus relaciones con el mundo externo, hechos referentes a la geometría, a la cinemática, y a la dinámica. Es por esta razón que las matemáticas son ciencias eminentemente (principalmente) deductivas por que se refieren a las tres categorías: extensión, tiempo y materia o fuerza, categorías que impresionan por todos los sentidos y en los que hay identidades de manifestaciones o superposición de impresiones cerebrales y por tanto huellas de transmisión hereditaria.

Las matemáticas no necesitan de inducciones, pues estos materiales del conocimiento han sido recogidos no solo por el individuo mismo y por sus antepasados humanos sino también por todos los organismos animales de los cuales procede el individuo humano y ellos están organizados en el cerebro orgánicamente. Ejercitarse en el razonamiento no es otra cosa que aprender a servirse del cerebro. La utilidad del estudio de las matemáticas estriba principalmente en el uso que se hace de la inteligencia. O memoria heredada, pues el que adquiere el hábito del razonamiento riguroso está en la aptitud de utilizar todas las verdades del orden cuantitativo, sin tener que recargar para nada la memoria individual ...

Así por ahora las ciencias que se refieren a la materia orgánica son eminentemente inductivas pues el cerebro carece de los materiales en ese orden de fenómenos y es necesario reunir esos materiales para poderlos utilizar después. La inducción sirve para recoger los materiales del conocimiento, la deducción para construir el edificio de la ciencia.

Al parecer, ¡Garavito considera el fanatismo como una enfermedad nerviosa!

Al finalizar el año de 1912 (2, 31-32)

Para saber la edad de las personas basta averiguarles su concepto sobre el pasado, el presente y el futuro. Para el niño el pasado es la nada, el presente un despertar, el futuro un paraíso.

Más tarde ... el pasado es un idilio, el presente una sombra, el futuro un abismo!

Cada año que pasa arranca un ahí! (sic) de dolor, es un pedazo de vida que se vá!

La muerte se acerca, se le siente venir; se le ha visto blandir su guadaña sobre padres, hermanos, amigos. ... Todo lo que antes era una esperanza se ha vuelto un desengaño. Nada se puede esperar sino la muerte. ¡Es la única esperanza que no es defraudada!

Los Partidos colombianos y el oportunismo moderno (8, 99-120)

El partido conservador levanta la bandera del orden y el Liberal la bandera de la libertad. No se puede saber lo que es bandera de orden ni bandera de libertad, solo que la primera es azul y la segunda roja, pero no lo que significan por que en Colombia no ha imperado otra cosa desde la independencia que la tiranía del desorden debido a la lucha incesante de esos dos partidos por apoderarse del mando.

El partido conservador se dice defensor de la religión cuando al contrario es él quien se apoya en ella y la desprestigia al hacerla partícipe de la responsabilidad de sus errores y sus faltas.

El partido Liberal proclama el esparcimiento de la luz y pretende destruir la religión que considera no solo como doctrina falsa, sino como altamente perjudicial a las libertades y al progreso.

Trabajo inédito (51, 1-3)⁴²

Teorema. *Nadie es Culpable o los seres no son responsables de sus acciones.*

Corolario I. *Son las pasiones las fuerzas morales que impelen al hombre al crimen o a la virtud, al heroísmo o a Servilismo. Equivocados están los que creen que la voluntad es una fuerza independiente, pues ésta no es sino la resultante de las otras.*

Corolario II. *No se debe venerar ni despreciar a ningún hombre, porque nadie merece ser venerado ni despreciado.*

Corolario III. *Las circunstancias (sic) hacen héroes lo mismo que criminales.*

Conclusiones

Uno de los reproches que se le han hecho a **Garavito**, como vimos, es no haber dejado escuela. El impulso en

el estudio de las matemáticas superiores que comenzó en el Colegio Militar en 1848 tuvo un auge especialmente notorio a finales del siglo XIX. La fundación de la Sociedad Colombiana de Ingenieros y su revista *Anales de Ingeniería* en la cual estatutariamente se le daba importancia especial al desarrollo de las matemáticas y la creación ese mismo año de 1888 del título de Profesor en Ciencias Matemáticas en la Escuela de Ingeniería son la culminación de un proceso que venía del espíritu que **Lino de Pombo** le imprimió a la formación de los ingenieros del Colegio Militar. **Pombo** dio prioridad a la formación matemática al haber tomado como modelo a la Escuela Politécnica de París y a la Escuela de Puentes y Calzadas considerada la primera escuela de ingeniería en la cual se dio la "cientificación" de la ingeniería.⁴³ La Escuela debía dar una sólida educación científica a sus alumnos, apoyada en las matemáticas, la física y la química y formarlos para entrar a las escuelas especiales de los servicios públicos del Estado, como la Escuela de Ingenieros, la Escuela de Minas o la Escuela de Puentes y Calzadas.⁴⁴

La Guerra de los Mil Días cortó de un tajo ese proceso. Al abrirse la Universidad Nacional en 1903 se acabó con el título de Profesor, los numerosos artículos que sobre matemática aparecían en los *Anales* disminuyeron sensiblemente, y el espacio para las ciencias físico matemáticas de los *Anales* quedó ocupado casi de manera exclusiva por **Garavito**.⁴⁵ ¿Qué pasó con los alumnos que durante la Guerra de los Mil Días estuvieron estudiando matemáticas con él? ¿Qué pasó con los estudiosos de la geometría que bajo su tutela formaron el Círculo de los nueve puntos, para dedicarse al estudio del problema de Euler? Son preguntas abiertas que es necesario responder.

Ante la pregunta de por qué ese cambio tan abrupto, se responde que la Regeneración, los consecuentes gobiernos conservadores y la Guerra de los Mil Días cortaron ese deseo de progreso basado en la formación científica que habían tenido los fundadores de la República y de manera especial los radicales que le apostaron al cambio a través de la educación, y más precisamente de la "educación científica".⁴⁶

Garavito no fue complaciente con la ideología de la época. Es más, fue un duro crítico de nuestros partidos políticos y nuestros gobernantes, como se puede leer en

⁴²¿A la Spinoza?

⁴³<http://www.cefi.org/CEFINET/DONN...REF/HISTOIRE/HISTOIRE.HTM>

⁴⁴<http://perso.wanadoo.fr/frederic.gales/Polytechnique.htm>

⁴⁵**Sánchez, C.H.**, 1993, *Las Matemáticas en los Anales de Ingeniería*. *Mathesis*, 9, 105-204.

⁴⁶¿Qué es la Universidad Nacional? *Anales de la Universidad*, No. 1, 1868.

su nota sobre los partidos políticos que he mencionado antes.

Es claro en sus escritos que sus investigaciones iban en la búsqueda de la verdad, la cual consideraba absoluta, y esa verdad en el campo de la física se encontraba en la mecánica newtoniana y en el campo de las matemáticas en la geometría euclidiana. Le era difícil aceptar una especulación teórica que no tuviera bases empíricas. En ese sentido podemos decir que no tenía espíritu de matemático "puro". Por ello su rechazo a las geometrías no euclidianas y a la física de **Einstein**.

Todas sus especulaciones en psicología, sociología o economía política tienen como referente único la mecánica de Newton. Siempre está buscando una analogía que le permita justificar, demostrar sus afirmaciones. Aceptó la teoría de la evolución pero al estilo spenceriano. Sus comentarios sobre el género humano son muy drásticos. El hombre, para **Garavito**, es un animal que requiere vivir en sociedad para poder subsistir, y se inventa mundos ficticios y creencias no posibles de verificar empíricamente, para justificar todas sus actuaciones. No entendió el comportamiento humano, se quejó mucho de nuestras debilidades y analizó en uno de sus escritos la famosa definición de **Aristóteles** de que el hombre es un animal racional para quedar ante **Garavito** convertidos en seres inferiores a una larva; las fallas humanas lo hacen decir que más racional es un gato.

Sus alumnos y compañeros lo describen como un hombre bueno, pero hemos visto que su alma estaba cargada de sentimientos negativos hacia la humanidad y particularmente hacia nuestros dirigentes políticos, a los cuales envía buena parte de sus dardos.

En matemáticas, astronomía y física ocupa un lugar privilegiado en nuestro medio. Sin duda fue un estudioso de los temas por los que se ganó la fama de sabio. La pobreza y austeridad con que vivió no le permitieron salir de las fronteras de nuestra patria. Se siente un dejo de resentimiento con la vida, no parece que haya sido un hombre feliz.

Lo anterior es apenas un bocado de lo que podemos encontrar en los cuadernos de **Garavito**. Con esto espero estimular a los lectores, y muy particularmente a los historiadores de la ciencia en Colombia a penetrar en el mundo del único colombiano que ha merecido que un cráter de la luna lleve su nombre, **Julio Garavito Armero**.

Agradecimientos. Debo agradecer al profesor **Jorge Arias de Greiff** todo el estímulo y la asesoría que me dio para realizar este trabajo. Igualmente debo agradecer al profesor **Armando Higuera**, antiguo director del Observatorio Nacional, quien me facilitó el acceso a los documentos necesarios para culminar este trabajo, y al profesor **Alexis de Greiff** por la lectura de una primera versión y sus valiosos aportes que ayudaron a mejorarlo.

Bibliografía

- [1] **Albis González, Víctor S. & Luis Moreno Armella**, 1976: *Una hipótesis equivalente al postulado euclídeo de las paralelas*. Boletín de Matemáticas 10, 78-85.
- [2] **Albis, V. S.**, 1997: *Vicisitudes del postulado euclídeo en Colombia*. Rev. Acad. Colomb. Cienc. 21 (80), 281-293.
- [3] **Albis-González, V. S. & Clara H. Sánchez**, 1999: *Descripción del curso de cálculo diferencial de Aimé Bergeron en el Colegio Militar*. Rev. Acad. Colomb. Cienc. 23 (86), 73-79.
- [4] **Álvarez Lleras, Jorge**, 1920: *Julio Garavito Armero. Ensayo biográfico y literario*. Anales de Ingeniería 28 (325), 362-420.
- [5] **Appell, P.**, 1898: *Éléments d'analyse mathématique*, París.
- [6] **Arias de Greiff, Jorge**, 1993: *Historia de la astronomía en Colombia*. Bogotá. Academia Colombiana de Ciencias.
- [7] **Arboleda, L. C. & Anacona, M.**, 1994: *Las geometrías no euclidianas en Colombia. La apuesta euclidiana del profesor Garavito (1865-1920)*. Quipu, 11 No. 1, 7-24.
- [8] **Bateman, Alfredo**, 1954: *Julio Garavito Armero en el Observatorio Astronómico de Bogotá*. Monografía Histórica. Ediciones Universidad Nacional: Bogotá.
- [9] **Bateman, Alfredo**, 1965: *El Centenario del Sabio Garavito. "Mostrar la Luna"*, Magazine Dominical, Domingo 10 de enero de 1965. págs. 4D-5D.
- [10] **Campos Sánchez, Alberto**, 1984: *La polémica Garavito-Alancar Silva sobre la teoría racional de las curvas*. Lecturas Matemáticas 5, Nos. 1-2-3 (1984), 79-97.
- [11] **Carrizosa Valenzuela, J.** 1921: *Las geometrías no euclídeas y las objeciones de Garavito*. Universidad, Números 19, 20, 21, págs. xxx
- [12] **Duarte, Francisco J.** 1946: *Sobre las geometrías no euclidianas. Notas históricas y bibliográficas*. Rev. Acad. Colomb. Cienc., Nos. 25-26, 63-80.
- [13] **Escobar, Melitón**, 1920: *Dr. Julio Garavito (1865-1920)*, El Espectador, 6 de junio de 1920.
- [14] **Garavito, J.** 1917: *¿Bancarrotta de la ciencia?* Anales de Ingeniería 25, 101-107, 203-215.
- [15] **Jordan, Camille**, *Cours d'analyse de l'École Polytechnique*. 3 Vols. 1882-1887.
- [16] **Jordan, C.**, 1909: *Cours d'analyse de l'École Polytechnique*. Tercera edición. Gauthier-Villars: París.
- [17] **Lleras Codazzi, Ricardo**, 1920: *Julio Garavito Armero (Notas íntimas)*. El Catolicismo, marzo 20 de 1920.
- [18] **March, Robert H.** *Física para poetas*. Siglo XXI Editores: México, 1982.
- [19] **Martínez-Chavanz, Regino**, 1986: *El pensamiento físico y epistemológico de Garavito*. Revista Naturaleza, Bogotá, No. 4 (1986) 15-25.

- [20] **Martínez-Chavanz, Regino**, 1987: *Ensayo sobre la penetración de las ideas relativistas y cuánticas en Colombia*. Informe de investigación. Centro de Investigaciones de la Universidad de Antioquia, Medellín, junio de 1987.
- [21] **Martínez-Chavanz, Regino**, 1988: *El desarrollo de la Física en Colombia de 1860 a 1960*. Prepublicación. Universidad de Antioquia: Medellín.
- [22] **Martínez-Chavanz, Regino & Michel Paty**, 2004: *Formación y desarrollo de la cultura científica en Colombia: La Física de 1880 a 1940*. En *Formación de cultura científica en Colombia. Ensayos sobre Matemáticas y Física*. Obra colectiva. Editores Luis Carlos Arboleda y Michel Paty. Artes Gráficas del Valle, Cali, 2004.
- [23] **Martínez-Chavanz, Regino**, 2004: *Colección de los trabajos de los participantes en el proyecto terminado Ecos-Nord*, entre el Equipo REHSEIS, CNRS y la Université Paris 7-Denis Diderot, París, y la Universidad del Valle, Cali, Colombia). 2004.
- [24] **Martínez-Chavanz, Regino**, 2005a: *La recepción de la física moderna en Colombia*. Saber y Tiempo (Buenos Aires) n° 18 (2005) 41-69.
- [25] **Martínez-Chavanz, Regino**, 2005b: *La recepción de la relatividad en Colombia*. Ponencia en el Simposio Internacional Einstein. Universidad del Valle, Cali, Colombia, 28 de noviembre al 2 de diciembre de 2005. Prepublicación en CD-Rom, 2005. Aparecerá en las Memorias.
- [26] **Martínez-Chavanz, Regino**, 2006: *Einstein y su recepción en Colombia*. Praxis filosófica (Universidad del Valle, Cali, Colombia). Nueva serie n° 22 (ene.-jun. 2006) 29-112.
- [27] **Mayor, Alberto**, 1985: *Matemática y subdesarrollo: La disputa sobre su enseñanza en la ingeniería colombiana de principios del siglo xx*. Revista de Extensión Cultural. Universidad Nacional, Medellín, No. 19, págs.14-24.
- [28] **Muñoz T., José Antonio & E. Merchán C.**, 1912: *Conferencias de Cálculo Diferencial e Integral, sacadas por José Antonio Muñoz T. y E. Merchán C. Profesor Julio Garavito A.* Universidad Nacional de Colombia, Facultad de Matemáticas e Ingeniería: Bogotá. Conferencias mimeografiadas.
- [29] **Sánchez, C. H.**, 1985: *El surgimiento de la teoría de conjuntos*. Cuadernillo, II Coloquio Distrital de Matemáticas, Universidad Pedagógica Nacional: Bogotá, 62 págs.
- [30] **Sánchez, C. H.**, 1993: *Las matemáticas en los Anales de Ingeniería*. Mathesis, 9, 105-204.
- [31] **Sánchez, C. H.**, 2001: *50 años de matemáticas modernas en Colombia*. Boletín de Matemáticas. NS 8 (2), 3-28.
- [32] **Sánchez, C. H.** 2002: *Cien años de historia de la matemática en Colombia*. Rev. Acad. Colomb. Cienc. 26, 239-260.
- [33] **Sturm, Ch.** *Cours d'analyse*, París, Gauthier-Villars, 1888. Tuvo varias ediciones.
- [34] **Tissandier, Gaston**, 1884: *Les Récréation Scientifiques ou l'enseignement par les jeux*. G. Masson, Éditeur: Paris.
- [35] **Villegas, Graciela**, 1992: *Sobre el curso de cálculo diferencial e integral "à la Cauchy" de Julio Garavito, 1912*. Tesis de maestría, Universidad del Valle: Cali.

Recibido el 5 de julio de 2006

Aceptado para su publicación el 9 de abril de 2007

THE BEST LINEAR UNBIASED ESTIMATORS OF REGRESSION COEFFICIENTS IN A MULTIVARIATE GROWTH-CURVE MODEL. A COORDINATE-FREE APPROACH

by

Gabriela Beganu¹

Abstract

Beganu, G.: The best linear unbiased estimators of regression coefficients in a multivariate growth-curve model. A coordinate-free approach. *Rev. Acad. Colomb. Cienc.* **31** (119): 267-273, 2007. ISSN 0370-3908.

The problems of the existence of the best linear unbiased estimators (BLUE) and of their equality to the ordinary least squares estimators (OLSE) of the expected value of the observations are treated in a coordinate-free approach using a multivariate growth-curve model. It will be proved that the alternative forms of the necessary and sufficient conditions used in solving of these problems are independent on the between-individuals design matrix of the model.

Key words: Ordinary least squares estimator, best linear unbiased estimator, orthogonal projections.

Resumen

Se discute el problema de existencia del mejor estimador lineal insesgado (BLUE) para el valor esperado de una distribución en un contexto libre de coordenadas, usando un modelo de curvas de crecimiento multivariado. Se presenta además la igualdad del estimador anterior con el estimador de mínimos cuadrados ordinarios (OLSE). Se prueba que las diferentes

¹ Department of Mathematics, Academy of Economic Studies, Str. Piața Romană Nr. 6, Bucharest, Romania. E-mail: gabriela_beganu@yahoo.com

2000 Mathematics Subject Classification: Primary 62H12. Secondary 47A05.

formas de expresar las condiciones necesarias y suficientes para demostrar las propiedades anteriores son independientes de la matriz de diseño del modelo entre individuos.

Palabras clave: Estimador de mínimos cuadrados ordinarios, mejor estimador lineal insesgado, proyecciones ortogonales.

1. Introduction

For the general linear model $y = X\beta + e$, where X is an $n \times p$ known design matrix of rank $r \leq p$, β is a $p \times 1$ vector of unknown parameters and e is an $n \times 1$ vector of disturbances, it is assumed that y (vector of observations) has the expectation $E(y) = \mu = X\beta$ and the covariance matrix $\text{cov}(y) = \sigma^2 V$, with $\sigma^2 > 0$ a known or unknown number and V an $n \times n$ symmetric positive definite known matrix. When $V = I_n$ (the $n \times n$ identity matrix) the classical Gauss-Markov theorem states that the BLUE (or Gauss-Markov estimator) is the OLSE of μ which is obtained for any solution $\hat{\beta}_{\text{OLSE}}$ of the normal equations $X'X\beta = X'y$.

When V is a positive definite matrix and $r = p$, Aitken [1] extended the former result proving that the BLUE is the generalized least squares estimator of μ obtained for the solution $\hat{\beta}_{\text{GLSE}}$ of the generalized normal equations $X'V^{-1}X\beta = X'V^{-1}y$.

Some other extensions of the Gauss-Markov theorem have been made by Zyskind and Martin [30] for a non-negative covariance matrix and Harville [15] for general mixed linear model.

In the multivariate case of linear regression models the covariance structure is more complicated than $\sigma^2 V$ and it has to be also treated the existence of BLUE of μ . These problems: the existence of the BLUE and the equality between OLSE and BLUE of $E(y)$ in linear regression models represented important subjects in statistics.

Seminal contributions in their solving expressed in geometrical form were obtained by Kruskal [17], Eaton [13], Milliken [19], Haberman [14], Arnold [2], Klieffe [16]. Some alternative proofs were given: Seely [27], [28] restricted the choice of the BLUE of $E(y)$ to a finite-dimensional linear space; Drygas [11], [12] dealt with conditions under which the BLUE of μ is independent on V for multivariate linear models in locally convex topological vector space; Beganu [5], [7], [10] considered the existence conditions of the BLUE for the fixed effects in multivariate mixed linear models; Qian and Tian [22] established some properties for the BLUE

of a subset of regression coefficients in general linear model.

Developments of the several conditions for the OLSE to be the BLUE have been made by Baksalary and van Eijnsbergen [4] and Puntanen and Styan [20]. Puntanen *et al.* [21] introduced a new representation for the rank of the difference between the covariance matrices corresponding to the OLSE and the BLUE of μ in the general linear model.

The purpose of this article is to extend to a multivariate growth curve model some of the results obtained for the general univariate linear model regarding the existence of the BLUE and the equality between the OLSE and the BLUE of μ . Some necessary and sufficient conditions for the OLSE to be the BLUE are obtained using a coordinate-free approach and it will be proved that the both problems do not depend on the between-individuals design matrix of the considered model.

The article is structured as follows. In Section 2 the necessary and sufficient condition obtained by Eaton [13] is expressed in order to prove the existence of the BLUE of μ in a family of multivariate growth curve models with random effects proposed by Reinsel [25], [26]. In Section 3 some of the necessary and sufficient conditions given by Zyskind [29] and Haberman [14] for the OLSE to be the BLUE in the general linear model will be verified in the considered multivariate linear model. It will be proved by means of the orthogonal projections onto the corresponding linear manifolds that these conditions can be expressed only in terms of the within-individual design matrix. Two examples are presented and it is proved that the BLUE of μ exists and it is equal to the OLSE independently on the between-individuals design matrix of these models.

2. The existence of the BLUE

The problem of the existence of the BLUE is treated in a specific multivariate linear model. This question was approached by Eaton [13] who extended the Kruskal's theorem [17] to the case of the general multivariate linear model.

In the sequel it will be used a coordinate-free approach for which some algebraical notions are necessary to be denoted (see [24]).

Let \mathcal{L}_{p_1, p_2} be the linear space of $p_2 \times p_1$ real matrices endowed with the inner product $\langle C, D \rangle = \text{tr}(CD')$ for all $C, D \in \mathcal{L}_{p_1, p_2}$. The Kronecker matrix product is defined as usual: if $C \in \mathcal{L}_{p_1, p_2}$ and $D \in \mathcal{L}_{q_1, q_2}$ then $C \otimes D = (c_{ij}D)$ is an element in $\mathcal{L}_{p_1 q_1, p_2 q_2}$.

The same notation \mathcal{L}_{p_1, p_2} will be used for the real vector space of linear transformations on M_1 to M_2 , where M_1 and M_2 stand for p_1 and p_2 -dimensional real inner product spaces, respectively. If T and S are linear operators in \mathcal{L}_{p_2, p_2} and \mathcal{L}_{p_1, p_1} , respectively, then the Kronecker operators product $T \odot S$ is the linear transformation on \mathcal{L}_{p_1, p_2} to \mathcal{L}_{p_1, p_2} such that $(T \odot S)Q = TQS^*$ where S^* is the adjoint of S relative to the inner product in M_1 . The composition of two linear operators is

$$(T_1 \odot S_1) \circ (T_2 \odot S_2) = (T_1 T_2) \odot (S_1 S_2)$$

and the adjoint relative to the usual trace inner product is

$$(T \odot S)^* = T^* \odot S^* .$$

The particular linear regression model used in the following belongs to a family of multivariate linear growth curve models with random effects and it was considered by **Reinsel** [25], [26] and **Lange** and **Laird** [18] as a special case of the linear mixed models.

This model consists in m characteristics measured at p occasions on each of n individual sampling units. If the within-individual and the between-individuals design matrices $X \in \mathcal{L}_{q, p}$ and $A \in \mathcal{L}_{r, n}$, respectively, are known matrices of full column ranks ($q \leq p, r < n$), $B \in \mathcal{L}_{qm, r}$ is a matrix of unknown parameters and $\Lambda \in \mathcal{L}_{qm, n}$ is a matrix of random effects, then the observable random matrix is

$$Y = AB(X' \otimes I_m) + \Lambda(X' \otimes I_m) + E \quad (1)$$

where $E \in \mathcal{L}_{pm, n}$ is the random matrix of errors. It is assumed that the lines of E and Λ are independent random vectors of each other and between them, identically distributed with zero expected means and the same covariance matrices Σ_e and Σ_λ , respectively. Then the expected mean of the observations is

$$\mu = E(Y) = AB(X' \otimes I_m) \quad (2)$$

and the covariance matrix is

$$\Sigma = \text{cov}(\text{vec}Y) = I_n \otimes [(XX') \otimes \Sigma_\lambda + I_p \otimes \Sigma_e] \quad (3)$$

where

$$V = (XX') \otimes \Sigma_\lambda + I_p \otimes \Sigma_e \quad (4)$$

For $A \in \mathcal{L}_{r, n}$ and $X \in \mathcal{L}_{q, p}$ of full column rank let

$$\Omega = \{\mu = AB(X' \otimes I_m) \mid B \in \mathcal{L}_{qm, r}\} \quad (5)$$

be a linear manifold in $\mathcal{L}_{pm, n}$ and $\mathcal{X} \subset R^{pm}$, $\mathcal{A} \in R^n$ be the ranges corresponding to the operators $X \otimes I_m \in \mathcal{L}_{qm, pm}$. and $A \in \mathcal{L}_{r, n}$, respectively.

The sets of symmetric and positive definite linear mappings V from $\mathcal{L}_{m, p}$ to $\mathcal{L}_{m, p}$ and Σ from $\mathcal{L}_{pm, n}$ to $\mathcal{L}_{pm, n}$ will be denoted by Θ and \mathcal{S} , respectively, such that $I_{pm} \in \Theta$ and $I_{n \times pm} \in \mathcal{S}$. V and Σ are the covariance operators in (4) and (3) respectively.

Then the description of the regression model (1) with the assumptions (2), (3) and (4) in a coordinate-free form is that $E(Y) = \mu \in \Omega$ and $\text{cov}(Y) = \Sigma = I_n \odot V \in \mathcal{S}$, when $V \in \Theta$. Therefore the family of the model (1) will be the set of all $n \times pm$ random matrix Y whose expectation belongs to Ω given by (5) and whose covariance operator (or matrix) lies in a certain set \mathcal{S} definite above.

It is known (see [13]) that the linear operator in $\mathcal{L}_{pm, n}$ to $\mathcal{L}_{pm, n}$

$$P_\Omega = P_A \odot P_{X \otimes I_m} \quad (6)$$

is the orthogonal projection onto Ω , where

$$P_A = A(A'A)^{-1}A' \quad (7)$$

and

$$P_{X \otimes I_m} = [X(X'X)^{-1}X'] \odot I_m \quad (8)$$

are the orthogonal projections onto \mathcal{A} and \mathcal{X} , respectively. It can be noticed that $P_{X \otimes I_m} = P_X \otimes I_m$, where P_X is the orthogonal projection on the range of X .

Theorem 1. *The linear manifold \mathcal{X} is invariant under V if and only if Ω is invariant under $\Sigma = I_n \odot V \in \mathcal{S}$ for all $V \in \Theta$.*

Proof. It is assumed that Ω is invariant under the linear transformation Σ which means $(I_n \odot V)\Omega = \Omega$.

Let $B \in \mathcal{L}_{qm, r}$ such that $\mu = AB(X' \otimes I_m) \in \Omega$. Then, using the definition of the Kronecker operators product and the symmetry of V , it can be written that

$$(I_n \odot V)\mu = \mu V = AB(X' \otimes I_m)V \in \Omega$$

The last relation means that

$$P_\Omega[AB(X' \otimes I_m)V] = AB(X' \otimes I_m)V$$

or

$$P_A AB(X' \otimes I_m)VP_{X \otimes I_m} = AB(X' \otimes I_m)V$$

because P_Ω given by (6) is the orthogonal projection on Ω . But P_A being the orthogonal projection on the linear space \mathcal{A} , it can be obtained that

$$AB(X' \otimes I_m)VP_{X \otimes I_m} = AB(X' \otimes I_m)$$

for all $B \in \mathcal{L}_{qm,r}$. This relation is equivalent to

$$(X' \otimes I_m)VP_{X \otimes I_m} = (X' \otimes I_m)V$$

which is the same as

$$P_{X \otimes I_m} V(X \otimes I_m)\alpha = V(X \otimes I_m)\alpha$$

for all $\alpha \in R^{qm}$. Since $P_{X \otimes I_m}$ is the orthogonal projection on \mathcal{X} the last equality means that $V(X \otimes I_m)\alpha \in \mathcal{X}$, which can be expressed as: for all $\alpha \in R^{qm}$ there is $\beta \in R^{qm}$ such that

$$V(X \otimes I_m)\alpha = (X \otimes I_m)\beta \tag{9}$$

and this is the property for \mathcal{X} to be invariant under V . The proof is complete because the equivalent relations were stated for all $V \in \Theta$.

Corollary 1. *The BLUE of $E(Y)$ exists in the family of models (1) if and only if \mathcal{X} is invariant under V , for all $V \in \Theta$.*

Proof. Eaton [13] proved that the BLUE of $E(Y)$ exists in the general multivariate linear model if and only if $\Sigma\Omega = \Omega$ for all $\Sigma = I_n \odot V \in \mathcal{S}$, which is equivalent to $V\mathcal{X} = \mathcal{X}$, for all $V \in \Theta$ by Theorem 1.

Corollary 2. *The linear manifold \mathcal{X} is invariant under V if and only if there exists the linear operator $Q \in \mathcal{L}_{qm,qm}$ such that*

$$V(X \otimes I_m) = (X \otimes I_m)Q \tag{10}$$

for all $V \in \Theta$.

Proof. The relation (9) is equivalent to the following condition: for all $\alpha \in R^{qm}$, there exists $\beta = Q(\alpha) \in R^{qm}$ such that

$$V(X \otimes I_m)\alpha = (X \otimes I_m)Q(\alpha)$$

for all $V \in \Theta$.

Corollary 3. *For the model (1) the linear transformation $Q \in \mathcal{L}_{qm,qm}$ verifying the condition (10) is*

$$Q = (X'X) \otimes \Sigma_\lambda + I_q \otimes \Sigma_\epsilon \tag{11}$$

Proof. By means of Theorem 1 and Corollary 2, the existence of the matrix Q with the property (10) is equivalent to the invariance of the linear manifold Ω under all $\Sigma = I_n \odot V \in \mathcal{S}$. Hence, for $V \in \Theta$ given by (4), we have

$$\begin{aligned} \Sigma\mu &= (I_n \odot V)[AB(X' \otimes I_m)] \\ &= AB(X' \otimes I_m)V \\ &= AB(X' \otimes I_m)[(XX') \otimes \Sigma_\lambda + I_p \otimes \Sigma_\epsilon] \\ &= AB[(XX') \otimes \Sigma_\lambda + I_q \otimes \Sigma_\epsilon](X' \otimes I_m) \\ &= ABQ(X' \otimes I_m) \in \Omega, \end{aligned}$$

for all $B \in \mathcal{L}_{qm,r}$. Therefore Q expressed in (11) being a $qm \times qm$ symmetric matrix, it verifies the relation (10).

3. The equality between OLSE and BLUE

The OLSE and the BLUE of $E(Y)$ corresponding to the model (1) are given in Reinsel [25], [26], Lange and Laird [18] and Beganu [10] as

$$\hat{\mu}_{OLSE} = A(A'A)^{-1}A'Y[X(X'X)^{-1}X' \otimes I_m] \tag{12}$$

$$\begin{aligned} \hat{\mu}_{BLUE} &= A(A'A)^{-1}A'YV^{-1}(X \otimes I_m) \cdot \\ &[(X' \otimes I_m)V^{-1}(X \otimes I_m)]^{-1}(X' \otimes I_m). \end{aligned} \tag{13}$$

In the following some of the alternative forms of the necessary and sufficient conditions for the OLSE to equal the BLUE of μ given by Rao [23], Zyskind [29] and Haberman [14] will be verified. These conditions were chosen for their accessibility and their geometrical representation.

Theorem 2. *In the model (1)*

$$\hat{\mu}_{OLSE} = \hat{\mu}_{BLUE} \tag{14}$$

if and only if the linear manifold \mathcal{X} is invariant under V for all $A \in \mathcal{A}$ and $V \in \Theta$.

Proof. It is known ([17]) that the equality (14) holds if and only if Ω is invariant under $\Sigma \in \mathcal{S}$, which is equivalent through Theorem 1 to $V\mathcal{X} = \mathcal{X}$ for all $V \in \Theta$. It can be noticed that the proof of the relation (9) is independent on $A \in \mathcal{A}$.

Theorem 3. *The equality (14) corresponding to model (1) holds if and only if*

$$P_{X \otimes I_m} V = VP_{X \otimes I_m} \tag{15}$$

for all $A \in \mathcal{A}$ and $V \in \Theta$.

Proof. One of the necessary and sufficient conditions proved by Zyskind [29] to establish (14) is written for the model (1) as

$$P_{\Omega} \circ \Sigma = \Sigma \circ P_{\Omega} \tag{16}$$

for all $\Sigma = I_n \odot V \in \mathcal{S}$. Let $B \in \mathcal{L}_{qm,r}$ such that $\mu = AB(X' \otimes I_m) \in \Omega$. Then using Corollary 2, we have that

$$\begin{aligned} (P_{\Omega} \circ \Sigma)\mu &= [(P_A \odot P_{X \otimes I_m}) \circ (I_n \odot V)]\mu \\ &= [P_A \odot (P_{X \otimes I_m} V)]\mu \\ &= P_A \mu V P_{X \otimes I_m} \\ &= ABQ(X' \otimes I_m) P_X \otimes I_m \\ &= ABQ(X' \otimes I_m) \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} (\Sigma \circ P_{\Omega})\mu &= [(I_n \odot V) \circ (P_A \odot P_{X \otimes I_m})]\mu \\ &= [P_A \odot V P_{X \otimes I_m}]\mu \\ &= P_A \mu P_{X \otimes I_m} V \\ &= P_A AB(X' \otimes I_m) P_{X \otimes I_m} V \\ &= AB(X' \otimes I_m) V = ABQ(X' \otimes I_m). \end{aligned}$$

Therefore the equality (16) is accomplished for all $A \in \mathcal{A}$ and $V \in \Theta$, which means that

$$P_A \odot (P_{X \otimes I_m} V) = P_A \odot (V P_{X \otimes I_m})$$

Then the equality (15) is obtained for all $A \in \mathcal{A}$ and $V \in \Theta$ using Lemma 1 in [3].

If the covariance operator V is of the form (4), then the condition (15) becomes

$$\begin{aligned} P_{X \otimes I_m} V &= (P_X \otimes I_m)[(XX') \otimes \Sigma_{\lambda} + I_p \otimes \Sigma_e] \\ &= (P_X XX') \otimes \Sigma_{\lambda} + P_X \otimes \Sigma_e \\ &= (XX' P_X) \otimes \Sigma_{\lambda} + P_X \otimes \Sigma_e \\ &= [(XX') \otimes \Sigma_{\lambda} + I_p \otimes \Sigma_e](P_X \otimes I_m) \\ &= V P_{X \otimes I_m}, \end{aligned}$$

because P_X is the orthogonal projection on the range of X .

Examples. 1. A particular form of the model (1) is the multivariate linear growth curve

$$Y = AB(X' \otimes I_m) + \Lambda(I_p \otimes I_m) + E \tag{17}$$

where the within-individual design matrix X is partitioned as $(1_p Z)$ with its first column being a column of ones since X includes a constant term for each of the m variables. The matrix Z of order $p \times (q-1)$ is such that $1'_p Z = 0$.

The observations in (17) have the mean (2) and the covariance matrix (3) with

$$V = J_p \otimes \Sigma_{\lambda} + I_p \otimes \Sigma_e$$

where $J_p = 1_p 1'_p$.

Then the linear manifold Ω is invariant under Σ means that

$$\Sigma \mu = \mu V = AB(X' \otimes I_m) V = ABQ(X' \otimes I_m) \tag{18}$$

if and only if there exists a matrix Q satisfying (10) for all $V \in \Theta$ and $\mu \in \Omega$. Such a matrix corresponding to the model (17) is $Q = R \otimes \Sigma_{\lambda} + I_q \otimes \Sigma_e$ with

$$R = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

if and only if $1'_p Z = 0$.

Hence $BQ = \tilde{B} \in \mathcal{L}_{qm,r}$ means that (18) is an element of Ω for all $V \in \Theta$ and $\mu \in \Omega$. It can easily see that this condition stands independent on $A \in \mathcal{A}$ and that it can be replaced by the relation (9) with $\beta = Q\alpha$, which means $X\mathcal{X} = \mathcal{X}$ for all $V \in \Theta$.

Therefore the BLUE of μ exists in the model (17) and it is equal to the OPLSE if and only if X is invariant under all $V \in \Theta$ and this is equivalent to the condition for 1_p and Z to be linearly independent for all $A \in \mathcal{A}$.

2. A generalized growth-curve model considered in [25] is

$$Y = AB(X' \otimes I_m) + \Lambda(X' \otimes I_m) + T(W' \otimes I_m) + E \tag{19}$$

where W is a $p \times s$ design matrix of full column rank and T is an $n \times sm$ random matrix. Besides the assumptions of the model (1) it is supposed that the lines of T are independently and identically distributed with zero means and the same covariance matrix $I_p \otimes \Sigma_T$. They are also mutually independent on the random lines of Λ and E .

Then the expected value of Y in (19) is (2), an element of the linear manifold Ω given by (5), and the covariance matrix (3) with

$$V = (XX') \otimes \Sigma_{\lambda} + (WW') \otimes \Sigma_T + I_p \otimes \Sigma_e$$

The condition for the invariance of Ω becomes

$$\Sigma \mu = \mu V = AB(X' \otimes I_m) V = A\tilde{B}(X' \otimes I_m) \tag{20}$$

if and only if $X'W = 0$, where $\tilde{B} = B[(X'X) \otimes \Sigma_{\lambda} + I_q \otimes \Sigma_e] \in \mathcal{L}_{qm,r}$. It can be easily seen that (20) is an element of Ω for all $V \in \Theta$ and $A \in \mathcal{A}$ if and only if

$X'W = 0$. Therefore the necessary and sufficient condition for the BLUE of μ to exist in the model (19) is that Ω is invariant under all $\Sigma \in \mathcal{S}$, which is equivalent to the invariance of \mathcal{X} under all $V \in \Theta$ and this is the same as the condition for the equality (14). In the case of the model (19) the relation (14) holds if and only if X and W are linearly independent as it was already known.

It is also easy to see that \bar{B} can be written as BW which means that the element (20) lies in Ω is an equivalent condition of (10) and it is independent on $A \in \mathcal{A}$.

It follows that this results obtained for the family of the model (1) with a particular form (17) and a generalized form (19) are verified independently on the between-individuals matrix $A \in \mathcal{A}$.

The necessary and sufficient conditions in Theorems 1, 2, 3 are verified by the model (1), hence the BLUE (13) of μ exists and it is the OLSE (12). These two questions are equivalent in the multivariate growth-curve model (1) because of its special covariance structure.

Corollaries 1, 2, 3 assert that for the family of multivariate growth curve models (1) the necessary and sufficient conditions for the existence of $\hat{\mu}_{BLUE}$ and its equality with $\hat{\mu}_{OLSE}$ are independent on the between-individuals design matrix A and they have to be imposed only on the within - individual design matrix X . The special form of the orthogonal projection onto Ω allows these conclusions.

References

- [1] Aitken A. C. (1934), *On least squares and linear combination of observations*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh, Sec. A, 55, 42-47.
- [2] Arnold S.F. (1979), *A coordinate-free approach to finding optimal procedures for repeated measures designs*, Ann. Statist., 7, 812-822.
- [3] Baksalary J. K. & Kala R. (1976), *Criteria for estimability in multivariate linear models*, Math. Operationsforsch. Statist. Ser. Statist., 7, 5-9.
- [4] Baksalary J. K. & van Eijnsbergen A. C. (1988), *A comparison of two criteria for ordinary least squares estimators to be best linear unbiased estimators*, Amer. Statist., 42, 205-208.
- [5] Beganu G. (1987a), *Estimation of regression parameters in a covariance linear model*, Stud. Cerc. Mat., 39, 3-10.
- [6] Beganu G. (1987b), *Estimation of covariance components in linear models. A coordinate-free approach*, Stud. Cerc. Mat., 39, 228-233.
- [7] Beganu G. (2003), *The existence conditions of the best linear unbiased estimators of the fixed effects*, Econom. Comput. Econom. Cybernet. Studies and Research, 36, 95-102.
- [8] Beganu G. (2005), *On Gram-Schmidt orthogonalizing process of design matrices in linear models as estimating procedure of covariance components*, Rev. R. Acad. Cien., Serie A Mat., 99(2), 187-194.
- [9] Beganu G., *Quadratic estimators of covariance components in a multivariate mixed linear model*, Statist. Methods and Applications (to appear in 2007).
- [10] Beganu G., *On the equality of the ordinary least squares estimators and the best linear unbiased estimators in multivariate growth-curve models*, Rev. R. Acad. Cien., Serie A Mat. (to appear in 2007).
- [11] Drygas H. (1972), *A note on Gauss-Markov estimation in multivariate linear models*, Colloquia Mathematica Societatis Janos Bolyai, 9. European Meeting of Statisticians, Budapest, 181-190.
- [12] Drygas H. (1975), *Estimation and prediction for linear models in general spaces*, Math. Operationsforsch. Statist., ser. Statist., 8, 301-324.
- [13] Eaton M. L. (1970), *Gauss-Markov estimation for multivariate linear models: A coordinate-free approach*, Ann. Math. Statist., 2, 528-538.
- [14] Haberman S. I. (1975), *How much do Gauss-Markov and least squares estimates differ? A coordinate-free approach*, Ann. Statist., 3, 982-990.
- [15] Harville D. A. (1976), *Extension of the Gauss-Markov theorem to include the estimation of random effects*, Ann. Statist., 4, 384-395.
- [16] Kleffe J. (1978), *Simultaneous estimation of expectation and covariance matrix in linear models*, Math. Operationsforsch. Statist., 9, 443-478.
- [17] Kruskal W. (1968), *When are Gauss-Markov and least squares estimators identical? A coordinate-free approach*, Ann. Math. Statist., 39, 70-75.
- [18] Lange N. & Laird N. M. (1989), *The effect of covariance structure on variance estimation in balanced growth-curve models with random parameters*, J. Amer. Statist. Assoc., 84, 241-247.
- [19] Milliken G. A. (1971), *New criteria for estimability for linear models*, Ann. Math. Statist., 42, 1588-1594.
- [20] Puntanen S. & Styan G. P. H. (1989), *The equality of the ordinary least squares estimator and the best linear unbiased estimator*, Amer. Statist., 43, 153-161.
- [21] Puntanen S., Styan G. P. H. & Tian Y. (2005), *Three rank formulas associated with the covariance matrices of the BLUE and the OLSE in the general linear model*, Econometric Theory, 21, 659-664.
- [22] Qian H. & Tian Y. (2006), *Partially superfluous observations*, Econometric Theory, 22, 529-536.
- [23] Rao C. R. (1967), *Least squares theory using an estimated dispersion matrix and its application to measurement of signals*, Proceedings of the Fifth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability (Vol. 1) eds. L. M. Le Cam and J. Neyman, Berkeley: University of California Press., 355-372.
- [24] Rao C. R. (1973), *Linear Statistical Inference and Its Applications* (2nd ed.), John Wiley, New York.
- [25] Reinsel C. G. (1982), *Multivariate repeated-measurement or growth curve models with multivariate random effects covariance structure*, J. Amer. Statist. Assoc., 77, 190-195.

- [26] **Reinsel C. G.** (1984), *Estimation and prediction in a multivariate random effects generalized linear models*, J. Amer. Statist., Assoc., 79, 406-414.
- [27] **Seely J.** (1970a), *Linear spaces and unbiased estimation*, Ann. Math. Statist., 41, 1725-1734.
- [28] **Seely J.** (1970b), *Linear spaces and unbiased estimation. Application to the mixed linear models*, Ann. Math. Statist., 41, 1735-1748.
- [29] **Zyskind G.** (1967), *On canonical forms, non-negative covariance matrices and best and simple least squares linear estimators in linear models*, Ann. Math. Statist., 38, 1092-1109.
- [30] **Zyskind G. & Martin F. B.** (1969), *On best linear estimation and a general Gauss-Markoff theorem in linear models with arbitrary non-negative structure*, SIAM J. Appl. Math., 17, 1190-1202.

Recibido el 29 de enero de 2007

Aceptado para su publicación el 16 de mayo de 2007

NONLINEARLY DEGENERATE WAVE EQUATION

$$v_{tt} = c(|v|^{s-1}v)_{xx}$$

by

Yun-Guang Lu*

Abstract

Lu, Yun-Guang: Nonlinearly degenerate equation wave $v_{tt} = c(|v|^{s-1}v)_{xx}$. Rev. Acad. Colomb. Cienc. **31** (119): 275-283, 2007. ISSN 0370-3908.

It is well known that the generalized solutions for the Cauchy problem (1.4)-(1.5) are also the solutions of the nonlinearly degenerate wave equation $v_{tt} = c(|v|^{s-1}v)_{xx}$ with the initial data $v_0(x)$. In this paper, we first study the strong and weak entropies of system (1.4), then the H^{-1} compactness of $\eta(v^\varepsilon, u^\varepsilon)_t + q(v^\varepsilon, u^\varepsilon)_x$ of these entropy-entropy flux pairs with respect to the viscosity solutions of the Cauchy problem (1.7)-(1.5). Finally, suppose that for fixed point (x, t) , the support set of the Young measure $\nu_{x,t}$ is concentrated on either the region $v \geq 0$ or the region $v \leq 0$, then $\nu_{x,t}$ must be a Dirac measure by using the theory of compensated compactness coupled with the kinetic formulation by **Lions, Perthame, Souganidis and Tadmor** [LPS, LPT].

Key words: Wave Equation, Young Measure, Compensated Compactness, Kinetic Formulation.

Resumen

Es bien conocido que las soluciones generalizadas para el problema de Cauchy (1.4)-(1.5) son también soluciones de la ecuación de ondas no linealmente degenerada $v_{tt} = c(|v|^{s-1}v)_{xx}$ con valor inicial $v_0(x)$. En este artículo, se empieza estudiando las entropías fuertes y débiles del sistema (1.4), luego la H^{-1} compacidad de $\eta(v^\varepsilon, u^\varepsilon)_t + q(v^\varepsilon, u^\varepsilon)_x$ de los pares de flujo entropía-entropía con respecto a las soluciones viscosas del problema de Cauchy (1.7)-(1.5). Finalmente, suponemos que para el punto (x, t) fijo, el soporte del conjunto de la medida de Young $\nu_{x,t}$ se concentra sobre la región $v \geq 0$ o la región $v \leq 0$, entonces $\nu_{x,t}$ debe ser una

* Profesor Titular, Departamento de Matemáticas, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá. E-mail: ylu@unal.edu.co
 2000 Mathematics Subject Classification: Primary 62H12. Secondary 47A05.

una medida de Dirac con el uso de la teoría de compacidad compensada y la formulación cinética de Lions, Perthame, Souganidis y Tadmor [LPS, LPT].

Palabras clave: Ecuación de Ondas, Medida de Young, Compacidad Compensada, Formulación Cinética.

1. Introduction

A function $v(x, t) \in L^\infty$ is called a generalized solution of the nonlinearly degenerate wave equation

$$v_{tt} = c(|v|^{s-1}v)_{xx}, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0, \quad (1.1)$$

with initial data

$$(v, v_t)|_{t=0} = (v_0(x), v_1(x)), \quad -\infty < x < \infty \quad (1.2)$$

if for any test function $\phi \in C_0^\infty(R \times R^+)$,

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty v\phi(x, t)_{tt} - c|v|^{s-1}v\phi(x, t)_{xx} dx dt \\ & + \int_{-\infty}^\infty v_0(x)\phi(x, 0)_t - v_1(x)\phi(x, 0) dx = 0, \end{aligned} \quad (1.3)$$

where $s > 1$, $c = \frac{\theta^2}{s} > 0$ and $\theta = -\frac{s+1}{2} < 0$ are constants.

A pair of functions $(v(x, t), u(x, t))$ is called a generalized solution of the following system

$$v_t - u_x = 0, \quad u_t - f(v)_x = 0 \quad (1.4)$$

with bounded initial data

$$(v, u)|_{t=0} = (v_0(x), u_0(x)) \quad (1.5)$$

if for any test function $\phi_i(x, t) \in C_0^\infty(R \times R^+)$, $i=1, 2$,

$$\left\{ \begin{aligned} & \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty v\phi(x, t)_{1t} - u\phi(x, t)_{1x} dx dt \\ & + \int_{-\infty}^\infty v_0(x)\phi_1(x, 0) dx = 0, \\ & \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty u\phi(x, t)_{2t} - f(v)\phi(x, t)_{2x} dx dt \\ & + \int_{-\infty}^\infty u_0(x)\phi_2(x, 0) dx = 0. \end{aligned} \right. \quad (1.6)$$

It is obvious that the generalized solutions of the Cauchy problem (1.4)-(1.5) are also the solutions of the Cauchy problem (1.1)-(1.2) if we specially choose that $\phi_1 = \phi_t$, $\phi_2 = \phi_x$ and $v_1(x) = u'_0(x)$ in (1.6).

In this paper, we first study the strong and weak entropies of system (1.4), then the H^{-1} compactness of $\eta(v^\varepsilon, u^\varepsilon)_t + q(v^\varepsilon, u^\varepsilon)_x$ of these entropy-entropy flux pairs with respect to the viscosity solutions of the following parabolic system

$$v_t - u_x = \varepsilon v_{xx}, \quad u_t - f(v)_x = \varepsilon u_{xx} \quad (1.7)$$

with the initial data (1.5), where $f(v) = c|v|^{s-1}v$. Finally, suppose that for fixed point (x, t) , the support set of the Young measure $\nu_{x,t}$ is concentrated on either the region $v \geq 0$ or the region $v \leq 0$, then we prove that $\nu_{x,t}$ must be a Dirac measure by using the theory of compensated compactness coupled with the kinetic formulation by Lions, Perthame, Souganidis and Tadmor [LPS, LPT]. Thus the limit $v(x, t)$ of $v^\varepsilon(x, t)$ is a solution of the wave equation (1.1).

2. Strong and weak entropies

A pair of smooth functions $(\eta(v, u), q(v, u))$ is called a pair of entropy-entropy flux of system (1.4) if $(\eta(v, u), q(v, u))$ satisfies

$$q_u = -\eta_v, \quad q_v = -\theta^2|v|^{s-1}\eta_u. \quad (2.1)$$

Eliminating the q from (2.1), we have the following entropy equation of system (1.4).

$$\eta_{vv} = \theta^2|v|^{s-1}\eta_{uu}. \quad (2.2)$$

An entropy $\eta(v, u)$ of system (1.4) is called a strong entropy if $\eta(0, u) \neq 0$; otherwise, it called a weak entropy.

Lemma 1. Let $\bar{\eta}(v, u)$ satisfy entropy equation (2.2) in the region $v > 0$ and $\bar{q}(v, u)$ be the entropy flux. Then

I. $\bar{\eta}(v, u)$ has an even extension and $\bar{q}(v, u)$ a odd extension if $\bar{\eta}(0, u) \neq 0$ and $\bar{q}(0, u) = 0$;

II. $\bar{\eta}(v, u)$ has a odd extension and $\bar{q}(v, u)$ an even extension if $\bar{\eta}(0, u) = 0$; i.e.,

$$\left\{ \begin{aligned} & \eta(v, u) = \bar{\eta}(|v|, u), \quad \text{if } v \neq 0, \\ & \eta(0, u) = \bar{\eta}(0, u), \quad \text{if } v = 0 \\ & q(v, u) = (\text{sgn } v)\bar{q}(|v|, u), \quad \text{if } v \neq 0, \\ & q(0, u) = 0, \quad \text{if } v = 0 \end{aligned} \right. \quad (2.3)$$

or

$$\left\{ \begin{aligned} & \eta(v, u) = (\text{sgn } v)\bar{\eta}(|v|, u), \quad \text{if } v \neq 0, \\ & \eta(0, u) = 0, \quad \text{if } v = 0, \\ & q(v, u) = \bar{q}(|v|, u), \quad \text{if } v \neq 0, \\ & q(0, u) = \bar{q}(0, u), \quad \text{if } v = 0 \end{aligned} \right. \quad (2.4)$$

satisfies system (2.1) on $v \neq 0$;

III. if $\eta_v(0, u) = 0$, then there exists an entropy flux associated to η such that $q(0, u) = 0$.

Proof of Lemma 1. Part I and Par II are easy to be proved from the equations in system (2.1). About the proof of Part III, from the first equation in (2.1), we have that

$$q(v, u) = - \int_0^u \eta_v(v, \tau) d\tau + h(v) \quad (2.5)$$

and so

$$\begin{aligned} q_v(v, u) &= - \int_0^u \eta_{vv}(v, \tau) d\tau + h'(v) \\ &= - \int_0^u \theta^2 |v|^{s-1} \eta_{uu}(v, \tau) d\tau + h'(v) \quad (2.6) \\ &= -\theta^2 |v|^{s-1} \eta_u(v, u) + \theta^2 |v|^{s-1} \eta_u(v, 0) + h'(v). \end{aligned}$$

Let $h(v) = - \int_0^v \theta^2 |\tau|^{s-1} \eta_u(\tau, 0) d\tau$ in (2.5). Then clearly q given by (2.5) is an entropy flux associated to η and satisfies $q(0, u) = 0$.

Consider (2.2) in the region $v > 0$ with the following initial conditions

$$\bar{\eta}(0, u) = d_1^0 f_1(u), \quad \bar{\eta}_v(0, u) = 0, \quad (2.7)$$

where $d_1^0 = \int_{-1}^1 (1 - \tau^2)^\lambda d\tau$. Then an entropy of (2.2) with (2.7) in the region $v > 0$ is

$$\bar{\eta}_1^0(v, u) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\xi) G_1^0(v, \xi - u) d\xi, \quad (2.8)$$

where the fundamental solution

$$G_1^0(v, u - \xi) = v(v^{s+1} - (\xi - u)^2)_+^\lambda \quad (2.9)$$

the notation $x_+ = \max(0, x)$ and $\lambda = -\frac{s+3}{2(s+1)} \in (-1, 0)$. The entropy flux $\bar{q}_1^0(v, u)$ associated with $\bar{\eta}_1^0(v, u)$ in the region $v > 0$ is

$$\bar{q}_1^0(v, u) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\xi) \theta \frac{\xi - u}{v} G(v, \xi - u) d\xi. \quad (2.10)$$

Similarly, an entropy of (2.2) with initial conditions

$$\bar{\eta}(0, u) = 0, \quad \bar{\eta}_v(0, u) = d_2^0 f_2(u), \quad (2.11)$$

in the region $v > 0$ is

$$\bar{\eta}_2^0(v, u) = \int_{-\infty}^{\infty} f_2(\xi) G_2^0(v, \xi - u) d\xi, \quad (2.12)$$

where the fundamental solution

$$G_2^0(v, u - \xi) = (v^{s+1} - (\xi - u)^2)_+^\mu \quad (2.13)$$

and $d_2^0 = \int_{-1}^1 (1 - \tau^2)^\mu d\tau$, $\mu = -\lambda - 1 \in (-1, 0)$. The entropy flux $\bar{q}_2^0(v, u)$ associated with $\bar{\eta}_2^0(v, u)$ in the region $v > 0$ is

$$\begin{aligned} \bar{q}_2^0(v, u) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_2(\xi) \left[\theta \frac{\xi - u}{v} G_2^0(v, \xi - u) \right. \\ &\quad \left. + \int_0^v G_2^0(y, \xi - u) dy \right] d\xi. \quad (2.14) \end{aligned}$$

We can also use the "exterior" of G_1 as suggested in [JPP, LPS, LPT] to get following functions satisfying system (2.1) in the region $v > 0$:

$$\bar{\eta}_1^\pm(v, u) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\xi) G_1^\pm(v, \xi - u) d\xi \quad (2.15)$$

with initial conditions

$$\begin{aligned} \bar{\eta}_1^\pm(0, u) &= d_1^\pm f_1(u), \\ \bar{\eta}_{1v}^\pm(0, u) &= \mp \theta \int_0^{\infty} f_1'(\pm y + u) y^{2\lambda+1} dy \quad (2.16) \end{aligned}$$

where $f_1(u)$ has a compact support set in $(-\infty, \infty)$, $d_1^\pm = \int_0^{\infty} \tau^\lambda (\tau + 2)^\lambda d\tau$ and the fundamental solutions

$$G_1^+(v, u - \xi) = v(\xi - (u + v^{\frac{s+1}{2}})_+^\lambda (\xi - (u - v^{\frac{s+1}{2}})_+^\lambda), \quad (2.17)$$

$$G_1^-(v, u - \xi) = v(u - v^{\frac{s+1}{2}} - \xi)_+^\lambda (u + v^{\frac{s+1}{2}} - \xi)^\lambda. \quad (2.18)$$

Similarly

$$\bar{\eta}_2^\pm(v, u) = \int_{-\infty}^{\infty} f_2(\xi) G_2^\pm(v, \xi - u) d\xi \quad (2.19)$$

with initial conditions

$$\bar{\eta}_2^\pm(0, u) = \int_0^{\infty} f_2(\pm y + u) y^{2\mu} dy, \quad \bar{\eta}_{2v}^\pm(0, u) = d_2^\pm f_2(u) \quad (2.20)$$

where $f_2(u)$ has a compact support set in $(-\infty, \infty)$, $d_2^\pm = \frac{1-s}{2} \int_0^{\infty} \tau^\mu (\tau + 2)^{\mu-1} d\tau$ and the fundamental solutions

$$G_2^+(v, u - \xi) = (\xi - (u + v^{\frac{s+1}{2}})_+^\mu (\xi - (u - v^{\frac{s+1}{2}})_+^\mu), \quad (2.21)$$

$$G_2^-(v, u - \xi) = (u - v^{\frac{s+1}{2}} - \xi)_+^\mu (u + v^{\frac{s+1}{2}} - \xi)^\mu. \quad (2.22)$$

Theorem 2.

A. The pair of functions

$$\begin{cases} \eta_1^0(v, u) = \bar{\eta}_1^0(|v|, u), & \text{if } v \neq 0, \\ \eta_1^0(0, u) = d_1^0 f_1(u), & \text{if } v = 0 \\ \bar{q}_1^0(v, u) = (\text{sgn } v) \bar{q}_1^0(|v|, u), & \text{if } v \neq 0, \\ \bar{q}_1^0(0, u) = 0, & \text{if } v = 0 \end{cases} \quad (2.23)$$

is an entropy-entropy flux pair of system (1.4).

B. System (1.4) has the following entropies:

$$\begin{cases} \eta_1(v, u) = (\text{sgn } v) (\bar{\eta}_1^+(|v|, u) - \bar{\eta}_1^-(|v|, u)), & \text{if } v \neq 0 \\ \eta_1(0, u) = 0; \end{cases} \quad (2.24)$$

$$\begin{cases} \eta_2^0(v, u) = \bar{\eta}_2^+(|v|, u) - \bar{\eta}_2^-(|v|, u), & \text{if } v \neq 0 \\ \eta_2^0(0, u) = \int_0^{\infty} (f_2(y + u) - f_2(-y + u)) y^{2\mu} dy; \end{cases} \quad (2.25)$$

$$\begin{cases} \eta_2^+(v, u) = C \bar{\eta}_2^0(|v|, u) + \bar{\eta}_2^+(|v|, u), & \text{if } v \neq 0 \\ \eta_2^+(0, u) = \int_0^{\infty} f_2(y + u) y^{2\mu} dy; \end{cases} \quad (2.26)$$

$$\begin{cases} \eta_2^-(v, u) = C\bar{\eta}_2^0(|v|, u) + \bar{\eta}_2^-(|v|, u), & \text{if } v \neq 0 \\ \eta_2^+(0, u) = \int_0^\infty f_2(-y + u)y^{2\mu} dy, \end{cases} \quad (2.27)$$

where

$$C = \frac{(s-1) \int_0^\infty (\tau+2)^{\mu-1} \tau^\mu d\tau}{2 \int_{-1}^1 (1-\tau^2)^\mu d\tau} > 0. \quad (2.28)$$

Proof of Theorem 2. Since the results in Lemma 1, to prove Part (A), it is sufficient to prove that $(\bar{\eta}_1^0(v, u), \bar{q}_1^0(v, u))$ satisfies the entropy-entropy flux system (2.1) on $v \geq 0$ and $\bar{q}_1^0(0, u) = 0$. In fact, letting $\xi = u + v^{\frac{s+1}{2}}\tau$, $w = u + v^{\frac{s+1}{2}}$ and $z = u - v^{\frac{s+1}{2}}$, we have on $v > 0$

$$\begin{aligned} \bar{\eta}_1^0(v, u) &= \int_{-\infty}^\infty f_1(\xi) G_1^0(v, \xi - u) d\xi \\ &= \int_z^w f_1(\xi) v (w - \xi)^\lambda (\xi - z)^\lambda d\xi \\ &= \int_{-1}^1 f_1(u + v^{\frac{s+1}{2}}\tau) v (v^{\frac{s+1}{2}})^{(2\lambda+1)} (1-\tau^2)^\lambda d\tau \\ &= \int_{-1}^1 f_1(u + v^{\frac{s+1}{2}}\tau) (1-\tau^2)^\lambda d\tau, \end{aligned} \quad (2.29)$$

and

$$\begin{aligned} \bar{q}_1^0(v, u) &= \int_{-\infty}^\infty f_1(\xi) \theta \frac{\xi - u}{v} G_1^0(v, \xi - u) d\xi \\ &= \int_z^w f_1(\xi) \theta (\xi - u) (w - \xi)^\lambda (\xi - z)^\lambda d\xi \\ &= \int_{-1}^1 f_1(u + v^{\frac{s+1}{2}}\tau) \theta v^{\frac{s+1}{2}} \tau (v^{\frac{s+1}{2}})^{(2\lambda+1)} (1-\tau^2)^\lambda d\tau \\ &= \int_{-1}^1 f_1(u + v^{\frac{s+1}{2}}\tau) \theta v^{\frac{s-1}{2}} \tau (1-\tau^2)^\lambda d\tau. \end{aligned} \quad (2.30)$$

So, $\bar{q}_1^0(0, u) = 0$ and $\bar{q}_1^0(v, u) = -\bar{\eta}_{1v}^0(v, u)$ on $v \geq 0$. To prove the second equation in (2.1), letting

$$h(\tau) = \int_{-1}^\tau \xi (1 - \xi^2)^\lambda d\xi = -\frac{s+1}{s-1} (1 - \tau^2)^{\lambda+1}, \quad (2.31)$$

we have

$$\begin{aligned} \bar{q}_1^0(v, u) &= \int_{-1}^1 f_1(u + v^{\frac{s+1}{2}}\tau) \theta v^{\frac{s-1}{2}} dh(\tau) \\ &= \int_{-1}^1 f_1'(u + v^{\frac{s+1}{2}}\tau) \theta v^s h(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (2.32)$$

and thus

$$\begin{aligned} \bar{q}_{1v}^0 &= - \int_{-1}^1 f_1'(u + v^{\frac{s+1}{2}}\tau) \theta s v^{s-1} h(\tau) d\tau \\ &\quad + \int_{-1}^1 f_1''(u + v^{\frac{s+1}{2}}\tau) \theta^2 v^{\frac{3s-1}{2}} \tau h(\tau) d\tau \\ &= I + II, \end{aligned} \quad (2.33)$$

where

$$I = -\theta^2 \frac{2s}{s-1} v^{s-1} \int_{-1}^1 f_1'(u + v^{\frac{s+1}{2}}\tau) (1-\tau^2)^{\lambda+1} d\tau, \quad (2.34)$$

and

$$\begin{aligned} II &= \theta^2 v^{s-1} \int_{-1}^1 \tau h(\tau) d(f_1'(u + v^{\frac{s+1}{2}}\tau)) \\ &= -\theta^2 v^{s-1} \int_{-1}^1 f_1'(u + v^{\frac{s+1}{2}}\tau) (h(\tau) + \tau^2 (1-\tau^2)^\lambda) d\tau \\ &= \theta^2 \frac{2s}{s-1} v^{s-1} \int_{-1}^1 f_1'(u + v^{\frac{s+1}{2}}\tau) (1-\tau^2)^{\lambda+1} d\tau \\ &\quad - \theta^2 v^{s-1} \int_{-1}^1 f_1'(u + v^{\frac{s+1}{2}}\tau) (1-\tau^2)^\lambda d\tau. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Therefore

$$\begin{aligned} \bar{q}_{1v}^0 &= -\theta^2 v^{s-1} \int_{-1}^1 f_1'(u + v^{\frac{s+1}{2}}\tau) (1-\tau^2)^\lambda d\tau \\ &= -\theta^2 v^{s-1} \bar{\eta}_{1u}^0 \end{aligned} \quad (2.36)$$

on $v \geq 0$. Part (A) is proved.

To prove that $\eta_1(v, u)$ given by (2.24) is an entropy, we rewrite $\bar{\eta}_1^+$ in the region $v > 0$ by

$$\begin{aligned} \bar{\eta}_1^+ &= \int_w^\infty f_1(\xi) v (\xi - w)^\lambda (\xi - z)^\lambda d\xi \quad (\xi - w = y) \\ &= \int_0^\infty f_1(y + u + v^{\frac{s+1}{2}}) v y^\lambda (y + 2v^{\frac{s+1}{2}})^\lambda dy \quad (y = v^{\frac{s+1}{2}}\tau) \\ &= \int_0^\infty f_1(v^{\frac{s+1}{2}}\tau + u + v^{\frac{s+1}{2}}) \tau^\lambda (\tau + 2)^\lambda d\tau. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Similarly

$$\bar{\eta}_1^- = \int_0^\infty f_1(-v^{\frac{s+1}{2}}\tau + u - v^{\frac{s+1}{2}}) \tau^\lambda (\tau + 2)^\lambda d\tau. \quad (2.38)$$

Thus

$$\eta_1(0, u) = \bar{\eta}_1^+(0, u) - \bar{\eta}_1^-(0, u) = 0. \quad (2.39)$$

To prove that $\bar{\eta}_1^+$ satisfies equation (2.2) in the region $v > 0$, we use the second equation in (2.37) to get

$$\begin{aligned} \bar{\eta}_{1v}^+ &= \int_0^\infty f_1(y+u+v^{\frac{s+1}{2}})y^\lambda(y+2v^{\frac{s+1}{2}})^\lambda dy \\ &\quad - \theta \int_0^\infty f_1'(y+u+v^{\frac{s+1}{2}})v^{\frac{s+1}{2}}y^\lambda(y+2v^{\frac{s+1}{2}})^\lambda dy \\ &\quad - 2\lambda\theta \int_0^\infty f_1(y+u+v^{\frac{s+1}{2}})v^{\frac{s+1}{2}}y^\lambda(y+2v^{\frac{s+1}{2}})^{\lambda-1} dy \\ &= I_1 + I_2, \end{aligned} \quad (2.40)$$

where

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^\infty f_1(y+u+v^{\frac{s+1}{2}})y^\lambda(y+2v^{\frac{s+1}{2}})^\lambda dy \\ &\quad - \theta \int_0^\infty f_1'(y+u+v^{\frac{s+1}{2}})v^{\frac{s+1}{2}}y^\lambda(y+2v^{\frac{s+1}{2}})^\lambda dy, \end{aligned} \quad (2.41)$$

$$\begin{aligned} I_{1v} &= (\theta^2 - \theta) \int_0^\infty f_1'(y+u+v^{\frac{s+1}{2}})v^{\frac{s-1}{2}}y^\lambda(y+2v^{\frac{s+1}{2}})^\lambda dy \\ &\quad - 2\lambda\theta \int_0^\infty f_1(y+u+v^{\frac{s+1}{2}})v^{\frac{s-1}{2}}y^\lambda(y+2v^{\frac{s+1}{2}})^{\lambda-1} dy \\ &\quad + 2\lambda\theta^2 \int_0^\infty f_1'(y+u+v^{\frac{s+1}{2}})v^s y^\lambda(y+2v^{\frac{s+1}{2}})^{\lambda-1} dy \\ &\quad + \theta^2 \int_0^\infty f_1''(y+u+v^{\frac{s+1}{2}})v^s y^\lambda(y+2v^{\frac{s+1}{2}})^\lambda dy \\ &= (\theta^2 - \theta) \int_0^\infty f_1'(v^{\frac{s+1}{2}}\tau + u + v^{\frac{s+1}{2}})v^{\frac{s-1}{2}-1}\tau^\lambda(\tau+2)^\lambda d\tau \\ &\quad - 2\lambda\theta \int_0^\infty f_1(v^{\frac{s+1}{2}}\tau + u + v^{\frac{s+1}{2}})v^{-2}\tau^\lambda(\tau+2)^{\lambda-1} d\tau \\ &\quad + 2\lambda\theta^2 \int_0^\infty f_1'(v^{\frac{s+1}{2}}\tau + u + v^{\frac{s+1}{2}})v^{\frac{s-1}{2}-1}\tau^\lambda(\tau+2)^{\lambda-1} d\tau \\ &\quad + \theta^2 \int_0^\infty f_1''(y+u+v^{\frac{s+1}{2}})v^s y^\lambda(y+2v^{\frac{s+1}{2}})^\lambda dy \end{aligned} \quad (2.42)$$

and

$$\begin{aligned} I_2 &= -2\lambda\theta \int_0^\infty f_1(y+u+v^{\frac{s+1}{2}})v^{\frac{s+1}{2}}y^\lambda(y+2v^{\frac{s+1}{2}})^{\lambda-1} dy \\ &= -2\lambda\theta \int_0^\infty f_1(v^{\frac{s+1}{2}}\tau + u + v^{\frac{s+1}{2}})v^{-1}\tau^\lambda(\tau+2)^{\lambda-1} d\tau, \end{aligned} \quad (2.43)$$

$$\begin{aligned} I_{2v} &= 2\lambda\theta \int_0^\infty f_1(v^{\frac{s+1}{2}}\tau + u + v^{\frac{s+1}{2}})v^{-2}\tau^\lambda(\tau+2)^{\lambda-1} d\tau \\ &\quad + 2\lambda\theta^2 \int_0^\infty f_1'(v^{\frac{s+1}{2}}\tau + u + v^{\frac{s+1}{2}})v^{\frac{s+1}{2}-2}(\tau+1)\tau^\lambda(\tau+2)^{\lambda-1} d\tau \\ &= 2\lambda\theta \int_0^\infty f_1(v^{\frac{s+1}{2}}\tau + u + v^{\frac{s+1}{2}})v^{-2}\tau^\lambda(\tau+2)^{\lambda-1} d\tau \\ &\quad + 2\lambda\theta^2 \int_0^\infty f_1'(v^{\frac{s+1}{2}}\tau + u + v^{\frac{s+1}{2}})v^{\frac{s+1}{2}-2}(\tau+1)\tau^\lambda(\tau+2)^\lambda d\tau \\ &\quad - 2\lambda\theta^2 \int_0^\infty f_1'(v^{\frac{s+1}{2}}\tau + u + v^{\frac{s+1}{2}})v^{\frac{s+1}{2}-2}(\tau+1)\tau^\lambda(\tau+2)^{\lambda-1} d\tau. \end{aligned} \quad (2.44)$$

Since $\theta^2 - \theta = -2\lambda\theta^2$, we have by combining (2.40), (2.42) and (2.44) that

$$\begin{aligned} \bar{\eta}_{1vv}^+ &= \theta^2 \int_0^\infty f_1''(y+u+v^{\frac{s+1}{2}})v^s y^\lambda(y+2v^{\frac{s+1}{2}})^\lambda dy \\ &= \theta^2 v^{s-1} \bar{\eta}_{1vu}^+. \end{aligned} \quad (2.45)$$

Similarly, we can prove that

$$\bar{\eta}_{1vv}^- = \theta^2 v^{s-1} \bar{\eta}_{1vu}^- \quad (2.46)$$

in the region $v > 0$. Thus $\eta_1(v, u)$ given by (2.24) is an entropy of system (1.4).

About the functions given by (2.25)-(2.27), we only provide the proof for $\eta_2^+(v, u)$. A similar treatment gives the proof for $\eta_2^0(v, u), \eta_2^-(v, u)$.

Using Lemma 1, to prove that $\eta_2^+(v, u)$ is an entropy of system (1.4), it is sufficient to prove that $\bar{\eta}_2^0(v, u), \bar{\eta}_2^+(v, u)$ satisfy entropy equation (2.2) in the region of $v > 0$ and $C\bar{\eta}_{2v}^0(0, u) + \bar{\eta}_{2v}^+(0, u) = 0$.

We may rewrite $\bar{\eta}_2^0(v, u)$ by

$$\bar{\eta}_2^0(v, u) = \int_{-1}^1 f_2(u + v^{\frac{s+1}{2}}\tau)v(1-\tau^2)^\mu d\tau. \quad (2.47)$$

Then

$$\begin{aligned} \bar{\eta}_{2v}^0(v, u) &= \int_{-1}^1 f_2(u + v^{\frac{s+1}{2}}\tau)(1-\tau^2)^\mu d\tau \\ &\quad - \theta \int_{-1}^1 f_2'(u + v^{\frac{s+1}{2}}\tau)v^{\frac{s+1}{2}}\tau(1-\tau^2)^\mu d\tau \end{aligned} \quad (2.48)$$

and

$$\begin{aligned} \bar{\eta}_{2vv}^0(v, u) &= (\theta^2 - \theta) \int_{-1}^1 f_2'(u + v^{\frac{s+1}{2}}\tau)v^{\frac{s-1}{2}}\tau(1-\tau^2)^\mu d\tau \\ &\quad + \theta^2 \int_{-1}^1 f_2''(u + v^{\frac{s+1}{2}}\tau)v^s \tau^2(1-\tau^2)^\mu d\tau. \end{aligned} \quad (2.49)$$

Letting

$$h_1(\tau) = \int_{-1}^{\tau} \xi(1-\xi^2)^\mu d\xi = -\frac{s+1}{s+3}(1-\tau^2)^{\mu+1}, \quad (2.50)$$

we have that

$$\begin{aligned} & (\theta^2 - \theta) \int_{-1}^1 f_2'(u + v^{\frac{s+1}{2}} \tau) v^{\frac{s-1}{2}} \tau (1-\tau^2)^\mu d\tau \\ &= -(\theta^2 - \theta) v^{\frac{s-1}{2}} \int_{-1}^1 f_2''(u + v^{\frac{s+1}{2}} \tau) h_1(\tau) v^{\frac{s+1}{2}} d\tau \\ &= \theta^2 v^s \int_{-1}^1 f_2''(u + v^{\frac{s+1}{2}} \tau) (1-\tau^2)^{\mu+1} d\tau. \end{aligned} \quad (2.51)$$

Thus we get by (2.49) and (2.51) that

$$\begin{aligned} \bar{\eta}_{2vv}^0(v, u) &= \theta^2 v^s \int_{-1}^1 f_2''(u + v^{\frac{s+1}{2}} \tau) (1-\tau^2)^\mu d\tau \\ &= \theta^2 v^{s-1} \bar{\eta}_{2uu}^0(v, u). \end{aligned} \quad (2.52)$$

Similarly we may rewrite $\bar{\eta}_2^+(v, u)$ by

$$\begin{aligned} \bar{\eta}_2^+ &= \int_w^\infty f_2(\xi) v(\xi-w)^\mu (\xi-z)^\mu d\xi \quad (\xi-w=y) \\ &= \int_0^\infty f_2(y+u+v^{\frac{s+1}{2}}) y^\mu (y+2v^{\frac{s+1}{2}})^\mu dy \\ & \quad (y=v^{\frac{s+1}{2}} \tau) \\ &= \int_0^\infty f_2(v^{\frac{s+1}{2}} \tau + u + v^{\frac{s+1}{2}}) v \tau^\mu (\tau+2)^\mu d\tau. \end{aligned} \quad (2.53)$$

To prove that $\bar{\eta}_2^+$ satisfies equation (2.2) in the region $v > 0$, we use the second equation in (2.53) to get

$$\begin{aligned} \bar{\eta}_{2v}^+ &= -\theta \int_0^\infty f_2'(y+u+v^{\frac{s+1}{2}}) v^{\frac{s-1}{2}} y^\mu (y+2v^{\frac{s+1}{2}})^\mu dy \\ &\quad - 2\theta \mu v^{\frac{s-1}{2}} \int_0^\infty f_2(y+u+v^{\frac{s+1}{2}}) y^\mu (y+2v^{\frac{s+1}{2}})^{\mu-1} dy \\ &= I_3 + I_4, \end{aligned} \quad (2.54)$$

where

$$\begin{aligned} I_{3v} &= \theta^2 \int_0^\infty f_2''(y+u+v^{\frac{s+1}{2}}) v^{s-1} y^\mu (y+2v^{\frac{s+1}{2}})^\mu dy + \frac{s+1}{2} \frac{s-1}{2} v^{\frac{s-1}{2}-1} \int_0^\infty f_2'(y+u+v^{\frac{s+1}{2}}) y^\mu (y+2v^{\frac{s+1}{2}})^\mu dy \\ &\quad + 2\mu \theta^2 v^{s-1} \int_0^\infty f_2'(y+u+v^{\frac{s+1}{2}}) y^\mu (y+2v^{\frac{s+1}{2}})^{\mu-1} dy \\ &= \theta^2 \int_0^\infty f_2''(y+u+v^{\frac{s+1}{2}}) v^{s-1} y^\mu (y+2v^{\frac{s+1}{2}})^\mu dy + \frac{s+1}{2} \frac{s-1}{2} v^{\frac{s-1}{2}-1} \int_0^\infty f_2'(v^{\frac{s+1}{2}} \tau + u + v^{\frac{s+1}{2}}) \tau^\mu (\tau+2)^\mu (v^{\frac{s+1}{2}})^{2\mu+1} d\tau \\ &\quad + 2\mu \theta^2 v^{s-1} \int_0^\infty f_2'(v^{\frac{s+1}{2}} \tau + u + v^{\frac{s+1}{2}}) \tau^\mu (\tau+2)^{\mu-1} (v^{\frac{s+1}{2}})^{2\mu} d\tau \\ &= \theta^2 \int_0^\infty f_2''(y+u+v^{\frac{s+1}{2}}) v^{s-1} y^\mu (y+2v^{\frac{s+1}{2}})^\mu dy \\ &\quad + \frac{s+1}{2} \frac{s-1}{2} v^{\frac{s-1}{2}} \int_0^\infty f_2'(v^{\frac{s+1}{2}} \tau + u + v^{\frac{s+1}{2}}) \tau^\mu (\tau+2)^{\mu-1} (\tau+1) d\tau \end{aligned} \quad (2.55)$$

since $2\mu\theta^2 = -\frac{s+1}{2} \frac{s-1}{2}$ and

$$\begin{aligned} I_4 &= -2\theta \mu v^{\frac{s-1}{2}} \int_0^\infty f_2(v^{\frac{s+1}{2}} \tau + u + v^{\frac{s+1}{2}}) \tau^\mu (\tau+2)^{\mu-1} (v^{\frac{s+1}{2}})^{2\mu} d\tau \\ &= \frac{1-s}{2} \int_0^\infty f_2(v^{\frac{s+1}{2}} \tau + u + v^{\frac{s+1}{2}}) \tau^\mu (\tau+2)^{\mu-1} d\tau, \end{aligned} \quad (2.56)$$

$$I_{4v} = \frac{s+1}{2} \frac{s-1}{2} v^{\frac{s-1}{2}} \int_0^\infty f_2'(v^{\frac{s+1}{2}} \tau + u + v^{\frac{s+1}{2}}) \tau^\mu (\tau+2)^{\mu-1} (\tau+1) d\tau, \quad (2.57)$$

thus

$$\bar{\eta}_{2vv}^+ = \theta^2 \int_0^\infty f_2''(y+u+v^{\frac{s+1}{2}}) v^{s-1} y^\mu (y+2v^{\frac{s+1}{2}})^\mu dy = \theta^2 v^{s-1} \bar{\eta}_{2uu}^+, \quad (2.58)$$

which implies that $\bar{\eta}_2^+$ satisfies the entropy equation (2.2) in the region of $v > 0$.

It is obvious that

$$\begin{aligned}\bar{\eta}_{2v}^0(0, u) &= f_2(u) \int_{-1}^1 (1 - \tau^2)^\mu d\tau, \\ \bar{\eta}_{2v}^+(0, u) &= \frac{1-s}{2} f_2(u) \int_0^\infty \tau^\mu (\tau + 2)^{\mu-1} d\tau\end{aligned}\quad (2.59)$$

from (2.48), (2.54) and (2.56). Thus $\eta_{2v}^0(0, u) = 0$ and the proof of Theorem 2 is ended.

3. Compactness

In this section, we study the H^{-1} compactness of $\eta(v^\varepsilon, u^\varepsilon)_t + q(v^\varepsilon, u^\varepsilon)_x$, of these entropy-entropy flux pairs given in Section 2, with respect to the viscosity solutions of the Cauchy problem (1.7)-(1.5).

By using the invariant region theory by **Chueh, Conley and Smoller** [CCS], we can obtain the following L^∞ estimate on the solutions $(v^\varepsilon, u^\varepsilon)$ of the Cauchy problem (1.7)-(1.5):

$$|v^\varepsilon| \leq M, \quad |u^\varepsilon| \leq M, \quad (3.1)$$

where M is a positive constant, which is independent of ε , but depends on the L^∞ bound of the initial data (1.5).

In this section we obtain the main results as follows:

Theorem 3.

$$v^\varepsilon(x, t)_t - u^\varepsilon(x, t)_x \quad (3.2)$$

is compact in $H_{loc}^{-1}(R \times R^+)$ and

$$\eta^s(v^\varepsilon(x, t), u^\varepsilon(x, t))_t + q^s(v^\varepsilon(x, t), u^\varepsilon(x, t))_x \quad (3.3)$$

is compact in $H_{loc}^{-1}(R \times R^+)$, where $\eta^s(v, u) = \eta_1^0(v, u)$ or $\eta_2^0(v, u)$, $\eta_2^+(v, u)$ and $\eta_2^-(v, u)$.

Theorem 4. Let $\nu_{x,t}$ be the family of positive probability measures with respect to the viscosity solutions $(v^\varepsilon, u^\varepsilon)$ of the Cauchy problem (1.7) and (1.5). Suppose, for fixed (x, t) , the support set of the Young measure $\nu_{x,t}$ is concentrated on either $v \geq 0$ or $v \leq 0$. Then for this point (x, t) , the Young measure $\nu_{x,t}$ must be a Dirac measure.

Proof of Theorem 3. For simplicity, we omit the superscript ε . We multiply (1.7) by (η_v^*, η_u^*) to obtain the boundedness of

$$\varepsilon(v_x, u_x) \cdot \nabla^2 \eta^*(v, u) \cdot (v_x, u_x)^T \quad (3.4)$$

in $L_{loc}^1(R \times R^+)$, where $\eta^* = \frac{u^2}{2} + \frac{s+1}{4s}|v|^{s+1}$ is a convex entropy of system (1.4). Then it follows that

$$\varepsilon u_x^2 + \varepsilon \theta^2 |v|^{s-1} v_x^2 \quad (3.5)$$

are bounded in $L_{loc}^1(R \times R^+)$.

We multiply (1.7) by v and then by a test function ϕ , where $\phi \in C_0^\infty(R \times R^+)$ satisfies $\phi_K = 1$, $0 \leq \phi \leq 1$ and $S = \text{supp } \phi$ for an arbitrary compact set $K \subset S \subset R \times R^+$. Then, we have that

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \varepsilon v_x^2 \phi dx dt &= \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \left(\frac{v^2}{2} \phi_t + \varepsilon \frac{v^2}{2} \phi_{xx} \right) dx dt \\ &+ \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty v u_x \phi dx dt \leq M(\phi) \\ &+ \left(\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty v^2 \phi dx dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty u_x^2 \phi dx dt \right)^{\frac{1}{2}}\end{aligned}\quad (3.6)$$

and hence by (3.5),

$$\varepsilon^{\frac{3}{2}} v_x^2 \quad \text{are bounded in } L_{loc}^1(R \times R^+), \quad (3.7)$$

which combining with the first equation in (1.7) imply the proof of (3.2).

To prove (3.3), it is sufficient to prove the following

Lemma 5. If

$$\eta_v(0, u) = 0, \quad \frac{\partial^i \eta(v, u)}{\partial u^i} \quad i = 0, 1, 2, 3,$$

are bounded in $0 \leq |v| \leq M, |u| \leq M$, then

$$\eta(v^\varepsilon(x, t), u^\varepsilon(x, t))_t + q(v^\varepsilon(x, t), u^\varepsilon(x, t))_x$$

is compact in $H_{loc}^{-1}(R \times R^+)$.

Proof of Lemma 5. Using entropy equation (2.2) and the condition $\eta_v(0, u) = 0$, we have

$$\eta_v(v, u) = \int_0^v \theta^2 |\xi|^{s-1} \eta_{vu}(\xi, u) d\xi \quad (3.8)$$

and

$$\eta_{vu}(v, u) = \int_0^v \theta^2 |\xi|^{s-1} \eta_{uuu}(\xi, u) d\xi. \quad (3.9)$$

Thus

$$\begin{aligned}|\eta_v(v, u)| &\leq M \int_0^{|v|} \theta^2 \xi^{s-1} d\xi \leq M |v|^s \\ &\leq M_1 |v|^{\frac{s-1}{2}}, \quad |\eta_{vu}(v, u)| \leq M_1 |v|^{\frac{s-1}{2}},\end{aligned}\quad (3.10)$$

where M, M_1 are positive constants.

Multiplying system (1.7) by $(\eta(v, u)_v, \eta(v, u)_u)$, we have

$$\begin{aligned}\eta(v^\varepsilon, u^\varepsilon)_t + q(v^\varepsilon, u^\varepsilon)_x \\ = \varepsilon \eta(v^\varepsilon, u^\varepsilon)_{xx} - \varepsilon (\eta(v^\varepsilon, u^\varepsilon)_{vv} (v_x^\varepsilon)^2 \\ + 2\eta(v^\varepsilon, u^\varepsilon)_{vu} v_x^\varepsilon u_x^\varepsilon + \eta(v^\varepsilon, u^\varepsilon)_{uu} (u_x^\varepsilon)^2).\end{aligned}\quad (3.11)$$

Using the first estimate in (3.10), (3.5) and the boundedness of η_u , we have the compactness of

$$\varepsilon\eta(v^\varepsilon, u^\varepsilon)_{xx} \text{ in } H_{loc}^{-1}(R \times R^+), \quad (3.12)$$

as ε tends to zero. Using the second estimate in (3.10), (3.5), the boundedness of η_{uu} and the relation $\eta_{vv} = \theta^2|v|^{s-1}\eta_{uu}$, we have the boundedness of

$$\varepsilon(\eta(v^\varepsilon, u^\varepsilon)_{vv}(v_x^\varepsilon)^2 + 2\eta(v^\varepsilon, u^\varepsilon)_{vu}v_x^\varepsilon u_x^\varepsilon + \eta(v^\varepsilon, u^\varepsilon)_{uu}(u_x^\varepsilon)^2) \quad (3.13)$$

in $L^1_{loc}(R \times R^+)$, and hence the compactness in $W^{-1,\alpha}$ for some $\alpha \in (1, 2)$ by Sobolev's embedding Theorem.

Therefore the right-hand side of (3.11) is compact in $W_{loc}^{-1,\alpha}(R \times R^+)$ for some $\alpha \in (1, 2)$, but the left-hand side is bounded in $W^{-1,\infty}(R \times R^+)$. This implies the compactness of $\eta(v^\varepsilon, u^\varepsilon)_t + q(v^\varepsilon, u^\varepsilon)_x$ in $H_{loc}^{-1}(R \times R^+)$ by Murat's Theorem [Mu], and hence the proof of Lemma 5. Theorem 3 is ended.

Proof of Theorem 4. I. Suppose $\text{supp } \nu_{x,t} = 0$, then using the measure equation to the entropy-entropy flux pairs $(v, -u)$ and $(u, c|v|^{s-1}v)$, we get

$$\langle \nu_{x,t}, u \rangle^2 = \langle \nu_{x,t}, u^2 \rangle, \quad (3.14)$$

which implies that $\nu_{x,t}$ is a Dirac measure and the support set is one point $(0, \bar{u})$.

II. Suppose, for fixed (x, t) , the support set of the Young measure $\nu_{x,t}$ is concentrated on either $v \geq 0$ or $v \leq 0$, but not only on $v = 0$. Then clearly $\langle \nu_{x,t}, \eta_1^0 \rangle \neq 0$. Using the measure equation in the theory of compensated compactness to the entropy-entropy flux pairs $(\eta_1^0(v, u), q_1^0(v, u))$, we get

$$\begin{aligned} & \langle |v|H(v, u, \xi) \rangle \langle (\text{sgn } v)(\xi' - u)H(v, u, \xi') \rangle \\ & - \langle |v|H(v, u, \xi') \rangle \langle (\text{sgn } v)(\xi' - u)H(v, u, \xi) \rangle \\ & = \langle (\xi' - \xi)vH(v, u, \xi)H(v, u, \xi') \rangle, \end{aligned} \quad (3.15)$$

where we use the notation

$$\langle H(v, u, \xi) \rangle = \langle \nu_{x,t}, H(v, u, \xi) \rangle$$

and

$$H(v, u, \xi) = (|v|^{s+1} - (\xi - u)^2)_+^\lambda. \quad (3.16)$$

Let $w = u + |v|^{\frac{s+1}{2}}$, $z = u - |v|^{\frac{s+1}{2}}$ and $I = [z, w]$ for each $(v, u) \in \text{supp } \nu_{x,t}$. Dividing (3.15) by

$$\langle |v|H(v, u, \xi) \rangle \langle |v|H(v, u, \xi') \rangle$$

and sending ξ' to ξ , we obtain

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{\langle (\text{sgn } v)(\xi - u)H(v, u, \xi) \rangle}{\langle |v|H(v, u, \xi) \rangle} \right] = \frac{\langle vH(v, u, \xi)^2 \rangle}{\langle |v|H(v, u, \xi) \rangle^2}. \quad (3.17)$$

Again using the measure equation between $(\eta_1^0(v, u), q_1^0(v, u))$ and $(v, -u)$, we get

$$\begin{aligned} \theta \langle v \rangle & \langle (\text{sgn } v)(\xi - u)H(v, u, \xi) \rangle \\ & + \langle u \rangle \langle |v|H(v, u, \xi) \rangle \\ & = \theta \langle (\xi - u)|v|H(v, u, \xi) \rangle \\ & + \langle u|v|H(v, u, \xi) \rangle, \end{aligned} \quad (3.18)$$

which can be rewritten as

$$\begin{aligned} \frac{\theta \langle v \rangle \langle (\text{sgn } v)(\xi - u)H(v, u, \xi) \rangle + \langle u \rangle \langle |v|H(v, u, \xi) \rangle}{\langle |v|H(v, u, \xi) \rangle} + \langle u \rangle \\ = \theta \xi + (1 - \theta) \frac{\langle u|v|H(v, u, \xi) \rangle}{\langle |v|H(v, u, \xi) \rangle} \end{aligned} \quad (3.19)$$

in I . Differentiating (3.19) in ξ and combining the outcome with (3.17), we also get

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\langle u|v|H(v, u, \xi) \rangle}{\langle |v|H(v, u, \xi) \rangle} \right) \\ & = \frac{\theta}{1 - \theta} \left(\langle v \rangle \frac{\langle vH(v, u, \xi)^2 \rangle}{\langle |v|H(v, u, \xi) \rangle^2} - 1 \right) \leq 0 \end{aligned} \quad (3.20)$$

if the support set of the Young measure $\nu_{x,t}$ is concentrated on either $v \geq 0$ or $v \leq 0$. Following the steps given in Proposition II.1 in [LPS], we can end the proof of Theorem 4.

References

[CCS] **K. N. Chueh, C. C. Conley & J. A. Smoller**, *Positive invariant regions for systems of nonlinear diffusion equations*, Indiana Univ. Math. J., **26** (1977), 372-411.
 [Di] **R. J. DiPerna**, *Convergence of approximate solutions to conservation laws*, Arch. Rat. Mech. Anal., **82** (1983), 27-70.
 [JPP] **F. James, Y.-J. Peng & B. Perthame**, *Kinetic formulation for chromatography and some other hyperbolic systems*, J. Math. Pure Appl., **74** (1995), 367-385.
 [LPS] **P. L. Lions, B. Perthame & P. E. Souganidis**, *Existence and stability of entropy solutions for the hyperbolic systems of isentropic gas dynamics in Eulerian and Lagrangian coordinates*, Comm. Pure Appl. Math., **49** (1996), 599-638.
 [LPT] **P. L. Lions, B. Perthame & E. Tadmor**, *Kinetic formulation of the isentropic gas dynamics and p-system*, Commun. Math. Phys., **163** (1994), 415-431.
 [Lu1] **Y.-G. Lu**, *Strong Entropy for System of Isentropic Gas Dynamics*, submitted.
 [Lu2] **Y.-G. Lu**, *Some Results on General System of Isentropic Gas Dynamics*, Diff. Equs., **43** (2007), No. 1, 130-138.
 [Lu3] **Y.-G. Lu**, *Existence of Global Entropy Solutions to a Nonstrictly Hyperbolic System*, Arch. Rat. Mech. Anal., **178** (2005), 287-299.
 [Lu4] **Y.-G. Lu**, *Hyperbolic Conservation Laws and the Compensated Compactness Method*, Chapman and Hall, CRC Press, New York, 2003.

- [Mu] **F. Murat**, *Compacité par compensation*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, **5** (1978), 489–507.
- [Ta] **T. Tartar**, *Compensated compactness and applications to partial differential equations*, In: Research Notes in Mathematics, Nonlinear Analysis and Mechanics, Heriot-Watt Sym-

posium, Vol. 4, ed. R. J. Knops, Pitman Press, London, 1979.

Recibido el 16 de mayo de 2007

Aceptado para su publicación el 15 de junio de 2007

A CHARACTERIZATION OF WEAKLY REGULAR LINEAR FUNCTIONALS

by

Francisco Marcellán¹ & Ridha Sfaxi²

Abstract

Marcellán F. & R. Sfaxi: A characterization of weakly regular linear functionals. Rev. Acad. Colomb. Cienc. **31** (119): 285-295, 2007. ISSN 0370-3908.

A linear functional is said to be weakly-regular if it is not a finite sum of Dirac masses and their derivatives. In this paper, we consider the first-order linear differential equations $(Eu)' + Fu = 0$ where u is a non-zero linear functional and (E, F) is a pair of polynomials, with E monic. The aim of this work is to give weak-regularity conditions on u . Under certain admissibility conditions of the pair (E, F) , the weak-regularity of u leads to its regularity. Some examples are analyzed.

Key words: First-order linear differential equations, weak-regular and regular functionals, weak-semiclassical and semi-classical functionals.

Resumen

Un funcional lineal se dice débilmente regular si no es la suma finita de masas de Dirac y sus derivadas. En este trabajo consideramos las ecuaciones diferenciales lineales de primer orden $(Eu)' + Fu = 0$, donde u es un funcional lineal no nulo y (E, F) es una pareja de polinomios, con E mónico. El propósito de este trabajo es dar condiciones de regularidad débil sobre u . Bajo ciertas condiciones de admisibilidad de la pareja (E, F) , la regularidad débil de u conduce a su regularidad. Se analizan algunos ejemplos.

Palabras clave: Ecuaciones diferenciales lineales de primer orden, funcionales regulares y débilmente regulares, funcionales semiclásicos, funcionales débilmente semiclásicos.

¹ Departamento de Matemáticas, Universidad Carlos III de Madrid, Avenida de la Universidad 30, 28911 Leganés, Spain. E-mail: gpacomarc@ing.uc3m.es

² Département des Méthodes Quantitatives, Institut Supérieur de Gestion de Gabès. Avenue Jilani Habib 6002, Gabès, Tunisie. E-mail: ridhasfaxi@yahoo.fr

Introduction

Let u be a non-zero linear functional satisfying the following first-order linear differential equation

$$(Eu)' + Fu = 0 \quad (*)$$

where E and F are non-zero polynomials, with E a monic polynomial.

When the linear functional u is regular then it is said to be semiclassical [6, 7].

Notice that a linear functional u is said to be regular [4, 7] if there exists a monic polynomial sequence (MPS) $\{B_n\}_{n \geq 0}$ where $\deg B_n = n$, $n \geq 0$, such that

$$\langle u, B_n B_m \rangle = r_n \delta_{n,m}, \quad n, m \geq 0, \quad r_n \neq 0, \quad n \geq 0.$$

Besides regular functionals, the equation (*) can have as solutions linear functionals defined as a finite sum of Dirac masses and their derivatives. In such a case there exists a non-zero polynomial ϕ such that $\phi u = 0$. More precisely, if $u = \sum_{i=1}^t \sum_{j=0}^{k_i-1} M_{i,j} \delta^{(j)}(x-x_i)$, then $\phi(x) = \prod_{i=1}^t (x-x_i)^{k_i}$. Obviously, such linear functionals u are not regular. For this reason, we introduce in a natural way the concept of weak-regularity linear functional u as follows.

A non-zero linear functional u is said to be *weakly-regular* if for a polynomial ϕ such that $\phi u = 0$, then $\phi = 0$. Regular linear functionals are weakly-regular (in general the converse is not true, see Remark 1.6).

In this paper, we are dealing with *weak-semiclassical linear functionals*, i.e., when the linear functional u satisfying (*) is weakly-regular. The aim of our contribution is to give essentially a necessary and sufficient condition for the weak-regularity of a non-zero linear functional u satisfying (*).

The paper is organized as follows. In Section 1, we introduce the basic notations and tools that will be used throughout the paper. Next, we define the weak-regularity of a linear functional and we analyze some properties like the stability by the shifting perturbation of the linear functional as well as the left multiplication of the linear functional by a polynomial. We conclude this section introducing the notion of admissible pair of polynomials. In section 2, our main results are proved. We obtain a necessary and sufficient condition in order to a non-zero linear functional u satisfying a first-order linear differential equation $(Eu)' + Fu = 0$ be weakly-regular. This yields the definition of weak-semiclassical

functional. In section 3, we prove (Proposition 3.2) that the classical functionals are the only weakly-regular functionals satisfying $(Eu)' + Fu = 0$, where E and F are two polynomials, E monic, $\deg E \leq 2$, $\deg F = 1$, and the pair (E, F) is admissible. This result generalizes one by **Geronimus** on classical functionals, see [5]. In section 4, the results of section 3 are used to characterize semiclassical polynomial sequences, which are orthogonal with respect to regular functionals u given by $Au = \lambda Bv$, where A and B are two monic polynomials, $\lambda \in \mathbb{C}^*$, and v is a classical linear functional.

1. Definitions and background

Let \mathbb{P} be the linear space of complex polynomials in one variable and \mathbb{P}' its topological dual space. We denote by $\langle u, f \rangle$ the action of $u \in \mathbb{P}'$ on $f \in \mathbb{P}$ and by $(u)_{c,n} := \langle u, (x-c)^n \rangle$, $n \geq 0$, the moments of u with respect to the sequence $\{(x-c)^n\}_{n \geq 0}$. In particular, if $c = 0$, then we will denote $(u)_n := (u)_{0,n}$, $n \geq 0$.

We define the following operations in \mathbb{P}' . For any linear functional u , any polynomial h , and any $c \in \mathbb{C}$, let $Du = u'$, hu , $(x-c)^{-1}u$, and $\sigma(u)$ be the linear functionals defined by duality

$$\langle u', f \rangle := -\langle u, f' \rangle, \quad f \in \mathbb{P},$$

$$\langle hu, f \rangle := \langle u, hf \rangle, \quad f \in \mathbb{P},$$

$$\langle (x-c)^{-1}u, f \rangle := \langle u, \theta_c(f) \rangle, \quad f \in \mathbb{P},$$

$$\langle \sigma(u), f \rangle := \langle u, \sigma(f) \rangle, \quad f \in \mathbb{P},$$

where $\theta_c(f)(x) = \frac{f(x) - (c)}{x - c}$ and $\sigma(f)(x) = f(x^2)$. Notice that

$$f(x)\sigma(u) = \sigma(f(x^2)u), \quad f \in \mathbb{P}. \quad (1.1)$$

Let $\{B_n\}_{n \geq 0}$ be a monic polynomial sequence (MPS), $\deg B_n = n$, $n \geq 0$, and $\{u_n\}_{n \geq 0}$ its dual sequence, $u_n \in \mathbb{P}'$, $n \geq 0$, defined by $\langle u_n, B_m \rangle := \delta_{n,m}$, $n, m \geq 0$, where $\delta_{n,m}$ is the Kronecker symbol.

The linear functional u_0 is said to be the canonical functional associated with the MPS $\{B_n\}_{n \geq 0}$.

We remind the following results [2, 4, 7].

Lemma 1.1. *For any $u \in \mathbb{P}'$ and any integer $m \geq 1$, the following statements are equivalent*

- i) $\langle u, B_{m-1} \rangle \neq 0$, $\langle u, B_n \rangle = 0$, $n \geq m$.
- ii) There exist $\lambda_\nu \in \mathbb{C}$, $0 \leq \nu \leq m-1$, $\lambda_{m-1} \neq 0$ such that $u = \sum_{\nu=0}^{m-1} \lambda_\nu u_\nu$.

ii) \Rightarrow i). Let ϕ be a polynomial such that $\phi u = 0$. We can always write $\phi(x) = A(x^2) + xB(x^2)$ where A and B are polynomials. For every $p \in \mathbb{P}$, one has

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \phi u, p(x^2) \rangle = \langle u, \phi(x)p(x^2) \rangle \\ &= \langle u, A(x^2)p(x^2) \rangle = \langle \sigma(u), A(x)p(x) \rangle \\ &= \langle A\sigma(u), p(x) \rangle. \end{aligned}$$

Then, $A\sigma(u) = 0$. So, from the weak-regularity of $\sigma(u)$ we deduce $A = 0$. On the other hand,

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \phi u, xp(x^2) \rangle = \langle u, x\phi(x)p(x^2) \rangle \\ &= \langle u, x^2B(x^2)p(x^2) \rangle = \langle \sigma(u), xB(x)p(x) \rangle \\ &= \langle xB\sigma(u), p(x) \rangle. \end{aligned}$$

Then, $xB\sigma(u) = 0$. So, $B = 0$ taking into account the weak-regularity of $\sigma(u)$. Thus $\phi = 0$. \square

Notice that if u is a symmetric regular linear functional then xu is a weakly-regular functional that is not regular.

1.2. Admissibility pair of polynomials. Let (E, F) be a pair of polynomials, where E monic, $\deg E = t$, $\deg F = p \geq 1$, and $s(E, F) := \max(t - 2, p - 1)$. Notice that $(s(E, F) \geq 0$, because $\deg F \geq 1$). For this pair of polynomials, we introduce

- the admissibility coefficients

$$\Delta_n(E, F) = nE^{(s+2)}(0) - (s+2)F^{(s+1)}(0), \quad n \geq 0; \quad (1.6)$$

- the sequence of polynomials

$$F_m = F - (m - 1)E', \quad m \geq 1. \quad (1.7)$$

Definition 1.8. The pair (E, F) is said to be admissible when its admissibility coefficients satisfy

$$\Delta_n(E, F) \neq 0, \quad n \geq 0. \quad (1.8)$$

From an admissible pair of polynomials, we can deduce other admissible pairs. Indeed, we have the following result.

Lemma 1.9. When (E, F) is admissible, then for each integer $m \geq 1$, we have

- i) $\deg F_m \geq 1$, where $F_m = F - (m - 1)E'$, $m \geq 1$.
- ii) $s(E, F_m) = s(E, F) := s$.
- iii) The pair (E, F_m) is admissible and

$$\Delta_n(E, F_m) = \Delta_{n+(m-1)(s+2)}(E, F), \quad n \geq 0.$$

Proof. Assume there exists an integer, $m \geq 1$, such that F_m is a constant polynomial. Since $\deg F \geq 1$, then $m \geq 2$. In this case, $s = t - 2 = p - 1$ and the coefficient of x^p in F_m is $(p!)^{-1}F^{(p)}(0) - (m - 1)t = 0$. Then $\Delta_{(m-1)t}(E, F) = 0$, and this contradicts the admissibility condition of the pair (E, F) . Hence, i) holds. The admissibility condition of the pair (E, F) yields

$$\deg(F_m) = \max(p, t - 1) = s + 1, \quad m \geq 1. \quad (1.9)$$

Thus,

$$s(E, F_m) = \max(t - 2, s) = s.$$

Hence, ii) holds.

From i), ii), and (1.6), one has

$$\begin{aligned} \Delta_n(E, F_m) &= nE^{(s+2)}(0) - (s+2)F_m^{(s+1)}(0) \\ &= (n + (m - 1)(s + 2))E^{(s+2)}(0) \\ &\quad - (s + 2)F^{(s+1)}(0) \\ &= \Delta_{n+(m-1)(s+2)}(E, F), \quad n \geq 0. \end{aligned}$$

Thus, the admissibility condition of the pair (E, F_m) follows from the admissibility of the pair (E, F) . Hence, iii) holds. \square

For each fixed $(a, b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$, we can consider the shifted pair (\tilde{E}, \tilde{F}) given by

$$\tilde{E}(x) := a^{-t}E(ax + b) \quad ; \quad \tilde{F}(x) := a^{1-t}F(ax + b). \quad (1.10)$$

Let denote $\tilde{s} = \max(\tilde{t} - 2, \tilde{p} - 1)$, where $\tilde{t} = \deg(\tilde{E})$ and $\tilde{p} = \deg(\tilde{F})$. Thus

$$\tilde{t} = t, \quad \tilde{p} = p, \quad \tilde{s} = s. \quad (1.11)$$

As a consequence the following result holds.

Lemma 1.10. If (E, F) is admissible, then (\tilde{E}, \tilde{F}) is also admissible. Furthermore,

$$\Delta_n(\tilde{E}, \tilde{F}) = a^{s+2-t}\Delta_n(E, F), \quad n \geq 0, \quad (1.12)$$

Proof. If $(a, b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$, then

$$\begin{aligned} \Delta_n(\tilde{E}, \tilde{F}) &= n\tilde{E}^{(s+2)}(0) - (s+2)\tilde{F}^{(s+1)}(0) \\ &= a^{s+2-t} \left(nE^{(s+2)}(0) - (s+2)F^{(s+1)}(0) \right) \\ &= a^{s+2-t}\Delta_n(E, F), \quad n \geq 0. \end{aligned}$$

Hence, i) follows. \square

When the pair of polynomials (E, F) is admissible and $\deg E \geq 1$, we deduce the following results.

Lemma 1.11. *Let (E, F) be an admissible pair of polynomials, where $\deg E \geq 1$, and c is a zero of E . Then for each integer $m \geq 1$, we get*

- i) $\deg \hat{F}_m \geq 1$, where $\hat{F}_m = F - (m - 1)\theta_c(E)$.
- ii) $s(E, \hat{F}_m) = s(E, F) := s$.
- iii) The pair (E, \hat{F}_m) is admissible, and

$$\Delta_n(E, \hat{F}_m) = \Delta_{n+m-1}(E, F), \quad n \geq 0.$$

Proof. Assume there exists an integer $m \geq 1$ such that \hat{F}_m is a constant polynomial. Since $\deg F \geq 1$, then $m \geq 2$. In this case, $s = t - 2 = p - 1$ and the coefficient of x^p in \hat{F}_m is $(p!)^{-1}F^{(p)}(0) - (m - 1) = 0$. Then $\Delta_{m-1}(E, F) = 0$, and this contradicts the admissibility condition of the pair (E, F) . Hence, i) holds. The admissibility condition of the pair (E, F) means that

$$\deg(\hat{F}_m) = \max(p, t - 1) = s + 1, \quad m \geq 1. \quad (1.13)$$

Thus,

$$s(E, \hat{F}_m) = \max(t - 2, s) = s, \quad m \geq 1.$$

Hence, ii) holds. For $m \geq 1$, from i), ii), and (1.6) one has

$$\Delta_n(E, \hat{F}_m) = nE^{(s+2)}(0) - (s + 2)\hat{F}_m^{(s+1)}(0).$$

Since $t \leq s + 2$, it follows that

$$E^{(s+2)} = (s + 2)(\theta_c(E))^{(s+1)}.$$

Thus,

$$\begin{aligned} \Delta_n(E, \hat{F}_m) &= (n + m - 1)E^{(s+2)}(0) - (s + 2)F^{(s+1)}(0) \\ &= \Delta_{n+m-1}(E, F), \quad n \geq 0. \end{aligned}$$

Hence, iii) holds. □

For the sequel, we need the following results.

Lemma 1.12. *Let (E, F) be a pair of non-zero polynomials, where E monic, $\deg E \geq 1$. If E and F are coprime, then*

- i) There exists an integer $\mu \geq 1$ such that E and $F_m = F - (m - 1)E'$ are coprime, $m \geq \mu$.
- ii) For each zero c of E , there exists an integer $\vartheta \geq 1$ such that E and $\hat{F}_m = F - (m - 1)\theta_c(E)$ are coprime, $m \geq \vartheta$.

Proof. Assume that for each integer $\mu \geq 1$, there exists an integer $m_\mu \geq \mu$ such that E and $F - (m_\mu - 1)E'$ have a common zero. Then there is a zero c of E and two different integers $m_{\mu\nu} \geq 1$, $\nu = 1, 2$ respectively, such that $(F - (m_{\mu\nu} - 1)E')(c) = 0$, $\nu = 1, 2$. This

yields $F(c) = 0$, that contradicts the fact that E and F are coprime. Hence, i) holds. Let c be a zero of E . Two cases must be analyzed.

Case1. Let assume c is a simple zero of E . Suppose that for each integer $\vartheta \geq 1$, there exists an integer $m_\vartheta \geq \vartheta$ such that E and $F - (m_\vartheta - 1)\theta_c(E)$ have a common zero. Then it will exist a zero c of E and two different integers $m_{\vartheta\nu} \geq 1$, $\nu = 1, 2$ such that $(F - (m_{\vartheta\nu} - 1)\theta_c(E))(c) = 0$, $\nu = 1, 2$. This leads to $F(c) = 0$, in contradiction with the fact that E and F are coprime.

Case2. c is a zero of E with multiplicity at least two. For every zero ξ of E , we have

$$\hat{F}_m(\xi) = F(\xi) - (m - 1)\theta_c(E)(\xi) = F(\xi) \neq 0, \quad m \geq 1.$$

Hence, ii) holds. □

As a consequence, for a pair of non-zero polynomials (E, F) , where E is a monic polynomial, $\deg E \geq 1$, and where E and F are coprime, we can associate the integer

$$\mu(E, F) := \min\{k \geq 1 : E \text{ and } F_m \text{ are coprime, } m \geq k\}. \quad (1.14)$$

2. Main Results

Let (E, F) be a pair of polynomials, with E monic, $\deg E = t$, $\deg F = p \in \mathbb{N} \cup \{-\infty\}$, and $s := s(E, F)$. Consider the functional equation

$$(Eu)' + Fu = 0, \quad u \in \mathbb{P}^*. \quad (2.1)$$

Lemma 2.1. *Let $u \in \mathbb{P}^*$ a solution of (2.1). When the pair (E, F) is admissible and the $(s + 1)$ - first moments $(u)_0, \dots, (u)_s$ are fixed, then u is unique.*

Proof. The admissibility condition of the pair (E, F) requires that $p \geq 1$. Then, $s \geq 0$. The functional equation (2.1) is equivalent to the following recurrence relation for the corresponding moments

$$\sum_{\nu=0}^{s+2} \frac{\Delta_{n,\nu}(E, F)}{\nu!} (u)_{n+\nu-1} = 0, \quad n \geq 0, \quad (2.2)$$

where $\Delta_{n,\nu}(E, F) := nE^{(\nu)}(0) - \nu F^{(\nu-1)}(0)$, $0 \leq \nu \leq s + 2$. Suppose that $v \in \mathbb{P}^*$ is other solution of (2.1). Then, the linear functional $w = v - u$ satisfies

$$\sum_{\nu=0}^{s+2} \frac{\Delta_{n,\nu}(E, F)}{\nu!} (w)_{n+\nu-1} = 0, \quad n \geq 0,$$

where $F_\nu = F - (\nu - 1)E'$. Notice that $A'E - AF_\nu \neq 0$. Otherwise, $A'E = AF_\nu$. Since E and F_ν are coprime E divides A , a contradiction. Taking into account ϕ is a polynomial of minimal degree such that $\phi u = 0$ then $\phi = AE^\nu$ divides $E^{\nu-1}(A'E - AF_\nu)$. So, E divides AF_ν . But E and F_ν are coprime then E divides A , a contradiction. Thus,

$$\phi(x) = E^k(x).$$

From (2.5) and from (2.1), we get

$$E^{k-1}F_k u = 0.$$

Since E and F_k are coprime, there exist two polynomials S_i , $i = 1, 2$ such that

$$S_1(x)E(x) + S_2(x)F_k(x) = 1.$$

Then,

$$S_1(x)E^k(x) + S_2(x)E^{k-1}(x)F_k(x) = E^{k-1}(x).$$

Multiplying by u , we get $E^{k-1}u = 0$. This contradicts the fact that $\phi = E^k$ has minimal degree and satisfies $\phi u = 0$. Hence, the weak regularity of u follows. \square

A_{2.2.} E and F are coprime and $\mu(E, F) \geq 2$.

Lemma 2.8. *Let $u \in \mathbb{P}'^*$ satisfy (2.1), with pseudo-class $t \geq 1$, E and F coprime polynomials, and $\mu(E, F) \geq 2$. Then the following statements are equivalent.*

- i) u is weakly-regular.
- ii) $E^{\mu(E,F)-1}u \neq 0$.

Proof. From the assumption, let consider the linear functional $v = E^{\mu(E,F)-1}u$. From Property 1.5, i), u is a weakly-regular linear functional if and only if $v \neq 0$ and v is weakly-regular. From (2.1), when $v \neq 0$, it satisfies

$$(Ev)' + F_{\mu(E,F)}v = 0,$$

where E and $F_{\mu(E,F)} - (m - 1)E' = F_{m+\mu(E,F)-1}$ are coprime, $m \geq 1$. Since E and $E' + F_{\mu(E,F)} = F_{\mu(E,F)-1}$ are coprime, then the pseudo-class of v is $t \geq 1$. Therefore, from Lemma 2.7 v is weakly-regular. Hence, u is weakly-regular if and only if $E^{\mu(E,F)-1}u \neq 0$. \square

A_{2.3.} E and F are not coprime. Let denote Δ the greatest common divisor of E and F , with $E = \Delta\tilde{E}$ and $F = \Delta\tilde{F}$, $\deg \Delta \geq 1$. Moreover, we can associate with the pair of polynomials (\tilde{E}, \tilde{F}) the integer $\mu(\tilde{E}, \tilde{F})$.

Proposition 2.9. *Let $u \in \mathbb{P}'^*$ be a linear functional such that (2.1) holds with pseudo-class $t \geq 1$, and G be the greatest common divisor of E and F , with $E = G\tilde{E}$ and $F = G\tilde{F}$. The following statements are equivalent.*

- i) u is weakly-regular.
- ii) (i). If $\deg \tilde{E} = 0$, then $\deg \tilde{F} \geq 1$ and $Gu \neq 0$.
(ii). If $\deg \tilde{E} \geq 1$, then $G\tilde{E}^{\mu(\tilde{E},\tilde{F})-1}u \neq 0$.

Proof. Consider $v = G\tilde{E}^{\mu(\tilde{E},\tilde{F})-1}u$. The linear functional u is weakly-regular if and only if $v \neq 0$ and v is weakly-regular. But, if $v \neq 0$, then

$$(\tilde{E}v)' + \tilde{F}_{\mu(\tilde{E},\tilde{F})}v = 0,$$

where \tilde{E} and $\tilde{F}_{\mu(\tilde{E},\tilde{F})} - (m - 1)\tilde{E}' = \tilde{F}_{m+\mu(\tilde{E},\tilde{F})-1}$ are coprime, $m \geq 1$. Since \tilde{E} and $\tilde{E}' + \tilde{F}_{\mu(\tilde{E},\tilde{F})} = \tilde{F}_{\mu(\tilde{E},\tilde{F})-1}$ are coprime, then $\tilde{t} = \deg \tilde{E}$ is the pseudo-class of v . Two cases appear.

(i). $\tilde{t} = 0$. According to Lemma 2.6 the non-zero linear functional v is weakly-regular if and only if $\deg \tilde{F} \geq 1$. In this case, u is weakly-regular if and only if $Gu \neq 0$ and $\deg \tilde{F} \geq 1$.

(ii). $\tilde{t} \geq 1$. The non-zero linear functional v is weakly-regular, from Lemmas 2.7 and 2.8. In this case, u is weakly-regular if and only if $G\tilde{E}^{\mu(\tilde{E},\tilde{F})-1}u \neq 0$. \square

Remark 2.10. When the linear functional u solution of (2.1) satisfies $(u)_0 \neq 0$, and is weakly-regular, then we must have $\deg F \geq 1$. If not, $F(x) = \lambda \in \mathbb{C}$, then $(Eu)' + \lambda u = 0$ holds. So, from $\langle (Eu)' + \lambda u, 1 \rangle = 0$, we get $\lambda(u)_0 = 0$. Hence, $\lambda = 0$, and, as a consequence, $Eu = 0$. This contradicts the weak-regularity of u .

2.2. Weak-semiclassical and semiclassical functionals. Let introduce the following definitions.

Definition 2.11. The linear functional u is said to be a weak-semiclassical functional when it is weakly-regular and satisfies (2.1), where the pair (E, F) is admissible.

Notice that every semiclassical linear functional u is also regular [7]. A weak-semiclassical functional u satisfies an infinity number of first-order linear differential equations: for $\chi \in \mathbb{P}$, u also fulfils

$$(E_1u)' + F_1u = 0,$$

with $E_1(x) = \chi(x)E(x)$, and $F_1(x) = \chi(x)F(x) - \chi'(x)E(x)$. So, if $s = s(E, F) = \max(t - 2, p - 1)$ and taking into account the admissibility condition of the pair (E, F) , i.e $\Delta_q(E, F) \neq 0$, then we get $s_1 =$

$s(E_1, F_1) = s + q$. Hence, we can associate with the weak-semiclassical functional u a subset $h(u)$ of nonnegative integers such that m belongs to $h(u)$ if and only if $m = s(E_2, F_2)$ where (E_2, F_2) is an admissible pair of polynomials satisfying (2.1).

Definition 2.12. The minimum element s of $h(u)$ is said to be the class of u . When $s = 0$, the weak-semiclassical (resp. semiclassical) functional is called weak-classical (resp. classical) functional.

Lemma 2.13. Let u be a weak-semiclassical functional such that

$$(E_i u)' + F_i u = 0, \text{ with } s_i = \max(t_i - 2, p_i - 1), \quad i = 1, 2.$$

Let denote by E the greatest common divisor of E_1 and E_2 . Then, there exists a polynomial F such that

$$(Eu)' + Fu = 0,$$

with $s = \max(t - 2, p - 1) = s_i - t_i + t$, $i = 1, 2$, where $t = \deg E$ and $p = \deg F$.

Proof. See in [8] Lemma 3.3 and replace regularity by weak-regularity. \square

Proposition 2.14. For each weak-semiclassical functional u , the pair (E, F) that realizes the minimum of $h(u)$ is unique.

Proof. See in [8] Proposition 3.4 and replace regularity by weak-regularity. \square

Proposition 2.15. The class of the weak-semiclassical functional u satisfying (2.1) is s if and only if

$$\prod_c \left(|F(c) + E'(c)| + |\langle u, \theta_c F + \theta_c^2 E \rangle| \right) > 0,$$

where c belongs to the set of zeros of E .

Proof. See in [8] Proposition 3.5 and replace regularity by weak-regularity. \square

Proposition 2.16. Let u be a weak-semiclassical functional satisfying $(Eu)' + Fu = 0$, where E monic, $t = \deg E$, $p = \deg F \geq 1$, and $s = \max(t - 2, p - 1)$. The following statements are equivalent.

- i) The pseudo-class of u is t .
- ii) The class of u is s .

Proof. It is a straightforward consequence of Lemmas 2.3 and 2.13. \square

Remark 2.17. Let u be a weak-semiclassical functional satisfying (2.1), with $\deg E \geq 1$. For each zero c of E and an integer $m \geq 1$, let consider the following linear functional

$$v(m, c) = (x - c)^{m-1} u.$$

Obviously, $v(m, c)$ is weakly-regular and satisfies

$$(Ev(m, c))' + \hat{F}_m v(m, c) = 0.$$

From Lemma 2.9, the pair of polynomials (E, \hat{F}) is admissible and has associated a nonnegative integer number s . Thus, there exists an integer number $k \geq 1$ such that $(v(k, c))_0 \neq 0$. Otherwise, one has $\langle u, (x - c)^{m-1} \rangle = 0$, $m \geq 1$. Then $u = 0$, a contradiction.

3. Classical Case.

It is well known that if $s = 0$ and the linear functional u is regular then we recover the classical functionals (Hermite, Laguerre, Bessel, and Jacobi) [1, 9, 10]. By a shift we get the following canonical classical functionals

$$C_1. E(x) = 1, F(x) = 2x.$$

The functional u is the Hermite functional denoted \mathcal{H} .

$$C_2. E(x) = x, F(x) = x - \alpha - 1.$$

The functional u is the Laguerre functional denoted $\mathcal{L}(\alpha)$. It is regular if and only if $\alpha \neq -n$, $n \geq 1$.

$$C_3. E(x) = x^2, F(x) = -2(\alpha x + 1).$$

The functional u is the Bessel functional denoted $\mathcal{B}(\alpha)$. It is regular if and only if $\alpha \neq -\frac{n}{2}$, $n \geq 0$.

$$C_4. E(x) = x^2 - 1, F(x) = -(\alpha + \beta + 2)x + \alpha - \beta.$$

The functional u is the Jacobi functional denoted $\mathcal{J}(\alpha, \beta)$. It is regular if and only if $\alpha \neq -n$, $\beta \neq -n$, and $\alpha + \beta \neq -n - 1$, $n \geq 1$.

Notice that the polynomials (E, F) in the above four canonical classical cases, C_i , $i = 1, \dots, 4$, are coprime, $m \geq 1$.

In the theory of first-order linear differential equations, the weak-regularity of the functional could reach its regularity, what is true here. First, we need to show the invariance of the weak-semiclassical character by shifting.

Lemma 3.1. *When u is a weak-semiclassical functional of class s , satisfying (2.1), then $\tilde{u} = (h_{a^{-1}} \circ \tau_{-b})u$ is also a weak-semiclassical functional with the same class s . It satisfies $(\tilde{E}\tilde{u})' + \tilde{F}\tilde{u} = 0$, where $\tilde{E}(x) = a^{-t}E(ax + b)$ and $\tilde{F}(x) = a^{1-t}F(ax + b)$.*

Proof. The weak-regularity of \tilde{u} and the admissibility conditions of the pair (\tilde{E}, \tilde{F}) follow from Property 1.5, b) and Lemma 1.10, respectively. Finally, for the functional equation and the class of \tilde{u} , see [1]. \square

Proposition 3.2. *Let u be a linear functional satisfying $(Eu)' + Fu = 0$, where E monic, $\deg E \leq 2$, $\deg F = 1$, and the pair of polynomials (E, F) is admissible. The following statements are equivalent.*

- i) u is regular.
- ii) For each integer $m \geq 1$, E and F_m are coprime.
- iii) u is weakly-regular.

Proof. i) \Rightarrow ii) \Rightarrow iii). It is straightforward.

iii) \Rightarrow i). It is sufficient to show that u is regular. So the following four situations must be analyzed:

C₁. $\deg(E) = 0$. We can write $E(x) = 1$ and $F(x) = cx + d$, $c \neq 0$. The shifted functional $v = (h_{a^{-1}} \circ \tau_{-b})u$, where $(a, b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$ such that $a^2 = (2/c)$ and $b = -(d/c)$, satisfies

$$v' + 2xv = 0, \quad (v)_0 = 1. \quad (3.1)$$

The Hermite functional is the unique solution of (3.1). Hence, u is regular as the shifted of a regular functional.

C₂. $\deg(E) = 1$. We can write $E(x) = x + \xi$ and $F(x) = cx + d$, $c \neq 0$. Let $v = (h_{a^{-1}} \circ \tau_{-b})u$, where $a = (1/c)$, $b = -\xi$ and $\alpha = c\xi - d - 1$. The functional v satisfies

$$(xv)' + (x - \alpha - 1)v = 0, \quad (v)_0 = 1. \quad (3.2)$$

Applying (3.2) to x^n , $n \geq 0$, we get

$$(v)_{n+1} = [n - (\alpha + 1)](v)_n, \quad n \geq 0, \quad (v)_0 = 1. \quad (3.3)$$

Notice that $\alpha \neq -n$, $n \geq 1$. Otherwise, there exists an integer n_0 , $n_0 \geq 0$, such that $\alpha = -n_0 - 1$. From (3.3), one has $x^{n_0+1}v = 0$. This contradicts the weak-regularity of v , as the shifted of a weakly-regular functional. Therefore, v is the Laguerre functional. Thus, u is regular.

C₃. $\deg(E) = 2$ and E has a double zero. We can write $E(x) = (x + \xi)^2$ and $F(x) = cx + d$. Since

$\deg(F) = 1$ and taking into account (E, F) is an admissible pair we get $c \neq n$, $n \geq 0$. If $\alpha = -(c/2)$, then $\alpha \neq -(n/2)$, $n \geq 0$. Let $a = \frac{c\xi - d}{2}$. Then, $a \neq 0$. Otherwise, the functional $v = \tau_\xi u$ satisfies

$$(x^2v)' - 2\alpha xv = 0, \quad (3.4)$$

and applying (3.4) to x^n , $n \geq 0$, we get $(n+2\alpha)(v)_{n+1} = 0$, $n \geq 0$. Since $\alpha \neq -(n/2)$, $n \geq 0$, then $xv = 0$, and this leads to a contradiction. So, it is possible to consider the functional $v = (h_{a^{-1}} \circ \tau_{-b})u$, where $a = \frac{c\xi - d}{2}$ and $b = -\xi$. The shifted functional v satisfies

$$(x^2v)' - 2(\alpha x + 1)v = 0, \quad (v)_0 = 1, \quad (3.5)$$

where $\alpha \neq -(n/2)$, $n \geq 0$. Thus, v is the Bessel functional and u is regular.

C₄. $\deg(E) = 2$ and E has two different zeros. We can write $E(x) = (x + \xi_1)(x + \xi_2)$, with $\xi_1 \neq \xi_2$, and $F(x) = cx + d$, where $c \neq n$, $n \geq 0$. Let $v = (h_{a^{-1}} \circ \tau_{-b})u$, where $a = \frac{\xi_2 - \xi_1}{2}$ and $b = \frac{\xi_1 + \xi_2}{2}$. We take $\alpha = \frac{c(b-a) + d - 2a}{2a}$ and $\beta = -\frac{c(a+b) + d + 2a}{2a}$. The shifted functional v satisfies

$$((x^2-1)v)' + (-\alpha + \beta + 2)x + \alpha - \beta)v = 0, \quad (v)_0 = 1, \quad (3.6)$$

with $\alpha + \beta = -c - 2 \neq -n - 2$, $n \geq 0$. Applying (3.6) to $(x-1)^n$, $n \geq 0$,

$$(n + \alpha + \beta + 2)v_{1,n+1} = -2(n + \beta + 1)v_{1,n}, \quad n \geq 0, \quad (3.7)$$

On the other hand, applying (3.6) to $(x+1)^n$, $n \geq 0$, we get

$$(n + \alpha + \beta + 2)v_{-1,n+1} = 2(n + \alpha + 1)v_{-1,n}, \quad n \geq 0. \quad (3.8)$$

Suppose there exists an integer n_0 , $n_0 \geq 0$, such that $\beta = -n_0 - 1$ (resp. $\alpha = -n_0 - 1$). Since $\alpha + \beta \neq -n - 2$, $n \geq 0$, from (3.7), (resp. (3.8)), then $(x-1)^{n_0+1}v = 0$, (resp. $(x+1)^{n_0+1}v = 0$). This contradicts the weak-regularity of v .

As a consequence, $\alpha + \beta \neq -n$, $n \geq 2$, $\alpha \neq -n$, $n \geq 1$, and $\beta \neq -n$, $n \geq 1$. The functional v is the Jacobi functional, then u is regular. \square

Proposition 3.3. *Let $\{C_n\}_{n \geq 0}$ be a sequence of monic polynomials with dual sequence $\{c_n\}_{n \geq 0}$, such that $E(x)C''_{n+1}(x) - F(x)C'_{n+1}(x) = \lambda_{n+1}C_{n+1}(x)$, $n \geq 0$, where E monic, $\deg E \leq 2$, $\deg F = 1$, and the pair of polynomials (E, F) is admissible. The following statements are equivalent.*

- i) $\{C_n\}_{n \geq 0}$ is orthogonal with respect to c_0 .

- ii) For each integer $m \geq 1$, E and F_m are coprime.
 iii) c_0 is weakly-regular.

Proof. From the higher degree coefficients in the second-order differential equation, and the admissibility condition of the pair (E, F) , we get

$$\lambda_{n+1} = (n+1)\left(n\frac{E''(0)}{2} - F'(0)\right) \neq 0, \quad n \geq 0. \quad (3.9)$$

On the other hand, we get

$$(Ec_0)' + Fc_0 = 0. \quad (3.10)$$

i) \Rightarrow ii). It is a consequence of (3.10), the regularity of c_0 , and Proposition 3.2.

ii) \Rightarrow iii). It follows from Proposition 3.2.

iii) \Rightarrow i). From Proposition 3.2, the linear functional c_0 is regular. Thus, the sequence $\{C_n\}_{n \geq 0}$ will be orthogonal with respect to c_0 , see in [8] Proposition 2.9. \square

4. Applications.

A₁. Assume that v is a classical functional. Let u be a regular functional such that

$$Au = \lambda Bv. \quad (4.1)$$

Here $\lambda \in \mathbb{C}^*$ and A, B are two monic polynomials. This kind of perturbations have been analyzed in [11]. The linear functional u is semi-classical. Indeed, if we assume that the functional v satisfies $Ev' + Fv = 0$, where E monic, $\deg E \leq 2$, $\deg F = 1$, and the pair (E, F) is admissible, then it is easy to prove that u satisfies

$$(ABu)' + A(BF - 2B'E)u = 0. \quad (4.2)$$

From Proposition 3.2, we can characterize in a natural way the MOPS with respect to u . Indeed

Proposition 4.1. *Let B be a monic polynomial, $\deg B = t$, and $\{B_n\}_{n \geq 0}$ be the sequence of monic orthogonal polynomials with respect to u . The following statements are equivalent.*

- i) There exist a monic polynomial A , a non zero-constant λ , and a classical functional v such that

$$Au = \lambda Bv. \quad (4.3)$$

- ii) There exist a integer $s \geq 0$, a MPS $\{\Pi_{n+t}\}_{n \geq s}$, $\deg \Pi_{n+t} = n+t$, $n \geq s$, and non zero-constants ϑ_n , $n \geq s$, such that

$$\begin{aligned} \vartheta_n B(x)B_{n+1}(x) &= E(x)\Pi'_{n+t}(x) - F(x)\Pi_{n+t}(x), \\ n &\geq s, \end{aligned} \quad (4.4)$$

where (E, F) is an admissible pair of polynomials, E monic, $\deg E \leq 2$, $\deg F = 1$, and E and F_m are coprime, $m \geq 1$.

Proof. i) \Rightarrow ii). Let $\{C_n\}_{n \geq 0}$ be the MOPS with respect to the functional v . From Lemma 2.1, if $s = \deg A$, then

$$B(x)B_{n+1}(x) = \sum_{\nu=n-s}^{n+t} \frac{\langle u, AC_{\nu+1}B_{n+1} \rangle}{\lambda \langle v, C_{\nu+1}^2 \rangle} C_{\nu+1}(x), \quad n \geq s. \quad (4.5)$$

On the other hand the classical sequence $\{C_n\}_{n \geq 0}$ satisfies a second-order differential equation [3]

$$E(x)C_{\nu+1}'(x) - F(x)C_{\nu+1}'(x) = \lambda_{\nu+1}C_{\nu+1}(x), \quad \nu \geq 0, \quad (4.6)$$

where $\lambda_{\nu+1} = (\nu+1)\left(\nu\frac{E''(0)}{2} - F'(0)\right) \neq 0$, $\nu \geq 0$. Using (4.6), from (4.5) we deduce (4.4), with

$$\vartheta_n = \frac{\lambda_{n+t+1}}{n+t+1}, \quad n \geq s, \quad (4.7)$$

$$\Pi_{n+t}(x) = \sum_{\nu=n-s}^{n+t} \frac{\lambda_{n+t+1}}{\lambda_{\nu+1}} \frac{\langle u, AC_{\nu+1}B_{n+1} \rangle}{\lambda \langle v, C_{\nu+1}^2 \rangle (n+t+1)} C_{\nu+1}'(x), \quad (4.8)$$

for $n \geq s$.

ii) \Rightarrow i). From the assumption ii) and Proposition 3.2, let consider the classical functional v satisfying $(Ev)' + Fv = 0$. From (4.4), we get $\langle Bv, B_{n+1} \rangle = 0$, $n \geq s$. Thus, there exists an integer r , $0 \leq r \leq s$, such that $\langle Bv, B_r \rangle \neq 0$. Otherwise, since $\langle Bv, B_n \rangle = 0$, $n \geq 0$, then $Bv = 0$. This contradicts the regularity of v . As a consequence, $\langle Bv, B_{n+1} \rangle = 0$, $n \geq s$, and $\langle Bv, B_r \rangle \neq 0$.

From Lemma 2.1, we get $Bv = \sum_{\nu=0}^r \langle Bv, B_\nu \rangle u_\nu$, and by using (1.4), we finally obtain (4.3), with

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{\langle u, B_r^2 \rangle}{\langle Bv, B_r \rangle}, \\ A(x) &= \sum_{\nu=0}^r \frac{\langle Bv, B_\nu \rangle \langle u, B_r^2 \rangle}{\langle Bv, B_r \rangle \langle u, B_\nu^2 \rangle} B_\nu(x). \quad \square \end{aligned}$$

A₂. For each fixed $\mu \in \mathbb{C}^*$, let $u(\mu)$ be the linear functional satisfying

$$(Eu(\mu))' + Fu(\mu) = 0, \quad (u(\mu))_0 = 1, \quad (u(\mu))_1 = 0, \quad (4.9)$$

with $E(x) = x$ and $F(x) = 2x^2 - (2\mu + 1)$. If $(u(\mu))_n$, $n \geq 0$, denote the moments of $u(\mu)$, we get

$$\begin{aligned} (u(\mu))_{n+2} &= \frac{(n+2\mu+1)}{2} (u(\mu))_n, \quad n \geq 0, \\ (u(\mu))_1 &= 0, \quad (u(\mu))_0 = 1. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Clearly $u(\mu)$ is a symmetric linear functional.

Proposition 4.2. *For each fixed $\mu \in \mathbb{C}^*$, let $u(\mu)$ be the linear functional satisfying (4.9). The following statements are equivalent.*

- i) $u(\mu)$ is regular.
- ii) $u(\mu)$ is weakly-regular.
- iii) The linear functional $\sigma(u(\mu))$ is weakly-regular.

Proof. i) \Rightarrow ii). The regularity of $u(\mu)$ yields weak-regularity.

ii) \Rightarrow iii). According to Proposition 1.7 and taking into account that $u(\mu)$ is symmetric and weakly-regular, we deduce that $\sigma(u(\mu))$ is weakly-regular.

iii) \Rightarrow i). From (4.9) the linear functional $\sigma(u(\mu))$ satisfies

$$(x\sigma(u))' + (x - \alpha - 1)\sigma(u) = 0, \alpha = \mu - \frac{1}{2}. \quad (4.11)$$

From Proposition 3.2, and taking into account the weak-regularity of $\sigma(u)$ and the admissibility condition of the pair $(x, x - \alpha - 1)$, the regularity of $\sigma(u)$, i.e., $\alpha \neq -n$, $n \geq 1$ follows. Therefore, $\mu \neq -n - (1/2)$, $n \geq 0$. Thus, $u(\mu)$ will be a semiclassical linear functional of class one. More precisely, it is the generalized Hermite functional denoted $\mathcal{H}(\mu)$ and $\sigma(u)$ is the Laguerre linear functional [1, 2, 4]. \square

Acknowledgements. The work of first author (FM) was supported by Dirección General de Investigación (Ministerio de Educación y Ciencia) of Spain under grant MTM 2006-13000-C03-02. The second author (RS) was partially supported by Institut Supérieur de Gestion de Gabès, Tunisie. We also thank the valuable

comments and suggestions by the referee in order to improve the presentation of the manuscript.

References

- [1] M. Bachène, *Les polynômes semi-classiques de classe zéro et de classe un*. Thèse de troisième cycle, Université Pierre et Marie Curie, Paris, 1986.
- [2] S. Belmehdi, *Formes linéaires et polynômes orthogonaux semi-classiques de classe $s = 1$. Description et classification*. Thèse d'Etat, Université Pierre et Marie Curie, Paris, 1990.
- [3] S. Bochner, *Über Sturm-Liowillesche Polynomsysteme*, Math. Z. **29** (1929), 730–736.
- [4] T. S. Chihara, *An Introduction to Orthogonal Polynomials*, Gordon and Breach, New York, 1978.
- [5] J. L. Geronimus, *On polynomials with respect to numerical sequences and on Hahn's theorem*, Izv. Akad. Nauk. **4** (1940), 215–228 (in Russian).
- [6] E. Hendriksen & H. Van Rossum, *Semiclassical orthogonal polynomials*. In *Polynômes Orthogonaux et Applications, Bar-le-Duc, 1984*. C. Brezinski et al. Editors. Lecture Notes in Math., Vol. 1171, Springer-Verlag, Berlin (1985), 354–361.
- [7] P. Maroni, *Une théorie algébrique des polynômes orthogonaux. Application aux polynômes orthogonaux semi-classiques*. In *Orthogonal Polynomials and their applications*. Proc. Erice. (1990). C. Brezinski et al., Editors. Ann. Comp. Appl. Math., **9** (1991), 95–130.
- [8] P. Maroni, *Variations around classical orthogonal polynomials. Connected problems*. J. Comp. Appl. Math. **48** (1993), 133–155.
- [9] P. Maroni, *Fonctions eulériennes. Polynômes orthogonaux classiques*. Techniques de l'Ingénieur, **A 154** (1994), 1–30.
- [10] J. Shohat, *A differential equation for orthogonal polynomials*. Duke Math. J. **5** (1939), 401–417.
- [11] V. B. Uvarov, *The connection between systems of polynomials orthogonal with respect to different distribution functions*. USSR Comput. Math. Phys. (6) **9** (1969), 25–36.

Recibido el 9 de abril de 2007

Aceptado para su publicación el 16 de mayo de 2007

Clearly $u(\mu)$ is a symmetric linear functional.

Proposition 4.2. *For each fixed $\mu \in \mathbb{C}^*$, let $u(\mu)$ be the linear functional satisfying (4.9). The following statements are equivalent.*

- i) $u(\mu)$ is regular.
- ii) $u(\mu)$ is weakly-regular.
- iii) The linear functional $\sigma(u(\mu))$ is weakly-regular.

Proof. i) \Rightarrow ii). The regularity of $u(\mu)$ yields weak-regularity.

ii) \Rightarrow iii). According to Proposition 1.7 and taking into account that $u(\mu)$ is symmetric and weakly-regular, we deduce that $\sigma(u(\mu))$ is weakly-regular.

iii) \Rightarrow i). From (4.9) the linear functional $\sigma(u(\mu))$ satisfies

$$(x\sigma(u))' + (x - \alpha - 1)\sigma(u) = 0, \alpha = \mu - \frac{1}{2}. \quad (4.11)$$

From Proposition 3.2, and taking into account the weak-regularity of $\sigma(u)$ and the admissibility condition of the pair $(x, x - \alpha - 1)$, the regularity of $\sigma(u)$, i.e., $\alpha \neq -n$, $n \geq 1$ follows. Therefore, $\mu \neq -n - (1/2)$, $n \geq 0$. Thus, $u(\mu)$ will be a semiclassical linear functional of class one. More precisely, it is the generalized Hermite functional denoted $\mathcal{H}(\mu)$ and $\sigma(u)$ is the Laguerre linear functional [1, 2, 4]. \square

Acknowledgements. The work of first author (FM) was supported by Dirección General de Investigación (Ministerio de Educación y Ciencia) of Spain under grant MTM 2006-13000-C03-02. The second author (RS) was partially supported by Institut Supérieur de Gestion de Gabès, Tunisie. We also thank the valuable

comments and suggestions by the referee in order to improve the presentation of the manuscript.

References

- [1] M. Bachène, *Les polynômes semi-classiques de classe zéro et de classe un*. Thèse de troisième cycle, Université Pierre et Marie Curie, Paris, 1986.
- [2] S. Belmehdi, *Formes linéaires et polynômes orthogonaux semi-classiques de classe $s = 1$. Description et classification*. Thèse d'Etat, Université Pierre et Marie Curie, Paris, 1990.
- [3] S. Bochner, *Über Sturm-Liouvillesche Polynomsysteme*, Math. Z. **29** (1929), 730–736.
- [4] T. S. Chihara, *An Introduction to Orthogonal Polynomials*, Gordon and Breach, New York, 1978.
- [5] J. L. Geronimus, *On polynomials with respect to numerical sequences and on Hahn's theorem*, Izv. Akad. Nauk. **4** (1940), 215–228 (in Russian).
- [6] E. Hendriksen & H. Van Rossum, *Semiclassical orthogonal polynomials*. In *Polynômes Orthogonaux et Applications, Bar-le-Duc, 1984*. C. Brezinski et al. Editors. Lecture Notes in Math., Vol. 1171, Springer-Verlag, Berlin (1985), 354–361.
- [7] P. Maroni, *Une théorie algébrique des polynômes orthogonaux. Application aux polynômes orthogonaux semi-classiques*. In *Orthogonal Polynomials and their applications*. Proc. Erice. (1990). C. Brezinski et al., Editors. Ann. Comp. Appl. Math., **9** (1991), 95–130.
- [8] P. Maroni, *Variations around classical orthogonal polynomials. Connected problems*. J. Comp. Appl. Math. **48** (1993), 133–155.
- [9] P. Maroni, *Fonctions eulériennes. Polynômes orthogonaux classiques*. Techniques de l'Ingénieur, **A 154** (1994), 1–30.
- [10] J. Shohat, *A differential equation for orthogonal polynomials*. Duke Math. J. **5** (1939), 401–417.
- [11] V. B. Uvarov, *The connection between systems of polynomials orthogonal with respect to different distribution functions*. USSR Comput. Math. Phys. (6) **9** (1969), 25–36.

Recibido el 9 de abril de 2007

Aceptado para su publicación el 16 de mayo de 2007

OXIDACIÓN DE MERCAPTANOS CON FTALOCIANINA DE Co ENCAPSULADA EN ZEOLITAS X E Y CON DIFERENTE FUERZA BÁSICA

por

Edgar Alberto Páez-Mozo¹, Fernando J. Hernández B.²
& Fernando Martínez Ortega¹

Resumen

Páez Mozo, E. A., F.J. Hernández & F. Martínez Ortega: Oxidación de mercaptanos con ftalocianina de Co encapsulada en zeolitas X e Y con diferente fuerza básica. Rev. Acad. Colomb. Cienc. **31** (119): 297-304, 2007. ISSN 0370-3908.

Se estudió la oxidación de 2-mercaptoetanol y propanotiol con ftalocianinas de Co encapsuladas en zeolitas X e Y con diferente fuerza básica, generada por intercambio de cationes alcalinos. La oxidación se realizó en ausencia de NaOH y en condiciones de reacción similares al proceso MEROX industrial. Se estableció una correlación entre la actividad oxidativa y la fuerza básica del catalizador, se obtuvo una escala relativa de fuerza básica de los sólidos, como función del corrimiento de la banda de 407 nm del yodo. Se deduce que la fuerza básica del sólido es suficiente para promover la reacción de formación del disulfuro.

Palabras clave: Ftalocianinas en zeolitas, oxidación de mercaptanos, sólidos básicos.

Abstract

The oxidation of 2-mercaptoethanol and propanethiol with Co phthalocyanine encapsulated in X and Y zeolites was studied as a function of the zeolite basic strength, generated by exchanging different alkaline cations. The oxidation was carried out in absence of NaOH under the same industrial reaction conditions. A correlation between the oxidation activity and the catalyst basic strength was observed. A relative scale of the solids basic strength was obtained as a function of the iodine absorption band shift at 407 nm. It is deduced that the catalyst basic strength is high enough to promote the disulfide formation reaction.

Key words: Phthalocyanines in zeolites, mercaptans oxidation, basic solids.

¹ Escuela de Química, Centro de Investigaciones en Catálisis-CICAT, Universidad Industrial de Santander, Km 2 vía El Refugio, Piedecuesta, Santander, Colombia. Correos electrónicos: epaez@uis.edu.co; fmartine@uis.edu.co

² Actualmente Departamento de Química, Universidad de Pamplona, Pamplona N. de S., Colombia.

Introducción

La combustión de derivados del petróleo, que contienen compuestos azufrados genera óxidos de azufre (SO_x), que al ser emitidos a la atmósfera propician la formación de lluvia ácida. Por esto las conferencias internacionales sobre el medio ambiente de Tokio (1974) y Río de Janeiro (1994), recomiendan como prioridad mundial emplear tecnologías que permitan la eliminación del azufre de los combustibles.

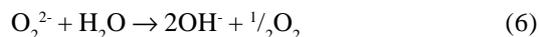
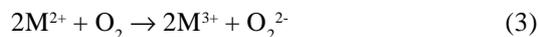
Los compuestos orgánicos azufrados presentes en destilados livianos del petróleo son principalmente tiofenos y mercaptanos (0.05% - 5% en peso). Los mercaptanos (RSH) son nocivos para el hombre, tienen un olor desagradable y además son corrosivos. Actualmente la eliminación de mercaptanos se hace por medio de procesos extractivos y de oxidación catalítica conocido este último como el proceso MEROX (Mercaptans Oxidation) (**Basu et al.**, 1993). Este tratamiento se realiza en un medio fuertemente alcalino y en presencia de un catalizador de oxidación, por medio del cual se forman disulfuros que permanecen en los destilados, manteniendo la presencia de azufre en los combustibles (**Balla et al.**, 1985; **Daohong et al.**, 1995; **Daohong et al.**, 1999).

El proceso MEROX requiere del empleo de un medio fuertemente alcalino (**Wallace et al.**, 1964) y de un catalizador tipo Ftalocianina metálica (**Leung**, 1987). El empleo del medio básico implica altos costos en el proceso y genera problemas ambientales debido a las grandes cantidades residuales de soda contaminada con mercaptanos.

Es por tanto necesario encontrar métodos alternos de oxidación avanzada de mercaptanos (**Litter**, 1999), en los cuales el medio básico pueda ser producido por un sólido para evitar el uso de soluciones cáusticas. Se ha encontrado que la basicidad aportada por algunos sólidos influye considerablemente en la oxidación de los mercaptanos (**Alcaraz et al.**, 1998; **Chatti et al.**, 2002). Esto es posible si la fuerza básica del catalizador es suficientemente alta para formar el ión mercapturo que es el primer paso en el proceso de oxidación.

La oxidación de mercaptanos en solución, catalizada por una ftalocianina metálica en un medio básico, ocurre por un mecanismo de anión radical como se muestra en el Esquema 1 (**LaFoy et al.**, 1993; **Bricker et al.**, 1987).

Es importante resaltar que el azufre se conserva en el producto (**Ross et al.**, 1977). Al soportar las Pc-M sobre un sólido, se evita el apilamiento de los complejos y su



Esquema 1. Mecanismo propuesto para la oxidación de mercaptanos en el proceso MEROX

desactivación o pérdida de su actividad catalítica. Adicionalmente un soporte zeolítico puede ofrecer un medio básico fuerte que contribuya a generar la basicidad requerida para la formación del ión mercapturo (**Jacobs et al.**, 1999; **Agnes et al.**, 2000).

En este trabajo se estudió la influencia de la fuerza básica de soportes zeolíticos en la oxidación de mercaptoetanol y de propanotiol. Se analizó el efecto de diferentes cationes metálicos en la fuerza básica de las zeolitas Y y X. Las ftalocianinas de cobalto y cinc se sintetizaron “*in situ*”, dentro de las cavidades de las zeolitas.

El estudio de la oxidación de compuestos organoazufrados es una de las líneas de investigación del CICAT (**Morales et al.**, 1996). El tema de la oxidación avanzada de los mercaptanos es de gran importancia pues puede permitir la eliminación total del azufre en los combustibles. Para este trabajo es necesario sentar las bases para el empleo de sólidos básicos con las características requeridas que promuevan la reacción de oxidación.

Zeolitas básicas

Recientemente se ha despertado el interés por el uso de zeolitas con fuerte carácter básico. Se ha encontrado que la fuerza básica intrínseca de las zeolitas se puede incrementar mediante el intercambio con metales alcalinos y con la formación de aglomerados de óxidos de estos metales. Se ha observado que entre menor sea la electronegatividad del metal, mayor es la fuerza básica del sitio (**Barthomeuf et al.**, 1984).

La presencia de sitios básicos en las zeolitas, se ha asociado con aquellos que presentan carga negativa (de alta densidad electrónica) como es el caso de los átomos de oxígeno en la red (tipo Si-O-Al). Estos sitios se conocen como sitios básicos estructurales; los oxígenos

reticulares de mayor carácter básico están relacionados con los tetraedros AlO_4 y la cantidad de carga sobre el oxígeno expresa la fuerza básica del sitio.

La fuerza básica de los oxígenos reticulares depende de la composición química y de la estructura de la zeolita. Estos sitios a diferencia de los ácidos, son fijos y en consecuencia los reaccionantes deben dirigirse hacia ellos (Tanabe *et al.*, 1968; Tanabe *et al.*, 1985).

En el presente trabajo se estudió la fuerza básica como función de la composición Si/Al de la zeolita y de la presencia de diferentes metales alcalinos. El catalizador: ftalocianina de Co y Zn se sintetizó *in situ* dentro de las cavidades de la faujasita. Estos materiales sólidos se evaluaron en la oxidación de mercaptoetanol y propanotiol en ausencia de NaOH.

Parte experimental

Intercambio catiónico de cobalto en las zeolitas X y Y

Con el objeto de lograr el intercambio apropiado de los metales en la zeolita, se utilizaron soluciones saturadas (0.59N) de acetato, cloruro y nitrato de cobalto y zinc. Se varió el tiempo de intercambio entre 12 y 70 horas a temperatura ambiente y con agitación constante (2000 rpm). Se emplearon 5 gramos de zeolita en 100 mL de la solución de la sal (Liquornik *et al.*, 1968; Sherry, 1966). Se cuantificó el intercambio midiendo la disminución de la concentración de sodio por espectroscopía de absorción atómica (Perkin-Elmer 372).

Intercambio de cationes alcalinos en la zeolita X

Se emplearon soluciones de 100 mL de cloruros de bario (1.5% en p/v), de estroncio (1.3%), de magnesio (2.0%), de cesio (1.8%), de calcio (1.2%) y de potasio (1.0%) en 1 gramo de zeolita. El intercambio se estudió con diferentes tiempos (6, 12, 24 y 48 horas) y a diferentes temperaturas (25, 50 y 90°C). Después del intercambio los sólidos se calcinaron al aire a 450°C durante 12 horas y la concentración de metal intercambiado se cuantificó por absorción atómica.

Determinación de la basicidad de la zeolita intercambiada con metales alcalinos y alcalino-térreos

La basicidad de la zeolita se determinó por adsorción de yodo. La banda del yodo adsorbido de 407 nm se desplaza como función de la basicidad del sólido. Esta banda se midió por reflectancia difusa UV-VIS, según el método descrito por la literatura (Choi *et al.*, 1996).

Se colocaron 500 mg de la zeolita intercambiada en un cilindro cerrado el cual se evacuó y luego se colocó en

contacto con 100 mg de yodo sublimado durante 10 minutos. Se hicieron ensayos con la zeolita intercambiada con sodio como blanco.

Síntesis de ftalocianinas de Co y Zn encapsuladas en zeolitas X y Y

Se sintetizaron las ftalocianinas de cobalto y zinc *in situ*, en la cavidad b de las zeolitas X (con relación Si/Al 1.2) y zeolita Y (con relación Si/Al 2.4), Sigma-Aldrich. La síntesis *in situ* de la ftalocianina en las zeolitas se realizó en los materiales con mayor contenido de Co y Zn con y sin intercambio previo de metales alcalinos, según el procedimiento indicado por Páez-Mozo (Páez *et al.*, 1993): se mezclaron 3.1g de dicianobenceno con 3.0g de zeolita intercambiada en 10 mL de decalín. La mezcla se sometió a reflujo durante 16 horas a 250°C, bajo presión autógena. El exceso de reactivos se extrajo por reflujo con acetona durante 48 horas y luego con piridina durante 72 horas.

Estos materiales se caracterizaron por espectroscopia UV-Vis (Perkin-Elmer Lambda 4B) en solución y con la técnica de reflectancia difusa. También se analizaron por espectroscopía infrarroja (FT-IR Broker) y Raman (Perkin-Elmer GX NIR-FT). La cristalinidad de los materiales se verificó por difracción de rayos X (Rigaku D/Max III).

Oxidación del Mercaptano con Ftalocianinas de Co y Zn encapsuladas en zeolitas. La reacción de oxidación se efectuó usando un reactor tipo batch de un litro (1L) de capacidad en vidrio ámbar. En una reacción tipo se emplearon 150 mL de una solución del mercaptano (2000 ppm: 2-mercaptoetanol o propanotiol) en éter de petróleo y 15 mg de sólido para mantener la relación catalizador/mercaptano similar a la empleada en el proceso MEROX industrial. La reacción se llevó a cabo durante dos horas a temperatura y presión ambientales. Los productos se cuantificaron usando un cromatógrafo de gases de alta resolución HP 6890 y se empleó tridecano como patrón interno. Se usó el método de inyección split/splitless, con un detector de ionización de llama (FID), y una columna semipolar DB-1 (5% fenil-polimetilsiloxanos).

Resultados y discusión

Los ensayos de adsorción indican que la zeolita X adsorbe cuatro veces más mercaptoetanol que la zeolita Y, muestra que hay una adsorción del producto disulfuro de tres veces mayor en la X que en la Y, como cabe esperar considerando que la zeolita X tiene un mayor número de sitios básicos y tanto el reaccionante como el producto presentan una acidez débil. En cuanto al intercambio de

los cationes Co^{2+} y Zn^{2+} , se observó que el máximo intercambio iónico se obtuvo a las 48 horas de reacción para ambas zeolitas.

La difracción de rayos X mostró que no hay pérdida de la cristalinidad de ninguno de los materiales al sufrir el intercambio.

Caracterización espectroscópica de las ftalocianinas encapsuladas

La figura 1 presenta el espectro de Reflectancia difusa UV-Vis y se notan las bandas características de absorción en 390 nm (banda Soret) y a 650 nm (banda Q) para la PcCo encapsulada en la zeolita Y. En contraste el espectro de la zeolita NaY no presenta tales bandas.

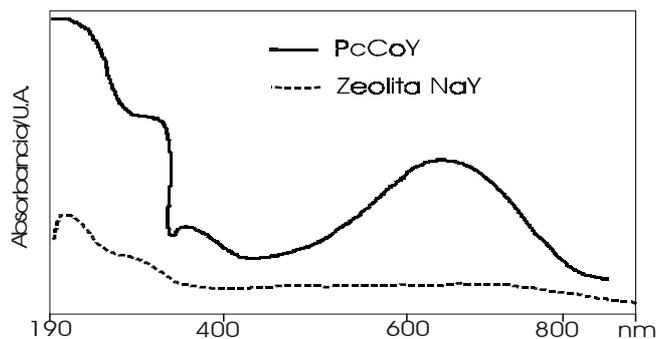


Figura 1. Espectros de reflectancia difusa de la ftalocianina de cobalto encapsulada en la zeolita Y y de la zeolita NaY.

En la tabla 1 se resumen las posiciones de las bandas Soret y Q observadas para los diferentes catalizadores.

Tabla 1. Reflectancia difusa de las bandas Soret y Q de las ftalocianinas encapsuladas.

Sólido	Banda Soret (nm)	Banda Q (nm)
PcCoy	380	650
PcZny	400	610-640
PcCoX	390	620-680
PcZnx	400	630-680

En la figura 2 se presentan los espectros Raman de la ftalocianina de cobalto encapsulada en las zeolitas X e Y. Se observa claramente la presencia de las bandas características de la ftalocianina en la región de $1550 - 1000 \text{ cm}^{-1}$.

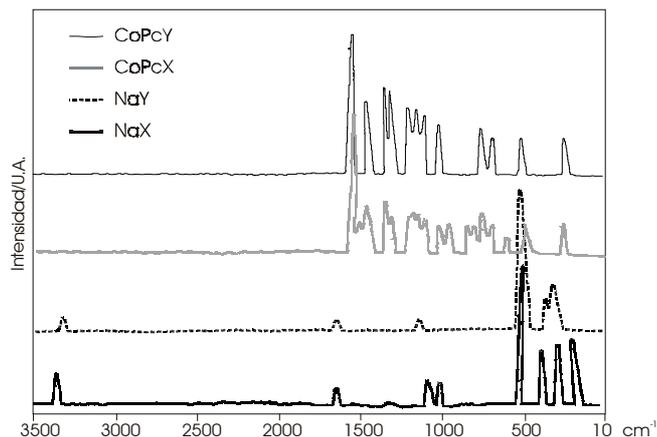


Figura 2. Espectros Raman de la ftalocianina de cobalto encapsulada en zeolitas X e Y.

En contraste, en las zeolitas no aparecen las anteriores mientras que se destacan las bandas características de red zeolítica (Ray *et al.*, 2003).

Cuando se ataca la matriz zeolítica con ácido sulfúrico concentrado, se destruye dicha matriz y se obtiene la ftalocianina disuelta en el ácido. La cantidad de ftalocianina dentro de la zeolita se cuantificó midiendo el espectro UV-Vis de las soluciones ácidas, como se muestra en la figura 3.

Con el objeto de tener en cuenta el efecto de la matriz zeolítica, en la curva de calibración se adicionó una cantidad representativa de la zeolita. En la tabla 2 se presentan las cantidades de ftalocianina encapsuladas en las zeolitas X e Y.

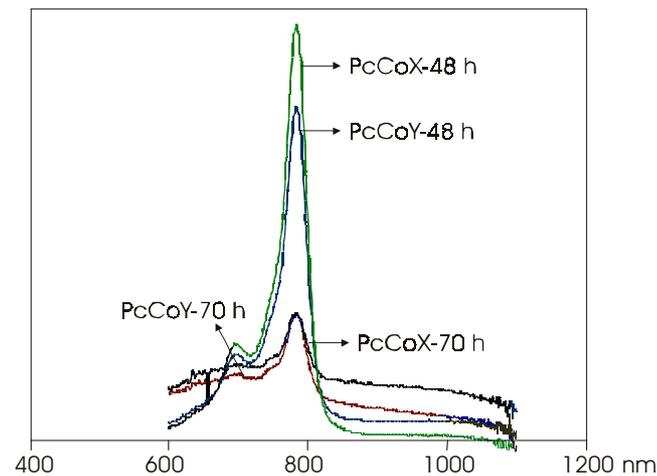


Figura 3. Espectro UV-Vis de PcCo disueltas en ácido sulfúrico después de destruir la matriz zeolítica por ataque del ácido.

Tabla 2. Cantidad de ftalocianina (mol) encapsulada por gramo de zeolita.

Sólido	Cantidad de PcM (mol/g zeolita)
PcCoy	8.63 E-06
PcZny	7.53 E-07
PcCoX	9.11 E-06
PcZnx	9.24 E.07

Dada la mayor basicidad de la zeolita X se empleó este material para estudiar el efecto de los cationes alcalinos. La cuantificación del intercambio catiónico en la zeolita X se realizó por absorción atómica de las muestras obtenidas a 90°C y durante 48 horas de intercambio, se muestran en la Tabla 3. Estas muestras se emplearon para encapsular la ftalocianina metálica.

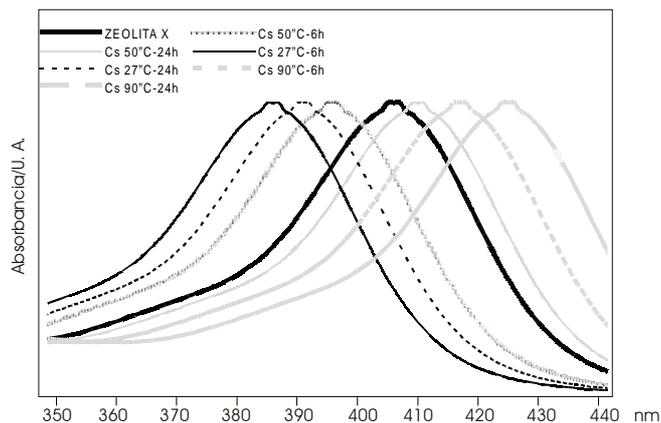
Tabla 3. Cantidad de intercambio catiónico (% de la capacidad de intercambio) obtenido después de 48 horas a 90°C en la zeolita X.

Zeolita	Intercambio (%)
KX	74
CsX	39
MgX	88
BaX	54
CaX	74

Medida de la basicidad en las zeolitas intercambiadas

En la figura 4 se aprecia el corrimiento de la banda del yodo de 407 nm ($\pi \rightarrow \sigma^*$) por efecto del intercambio de iones Cs en la zeolita X, que de acuerdo con Choi (Choi *et al.*, 1996) es un indicativo del aumento de la basicidad de la estructura, como consecuencia del aumento de la densidad electrónica sobre los sitios básicos. Esto se refleja en un incremento de la fuerza donora de carga electrónica de la red y de la fuerza electrostática de la estructura zeolítica.

Se observa un desplazamiento de la banda hacia valores menores y mayores de 407 nm, en función del tiempo y la temperatura de intercambio. Esto refleja la influencia de la posición del metal intercambiado en los diferentes sitios de la zeolita (Mortier *et al.*, 1975). A temperatura ambiente los cationes intercambiados no ocupan los sitios básicos, debido a su tamaño voluminoso por efecto del grado de hidratación (Kovacheva *et al.*, 1997). Al

**Figura 4.** Corrimiento de la banda de absorción del yodo en la zeolita X intercambiada con Cs a diferentes tiempos y temperaturas de reacción.

aumentar la temperatura de intercambio se aprecia el desplazamiento de la banda de absorción del yodo hacia mayores longitudes de onda.

Un comportamiento similar se observó para los diferentes cationes intercambiados. En la tabla 4, para efectos de comparación se muestra la posición de la banda de absorción del yodo, para el intercambio realizado durante 48 horas a 90°C.

Tabla 4. Posición de la banda de absorción del yodo, para los diferentes cationes intercambiados en la zeolita X a 48 horas y 90°C.

Catión	$\lambda_{\mu\text{max}}$ (nm) del I_2
K	415
Cs	429
Mg	400
Ca	395
Ba	394

Se observa que por efecto del intercambio de calcio y de bario la banda de absorción del yodo se desplaza a longitudes de onda menores, indicando que la basicidad es menor que aquella de la zeolita NaX comercial. Dado que estos cationes ocupan sitios (Chandrasekhar *et al.*, 2001; Albert *et al.*, 2000) que no contribuyen significativamente al aumento de la fuerza básica del sólido (Chandrasekhar *et al.*, 2002; Dyer *et al.*, 1985; Tynjälä *et al.*, 1996). En este trabajo se evaluaron los catalizadores obtenidos después del intercambio con Mg, K, Cs, que son los que presentan la mayor fuerza básica.

Actividad catalítica de la PcCo encapsulada en zeolitas X e Y

A partir de ensayos preliminares a nivel de banco de laboratorio: se simuló una gasolina “agria”, disolviendo 250 y 500 ppm de mercaptoetanol en éter de petróleo, el cual se puso en contacto con una contra corriente de oxígeno en presencia del catalizador suspendido en lana de vidrio. Se observó que el contenido de mercaptano se redujo por debajo de 10 ppm en presencia de PcCo encapsulada en zeolita NaY. La oxidación se logró en ausencia de NaOH (Páez *et al.*, 1994).

Por tal motivo se construyó una planta piloto en acero inoxidable y acero carbón con las características típicas del proceso MEROX. En las instalaciones de la refinería de ECOPETROL en Barrancabermeja, Colombia.

Se realizaron corridas con y sin soda y se evaluó la actividad del catalizador PcCoNaY. Se determinó la concentración de mercaptanos en el medio de reacción por titulación potenciométrica con nitrato de plata según el método UOP 163-67. Se encontró que aun en ausencia de soda el catalizador es capaz de realizar la oxidación y la actividad se mantuvo durante por lo menos 24 días de operación continua. En la tabla 5 se indican los resultados obtenidos en planta piloto.

Es interesante notar que el catalizador PcCoNaY, que presenta la basicidad más baja de la serie estudiada, muestra actividad en condiciones de operación que simulan las condiciones de reacción del proceso industrial (Páez *et al.*, 1994). En consecuencia se emprendió el estudio de la variación de la fuerza básica de la zeolita por efecto de la presencia de cationes alcalinos.

En las pruebas de laboratorio de la oxidación catalítica del mercaptoetanol se detectó como único producto el disulfuro. En la tabla 6 se presenta la conversión del 2-mercaptoetanol después de 120 minutos de reacción, disuelto en éter de petróleo en ausencia de NaOH, manteniendo la misma rela-

Tabla 5. Variación de la concentración de mercaptanos, por el tratamiento en planta piloto con y sin NaOH, en presencia de PcCoNaY.

Concentración ppm	Concentración		Concentración NaOH, %w
	inicial	final	
RSH	1116	6	0
H ₂ S	23	0	0
RSH	1143	2.8	6.5
H ₂ S	30	0	6.5

Tabla 6. Conversión de 2-mercaptoetanol después de 120 min de reacción a T y P ambientales con ftalocianina de Co encapsulada en zeolita después del intercambio con diferentes cationes metálicos.

Catalizador*	[PcCo]/Zeolita (molx10 ⁶ /g)	Conversión (%) mercaptano
PcCoXNa	9.1	37
PcCoYNa	8.6	16
PcCoXK	8.2	59
PcCoXCs	7.8	70
PcCoMg	7.8	49

* Los iones metálicos se intercambiaron a 90°C durante 48 horas, excepto el Mg cuya temperatura de intercambio fue de 50°C.

ción mercaptoetanol/ftalocianina usada en el proceso MEROX comercial. Como puede verse la PcCoXNa muestra mayor actividad que la PcCoYNa, como cabe esperarse puesto que la PcCoXNa (Si/Al = 1.2) tiene una mayor fuerza básica que la PcCoYNa (Si/Al = 2.4).

También puede verse que la presencia de los diferentes cationes alcalinos afectan la actividad de la PcCoX. En la tabla 5 se indica la variación de la fuerza básica de los sólidos (corrimiento de la banda de 407 nm) como función de la naturaleza del catión intercambiado. De esta manera se obtienen sólidos con diferente fuerza básica.

En la figura 5 se presenta una correlación entre la actividad (Conversión, %) y la fuerza básica relativa del catalizador. La actividad aumenta al aumentar la fuerza básica del catalizador es decir, hacia mayor corrimiento de la banda de 407 nm, que es el punto de referencia (basicidad de la PcCoXNa).

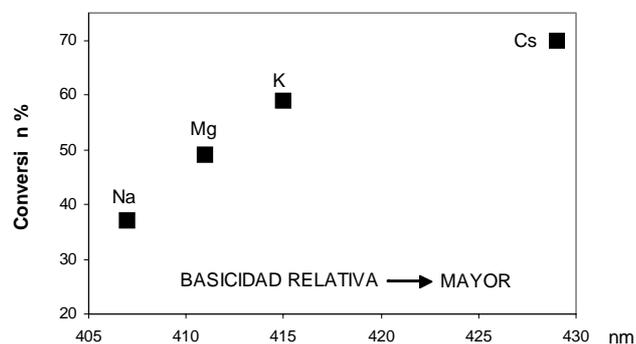


Figura 5. Oxidación de 2-mercaptoetanol (Conversión %) en función de la fuerza básica relativa del catalizador.

Como no existe ningún medio básico externo cabe suponer que la fuerza básica del sólido es suficiente para promover la reacción de oxidación del mercaptano. Esto quiere decir que la fuerza básica del catalizador es suficiente para generar el ión mercapturo, que como se indicó anteriormente es el primer paso para la formación del disulfuro.

Oxidación de propanotiol con Ftalocianina de Co encapsulada en zeolita X e Y

La adsorción de propanotiol es alrededor de un 10% mayor que la de 2-mercaptoetanol, esto puede obedecer a que el grupo SH tiene una acidez mayor que el 2-mercaptoetanol.

La actividad de la PcCoXNa (C=42%) es más del doble que la de PcCoYNa (C=16%). También se observa una correlación de la fuerza básica del catalizador con la actividad oxidativa en el mismo sentido de lo presentado en la tabla 6. Por ejemplo la PcCoXCs, intercambiada durante 24 horas a 50°C, muestra una fuerza básica relativa con $\lambda = 411$ nm, da una conversión del 26%. Cuando el intercambio de Cs se realizó durante 24 horas a 90°C, $\lambda = 426$ nm presenta una conversión del 33%.

Los ensayos de oxidación con la ftalocianina de Zn libre y encapsulada en zeolitas X e Y no mostraron ninguna actividad, en concordancia con algunos autores que observan que en la ftalocianina de Zn, el metal no ofrece sitios libres de coordinación (Iliev *et al.*, 1991). La concentración de la ftalocianina de Zn encapsulada en la zeolita se encontró mucho menor que la de cobalto (10 veces menos). En trabajos realizados en nuestro laboratorio, se ha observado foto actividad de la PcZn soportada en otros sólidos básicos como la hidrotalcita, en la reacción de oxidación de mercaptano (Mendoza *et al.*, en proceso de publicación), con tendencia a formar productos de oxidación avanzada como sulfonatos. La foto oxidación catalítica de mercaptanos con PcZnX está en proceso de desarrollo en nuestro laboratorio con miras a lograr la oxidación avanzada de los mercaptanos.

Conclusiones

Los catalizadores empleados muestran la fuerza básica necesaria para propiciar el proceso de oxidación de los mercaptanos. Se evidencia la posibilidad de modificar la fuerza básica de los catalizadores mediante el intercambio de cationes alcalinos. Se estableció una correlación entre la fuerza básica del sólido con el corrimiento de la longitud de onda de absorción del yodo, lo cual puede permitir establecer una escala relativa de basicidad, que se refleja en la variación de la actividad catalítica. Estas

experiencias muestran que es posible realizar la reacción de oxidación de mercaptanos en gasolina en ausencia de un medio cáustico externo.

Agradecimientos

Gracias a la Dirección de Investigaciones de la Facultad de Ciencias de la Universidad Industrial de Santander por el apoyo financiero, al Laboratorio LACCO de la Université de Poitiers, Francia por la toma de los espectros Raman y a ECOPETROL por financiar la planta piloto.

Bibliografía

- Agnes Z., Ferenc N. 2000. Rate Enhancement of Oxidation Reactions by the Encapsulation of Metal Phthalocyanine Complexes, *Catal. Letter*, **65**: 135-139.
- Albert B. R., Cheetham A. K., A. 2000. Synchrotron X-ray powder diffraction study of highly crystalline low-silica zeolite P during Na-Ca ion exchange, *Microporous and Mesoporous Materials*, **34**(2): 207-211.
- Alcaraz J. J., Arena B. J., Gillespie R. D., Holmgren J. S. 1998. Solid base catalysts for mercaptan oxidation. *Cat. Today*, **43** (1-2): 89-99.
- Balla RJ, Hecklen, J. 1985. Oxidation of sulfur compounds, 5. Rate coefficients for the $\text{CH}_3\text{SH}-\text{NO}_2$, reaction. *J Phys Chem*, **89**: 4596-4600.
- Barthomeuf D. 1984. Conjugate Acid-Base Pairs in Zeolites, *J. Phys. Chem.*, **88**(1): 42-45.
- Basu B. V., Satapathy S., Bhatnagar A. K. 1993. Procesos mercox y oxidación de metales relacionados, catalizados por ftalocianinas, Indian Oil Corporation, Limited Research and Development Center. *Catal. Rev. Sci. Eng.*, **35** (4): 571-609.
- Bricker J. C., Staehle B. E. 1987. US Patent 4705620
- Chandrasekhar S., Pramada P. N. 2001. Sintering behavior of calcium exchanged low silica zeolites synthesized from kaolin, *Ceramics International*, **27**(1): 105-114.
- _____ 2002. Thermal studies of low silica zeolites and their magnesium exchanged forms, *Ceramics International*, **28**(2): 177-186.
- Chatti I., Ghorbel A., Grange P., Colin J. M. 2002. Oxidation of mercaptans in light oil sweetening by cobalt(II) phthalocyanine-hydrotalcite catalysts. *Catal. Today*, **75**,113-117.
- Choi S. Y., Park Y. S., Hong S. B., Yoon K. B. 1996. Iodine as a Visible Probe for the Evaluation of Zeolite Donor Strength, *J. Am. Chem. Soc.*, **118** (39): 9377-9386.
- Daohong X. Jialin Y. S. 1999. Study on the Oxidation Mechanism of Mixed Thiols in Light Oil Sweetening. 3. Apparent Kinetics of the Catalytic Cooxidation of Mixed Thiols in Gas-Liquid-Solid Systems. *Ind. Eng. Chem. Res.*, **38**: 1291-1294.
- _____, Su Y., Qiant J. 1995. Study on the Oxidation Mechanism of Mixed Thiols in Light Oil Sweetening. 1. Kinetics and Mechanism of Homogeneous Catalytic

- Cooxidation of Mixed 2-Methyl-2-propanethiol and Ethanethiol, *Znd. Eng. Chem. Res.*, **34**: 2001-2005.
- Dyer A., Enamy H.** 1985. The sodium-calcium exchange in zeolite A, *Zeolites*, **5**(2): 66-67.
- ILIEV. V. ILEVA A. BILYARSKA L.** 1997. Oxidation and photooxidation of sulfur-containing compounds in the presence of immobilized phthalocyanine complexes, *J. Mol. Catal. A: Chem.* **126**(2-3): 99-108.
- JACOBS P. A., THIBAUT-STARZYK F., VAN PUYMBROECK M., PARTON R.** Thiol-oxidation with zeolite encapsulated phthalocyanines: influence of the solid support. *J. Mol Catal A: Chem.* **109**(1): 75-79
- Kovacheva P., Arishtirova K. Davidova N.** 1997. Effect of preparation of a CsX zeolite catalyst on the oxidative conversion of methane, *Applied Catalysis A: General*, **163**(1-2): 255-260.
- _____ 1997. Characterization of lithium and cesium modified zeolite catalysts in the oxidative conversion of methane, *Applied Catalysis A: General*, **149**(2): 277-287.
- Lafoy C. J.** 1985, US Patent 4562300.
- Leung S. K.** 1987. Cobalt phthalocyanine catalysed autooxidation of mercaptanos, Ph. D. Thesis, Calif Inst. Technol., Pasadena, Calif., U. S.
- Liquornik M., Marcus Y.** 1968. Íon exchange in molten salts. III. The íon-exchange properties of sodium zeolite A in molten sodium nitrate. The exchange with calcium and strontium cations, *J. Phys. Chem.* **72**(13): 4704-4705.
- Litter M. I.** 1999. Heterogeneous photocatalysis: Transition metal ions in photocatalytic systems. *Appl. Catal. B: Environ.*, **23**(2-3): 89-114.
- Mendoza O., Pedraza J., Martínez F., Páez-Mozo E.** Photocatalytic oxidation of 2-mercaptoethanol by metal (II)-tetrasulfophthalocyanines intercalated in hydrotalcite; en proceso de publicación.
- Morales L., Páez Mozo E. A.** 1996. Síntesis de hidrotalcita utilizando tetrasulfoftalocianina metálica y su ensayo en la oxidación de mercaptoetanol. *Actas del IV Simposio Colombiano de Catálisis*, Bucaramanga (Colombia), 203-207.
- Mortier W. J., Pluth, J. J. Smith J. V.** 1975. Positions of catfons and molecules in zeolites with the mordenite-type framework I dehydrated Ca-exchanged ptilolite, *Materials Research Bulletin*, **10**(10): 1037-1045.
- _____. 1975. Positions of catfons and molecules in zeolites with the mordenite-type framework II dehydrated hydrogen-ptilolite, *Materials Research Bulletin*, **10**(12): 1319-1325.
- Paez E., Gabriunas N., Luccaccione D.** 1993. Cobalt Phthalocyanine Encapsulated in Y Zeolite: A Physicochemical Study, *J. Phys. Chem.* **97**(49): 12819-12827.
- _____, **Jaramillo S., Martínez F., Pradilla J.** 1994. Catalizadores complejos de Co encapsulados en zeolitas para oxidación de mercaptanos, XIV Simposio Iberoamericano de Catálisis, septiembre 12-16, Concepción, Chile, *Actas*, 585-590.
- RAY S., VASUDEVAN, S.** 2003. Encapsulation of cobalt phthalocyanine in zeolita Y: Evidence for nonplanar geometry, *Inorganic Chem.*, **42**: 1711-1719.
- Ross R. A., Sood S. P.** 1977. Catalytic Oxidation of Methyl Mercaptan over Cobalt Molybdate, *Ind. Eng. Chem., Prod. Res. Dev.*, **16**(2): 147-150.
- Sherry H. S.** 1966. Barium Íon Exchange of the Synthetic Zeolite Linde 4-A, *J. Phys. Chem.* **70**(4): 1332-1334.
- Tanabe K.** 1985. *Catálisis by Acids and Bases*, Elseiver, Ámsterdam, 1.
- _____, **Yamaguchi T.** 1968. Solid Bases and their Catalytic Activity, *J. Res. Inst. Catalysis, Hokkaido, Univ.*, **16**(1): 425-447.
- Tynjälä P., Pakkanen T.** 1996. Acidic properties of ZSM-5 zeolite modified with Ba²⁺, Al³⁺ and La³⁺ íon-exchange, *Journal of Molecular Catalysis A: Chemical*, **110**(2): 153-161.
- Wallace T. J., Alanschriesheim H., Marvin B.** 1964. Base-catalyzed oxidation of mercaptans in the presence of inorganic transition metal complexes, I & EC Process Design and Development, **3**(3): 237-241.

Recibido el 5 de mayo de 2006

Aceptado para su publicación el 3 de octubre de 2006

NUEVOS REGISTROS DE ESCARABAJOS COPRÓFAGOS (SCARABAEIDAE: SCARABAEINAE) PARA LA REGIÓN ANDINA DE COLOMBIA. PARTE I

por

Luz Astrid Pulido Herrera¹, Claudia Alejandra Medina² & Raúl Antonio Riveros³

Resumen

Pulido Herrera, L. A., C.A. Medina & R.A. Riveros: Nuevos registros de escarabajos coprófagos (Scarabaeidae: scarabaeinae) para la región andina de Colombia. Rev. Acad. Colomb. Cienc. **31** (119): 305-310, 2007. ISSN 0370-3908.

Se presenta el listado actualizado de las especies de escarabajos coprófagos Scarabaeinae de la región andina de Colombia. Incluye los resultados de los Archivos de Autoridad Taxonómica (AAT) y registros de especies nuevas provenientes de la revisión de la colección del Instituto de Investigación de Recursos Biológicos Alexander von Humboldt (IAvH) y resultados de trabajos de investigación de los autores. Se incluyen además nuevas sinonimias para las especies de la región andina. La evaluación del estado del conocimiento taxonómico del grupo desde el artículo publicado por Medina et al. (2001) es discutida.

Palabras clave: Escarabajos coprófagos, Scarabaeinae, Colombia, Andes, nuevos registros.

Abstract

The updated list of species of dung beetles Scarabaeinae for the Andean region of Colombia is presented in this paper. As a result of Taxonomic Authority Files (AAT) and new reports from Alexander von Humboldt Institute insect's collection and other author's research are included. New synonyms of the Andean region are also included. An evaluation of the current taxonomic knowledge of that group since Medina et al. (2001) paper was published.

Key words: Dung beetles, Scarabaeinae, Colombia, Andean region, new register.

1 Maestría, Manejo y Conservación de Bosques Tropicales y Conservación. Centro Agronómico Tropical de Investigación y Enseñanza (CATIE). Correo electrónico: apulido@catie.ac.cr

2 Investigadora Asociada, Grupo GEA, Correo electrónico: Universidad del Cauca. Correo electrónico: clmedina@unicauca.edu.co

3 Instituto de Investigación de Recursos Biológicos, Alexander von Humboldt Correo electrónico: ariveros@humboldt.org.co

Introducción

Los escarabajos coprófagos de la subfamilia Scarabaeinae han adquirido interés en diferentes campos de la investigación biológica en Colombia. Son utilizados como herramienta y grupo focal en caracterizaciones biológicas, evaluaciones ecológicas rápidas y monitoreo de la biodiversidad, no sólo han despertado interés entre entomólogos, sino que se han convertido en herramienta en cursos que implementan variados ejercicios sobre metodologías de muestreo, y estimativos de diversidad (Halfpter & Favila, 1993; Favila & Halfpter, 1997; Villarreal *et al.*, 2004) Estos trabajos han generado bases de datos que facilitan el análisis e interpretación de la información sobre biodiversidad.

Para asegurar la estandarización de los nombres de los taxones ingresados a estas bases, el Sistema de Información sobre Biodiversidad del Instituto de Investigación de Recursos Biológicos Alexander von Humboldt (IAvH), está promoviendo la elaboración y documentación de AAT. Estos archivos son catálogos taxonómicos que comprenden toda la información nomenclatural para un determinado grupo de organismos. Estos archivos son por definición la referencia más actualizada de los organismos presentes en Colombia por lo cual se constituyen en un banco de datos taxonómicos que contribuye a la conformación del Inventario Nacional de la Biodiversidad.

La región andina de Colombia, contiene el 24.52% del territorio nacional, se extiende desde la serranía de Perijá, hasta el denominado Nudo de los Pastos, en el límite con el Ecuador (Rodríguez *et al.*, 2004). Dada su compleja historia geomorfológica, clima, suelos, y ubicación geográfica, esta región presenta un complejo mosaico de ecosistemas que han dado origen a un amplio conjunto de formaciones vegetales, representadas en paramos, bosques andinos y sub-andinos con algunos enclaves de bosque seco. Mittermeier *et al.*, (1999) y Rodríguez *et al.*, (2004), estiman que dentro de los Andes se presentan un gran número de hábitats y ecotonos que permiten la presencia, en escalas relativamente pequeñas, de grupos taxonómicos específicos y altos números de especies con rangos de distribución que están restringidos a elevaciones delimitadas. La región andina colombiana ha recibido una alta presión en sus ecosistemas naturales debido a la alta densidad de población. Se estima que en la parte Norte de los andes colombianos solo queda un 25 % del bosque tropical original (Armenteras *et al.*, 2003). Esta región es actualmente considerada como prioritaria en el listado global de áreas de conservación principalmente por su riqueza biológica y alto nivel de endemismo (Olson & Dinerstein 1997, Mittermeier *et al.*, 1999).

Se conocen aproximadamente 6000 especies y 234 géneros de escarabajos coprófagos (Scarabaeinae) en el mundo (Halfpter, 1991). Gran parte de esta fauna se encuentra distribuida en la zona tropical con cerca de 1300 especies y alrededor de 70 géneros. Para Colombia se conocen 283 especies y 35 géneros (Medina *et al.*, 2001). Con la presente revisión se actualiza el listado para la región Andina de Colombia. Se registran seis tribus, 20 géneros (Cuadro 1) con 129 especies descritas (Cuadro 2), 17 especies más de las reportadas en Medina *et al.* (2001). Se presenta el registro de cuatro nuevas especies (Cuadro 3), el primer registro de *Dichotomius riberoi* para Colombia (Cuadro 3); la ampliación del rango de distribución en Colombia de las especies *Sylvicanthon bridarollii*, *Sylvicanthon candezei*, *Dichotomius mamilatus* y *Dichotomius worontzowi*; (Cuadro 2); se excluye a *Onthophagus caucanus* de la lista de los Andes, ya que de acuerdo a Génier (2003) se trataría de la especie africana *Onthophagus rufaticollis* d'Orbigny, 1904

Cuadro 1. Géneros de escarabajos coprófagos de la subfamilia Scarabaeinae de la región andina colombiana.

Tribu-Género	Número de especies	Especies sin describir
Scarabaeinae		
Onthophagini		
<i>Onthophagus</i> Latreille, 1802	17	3
Dichotomiini		
<i>Anomiopus</i> Westwood, 1842	1	1
<i>Bdelyrus</i> Harold, 1869	3	-
<i>Canthidium</i> Erichson, 1847	7	29
<i>Dichotomius</i> Hope, 1838	15	-
<i>Ontherus</i> Erichson, 1847	12	-
<i>Oruscatus</i> Bates, 1870	1	-
<i>Pedaridium</i> Harold, 1868	1	-
<i>Scatimus</i> Erichson, 1847	2	-
<i>Uroxys</i> Westwood, 1842	10	16
Coprini		
<i>Coprins</i> Muller, 1764	2	-
Phanaeini		
<i>Coprophaneus</i> Olsoufieff, 1924	1	-
<i>Oxysternon</i> Laporte-Castelnau, 1840	2	-
<i>Phanaeus</i> Macleay, 1819	6	-
<i>Sulcophaneus</i> Olsoufieff, 1924	4	-
Eurysternini		
<i>Eurysternus</i> Dalman, 1824	6	-
Canthonini		
<i>Canthon</i> Hoffmannsegg, 1817	17	-
<i>Cryptocanthon</i> Balthasar, 1942	6	2
<i>Deltachilum</i> Eschscholtz, 1822	11	13
<i>Malagoniella</i> Martínez, 1948	1	-
<i>Scybalocanthon</i> Martínez, 1948	2	1
<i>Sylvicanthon</i> Halfpter y Martínez 1977	2	-
Total	129	65

Cuadro 2. Lista de especies de escarabajos coprófagos Scarabaeinae de la región andina colombiana. Las especies con asterisco (*) son nuevas o ampliaron su distribución hacia los andes colombianos.

Taxón	Taxón
<i>Onthophagus acuminatus</i> Harold, 1880	<i>Uroxys elongatus</i> Harold, 1868
<i>Onthophagus belorhinus</i> Bates, 1887	<i>Uroxys gorgon</i> Arrow, 1931
<i>Onthophagus clypeatus</i> Blanchard, 1843	<i>Uroxys nebulinus</i> Howden y Gill, 1987
<i>Onthophagus coscineus</i> Bates, 1887	<i>Uroxys pauliani</i> Balthasar, 1940
<i>Onthophagus colombianus</i> Boucomont, 1932	<i>Copris incertus</i> Say, 1835
<i>Onthophagus curvicornis</i> Latreille, 1811	<i>Copris laeviceps</i> Harold, 1869
<i>Onthophagus dicranus</i> Bates, 1887	<i>Coprohanaeus telamon</i> (Erichson, 1847)
<i>Onthophagus haematopus</i> Harold, 1875	<i>Oxysternon conspicillatum</i> (Weber, 1801)
<i>Onthophagus landoltii</i> Harold, 1880	<i>Oxysternon silenus</i> (Castelnau, 1840)
<i>Onthophagus lebasi</i> Boucomont, 1932	<i>Phanaeus chalcomelas</i> (Perty, 1830)
<i>Onthophagus marginicollis</i> Harold, 1880	<i>Phanaeus haroldi</i> Kirsch, 1871
<i>Onthophagus mirabilis</i> Bates, 1887	<i>Phanaeus hermes</i> Harold, 1868
<i>Onthophagus nabeleki</i> Guérin Méneville, 1855	<i>Phanaeus meleagris</i> Blanchard, 1843
<i>Onthophagus nasutus</i> Guérin Méneville, 1855	<i>Phanaeus prasinus</i> Harold, 1868
<i>Onthophagus nyctopus</i> Bates, 1887	<i>Phanaeus pyrois</i> Bates, 1887
<i>Onthophagus sharpi</i> Harold, 1875	<i>Sulcophanaeus auricollis</i> (Harold, 1880)
<i>Onthophagus steinheili</i> (Harold, 1875)	<i>Sulcophanaeus noctis</i> (Bates, 1887)
<i>Anomiopus panamensis</i> (Paulian, 1939)	<i>Sulcophanaeus steinheili</i> (Harold, 1875)
<i>Bdelyrus gilli</i> Cook 1998	<i>Sulcophanaeus velutinus</i> (Murray, 1856)
<i>Bdelyrus laplanadae</i> Cook 1998	<i>Eurysternus caribaeus</i> (Herbst, 1789)
<i>Bdelyrus seminudus</i> (Bates, 1887)	<i>Eurysternus foedus</i> Guérin Méneville, 1844
<i>Canthidium angusticeps</i> Bates, 1887	<i>Eurysternus hamaticollis</i> Balthasar, 1939
<i>Canthidium aurifex</i> Bates, 1887	<i>Eurysternus marmoreus</i> Castelnau, 1840
<i>Canthidium centrale</i> Boucomont, 1928	<i>Eurysternus mexicanus</i> Harold, 1869
<i>Canthidium cupreum</i> (Blanchard, 1843)	<i>Eurysternus plebejus</i> Harold, 1880
<i>Canthidium haroldi</i> Preudhomme, 1886	<i>Canthon aberrans</i> (Harold, 1868)
<i>Canthidium lebasi</i> Harold, 1867	<i>Canthon acutus</i> Harold, 1868
<i>Canthidium stenheili</i> Harold, 1880	<i>Canthon aequinoctialis</i> Harold, 1868
<i>Dichotomius achamas</i> (Harold, 1867)	<i>Canthon angustatus</i> Harold, 1868
<i>Dichotomius adrastus</i> (Harold, 1875)	<i>Canthon columbianus</i> Schmidt, 1921
<i>Dichotomius belus</i> (Harold, 1880)	<i>Canthon cyanellus sallei</i> Harold, 1863
<i>Dichotomius boreus</i> (Olivier, 1789)	<i>Canthon gutierrezii</i> Martínez
<i>Dichotomius compressicollis</i> (Luederwaldt, 1929)	<i>Canthon helleri</i> Schmidt
<i>Dichotomius divergens</i> (Luederwaldt, 1923)	<i>Canthon juvenicus</i> Harold, 1868
<i>Dichotomius horridus</i> (Felsche, 1911)	<i>Canthon lituratus</i> (Germar, 1813)
<i>Dichotomius mamillatus</i> (Felsche, 1901)*	<i>Canthon luteicollis</i> (Erichson, 1847)
<i>Dichotomius nisus</i> (Oliver, 1789)	<i>Canthon morsei</i> Howden, 1966
<i>Dichotomius protectus</i> (Harold, 1867)	<i>Canthon pallidus</i> Schmidt, 1922
<i>Dichotomius quinquedens</i> (Felsche, 1910)	<i>Canthon plagiatum</i> Harold, 1880
<i>Dichotomius quinquelobatus</i> (Felsche, 1901)	<i>Canthon politus</i> Harold, 1868
<i>Dichotomius satanas</i> (Harold, 1867)	<i>Canthon septemmaculatus septemmaculatus</i> (Latreille, 1811)
<i>Dichotomius worontzowi</i> (Pereira, 1942)*	<i>Canthon subhyalinus</i> Harold, 1867
<i>Dichotomius riberói</i> (Pereira, 1954)*	<i>Cryptocanthon altus</i> Howden, 1976
<i>Ontherus alexis</i> (Blanchard, 1845)	<i>Cryptocanthon escobari</i> Cook, 2002*
<i>Ontherus appendiculatus</i> Mannerheim, 1829	<i>Cryptocanthon foveatus</i> Cook, 2002*
<i>Ontherus brevicollis</i> Kirsch, 1871	<i>Cryptocanthon humidus</i> Howden, 1972
<i>Ontherus brevipennis</i> Harold, 1867	<i>Cryptocanthon medinae</i> Cook, 2002*
<i>Ontherus compresicornis</i> Luederwaldt, 1931	<i>Cryptocanthon parvus</i> Howden, 1972
<i>Ontherus incisus</i> (Kirsch, 1871)	<i>Deltochilum gibbosum panamensis</i> Howden, 1966
<i>Ontherus kirschii</i> Harold, 1867	<i>Deltochilum hypponum</i> Buquet, 1844
<i>Ontherus lichyi</i> Martínez, 1947	<i>Deltochilum mexicanum</i> Burmeister, 1848
<i>Ontherus lunicollis</i> Génier, 1996	<i>Deltochilum orbiculare</i> Lansberge, 1874
<i>Ontherus pilatus</i> Génier 1996	<i>Deltochilum orbigny</i> (Blanchard, 1843)
<i>Ontherus pubens</i> Génier, 1996	<i>Deltochilum parile</i> Bates, 1887
<i>Ontherus trituberculatus</i> Balthasar, 1938	<i>Deltochilum pseudoparile</i> Paulian, 1938
<i>Pedaridium medinae</i> Gill & Vaz- de - Mello, 2002*	<i>Deltochilum spectiosissimum</i> Balthasar, 1939
<i>Scatimus fernandezii</i> Martínez, 1988	<i>Deltochilum spinipes</i> Paulian, 1938
<i>Scatimus strandi</i> Balthasar, 1939	<i>Deltochilum tessellatum</i> Bates, 1870
<i>Uroxys brachialis</i> Arrow, 1931	<i>Deltochilum valgum</i> Bates, 1887
<i>Uroxys caucanus</i> Arrow, 1931	<i>Malagoniella asyanax</i> (Oliver, 1789)
<i>Uroxys coarctatus</i> Harold, 1867	<i>Scybalocanthon kelleri</i> Pereira y Martínez, 1956
<i>Uroxys corniculatus</i> Harold, 1880	<i>Scybalocanthon trimaculatus</i> (Schmidt, 1922)
<i>Uroxys cuprescens</i> Westwood, 1842	<i>Sylvicanthon bridarollii</i> Martínez, 1949 *
<i>Uroxys depressifrons</i> Howden y Young, 1981	<i>Sylvicanthon candezei</i> (Harold, 1869) *

Cuadro 3. Registros nuevos de especies de escarabajos coprófagos de la región andina colombiana. **by:** Boyacá; **cun:** Cundinamarca; **ns:** Norte de Santander; **qu:** Quindío; **ri:** Risaralda y **vc:** Valle del Cauca.

Taxón	Distribución	Observaciones
<i>Dichotomius riberoi</i> (Pereira, 1954)	ns	Colectada en Norte de Santander en el 2002, primer reporte para el país. Los ejemplares se encuentran en la colección entomológica del IAvH.
<i>Pedaridium medinae</i> Gill & Vaz-de -Mello, 2002	ri, qu	Especie nueva para la ciencia, la descripción de esta especie se realizó sobre un ejemplar colectado en la Reserva Ucumari, Risaralda.
<i>Cryptocanthon escobari</i> Cook, 2002	by	Especie nueva para Colombia, colectada en Boyacá, en el marco del proyecto Vertiente oriental de la cordillera oriental del IAvH Instituto Humboldt. El paratipo de esta especie se encuentra en el Canadian Museum of Nature, Canada.
<i>Cryptocanthon foveatus</i> Cook, 2002	cun	Especie nueva para Colombia, colectada en Cundinamarca, en el marco del proyecto Vertiente Oriental de la Cordillera Oriental del Instituto Humboldt. paratipos de esta especie se encuentran en la colección del IAvH, Villa de Leyva, Boyacá y en el Canadian Museum of Nature, Canada.
<i>Cryptocanthon medinae</i> Cook, 2002	vc	Especie nueva para Colombia, colectada en el en los Farallones de Cali Valle del Cauca. El paratipo se encuentra en la colección del IAvH en Villa de Leyva, Boyacá.

(Génier 2003; Pulido & Zunino datos sin publicar); y por último se presentan sinonimias de las especies *Sulcophanaeus noctis*, *Deltochilum speciosissimum* y *Oxysternon silenus* (Cuadro 4). De acuerdo a esta revisión se establece a la región Andina como la más rica en especies de Scarabaeinae en Colombia. Es de resaltar que solo en la región Andina se incremento el número de especies en 17 mas 65 especies por describir para un total de especies en 194.

En 2001 Medina *et al.*, publicaron el listado de especies de escarabajos coprófagos (Scarabaeidae: Scarabaeinae) para Colombia; posteriormente se han realizado investigaciones sobre este grupo de coleópteros para el neotrópico y Colombia destacándose los trabajos en conservación, biodiversidad, monitoreo, y caracterizaciones biológicas (Corpoamazonia 2002; GEMA 2002, 2006; Pulido *et al.*, 2003; Mota & Loaiza 2004, García & Ospino 2005, Esparza, 2006), mientras que a nivel

Cuadro 4. Sinonimias de las especies de Scarabaeinae de la Región Andina Colombiana.

Taxón	Estado	Referencia
<i>Sulcophanaeus noctis</i> (Bates, 1887)	Válido	Edmonds W. D. 2000
<i>Sulcophanaeus cupricollis</i> (Nevinson, 1891)	Sinónimo	Edmonds W. D. 2000
<i>Deltochilum speciosissimum</i> Balthasar, 1939	Válido	Génier, F. 2001
<i>Deltochilum aequinoctiale</i> (Buquet, 1844)	Sinónimo	Génier, F. 2001
<i>Oxysternon silenus</i> Laporte, 1840	Válido	Edmonds W. D. 2004
<i>Oxysternon smaragdinum</i> Olsoufieff, 1924	Sinónimo	Edmonds W. D. 2004
<i>Oxysternon zikani</i> Pereira, 1943	Sinónimo	Pereira, F.S. 1953 - Edmonds W.D. 2004

taxonómico y sistemático el esfuerzo ha sido menor, presentándose solamente la revisión de los Phanaeini de Colombia (Vítolo, 2000). En Otros trabajos se han descrito especies Colombianas como en el caso de *Cryptocanthon* (Cook, 2002) y *Pedaridium* (Gill & Vaz de Mello, 2002).

Es evidente la necesidad de ampliar el trabajo taxonómico con este grupo de insectos. A medida que la cobertura de muestreo del país aumenta también se incrementa, el número de especies nuevas para el país y la ciencia. En la revisión de la colección de Scarabaeinae del IAvH (Medina & Pulido datos sin publicar) se encontraron géneros de Scarabaeinae con altos números de especies todavía no descritas. En géneros como *Canthidium* 28 morfo-especies fueron reconocidas de las cuales una se comparte con Orinoquia y Amazonia, mientras que en *Deltochilum* (17 especies), *Uroxys* (10 especies) y *Scybalocanthon* (2 especies) nuevas fueron encontradas (Cuadro 1). De acuerdo a este trabajo, en Colombia, un total de 65 especies de escarabajos coprófagos nuevas para la ciencia quedan por describir.

Agradecimientos

A Diana Montañés por la colaboración prestada en la digitalización de información para el archivo de autoridad taxonómica de este grupo. Al IAvH y a su programa de becas ABC del proyecto Atlas de la Biodiversidad de Colombia por la financiación de parte de este trabajo. El IAvH facilitó la pasantía de Claudia A. Medina para la revisión de la colección de Scarabaeinae del Instituto. A Enrique Castillo por la colaboración prestada a Claudia A. Medina durante la revisión de la colección entomológica del IAvH. A Diego Trujillo, Daniel Dávila, Alejandro Lopera, Fernando Vaz de Mello, François Génier, y W. David Edmonds, por sus valiosos aportes tanto de bibliografía como de correcciones con respecto a la subfamilia. Agradecemos a Mario Zunino por sus correcciones al manuscrito.

Bibliografía

- Armenteras, D., F. Gast, & H. Villarreal. 2003. Andean forest fragmentation and the representativeness of protected natural areas in the Eastern Andes, Colombia. *Biological Conservation* (113): 245-256.
- Cook, J. 2002. A revision of the neotropical genus *Cryptocanthon* Balhasar (Coleoptera: Scarabaeidae: Scarabaeinae) *Coleopterists Society Monograph*.(1):1-96.
- Coorpoamazonía. 2002. Plan de ordenamiento y manejo ambiental del corredor biológico Serranía de los Churumbelos - Cueva de los Guacharos y su área de influencia en los departamentos de Putumayo, Caquetá y Cauca. Caracterización Biológica Escarabajos coprófagos (Coleoptera: Scarabaeidae: Scarabaeinae).
- Edmonds, W.D. 2000 Revision of the Neotropical dung beetle genus *Sulcophanaeus* (Coleoptera: Scarabaeidae: Scarabaeinae). *Folia Heyrovskyana, Supplementum* (6): 1-60.
- _____. 2004. Revision of the Neotropical dung beetle genus *Oxysternon* (Coleoptera: Scarabaeidae: Scarabaeinae: Phanaeini) *Folia Heyrovskyana, Supplementum* (11): 58.
- Esparza, A.C. 2006. Composición y riqueza de escarabajos coprófagos (coleoptera: scarabaeidae: scarabaeinae) en un gradiente altitudinal de selva húmeda tropical del parque nacional natural Catatumbo Barí (Norte de Santander, Colombia). Tesis de grado, Universidad Industrial de Santander. 50 p.
- Favila, M.E. & G. Halffter. 1997. The use of indicator groups for measuring biodiversity as related to community structure and function. *Acta Zoologica Mexicana*, (72): 1-25.
- Halffter, G. & M. E. Favila 1993. The Scarabaeinae (Insecta: Coleoptera), an animal group for analyzing, inventorying and monitoring biodiversity in tropical rainforest and modified landscapes. *Biology International*, (27): 15-21.
- García, H. & D. Ospino. 2005. Escarabajos coprófagos (Coleoptera: Scarabaeidae) en un Gradiente altitudinal en la Vertiente Noroccidental, Sierra Nevada de Santa Marta. Tesis de pregrado, Universidad del Magdalena. 103 p.
- GEMA, 2002. Caracterización biológica de la región de Sisavita, municipio de Cucutilla, Norte de Santander. Informe presentado a la Corporación Autónoma regional del Norte de Santander. Instituto de Investigación de Recursos Biológicos, Alexander von Humboldt. Villa de Leyva, Colombia. 46 p.
- _____. 2006. Caracterización de la Biodiversidad del corredor Biológico entre PNN Puracé y Cueva de los Guacharos (Huila, Colombia). Instituto de Investigación de Recursos Biológicos, Alexander von Humboldt. Villa de Leyva, Colombia.
- Génier, F. 2001. Note sur les espèces de *Deltochilum* Eschscholtz décrites en 1939 par V. Balthasar (Coleoptera: Scarabaeidae, Scarabaeinae). *Faberies* 26(1) Junio.
- _____. 2003. Onthophagini présumés néotropicaux: provenances erronées et nouvelle synonymie (Coleoptera: Scarabaeidae, Scarabaeinae). *Faberies*, 28 (2).
- Gill, B.D. & Vaz de Mello F. 2002. An unusual new species of *Pedaridium* Harold, 868 (Coleoptera: Scarabaeidae: Ateuchini) from Colombia. *Journal OfThe Entomological Society of Ontario* (133): 47-51.
- Halffter, G. 1991. Historical an ecological factors determining the geographical distribution of beetles (Coleoptera: Scarabaeidae: Scarabaeinae). *Folia Entomológica Mexicana*. (82): 195-238.
- Medina, C., A. Lopera-Toro., A. Vítolo. & B. Gill. 2001. Escarabajos Coprófagos (Coleoptera: Scarabaeidae: Scarabaeinae) de Colombia. *Biota Colombiana* 2 (2): 131-144.
- Mittermeier, R.A., Myers, N. & C.G. Mittermeier. 1999. Biodiversidad amenazada. Las ecorregiones Terrestres Prioritarias del Mundo. CEMEX & CONSERVATION INTERNATIONAL. 430 p.

- Motta, L. & Y. Loaiza.** 2004. Capacidad bioindicadora de escarabajos coprófagos en fragmentos de bosque y pastoreo Caquetá Colombia. Tesis de grado. Universidad de la Amazonia, Caquetá, Colombia. 55 p.
- Olson, D.N. & Dinerstein, E.** 1997. Global 2000: Conserving the World's distinctive eco regions. WWF-US, USA.
- Pereira, F. S.** 1953. Notas Sinonímicas. *Dusenía* (4): 387-402.
- Pulido, L. A., R. Riveros., F. Gast. & P. Hildebrand.** 2003. Escarabajos coprófagos (Coleoptera: Scarabaeidae: Scarabaeinae) del Parque Nacional Natural "Serranía de Chiribiquete", Caquetá, Colombia (Parte I). En *Escarabeidos de Latinoamérica: estado del conocimiento*. G. Onore, P. Reyes-Castillo & M. Zunino (comps.). m3m: Monografías Tercer Milenio vol. 3, SEA, Zaragoza: 51-58.
- Rodríguez, N., D. Armenteras, M. Morales & M. Romero.** 2004. Ecosistemas de los Andes Colombianos. Instituto de Investigación de Recursos Biológicos Alexander von Humboldt, Colombia. 155 p.
- Villarreal, H., M. Álvarez., S. Córdoba, F. Escobar, G. Fagua, F. Gast, H. Mendoza, M. Ospina, & A. M. Umaña.** 2004. Manual de métodos para el desarrollo de inventarios de biodiversidad. Programa inventarios de Biodiversidad. Instituto de Investigación de Recursos Biológicos Alexander von Humboldt. Bogotá, Colombia. 236 p.
- Vitolo, A.** 2000. Clave para la identificación de los géneros y especies de Phanaeinas (Coleoptera: Scarabaeidae: Coprinae: Phanaeini) de Colombia. *Revista de la Academia Colombiana de Ciencias Exactas Físicas y Naturales*, 24 (93): 591-603.

Recibido el 18 de octubre de 2006.

Aceptado para su publicación el 17 de mayo de 2007.