

# REVISTA DE LA ACADEMIA COLOMBIANA de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales

LA ACADEMIA ES ÓRGANO CONSULTIVO DEL GOBIERNO NACIONAL

VOLUMEN XXX

DICIEMBRE DE 2006

NÚMERO 117

DIRECTOR DE LA REVISTA: PEDRO PRIETO



## CONTENIDO - CONTENTS

	Pág.		Pág.
<b>Botánica (Botany)</b>		- Homogenized Polynomials and Curves with many points [Polinomios homogeneizados y curvas con muchos puntos] <i>Alvaro Garzón</i> .....	551
- Clave para la identificación de las especies del género <i>Diplostegium</i> (Asteraceae, Astereae) en Colombia [Key to identify the <i>Diplostegium</i> (Asteraceae, Astereae) species in Colombia]		- Polinomios ortogonales no estándar. Aplicaciones en análisis numérico y teoría de aproximación [Non-standard orthogonal polynomials. Applications to numerical analysis and approximation theory]	
<i>Oscar M. Vargas &amp; Santiago Madriñán</i> .....	489	<i>Francisco Marcellán</i> .....	563
<b>Ciencias de la Tierra (Earth Sciences)</b>		<b>Química (Chemistry)</b>	
- Vulcanismo Cenozoico en la Sabana de Bogotá [Cenozoic vulcanism in the Sabana de Bogotá]		- Uso del SiO <sub>2</sub> obtenido de la cascarilla de arroz en la síntesis de silicatos de calcio [Use of SiO <sub>2</sub> obtained from rice husk in the synthesis of calcium silicates]	
<i>Jaime Galvis, Ricardo de la Espriella &amp; Ricardo Cortés Delvalle</i> .....	495	<i>L. M. Ahumada &amp; J. E. Rodríguez-Páez</i> .....	581
- <i>Eulophoceras jacobi</i> Hourcq y palinomorfos asociados del coniaciano temprano, formación Loma Gorda, Quebrada Bambucá (Aipe-Huila-Colombia, S.A.) [Eulophoceras jacobi Hourcq and palinomorphous associated with the early coniaciano, Loma Gorda formation, Quebrada Bambucá (Aipe-Huila-Colombia, S.A.)]		- Desarrollo de una biocerámica biomimética para uso específico en odontología [Development of a bio-mimetic bio-ceramic for dental use]	
<i>Pedro Patarroyo &amp; Hernando Dueñas</i> .....	503	<i>Claudia I. Guevara, Gloria de Pérez, Martha L. Calle &amp; Edgar Delgado</i> .....	595
<b>Física (Physics)</b>		<b>Notas (Notes)</b>	
- Síntesis y caracterización de perovskitas dobles tipo Sr <sub>2</sub> FeMoO <sub>6</sub> [Synthesis and characterization of double perovskites of the Sr <sub>2</sub> FeMoO <sub>6</sub> type]		- El impacto de la producción bibliográfica de nuevo conocimiento en ciencia, tecnología e innovación en Colombia de 1996 al 2005 [The impact of bibliographic production of new knowledge in science, technology, and innovation in Colombia from 1996 to 2005]	
<i>K. López &amp; A. Mariño</i> .....	511	<i>Liliana Castro, Álvaro Montenegro, Javier Rodríguez, Camilo Torres, Doris Velásquez, Lina Franco, Mauricio Arias y Felipe García Vallejo</i> .....	605
- Comparación de los tratamientos en radioterapia convencional y conformal para cáncer de próstata por medio de dosimetría termoluminiscente [Comparison between conventional and conformal radiotherapy treatments for prostate cancer using thermoluminescent dosimetry]		- Redescubrimiento y ampliación del área de distribución de <i>Bolitoglossa capitana</i> (Caudata: Plethodontidae), especie endémica y amenazada de Colombia [Rediscovery and broadening of the area of distribution of <i>Bolitoglossa capitana</i> (Caudata: Plethodontidae), endemic and threatened species in Colombia]	
<i>L. Mahecha, M. C. Plazas, H. Machado &amp; S. Perea</i> .....	517	<i>Giovanni Chaves-Portilla, Oswaldo Cortés Herrera &amp; Jorge Morales-Sánchez</i> .....	615
<b>Genética (Genetics)</b>		- Caracterización temporal de la lluvia de semillas en un bosque nublado del Cerro de Mamapacha (Boyacá - Colombia) [Temporal characterization of seed fall in a fog forest in Mount Mamapacha (Boyacá, Colombia)]	
- Estado Actual, consideraciones éticas y perspectivas de la terapia génica en errores innatos del metabolismo [Current state, ethical considerations and perspectives of gene therapy in innate metabolic errors]		<i>Maria F. Rodríguez, Johanna M. Puentes &amp; Francisco Cortés</i> .....	619
<i>Carlos J. Alméciga, Homero Sáenz &amp; Luis A. Barrera</i> .....	525	<b>Índice general del Volumen XXX, año 2006</b> [General Index of volume XXX, year 2006].....	625
<b>Matemáticas (Mathematics)</b>		<b>Índice de autores (Index of Authors)</b> .....	628
- Permutation polynomials in one indeterminate over modular algebras [Polinomios de permutación en una indeterminada sobre álgebras modulares]		<b>Constitución de la Academia</b> (Members of the Academy).....	630
<i>Pablo A. Acosta-Solarte &amp; Víctor Albis</i> .....	541	<b>Publicaciones de la Academia</b> (Publications of the Academy).....	632
- A two-stage estimator of individual regression coefficients in multivariate linear growth curve models [Un estimador en dos etapas de modelos lineales de curvas multivariadas de crecimiento]			
<i>Gabriela Beganu</i> .....	549		

# CLAVE PARA LA IDENTIFICACIÓN DE LAS ESPECIES DEL GÉNERO *DIPLOSTEPHIUM* (ASTERACEAE, ASTEREAEE) EN COLOMBIA

por

Oscar Mauricio Vargas<sup>1, 2</sup> & Santiago Madriñán<sup>1, 3</sup>

## Resumen

**Vargas, O. M. & S. Madriñán:** Clave para la identificación de las especies del género *Diplostephium* (Asteraceae, Astereae) en Colombia. Rev. Acad. Colomb. Cienc. **30** (117): 489-494, 2006. ISSN 0370-3908.

El género *Diplostephium* contiene ca. 100 especies de las cuales 63 se encuentran en Colombia. Se presenta una clave dicotómica para las especies de *Diplostephium* en Colombia con base en las series tratadas por Cuatrecasas para su clasificación. Se incluyen en estas divisiones aquellas especies sin serie asignada.

**Palabras clave:** *Diplostephium*, Asteraceae, Astereae, Colombia, páramo.

## Abstract

The genus *Diplostephium* contains ca. 100 species of which 63 are present in Colombia. A dichotomic key is proposed for the species of *Diplostephium* in Colombia, based on Cuatrecasas' treatment of series for subgeneric classification. Species not placed in a series are here designated to one.

**Key words:** *Diplostephium*, Asteraceae, Astereae, Colombia, paramo.

## Introducción

*Diplostephium* es un género de árboles, arbustos y subarbustos que hace parte de la flora del límite superior de los bosques andinos, páramos, jalcas y punas en las montañas del neotrópico. Actualmente se cree que el gé-

nero se compone de 90 (Sklenář *et al.*, 2005) a 110 (Ulloa & Jørgensen, 2004) especies. Se han reportado 63 especies para Colombia (Vargas, 2005), dos para Costa Rica (Sistema de información de INBio, julio 2005), 9 para Venezuela (Badillo, 1996), 21 para Ecuador, y 37 para Perú (Brako & Zarucchi, 1993). Para Bolivia y Chile no

<sup>1</sup> Laboratorio de Botánica y Sistemática, Universidad de los Andes, Bogotá, Colombia. Apartado Aéreo 4976.

<sup>2</sup> Correo electrónico: os-varga@uniandes.edu.co

<sup>3</sup> Correo electrónico: samadrin@uniandes.edu.co

existe información actualizada de cuantas especies se puedan presentar allí. En los páramos se considera el tercer género más diverso con 70 especies después de *Pentacalia* y *Senecio* (Luteyn, 1999).

El género fue descrito por Humboldt, Bonpland y Kunth bajo el término *Diplostephium* (gr. *diplóos*: doble, y gr. *stéphas*: corona, doble papo) en el año de 1820, en la serie *Nova Genera Species Plantarum*. Luego, Weddell lo trata en *Chloris Andina* publicado en 1857, describiendo algunas nuevas especies. Posteriormente Bentham y Hooker tratan el mismo dentro del libro *Genera Plantarum* en 1873.

En el siglo XX Sydney Blake realiza dos estudios del género, el primero de ellos, una revisión publicada en 1922, donde separa el género en cinco series (ROSMARINIFOLIA, LAVANDULIFOLIA, RUPESTRIA, DENTICULATA y FLORIBUNDA) teniendo en cuenta el foliaje y la inflorescencia. Luego escribe una segunda revisión en el año de 1928, en la cual plantea dos posibles tratamientos para la división del género, la primera en tres secciones, basándose solo en la forma del estigma, y la segunda, que considera "natural" (Blake, 1928: 45), en tres series (ROSMARINIFOLIA, LAVANDULIFOLIA Y RUPESTRIA), descartando entonces dos de su estudio anterior, esto con base en caracteres de foliaje e inflorescencia.

Posteriormente el género fue estudiado por José Cuatrecasas quien describió varias especies nuevas y publicó dos estudios del género. El primer estudio fue publicado en 1943 donde se describen 16 especies nuevas para Colombia, Venezuela y Perú. En este, Cuatrecasas reconoce 64 especies, y propone una clave para las especies colombianas basándose principalmente en la clasificación de la forma del estigma ya propuesta por Blake en 1928. En el segundo estudio publicado en 1969, realiza una revisión para el género en Colombia reconociendo 53 especies a nivel nacional, y estimando unas 90 para todo el género. Aquí retoma la clasificación de Blake basada en foliaje e inflorescencia, manteniendo las cinco series propuestas inicialmente y proponiendo otras siete (CRASSIFOLIA, CORIACEA, HUERTASINA, SCHULTZIANA, PHYLIICOIDEA, SAXATILIA Y ANACTINOTA). Además de esta clasificación subgenérica, Cuatrecasas (1969) ordena las series en orden "filogenético" según el, en base a lo que el considera "características atávicas" (i.e., ancestrales) y "caracteres de formas derivadas" (Cuatrecasas, 1969: 92). Desde entonces se han descrito diez especies nuevas para Colombia principalmente por José Cuatrecasas y Santiago Díaz-Piedrahita, ocho de las cuales fueron incluidas directa o indirectamente dentro de las doce series tratadas por Cuatrecasas en 1969.

Estudios cladísticos morfológicos del género (Vargas, 2005) muestran que muchas de estas series pueden no ser monofiléticas, aunque estas se disponen en una secuencia morfológica gradual sobre los cladogramas muy afín al orden propuesto por Cuatrecasas. Esto demuestra que la clasificación es válida para distinguir grupos morfológicos y así hacer más amable el estudio del género, razón por la cual la clave propuesta en el presente artículo sigue esta clasificación.

Desde el libro *Genera Plantarum* hasta la última revisión del género hecha por Cuatrecasas en 1969, *Diplostephium* fue tratado dentro de la tribu Astereae y dentro de la subtribu Heterocromeae. Actualmente el género es considerado parte de la tribu Astereae y de la subtribu Hinterhuberineae (Nesom, 1994). Dada la importancia del género, su diversidad, y la falta de una clave actualizada se propone a continuación una clave dicotómica para las 63 especies reportadas en Colombia.

## Métodos

Para la elaboración de la clave se realizó un estudio exhaustivo de la bibliografía existente para el género en Colombia, los especímenes depositados en el Herbario Nacional Colombiano (COL) y el Museo de Historia Natural de los Andes. A partir de esta información y de una clave digital existente (Vargas, 2005; disponible en internet <http://botanica.uniandes.edu.co/diplostephium.htm>) se elaboró esta clave dicotómica. A las dos especies sin serie designada se les asignó una según su morfología (*D. camargoanum* y *D. ritterbushii*).

## Resultados

A partir de la información compilada se propone la siguiente clave:

1. Capítulos terminales solitarios.
2. Lígulas de las flores de radio más cortas que el estilo y el involucro. .... Serie ANACTINOTA
3. Ovarios seríceos vellosos ..... *D. anactinotum*
- 3'. Ovarios glabros o con raros pelos. .... *D. inesianum*
- 2'. Lígulas de las flores de radio más largas que el estilo y el involucro. Lígulas excertas ..... Serie LAVANDULIFOLIA
4. Ramas largas con crecimiento indefinido y ramas cortas con capítulos terminales solitarios ..... *D. hartwegii*

- 4'. Ramas todas determinadas por inflorescencias.
5. Hojas lineares por lo menos 12 veces más largas que anchas.
6. Entre 20 y 40 flores por capítulo, raramente 2 capítulos por inflorescencia ..... *D. frontinense*
- 6'. Entre 50 y 70 flores por capítulo ..... *D. micradenium*
- 5'. Hojas lanceoladas-lineares, entre 2 y 6 veces más largas que anchas.
7. Hojas pubescentes en la haz.
8. Capítulos pedunculados, pedúnculos de 1 a 3 cm ..... *D. apiculatum*
- 8'. Capítulos sin pedúnculos, capítulos sésiles ..... *D. nevadense*
- 7'. Hojas glabras en la haz.
9. Hojas glutinosas o pegajosas en la haz ..... *D. glutinosum*
- 9'. Hojas no glutinosas y no pegajosas en la haz.
10. Subfrútices postrados con ramás reptantes. Pseudopeciolo amplectante. .... *D. colombianum*
- 10'. Arbustos con ramas erectas. Pseudopeciolo no amplectante.
11. Hojas con muchas impresiones glandulosas en la haz y pequeños tubérculos cónicos resinosos, más densos en cantidad hacia el margen de la hoja ..... *D. glandulosum*
- 11'. Hojas sin impresiones glandulosas en la haz o con muy pocas, sin tubérculos cónicos.
12. Hojas con espínulas hacia el margen de la haz de la hoja. .... *D. spinulosum*
- 12'. Hojas sin espínulas sobre la haz de la hoja.
13. Capítulos pedunculados, pedúnculos entre 1 y 3 cm. .... *D. fernandez-alonsoi*
- 13'. Capítulos sésiles sin pedúnculos.
14. Hojas de 3–6 x 1.5–2 mm, rígidas, coriáceas, sésiles y fuertemente revolutas, ramás cubiertas de denso indumento ..... *D. parvifolium*
- 14'. Hojas de 4–8 x 1.2–2.2 mm, cartáceas, levemente revolutas. Solo ramas jóvenes cubiertas de escaso indumento. .... *D. rangeli*
- 1'. Dos o más capítulos terminales dispuestos en sinflorescencias.
15. Corola de las flores liguladas más corta que el estilo, que las corolas masculinas, que el papo y el involucreo.
16. Hoja gruesa rígidamente coriácea y peciolada. .... Serie HUERTASINA
17. Capítulos con 27–30 flores. Lámina foliar ovada. .... *D. juliani*
- 17'. Capítulos con más de 30 flores. Lámina foliar elíptica u ovada-elíptica.
18. Capítulos con 35–54 flores. Lámina foliar elíptica. *D. huertasii*
- 18'. Capítulos con 60–90 flores. Lámina foliar ovada-elíptica. .... *D. jaramilloi*
- 16'. Hoja membranácea dentada y pseudopecioloada ... Serie SAXATILIA
19. Hojas blancas al envés con indumento lanoso comprimido ..... *D. tergocanum*
- 19'. Hojas ocráceas o cinereo-ocráceas al envés.
20. Papo pajizo-amarillento. .... *D. saxatile*
- 20'. Papo rojo-violáceo. .... *D. romeroi*
- 15'. Corola de las flores liguladas más larga que el estilo, que las corolas masculinas, que el papo y el involucreo.
21. Hojas rígidas, coriáceas o crasiúsculas, glabras por la haz, con margen entero.
22. Hojas pseudopecioloadas, pseudopeciolo envainador y amplectante, margen no revoluto. Papo rosado. .... Serie CORIACEA: *D. coriaceum*
- 22'. Hojas pecioladas, margen revoluto o levemente revoluto. Papo pajizo.
23. Lámina foliar ancha, elíptica, redondo-elíptica u obovado-elíptica, levemente revoluto, 1–3 cm de largo. La haz sin glándulas ..... Serie CRASSIFOLIA: *D. crassifolium*

- 23'. Lámina foliar ovado-oblonga, oblongo-elíptica o sublanceoladas, revoluta, 0.6–1 cm de largo. La haz con pequeñas glándulas ..... Serie PHYLLICOIDEA: *D. phyllicoides*
- 21'. Hojas cartáceas o membranáceas, margen entero o dentado.
24. Hojas no revolutas o algo recurvas en los bordes, 1.5–4 cm de largo. Papo rojizo. Tendencia de los capítulos hacia la diecia. .... Serie SCHULTZIANA
25. Ovarios vellosos-hispídulos y glandulosos, hoja siempre espinoso-denticulada hacia la parte superior. .... *D. juajibioyi*
- 25'. Ovarios glabros o subglabros, con algunas glándulas, en algunos casos con pocos pelos.
26. Lámina foliar romboide, pequeña de 0.8–1.5 cm de largo, haz glabra y brillante. .... *D. rhomboidale*
- 26'. Lámina foliar elíptico-oblonga, obovado-oblonga, obovada o lanceolada, de más de 1.5 cm de larga.
27. Lámina foliar entera o dentada, flexible, color verde grisáceo, 4 veces más larga que ancha. Corola ligulada de 4–6 mm de long. .... *D. schultzi*
- 27'. Lámina foliar siempre entera, flexible o cartácea, bordes recurvos, 3 veces más larga que ancha. Corola ligulada de más de 6 mm de long.
28. Lámina foliar flexible elíptico-oblonga u obovada-oblonga, con 4–6 pares de nervios subascentes. Corolas de disco con limbo rojo violáceo ..... *D. alveolatum*
- 28'. Lámina foliar semi-coriácea, obovada, con nervios laterales escasos. Corolas de disco amarillentas .... *D. rhododendroides*
- 24'. Hojas revolutas, semirevolutas o no revolutas, cuando no revoluta mayor a 4 cm de largo. Papo casi siempre pajizo.
29. Lámina foliar linear con margen muy revoluta, 1–3 (4) mm de ancho. Casi siempre solo el nervio medio conspicuo en el envés. Por lo general más de 8 capítulos por sinflorescencia. Serie ROSMARINIFOLIA
30. Lámina foliar gruesamente linear, siempre revoluta, no angostada hacia la base y con el ápice muy obtuso ..... *D. lacunosum*
- 30'. Lámina foliar más angostamente linear, con el ápice agudo y angostada hacia la base.
31. Ramillas terminales glabras. .... *D. revolutum*
- 31'. Ramillas terminales densamente albo-lanudas.
32. Corola de las flores de disco violáceas. Hojas linear-lanceoladas o linear-oblanceoladas. A veces con nervios secundarios conspicuos. .... *D. violaceum*
- 32'. Corola de las flores de disco blanquecinas o verdosas. Hojas lineares o elíptico-oblongas. Nunca con nervios secundarios conspicuos.
33. Filarias con franja submarginal y apical violácea. .... *D. heterophyllum*
- 33'. Filarias verdoso pajizas sin franja violácea.
34. Hojas pubescentes en la haz, haz glutinosa. Indumento de las ramillas y el envés de las hojas craso. Lígulas elíptico-oblongas. .... *D. cyparissias*
- 34'. Hojas glabras en la haz, diminutamente puntado-glandulosas. Indumento de las ramillas y el envés de las hojas densamente lanoso pero delgado. Lígulas lineares. .... *D. rosmarinifolium*
- 29'. Lámina foliar lanceolada, oblanceolada, o elíptica, revoluta o no revoluta, casi nunca linear, de más de 3 mm de ancho. Nervio medio conspicuo o no. Cuando la hoja es estrecha con menos de 8 capítulos por sinflorescencias.
35. Hoja sésil, lámina estrecha 1.5–7 x 0.2–1 cm con margen fuertemente revoluta y base amplia por lo general abrazante. Entre 3 y 8 capítulos por sinflorescencia. .... Serie RUPESTRIA
36. Envés de las hojas glabro o con muy pocos pelos esparcidos, indumento de las ramillas jóvenes amarillo-dorado. .... *D. chrysothrichum*
- 36'. Envés de las hojas bien indumentado. Indumento blanco o blanquecino.
37. Indumento en ramillas y en envés de las hojas, lanoso, muy denso y compacto, de pelos muy finos crespos e intrincados. .... *D. weddellii*
- 37'. Indumento en ramillas y envés de las hojas abundante pero flojo, de pelos rigidulos, flexuosos y pátulos.

38. Hojas linear-oblongas, linear-espatuladas o elíptico-oblongas, ampliadas en la base .....*D. rupestre*
- 38'. Hojas oval-oblongas u oval-elípticas angostas hacia la base.
39. Ovarios con pubescencia regular. Hojas revolutas, más revolutas hacia el ápice .....*D. eriophorum*
- 39'. Ovarios glabros o con muy pocos pelos esparcidos. Hojas revolutas .....*D. ritterbushii*
- 35'. Hoja no sésil, lámina amplia o estrecha, con margen no revoluto o levemente revoluto y base angosta terminando en peciolo o pseudopeciolo. Casi siempre más de 8 capítulos por inflorescencia.
40. Hojas estrechas, margen entero, nervios secundarios numerosos muy juntos y pátulos (ángulo de divergencia 80–90°), de 0.7–5 cm de largo ..... Serie FLORIBUNDA
41. Lámina foliar menor a 2 cm de largo.
42. Lámina foliar elíptico-oblonga o sublanceolado-oblonga, ápice atenuado subobtusado o subagudo, margen algo revoluto. ....*D. cinerascens*
- 42'. Lámina foliar elíptica, ápice redondeado, margen revoluto, peciolo bien formado ....*D. cayambense*
- 41'. Lámina foliar mayor a 2 cm de largo.
43. Hojas sésiles con la base de la lámina atenuada formando pseudopeciolo. ....*D. farallonense*
- 43'. Hojas bien pecioladas.
44. Lámina foliar entre 2 y 3 veces más larga que ancha, 3.4–5.4 x 1.6–2.4 cm. ....*D. perijaense*
- 44'. Lámina foliar 4 veces o más larga que ancha.
45. Hojas papiráceas, lanceoladas o elíptico-lanceoladas, ápice agudo, base atenuada. Nervios secundarios esparcidos entre 2 a 4 mm. ....*D. pittieri*
- 45'. Hoja coriácea o subcoriácea, elíptico-oblonga, oblanceolada-oblonga o sublanceolada, ápice redondeado u obtuso o también agudo. Nervios secundarios 1 a 2 mm distantes entre si.
46. Ovarios pubescentes-setulosos sin glándulas o estas muy escasas, raramente los de flores liguladas glabros. ....*D. tolimense*
- 46'. Ovarios glabros, más o menos glandulíferos, raramente con pocos pelos. ....*D. floribundum*
- 40'. Hojas láminares anchas en la mayoría de los casos, por lo general dentadas, siempre pecioladas, ángulos de divergencia de los nervios secundarios de más de 60°, 3.5–12 cm de largo. .... Serie DENTICULATA
47. Hojas de margen entero, o con pequeños dientes mucronados casi inconspicuos.
48. Lámina foliar obovada. ....*D. tachirensis*
- 48'. Lámina foliar elíptica u ovada.
49. Lámina foliar ovada. Involucro rojizo .....*D. santamartae*
- 49'. Lámina foliar elíptica. Involucro pajizo.
50. Papo rojizo-violáceo .....*D. mutiscuanum*
- 50'. Papo pajizo.
51. Hojas coriáceas. Ovarios sin glándulas. *D. grantii*
- 51'. Hojas subcoriáceas. Ovarios glandulosos.
52. Tomento al envés de las hojas blancuzco. Sinflorescencias con pedúnculos largos de más de 5 cm. ....*D. camargoanum*
- 52'. Tomento al envés de las hojas cinéreo. Sinflorescencias con pedúnculos cortos, de menos de 5 cm. ....*D. ellipticum*
- 47'. Hojas claramente dentadas.
53. Papo rojizo.
54. Lámina foliar bullada con margen revoluta .....*D. jenesanum*
- 54'. Lámina foliar lisa con margen no revoluta.
55. Ovarios regularmente vellosos .....*D. oblonguilifolium*
- 55'. Ovarios sin vellos o parcamente vellosos.
56. Entre 14–29 flores por capítulo. ....*D. bicolor*
- 56'. Entre 32–36 flores por capítulo. ....*D. tamanum*
- 53'. Papo pajizo.
57. Ramillas terminales glabras o subglabras. Lámina foliar lanceolada o elíptico-lanceolada, 4 veces más larga que ancha.

58. Hojas coriáceas, lanceoladas con margen revoluto y dientes pátulos. Pecíolo 8–12 mm .....  
..... *D. leiocladum*
- 58'. Hojas sub-coriáceas, elíptico–lanceoladas con margen plano y nervios ascendentes. Pecíolo 6–8 mm .....  
..... *D. fosbergii*
- 57'. Ramillas terminales tomentosas o lanosas. Lámina foliar elíptica, entre 2 y 4 veces más larga que ancha.
59. Lámina foliar 3–4 cm de larga, margen revoluta ...  
..... *D. ocanense*
- 59'. Lámina foliar 4–9 cm de larga, margen no revoluta.
60. Ovarios vellosos.
61. Entre 20–22 flores liguladas por capítulo. Lámina foliar fuertemente dentada. .... *D. dentatum*
- 61'. Entre 9–16 flores liguladas por capítulo. Lámina foliar levemente dentada ..... *D. tenuifolium*
- 60'. Ovarios sin vellos.
62. Retículo venoso de la lámina foliar muy prominente y conspicuo al envés. .... *D. ochraceum*
- 62'. Retículo venoso oculto por indumento, solo los nervios principales apenas conspicuos al envés .....  
..... *D. antioquense*

### Agradecimientos

A Santiago Díaz Piedrahita por sus valiosos comentarios y sugerencias, a Julio Betancur, al Herbario Nacional Colombiano (COL), al Laboratorio de Botánica y Sistemática de la Universidad de los Andes, y al Museo de Historia Natural de la Universidad de los Andes.

### Bibliografía

- Badillo, V.** 1997. Los Géneros de las Compositae (Asteraceae) de Venezuela: Clave Artificial para su Determinación. *Ernstia* **6** (2-3): 51-168.
- Benthham, G. & J. D. Hooker.** 1873. *Genera Plantarum*. Vol. 2. Lovell Reeve, Londres.
- Blake, S.F.** 1922. Key to the Genus *Diplostephium*, with descriptions of new species. *Contributions from the United States National Herbarium* **24** (3): 65-86.
- Blake, S.F.** 1928. Review of the genus *Diplostephium*. *American Journal of Botany*. **15**: 43-64.
- Brako, L. & J.L. Zarucchi.** 1993. Catalogue of the Flowering Plants and Gymnosperms of Perú. *Monographs in systematics Botany from the Missouri Botanical Garden* No. **45**. Missouri Botanical Garden, San Luis.
- Cuatrecasas, J.** 1943. Estudios sobre plantas andinas V. *Caldasia* **2** (8): 209-240.
- \_\_\_\_\_ 1963. New taxa in the genus *Diplostephium*. *Bulletin of the Torrey Botanical Club*. **80**: 401-408.
- \_\_\_\_\_ 1969. Compositae – Astereae. *Webbia* **3**: 90-194.
- \_\_\_\_\_ 1972. Miscellaneous notes on neotropical flora. *Phytologia* **23** (4): 350-365.
- \_\_\_\_\_ 1975. Miscellaneous notes on neotropical flora, VII. *Phytologia* **31** (4): 317-333.
- \_\_\_\_\_ 1981. Miscellaneous notes on neotropical flora XIII. *Phytologia* **49** (1): 69-75.
- \_\_\_\_\_ 1982. Miscellaneous notes on neotropical flora XV. New taxa in the Astereae. *Phytologia* **52** (3): 166-177.
- \_\_\_\_\_ 1991. Especie nueva de *Diplostephium* de Colombia y Sinónimos: de *D. ericoïdes* del Ecuador. *Revista de la Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales* **18** (69): 123-125.
- Díaz-Piedrahita, S. & B.L. Restrepo.** 1994. Una nueva especie de *Diplostephium* (Compositae, Astereae) de Colombia. *Revista de la Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales* **19** (73): 243-245.
- \_\_\_\_\_ & **M.E. Morales.** 2002. Una especie nueva de *Diplostephium* (Asteraceae, Astereae) de los Andes de Boyacá, Colombia. *Revista de la Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales* **26** (98): 5-7.
- \_\_\_\_\_ & **G.P. Méndez-Ramírez.** 1997. Algunas novedades en Asteraceae de Colombia. *Revista de la Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales* **21** (81): 401-408.
- Humbolt, A., A.J. Bonpland & C.S. Kunth.** 1820. *Nova Genera Specie Plantarum*. 4 ed. Folio, París.
- Luteyn, J.** 1999. Páramos: A Checklist of Plant Diversity, Geographical Distribution, and Botanical Literature. New York Botanical Garden.
- Nesom, G.L.** 1994. Subtribal classifications of the Astereae (Asteraceae). *Phytologia* **76**: 193-274.
- Sistema de información de INBio.** Julio 2005. <http://www.inbio.ac.cr>
- Sklenář, P., J. Luteyn, C. Ulloa, P.M. Jørgensen y M.O. Dillon.** 2005. *Flora genérica de los paramos: guía ilustrada de las plantas vasculares*. New York Botanical Garden Press.
- Ulloa, C. y P. M. Jørgensen.** 2004 y en adelante. Árboles y arbustos de los Andes del Ecuador. <http://www.efloras.org>.
- Vargas, O.M.** 2005. Contribución al estudio del género *Diplostephium* (Asteraceae) en Colombia. Tesis (Biólogo) Universidad de los Andes.
- Weddell, H.** 1857. *Chloris Andina* **1**: 199 p.

Recibido el 19 de mayo de 2006

Aceptado para su publicación el 16 de agosto de 2006

# VULCANISMO CENOZOICO EN LA SABANA DE BOGOTÁ

por

Jaime Galvis Vergara<sup>1</sup>, Ricardo de la Espriella<sup>1</sup> & Ricardo Cortés Delvalle<sup>1</sup>

## Resumen

**Galvis Vergara, J., R. de la Espriella & R. Cortés Delvalle:** Vulcanismo cenozoico en la sabana de Bogotá. Rev. Acad. Colomb. Cienc. **30** (117): 495-502, 2006. ISSN 0370-3908.

La Sabana de Bogotá constituye un amplio valle interandino, notablemente ramificado, con rasgos geomorfológicos y geológicos que no han sido completamente explicados. Uno de estos rasgos ha sido la amplísima cubierta de suelos originados en material volcánico. A esto se le han dado dos explicaciones diferentes: la primera explicación asumía que la cubierta tobácea de la Sabana debía provenir de los volcanes más próximos de la Cordillera Central, los cuales se encuentran a unos 150 kilómetros de distancia. Esto paulatinamente fue descartado considerando la notable diferencia petrográfica entre las vulcanitas de la Cordillera Central y las piroclastitas de la Sabana. La segunda explicación ha considerado que los depósitos piroclásticos de la Sabana provienen de los focos volcánicos de Paipa e Iza, departamento de Boyacá, situados a 150 kilómetros de distancia.

En el presente artículo se demuestra que las piroclastitas en mención se originaron en focos volcánicos situados dentro de la misma Sabana de Bogotá y que dicho evento efusivo tuvo una magnitud mayor que el de Boyacá y más aún, que constituye su continuación hacia el Sur.

**Palabras clave:** Sabana de Bogotá, vulcanismo, cenozoico.

## Abstract

The area of the Sabana de Bogotá is an wide intra-andean valley whose geomorphologic and geologic patterns have not been fully explained. One of these patterns is the ample coverage of soils derived from volcanic sources, for which two explanations have been given: the first one is to assume that the tuffaceous cover in the Sabana must have originated from the Central Cordillera vulcanism, which is at a distance of about 150 kilometers. With time, this assumption has been discarded due to the obvious petrographic differences between the volcanic materials of the Central Cordillera and those of the Sabana. The second explanation claims as origin, the volcanic focuses of Paipa and Iza, some 150 kilometers away.

<sup>1</sup> Dirección: Transversal 19 No. 61-33, Bogotá, D.C. Colombia. Correo electrónico: respriella@yahoo.com



The present articles proves that the pyroclastics of the Sabana de Bogotá had their origin in volcanic focuses within the Sabana proper, and that the Sabana volcanic events had a magnitude greater than those in Boyacá and could be considered their southern extension.

**Key words:** Sabana de Bogotá, vulcanism, cenozoic.

### Aspectos generales de la geología de la Sabana de Bogotá

Constituye un área íntegramente situada en corteza síalica; por lo tanto la base de la secuencia litológica está constituida por granitoides proterozoicos. Las únicas exposiciones de éstos en proximidades de la Sabana, se encuentran en los Farallones de Medina. Sobre los granitoides mencionados se encuentran metamorfitas de bajo grado, conocidas bajo la denominación de **Esquistos de Quetame**, unidades litológicas ampliamente expuestas en la vertiente oriental de la Sabana de Bogotá.

Sobre los **Esquistos de Quetame**, se hallan en la vertiente oriental sedimentitas del Paleozoico, principalmente del Devónico y Carbonífero, las cuales han recibido denominaciones tales como **Grupo Farallones**, **Areniscas de Gutiérrez**, **Capas Rojas del Guatiquía**, etc. El substrato al centro y occidente de la Sabana de Bogotá se desconoce y es imposible saber con la información existente si en él se encuentran unidades litológicas del Paleozoico o no.

Hay algunas exposiciones de sedimentitas del Jurásico en áreas próximas a la Sabana, pero es imposible determinar si estas subyacen parcialmente a los sedimentos del Cretáceo bajo la mencionada altiplanicie. En varias localidades, las sedimentitas cretáceas sobreyacen directamente a unidades litológicas del Paleozoico, tal como se observa en la localidad de Ubalá, donde se presenta un espeso paleosuelo laterítico sobre las unidades paleozoicas e infrayaciendo la secuencia sedimentaria del Cretáceo.

La sedimentación del Cretáceo en esta zona, ampliamente documentada, presenta entre el Titoniano y el Aptiano, una secuencia de sedimentos pelíticos y calcáreos, los cuales contienen espesos lechos evaporíticos, evidenciándose la presencia de cuencas cerradas de poca profundidad, cuya comunicación con mar abierto debió ser intermitente.

A partir del Aptiano, se presentan sedimentos pelíticos y arenáceos, en los cuales se evidencia un ambiente paleogeográfico en el cual hubo comunicación permanente con el mar abierto, aunque las condiciones paleogeográficas fueron variables localmente. La distribución de las facies sedimentarias presenta notables va-

riaciones, aunque siempre con una amplia predominancia de los sedimentos arcillosos.

El Cretáceo tardío está representado por espesos depósitos de areniscas, los cuales parecen evidenciar un proceso regresivo, con intercalaciones de porcelanitas (las cuales recibieron la curiosa denominación de **Plaeners**), en las cuales se presentan niveles de un claro carácter tobáceo, intercaladas con sedimentos silíceos de origen biogénico, los cuales parecen haberse originado en un ambiente costero lagunar con abundante sílice en solución, de origen volcánico. No se conocen las fuentes del material tobáceo. El primer autor que insinuó la presencia volcánica en los **Plaeners** fue **Bürgl** (1959). La secuencia litológica anterior se ha denominado **Formación Guadalupe**.

Sobre las arenitas litorales se encuentra un depósito de lodolitas de color gris oscuro con numerosos mantos de carbón, las cuales gradualmente toman el aspecto de arcillolitas abigarradas con intercalaciones de areniscas de espesor muy variable. Esta secuencia litológica se conoce como **Formación Guaduas** y se extiende hasta el Terciario temprano, anterior al Eoceno superior.

Posterior a la **Formación Guaduas** se presenta un nivel laterítico de espesor variable, que parece representar la discordancia del Eoceno superior. Sobre dicha discordancia se presentan sedimentos detríticos rojos de espesor muy variable, frecuentemente areniscas de grano grueso de color rojo bermellón.

A los sedimentos mencionados les sobre-yace lo que se ha denominado **Formación Bogotá**, la cual, debido a la ausencia de fósiles ha sido datada de manera indirecta, deduciendo su edad por correlación con las formaciones subyacentes. Su descripción litológica varía dependiendo de las localidades que han estudiado los diferentes autores, los cuales coinciden en describirla como un material rojizo, de grano más grueso en su base y más arcilloso en su parte superior.

La **Formación Tilatá**, que la suprayace, ha sido considerada como la última fase en el relleno o aporte de detritos hacia el altiplano de la Sabana. La identificación del vulcanismo reciente permite entender que estas dos formaciones corresponden a depósitos piroclásticos y sus derivados, temas que se discuten en el presente artículo.

### El vulcanismo reciente en la Sabana de Bogotá

Hay claras evidencias de eventos efusivos del Cenozoico tardío en la Sabana. Respecto a esto, cabe mencionar una localidad donde se presentan elementos de juicio para postular lo anterior. Se trata de la serranía denominada Fetibré o Montenegro, situada entre la población de Gachancipá y el embalse de Tominé. Allí se presentan rocas volcánicas de diversas texturas y estructuras y se puede ver su posición cronológica relativa a otras unidades litológicas.

En el flanco oriental de la mencionada serranía se observan rocas sedimentarias de la **Formación Guaduas**, con altos ángulos de buzamiento, generalmente más de 40°. En la parte norte, en la vereda La Salina, las sedimentitas del **Guaduas** se presentan intruídas por un diapiro salino, el cual produjo el emplazamiento de “rute” en un sector de la serranía.

Los sedimentos de la **Formación Guaduas** buzando hacia el Oriente y la parte de la secuencia que está expuesta, presenta al oeste lutitas negras con mantos de carbón. Ascendiendo estratigráficamente hacia el oriente, se presentan arcillas abigarradas de muy pobre fisibilidad con algunas intercalaciones de areniscas y más al este espesas capas de areniscas amarillentas de grano grueso y algunos niveles de arcillolitas. Continuando hacia el Oriente, hacia la ribera del embalse, las unidades litológicas de la **Formación Guaduas** se hallan cubiertas discordantemente por areniscas rojas de grano grueso, muy friables, las cuales presentan un buzamiento muy suave (10) hacia el oriente.

Las areniscas mencionadas se observan al sur en vecindades de la población de Tocancipá, formando un extenso lomerío hasta el extremo sur del embalse de Tominé. Al norte de Gachancipá se presentan también en algunos afloramientos de poca extensión, al Este de la serranía de Fetibré o Montenegro, buzando suavemente hacia el occidente. También se presentan en el extremo norte de esa serranía, en el sector de la presa del embalse. Las areniscas rojas dan un contorno que pudiera asemejarse a una suave estructura anticlinal.

Sobre las formaciones mencionadas, formando la cresta de la serranía y cubriendo la mayor parte del flanco occidental, se encuentran vulcanitas riolíticas, en las siguientes facies:

a. *Ignimbritas*, que se observan en la carretera que conduce de Gachancipá al cerro La Comunidad, sector de La Ignacia, y en una cantera, próxima a la carretera que conduce a la vereda La Salina (Fotografía 1).

b. *Lavas* se observan a lo largo de la vía a la vereda Tominé, desde el paraje de El Balcón hasta las cabeceras de

la quebrada La Porquera y el Alto de La Cruz (Fotografía 2); también en la cuchilla de Fetibré, en la carretera que conduce a la vereda Salinas y en una cantera aproximadamente 3 kilómetros al sudoeste de Gachancipá (Fotografía 3).



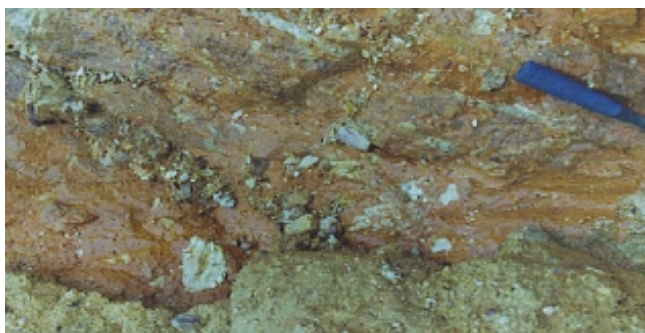
**Fotografía 1.** Ignimbritas en la vía que conduce de Gachancipá al Cerro La Comunidad y a la serranía de Fetibre.



**Fotografía 2.** Lavas riolíticas en una cantera situada al costado occidental de la serranía de Fetibre.



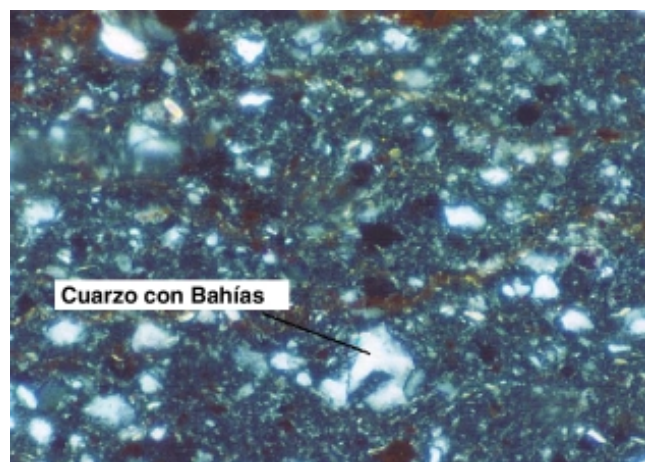
**Fotografía 3.** Aspecto de las lavas, cantera al Sur de Gachancipá.



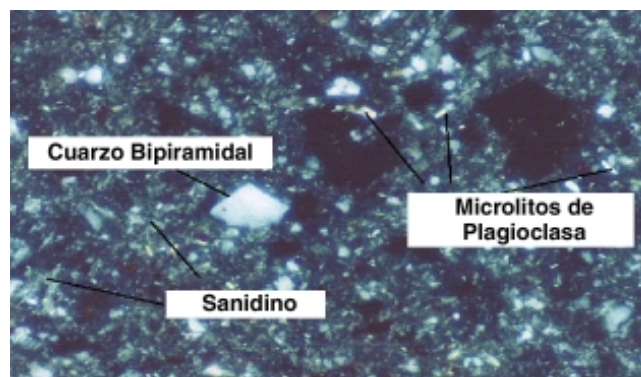
**Fotografía 4.** Brecha en una chimenea volcánica situada en la cañada del Diablo.



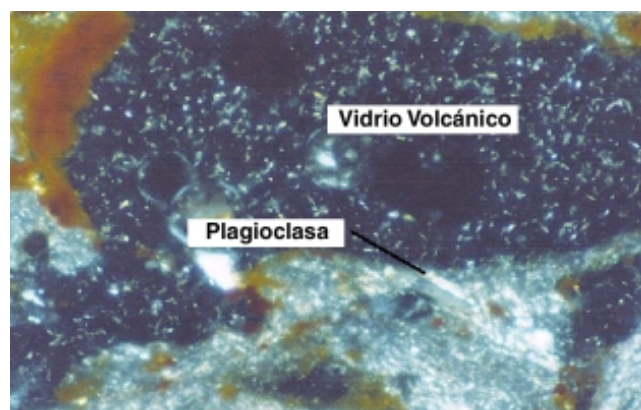
**Fotografía 5.** Pilares de erosión en cenizas volcánicas entre el embalse de Tominé y la serranía de Fetibre.



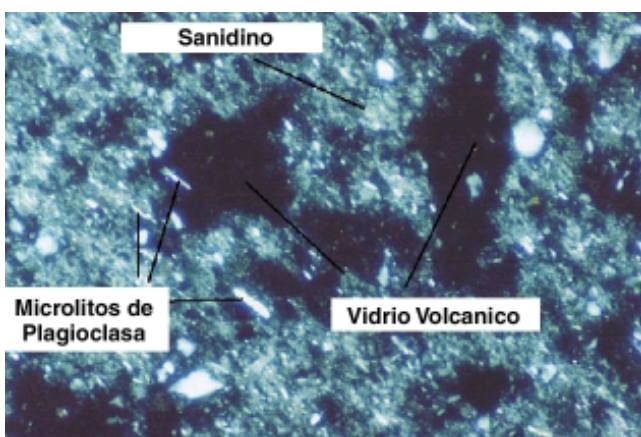
**Fotografía 6.** Cristales de cuarzo, algunos con bahías y de sanidina en una mesóstasis vítrea.



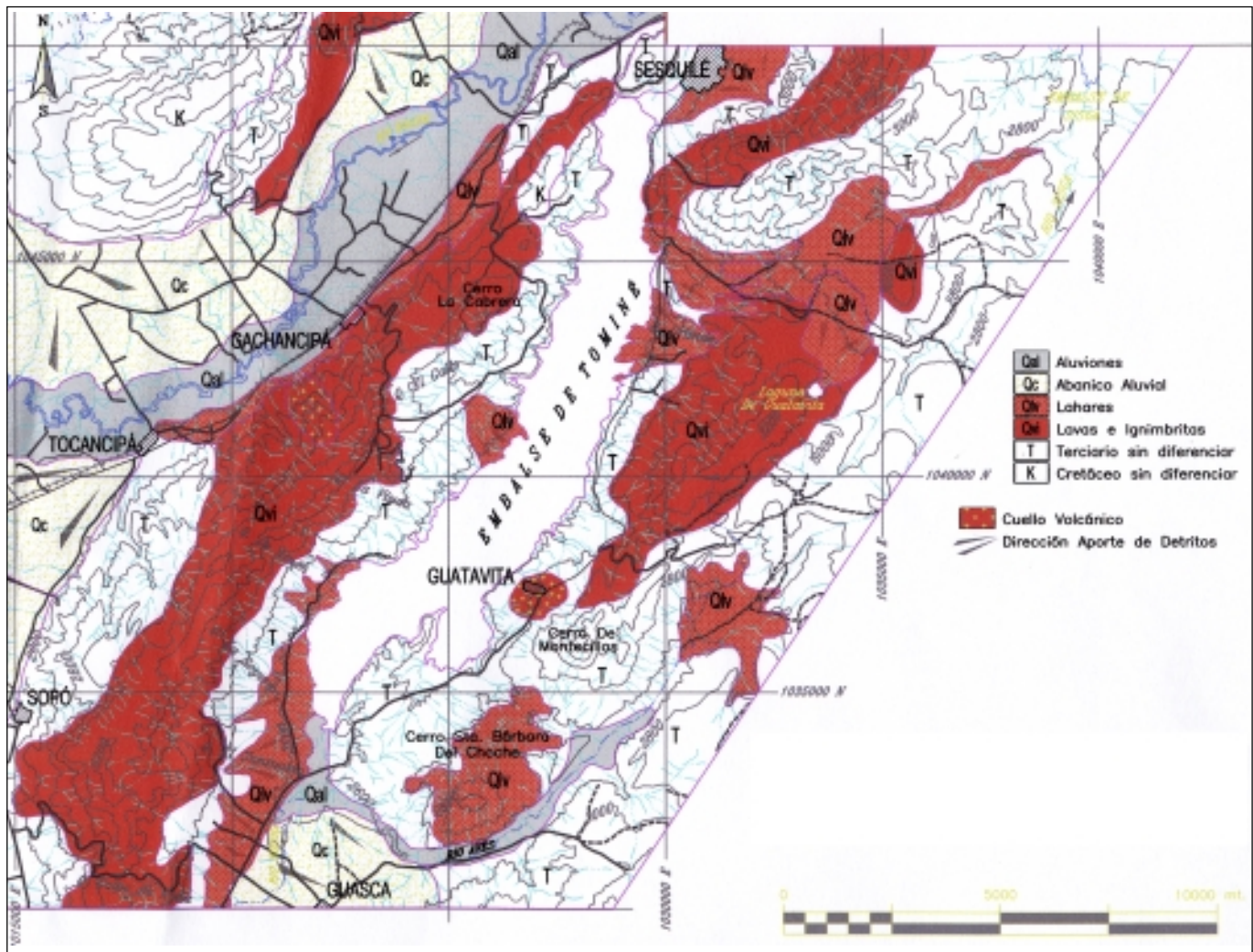
**Fotografía 7.** Cristal de cuarzo bi-piramidal, en medio de cristales de cuarzo, sanidina y mesóstasis de vidrio.



**Fotografía 8.** Fenocristal de plagioclase en medio de una matriz vítrea parcialmente argilizada.



**Fotografía 9.** Fenocristales de cuarzo y microlitos de plagioclase en medio de una mesóstasis de sanidina micro-cristalina y vidrio.



Rocas Volcánicas en el entorno del Embalse de Tominé.

c. *Brechas de Explosión*, a lo largo de la carretera que conduce a La Comunidad y en inmediaciones de un refugio infantil abandonado en la vereda Salinas. También se pueden observar al sureste de Tocancipá, reposando sobre las areniscas rojas. En éstas, así como en todas las otras vulcanitas mencionadas, presentan el desarrollo del típico andosol, ese suelo negro y rojo característico de la edafización de vulcanitas vítreas.

d. *Brechas de Chimenea* se pueden observar en una amplia cantera en la cañada del Diablo (Fotografía 4), situada aproximadamente un kilómetro al sur del área urbana de Gachancipá; allí se observan grandes bloques de arenisca cuarzosa, típica de la **Formación Guadalupe**, inmersos en riolita de color blanco grisáceo. En ese lugar se localiza una chimenea volcánica en el sentido estricto de su definición.

e. *Cenizas Volcánicas* se observan en amplias extensiones en el flanco oriental de la serranía de Fetibré, cubriendo exposiciones de la **Formación Guaduas** y de las areniscas rojas que le sobreyacen. Se presentan formando pilares de erosión típicos (“estoraques”) (Fotografía 5). También se presentan en el extremo norte de la misma serranía, cubriendo las areniscas rojas.

f. *Lahares* se encuentran al sur de la quebrada La Viuda, en el flanco oriental de la serranía de Fetibré, y en inmediaciones de la población de Sesquilé, donde aparecen identificados en la cartografía geológica publicada como **Formación Tilatá**. En algunos sectores, en especial en las brechas, se encuentran escorias.

Las riolitas de Gachancipá se presentan como una roca blanca, blanco-grisácea o blanco-amarillenta, de aspecto



**Fotografía 10.** Caldera volcánica de Guatavita, la caldera presenta vegetación que origina el suelo volcánico, alrededor en un tono grisáceo oscuro, areniscas, las cuales se presentan casi sin vegetación.



**Fotografía No. 13.** Desarrollo de gossam por alteración hidrotermal en la caldera volcánica de Guatavita.



**Fotografía 11.** Guatavita, aspecto de la brecha volcánica en la caldera.



**Fotografía 14.** Dique riolítico cortando areniscas en el borde occidental de la caldera de Guatavita, entre la población y el embarcadero.



**Fotografía No. 12.** Aglomerados en un posible cono resurgente dentro de la caldera de Guatavita.



**Fotografía 15.** Ignimbritas en inmediaciones de Sopó.

terroso, mate, con manchas rosadas, rojizas y violáceas a lo largo de los planos de clivaje. Macroscópicamente solo se observan algunos cristales de cuarzo y raramente fenocristales “tizosos” de feldespato. Meteorizan formando una saprolita rojiza.

La composición petrográfica de las vulcanitas en referencia es exclusivamente riolítica, con un contenido de cuarzo muy alto (Fotografía 6) y el feldespato de potasio, principalmente sanidina, predomina absolutamente sobre la plagioclasa. En todas las muestras es muy abundante el vidrio, el cual constituye una mesóstasis que envuelve cristales bi-piramidales de cuarzo (Fotografía 7) y de sanidina. También se presentan, aunque muy escasos, cristales de plagioclasa (Fotografías Nos. 8 y 9). No se observan minerales máficos.

El aspecto macro y microscópico es idéntico al de las vulcanitas de Paipa e Iza. El altísimo contenido de feldespato de potasio recuerda las descripciones de las vulcanitas de Iza (Romero & Rincón, 1992).

En el extremo sur de la vertiente oriental del embalse de Tominé, se presentan sedimentos de la Formación Guaduas, parcialmente cubiertos por depósitos de ceniza volcánica de poco espesor. Más al norte, al aproximarse a la población de Guatavita, se presentan las areniscas rojas friables buzando suavemente hacia el NW y allí se observa una estructura circular dentro de la cual se hallan brechas volcánicas; su punto más alto es el cerro de Montecillos. En medio de dicha estructura anular se halla el área urbana de Guatavita (Fotografía 10). Todo parece indicar que se trata de una caldera volcánica, dentro de la cual se encuentran brechas de composición riolítica, en parte mezcladas con xenolitos (Fotografía 11). En el cerro Montecillos se encuentran aglomerados volcánicos (Fotografía 12), lo cual parece indicar que se trata de un cono resurgente. En toda el área de la caldera se observan sectores con alteración hidrotermal (Fotografía 13).

Al observar la zona entre la población de Guatavita y el embarcadero en el embalse, se pueden ver las areniscas que cierran la estructura anular por el NW, y allí se presenta un dique riolítico de pocos metros de espesor, cortando las areniscas (Fotografía 14), lo que confirma la actividad ígnea reciente de toda la zona.

Al Este y Nordeste del cerro de Montecillos hay extensos depósitos de Ignimbritas, lo mismo que al SW del embalse de Tominé. Entre el embalse y la población de Sopó, también se presentan depósitos riolíticos piroclásticos formando los cerros de Sopó, Santuario y Canavita.

Las piroclastitas referidas en toda la región comprendida entre Sopó, Sesquilé, Gachancipá y Guatavita parecen haberse originado en los cuellos de Gachancipá y de Guatavita, sin descartar que pueda haber otros focos volcánicos en la zona.

### Posibles dimensiones del vulcanismo cenozoico en la Sabana

Como se mencionaba anteriormente, la **Formación Bogotá** corresponde a depósitos piroclásticos, argilizados o no. La **Formación Tilatá** equivale a lahares y flujos de detritos derivados de las piroclastitas. Por otra parte, en varias localidades las ignimbritas han sido confundidas con los **Plaeners**.

Concretamente se puede indicar la presencia de uno o mas focos efusivos en la zona comprendida entre Tausa, el extremo norte del embalse del Neusa y la vereda El Hato del municipio de Carmen de Carupa, área donde se observan extensos depósitos ignimbríticos; más aún, las arcillas de Checua parecen haberse originado en depósitos de cenizas y lapilli provenientes de dichos focos. Es posible suponer otro foco volcánico en inmediaciones de Sopó, como lo sugieren las ignimbritas allí presentes (Fotografía 15).

Toda la región al norte del embalse del Sisga presenta suelos volcánicos, y en la cuenca superior del río Bogotá, municipios de Choconta y Villapinzón, la cubierta volcánica es prácticamente total.

Hay indicios de otros focos volcánicos en varios sitios de la Sabana de Bogotá, tales como Mondoñedo, Bojacá, Tabio, Usme (en el sector del Cerro de Juan Rey), El Rosal, etc. y la cubierta tobácea de los valles es casi omnipresente en todos los valles que forman el conjunto geográfico de la Sabana.

A lo anterior cabe agregar, la presencia de varias fuentes de aguas termales en localidades tales como Sesquilé, Chocontá, Guasca, Guatavita, Tabio etc.

### Conclusiones

Durante el Cenozoico tardío, en el ámbito geográfico de la Sabana de Bogotá, tuvo lugar un evento magmático de notables dimensiones, con actividad efusiva profusa. Tiene notables similitudes con el episodio volcánico identificado en el centro de Boyacá, tanto en las características de la actividad efusiva, como en su composición petrográfica. Todo parece indicar que el área de influencia en la Sabana es mayor y alcanzó a extenderse al valle de Ubaté.

La cronología relativa parece ser igual: ambos fenómenos parecen haberse desarrollado posteriormente al levantamiento de la Cordillera Oriental, tal como lo indican los rellenos piroclásticos que se presentan fosilizando un relieve topográfico y la presencia de cenizas volcánicas y otras piroclastitas cubriendo depósitos de gravas no consolidadas. Cabe anotar además las numerosas fuentes termales registradas en las dos regiones.

El episodio efusivo de la Sabana cubrió con depósitos volcánicos más de un tercio de la extensión geográfica de la cuenca y parte del valle de Ubaté, y es un factor determinante de su fertilidad.

El presente artículo no pretende agotar el tema; solamente está indicando la necesidad de una revisión de los estudios geológicos de la Sabana de Bogotá y con ésto conocer las implicaciones de la actividad magmática en

relación con los suelos, su interacción con los diapiros salinos de la Sabana, y en especial la mutua interacción química y la influencia del magmatismo en la calidad de los carbones del Altiplano Cundiboyacense. También abre la posibilidad de hallazgos de mineralizaciones hidrotermales en la Sabana de Bogotá.

### **Bibliografía**

- Bürgl, H.** 1961. Sedimentación Cíclica en el Geosinclinal Cretáceo de la Cordillera Oriental de Colombia: Boletín Geológico, Vol. VII, Nos. 1-3, págs. 85-118, 9 figs.
- Romero, F. H. & Rincón, M. A.** 1992. Características Petrográficas y Químicas de las Rocas Volcánicas de Iza (Departamento de Boyacá, Colombia): Geología Colombiana, 17, págs. 159-168.

Recibido el 12 de octubre de 2005

Aceptado para su publicación el 28 de junio de 2006

# ***EULOPHOCERAS JACOBI* HOURCQ Y PALINOMORFOS ASOCIADOS DEL CONIACIANO TEMPRANO, FORMACIÓN LOMA GORDA, QUEBRADA BAMBUCÁ (AIPE-HUILA-COLOMBIA, S. A.)**

por

Pedro Patarroyo<sup>1</sup> & Hernando Dueñas<sup>2</sup>

## **Resumen**

**Patarroyo, P. & H. Dueñas:** *Eulophoceras jacobi* Hourcq y palinomorfos asociados del coniaciano temprano, formación Loma Gorda, Quebrada Bambucá (Aipe-Huila-Colombia, S.A.). Rev. Acad. Colomb. Cienc. **30** (117): 503-510, 2006. ISSN 0370-3908.

Se reporta la asociación de *Eulophoceras jacobi* Hourcq con *Droseridites senonicus*, *Monocolpopollenites spheroidites*, *Extratripurites* sp., *Triorites* spp., *Tricornites* spp., *Syncolporites* gr. *Retimonocolpites* spp., *Psilamonocolpites* spp., *Araucariacites australis*, *Cyathidites* spp., *Alisogymnium euclaensis* y *Coronifera oceanica*. Igualmente se presenta la localización estratigráfica dentro de las sedimentitas de la Formación Loma Gorda con 245 m de espesor, en la sección de la Quebrada Bambucá (Aipe – Huila).

La muestra se encuentra ubicada en la parte alta del segmento inferior de la Formación Loma Gorda y con base en su contenido paleontológico se le asigna una edad Coniaciano temprano.

**Palabras clave:** *Eulophoceras jacobi*, Coniaciano temprano, palinomorfos, formación Loma Gorda, Huila-Colombia.

## **Abstract**

The association of *Eulophoceras jacobi* Hourcq with *Droseridites senonicus*, *Monocolpopollenites spheroidites*, *Extratripurites* sp., *Triorites* spp., *Tricornites* spp., *Syncolporites* gr. *Retimonocolpites* spp., *Psilamonocolpites* spp., *Araucariacites australis*, *Cyathidites* spp., *Alisogymnium euclaensis* and *Coronifera oceanica* is reported. Based on this assemblage an early Coniacian age has been assigned to these sediments which are located in the upper lower segment of the Loma Gorda Formation (Bambuca creek – Aipe – Huila – Colombia).

**Key words:** *Eulophoceras jacobi*, early Coniacian, palimorphs, Loma Gorda formation, Huila-Colombia.

<sup>1</sup> Departamento de Geociencias, Universidad Nacional de Colombia, A. A. 14490, Bogotá, D. C. Grupo de Investigación en Estratigrafía.

<sup>2</sup> BioSS Ltda., Trans. 27 N° 141-73, Bogotá, D. C., hdjbioSS@yahoo.com



## Introducción

Continuando con los aportes obtenidos en el Valle Superior del Magdalena (VSM) dentro del proyecto de investigación “Estratigrafía de las sedimentitas del Turoniano de los Andes centrales de Colombia”, financiado por la División de

Investigaciones de la Universidad Nacional de Colombia DIB, con base en el extinto proyecto “Litoestratigrafía del Valle del Magdalena (INGEOMINAS)”, se recolectaron muestras para micro y microfósiles.

Una de las muestras con microfósiles de la Formación Loma Gorda en la Quebrada Bambucá, arrojó una materia orgánica amorfa, algácea de origen marino con esporádica presencia de fragmentos cuticulares y carbonosos provenientes del continente. Asociados a esta materia orgánica fue posible recuperar una pobre asociación de palinomorfos la cual incluye granos de polen y esporas y algunos dinoflagelados.

De esta forma se tiene un amarre entre macro y microfósiles, que dan pautas para calibrar ambas herramientas, con el fin de obtener esquemas bioestratigráficos integrados.

Para la preparación palinológica de la roca se empleó un método estándar que involucra: la disgregación de los componentes sedimentarios por la acción de HCl, HF y posterior HCl, la disgregación de la materia orgánica por acción de una mezcla de HNO<sub>3</sub> + KClO<sub>3</sub>, la eliminación de partículas finas por medio de una malla de apertura 10 micrones, la separación de las partículas minerales remanentes por diferencias de densidad y la preparación de las placas de estudio utilizando bálsamo de Canadá.

La sucesión de la Quebrada Bambucá (fig. 1), se ubica en la plancha IGAC 302 (1:25.000), municipio de Aipe (Huila).

## Estratigrafía

La Quebrada Bambucá corta toda la sucesión representativa del Cretácico del Valle Superior del Magdalena, desde la Formación Yaví hasta la Formación Seca o Guaduala.

## Formación Loma Gorda

Unidad introducida por **Porta** (1965) para el sector de Piedras-Tolima. **Patarroyo** (1993) & **Vergara** (1994) proponen la modificación del límite de la base de la Formación Loma Gorda, colocándolo en la primera ocurrencia de capas silicificadas, cuyo nivel es conocido también como “tercera lidita”. **Guerrero et al.** (2000) postulan que el límite de la base, se debe establecer estratigráficamente más abajo, coincidiendo con el inicio de un nivel calcáreo sobre lodolitas fósiles. Aceptando este último

criterio, la unidad posee 245 m de espesor en la Quebrada Bambucá. El límite de la base es neto con las lodolitas fósiles de la Formación Hondita y el límite del techo es neto con los “cherts” de la Formación Lidita Inferior del Grupo Oliní (fig. 2).

La edad de la Formación Loma Gorda representa desde la parte más alta del Cenomaniano tardío hasta el Coniaciano teniendo en cuenta los planteamientos de **Villamil** (1996) y **Villamil & Arango** (1998). No se tienen argumentos para determinar el Santoniano más temprano hacia el techo de la unidad, tal como lo afirman **Guerrero et al.** (2000).

A lo largo de la sección de la Quebrada Bambucá, dentro de la Formación Loma Gorda, se reconocen tres segmentos. El primer segmento de 99 m (fig. 2), se encuentra constituido por micritas, biomicritas y lodolitas calcáreas negras con concreciones de tamaños variables, en la mayoría de casos fosilíferas. En la parte más alta de este segmento, se colectó el material fósil que se investiga en este trabajo, dentro de una concreción incluida en lodolitas calcáreas (fig. 2).

El segmento intermedio con 52 m (fig. 2), se caracteriza por la ocurrencia de capas silicificadas (“cherts”), que antes de la diagénesis correspondían a micritas y biomicritas.

En el segmento superior de 94 m (fig. 2), predominan principalmente los sedimentos terrígenos. En mayor proporción ocurren lodolitas fósiles, negras. Ocasionalmente, se presentan arenitas de cuarzo, de grano fino, en capas delgadas y muy delgadas, parcial o totalmente bioperturbadas.

## Sistemática

Familia Sphenodiscidae  
Subfamilia Lenticeratinae  
Género *Eulophoceras* Hyatt, 1903  
Especie tipo: *Eulophoceras natalense*  
Hyatt, 1903

*Eulophoceras jacobii* Hourcq Fig. 2, Pl. I, fig. 1-3

?	1955	<i>Eulophoceras</i> sp., <b>Reyment</b> , p. 83, fig. 42, pl. XXII, fig. 5.
	1957	<i>Eulophoceras jacobii</i> Hourcq, <b>Arkel et al.</b> , p. L436, fig. 552, 1a-b.
	1982	<i>Eulophoceras jacobii</i> Hourcq, <b>Renzi</b> , p. 111, pl. 36, fig. 7, 8, 9a-b, pl. 37, fig. 1a-b, fig. 85a-d.
	1996	<i>Eulophoceras jacobii</i> Hourcq, <b>Wright et al.</b> , p. 204, fig. 157, 1a-b.

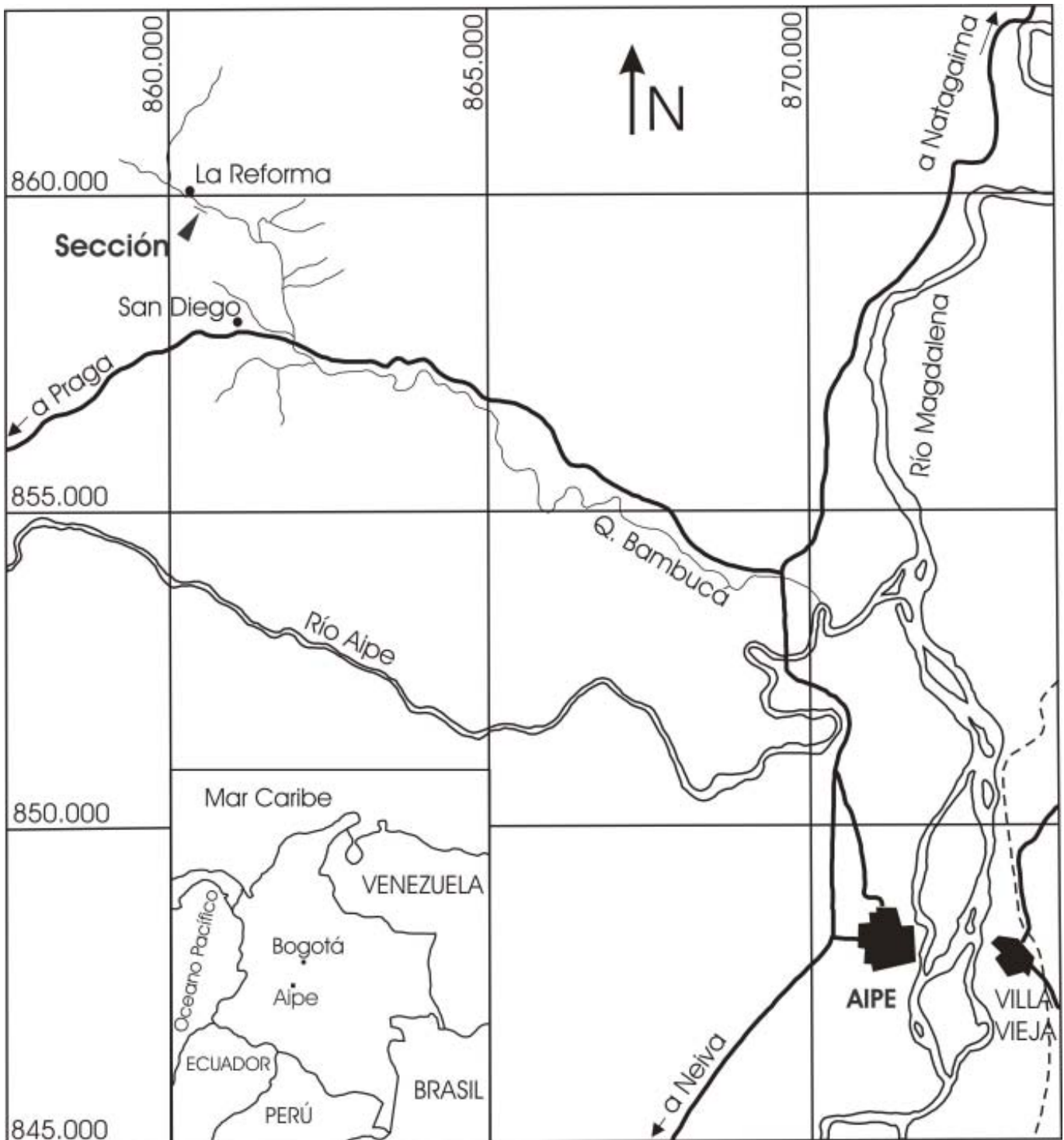


Figura 1. Localización de la sección quebrada Bambuca.

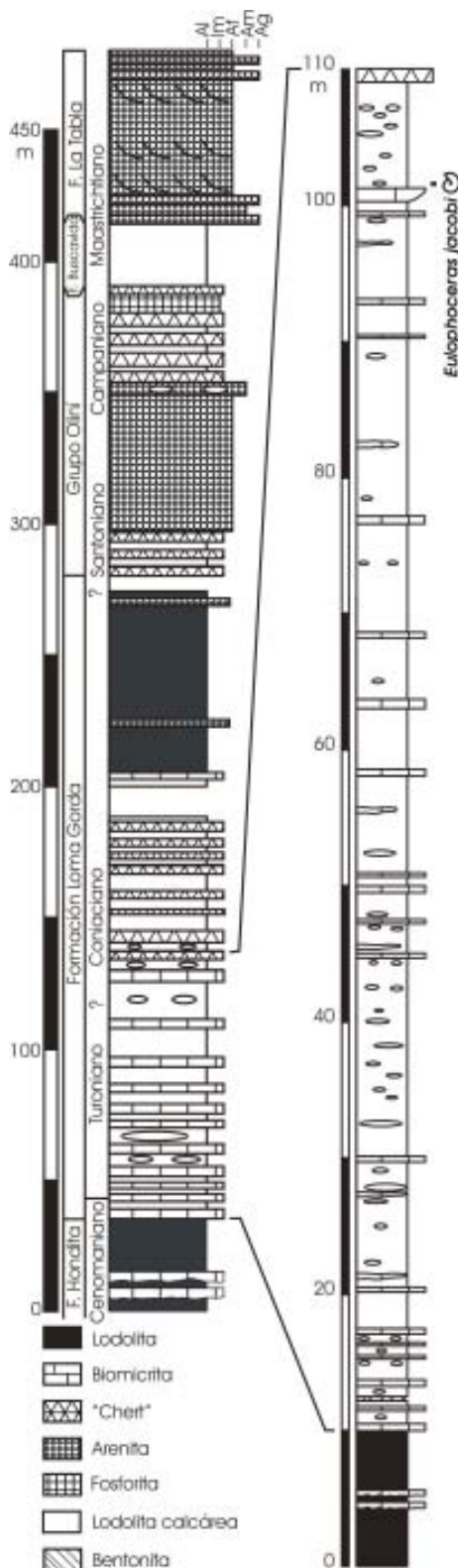


Figura 2. Sección estratigráfica parcial de la quebrada Bambucá con la ubicación de recolección de *Eulophoceras jacobii*.

**Ejemplar:** QBL-29 (Sección Quebrada Bambucá).

**Repositorio:** Colecciones Paleontológicas del Departamento de Geociencias de la Universidad Nacional de Colombia.

Ej.	Dm	A	E	Du	A/Dm	E/Dm	Du/Dm
QBL-29	84,3	50,3	18,6	1,6	59,6	22,1	1,9

Dm (Diámetro total), A (Altura de la última vuelta), E (Espesor de la última vuelta), Du (diámetro umbilical).

**Descripción:** Ejemplar que representa un molde interno, en el cual se distinguen algunos trazos de la sutura, que debido a la recristalización no se pueden seguir completamente. Parte de la cámara de habitación se conserva a pesar que está aplastada. Dentro de ésta se halla una heteromorfa del género *Ankinatsytes*. De la concha se observan algunos restos. Concha involuta, lentiforme (oxycono), ombligo profundo, pared redondeada, flanco curvado. Hacia el borde ventrolateral se genera una banda que contornea el vientre que lo hace más aguzado. Vuelta más alta que ancha con su mayor espesor hacia la parte baja del flanco. Los ornamentos son muy suaves, restringidos a las líneas de crecimiento falciformes, hacia la parte del flanco se producen hundimientos o constricciones sobre la concha que no sobrepasan la banda que bordea la zona ventrolateral. Frágmacono con evidencias de mordedura de un depredador.

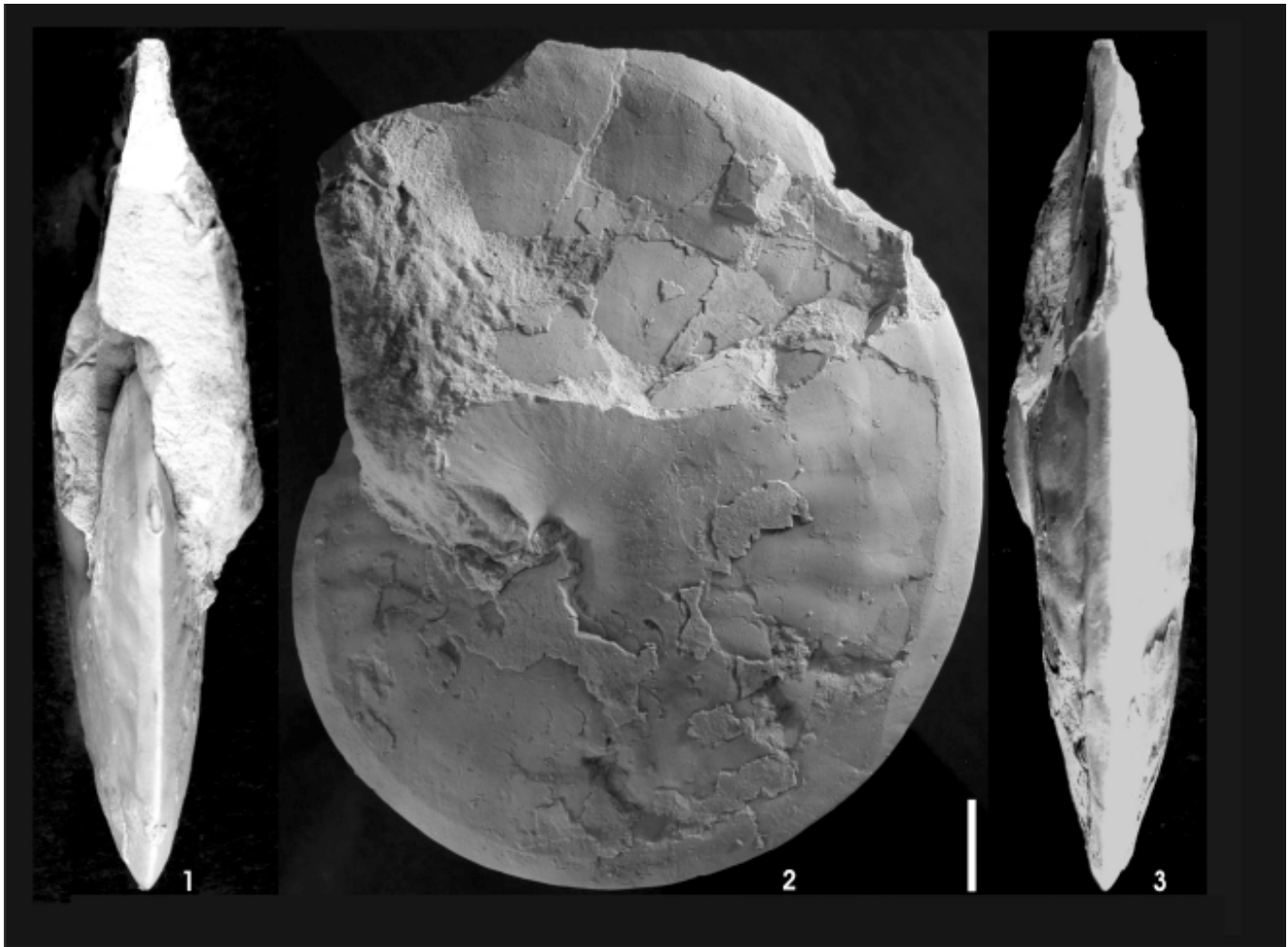
### Discusión

El borde ventral y la ornamentación de nuestro ejemplar se pueden comparar con *E. jacobii* en **Renz** (1982, pl. 36, fig. 10a-b). Las depresiones sobre el flanco son similares a *E. besairiei* Hourcq en **Hourcq** (1949, pl. I, fig. 4).

**Distribución:** Colombia, Madagascar, Nigeria, Venezuela.

**Edad:** El género *Eulophoceras* posee un rango entre el Coniaciano y el Campaniano temprano **Wright et al.**, (1996). *E. jacobii* Hourcq representa el Coniaciano temprano para **Renz** (1982) en Venezuela y para **Villamil** (1998) en Colombia. **Arkell et al.**, 1957 y **Wright et al.**, 1996 la ubican en el Santoniano tardío de Madagascar. *Eulophoceras* sp. representa para **Reyment** (1955) el Coniaciano en Nigeria.

Se acepta que el ejemplar de *E. jacobii* representa el Coniaciano temprano en Colombia siguiendo a **Renz** (1982) y **Villamil** (1988).



Plancha I. *Eulophoceras jacobi* Hourcq, fig. 1 vista de frente, fig. 2 vista lateral, fig. 3 vista de atrás. Escala 1 cm.

### Palinomorfos

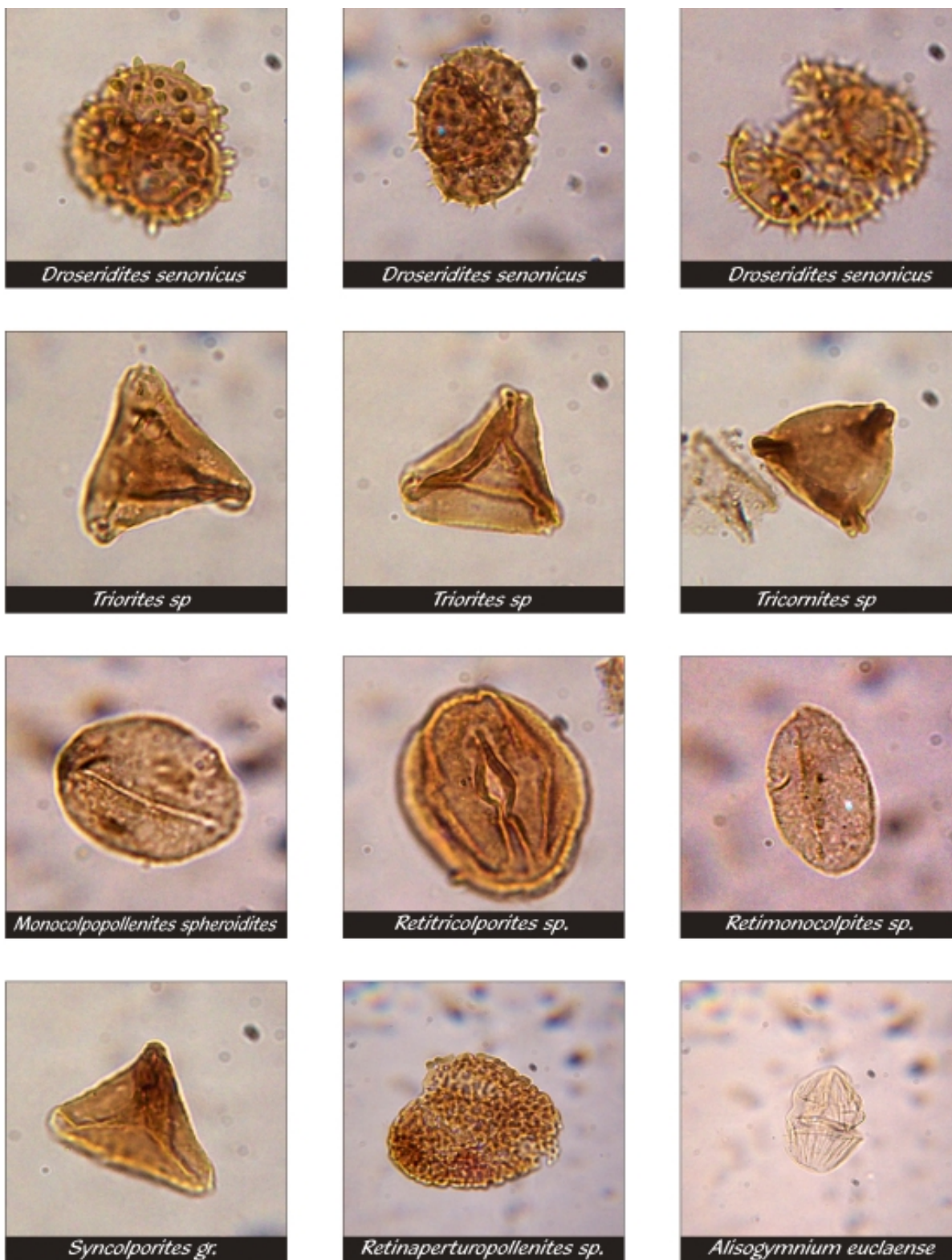
De la concreción que contenía *Eulophoceras jacobi* Hourcq se recuperaron los palinomorfos; *Droseridites senonicus*, *Monocolpopollenites spheroidites*, *Extratripurites* sp., *Triorites* spp., *Tricornites* spp., *Syncolporites* gr. *Retimonocolpites* spp., *Psilamonocolpites* spp., *Araucariacites australis*, *Cyathidites* spp., *Alisogymnium euclaensis* y *Coronifera oceanica* entre otros.

En la Tabla 1, se presenta de izquierda a derecha el nombre del palinomorfo, su presencia relativa en las placas de estudio y la distribución estratigráfica reconocida en Colombia.

Es muy importante resaltar la presencia en esta asociación palinológica de *Droseridites senonicus*, *Extratripo-*

*rites* spp., *Syncolporites* gr., *Triorites* spp. y *Tricornites* spp. palinomorfos cuya presencia se encuentra restringida en Colombia al Coniaciano y que conforman la Sub-Zona de *Triorites-Syncolporites* correspondiente a la parte inferior de la zona de *Droseridites senonicus* (Muller *et al.*, 1987). En secciones de superficie del VSM y en la Cuenca del Putumayo, sedimentos de la Sub-Zona de *Triorites-Syncolporites* se encuentran acompañando a los foraminíferos planctónicos *Whiteinella archaeocretacea*, *Whiteinella baltica*, *Hedbergella delrioensis* y *Hedbergella holmdelensis* que son elementos constituyentes de la Zona de *Dicarinella concavata* (Caron, 1985) a la cual se le ha asignado una edad Coniaciano.

De acuerdo con la información palinológica anteriormente expuesta, es posible asignar a los sedimentos en



**Plancha II.** *Droseridites senonicus*, *Triorites sp.*, *Monocolpopollenites spheroidites*, *Retitricolporites sp.*, *Retimonocolpites sp.*, *Syncolporites gr.*, *Retinaperturopollenites sp.*, *Alisogymnium euclaense*.

**Tabla 1.** Distribución Estratigráfica de Palinomorfos recuperados

Recobro de palinomorfos	No. granos	Turoniano	Coniaciano	Santoniano	Campaniano	Maastrichtiano
<b>Pollen</b>						
<i>Extratropites</i> spp.	2		xxxxxxxx			
<i>Syncolporites</i> group	3		xxxxxxxx			
<i>Tricornites</i> spp.	2		xxxxxxxx			
<i>Triorites</i> spp.	2		xxxxxxxx			
<i>Droseridites senonicus</i>	5		xxxxxxxxxxxxxxxx			
<i>Tetracolpites</i> sp. "minutus"	1		xxxxxxxxxxxxxxxx			
<i>Monocolpopollenites spheroidites</i>	4		xx			
<i>Retinaperturopollenites</i> sp.	1	<<xx				
<i>Tricolporites</i> group	3	<<xx				
<i>Psilamonocolpites</i> sp.	1	<<xx				
<i>Retimonocolpites</i> sp.	1	<<xx				
<i>Araucariacites australis</i>	1	<<xx				
<b>Esporas</b>						
<i>Cyathidites</i> spp. "small"	2	<<xx				
<i>Concavisporites</i> sp.	1	<<xx				
<b>Dinoflagelados</b>						
<i>Alisogymnium euclaense</i>	1		xx			
<i>Coronifera oceanica</i>	1	<<xx				

los cuales se encontró *Eulophoceras jacobi* Hourcq un ambiente de depósito Marino Nerítico Interno.

**Conclusiones**

De la muestra con *Eulophoceras jacobi* Hourcq se realizó una preparación que arrojó una asociación característica de palinomorfos con la cual se pretende calibrar las dos técnicas de trabajo con macro y microfósiles.

La asociación de *Eulophoceras jacobi* Hourcq con *Droseridites senonicus*, *Monocolpopollenites spheroidites*, *Extratropites* sp., *Triorites* spp., *Tricornites* spp., *Syncolporites* gr. *Retimonocolpites* spp., *Psilamonocolpites* spp., *Araucariacites australis*, *Cyathidites* spp., *Alisogymnium euclaense* y *Coronifera oceanica* representa el Coniaciano temprano, que se ubica a la parte superior del segmento inferior de la Formación Loma Gorda en la sección de la Quebrada Bambucá.

**Agradecimientos**

P. P. Manifiesto mis más sinceros agradecimientos a G. Renzoni por haberme dado la oportunidad de participar en el proyecto "Litoestratigrafía del Valle del Magdalena", del mismo modo, a los alumnos de la asignatura Paleontología I de la Carrera de Geología (Departamento de Geociencias – Universidad Nacional de Colombia) por su compañía, colaboración y asistencia en el trabajo de campo entre el 2000 y el 2005.

Igualmente agradezco al gobierno alemán, que por intermedio del DAAD (beca A/03/06854) junto con el profesor Doctor Peter Bengtson (Universidad de Heidelberg), me permitió trabajar material del proyecto de investigación (DIB-20101001669) "Estratigrafía de las sedimentitas del Turoniano de los Andes centrales de Colombia" financiado por la División de Investigaciones Sede Bogotá DIB, de la Universidad Nacional de Colombia.

**Bibliografía**

- Arkell, W., Kummel, B. & Wright, C.** 1957. Treatise on Invertebrate Paleontology, Part. L, Mollusca 4, Cephalopoda Ammonoidea. Geol. Soc. of Amer. 490 pgs. Nueva York.
- Caron, M.** 1957. Cretaceous planktonic foraminifera: 1-86 pp. En Bolli, H., Saunders, J.B. & Perch-Nielsen, K., eds. Plankton Stratigraphy. Cambridge Earth Sciences Series, University Press, Melbourne.
- Guerrero, J., Sarmiento, G. & Navarrete, R.** 2000. The Stratigraphy of the W Side of the Cretaceous Colombian Basin in the Upper Magdalena Valley. Reevaluation of Selected Areas and Type Localities Including Aipe, Guaduas, Ortega, and Piedras. Geología Colombiana, (25): 45-110. Bogotá.
- Hourcq, V.** 1949. Sur quelques ammonites du Sénonien. Paléontologie de Madagascar. XXVIII. Ann. Paléontol., (XXXV): 87-117.
- Muller, J., Di Giacomo, E. & Van Erve, W.** 1987. A Palynological zonation for the Cretaceous, Tertiary and Quaternary of Northern South America. AASP Contribution Series Number 19.
- Patarroyo, P.** 1993. Las Formaciones Cretácicas Hondita y Loma Gorda, a propósito de la Nomenclatura Estratigráfica del Valle Superior del Magdalena. VI CONGRESO COLOMBIANO DE GEOLOGIA, (Tomo III): 803 - 814. Medellín.
- Patarroyo, P., Andrade, E. & Bengtson, P.** 2005. Chronostratigraphic implications of the ammonite-inoceramid associations at the Turonian-Coniacian transition in the Upper Magdalena Valley, Colombia. (Resúmenes 19° Congreso Latinoamericano de Geología -Potsdam). Terra Nostra (05/ 1), pp. 92-93. Potsdam.
- Porta de, J.** 1965. Estratigrafía del Cretácico Superior y Terciario en el extremo S del Valle Medio del Magdalena. Bol. de Geol. UIS, (19): 5-50, Bucaramanga.
- Renz, O.** 1982. The Cretaceous ammonites of Venezuela. Birkhäuser Verlag, 132 pgs., 40 lam. Basilea.
- Reyment, R.** 1955. The Cretaceous Ammonoidea of southern Nigeria and the southern Cameroons. Geol. Sur. of Nigeria. Bull. (25): 9-107.
- Vergara** 1994. Stratigraphic, micropaleontologic and organic geochemical relations in the Cretaceous of the Upper Magdalena Valley, Colombia. Giessener Geol. Schriften, (50): 179 pgs. Giessen.
- Villamil, T.** 1996. Paleobiology of two new species of the bivalve *Anomia* from Colombia and Venezuela and the importance of the genus in recognition of the base of the Turonian. Cretaceous Research (17): 607-632.
- Villamil & Arango, C.** 1998. Integrated stratigraphy of latest Cenomanian and early Turonian facies of Colombia. En: Paleogeographic Evolution and Non-glacial Eustacy, Northern South America, SEPM Spec. Publ. (58): 129-159.
- Wright, C., Callomon, J., Howarth, J.** 1996. Cretaceous Ammonoidea. In **Kaesler, R. L. (ed.)**. Treatise on Invert. Paleontology. Part L. Mollusca 4 Revised, 4, Geol. Soc. Am. and Univ. Kansas, 362 p. Boulder.

Recibido el 13 de febrero de 2006

Aceptado para su publicación el 16 de agosto de 2006

# SÍNTESIS Y CARACTERIZACIÓN DE PEROVSKITAS DOBLES TIPO $\text{Sr}_2\text{FeMoO}_6$

por

K. López<sup>1</sup> & A. Mariño<sup>2</sup>

## Resumen

**López, K. & A. Mariño:** Síntesis y caracterización de perovskitas dobles tipo  $\text{Sr}_2\text{FeMoO}_6$ . Rev. Acad. Colomb. Cienc. **30** (117): 511-516, 2006. ISSN 0370-3908.

En este trabajo se investigaron las propiedades eléctricas y magnéticas de perovskitas dobles del tipo  $\text{Sr}_2\text{FeMoO}_6$  preparadas por reacción de estado sólido utilizando dos rutinas y diferentes tiempos de síntesis: síntesis en atmósfera reductora y síntesis en Vacío. Las muestras se analizaron en su morfología y estructura mediante microscopía de fuerza atómica y difracción de rayos X respectivamente. La caracterización eléctrica presentó esencialmente un comportamiento semiconductor en el rango de temperaturas medido (160K-320K) y magnetorresistencia a bajas temperaturas. Las mejores características magnetorresistivas se observaron en las muestras producidas en vacío. Las variaciones en las propiedades eléctricas y magnéticas observadas se pueden asociar a factores tales como el desorden catiónico y a las impurezas presentes.

**Palabras clave:** Perovskitas dobles, Magneto-resistencia colosal (MRC),  $\text{Sr}_2\text{FeMoO}_6$ .

## Abstract

Electric and magnetic properties of double perovskites  $\text{Sr}_2\text{FeMoO}_6$  type were investigated. The samples were prepared by solid state reaction method using two routes and different process time : synthesis in a reducing atmosphere and in vacuum. The structure and morphology of the samples were analyzed by XRD and atomic microscopy. Electric measurements showed mainly both a semiconducting behavior in the temperature range 160K to 320K and magneto-resistance at low temperatures. Samples produced in vacuum displayed the higher magneto-resistance. Cationic disorder and impurities can be responsible for the electric and magnetic behavior observed in the samples.

**Key words:** Double perovskites, Colossal magnetoresistance (CMR),  $\text{Sr}_2\text{FeMoO}_6$ .

<sup>1</sup> Departamento de Química, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá.

<sup>2</sup> Departamento de Física, Universidad Nacional de Colombia. Bogotá. Correo electrónico: amarinoca@unal.edu.co



## Introducción

El fenómeno físico conocido como Magnetorresistencia colosal (CMR) ha tenido en los últimos años un gran interés investigativo en el área de materiales, tanto por el hecho de que estos nuevos materiales generan un sistema ideal en el cual sus propiedades pueden ser investigadas al igual que en sistemas en los que las interacciones electrón - red juegan un papel fundamental, como debido a la gran utilidad tecnológica que genera el desarrollo de materiales con estas propiedades, entre cuyas aplicaciones se cuenta el desarrollo de sensores y dispositivos de almacenamiento (memorias magnéticas) y más recientemente las relacionadas con la electrónica magnética o spintrónica. La Magneto-resistencia Colosal caracterizada por un marcado decrecimiento de la resistividad eléctrica por efecto de un campo magnético, se determina a partir de la relación:  $R(H=O) - R(H) / R(H)$ .

Los primeros materiales magnetorresistivos estudiados en los últimos tiempos fueron las manganitas tipo perovskita. Helmolt y colaboradores observaron en 1993 una magnetorresistencia mayor del 60% de su valor sin campo magnético en películas delgadas de  $\text{La}_{2/3}\text{Ba}_{1/3}\text{MnO}_3$  crecidas epitaxialmente sobre  $\text{SrTiO}_3$ <sup>1</sup>, a su vez, Jin y colaboradores en 1994 midieron magnetorresistencia de 93% en películas delgadas de  $\text{La}_{0.67}\text{Ca}_{0.33}\text{MnO}_3$  con campos de  $6\text{T}$ <sup>2</sup>.

Posteriormente los estudios se orientaron hacia la producción y caracterización de manganitas dopadas en un intento por incrementar las temperaturas de transición y disminuir el campo aplicado, condiciones requeridas para obtener una apreciable respuesta magnetorresistiva en estos materiales<sup>3,4</sup>.

Recientemente K. I. Kobayashi y colaboradores, reportaron que la perovskita doble  $\text{Sr}_2\text{FeMoO}_6$  de fórmula general  $\text{A}_2\text{BB}'\text{O}_6$ , presenta una Temperatura de Curie ( $T_c$ ) de 415 K y una pronunciada magnetorresistencia colosal (CMR) a bajos campos magnéticos, en comparación con las manganitas dopadas<sup>5</sup>. Además de estos atributos tecnológicamente deseables en el material, la perovskita  $\text{Sr}_2\text{FeMoO}_6$  presenta también un gran interés desde el punto de vista de la investigación básica con el objeto de establecer los aspectos fundamentales a nivel estructural, eléctrico y magnético, que permitan explicar las sorprendentes propiedades de este nuevo tipo de materiales<sup>6</sup>.

En este trabajo se estudian las propiedades eléctricas, magnéticas, estructurales y morfológicas de la perovskita doble de  $\text{Sr}_2\text{FeMoO}_6$ , en función del método de síntesis (atmósfera reductora y vacío), utilizando técnicas de ca-

racterización como Microscopía electrónica de barrido (SEM), Microscopía de Fuerza atómica, Difracción de rayos X y Magnetorresistividad con campos aplicados  $< 1\text{T}$ , perpendiculares a la superficie de las muestras.

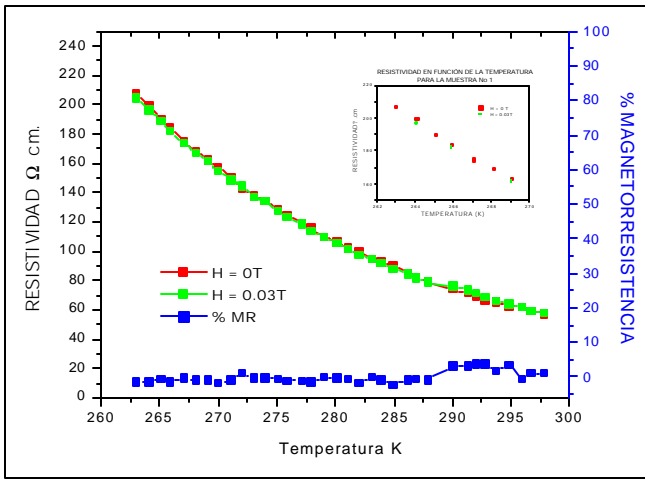
## Parte experimental

La síntesis del  $\text{Sr}_2\text{FeMoO}_6$  se llevó a cabo mediante reacción de estado sólido a partir de óxidos precursores de alta pureza: óxido de estroncio ( $\text{SrO}$ ), óxido férrico ( $\text{Fe}_2\text{O}_3$ ) y óxido de molibdeno (VI) ( $\text{MoO}_3$ ) en cantidades estequiométricas. Todos los óxidos fueron macerados por dos horas en un molino de bolas y calentados durante 4 horas en aire a  $900^\circ\text{C}$ . Posteriormente fueron molidos nuevamente, calentados por aproximadamente 1 hora en aire a  $900^\circ\text{C}$  y compactados en forma de pastillas de un centímetro de diámetro con presiones de aproximadamente 5 toneladas/cm<sup>2</sup>. Estas muestras así preparadas fueron divididas en dos series, las cuales se sometieron a dos tratamientos térmicos diferentes: en atmósfera reductora *Serie 1* y en vacío *Serie 2*. Los resultados experimentales que se presentan en este trabajo corresponden a las muestras M1 y M2 de la serie 1 y la muestra M6 de la serie 2 las cuales presentaron las mejores características magnetorresistivas.

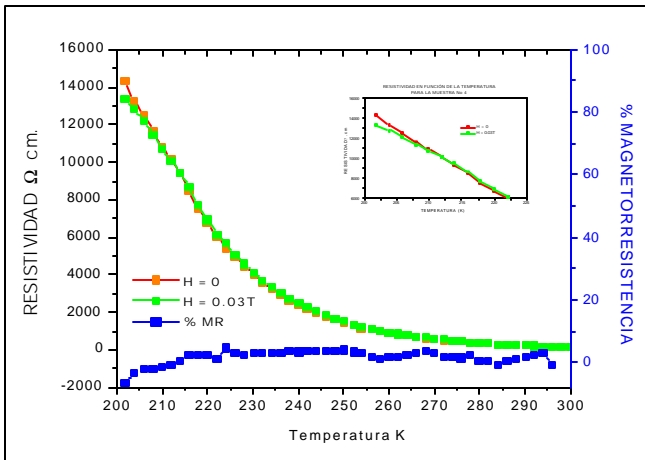
A la muestra M1 se le realizó un tratamiento térmico a  $970^\circ\text{C}$  por 5 horas (con una velocidad de calentamiento y enfriamiento de  $20^\circ\text{C}/\text{min}$ ) en una atmósfera de 5%  $\text{N}_2$  - 10%  $\text{H}_2$  - Ar y adicionalmente 5 horas a la misma temperatura en atmósfera de Ar. La muestra M4 se sometió a un tratamiento térmico a  $970^\circ\text{C}$  por 12 h en una atmósfera de 5%  $\text{N}_2$  - 10%  $\text{H}_2$  - Ar con una velocidad de calentamiento y enfriamiento de  $20^\circ\text{C}/\text{min}$ . La muestra preparada en vacío M6 se sinterizó a  $970^\circ\text{C}$  por 5 horas en 5%  $\text{N}_2$  - 10%  $\text{H}_2$  - Ar y posteriormente se encapsulo al vacío en un tubo de cuarzo y se calentó nuevamente a  $970^\circ\text{C}$  por 48 horas.

## Resultados y discusión

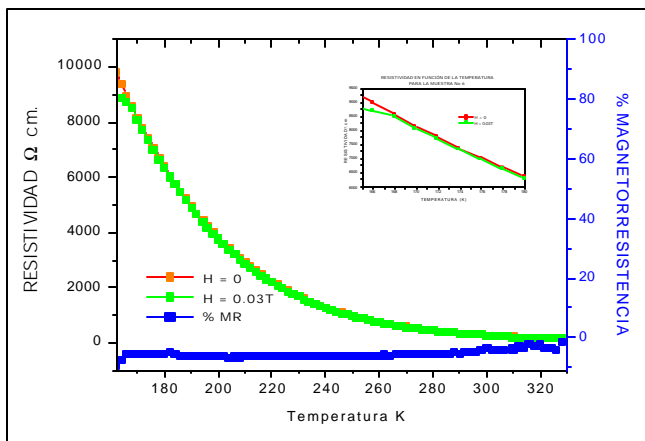
Las Figuras 1, 2 y 3 muestran la resistividad y la magnetorresistencia en función de la temperatura de las muestras M1, M4 y M6 respectivamente. Estas medidas se realizaron por el método de cuatro sondas y con el campo magnético aplicado perpendicular a la superficie de las muestras. El comportamiento de la resistividad versus la temperatura en todas las muestras corresponde a un comportamiento semiconductor en todo el rango de temperatura medido (160K-320 K). Existen sin embargo diferencias en cuanto al valor de la resistividad de las muestras, lo cual aparentemente depende del método de preparación y puede ser atribuido esencialmente a sus diferencias morfológicas (Figuras 4, 5 y 6) y de composición. Como se observa en la Fig.4, la muestra M1 presenta



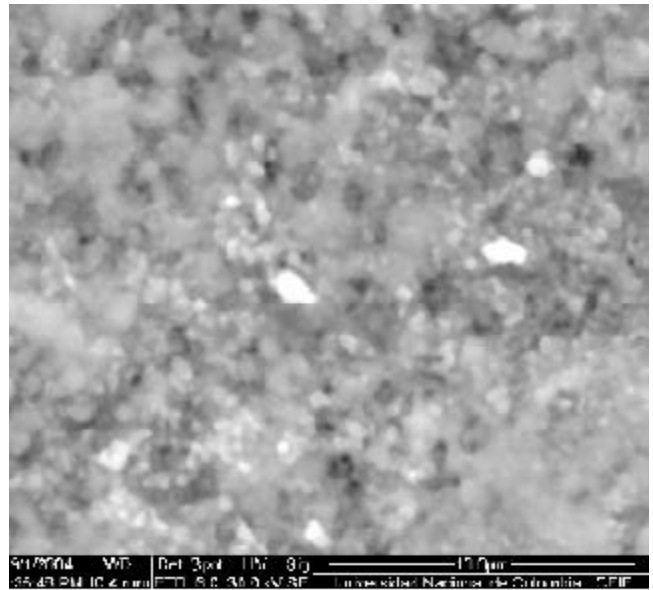
**Figura 1.** Resistividad y % de Magnetorresistencia en función de la temperatura para M1 con  $H = 0.03\text{T}$ . La curva insertada es  $R$  Vs  $T$  para M1 entre 262 y 270.



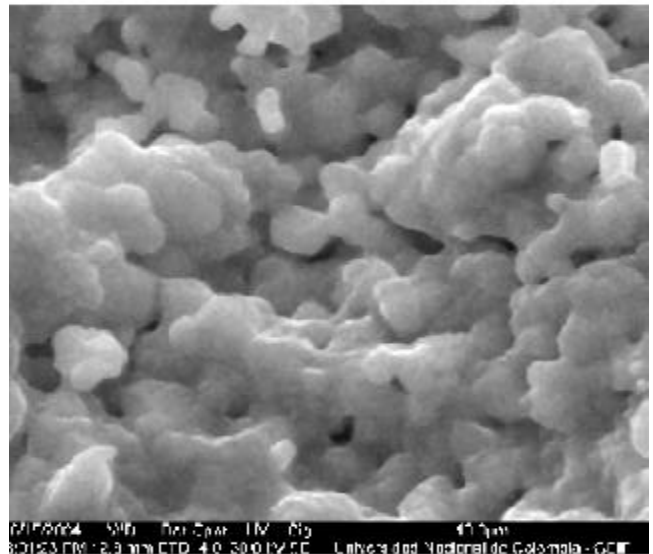
**Figura 2.** Resistividad y % MR en función de la temperatura para M4 con  $H = 0.03\text{T}$ . La curva insertada es  $R$  Vs  $T$  para M4 entre 200 y 225 K.



**Figura 3.** Resistividad y % MR en función de la temperatura para la muestra M6 con  $H = 0.03\text{T}$ . La curva insertada es  $R$  Vs  $T$  para M6 entre 165 y 180 K.



**Figura 4.** Micrografía SEM para la muestra M1.



**Figura 5.** Micrografía SEM para la muestra M4.

una estructura granular inhomogénea, compuesta adicionalmente por zonas oscuras, zonas claras y poros. Los análisis de composición obtenidos por EDX indican que las zonas claras, ricas en  $\text{O}_2$ , tienen una composición cercana al compuesto  $\text{SrMoO}_4$ , una de las principales impurezas en la síntesis del molibdato de estroncio-hierro, lo cual se correlaciona bien con lo observado por rayos X. Las zonas oscuras presentan una composición que se asemeja más a la composición de la fase  $\text{Sr}_2\text{FeMoO}_6$ .

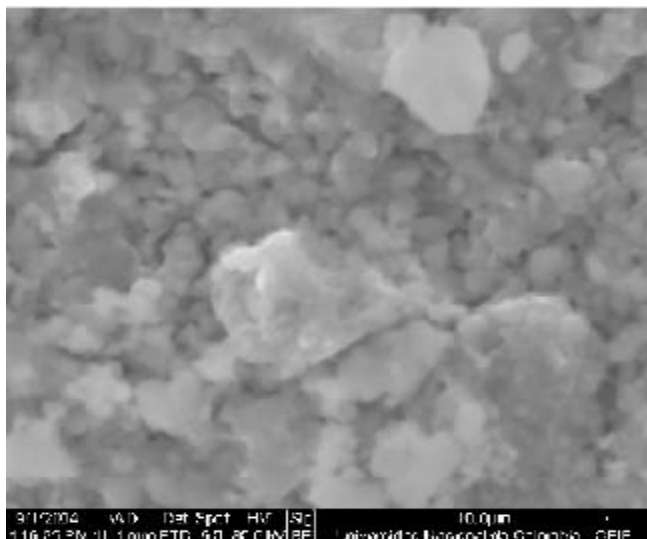


Figura 6. Micrografía SEM para la muestra M6.

La muestra M1 presentó una magnetorresistencia de bajo campo del orden de -1.5%, aproximadamente constante en un rango de temperaturas entre 265 y 285K, para H Aplicado perpendicular a la superficie de la muestra de 0.03 T, para campos magnéticos superiores sólo se observa magnetorresistencia ordinaria, es decir, un incremento de la resistividad con el campo aplicado. Ahora bien, a pesar de que la muestra M4 ostenta una mayor resistividad a temperatura ambiente (aprox. 2 veces la de M1) presenta una mayor magnetorresistencia del orden del -7% y constante en el rango de temperaturas entre 200K y 220K para campos aplicados de 0.03T. Las micrografías SEM de M4 (Fig. 5) presentan una estructura granular más homogénea, poca porosidad y aumento en la conectividad de los granos (Fundido parcial). La microscopía de fuerza atómica (AFM) por otra parte revela tamaños de grano del orden de 1mm ostensiblemente menores que los obtenidos para la muestra M1 de aprox. 1.6μm. El aumento de la resistividad de M4 puede entonces ser atribuida al incremento en las fronteras de grano y su mayor magnetorresistencia posiblemente debida al porcentaje no tan alto de impurezas presentes en esta muestra, ver tabla 1.

La muestra M6, sintetizada en vacío, presenta una estructura granular relativamente homogénea con tamaños de grano promedio de 0.97μm y aglomerados (Fig. 6); aunque presentó una mayor resistividad a temperatura ambiente respecto a M1 y M4, lo cual puede estar relacionado al igual que en M4 con el menor tamaño de grano, mostró a su vez una mayor magnetorresistencia ( $\approx -15.0\%$  a  $H=0.03T$  en un rango de temperaturas de aprox. 160K a

Tabla 1. Parámetros de red y nivel de impurezas ( $h(SrMoO_4) / h(Sr_2FeMoO_6)$ ) para las muestras obtenidas por reacción de estado sólido en atmósfera inerte y vacío.

Muestra	a (Å)	b (Å)	$h(SrMoO_4) / h(Sr_2FeMoO_6)$
M1	5.541/0.002	7.866/0.004	1.6
M4	5.573/0.003	7.911/0.006	0.3
M6	5.5705/0.0007	7.901/0.001	0.5

320K), que persiste a campos aplicados mayores hasta aproximadamente 0.06T. Vale la pena resaltar que la magnetorresistencia de bajo campo en M6 es aproximadamente independiente de la temperatura, como ha sido observado en este tipo de materiales<sup>7</sup>. Ahora bien, el mejoramiento de las propiedades magnetorresistivas observado en esta muestra, podría interpretarse más que como el resultado de un proceso de síntesis, como una manifestación del papel preponderante tanto del tipo de impurezas como de la cantidad de impurezas presente. Algunos autores relacionan las propiedades magnéticas del  $Sr_2FeMoO_6$  con la formación de impurezas tipo  $SrMoO_4$  en las fronteras de grano; esta impureza actuaría aumentando la barrera de tunelamiento intergranular y el transporte de spin polarizado, aumentando sustancialmente la magnetorresistencia de bajo campo<sup>8</sup>.

Los patrones de difracción de Rayos X (Figuras 7, 8 y 9), tomados con un difractómetro D8 Advanced Druker AXS con geometría de haces paralelos y monocromador secundario de grafito, usando como radiación incidente la línea  $K\alpha_1$  del cobre ( $\lambda=1.544056\text{Å}$ ), indican la presen-

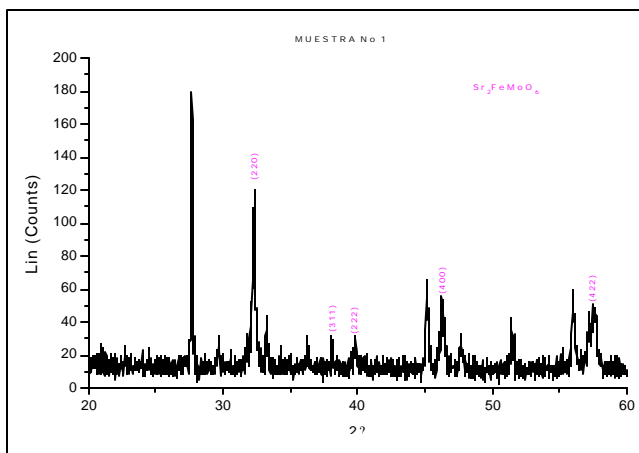
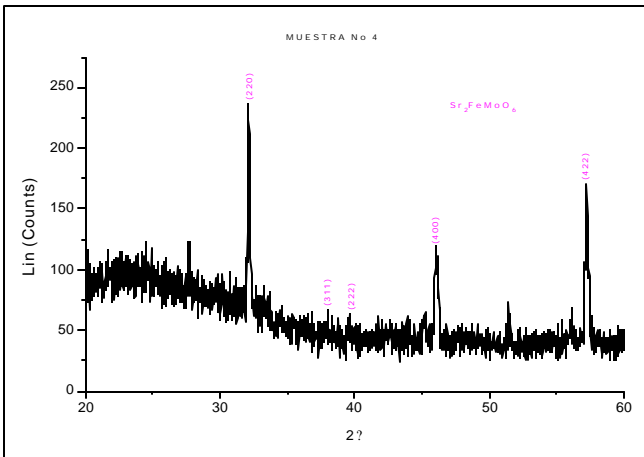
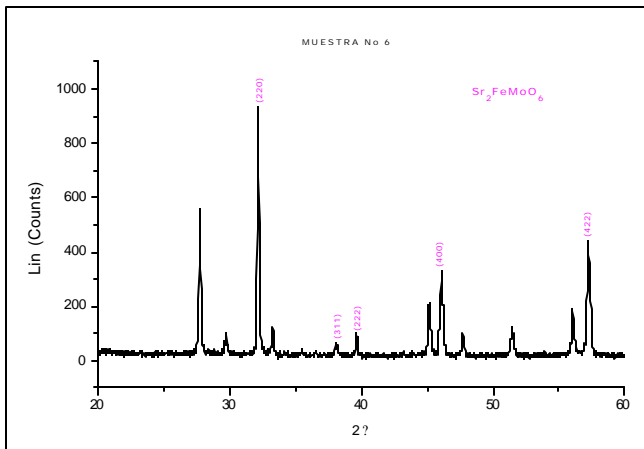


Figura 7. Espectro de difracción de Rayos X para la muestra M1. Los picos marcados corresponden a la fase  $Sr_2FeMoO_6$ , los no marcados a la impureza  $SrMoO_4$ .



**Figura 8.** Espectro de difracción de rayos X para la muestra M4. Los picos marcados corresponden a la fase  $\text{Sr}_2\text{FeMoO}_6$ , los no marcados a la impureza  $\text{SrMoO}_4$ .



**Figura 9.** Espectro de difracción de rayos X para la muestra M6. Los picos marcados corresponden a la fase  $\text{Sr}_2\text{FeMoO}_6$ , los no marcados a la impureza  $\text{SrMoO}_4$ .

cia preponderante de la fase  $\text{Sr}_2\text{FeMoO}_6$  y fases impuras del tipo  $\text{SrMoO}_4$  principalmente. Cualitativamente la cantidad de impurezas presente en cada muestra se determinó a partir de las relaciones de intensidad de los picos característicos de cada fase, la cual como se observa, depende del método de preparación. Los parámetros de red obtenidos para las tres muestras se presentan en la tabla 1, el grupo espacial determinado para la fase  $\text{Sr}_2\text{FeMoO}_6$  corresponde al  $P4/mmm$  (123) tetragonal.

Los valores de los parámetros de red  $a$  y  $c$  obtenidos en este trabajo variaron con la cantidad de impurezas, obteniéndose los mayores valores en la muestra M4 que presentó el menor porcentaje de impurezas. Tabla 1. El aumento considerable de los parámetros de red ha sido

asociado también con un mayor desorden catiónico, el cual sería a la vez responsable de la disminución de las propiedades magnetorresistivas<sup>9</sup>.

## Conclusiones

- Se sintetizaron muestras policristalinas de  $\text{Sr}_2\text{FeMoO}_6$  por reacción de estado sólido utilizando dos rutinas de síntesis y diferentes tiempos: Atmósfera Reductora y Vacío. Estos diferentes métodos de síntesis produjeron muestras del tipo  $\text{Sr}_2\text{FeMoO}_6$  con propiedades magnéticas y estructurales diferentes.
- La diferente granularidad de las muestras, la cual depende marcadamente del proceso de síntesis, se correlaciona bien con los valores y el comportamiento de la resistencia eléctrica.
- Muestras más puras, es decir con una mayor cantidad de la fase  $\text{Sr}_2\text{FeMoO}_6$  (como M4) pueden obtenerse a relativamente bajas temperaturas ( $970^\circ\text{C}$ ) con tratamientos térmicos largos en el tiempo.
- El aumento significativo de los parámetro de red, determinado por difracción de rayos X, el cual se correlaciona bien con la disminución de la cantidad de impurezas presentes en las muestras ha sido atribuido a un mayor desorden catiónico.
- El tratamiento en atmósfera reductora parece ser más eficiente que el tratamiento en vacío para la preparación de muestras puras (Menor cantidad de impurezas), lo que sin embargo no conduce a una mayor respuesta magnetorresistiva.
- La cantidad de impurezas del tipo  $\text{SrMoO}_4$  presentes en todas las muestras parecen ser un factor determinante de sus propiedades magnetorresistivas. El mayor desorden catiónico asociado con la disminución de la cantidad de impurezas, parece jugar también un papel importante en las propiedades magnéticas del material.

## Bibliografía

1. R. Helmolt, J. Wecker, B. Holzapfel and K. Samwer. 1993. Phys. Rev. Lett. **71**: 2331-2333.
2. S. Jin, T.H. Tiefel, M. McCormack et al. 1994. Science **264**: 413-415.
3. H.Y. Hwang and S.W. Chong. 1996. Phys. Rev. Lett. **77**: 2041.
4. N.D. Martgor, G. Bunell et al. 1977. Nature, **387**: 266.
5. K. I. Kobayashi, T. Kimura, H. Sawada, K. Terakura and Y. Tokura. 1998. Nature. **395**: 677-680.

6. **D. Sarma.** 2001. *Current Opinion in Solid State & Material Science.* 5: 261-268.
7. **J. Navarro** 2003. Trabajo Doctoral en Física. Universidad Autónoma de Barcelona y referencias internas.
8. **R.D Sánchez., A. Caneiro, D. Niebieskikwiat et al.** 2002. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials.* **226-230:** 895-899.
9. **R.D Sánchez, J. A. Alonso, M. Gándeiz et al.** 2002. *Phys Rev. B.* **65:** 10442.

Recibido el 19 de septiembre de 2005

Aceptado para su publicación el 30 de marzo de 2006

# COMPARACIÓN DE LOS TRATAMIENTOS EN RADIOTERAPIA CONVENCIONAL Y CONFORMAL PARA CÁNCER DE PRÓSTATA POR MEDIO DE DOSIMETRÍA TERMOLUMINISCENTE

por

L. Mahecha<sup>1</sup>, M.C. Plazas<sup>2</sup>, H. Machado<sup>3</sup> & S. Perea<sup>4</sup>

## Resumen

**Mahecha, L., M.C. Plazas, H. Machado & S. Perea:** Comparación de los tratamientos en radioterapia convencional y conformal para cáncer de próstata por medio de dosimetría termoluminiscente. Rev. Acad. Colomb. Cienc. **30** (117): 517-524, 2006. ISSN 0370-3908.

En el tratamiento del cáncer de próstata, la dosis prescrita por el médico oncólogo depende de la extensión de la enfermedad y de la dosis de tolerancia de los tejidos adyacentes normales. Para lograr un óptimo control tumoral en estadios tempranos y localmente avanzados, es necesario escalar la dosis con probabilidad baja de morbilidad a nivel rectal y vesical. Esto se logra por medio de la radioterapia conformal. En el instituto nacional de cancerología esta técnica es usada, pero surgen dos interrogantes de los radioncólogos y físicos médicos: de acuerdo a los protocolos clínicos, la técnica conformal entrega una dosis menor a las estructuras adyacentes, ¿existe un método experimental que verifique dosimétricamente la certeza de esta afirmación?, y ¿los sistemas de planeación dosimétricos calculan adecuadamente las dosis en los diferentes órganos como lo recomiendan los protocolos de control de calidad en radiaciones ionizantes del organismo internacional de energía atómica? Este trabajo pretende dar respuesta a estas preguntas. Mediante dosimetría termoluminiscente y utilizando simuladores físicos, se midió la dosis absorbida en el volumen blanco y en los tejidos adyacentes en radioterapia conformal y convencional. Se mostró que órganos como recto y vejiga reciben menor dosis en radioterapia conformal, disminuyendo de esta forma su probabilidad de morbilidad. Adicionalmente, se compararon las lecturas de los dosímetros termoluminiscentes con los valores de las dosis suministrados por el sistema de planeación dosimétrico eclipse concluyendo que la dosis prescrita al paciente es la realmente entregada como lo exige los programas de control de calidad en radioterapia.

<sup>1</sup> Grupo de Física Médica, Departamento de Física, Universidad Nacional de Colombia.

<sup>2</sup> Grupo de Física Médica, Departamento de Física, Universidad Nacional de Colombia.

<sup>3</sup> Grupo de Física Médica, Instituto Nacional de Cancerología E.S.E.

<sup>4</sup> Grupo de Radioterapia, Instituto Nacional de Cancerología E.S.E.

**Palabras clave:** Radioterapia convencional, radioterapia conformal, cáncer, próstata, dosimetría termoluminiscente.

### Abstract

In the prostate cancer treatment, the dose prescribed by the medical radio-oncologist depends on the extension of the disease and the threshold dose of the adjacent healthy tissues. In order to achieve an optimal tumoral control in early and locally advanced stages, it is necessary to increase the dose with a low morbidity probability at the vesicle and rectal level. This is achieved through conformal radiotherapy. The Instituto Nacional de Cancerología uses this technique, but two questions arise from the medical-physicists and medical radio-oncologist: In accordance with clinical protocols, the conformal radiotherapy delivers a low dose to the adjacent healthy tissues. What experimental method exists that can prove with certainty the veracity of this affirmation? And, Do the dosimetric simulation systems calculate suitably the dose for each tissues, as recommended by *International Atomic Energy Agency* quality control programs for ionizer radiation? This paper seeks to answer these questions. Through thermoluminescent dosimetry and the use of a physical simulator, we measured the absorbed dose at the target volume and the adjacent tissues using conformal and conventional radiotherapy. We proved that organs such as the rectum and bladder, receive a minor dose in conformal radiotherapy, hence reducing their morbidity probability. In addition, the readings from the thermoluminescent dosimeters and the doses calculated by the ECLIPSE dosimetric system were compared, concluding that the patient's prescribed dose is effectively delivered as recommended by the quality control programs in radiotherapy.

**Key words:** Conventional radiotherapy, conformal radiotherapy, cancer, prostate, thermoluminescence dosimetry.

### Introducción

El cáncer puede ser controlado por medio de cuatro tipos de tratamientos, los cuales se eligen de acuerdo al estadio de la enfermedad y a criterio del médico oncólogo: la cirugía, la quimioterapia, la inmunoterapia y con radiaciones ionizantes llamada radioterapia.

Ésta última es aplicada desde el descubrimiento de los rayos X por Roentgen en 1895 y del radio y polonio por los esposos Curie en 1898. Se han mejorado las técnicas y los procedimientos para brindar una mayor seguridad y efectividad en los tratamientos al paciente y al personal ocupacionalmente expuesto.

Las estadísticas del Instituto Nacional de Cancerología concluyeron que en el período 2000-2002, el cáncer de próstata fue la segunda causa básica de defunción en Colombia con 6.099 muertes seguida del cáncer de pulmón con 5232 y antecedida por cáncer de estómago con 7744<sup>1</sup>.

El cáncer de próstata es dependiente de la dosis de acuerdo a la extensión de la enfermedad  $66\text{Gy} < d < 76\text{Gy}$ . Cuando el estadio de la enfermedad aumenta, es necesario escalar la dosis prescrita al tumor, pero los tejidos adyacentes normales, como vejiga y recto, son limitantes de

dosis debido a su tolerancia a la radiación. La radioterapia convencional permite dar una dosis total óptima en el volumen tumoral entre 66-70 Gy para no incrementar la morbilidad a nivel rectal y vesical. Si la enfermedad se encuentra en un estadio localmente avanzado, se puede lograr un buen control tumoral escalando la dosis a 76 Gy, lo cual no es conveniente para los órganos adyacentes. La radioterapia 3D o conformal permite dicho escalamiento dirigido a un volumen tumoral, protegiendo los tejidos normales próximos de sobreexposición<sup>2,3</sup>. En el Instituto Nacional de Cancerología, esta técnica es recientemente usada y se aplica en el tratamiento para cáncer de próstata. Surgen dos observaciones de los radioncólogos y físicos médicos: ¿Al aumentar la dosis en radioterapia conformal los tejidos adyacentes reciben menor dosis que el volumen blanco en comparación con el tratamiento convencional?, y, ¿La dosis prescrita en los sistemas computarizados de planeación es realmente la realmente entregada al paciente como lo recomiendan, los programas de control de la calidad en radioterapia?

En este trabajo se estudia experimentalmente la dosis absorbida por los tejidos expuestos usando un simulador físico y se compara con la dosis calculada en el sistema de planeación Eclipse del Instituto Nacional de Cancerología E.S.E.

### Parte experimental

El cáncer es el crecimiento tisular patológico originado por la proliferación continua de las células anormales, con capacidad de expansión y destrucción local e invasión de otros tejidos.

Se distinguen tres tipos principalmente, los carcinomas que afectan el tejido epitelial, los sarcomas que afectan los tejidos conjuntivos y las leucemias que afectan las células sanguíneas.

La próstata está alojada en el compartimiento o nicho prostático inmediatamente por debajo de la vejiga, rodeando la uretra. Tiene forma de castaña o triángulo achatado en su base o cara superior. Pesa 20 a 25 g y mide 3 x 4 x 2,5 cm en el hombre adulto

Dependiendo del estado de la enfermedad, el médico radio-oncólogo decide el tratamiento a seguir, de acuerdo a protocolos ya establecidos<sup>4</sup>.

Una de las técnicas usadas en el tratamiento del cáncer es la *radioterapia* y consiste en la exposición de tejidos a radiaciones ionizantes. Se usan fuentes naturales o artificiales de radiación. El mecanismo radiobiológico de acción a nivel celular es la producción de radicales libres, nocivos para las estructuras vitales de la célula, como por ejemplo en el núcleo donde se localiza el ADN.

Existen dos tipos fundamentales de terapia con radiaciones<sup>5</sup>:

- Radioterapia Externa. Llamada también teleterapia. La exposición se hace a distancia de la fuente. Se usan fuentes como <sup>60</sup>Co, electrones y partículas pesadas.
- Radioterapia Interna. Llamada también braquiterapia. Se usan fuentes selladas de radiación como <sup>192</sup>Ir o <sup>103</sup>Pd y <sup>125</sup>I en forma de semillas, túbulos o alambres que se colocan dentro del tumor o de cavidades de órganos. Esta práctica se realiza en el quirófano con anestesia general para no provocar dolor.

Para radioterapia externa existen dos técnicas:

- Radioterapia convencional: se planea con imágenes 2D (placas radiográficas) donde el médico radioncólogo elige el campo a irradiar y los órganos a proteger. Para el cáncer de próstata se usa: *La técnica de cajón* que consiste en irradiar con campo pélvico reducido de área 10 cm<sup>2</sup>, con profundidad del centro geométrico de la próstata con dos campos laterales, un campo posterior y un campo anterior. La energía

requerida es de aproximadamente 18 MeV con haz de fotones. *La arcoterapia* consiste en dos campos laterales centrados en el centro geométrico de la próstata y con exclusión de un sector circular de 60 grados anterior y posterior.

- Radioterapia conformal. La radioterapia conformal refiere a un método que incorpora movilización rígida, planeamiento computarizado 3D y sistemas de tratamiento para producir altas dosis en el volumen tumoral. Al realizar un esquema de tratamiento convencional de alta tasa de dosis en próstata, se corre el riesgo de aumentar la morbilidad de los tejidos normales (vejiga, recto, cabezas femorales). La radioterapia conformal permite alta tasa de dosis en el tumor y baja exposición de los tejidos adyacentes mediante el planeamiento computarizado 3D y la disposición de múltiples haces de radiación de forma tal que el campo de irradiación se aproxime a la forma del tumor. Para este tratamiento el paciente es sometido a una tomografía axial computarizada y en cuya imagen el médico radioncólogo define el área a tratar y la dosis prescrita<sup>3</sup>.

En la calidad de estos tipos de tratamiento, el *físico médico* desempeña un papel importante. Entre sus funciones se encuentra llevar a cabo medidas físicas relacionadas con la evaluación de las dosis recibidas por los pacientes (dosimetría); así como optimizar las condiciones que conlleven una reducción de dosis innecesarias en los tratamientos, de acuerdo a los programas de garantía de calidad en radioterapia, recomendados por los organismos internacionales como la *Internacional Atomic Energy Agency* (Safety Series N. 115) y la *American Association of Physicists in Medicine* (The solo practice of medical physics In radiation oncology, Reporte N. 80). La dosimetría es un campo de la Física Médica encargada de: Estimar las dosis absorbidas por los pacientes en los tratamientos de radioterapia y en los procedimientos de radiodiagnóstico, así mismo evaluar las exposiciones a las radiaciones ionizantes del personal ocupacionalmente expuesto. Existen varias tecnologías basadas en propiedades de los semiconductores y cristales útiles en la medición de dosis, como son: los dosímetros termoluminiscentes (TLD), los dosímetros de diodos semiconductores, los detectores MOSFET, y los detectores OSL (Optically Stimulated Luminescence).

Los dosímetros termoluminiscentes son los utilizados como referencia para dicha evaluación. Los cristales termoluminiscentes de *LiF:MgTi* son ampliamente utilizados en dosimetría clínica por su buena resolución espa-



cial, equivalencia tejido-agua, un amplio rango de sensibilidad, su tamaño y estabilidad a temperatura ambiente. La termoluminiscencia (TL) o luminiscencia térmicamente estimulada se basa en la teoría de bandas por Randall y Wilkins. Consiste en la emisión de radiación óptica con longitud de onda entre 200 y 700 micrómetros, durante el calentamiento de un sólido (aislante o semiconductor), previamente excitado con radiación (ionizante, luz visible, UV, etc.). Se presentan en cristales que contienen impurezas tales como  $LiF:MgTi$ ,  $LiF:CuP$ ,  $CaF_2:Dy$ ,  $Al_2O_3:C$ , entre otros. La energía almacenada por el cristal a través del mecanismo expuesto, es proporcional a la energía total absorbida por este. Esta propiedad es la que se utiliza en dosimetría<sup>6, 10</sup>.

### Procedimiento Experimental

Los cristales de  $LiF:MgTi$  (TLD-100) son recomendados para dosimetría clínica. Para este trabajo se usaron dichos cristales en forma de cilindros cuyas dimensiones son 6 mm de largo por 1 mm de diámetro. Antes de ser irradiados cada vez, se expusieron a un proceso térmico de 400°C por 1 hora seguido a 100°C por 2 horas y finalmente a 100°C por 30 minutos, para eliminar señales termoluminiscentes residuales de anteriores lecturas<sup>7-10</sup>.

Para medir las dosis en los esquemas de tratamientos, se deben caracterizar los cristales de acuerdo a su linealidad, ya que cada uno de ellos posee diferencias físicas y de dopaje. La linealidad nos da la proporcionalidad entre la dosis recibida y la señal termoluminiscente. La caracterización de los cristales en cuanto a su dependencia energética y sensibilidad se encuentra en la revisión bibliográfica<sup>8</sup>.

La linealidad se puede explicar como sigue:

Si  $N$  es el número de trampas en el fósforo,  $n$  es el número de trampas correspondientes a la dosis  $D$  y si  $dn/dD$  es proporcional a las trampas vacías:

$$\frac{dn}{dD} = a(N - n) \quad (1)$$

Por lo tanto:

$$n(D) = N[1 - e^{-aD}] \quad (2)$$

Donde  $a$  es una constante de proporcionalidad. Si  $D \ll 1$ , la ecuación (2) se describe:

$$n(D) = aND \quad (3)$$

De esta forma se tiene la proporcionalidad entre la dosis y el número de electrones atrapados. A su vez, si  $n(D)$  es proporcional a la intensidad termoluminiscente integrada en un ciclo de lectura:

$$I_{Total} = \int_0^t I(t') dt' = \int_0^n c \frac{dn}{dt} dt = cn = kD \quad (4)$$

Donde  $k$  es una constante<sup>6</sup>.

Para ello se irradió el lote de 32 cristales a diferentes dosis (entre 40y 200 cGy) con una fuente de  $^{60}Co$  de energía de 1.25 MeV, un campo de irradiación de 10 cm<sup>2</sup>, distancia piel-fuente de 80 cm. y un build-up de 5 cm. Equipo Teradi del Instituto Nacional de Cancerología. Finalmente, se eligieron los dosímetros con las mejores respuestas lineales.

El sistema lector utilizado es el TLD Hashaw 4500. Este se compone de un detector termoluminiscente, una CPU y el sistema de refrigeración a base de aire comprimido.

La señal termoluminiscente obtenida se da en unidades de carga<sup>11</sup>.

Las mediciones se realizaron sobre un simulador físico. Ellos permiten la planeación de los tratamientos de radioterapia y evaluar las dosis entregadas a los pacientes comparando los valores obtenidos en las planeaciones (curvas de isodosis) y los medidos sobre él. Entre sus propiedades se encuentran<sup>12</sup>:

- Son maniqués de hombre y mujer seccionados. El espesor de cada corte es de 2.5 cm.
- Las dimensiones promedio son: para un hombre, 175 cm. de alto y 73.5 Kg. de peso; para la mujer, 163 cm. de alto y 54 Kg. de peso.
- Son modelados con esqueletos naturales.
- Está construido con material sintético, indestructible con respecto al estrés físico y a la radiación. Son suficientemente flexibles para resistir caídas repetidas en un piso de concreto, pero suficientemente rígidos para prevenir daños a la estructura ósea bajo tales condiciones.
- Sus materiales son equivalentes al tejido humano para radiación: X de baja energía, gama, neutrones, protones y electrones. Simulan el número atómico efectivo del tejido y la gravedad específica, esencial

para la equivalencia en altas energías. De esta forma la radioequivalencia se extiende desde bajas energías usadas en diagnóstico, hasta altas energías usadas en la radioterapia.

- Contiene orificios que permiten la ubicación de dosímetros en cada sección

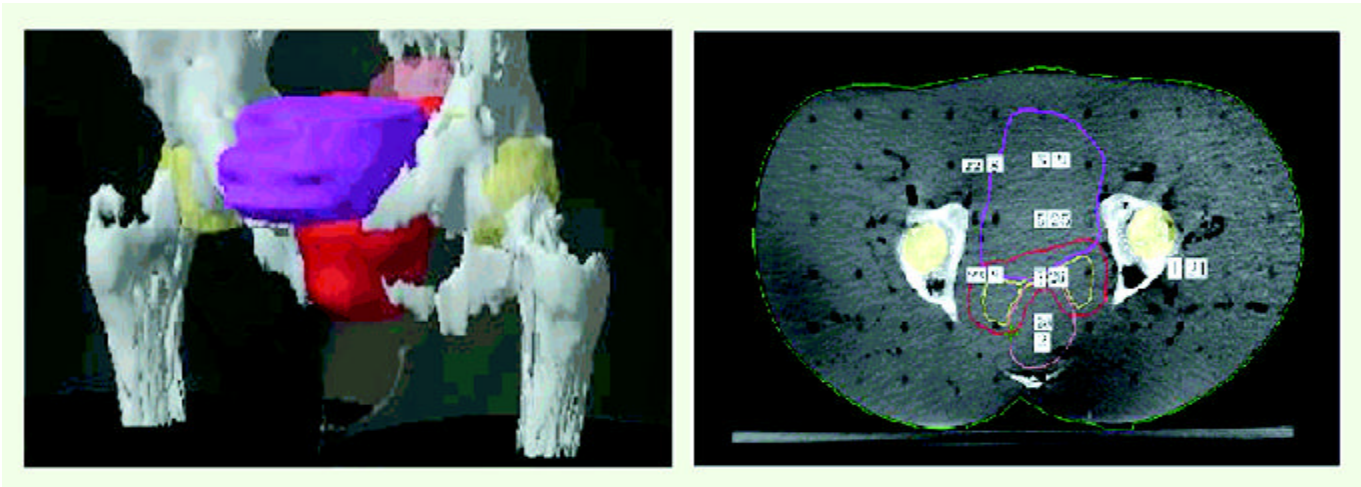
Para lograr la simulación de los tratamientos de radioterapia convencional y conformal, fue necesario crear una estructura de órganos virtual en el simulador físico, debido a su carencia de órganos. Para lograr este objetivo, se superpusieron las imágenes de TAC del simulador físico y de un paciente masculino con dimensiones similares. De esta forma, se dibujó: PTV (rojo), Vejiga (g), Recto (rosado), Cabezas femorales (amarillo) y Sistema Óseo (Blanco), Figura 1. Finalmente se simularon los tratamientos con una dosis prescrita de 180 cGy. Lo anterior se realizó por medio del TPS Treatment Planning System Eclipse del Instituto Nacional de Cancerología.

**Radioterapia convencional**

En este tratamiento se utilizó la *técnica de cajón*. Para la realización de la terapia convencional se tomó una radiografía al simulador físico donde se visualizó el área a irradiar. Se definieron cuatro campos para la irradiación con fotones de 6 MeV: dos campos laterales, un campo posterior y un campo anterior. Figura 2. Los parámetros obtenidos en la simulación se presentan en la Tabla 1. Mediante el TPS Treatment Planning System Eclipse se realizó la simulación del tratamiento. Se normalizó el 100% de la dosis en la curva del 97%. Se ubicaron 8 dosímetros en los orificios contenidos en los órganos virtuales a evaluar

**Radioterapia conformal**

Se definieron seis campos para la irradiación con fotones de 6 MeV. El acelerador dual dispone las multihojas para colimar el haz a la forma del volumen blanco. En la



**Figura 1.** Construcción de las estructuras anatómicas a considerar en el simulador físico para el estudio experimental. Izquierda: Imagen espacial de la zona pélvica detallándose el PTV (rojo), la vejiga (violeta), el recto (rosado), las cabezas femorales (amarillo) y el sistema óseo (Blanco). Derecha: Corte transversal de las imagen de TAC con los órganos virtuales. Cada uno de ellos corresponde a los usados para posicionar los dosímetros en los orificios contenidos en dichos órganos. Para la comparación de los tratamientos se ubicaron distintos dosímetros en las mismas posiciones.

**Tabla 1.** Parámetros usados en radioterapia conformal para cáncer de próstata estadio localmente avanzado. Distancia Fuente-Piel: 89 cm. La máquina utilizada fue un Acelerador Dual Clinac 2100 C/D, con colimador multihojas del Instituto Nacional de Cancerología.

Campo	Peso	$X_1(cm)X_2(cm)$	$Y_1(cm)Y_2(cm)$	Gantry Rnt (Grados)	SSD (cm)	UM
1	0.333	-5.5+5.6	-4.9+4.0	0	88.9	81
2	0.333	-5.6+5.7	-4.9+4.0	180	92.3	71
3	0.167	-4.9+4.5	-4.9+4.0	270	81.1	56
4	0.167	-4.5+4.9	-4.9+4.0	90	82.5	53

Figura 3 la línea amarilla segmentada de la imagen derecha muestra dicha disposición desde un ángulo de irradiación, rodeando el PTV que es el órgano donde se prescribe el escalamiento de la dosis. Los parámetros obtenidos en la simulación se presentan en la Tabla 2. Fue necesaria la ubicación de cuñas para proteger los órganos adyacentes. Se normalizó el 100% de la dosis en la curva del 97%.

## Resultados

### Comparación de los tratamientos

Al calcular la dosis absorbida por los cristales termoluminiscentes por medio de la Ecu. (4) se obtuvieron los resultados que se muestran en la Tabla 3. Estos valores se compararon con los obtenidos en la simulación. Se encontró que:

**Tabla 2.** Parámetros usados en radioterapia conformal para cáncer de próstata estadio localmente avanzado. Distancia Fuente-Piel: 89 cm. La máquina utilizada fue un Acelerador Dual Clinac 2100 C/D, con colimador multihojas del Instituto Nacional de Cancerología.

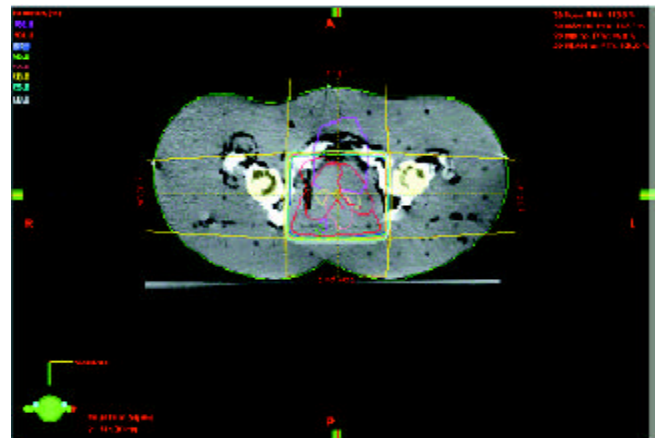
Campo	Cuñas	Peso	$X_1(cm)X_2(cm)$	$Y_1(cm)Y_2(cm)$	Gantry Rnt (Grados)	SSD (cm)	UM
1	0	1.0	-4.0+5.0	-5.0+4.0	50	84.6	52
2	0	1.2	-4.2+4.5	-5.0+4.0	95	83.2	67
3	30(R)	0.8	-4.2+5.9	-5.0+4.0	135	88.2	57
4	30(L)	0.8	-4.6+4.1	-5.0+4.0	235	86.4	62
5	0	1.2	-4.0+4.3	-5.0+4.0	265	81.5	73
6	0	1.0	-5.9+4.2	-5.0+4.0	310	83.3	55

**Tabla 3.** Valores obtenidos en los dos tipos de tratamientos. El porcentaje de simulación se aplica sobre el valor de dosis prescrito: 180 cGy.

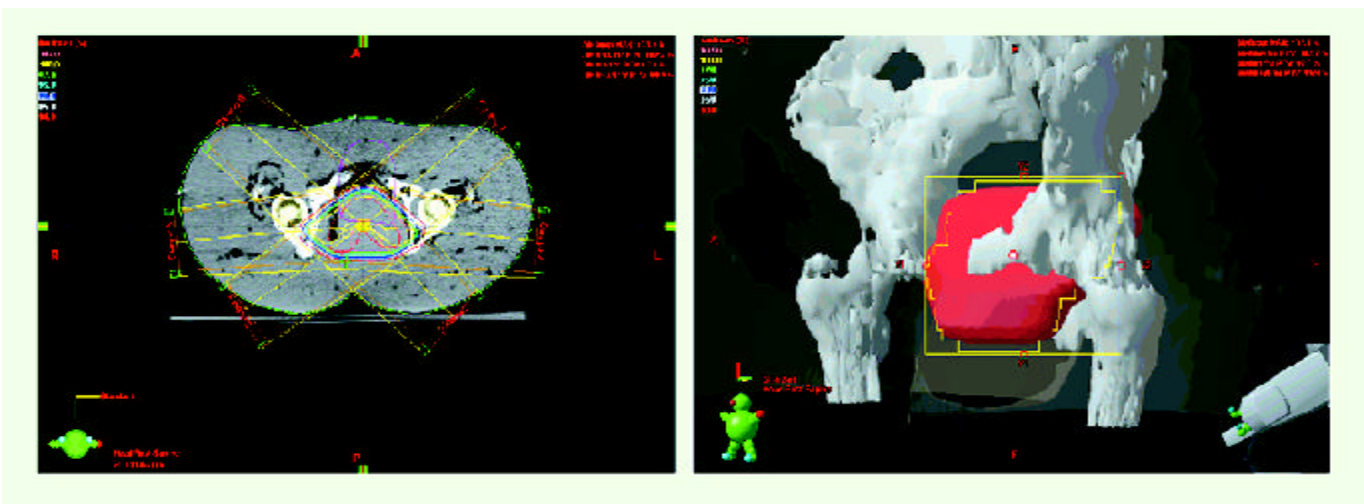
No.	Ubicación	Dosis exp. convencional	Simulación %	Valor dosis simulación	Incertidumbre %	Dosis exp. R.T. conformal	Simulación %	Valor dosis simulación	Incertidumbre %
1	Cabezas	65.82	40.3	72.54	9.27	95.54	52.70	94.86	0.72
21	Femorales								
2	Recto	183.56	100.1	180.18	1.87	167.91	98.1	176.58	4.91
28	Recto								
3	Recto	169.50	99	178.2	4.88	177.62	99.3	178.74	0.62
26	Recto								
5	Vejiga	178.78	98.8	177.84	0.53	129.82	74.7	134.46	3.45
25	Vejiga								
6	Vejiga	123.03	71.9	129.42	4.94	23.09	11.70	21.06	9.61
24	Vejiga								
8	Vejiga	125.79	72.1	129.78	3.07	71.68	38.6	69.48	3.17
22	Vejiga								
9	Vejiga	169.05	99.1	178.38	5.23	182.57	100	180	1.43
23	Vejiga								
15	PTV	173.19	101.5	182.7	5.21	191.29	101.9	183.42	4.29
29	PTV								

- Al comparar los resultados experimentales con los calculados en la simulación, la incertidumbre en las medidas son aceptables. Es decir, la dosis que se prescribe en los tratamientos y la calculada mediante la simulación del tratamiento es la realmente entregada.
- Los dosímetros 15 y 29 registran cantidades similares de dosis absorbida en PTV para cada tipo de tratamiento, puesto que están ubicados dentro del volumen tumoral. Este resultado es de esperarse.
- La disminución de la lectura en los dosímetros 25, 24 y 22 que evaluaron la absorción de dosis en radioterapia conformal respecto a los dosímetros 5, 6 y 8 que evaluaron la dosis recibida en radioterapia convencional, se debe a su ubicación en la vejiga, lejana al PTV, Ver Figura 1 y Figura 3. Éste es el resultado que se logra con la planeación de tratamiento 3D para el cáncer de próstata: disminuir la exposición de los órganos adyacentes para evitar complicaciones colaterales en el tratamiento. Por ejemplo en el dosímetro 24 se logró reducir la dosis absorbida en un 87% respecto a la dosis prescrita.
- Para el dosímetro 23 se encuentra un valor elevado de dosis absorbida por vejiga en radioterapia conformal debido a su cercanía con el PTV.
- Otro órgano a proteger es el recto. Para radioterapia conformal se logra una disminución en la dosis ab-

sorbida para disminuir la probabilidad de morbilidad. De acuerdo a los datos experimentales mostrados en la Tabla 3 la dosis absorbida en radioterapia conformal por los dosímetros 28 y 26 es aproximadamente 98% de la dosis prescrita, y muy similar a la obtenida en radioterapia convencional. Dicho resultado se obtuvo por la cercanía del dosímetro al PTV, el cual se ubica en el área de los seis campos de irradiación para terapia conformal Figura 3.



**Figura 2.** Simulación del tratamiento de radioterapia convencional para cáncer de próstata. Se observan dos campos de irradiaciones laterales, un campo posterior y un campo anterior. Se muestran las curvas de isodosis correspondientes al corte transversal para la posición de referencia del simulador físico.



**Figura 3.** Simulación del tratamiento de radioterapia conformal para cáncer de próstata. Derecha: Curvas de isodosis para el corte transversal en la posición de referencia del simulador físico en la simulación del tratamiento. Izquierda: El acelerador dual dispone las multihojas para colimar el haz a la forma del volumen blanco. La línea amarilla segmentada muestra dicha disposición desde un ángulo de irradiación, rodeando al PTV que es el órgano donde se prescribe el escalamiento de la dosis. Lograr colimar el haz a una forma aproximada del volumen blanco es la meta que se alcanza en este tipo de tratamiento.

- Únicamente se ubicó un dosímetro en la cabeza femoral izquierda, debido a la disposición ya fija de los orificios en el simulador físico. Al comparar las dosis absorbidas en ambos tratamientos se obtiene que en radioterapia conformal se registra una mayor lectura a comparación con la radioterapia convencional. Este resultado se obtuvo debido a que dicho dosímetro está expuesto a tres campos de irradiación en radioterapia conformal, Figura 3 y a sólo un campo en radioterapia convencional, Figura 2.

## Conclusiones

Del análisis de resultados se concluye:

- Extrapolando los resultados obtenidos al tratamiento completo de radioterapia conformal, se puede observar que el escalamiento de dosis en el volumen blanco no arriesga los órganos adyacentes, al no exceder la dosis de tolerancia de cada uno. Caso contrario ocurre con el tratamiento de radioterapia convencional, del cual observamos que el Recto y la Vejiga absorben una cantidad de dosis similar a la prescrita para el volumen tumoral, maximizando su probabilidad de morbilidad debido a su rango de tolerancia de dosis.
- El sistema de simulación computarizado del Instituto Nacional de Cancerología, garantiza la entrega correcta de dosis al paciente en los tratamientos.
- Se pueden obtener mejores resultados si se considera una precisa construcción virtual de las estructuras anatómicas y una mayor cantidad de datos experimentales.
- La dosimetría termoluminiscente, es la usada como referencia en los programas de control de calidad en radioterapia. Por ello es indispensable iniciar en Colombia una evaluación de las dosis absorbidas por los pacientes para asegurar efectividad en los tratamientos sin efectos colaterales serios por medio de este sistema dosimétrico.

## Bibliografía

1. <http://www.incancerologia.gov.co>
2. **Eric C., Rost, MD.** 2004. Conformal Radiation Business Briefing: Usoncology review 65-66.
3. **Benedick A. Fraass.** 1995. *The development of the conformal therapy radiation*, Med. Phys. **22**(11), Pt. 2, 1911-1921.
4. <http://www.cancer.gov>
5. **G. Gordon Steel.** *Basic Clinical Radiobiology*, Ed. Arnold.
6. **Castellanos, M. E.** 1988. Estudio de las propiedades termoluminiscentes de detectores de LiF para aplicaciones en dosimetría por termoluminiscencia.
7. **Christie K. Harries, Howard R. Elson et al.** 1997. *A comparison of the effectiveness of thermoluminescent crystals LiF:MgTi and LiF:MgCuP for clinical dosimetry*, Med. Phys. **24**(9): 1527.
8. **E.J. Fairbanks & L.A. Dewerd.** 1993. *Thermoluminescent characteristic of LiF:MgTi from three manufacturers*, Med. Phys. **20**(3): 729.
9. [www.tld.com.pl/tld/mts.html](http://www.tld.com.pl/tld/mts.html)
10. **Ranogajec-Komor, M.** 2003. *Thermoluminescence Dosimetry Application in Environmental Monitoring*, Radiation Safety Management **2**(1): 2-16.
11. *Operator's manual, Model 4500 Harshaw, TLD Workstation*
12. *Alderson Rando Phantom System for Radiotherapy*, Alderson Research Laboratories.

Recibido el 1° de noviembre de 2006

Aceptado para su publicación el 4 de diciembre de 2006

# ESTADO ACTUAL, CONSIDERACIONES ÉTICAS Y PERSPECTIVAS DE LA TERAPIA GÉNICA EN ERRORES INNATOS DEL METABOLISMO

por

Carlos Javier Alméciga-Díaz<sup>1</sup>, Homero Sáenz<sup>2</sup> & Luis Alejandro Barrera A.<sup>1‡</sup>

## Resumen

**Alméciga, C.J., H. Sáenz & L. A. Barrera:** Estado actual, consideraciones éticas y perspectivas de la terapia génica en errores innatos del metabolismo. *Rev. Acad. Colomb. Cienc.* **30** (117): 525-540, 2006. ISSN 0370-3908.

La terapia génica consiste en la inserción de ADN en células humanas con fines terapéuticos. Aunque inicialmente se propuso para el tratamiento de trastornos monogénicos, su uso se extendió hacia el cáncer y enfermedades infecciosas como el SIDA. Más de 1000 ensayos clínicos han sido realizados desde 1990 y cerca de 5000 pacientes en el mundo portan en sus células ADN exógeno. La eficacia y los riesgos de la terapia génica dependen de los vehículos usados para la transferencia del material genético. En este artículo se discute el estado actual del conocimiento, perspectivas y consideraciones éticas para la implementación de esta alternativa terapéutica en el tratamiento de errores innatos del metabolismo.

**Palabras clave:** Terapia génica, enfermedades genéticas, vectores virales, errores innatos del metabolismo, consideraciones éticas.

## Abstract

In gene therapy DNA is inserted in human cells for therapeutical purposes. Although it was first contemplated as the treatment for monogenic diseases, there are other fields for its applications such as cancer and HIV. Over 1000 clinical trials have been carried out since 1990 and more than 5000 patients in the world carry exogenous DNA in their cells. The efficiency and risks of gene therapy depend on the vehicle used for genetic material transfer. This review discusses the state of the art of gene therapy, the perspectives and ethical issues for the implementation of this therapeutical alternative for inborn errors of metabolism.

**Key words:** Gene therapy, genetic diseases, viral vectors, inborn error metabolism, ethical issues.

<sup>1</sup> Instituto de Errores Innatos del Metabolismo, Pontificia Universidad Javeriana, Cra. 7A No. 43-82 Edificio 53 laboratorio 305A, Bogotá-Colombia.

<sup>2</sup> Unidad de Investigación en Biología Celular y Microscopía, Decanato de Medicina, Universidad Centroccidental "Lisandro Alvarado", Barquisimeto - Venezuela.

‡ Correo electrónico: abarrera@javeriana.edu.co.

## Introducción

Las alteraciones bioquímicas que causan la acumulación de sustratos o la deficiencia en la producción de algunos metabolitos, fueron llamados por Garrod Errores Innatos del Metabolismo (EIM), de los cuales se han descrito cerca de 600 (Neufeld EF *et al.*, 2001). La gran mayoría de estas enfermedades se producen por mutaciones que alteran la expresión fenotípica de proteínas. Debido a que estas entidades se generan por alteraciones a nivel genético, no se dispone de tratamientos que permitan la cura de la enfermedad, por lo que su manejo tradicionalmente está dirigido a corregir o prevenir algunas manifestaciones clínicas, mediante el empleo de dietas como en el caso de las acidemias orgánicas y los desórdenes de aminoácidos (Diferrante NM *et al.*, 1971, Braun SE *et al.*, 1993), o el transplante de córnea, el uso de audífonos y la terapia ortopédica en las mucopolisacaridosis (McKinnis EJ *et al.*, 1996, Harris JD *et al.*, 1996). En estas enfermedades, hasta ahora incurables, el tratamiento ideal debe ser aquel que pueda implementarse en etapas muy tempranas de la vida para prevenir la aparición de la sintomatología y las secuelas a largo plazo. A partir de los años 80, la síntesis de oligonucleótidos, el aislamiento y empleo de enzimas de restricción y la utilización de plásmidos bacterianos, reorientaron la investigación en biomedicina y proporcionaron la base experimental para iniciar el desarrollo de terapéuticas no convencionales, como son reemplazar o suplementar los genes defectuosos por medio de la terapia génica (TG) o proveer la enzima deficiente mediante la terapia de reemplazo enzimático (TRE).

En la actualidad, más de 5.000 pacientes llevan en sus cuerpos células modificadas mediante ingeniería genética, producto de 1067 protocolos de terapia génica (Journal of Gene Medicine Clinical Trials Website, 2006). Sin embargo, aunque esta novedosa terapéutica se presentó como la solución esperada por largo tiempo para el tratamiento de un gran número de enfermedades intratables, los resultados en algunos de los pacientes, sugieren que aún no se han logrado los niveles óptimos de seguridad, transferencia y expresión de los genes exógenos. Esto ha conducido a que su empleo se haya restringido, mientras se desarrollan sistemas más eficientes de transferencia de los genes terapéuticos y se profundice en el conocimiento de los mecanismos de expresión y regulación genética (Smith AE *et al.*, 1995; Templeton NS & Lasic D, 2000).

En el presente artículo se discute el estado actual de la terapia génica en los errores innatos del metabolismo, sus perspectivas y las consideraciones éticas sobre el empleo de protocolos de esta alternativa terapéutica.

## Generalidades de la terapia génica

La TG puede ser definida como la transferencia de material genético a las células adecuadas, con el propósito de producir un efecto terapéutico en virtud del cual se logre corregir un defecto genético o permitir la adquisición de una nueva respuesta funcional, como el control de una infección o la inactivación de genes que son indeseables para el organismo. La transferencia génica puede efectuarse *in-situ* o *ex-vivo* (figura 1) y hacerse en células somáticas o germinales.

Aunque los primeros planteamientos sobre TG se remontan a mediados de los 60, fue sólo hasta 1990 cuando se realizó el primer protocolo de TG aprobado por el Instituto Nacional de Salud de los Estados Unidos (NHI), en el que una paciente con inmunodeficiencia combinada severa recibió linfocitos T transfectados con un retrovirus portando el gen de la adenosina deaminasa (Hilman BC & Sorensen RU, 1994). Desde entonces, la aplicación de la TG ha venido en aumento a pesar de la muerte de un paciente y la aparición de una condición similar a leucemia en otros dos. Aunque inicialmente fue concebida para el manejo de enfermedades monogénicas, con el transcurrir del tiempo se ha enfocado fundamentalmente a la implementación de terapias para cáncer y algunas enfermedades virales (McNeish IA *et al.*, 2004).

Hoy día constituye una importante alternativa para el manejo clínico de enfermedades hasta ahora incurables, entre ellas los errores innatos del metabolismo. En la actualidad se adelantan protocolos, que se encuentran en diferentes etapas preclínicas y clínicas, para patologías como la inmunodeficiencia combinada severa (Cavazzana-Calvo M *et al.*, 2000; Gaspar HB *et al.*, 2002), hemofilias A y B (Walsh CE., 2003), fibrosis quística (Griesenbach U *et al.*, 2002), enfermedad de Parkinson (Burton EA *et al.*, 2003), algunas entidades lisosomales como la enfermedad de Gaucher y varias mucopolisacaridosis, así como algunas aminoacidopatías como la fenilcetonuria, tirosinemia tipo I, homocistinuria y deficiencia de ornitina transcarbamilasa (Cheng SH & Smith AE, 2003; Cabrera-Salazar MA & Barranger JA, 2003). Igualmente se han logrado importantes avances en el manejo de desórdenes psiquiátricos y del sistema nervioso central (Sapolsky R, 2003a; Sapolsky R, 2003b). Sin embargo, problemas como la baja y transitoria expresión del gen de interés, unido a la aparición de reacciones adversas o fuertes respuestas inmunológicas tras la administración del material genético, han impedido alcanzar, por ahora, el éxito propuesto por algunos investigadores.

La manera más directa de administrar el material genético es por inyección de ADN desnudo, método poco eficiente debido a la presencia de enzimas que lo degradan (**Herweijer H & Wolf JA**, 2003). Durante los últimos 20 años se han desarrollado vectores virales y no virales, con el objetivo de optimizar la transferencia génica y lograr una alta expresión del gen de interés durante un periodo prolongado de tiempo, con una mínima generación de efectos adversos. Un método muy corriente es el uso de vectores derivados de virus, entre los que se incluyen retrovirus, virus del herpes simplex, adenovirus, lentivirus y virus adenoasociados (**Smith AE et al.**, 1995; **Kay MA et al.**, 1997; **Templeton NS & Lasic D**, 2000; **García F y Barrera LA**, 2001). Entre los vectores no virales se encuentran los polímeros catiónicos, células encapsuladas en polímeros (**Templeton NS & Lasic D**, 2000), liposomas (**Felgner JH et al.**, 1994), oligonucleótidos antisentido (**Wagner E et al.**, 1991, **Wheeler CJ et al.**, **Collins J et al.**, 1992) y los complejos de material genético con péptidos o polímeros (**Niidome T et al.**, 2002). Paralelamente, se han desarrollado métodos físicos que facilitan y aumentan el ingreso del vector a la célula, como la electroporación, el ultrasonido, la biobalística y la oclusión sanguínea (**Niidome T et al.**, 2002).

### Vectores derivados de retrovirus

Los vectores derivados de retrovirus son virus ARN no patogénicos de cadena sencilla, con un genoma aproximado de 10 kb en el cual se puede insertar material genético de un tamaño entre 6 y 8 kb, después de la remoción de todos los genes virales (figura 2) (**Templeton NS & Lasic D**, 2000). El genoma de estos virus es convertido a una doble cadena de ADN mediante una transcriptasa reversa, luego del ingreso del virus a la célula, para final-

mente ser insertado en el genoma del hospedero por medio de una integrasa (**Templeton NS & Lasic D**, 2000). Este hecho hizo que estos vectores ganaran gran interés, pues permiten una expresión a largo plazo y elevadas concentraciones del producto del gen de interés. Sin embargo pueden traer grandes inconvenientes debido a que esta inserción se realiza al azar, convirtiéndose en potenciales mutágenos por interrupción o activación de genes (**Themis M et al.**, 2003).

A pesar de los elevados niveles de expresión logrados por el uso de estos vectores, su principal deficiencia radica en su capacidad de transfectar únicamente células en división activa, por lo que la eficiencia de la terapia se disminuye en tejidos con baja tasa de división. Con el objetivo de solucionar este inconveniente, **Tao et al** (2004), encontraron que la eficiencia en la transferencia génica usando vectores retrovirales podía ser mejorada hasta en un 35% en células hematopoyéticas, cuando estas recibían previamente el factor derivado estromal  $1\alpha$ .

Un grupo de enfermedades en las cuales se han usado ampliamente estos vectores son las enfermedades lisosomales (**Cabrera-Salazar MA et al.**, 2002), entre las cuales la más estudiada es la mucopolisacaridosis VII (MPS VII) o síndrome de Sly, producto de la deficiencia de la enzima  $\beta$ -glucuronidasa (**Gao C et al.**, 2000). Uno de los resultados más contundentes para esta enfermedad se reportó en el modelo canino tras la administración intravenosa un vector retroviral, obteniéndose, aun después de 17 meses, niveles de expresión 67 veces por encima de los valores normales con una marcada reducción en los depósitos de glicosaminoglicanos (GAG), una recuperación del peso corporal en los animales, pasando del 50 al 84% del valor normal; con la recuperación de la capacidad para caminar y correr, y ausencia de opacidad corneal y daños cardiacos, parámetros usualmente alterados en perros MPS VII (**Ponder K, et al.**, 2002). Esto se convirtió en una de las primeras demostraciones de corrección del defecto genético en un mamífero de mayor tamaño que el ratón, lo que permite pensar que la posibilidad de utilizar esta terapia en humanos esté cada vez más cerca.

Las hemofilias A y B son excelentes modelos para terapia génica, pues no se requiere una elevada expresión del gen, debido a que con concentraciones de los factores superiores al 2% del valor normal es posible obtener un efecto terapéutico apreciable (**Walsh CE**, 2003). **Vanden Driesschen et al.** (1999), reportaron la expresión durante 14 meses del factor de coagulación VIII (FVIII) en ratones con hemofilia A, tras la administración de un vector retroviral vía intravenosa, logrando una corrección del

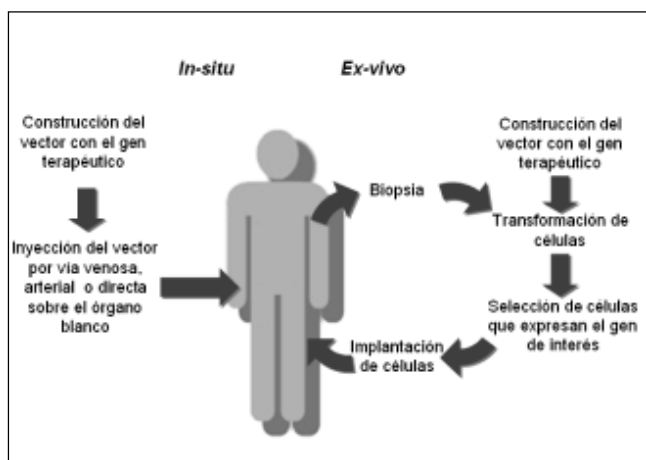
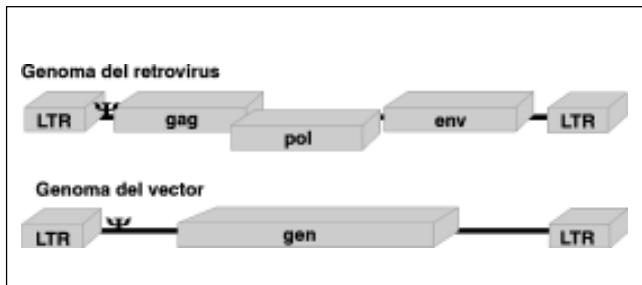


Figura 1. Esquemas de terapia génica *In-situ* y *ex-vivo*.





**Figura 2. Estructura del genoma de un vector retroviral.** Las secuencias de los genes virales gag (proteínas de la cápside), pol (enzimas transcriptasa reversa e integrasa) y env (glicoproteínas de la envoltura) son removidas y cambiadas por el gen terapéutico, conservándose únicamente la señal de empaque ( $\Psi$ ).

fenotipo en el 83% de los ratones que recibieron la terapia, los cuales sobrevivieron a un ensayo de corte de cola.

Los principales vectores retrovirales usados son derivados del virus murino de leucemia, el cual infecta únicamente células en división, por esta razón los vectores basados en lentivirus (un tipo de retrovirus) han ganado gran interés debido a su capacidad para infectar tanto células en división, como en interfase o diferenciadas (Naldini L & Verma IM, 2000). Stein *et al* (2001), utilizaron vectores derivados del virus de inmunodeficiencia felina para el tratamiento *in-vivo* de hemofilia A y MPS VII en modelos murinos, mediante la expresión del dominio B ausente en FVIII y la enzima b-glucuronidasa, respectivamente. En el estudio, 9 de 12 ratones deficientes en FVIII alcanzaron valores del factor superiores a 5 ng/mL (suficiente para convertir un fenotipo de severo en uno moderado), permitiendo una reducción cercana al 50% en la cantidad de sangre perdida en ratones tratados con respecto a los controles. Similarmente, en la totalidad de los ratones con MPS VII tratados la actividad catalítica de la enzima fue detectada durante 11 semanas post-transfección, llegando a niveles hasta del 14% del valor normal tres semanas después de la inyección, con una completa reducción en los depósitos de GAG en hígado y bazo y una notable recuperación de la organización celular.

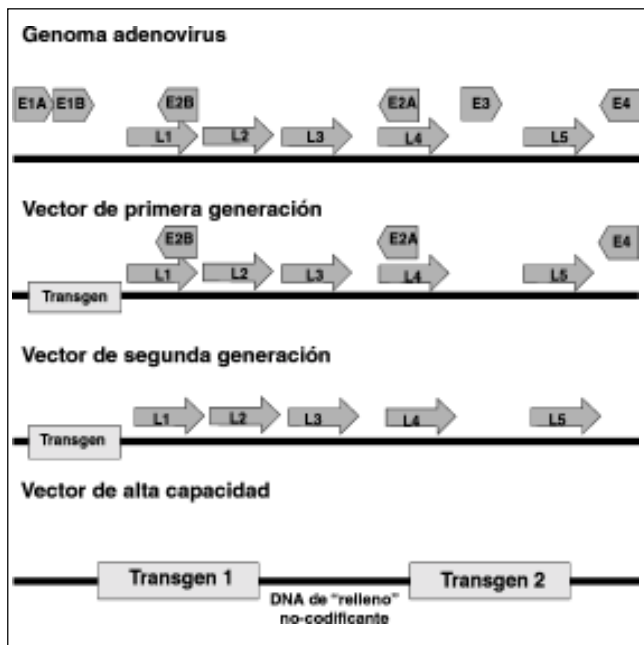
Con el objetivo de aprovechar la ventaja de infectar varios tipos de células y evitar los riesgos de la integración al azar en el genoma del hospedero, se han desarrollado vectores derivados de lentivirus deficientes en integrasa, haciendo que el vector se conserve de manera episomal (extracromosomal) en el núcleo; sin embargo, se requiere la presencia del antígeno T en las células blanco (células preinfectadas con un virus) para lograr que el material genético sea mantenido en la célula y que el gen de interés pueda ser expresado (Vargas J *et al.*, 2004).

Esta nueva estrategia sería de gran utilidad para la entrega de genes suicidas en el desarrollo de terapias contra infecciones virales, sin embargo otros vectores virales que se conservan episomalmente como los adenovirus y los adenoasociados e incluso vectores no virales, han permitido el desarrollo de vacunas e inmunoterapia de una manera más efectiva y segura, sin la necesidad de la presencia de otras secuencias para el mantenimiento de la expresión génica.

### Vectores Derivados de Adenovirus

Los adenovirus (Ad) son virus icosaédricos de 60 a 90 nm de diámetro, con un ADN de doble cadena y un tamaño aproximado de 30 a 40 kb (Templeton NS & Lasic D, 2000). Comprenden más de 50 serotipos humanos diferentes, así como también de primates no-humanos, ratón, perro, cerdo, pollo, pato y otros (Volpers C & Kochanek S, 2004). Una vez el virus infecta la célula, el ADN viral permanece episomalmente en el núcleo dirigiendo la expresión del gen de interés (Vorburger SA & Hunt KK; 2002; St George JA, 2003). Para el desarrollo de los vectores adenovirales de primera generación, la principal estrategia consiste en eliminar las secuencias E1 y E3, necesarias para la expresión de genes encargados de la replicación viral, reemplazándolas por el gen de interés, por lo que es necesaria una línea celular que contenga estas secuencias para la producción de las partículas virales. Los vectores adenovirales de segunda generación poseen deleciones adicionales en E2 y/o E4, mientras que en los de tercera generación o vectores de alta capacidad, todas las secuencias virales han sido removidas (figura 3) (Volpers C & Kochanek S, 2004). En la actualidad es el vector viral más utilizado en ensayos clínicos de TG (Journal of Gene Medicine Clinical Trials Website 2006), siendo los serotipos 2 y 5 los más empleados, debido al amplio conocimiento que se tienen sobre su biología y estructura, además de la disponibilidad de líneas celulares para su producción.

El principal inconveniente de estos vectores es la activación del sistema inmune tras su administración que llevan a una expresión transitoria del gen de interés (Templeton NS & Lasic D, 2000). Con el propósito de comprender los procesos involucrados en esta expresión transitoria varias estrategias han sido utilizadas. La primera consiste en la evaluación de la consecuencia directa de la inyección del vector en modelos animales, detectándose la liberación de citoquinas, interleuquinas, activación de macrófagos, inducción de respuesta de células T y B, liberación de anticuerpos neutralizantes y activación del endotelio (Lowenstein PR, 2004). En un segundo método, desarrollado por Zhang *et al.* (2004), se



**Figura 3. Estructura de los diferentes vectores derivados de adenovirus.** El E1 a E4 (genes tempranos) codifican para transactivadores transcripcionales, proteínas funcionales necesarias para la transformación celular y proteínas necesarias para la replicación viral como la ADN polimerasa, proteína de unión a ADN y la proteína terminal. L1 a L5 (genes tardíos) codifican para todas las proteínas de la cápside.

emplearon conceptos genéticos para descubrir regiones del genoma que puedan tener una relación importante en la expresión de vectores adenovirales en el hígado. En este estudio, se plantea que existen regiones del genoma en las que la activación de sus genes es directamente proporcional a la concentración del vector y que podrían estar involucradas en la generación de respuestas encaminadas al silenciamiento del gen o a la eliminación del vector. Otro factor importante es el efecto de la metilación de sitios CpG, hecho demostrado recientemente tras el análisis cuantitativo del ADN viral y el ARNm, producto de la expresión de un vector con el factor de crecimiento de fibroblastos humanos dirigido por el promotor del citomegalovirus, encontrándose que la relación del número de copias de ARNm por copia de ADN cayó 300 veces para la hora 14 postinyección, indicando una disminución en la tasa de transcripción posiblemente por una alta frecuencia de citosinas metiladas en el extremo 5', el cual es un mecanismo natural de defensa contra transcripción de ADN foráneo. Mediante la evaluación del nivel de metilación fue posible observar que después de 24 horas, el 30% de los sitios CpG en el promotor se encontraban metilados, elevándose a 70% para el séptimo día. Estos resultados sugieren el uso de inhibidores de la

metilación para lograr una expresión a largo plazo (**Brooks AR et al., 2004**).

Una estrategia para evitar la fuerte respuesta inmune es la construcción de vectores adenovirales de alta capacidad, en los cuales se han removido todas las secuencias virales, conservándose solamente la señal de empaquetamiento ( $\psi$ ) y las repeticiones terminales invertidas (ITRs). Este tipo de vectores pueden recibir hasta 36 kb de ADN no viral, permitiendo la introducción de extensos cDNAs, grandes promotores tejido-específicos y pequeños loci genómicos (**Volpers C & Kochanek S, 2004**). Esta ventaja permitió la expresión constante durante un período de un año, del gen de la distrofina, deficiente en la distrofia muscular de Duchenne, logrando que el 52% de fibras musculares de un modelo murino para esta enfermedad expresaran la proteína, con una mejora notable en la fuerza (10 N/cm<sup>2</sup> en el ratón sin tratar a 25 N/cm<sup>2</sup> en el tratado), en el número de contracciones y una marcada disminución en el daño muscular inducido por estrés mecánico (**Dudley RW et al., 2004**). Similarmente, **Kim et al. (2001)**, lograron la expresión de la apoproteína E (apoE) usando solamente una inyección intramuscular de un vector adenoviral de alta capacidad que permitió la completa y estable corrección de los síntomas de la hipercolesterolemia en un ratón deficiente en apoE durante 2,5 años, con niveles de la proteína entre el 60 y 90% y una concentración plasmática de colesterol inferior a 100 mg/dL (similares a los del control normal), que permitió una aorta libre de lesiones y ausencia de neoplasmas hepáticos en los animales tratados. Sin embargo, aunque estos vectores representan un avance importante en la búsqueda del vector ideal, son necesarios estudios adicionales encaminados a la determinación del riesgo de generación de una respuesta inmune tras la administración de estos vectores de tercera generación, antes de su administración a humanos.

En los últimos años, muchos esfuerzos han estado enfocados a dirigir los vectores adenovirales a receptores específicos en tejidos o células blanco, para lograr la expresión en el órgano de interés, con la reducción de la respuesta del sistema inmune y con ello evitar la posibilidad de generar anti-Ad que reduzcan la concentración del vector y genere inconvenientes para el paciente (**Dmitriev IP et al., 2002**). Varias estrategias han sido utilizadas para este fin, incluyendo modificación genética o química de la cápside y uso de moléculas adaptadoras que dirigen el vector a receptores diferentes a los que normalmente intervienen en su entrada a la célula (**Vorburger SA & Hunt KK, 2002; St George JA 2003; Volpers C & Kochanek S, 2004**). **Wickham et al. (1996)**, desarrollaron un vector

adenoviral dirigido al receptor  $\alpha_v$  para realizar una transferencia génica dirigida hacia endotelio y músculo liso, mediante la asociación del vector con un anticuerpo monoclonal biespecífico, el cual por un lado reconocía un epítipo ubicado en una proteína de la cápside y por el otro el receptor  $\alpha_v$ , lográndose un aumento de la expresión entre siete y nueve veces de  $\beta$ -glucuronidasa, con respecto a la generada por el vector sin el anticuerpo. Similarmente, **Volpers et al.** (2003), construyeron un vector que contiene el dominio de unión a la inmunoglobulina G en una de las proteínas de la cápside, lo que causó un aumento en la selectividad del vector y expresión del gen reportero. De igual manera, el uso de biotina covalentemente unida a un vector adenoviral, con la coadministración del factor de células madre, permitió dirigir el vector específicamente hacia células primarias hematopoyéticas que expresan el receptor c-Kit y como consecuencia un aumento de más de 2000 veces en la expresión del gen reportero (**Smith JS et al.**, 1999).

Otra de las estrategias usadas para mejorar la expresión de los vectores adenovirales es el uso de promotores tejido específicos. En este aspecto, **Martín-Touaux et al.** (2002), encontraron que mediante el uso de un promotor músculo específico para controlar la expresión de la  $\alpha$ -glucosidasa (GAA) en la enfermedad de Pompe, fue posible obtener niveles suprafisiológicos de la enzima 13 semanas post-inyección (786 nmol/h/mg versus 7,5 nmol/h/mg en el control normal), siendo secretada por el músculo al torrente sanguíneo y tomada por otros tejidos, incluyendo el músculo cardíaco, para llevar a una reducción de 10 veces en los depósitos de glucógeno. Uno de los tejidos que esta ganando gran interés para direccionamiento de vectores Ad es el endotelio vascular, por lo que se han evaluado varios promotores específicos para estas células, entre los que se encuentran los promotores para la molécula de adhesión de células vasculares 1 (VCAM-1), la sintasa endotelial de óxido nítrico (eNOS), el factor del Willebrand (vWF), la molécula de adhesión intracelular 2 (ICAM-2) y el FLT-1; este último demostró la alta y selectiva expresión de un gen reportero en células endoteliales humanas (**Nicklin SA et al.**, 2001).

### Vectores derivados de virus adenoasociados

Los virus adenoasociados (AAV) son viriones no patogénicos, de aproximadamente 20 a 25 nm de diámetro, compuestos de una mezcla de proteínas de ensamblaje que encapsidan una genoma de ADN de cadena sencilla de aproximadamente 4,7 kb (**Bossis I & Chiorini JA**, 2003). El genoma se encuentra flanqueado por dos ITRs de 145 bases, las cuales contienen el origen de replicación y se-

cuencias requeridas para el empaquetamiento viral (**Zhou X & Muzyczka N**, 1998; **Xiao X et al.**, 1998). Estos virus requieren la coinfección con un virus ayudador, tal como adenovirus o herpesvirus, para producir infección. Hasta el momento se han aislado y caracterizado nueve serotipos diferentes de AAV, cada uno de los cuales posee una afinidad por algún tejido en especial (**Gao G et al.**, 2002). En la actualidad el serotipo 8 combinado con promotores hepato-específicos, ha permitido el desarrollo de modelos de terapia génica para las enfermedades de Gaucher (**Marshall J et al.**, 2004a), Fabry (**Marshall J et al.**, 2004) y Niemann-Pick (**Cheng S et al.**, 2004b), con lo que se ha logrado un aumento hasta de 100 veces en la expresión de las enzimas, con respecto a los valores logrados con el serotipo 2.

Una de las ventajas de estos virus es la capacidad de integrarse al genoma de la célula huésped, lo que podría ofrecer una expresión a largo plazo si se conociera completamente el mecanismo de integración y la estructura del provirus. En los AAV silvestres esta integración ocurre en la posición 19q13.3-qter (locus AAVS1), mediada por la proteína Rep ausente en la mayoría de los vectores derivados de AAV, por lo que estos son encontrados de manera episomal en las células transformadas con vectores de AAV (**Berns KI**, 1996). **Rutledge Y Russell** (1997), establecieron que la integración de vectores AAV no ocurre en todos los casos y cuando existe se encuentran fragmentos del vector en posiciones al azar dentro del genoma del huésped. Diferentes estudios han demostrado que este inconveniente puede ser solucionado por la cotransfección de células con un vector portando el gen *rep* y otro con un gen de interés (**Fisher KJ et al.**, 1996). **Recchia et al.** (1999), coinfectaron células de hepatoma con un vector Ad de alta capacidad portando el gen *rep78* y con otro vector Ad al que se insertó un AAV en el cual se encontraba el gen reportero; lo que resultó en la integración completa del vector AAV en el locus AAVS1. Recientemente, se describió que la integración de vectores AAV ocurre preferiblemente en genes activos que producen deleciones de 2 pb a 0,3 kb y que dichas integraciones, principalmente en intrones, son producto de una microhomología (alrededor de 10 pb) entre los ADN del huésped y del vector (**Nakai H et al.**, 2003).

Los vectores AAV están siendo principalmente usados en enfermedades lisosomales, como los síndromes de Sly, Gaucher, Fabry, Pompe y Sanfillippo (**Cheng SH & Smith AE**, 2003; **Cabrera-Salazar MA & Barranger JA**, 2003). En la enfermedad de Pompe, la construcción de un vector AAV para la expresión de la  $\alpha$ -glucosidasa permitió restaurar la actividad de la enzima tanto *in-vitro* como *in-vivo*, lográndose una expresión estable durante los seis meses posteriores a una inyección intramuscular, con ni-

veles cercanos a los normales y restauración de la actividad muscular (**Fraites TJ et al.**, 2002). **Park** y colaboradores en el 2003, usaron un vector AAV para expresar la enzima  $\alpha$ -galactosidasa A, deficiente en la enfermedad de Fabry, mediante una inyección intravenosa del vector a un modelo murino, alcanzando valores de actividad enzimática entre 2 y 10 veces los valores normales, con reducción en las acumulaciones lisosomales de glicosfingolípidos en hígado, corazón y bazo, llevando a una recuperación en el peso corporal con respecto a un ratón normal. En la enfermedad de Sly, el uso de vectores AAV mediante inyección intravenosa a ratones Sly recién nacidos, permitió la expresión de la  $\beta$ -glucuronidasa durante 16 semanas en hígado, corazón, bazo, riñón, retina y cerebro, siendo este último de especial interés, pues sin necesidad de procedimientos quirúrgicos complicados fue posible la expresión de la enzima en materia gris, meninges, corteza, vasos, plexus coroide, capa piramidal del hipocampo y molecular del cerebelo, con una marcada reducción de GAG en neuronas parenquimales de la corteza y en meninges, además de la disminución de los depósitos intralisosomales de mucopolisacáridos de los otros órganos (**Daly TM et al.**, 1999).

Al igual que con los otros vectores virales, las hemofiliias han sido incluidas en programas de investigación de TG usando vectores AAV. **Nakai et al.** (1998), expresaron el factor IX, deficiente en hemofilia B, usando un vector AAV bajo el control del promotor EF1 $\alpha$ , con una expresión estable y cercana a los valores normales durante seis meses, lo que logró una notable mejoría en el comportamiento del ratón frente a episodios de sangrado con niveles plasmáticos del factor IX entre 700 y 3200 ng/mL. En otro estudio, perros con hemofilia B recibieron un vector AAV portando el cDNA del factor IX humano, lo que permitió alcanzar niveles de expresión hasta del 12% del valor normal durante los 17 meses del estudio y la normalización de los tiempos de coagulación de los perros, con la desaparición de los episodios de sangrado (**Mount JD et al.**, 2002). De igual manera, **Manno** y colaboradores en el 2003, lograron una notable disminución de los episodios de sangrado en ocho pacientes con hemofilia B, encontraron una baja generación de anticuerpos contra la proteína o el virus y un porcentaje de expresión menor al 1%, suficiente para lograr el efecto terapéutico deseado.

### Métodos y vectores no virales

Debido a los problemas presentados por el uso de vectores virales, las estrategias no virales han sido estudiadas ampliamente, pues carecen principio de los problemas de generación de una fuerte respuesta inmune o

de oncogénesis, además de presentar la ventaja de una fácil producción a gran escala (**Niidome T & Huang L**, 2002). Sin embargo, la eficiencia en la transferencia génica sigue siendo baja con respecto a los valores alcanzados con vectores virales. Dentro de los métodos no virales de transferencia génica se encuentran el ADN desnudo y las asociaciones de ADN con liposomas, polímeros y péptidos catiónicos (**Sáenz H et al.**, 2004).

La forma más fácil de entregar material genético a una célula es mediante el uso de ADN desnudo, el cual puede ser tomado por la célula mediante receptores y resultar en la expresión del gen de interés (**Herweijer H & Wolf JA**, 2003). Sin embargo, la eficiencia de la transferencia se ve afectada por la presencia de nucleasas y fagocitos que limitan la expresión del gen a áreas adyacentes al punto de la inyección (**Niidome T & Huang L**, 2002; **Herweijer H & Wolf JA**, 2003). Las principales técnicas desarrolladas para la administración de ADN desnudo son la electroporación, la biobalística y el ultrasonido, las cuales buscan mejorar la eficiencia de la transferencia lograda por la inyección directa del material genético (**Li S & Ma Z**, 2001).

La electroporación consiste en la aplicación de pulsos de un campo eléctrico sobre las células o el órgano blanco, para mejorar la permeabilidad celular y así permitir el paso del material genético a través de la membrana citoplasmática (**Somiari S et al.**, 2000), lo cual es dependiente de la duración, fuerza y frecuencia del campo eléctrico y del número de pulsos aplicados y la forma del electrodo (**Somiari et al.**, 2002; **Liu F & Huang L**, 2002). La electroporación ha sido empleada en los últimos años principalmente en el área de la inmunología (**Niidome T & Huang L**, 2002). En este campo, **Widera et al.** (2000), demostraron que el uso de electroporación posterior a la inyección de un plásmido en un ratón inmunocompetente, conteniendo el gen para la proteína de superficie Ag del virus de la hepatitis B, permitió títulos superiores a 10000 mIU/mL con tan solo una inmunización (10 mIU/mL es considerado como protector contra infecciones por el virus de la hepatitis B), llevando a un marcado aumento de la respuesta inmune del ratón vacunado. Resultados similares fueron obtenidos por este mismo grupo para la proteína gag del VIH, demostrando que la electroporación permite incrementar la expresión y producir una marcada mejoría en la respuesta inmune.

El ultrasonido, al igual que la electroporación, incrementa la entrada de material genético a la célula mediante la alteración momentánea en la estructura de la membrana celular (**Zarnitsyn VG & Prausnitz MR**, 2004). Usando esta técnica, **Amabile et al.** (2001), demostraron

un incremento hasta de 19 veces en la expresión de un gen reportero en el epitelio vascular, tras la administración de un vector de expresión en células eucariotas y la posterior aplicación de ultrasonido mediante un cateter endovascular. Recientemente se ha reportado la combinación de esta tecnología con agentes de contraste de ultrasonido, conocidos como microburbujas, los cuales permiten aumentar la eficiencia de la transfección hasta 7000 veces con respecto a la aplicación del ultrasonido únicamente (**Taniyama Y et al.**, 2001).

En la biobalística, micropartículas de oro son recubiertas con el material genético y disparadas a la célula u órgano blanco, permitiendo la entrega del vector en el citoplasma e incluso directamente en el núcleo (**Niidome T & Huang L**, 2002). Esta tecnología ha sido usada principalmente en el desarrollo de vacunas tanto humanas como animales (**Zhu W et al.**, 2003; **Li S et al.**, 2004; **Kamili S et al.**, 2004), con el inconveniente de producir una transfección superficial sobre el órgano blanco y por lo tanto restringida a las células adyacentes al lugar de administración (**Kuriyama S et al.**, 2000; **Herweijer H & Wolf JA**, 2003).

En cuanto a los vectores no virales, se han basado en complejos de ADN con lípidos, péptidos o polímeros, los cuales han sido usados para la entrega del material genético tanto *in-vivo* como *ex-vivo* (**Niidome T & Huang L**, 2002). Los liposomas, que consisten de una bicapa lipídica esférica, realizan la entrega del material genético mediante la fusión con la membrana citoplasmática (**Niidome T & Huang L**, 2002). La composición de estos ha variado ampliamente desde principio de los años 90, siendo los compuestos más usados las sales de amonio cuaternario, los derivados catiónicos del colesterol y el diacilglicerol y los lípidos derivados de poliaminas (**Dauty E et al.**, 2001).

El uso de complejos de ADN con péptidos o polímeros, se basa principalmente en la formación de enlaces covalentes con grupos sensibles a oxidación-reducción que son degradados cuando el complejo está en el citoplasma, lo cual libera el ADN y permite la expresión del gen de interés directamente en citoplasma o en el núcleo mediante el uso de señales que dirigen al vector a este compartimiento (**McKenzie DL et al.**, 2000; **Lim YB et al.**, 2000; **Wightman L et al.**, 2001).

#### **Terapia génica en los errores innatos del metabolismo**

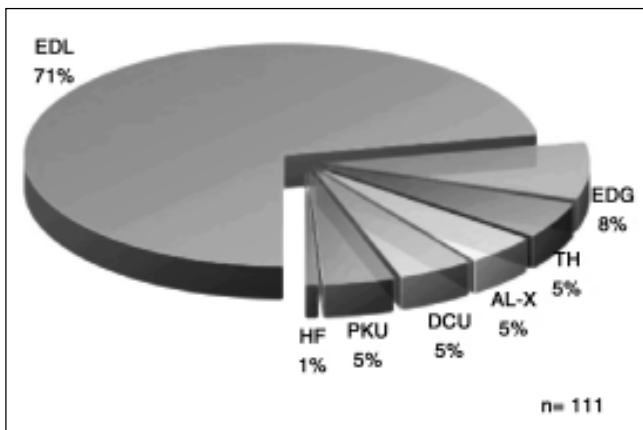
A pesar de ser enfermedades monogénicas en su totalidad, los EIM son considerados enfermedades complejas

debido a que el defecto lleva en muchas ocasiones a la alteración de otras rutas metabólicas, que pueden ser responsables de la variabilidad de fenotipos, incluso entre individuos con la misma enfermedad y mutación (**Lanpher et al.**, 2006). Por otro lado, las bases genéticas son variadas entre los diferentes EIM, muchas de ellas se encuentran altamente caracterizadas desde el punto de vista molecular y en su gran mayoría no necesitan de un control estricto en la expresión del gen aunque si es necesario dirigir la terapia hacia ciertos tipos específicos de células, como las células de Kuffer en la enfermedad de Gaucher o la microglia en la adrenoleucodistrofia ligada al X (ADL-X). Adicionalmente es posible encontrar desórdenes con autonomía celular en las que la célula produce la enzima y no la exporta a la vecinas, como en la adrenoleucodistrofia, o sin autonomía celular en las que la célula afectada puede tomar la enzima de otras células del mismo tejido o de otro tejido lejano, como en las enfermedades de depósito lisosomal (**Lanpher et al.**, 2006).

A pesar del elevado número de EIM, solo unos pocos han sido blanco de estudios de TG, debido a la baja incidencia de la enfermedad o a la disponibilidad de terapias alternas efectivas, como el manejo nutricional en algunos casos. Otro factor importante es la disponibilidad de modelos animales naturales o knockout solo para un número limitado de EIM (**Ellinwood et al.**, 2004).

En ensayos preclínicos 111 estudios han sido realizados (**Cartier N**, 2001; **Mah C et al.**, 2002; **Ding Z et al.**, 2004; **Sun B et al.**, 2005a; 2005b; **Koeberl D et al.**, 2006; **Ghosh A et al.**, 2006; **Sands M & Davidson B**, 2006), de los cuales el 71% corresponde a desórdenes de depósito lisosomal, principalmente a la enfermedad de Sly. Otros EIM estudiados son enfermedades de depósito de glucógeno (principalmente la tipo I o enfermedad de Von-Gierke), tirosinemia hepática, adrenoleucodistrofia ligada al X, desórdenes del ciclo de la urea (básicamente la deficiencia de OTC), la fenilcetonuria y la hipercolesterolemia familiar (figura 4).

Tres EIM han sido seleccionados como modelos para el desarrollo de estrategias de TG. El primero de ellos es la enfermedad de Sly o mucopolisacaridosis VII (MPS VII), producto del defecto en el gen de la  $\beta$ -glucuronidasa que lleva a la alteración del catabolismo de los GAG heparan, dermatan y condroitin sulfato. Se trata de una enfermedad multisistémica con organomegalia y alteraciones del SNC, esqueléticas, cardiovasculares y oculares. Es el EIM con más ensayos preclínicos en TG por varias razones (**Ellinwood et al.**, 2004): (a) estudios preliminares han demostrado que las células transfectadas liberan grandes



**Figura 4.** Ensayos preclínicos realizados en EIM. EDL: Enfermedad de depósito lisosomal, EDG: Enfermedad de depósito de glucógeno, TH: Tirosinemia hepática, ADL-X: Adrenoleucodistrofia ligada al X, DCU: Desórdenes del ciclo de la úrea, PKU: Fenilcetonuria, HF: Hipercolesterolemia familiar.

cantidades de enzima recombinante al medio la cual puede ser tomada por células no transfectadas, (b) altos niveles de enzima parece no tener efectos adversos, aunque existe un reporte en el que se indica que niveles supra fisiológicos de la enzima pueden llevar a la aparición de hepatocarcinomas producto de la formación de cristales de la proteína en el interior de las células, (c) no hay evidencia de la necesidad de una estricta regulación de la expresión génica, (d) la enzima recombinante es fácilmente distinguible de la enzima de los modelos animales, y (e) niveles entre el 5 y 10% permiten pasar de un fenotipo severo a uno medio o tardío, con disminución del compromiso visceral.

Otro de los EIM que aunque no es uno de los que posee un gran número de estudios se ha ido lentamente convirtiendo en excelente modelo para el tratamiento de enfermedades neurodegenerativas, es la ALD-X, el desorden más frecuente de alteración de la mielina en el cerebro. ALD-X se encuentra asociada a la acumulación de VLCFA y es un desorden en el que se observa la demielinización de áreas específicas y limitadas del cerebro. La principal razón para que la ALD-X sea un modelo para el manejo de enfermedades neurodegenerativas, radica en el hecho de disponer de un intervalo de tiempo en el que a pesar de haberse realizado el diagnóstico, el paciente no ha mostrado ningún síntoma de la enfermedad. Adicionalmente existen evidencias sobre correcciones transitorias del defecto tras trasplante de médula ósea (Cartier N, 2001).

Los inconvenientes en el desarrollo de terapias para esta enfermedad son producto de la especificidad de áreas

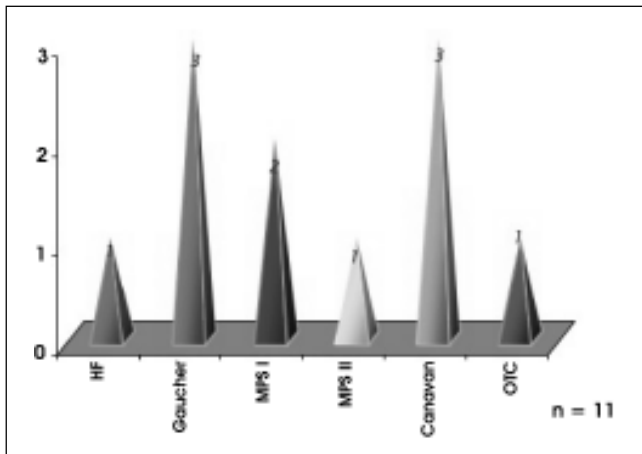
y células del cerebro afectadas. Se ha identificado que las células blanco serían la microglia, que podrían ser corregidas con trasplante de células madre derivadas de médula ósea transfectadas con un vector lentiviral, y células de la glia que deberían ser corregidas tras administración *in-situ* del vector. Para completar el escenario, la proteína afectada no es secretada y las células transfectadas no presentan ninguna ventaja selectiva sobre las células deficientes, por lo que teóricamente se debería corregir en un alto porcentaje cada una de las células afectadas. De todas formas estudios realizados *in vitro* y en modelos murinos, han mostrado la posibilidad de corregir el defecto tanto TG *ex vivo* como por administración directa del vector (Cartier N, 2001).

Finalmente tenemos la fenilcetonuria, producto del defecto en la enzima fenilalaninohidroxilasa y que lleva a elevados niveles de fenilalanina (Phe) en sangre, con un marcado retardo mental como el principal signo de la enfermedad. Aunque para esta enfermedad se dispone de tratamiento nutricional, es difícil que los pacientes sigan estrictamente la dieta, siendo necesario el desarrollo de métodos alternativos para mantener bajos los niveles plasmáticos de Phe, siendo la TG una de estas estrategias (Ding Z *et al.* 2004). Oh H *et al.* (2004), demostraron la posibilidad de corregir el defecto mediante el uso de un vector AAV portando el cDNA de la fenilalaninohidroxilasa, logrando mantener los niveles de Phe dentro de un rango normal durante las 25 semanas del estudio, con una marcada mejoría en el fenotipo del ratón, siendo la principal característica el retorno del color oscuro en el pelo y la cola de los ratones que recibieron los vectores. El único inconveniente fue la vía de administración, pues solo la administración intraportada permitió alcanzar niveles terapéuticos de la enzima.

En cuanto a los protocolos clínicos de EIM tan solo 11 se han realizado y ninguno de ellos ha superado la fase clínica I (Journal of Gene Medicine Clinical Trials Website, 2006). Protocolos para Hipercolesterolemia familiar, Enfermedad de Gaucher, MPS I y II, Enfermedad de Cannavan y deficiencia de OTC. En la actualidad, solo uno de los protocolos para la enfermedad de Cannavan se encuentra abierto y en fase I (figura 5).

### Consideraciones éticas

Desde el momento mismo del planteamiento de la TG por Joshua Lederberg y Edward Tatum en 1966, varios hechos han llevado a importantes discusiones éticas por parte de la comunidad científica, los organismos regulatorios y la sociedad en general.



**Figura 5.** Ensayos clínicos realizados en EIM. HF: Hipercolesterolemia familiar, MPS: Mucopolisacaridosis, OTC: Deficiencia de ornitintrascarbamilasa.

El primero de ellos ocurrió en 1980, cuando en Italia e Israel se intentó desarrollar un protocolo de TG en dos pacientes con  $\beta$ -talasemia, cuando la tecnología era muy prematura para la época, por lo que el grupo fue censurado por el NHI, por experimentos con ADN recombinante sin autorización. Esto llevó a que entre 1981 y 1982 se realizara un análisis ético definitivo sobre la TG, generándose el primer documento oficial sobre ingeniería genética en humanos (**American Society of Gene Therapy Website**, 2006).

A raíz de estos informes, en cualquier protocolo de TG se deben tener en cuenta los siguientes aspectos (**Walters L & Palmer G**, 1997): (a) la enfermedad que se va a tratar, (b) qué alternativas de tratamiento existen para la enfermedad, (c) qué riesgos probables existen para el paciente, (d) cuál es el beneficio potencial, (e) cómo se seleccionan los pacientes, (f) cómo se garantiza un efectivo consentimiento informado, y (g) cómo se garantiza el anonimato de los pacientes?

Sin embargo dos hechos cambiaron notablemente el panorama de la TG. El primero de ellos fue la muerte de Jessie Gelsinger en 1999. Jessie era un paciente de 18 años con deficiencia parcial de la enzima ornitina transcarbamilasa (OTC), la cual había sido manejada exitosamente mediante restricciones dietarias durante toda su vida, con los típicos problemas asociados para él y su familia.

Cuando Jessie cumplió los 18 años, voluntariamente ingresó en el protocolo de TG ofrecido por el Instituto de Terapia Génica Humana (IHGT) de la Universidad de

Pensilvania. Él recibió, vía intraportal, una dosis de  $3,8 \times 10^{13}$  partículas de un vector adenoviral de primera generación portando el cDNA de la OTC. Sin embargo, cuatro días después Jessie murió producto de un shock sistémico y el análisis postmortem reveló en hígado infiltración de linfocitos, activación de linfocitos T, formación de anticuerpos anti-Ad, citocinas proinflamatorias, pérdida de células transfectadas y daño endotelial (**St George JA**, 2003). Esta se convirtió en la primera y única muerte asociada a un protocolo de terapia génica. (**NIH Report**, 2002, **George JA**, 2003, **Volpers C. & Kochanek S**. 2004).

La forma intermedia de la enfermedad, presentada por Jesse Gelsinger, puede ser manejada, sin que llegue a curarse, con dieta y suplemento de fármacos (**Barrera LA et al.**, 2004), lo cual le proporcionaría una expectativa de vida cercana a los 50 años. Sin embargo, existe una forma severa de esta entidad que afecta a los recién nacidos, en cuyo caso la expectativa de vida es mínima. El primer interrogante ético que puede plantearse alrededor de este caso es por qué preferir adelantar protocolos en individuos que pueden vivir, aunque sea de manera limitada y supeditada a un tratamiento de soporte, con respecto a pacientes que tienen escasas posibilidades de vida pues no existe ninguna terapia efectiva para su enfermedad y cuál es la relación perjuicio-beneficio potencial en cada uno de los casos?

El hecho de que un recién nacido no pueda firmar el consentimiento informado se ha convertido en un obstáculo para incluir estos pacientes en los protocolos de TG, la pregunta a resolver sería, qué es más importante, el consentir o el daño potencial a la vida del individuo? Indudablemente, esto es algo que debe ser revisado cuidadosamente por los comités de ética.

Si bien es cierto que los pacientes que se incluyen dentro de protocolos clínicos experimentales, facultan a los investigadores para que lo hagan mediante el consentimiento informado, este documento será válido únicamente en la medida en que el paciente haya sido adecuadamente informado y comprenda los antecedentes, riesgos y limitaciones del procedimiento. En el caso de Jesse Gelsinger el texto inicial del consentimiento informado, revisado por el NIH, mencionaba la muerte por toxicidad de animales de experimentación (monos rhesus), detalles que fueron omitidos en la versión final (**Savulescu J**, 2001). Adicionalmente los voluntarios fueron invitados a participar mediante un sitio Web que señalaba el empleo de bajas dosis y promisorios resultados. Sin embargo, el procedimiento experimental presentó una serie de cambios condenables éticamente. Así por ejemplo, a

pesar que el Recombinant DNA Advisory Committee (RAC) de Estados Unidos, recomendó que el mismo vector fuera suministrado en forma intravenosa, los ensayos se realizaron con inyección directa al hígado. El paciente recibió  $3.8 \times 10^{13}$  partículas adenovirales que contenían el gen humano para corregir el defecto genético. Esta concentración, la más alta empleada en cualquier protocolo de terapia génica, fue usada aparentemente porque los investigadores subestimaron la virulencia del vector, ya que éste había permanecido almacenado durante 25 meses (Savulescu J, 2001).

Otro aspecto que no puede escapar al análisis y que ha dado lugar a varios cuestionamientos y regulaciones, es el conflicto de intereses. A pesar que el protocolo se adelantaba en el IHGT, alguno de los investigadores y miembros de la Universidad de Pensilvania responsables del proyecto, tenían patentes sobre aspectos de la tecnología empleada y James Wilson, el director del grupo, al igual que algunos de sus colaboradores tenían intereses en Genovo, la compañía de biotecnología que apoyaba el proyecto y producía los vectores (Savulescu J, 2001).

La mayoría de la comunidad científica estuvo de acuerdo en que se trató de una reacción inusual, comparada con los demás participantes, pero que se presentó como respuesta a la alta dosis del vector. Aun cuando indudablemente en todo procedimiento clínico existen riesgos y la posibilidad de muerte de un paciente es una potencialidad presente en todo acto médico, queda la duda si la suerte de Jesse Gelsinger hubiese sido la misma de no existir toda esa serie de eventos irregulares en el procedimiento.

Finalmente el NIH y el RAC emitieron una serie de guías y recomendaciones encaminadas a maximizar la seguridad de la investigación básica y proveer lineamientos para el adecuado diseño de investigaciones preclínicas y clínicas en TG (NIH Report, 2002).

El segundo caso importante se presentó en el protocolo adelantado por el Dr Alan Fisher, en el que se estaba tratando nueve pacientes para el síndrome de inmunodeficiencia combinada severa ligada al X (SCID-X), enfermedad producto de alteraciones en el receptor de citoquinas  $\gamma_c$ , que lleva a que los pacientes presentes problemas inmunes por deficiencia en la maduración de linfocitos y células NK, y que de no ser tratados mueren muy poco después del nacimiento. Este grupo en el 2000, habían reportado la primera corrección completa de un defecto genético en humanos mediante un protocolo de TG, al administrar células madre hematopoyéticas autólogas transfectadas con un vector retroviral, a dos pacientes de

11 meses con SCID-X (Cavazzana-Calvo M *et al.*, 2000). Sin embargo, en 2003 se prendieron nuevamente las alarmas, con el reporte de la aparición de una condición similar a leucemia en dos de los pacientes que habían recibido la terapia. Este efecto adverso fue asociado a la inserción del vector en el locus LMO-2, del cual se sabía previamente que su expresión errada llevaba a la producción de una oncoproteína (Hacein-Bey-Abina S *et al.*, 2003). Estudios posteriores revelaron que adicionalmente el gen mismo de  $\gamma_c$  funcionaba como un activador cuando estaba bajo el control del promotor viral. El protocolo fue suspendido y los dos pacientes fueron sometidos a quimioterapia, mientras que en los individuos restantes no se encontró ningún efecto adverso y en la actualidad llevan una vida normal (American Society of Gene Therapy Website, 2006).

La posibilidad de que el ADN se incorporara en un sitio erróneo del genoma y causara la activación de oncogenes o la supresión de otros, se había vislumbrado desde los albores de la terapia génica, pero hasta ese momento no se había presentado este tipo de complicaciones en animales o en humanos. Igualmente el hecho de que esta integración sea al azar es algo que ha desatado un gran debate y actualmente es un blanco importante de investigación. Independientemente, los organismos americanos y europeos incrementaron los controles sobre los protocolos con vectores retrovirales, que se manifestó en la reducción del número de protocolos clínicos aprobados con estos vectores (Edelstein ML *et al.*, 2004).

### Consideraciones finales

Uno de los grandes interrogantes a resolver desde el punto de vista ético es el posible uso de la terapia génica en células germinales: óvulos o espermatozoides con el fin de que la corrección se transmita a la descendencia.

La TG de células somáticas, (diferentes a los gametos) para el tratamiento de enfermedades incurables puede considerarse aceptable éticamente porque no va en contra de los principios fundamentales de beneficencia y justicia y porque su aplicación no presenta problemas éticos diferentes a los de cualquier otro tipo de terapia experimental tales como la utilización de nuevos fármacos o de técnicas quirúrgicas novedosas. Sin embargo, sólo se debería intentar cuando no hay otras alternativas terapéuticas mejores y ante la evidencia de que es técnicamente posible, segura y benéfica para el paciente.

El uso de células germinales como blanco de la terapia, brinda la posibilidad de transmitir a futuras generaciones la corrección génica, pero no existe la manera de



predecir los problemas resultantes de esta inserción (Walters L, 1999), razón por la cual la misma comunidad científica internacional propuso una moratoria para su uso en el año de 1972 y actualmente se encuentra prohibida por las entidades regulatorias Europeas y Norteamericanas. Sin embargo, existen buenas razones para hacer terapia génica en células germinales, pues puede ser más efectiva que la repetida administración de una terapia somática generación tras generación, a la vez que se le ofrece a las familias la posibilidad de liberarse de una enfermedad y del temor al riesgo de tener un hijo enfermo o portador (Walters L & Palmer, 1997).

El papel potencial de la manipulación de la línea germinal para la prevención de enfermedades genéticas es mucho menos claro que el de la modificación somática, ya que no conocemos con certeza si existen efectos impredecibles en las generaciones futuras o los efectos a largo plazo que pudieran cambiar las características genéticas de las poblaciones humanas. Por otro lado, algunos consideran que esta sería aceptable siempre y cuando se cumplan algunas condiciones, tales como la existencia de experiencia previa en la TG somática que establezca claramente la efectividad y seguridad del tratamiento de células somáticas, que existan los estudios adecuados en modelos animales que aseguren la reproducibilidad, factibilidad y seguridad de la TG germinal utilizando los mismos vectores de transferencia génica y procedimientos que eventualmente se utilizarían en seres humanos. Sin embargo, dado que la TG germinal está llena de incertidumbres técnicas y éticas, por lo pronto no debe llevarse a cabo.

Para algunas enfermedades, como las neurodegenerativas o lisosomales con compromiso del SNC, se ha evidenciado que el daño sobre el cerebro empieza a desarrollarse varias semanas antes del nacimiento. En estos casos, la terapia génica *in-utero* probablemente no se diferenciaría de otros procedimientos clínicos realizados prenatalmente, pero sería necesario demostrar que el mismo efecto no se podría lograr con una terapia neonatal (Nevin NC, 2000).

Es importante destacar que en la actualidad las enfermedades genéticas son muy difíciles de tratar y curar mediante una sola aproximación terapéutica y que quizás en el futuro cercano tendrá que usarse una combinación de terapia de reemplazo enzimático, inhibición de síntesis de sustratos, terapia génica y trasplante de células, para lograr resultados eficientes y estables a largo plazo.

Los reveses encontrados en los últimos años han servido para volver los ojos a la investigación básica

involucrada en estos procesos, con el fin de hacer de la terapia génica un método más seguro y eficaz en el futuro. A raíz de los inconvenientes encontrados en los pacientes que estaban sometidos a terapia génica en París y en Pensilvania, se suspendieron los protocolos en que ellos estaban involucrados y otros similares que se estaban realizando en Estados Unidos y Gran Bretaña. Sin embargo el número de laboratorios alrededor del mundo que están trabajando en estos procedimientos se calcula cercano a los 2000. En resumen, el equilibrio entre el daño incierto y los beneficios deseados ha sido examinado y ponderado desde instancias religiosas, éticas y del interés público, llegándose a la conclusión de que los estudios y aplicación de la manipulación genética somática realizada con fines terapéuticos deben proseguir.

Con el fin de contribuir a la búsqueda de soluciones terapéuticas para enfermedades genéticas como los EIM, desde hace algunos años el Instituto de Errores Innatos del Metabolismo de la Pontificia Universidad Javeriana, ha enfocado parte de sus esfuerzos a la investigación en terapia génica y terapia de reemplazo enzimático para enfermedades lisosomales. Se han adelantado estudios de transferencia génica para los síndromes de Hunter y Morquio A, logrado la construcción de un casette de expresión episomal para la IDS, deficiente en la enfermedad de Hunter. Esto ha permitido la reparación *in-vitro* del defecto en células provenientes de un paciente con enfermedad de Hunter (Gutiérrez M, *et al.*, 2001). Por otro lado, mediante el uso de un vector AAV que expresaba la enzima GALNS bajo el control del promotor del citomegalovirus, se logró corregir *in-vitro* la deficiencia enzimática en fibroblastos de un paciente con síndrome de Morquio A, usando un sistema de producción de AAV recombinantes libre de adenovirus y con un elevado título de partículas virales (Barrera LA, 2003). Actualmente se están evaluando dos promotores eucarióticos, con el objetivo de mantener la expresión de la enzima durante un mayor intervalo de tiempo y se espera seguir profundizando en esta área para que en un mediano plazo podamos ofrecer a los pacientes con estas enfermedades, una terapia más duradera, segura y eficaz.

## Bibliografía

- Amabile, P. G., J. M. Waugh, T. N. Lewis. 2001. High-efficiency endovascular gene delivery via therapeutic ultrasound. *J Am Coll Cardiol* 37: 1975-1980. American Society of Gene Therapy Website: <http://www.asgt.org>.
- Bagley, J., J. Iacomini. 2003. Gene therapy progress and prospects: gene therapy in organ transplantation. *Gene Ther* 10: 605-611.

- Barrera, LA.** 2003. Desarrollo de un modelo de vectores usando virus adenoasociados libre de adenovirus para corregir la deficiencia enzimática en las mucopolisacaridos. IV Congreso de Errores Innatos del Metabolismo y Pesquisa Neonatal. Octubre 24-27. Iguazú, Argentina.
- , **Sáenz, H., Cuellar, YM., Ospina, S., Garzón, K., Cabrera, MA., Márquez, W., Torres, AL.** 2004. Manual de Enfermedades Metabólicas. Editorial Panamericana SA. Bogotá. 250 p.
- Berns, KI.** Parvoviridae: The viruses and their replication *in*: Fields Virology. Fields, BN., Knipe, DM., Howley, PM. Lippincott – Raven Publishers. Philadelphia. 1996. pp 2173-2192.
- Bossis, I., Chiorini, JA.** 2003. Cloning of an avian adeno-associated (AAAV) an generation of recombinant AAAV particles. *J Virol* **77**: 6799-6810.
- Braun, SE., Aranovich, EL., Anderson, RA., Crotty, PL., McIvor, RS., Whitley, CB.** 1993. Metabolic correction and cross-correction of mucopolysaccharidosis type II (Hunter syndrome) by retroviral-mediated gene transfer and expression of human iduronate –2- sulfatase. *Proc Natl Acad Sci USA* **90**:11830–11834.
- Brooks, AR., Harkins, RN., Wang, P.** 2004. Transcriptional silencing is associated with extensive methylation of the CMV promoter following adenoviral gene delivery to muscle. *J Gene Med* **6**: 395-404.
- Burton, EA., Glorioso, JC., Fink, DJ.** 2003. Gene therapy progress and prospects: Parkinson's disease. *Gene Ther* **10**: 1721-1727.
- Cabrera-Salazar, MA., Novelli, E., Barranger, JA.** 2002. Gene therapy for the lysosomal storage disorders. *Curr Opin Mol Ther* **4**: 1464-8431.
- , **Barranger, JA.** 2003. Lysosomal Storage disorders: gene therapy. *Nature Encyclopedia of the Human Genome* pp. 757-766.
- Cartier, N.** 2001. Gene therapy strategies for X-linked adrenoleukodystrophy. *Curr Opin Mol Ther* **3**: 357-361.
- Cavazzana-Calvo, M., Hacein-Bey, S., de Saint Basile, G., Gross, F., Yvon, E., Nusbaum, P., Selz, F., Hue, C., Certain, S., Casanova, J.L., Bousso, P., Deist, F.L., & Fischer, A.** 2000. Gene therapy of human severe combined immunodeficiency (SCID)-X1 disease. *Science*. **288**: 669-672.
- Chao, H., Mansfield, GS., Bartel, RC.,** 2003. Phenotype correction of hemophilia A mice by spliceosome-mediated RNA trans-splicing. *Nat Med* **9**: 1015-1019.
- Cheng, SH., Smith, AE.** 2003. Gene therapy progress and prospects: gene therapy of lysosomal storage disorders. *Gene Ther* **10**: 1275-1281.
- , **Ziegler, R., Barbon, S., Disnick, R., Schuchman, E.** 2004. Efficacy of AAV-mediated expression of ASM in Niemann-Pick B mice. *J Inherit Metab Dis* **27(suppl 1)**: 162.
- Collins, J., Herman, P., Schuch, C., Babgy, G.** 1992. cmc antisense oligonucleotides inhibit the colony-forming capacity of Colon 320 colonic carcinoma cells. *J. Clin Invest* **89**: 1523-1527.
- Daly, TM., Vogler, C., Levy, B.** 1999. Neonatal gene transfer leads to widespread correction of pathology in a murine model of lysosomal storage disease. *Proc Natl Acad Sci USA* **96**: 2296-2300.
- Dauty, E., Remy, JS., Blessing, T., Behr, JP.** 2001. Dimerizable cationic detergents with a low cmc condense plasmid DNA into nanometric particles and transfect cells in culture. *J Am Chem Soc* **123**: 9227–9234.
- DiFerrante, NM., Nichols, BL., Jr., Donnelly, PV., Neri, G., Hrgovcic, R., Berglund, RK.** 1971. Induced degradation of glycosaminoglycans in Hurler's and Hunter's syndromes by plasma infusion. *Proc Nat Acad Sci USA* **68**: 303-307.
- Dimitriev, IP., Kashentseva, EA., Curieh, DT.** 2002. Engineering of adenovirus vectors containing heterologous peptide sequences in the C terminus of capsid protein IX. *J Virol* **76**: 6893-6899.
- Ding, Z., Harding, C., Thöny, B.** 2004. State-of-the-art 2003 on PKU gene therapy. *Mol Genet Metab* **81**: 3-8.
- Dudley, RWR., Lu, Y., Gilbert, R.** 2004. Sustained improvement of muscle function one year after full-length dystrophin gene transfer into *mdx* mice by a gutted helper-dependent adenoviral vector. *Hum Gene Ther* **15**: 145-156.
- Edelstein, ML., Adeb, MR., Wixon, J., Edelstein, RM.** 2004. Gene therapy clinical trials worldwide 1989-2004 – an over view. *J Gene Med* **6**: 597-602.
- Ellinwood, NM., Vite, C., Haskins, M.** 2004. Gene therapy for lysosomal storage diseases: the lessons and promise of animal models. *J Gene Med* **6**: 481-506.
- Felgner, JH., Kumar, R., Sridhar, CN., Wheeler, CJ., Tasi, YJ., Border, R., Ramsey, P., Martin, M., Felgner, PL.** 1994. Enhanced gene delivery system and mechanism studies with a novel series of cationic lipid formulations. *J Biol Chem* **269**: 2550-2561.
- Fisher, KJ., Kelley, WM., Burda, JF.** 1996. A novel adenovirus- adeno-associated virus hybrid vector that displays efficient rescue and delivery of the AAV genome. *Hum Gene Ther* **7**: 2079-2087.
- Fraites, TJ., Schleissing, MR., Shanelly, RA.** 2002. Correction of the enzymatic and functional deficits in a model of pompe disease using adeno-associated virus vectors. *Mol Ther* **5**: 571-578.
- Gao, C., Sands, MS., Haskins, ME., Ponder, KP.** 2000. Delivery of a retroviral vector expressing human  $\alpha$ -glucuronidase to the liver and spleen decreases Lysosomal storage in mucopolysaccharidosis VII mice. *Mol Ther* **2**: 233-244.
- Gao, G., Alvira, MR., Wang, L.** 2002. Novel adeno-associated virus from rhesus monkeys as vectors for human gene therapy. *Proc Natl Acad Sci USA* **99**: 11854-11859.
- García, F., Barrera, LA.** 2001. La terapia génica. *Innovación y ciencia* **3-4**: 88-97.
- García-Blanco, MA.** 2003. Messenger RNA reprogramming by spliceosome-mediated RNA trans-splicing. *J Clin Invest* **112**: 475-480.
- Gaspar, HB., Howe, S., Thrasher, AJ.** 2003. Gene therapy progress and prospects: gene therapy for severe combined immunodeficiency. *Gene Ther* **10**: 1999-2004.

- Ghosh, A., Allamarvdasht, M., Pan, C.J., Sun, M.S., Mansfield, B.C., Byrne, B.J., Chou, J.Y. 2006. Long-term correction of murine glycogen storage disease type Ia by recombinant adeno-associated virus-1-mediated gene transfer. *Gene Ther* **13**:321-329.
- Griesenbach, U., Ferrari, S., Geddes, D.M., Alton, EFWF. 2002. Gene therapy progress and prospects: cystic fibrosis. *Gene Ther* **9**: 1344-1350.
- Groves, K.A., Barnett, S.C., Franklin, R.J.M., Noble, M. 1993. Repair of demyelinated lesions by transplantation of purified O-2A progenitors cells. *Nature* **362**: 453-455.
- Gutiérrez, M.A., Cerón F., García, F., Barrera, L.A. 2001. Construcción y evaluación de un vector de expresión episomal conteniendo el cDNA de la IDS para corregir la deficiencia enzimática en fibroblastos de paciente con síndrome de Hunter. III Congreso Latinoamericano de Errores Innatos del Metabolismo y Pesquisa Neonatal. Octubre 21-24. Cartagena, Colombia.
- Haccin-Bey-Abina, S., von Kallen, C., Schmidt M. 2003. A Serious adverse event alter successful gene therapy for X-linked severe combined immunodeficiency. *N Engl J Med* **348**: 255-256.
- Harris, J.D., Lemoine, N.R. 1996. Strategies for targeted gene therapy. *Trends in Genet* **12**: 400-404.
- Herweijer, H., Wolff, J.A. 2003. Progress and prospects: naked DNA gene transfer and therapy. *Gene Ther* **10**: 453-458.
- Hilman, B.C., Sorensen, R.U. 1994. Management Options: SCIDS with Adenosine Deaminase Deficiency. *Ann Allergy* **72**: 395-402.
- Journal of Gene Medicine Clinical Trials Website: [www.wiley.co.uk/wileychi/genmed](http://www.wiley.co.uk/wileychi/genmed).
- Kamili, S., Spelbring, J., Carson, D., Krawczynski, K. 2004. Protective efficacy of hepatitis E virus DNA vaccine administered by gene gun in the cynomolgus macaque model of infection. *J Infect Dis* **189**: 258-264.
- Kay, M.A., Liu, D., Hoogerbrugge, P.M. 1997. Gene Therapy. *Proc Natl Acad Sci USA* **94**: 12744-12746.
- Kim, I., Józkwicz, A., Piedra, P.A. 2001. Lifetime correction of genetic deficiency in mice with a single injection of helper-dependent adenoviral vector. *Proc Natl Acad Sci USA* **98**: 13282-13287.
- Koeberl DD, Sun BD, Damodaran TV, Brown T, Millington DS, Benjamin, D.K., Jr, Bird, A., Schneider, A., Hillman, S., Jackson, M., Beaty, R.M., Chen, Y.T. 2006. Early, sustained efficacy of adeno-associated virus vector-mediated gene therapy in glycogen storage disease type Ia. *Gene Ther*. **13**: 1281-1289.
- Kuriyama, S., Mitoro, A., Nakatani, T. 2000. Particle-mediated gene transfer into murine livers using a newly developed gene gun. *Gene Ther* **7**: 1132-1136.
- Lacadena, J.R. 2001. Terapia Génica. Consideraciones éticas. (N.I.C.E). <http://cerzopntic.mec.es/jlacaden/presenOO.html>.
- Lanpher, B., Brunetti-Pierri, N., Lee, B. 2006. Inborn errors of metabolism: the from Mendelian to complex diseases. *Nat Rev Genet*. **7**: 449-460.
- Li, B.W., Rush, A., Zhang, S.R. 2004. Antibody responses to Brugia malayi antigens induced by DNA vaccination. *Filaria J* **22**: 1-8.
- Li, S., Ma, Z. 2001. Nonviral gene therapy. *Curr Gene Ther* **1**: 201-226.
- Lim, Y.B., Han, S.O., Kong, H.U. 2000. Biodegradable polyester, poly[a-(4-aminobutyl)-Lglycolic acid], as a non-toxic gene carrier. *Pharm Res* **17**: 811-816.
- Liu, F., Huang, L. 2002. A syringe electrode device for simultaneous injection of DNA an electrotransfer. *Mol Ther* **5**: 323-328.
- Lowenstein, P.R. 2004. Immunological needles in the gene therapy haystack: applying a genetic paradigm to gene therapy. *Gene Ther* **11**: 1-3
- Mah, C., Cresawn, K.O., Fraites, T.J. Jr, Pacak, C.A., Lewis, M.A., Zolotukhin, I., Byrne, B.J. 2002. Sustained correction of glycogen storage disease type II using adeno-associated virus serotype 1 vectors. *Gene Ther*. **12**: 1405-1409.
- Manno, C.S., Chew, A.J., Hutchison, S. 2003. AAV-mediated factor IX gene transfer to skeletal muscle in patients with severe hemophilia B. *Blood* **101**: 2963-2972.
- Marshall, J., McEachern, K., Nietupski, J., Cavanagh, J., Grabowski, Cheng, S.H. 2004a. AAV-mediated gene therapy of a murine model of Gaucher disease. *J Inherit Metab Dis*. **27(suppl 1)**: 160.
- Marshall, J., Ziegler, R., Barbon, C., Bercury, Cheng, S.H. 2004b. Efficacy following AAV2/8-mediated expression of  $\alpha$ -galactosidase A in Fabry mice. *J Inherit Metab Dis*. **27(suppl 1)**: 173.
- Martín-Touaux, E., Puech, J.P., Château, D. 2002. Muscle as a putative producer of acid  $\alpha$ -glucosidasa for glycogenosis type II gene therapy. *Hum Mol Genet* **11**: 1637-1645.
- McKenzie, D.L., Kwok, K.Y., Rice, K.G. 2000. A potent new class of reductively activated peptide gene delivery agents. *J Biol Chem* **275**: 9970-9977.
- McKinnis, E.J., Sulzbacher S., Rutledge, J.C., Sanders, J., Scott, C.R. 1996. Bone marrow transplantation in Hunter syndrome. *J Pediatr* **129**: 145-148.
- McNeish, I.A., Bell, S.J., Lemoine N.R. 2004. Gene therapy progress and prospects: cancer gene therapy using suppressor genes. *Gene Ther* **11**: 497-503.
- Min, J.J., Gambhir, S.S. 2004. Gene therapy progress and prospects: Noninvasive imaging of gene therapy in living subjects. *Gene Ther* **11**: 115-125.
- Mount, J.D., Herzog, R.W., Tillson, M. 2002. Sustained phenotypic correction of hemophilia B dogs with a factor IX null mutation by liver-direct gene therapy. *Blood* **99**: 2670-2675.
- Nakai, H., Herzog, R.W., Hagstrom, N. 1998. Adeno-associated viral vector-mediated gene transfer of human blood coagulation factor IX into mouse liver *Blood* **91**: 4600-4607.
- Nakai, H., Montini, E., Fuess S. 2003. AAV serotype 2 vectors preferentially integrate into active genes in mice. *Nat Genet* **14**: 297-302.
- Naldini, L., Verma, I.M. 2000. Lentiviral vectors. *Adv Virus Res* **55**, 599-609.
- Neufeld, E.F., Muenzer, J. Mucopolysaccharidosis in: The Metabolic and Molecular Bases of Inherited Diseases. Scriver, C.R.,

- Beaudet A.L., Sly W.S. & Valle D. (eds). McGraw-Hill. New York. 2001. 3421-3452.
- Nevin, NC.** 2002. What has happened to gene therapy? *Eur J Pediatr* **159** (Suppl 3):S240-S242.
- Nicklin, SA., Buening, H., Dishart, KL.** 2001. Efficient and selective AAVs-mediated gene transfer directed to human vascular endothelial cells. *Mol Ther* **4**: 174-181.
- NIH Report.** 2002. Assessment of adenoviral vector safety and toxicity: report of the National Institutes of Health Recombinant DNA Advisory Committee. *Hum Gene Ther* **13**: 3-13
- Niidade, T., Huang, L.** 2002. Gene therapy progress and prospects: nonviral vectors. *Gene Ther* **9**:1647-1652.
- Oh, H., Park, E., Kang, S., Jo, I., Jung, S.** 2004. Long-term enzymatic and phenotypic correction in the phenylketonuria mouse model by adeno-associated virus vector-mediated gene transfer. *Pediatr Res.* **56**: 1-7.
- Orkin, L.** 1995. Report and Recommendations of the Panel to Assess the NIH Investment in Research on Gene Therapy. Distributed by the National Institutes of Health. Bethesda. MD. Available: www.nih.gov. Dec. 07.
- Park, J., Murray, GJ., Limaye, A.** 2003. Long-term correction of globotriaosylceramide storage in Fabry mice by recombinant adeno-associated virus-mediated gene transfer. *Proc Natl Acad Sci USA* **100**: 3450-3454.
- Ponder, KP., Melniczek, JR., Xu, L.** 2003. Therapeutic neonatal hepatic gene therapy in mucopolysaccharidosis VII dogs. *Proc Natl Acad Sci USA* **99**: 13102-13107.
- Puttaraju, M., DiPasquale, J., Baker, CC.** 2001. Messenger RNA repair and restoration of protein function by spliceosome-mediated RNA trans-splicing. *Mol Therp.* **4**: 105-114.
- Recchia, A., Parks, RJ., Lamartina, S.** 1999. Site-specific integration mediated by hybrid adenovirus/adeno-associated virus vector. *Proc Natl Acad Sci USA* **96**: 2615-2620.
- Rutledge, EA., Russell, DW.** 1997. Adeno-associated virus vector integration junctions. *J Virol* **71**: 8429-8436.
- Sáenz, H., Gutiérrez, MA., Barrera, LA.** 2004. Terapia génica con vectores virales para el tratamiento de mucopolisacaridosis y otras enfermedades genéticas. *Universitas Medica* **45**: 22-31.
- Sands, M., Davidson, B.** 2006. Gene Therapy for Lysosomal Storage Diseases. *Mol Ther* **13**: 839-849.
- Sapolsky, R.** 2003a. Altering behaviour with gene transfer in the limbic system. *Physiol Behav.* **79**: 479-490.
- \_\_\_\_\_ 2003b. Gene therapy for psychiatric disorders. *Am J Psychiatry* **162**: 208-220.
- Savulescu, J.** 2001. Harm, ethics committees and gene therapy death. *J Med Ethics* **27**: 148-150.
- Smith, A.E.** 1995. Viral vectors in gene therapy. *Ann Rev Microbiol* **49**:807-838.
- Smith, JS., Keller, JR., Lohrey, NC.** 1999. Redirected infection of directly biotinylated recombinant adenovirus vectors through cell surface receptors and antigens. *Proc Natl Acad Sci USA* **96**: 8855-8860.
- Somiari, S., Glasspool-Malone, J., Drabick, JJ.** 2000. Theory and *in vivo* application of electroporative gene delivery. *Mol Ther* **3**:249-255.
- St George, JA.** 2003. Gene therapy progress and prospects: adenoviral vectors. *Gene Ther* **10**: 1135-1141.
- Stein, CS., Kang, Y., Sauter SL.** 2001. *In Vivo* treatment of hemophilia A and mucopolysaccharidosis type VII using nonprimate lentiviral vectors. *Mol Ther* **3**: 850-856.
- Sun, B., Zhang, H., Franco, LM., Brown, T., Bird, A., Schneider, A., Koeberl, DD.** 2005a. Correction of glycogen storage disease type II by an adeno-associated virus vector containing a muscle-specific promoter. *Mol Ther* **11**: 889-898.
- \_\_\_\_\_ **Zhang, H., Franco, LM., Young, SP., Schneider, A., Bird, A., Amalfitano, A., Chen, YT., Koeberl, DD.** 2005b. Efficacy of an adeno-associated virus 8-pseudotyped vector in glycogen storage disease type II. *Mol Ther* 2005 **11**: 57-65.
- Taniyama, Y., Tachibana, K., Hiraoka, K.** 2002. Local delivery of plasmid DNA into rat carotid artery using ultrasound. *Circulation* **105**: 1233-1239.
- Tao, W., Hangoc, G., Cooper S., Bosmeyer, HE.** 2004. SDF-1 $\alpha$ /CXCL12 enhances retroviral-mediated gene transfer into immature subsets of human and murine hematopoietic progenitor cells. *Gene Ther* **11**: 61-69.
- Templeton NS and Lasic D.** 2000. Gene therapy. Therapeutic mechanisms and strategies. Marcel Dekker, Inc. New York. 584 p.
- Themis, M., May, D., Coutelle, C., Newbold, RF.** 2003. Mutational effects of retrovirus insertion on the genome of V79 cells by an attenuated retrovirus vector: implications for gene therapy. *Gene Ther* **10**: 1703-1711.
- VandenDriessche, T., Vanslebrouck, V., Goovaerts, I.** 1999. Long-term expression of human coagulation factor VIII and correction of hemophilia A after *in vivo* retroviral gene transfer in factor VIII-deficient mice. *Proc Natl Acad Sci USA* **96**: 10379-10384.
- Vargas, J., Gusella, GL., Najfeld, V.** 2004. Novel integrase-defective lentiviral episomal vectors for gene transfer. *Hum Gene Ther* **15**: 361-372.
- Volpers, C., Kochanek, S.** 2004. Adenoviral vectors for gene transfer and therapy. *J Gene Med* **6**: S164-S171.
- \_\_\_\_\_ **Thirion, C., Biermann, V.** 2003. Antibody-mediated targeting of an adenovirus vector modified to contain a synthetic immunoglobulin g-binding domain in the capsid. *J Virol* **77**: 2093-2104.
- Vorburger, SA., Hunt, KK.** 2002. Adenoviral gene therapy. *The Oncologist.* **7**: 46-59.
- Wagner, E., Cotten, M., Foisner, R., Birnstiel, ML.** 1991. Transferrin-polycation-DNA complexes: the effect of polycations on the structure of the complex and DNA delivery to cells. *Proc Natl Acad Sci USA* **88**: 4255-4259.
- Walsh, CE.** 2003. Gene therapy progress and prospects: gene therapy for the hemophilias. *Gene Ther* **10**: 999-1003.
- Walters, L.** 1999. Ethical issues in human gene therapy. *Human Genome News* **10**: 16-17.

- \_\_\_\_\_ **Palmer, JG.** 1997. The ethics of human gene therapy. Oxford University Press, New York. pp. 60-98.
- Wheeler, CJ., Felgner, PL., Tsai, YJ., Marshall, J., Sukhu, L., Soeun, GH., Hartikka, J., Nietupski, J., Manthorpe, M., Nichols, M., Plewe, M., Liang, X., Norman, J., Smith, A., Cheng, SH.** 1996. A novel cationic lipid greatly enhances plasmid delivery and expression in mouse lung. *Proc Natl Acad Sci USA* **93**: 11454-11459.
- Wickham, TJ., Segal, DM., Roelvink, PW.** 1996. Targeted adenovirus gene transfer to endothelial and smooth muscle cells by using biospecific antibodies. *J Virol* **70**: 6831-6838.
- Widera, G., Austin, M., Rabussay, D.** 2000. Increased DNA vaccine delivery and immunogenicity by electroporation in vivo. *J Immunol* **164**: 463-4640.
- Wightman, L., Kischeis, R., Rössler, V.** 2001. Different behavior of branched and linear polyethylenimine for gene delivery in vitro and in vivo. *J Gene Med* **3**: 362-372.
- Xiao, X., Li, J., Samulski, J.** 1998. Production of high-titer recombinant adeno-associated virus vectors in the absence of helper adenovirus. *J Virol* **72**: 2224-2232.
- Zarnitsyn, VG., Prausnitz, MR.** 2004. Physical parameters influencing optimization of ultrasound-mediated DNA transfection. *Ultrasound Med Biol* **30**: 527-538.
- Zhou, X., Nicholas, M.** 1998. In vitro packaging of adeno-associated virus DNA. *J Virol* **72**: 3241-3247.
- Zhu, W., Thomas, CE., Sparling, PF.** 2004. DNA Immunization of mice with a plasmid encoding Neisseria gonorrhoea PorB protein by intramuscular injection and epidermal particle bombardment. *Vaccine* **22**: 661-670.

Recibido el 17 de agosto de 2004

Aceptado para su publicación el 25 de octubre de 2006

# PERMUTATION POLYNOMIALS IN ONE INDETERMINATE OVER MODULAR ALGEBRAS

por

Pablo A. Acosta-Solarte<sup>1</sup> & Víctor S. Albis<sup>2</sup>

## Resumen

**Acosta-Solarte, Pablo A. & Víctor S. Albis:** Permutation polynomials in one indeterminate over modular algebras. *Rev. Acad. Colomb. Cienc.* **30** (117): 541-548, 2006. ISSN 0370-3908.

Resultados conocidos sobre polinomios de permutación con coeficientes en un cuerpo finito se extienden a álgebras de la forma  $L_\nu = K[X]/(p(X)^\nu)$ , donde  $K$  es un cuerpo finito,  $p(X) \in K[X]$  un polinomio irreducible,  $\nu = 1, 2, \dots$ , y al álgebra de las series potenciales  $L[[Z]]$ , donde  $L = K[X]/(p(X))$ . Se estudian también análogos de polinomios de Dickson en este contexto.

**Palabras clave:** Polinomio de permutación, polinomio de Dickson.

## Abstract

Known results on permutation polynomials with coefficients in a finite field are extended to algebras of the form  $L_\nu = K[X]/(p(X)^\nu)$ , where  $K$  is a finite field,  $p(X) \in K[X]$  is an irreducible polynomial,  $\nu = 1, 2, \dots$ , and to the algebra of power series  $L[[Z]]$ . Finally, analogous of Dickson polynomials in these algebras are studied.

**Key words:** Permutation polynomial, Dickson polynomial.

<sup>1</sup> Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá, Colombia. E-mail: paacostas@udistrital.edu.co

<sup>2</sup> Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, Colombia. Email: valbis@accefy.org.co AMS Classification 2000: 13B25, 13F25, 11T55.

## 1. Introduction

In the second half of the last century, the main interest in finite fields  $K = \mathbb{F}_q$  focused in the study of permutation polynomials over these fields and the application of its results to coding theory. During the same period of time, most of the obtained results were extended mainly to the classical rings  $\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}$  and the Galois rings  $GR(p^m, k)$  (see, for example, [11], [12], [13]), permitting thus the construction of new cryptosystems with a variety of interesting properties. In the same spirit, this paper extends some known results about permutation polynomials over finite fields in one indeterminate to analogous permutation polynomials over the algebras  $L_\nu = K[X]/(p(X)^\nu)$ , where  $p(X) \in K[X]$  is irreducible, and  $L[[Z]]$ . Since the  $L_\nu$  algebras are not always Galois rings (the exception being the rings  $\mathbb{F}_p[X]/(X^\nu)$ , it seems to us that apparently we are stepping into a new nice field of research, with eventual applications to coding theory.

The present paper is structured as follows: In the second section we establish the necessary basic definitions and results needed for a better understanding of what follows. In the third section, we define permutation polynomials over  $L_\nu$  and  $L[[Z]]$ , and extend to these algebras analogues of well known general results about permutation polynomials over finite fields. In the fourth section we examine closely the analogues of Dickson polynomials in this new setting.

## 2. Preliminaries

Let  $K$  be a field with  $q$  elements and let  $p(X) \in K[X]$  be a monic and irreducible polynomial of degree  $d$ . We know that the quotient  $L = K[X]/(p(X))$  is a finite field containing  $K$ , thus a finite extension  $L/K$  of degree  $d$ . Moreover,  $L_\nu = K[X]/(p(X)^\nu)$ ,  $\nu > 1$ , is an  $L$ -algebra with  $q^{\nu d}$  elements, which we will denote by  $\alpha(z_\nu)$ . More precisely,

$$L_\nu = \{ \alpha(z_\nu) = \alpha_0 + \alpha_1 z_\nu + \dots + \alpha_{\nu-1} z_\nu^{\nu-1} : \alpha_i \in L, \\ i = 0, 1, \dots, \nu-1 \},$$

where  $z_\nu^j = 0$  if  $j \geq \nu$  and for  $i = 0, 1, \dots, \nu-1$ , the elements  $z_\nu^i$ , form an  $L$ -basis of  $L_\nu$  (see [2], [10]).

From now on, in order to simplify the notation, we assume that  $L$  has  $q$  elements, so that  $L_\nu$  will have  $q^\nu$  elements.

The following definitions and facts may be found in [2].

If  $\mu$  and  $\nu$  are positive integers and  $\mu \leq \nu$ , the mapping  $\pi_{\mu,\nu} : L_\nu \rightarrow L_\mu$  defined by  $\alpha(z_\nu) \mapsto \alpha(z_\mu)$ , is an epimorphism of  $L$ -algebras, called the *projection* of  $L_\nu$  onto  $L_\mu$ . If  $f_\nu(t)$  is a polynomial in  $L_\nu[t]$  then,

$$\pi_{\mu,\nu}(f_\nu(t)) = f_\mu(t)$$

is the polynomial in  $L_\mu[t]$  whose coefficients are the classes modulo  $(p(X)^\mu)$  of the coefficients of  $f_\nu(t)$ .

If  $\alpha(z_\nu) \in L_\nu$  is a zero of  $f_\nu(t)$ , and  $\mu \leq \nu$ , we say that  $\alpha(z_\nu)$  is a *descendant* of  $\alpha(z_\mu)$ , or that  $\alpha(z_\mu)$  is an *ascendant* of  $\alpha(z_\nu)$ , if  $\pi_{\mu,\nu}(\alpha(z_\nu)) = \alpha(z_\mu)$ . In this case we clearly have  $f_\mu(\alpha(z_\mu)) = 0$ .

A zero  $\alpha(z_\mu) \in L_\mu$  of  $f_\mu$  is said to be *non singular* (or *regular*) if

$$\frac{df_1(\pi_{1,\nu}(\alpha(z_\mu)))}{dt} \neq 0.$$

Otherwise it is said to be *singular*. The following fact is readily seen: *every descendant (ascendant) of a non singular zero is a non singular zero.*

The set of all formal power series  $L[[Z]]$

$$\sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i Z^i = \lambda_0 + \lambda_1 Z + \lambda_2 Z^2 + \lambda_3 Z^3 + \dots, \quad \lambda_i \in L,$$

equipped with the usual operations is an  $L$ -algebra, called the *algebra of formal power series* in one indeterminate over the finite field  $L$ . As a ring,  $L[[Z]]$  is a discrete local ring with maximal ideal  $(Z)$ . Actually,  $L[[Z]]$  is the *projective limit* of the projective system of  $L$ -algebras  $(L_\nu, (\pi_{\mu,\nu})_{\mu \leq \nu})$  if we define the canonical projections  $\pi_\nu : L[[Z]] \rightarrow L_\nu$  by

$$\lambda(Z) = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i Z^i \mapsto \lambda(z_\nu),$$

where

$$\lambda(z_\nu) = \lambda_0 + \lambda_1 z_\nu + \lambda_2 z_\nu^2 + \dots + \lambda_{\nu-1} z_\nu^{\nu-1}.$$

Let us remark *in passim* that each  $\pi_\nu$  is an epimorphism of  $L$ -algebras. Moreover,  $L[[Z]]/(Z^\nu) = L_\nu$ . This said, if  $f(t)$  is a polynomial with coefficients in  $L[[Z]]$ , its reduction  $f_\nu(t)$  modulo  $(Z^\nu)$  is the polynomial in  $L_\nu[t]$  whose coefficients are the classes modulo  $(Z^\nu)$  of the coefficients of  $f(t)$ . Clearly, if  $\nu \geq \mu$  then  $\pi_{\mu,\nu}(f_\nu(t)) = f_\mu(t)$ . The above shows that  $(L_\nu, (\pi_{\mu,\nu})_{\nu \geq \mu})$  is a projective system whose limit is  $L[[Z]]$ .

Also, it is well known that  $\varepsilon(Z) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon_i Z^i$  is a unit in  $L[[Z]]$  if, and only if,  $\varepsilon_0 \neq 0$ . Moreover each  $\lambda(Z) \neq 0$  may be written as  $\lambda(Z) = \varepsilon(Z)Z^{v(\lambda)}$ , where  $\varepsilon(Z)$  is a unit and  $v(\lambda) \geq 0$ . Thus,  $\lambda(Z)$  is a unit if  $v(\lambda) = 0$ , and

conversely. The mapping onto  $\{0, 1, \dots\} \cup \{\infty\}$  defined by  $\lambda(Z) \mapsto v(\lambda)$  if  $\lambda(Z) \neq 0$  and  $v(0) = \infty$  is a discrete valuation, which induces a pseudometric on  $L[[Z]]$ . In this setting,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^k \lambda_i Z^i = \lambda(Z). \quad (1)$$

Further,

$$\pi_\nu(\lambda(Z)) = [\varepsilon_0 + \varepsilon_1 z_\nu + \dots + \varepsilon_{\nu-1} z_\nu^{k-1}] z_\nu^{v(\lambda)},$$

which equals 0 if  $v(\lambda) \geq \nu$ , and equals

$$\varepsilon_0 + \varepsilon_1 z_\nu + \dots + \varepsilon_{\nu-1} z_\nu^{v(\lambda)+k-1}$$

if  $v(\lambda) < \nu$  and  $\nu = k + v(\lambda)$ . In particular,  $\pi_1(\lambda(Z)) = 0$  if  $\lambda(Z)$  is not a unit. In turn, this implies that if the leading coefficient of the polynomial  $f(t) \in L[[Z]][t]$  of degree  $m$  is not a unit, then  $f_1(t)$  has degree  $< m$ . To avoid this inconvenience, from now on we suppose that the leading coefficients of all the polynomials  $f(t)$  are units.

The following two results may be found in [6, pp. 33, 53]:

**Lemma 2.1.** *Let  $f(t) \in L[[Z]][t]$ . Then the equation  $f(t) = 0$  has a solution in  $L[[Z]]$  if, and only if, the equations  $f_\nu(t) = 0$  have solutions in  $L_\nu$  for each  $\nu \geq 1$ .*  $\square$

**Lemma 2.2.** *Let  $\alpha(Z) = \alpha_0 + \alpha_1 Z + \dots$  be a unit, and  $m$  a positive integer not divisible by  $p$  (the characteristic of  $L$ ). Then  $\alpha_0$  has an  $m$ -th root in  $L$  if, and only if, there exist  $\gamma(Z) \in L[[Z]]$  such that  $\gamma(Z)^m = \alpha(Z)$ .*  $\square$

If  $\tau(z_\nu) = \sum_{i=0}^{\nu-1} \tau_i z_\nu^i \in L_\nu$  let us define

$$\hat{\tau}(z_\nu) = \sum_{i=0}^{\nu-2} \tau_i z_\nu^i \in L_\nu.$$

This notation enables us to state the following version of Taylor's formula, proved in [2, Proposition 2.3]:

**Lemma 2.3.** *If  $f(t)$  is a polynomial with coefficients in  $L[[Z]]$ , then for each  $\nu = 2, 3, \dots$  we have*

$$f_\nu(\tau(z_\nu)) = f_\nu(\hat{\tau}(z_\nu)) + \tau_{\nu-1} f'_\nu(\hat{\tau}(z_\nu)) z_\nu^{\nu-1}. \quad (2)$$

$\square$

If now we write  $f'_\nu(\hat{\tau}(z_\nu)) = \sum_{i=0}^{\nu-1} \chi_i z_\nu^i$ , we obtain

$$\tau_{\nu-1} z_\nu^{\nu-1} f'_\nu(\hat{\tau}(z_\nu)) = (\tau_{\nu-1} \chi_0) z_\nu^{\nu-1},$$

using that  $z_\nu^n = 0$  if  $n \geq \nu$ . Thus (2) becomes

$$f_\nu(\tau(z_\nu)) = f_\nu(\hat{\tau}(z_\nu)) + \tau_{\nu-1} \chi_0 z_\nu^{\nu-1}. \quad (3)$$

### 3. Basic results

A polynomial  $f(t)$  over  $L[[Z]]$  is said to be a *permutation polynomial* if the associated polynomial function

$$f : L[[Z]] \rightarrow L[[Z]] \\ \alpha(Z) \mapsto f(\alpha(Z)),$$

is a bijective function. Similarly, a polynomial  $f_\nu(t) \in L_\nu[t]$ , for  $\nu = 1, 2, 3, \dots$  is said to be a *permutation polynomial* if the associated polynomial function from  $L_\nu$  into  $L_\nu$  is a bijective function.

The next proposition is crucial in our purpose to extend known results of permutation polynomials over finite fields to permutation polynomials over the algebras  $L_\nu$ .

**Proposition 3.1.** *Let  $f(t) \in L[[Z]][t]$ . Then  $f_\nu(t)$  permutes  $L_\nu$  if, and only if,  $f_1(t)$  permutes  $L$  and the zero of  $f_1(t)$  in  $L$  is non singular.*

*Proof.* If  $f_\nu(t)$  permutes  $L_\nu$  then  $f_\mu(t)$  permutes  $L_\mu$  for all  $\mu \leq \nu$ . Indeed, if  $\alpha(z_\mu) = \alpha_0 + \alpha_1 z_\mu + \dots + \alpha_{\mu-1} z_\mu^{\mu-1} \in L_\mu$ , then  $\alpha(z_\nu) = \alpha_0 + \alpha_1 z_\nu + \dots + \alpha_{\mu-1} z_\nu^{\mu-1} \in L_\nu$ . Since, by hypothesis,  $f_\nu(t)$  permutes  $L_\nu$ , there is  $\beta(z_\nu) \in L_\nu$  such that  $f_\nu(\beta(z_\nu)) = \alpha(z_\nu)$ . It is now clear that  $\pi_{\mu,\nu}(f_\nu(\beta(z_\nu))) = f_\mu(\beta(z_\mu)) = \alpha(z_\mu)$ , which shows that the polynomial function induced by  $f_\mu(t)$  on  $L_\mu$  is onto and thus a bijection, since each  $L_\mu$  is finite. In particular  $f_1(t)$  permutes  $L$ . Now, using (3), we obtain for  $\tau_0 + \tau_1 z_2 \in L_2$

$$f_2(\tau_0 + \tau_1 z_2) = f_2(\tau_0) + \tau_1 \chi_0 z_2,$$

and putting

$$f_2(\tau_0) = \gamma_0 + \gamma_1 z_2$$

we obtain

$$f_2(\tau_0 + \tau_1 z_2) = \gamma_0 + (\gamma_1 + \tau_1 \chi_0) z_2.$$

Thus, for a given  $\alpha_0 + \alpha_1 z_2$ , the equation

$$f_2(\tau_0 + \tau_1 z_2) = \alpha_0 + \alpha_1 z_2 \quad (4)$$

is solvable if, and only if,  $\gamma_0 = \alpha_0$  and  $\gamma_1 + \tau_1 \chi_0 = \alpha_1$ . Since by hypothesis each  $f_\nu(t)$  is a permutation polynomial, (4) is always solvable. In particular, if  $\alpha_0 = 0$  then  $f_1(\tau_0) = 0$  has a unique solution  $\tau_0$ . Now, if  $\chi_0 = 0$ , i.e.,  $f'_1(\tau_0) = 0$ , and since

$$\gamma_1 + \tau_1 \chi_0 = \alpha_1, \quad (5)$$



this yields  $\gamma_1 = \alpha_1$ . But then (5) has exactly  $q$  solutions, which is not the case since  $f_2(t)$  is a permutation polynomial. Therefore  $\tau_0$  is non singular.

Conversely, let  $f(t) \in L[t]$  and suppose that  $f_1(t)$  is a permutation polynomial whose zero is non singular. We show next that  $f_2(t)$  permutes the elements of  $L_2$ . For this consider a given  $\alpha_0 + \alpha_1 z_2 \in L_2$ . Since, by hypothesis,  $f_1(t)$  is a permutation polynomial, there is a unique  $\tau_0 \in L$  such that  $f_1(\tau_0) = \alpha_0$ . For this  $\tau_0$  consider the equation

$$f_2(\tau_0 + \tau_1 z_2) = f_2(\tau_0) + \tau_1 \chi_0 z_2 - \gamma_0 + (\gamma_1 + \tau_1 \chi_0) z_2 = \alpha_0 + \alpha_1 z_2, \tag{6}$$

where  $f_2(\tau_0) = \gamma_0 + \gamma_1 z_2$ . It is clear that in this situation  $\gamma_0$  and  $\gamma_1$  are completely determined by  $\tau_0$ . From (6) we obtain  $\gamma_0 = \alpha_0$  and

$$\alpha_1 = \gamma_1 + \tau_1 \chi_0. \tag{7}$$

If  $\alpha_0 = 0$ , then  $f_1(\tau_0) = 0$  has a solution and  $f'_1(\tau_0) = \chi_0 \neq 0$ , because of the hypothesis made on  $f_1(t)$ . So  $\tau_1 = (\alpha_1 - \gamma_1)/\chi_0$ , is uniquely determined. If  $\alpha_0 \neq 0$  and  $\chi_0 \neq 0$ , from (7) we again obtain  $\tau_1 = (\alpha_1 - \gamma_1)/\chi_0$ . And, finally, if  $\chi_0 = 0$  we see that  $\gamma_1 = \alpha_1$ . Consequently, the polynomial function induced by  $f_2(t)$  is an onto mapping, and so this polynomial permutes  $L_2$ . We now proceed by induction on  $\nu$ . Let

$$\alpha(z_\nu) = \alpha_0 + \alpha_1 z_\nu + \dots + \alpha_{\nu-2} z_\nu^{\nu-2} + \alpha_{\nu-1} z_\nu^{\nu-1}$$

be given. Since by hypothesis  $f_{\nu-1}(t)$  permutes the elements of  $L_{\nu-1}$ , the equation

$$f_{\nu-1}(t) = \alpha_0 + \alpha_1 z_{\nu-1} + \dots + \alpha_{\nu-2} z_{\nu-1}^{\nu-2}$$

has a unique solution

$$\tau_0 + \tau_1 z_{\nu-1} + \dots + \tau_{\nu-2} z_{\nu-1}^{\nu-2}.$$

Then Taylor's formula gives

$$f_\nu(\tau_0 + \tau_1 z_\nu + \dots + \tau_{\nu-2} z_\nu^{\nu-2} + \tau_{\nu-1} z_\nu^{\nu-1}) = f_\nu(\tilde{\tau}(z_\nu)) + \tau_{\nu-1} \chi_0 z_\nu^{\nu-1}, \tag{8}$$

where  $\tau_{\nu-1}$  is to be determined. If now we put

$$f_\nu(\tilde{\tau}(z_\nu)) = \gamma_0 + \gamma_1 z_\nu + \dots + \gamma_{\nu-2} z_\nu^{\nu-2} + \gamma_{\nu-1} z_\nu^{\nu-1},$$

formula (8) becomes

$$f_\nu(\tilde{\tau}(z_\nu) + \tau_{\nu-1} z_\nu) = \gamma_0 + \gamma_1 z_\nu + \dots + \gamma_{\nu-2} z_\nu^{\nu-2} + (\gamma_{\nu-1} + \tau_{\nu-1} \chi_0) z_\nu^{\nu-1}$$

Now all  $\gamma_i$ ,  $i = 0, \dots, \nu - 1$ , depend only on the  $\tau_j$ ,  $j = 1, \dots, \nu - 2$ , which have been determined beforehand, so all of them are known quantities. Consequently

the equation

$$f_\nu(\tau_0 + \tau_1 z_\nu + \dots + \tau_{\nu-1} z_\nu^{\nu-1}) = \alpha_0 + \alpha_1 z_\nu + \dots + \alpha_{\nu-2} z_\nu^{\nu-2} + \alpha_{\nu-1} z_\nu^{\nu-1}$$

has a solution if, and only if,  $\gamma_i = \alpha_i$  for  $i = 1, \dots, \nu - 2$  and the linear equation in  $L$

$$\tau_{\nu-1} \chi_0 + \gamma_{\nu-1} = \alpha_{\nu-1} \tag{9}$$

has a solution. If  $\chi_0 = 0$ , we must have  $\gamma_{\nu-1} = \alpha_{\nu-1}$ , so the equation (9) is solvable. If  $\chi_0 \neq 0$ , then  $\tau_{\nu-1} = (\alpha_{\nu-1} - \gamma_{\nu-1})/\chi_0$ , and again (9) is solvable  $\square$

**Proposition 3.2.** *Let  $f(t) \in L[[Z]][t]$ . Then  $f(t)$  permutes  $L[[Z]]$  if, and only if,  $f_1(t)$  is a permutation polynomial and its zero in  $L$  is non singular.*

*Proof.* Suppose that  $f(t)$  is a permutation polynomial. Given  $\alpha(z_\nu) = \alpha_0 + \alpha_1 z_\nu + \alpha_2 z_\nu^2 + \dots + \alpha_{\nu-1} z_\nu^{\nu-1}$ ,  $\nu \geq 1$ , then

$$\alpha(Z) = \alpha_0 + \alpha_1 Z + \alpha_2 Z^2 + \dots + \alpha_{\nu-1} Z^{\nu-1} \in L[[Z]]$$

is such that  $\pi_\nu(\alpha(Z)) = \alpha(z_\nu)$ . Since  $f(t)$  is a permutation polynomial there exists  $\tau(Z) \in L[[Z]]$  such that  $f(\tau(Z)) = \alpha(Z)$ . This implies that, for all  $\nu$ , the equation  $f_\nu(t) = \alpha(z_\nu)$  has the solution  $\tau(z_\nu)$ , i.e. the polynomial function induced by  $f_\nu(t)$  is onto. Since  $L_\nu$  is finite, this polynomial function is a bijection. By Proposition 3.1,  $f_1(t)$  is a permutation polynomial whose zero is non singular.

Conversely, let  $f(t) \in L[[Z]][t]$  and suppose that  $f_1(t)$  is a permutation polynomial whose zero is non singular, and consider the equation

$$f(t) = \alpha(Z) = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i Z^i. \tag{10}$$

By Proposition 3.1, each  $f_\nu(t)$  is now a permutation polynomial, so the equations ( $\nu \geq 1$ )  $f_\nu(t) = \alpha(z_\nu)$  have all of them unique solutions

$$\tau(z_\nu) = \tau_0 + \tau_1 z_\nu + \dots + \tau_{\nu-1} z_\nu^{\nu-1}$$

descending from the preceding ones. By Lemma 2.1, (10) has the solution

$$\tau(Z) = \lim_{\nu \rightarrow \infty} (\tau_0 + \tau_1 Z + \dots + \tau_{\nu-1} Z^{\nu-1}).$$

On the other hand, if  $f(\alpha(Z)) = f(\beta(Z))$  then  $f_\nu(\alpha(z_\nu)) = f_\nu(\beta(z_\nu))$ ,  $\nu \geq 1$ , but  $f_\nu$  is a permutation polynomial, then  $\alpha(z_\nu) = \beta(z_\nu)$  for all  $\nu$ , then,  $\alpha(Z) = \beta(Z)$   $\square$

**Proposition 3.3.** [1, Prop. 4.4] *If  $\nu \geq 2$ , then the polynomial  $f_\nu(t) = t^k \in L_\nu[t]$  is a permutation polynomial if, and only if,  $k = 1$ .*

*Proof.* Let us see that if  $k > 1$ , then the number of zeroes of  $f_\nu(t) = t^k$  is bigger than 1, so it cannot be a permutation polynomial. Clearly  $f(0) = 0$ . If we evaluate  $f_\nu$  at  $\lambda(z_\nu) = z_\nu^{\nu-1}$  we obtain  $\lambda(z_\nu)^k = z_\nu^{k(\nu-1)}$  which is null if, and only if,  $k(\nu-1) \geq \nu$ , i.e., if  $k \geq \frac{\nu}{\nu-1} > 1$ . If this is the case,  $f_\nu(t) = t^k$  can not be a permutation polynomial. Conversely,  $\lambda(z_\nu)^k \neq 0$  if, and only if,  $k(\nu-1) \leq (\nu-1)$ , i.e., if  $k \leq 1$ , or equivalently, if  $k = 1$ . Finally, it is clear that  $f_\nu(t) = t$  is a permutation polynomial.  $\square$

**Corollary.**  $f(t) = t^k \in L[[Z]][t]$  is a permutation polynomial if, and only if,  $k = 1$ .  $\square$

Let us consider now the polynomial

$$f(t) = t^{p^r} - \alpha(Z)t + \beta(Z) \in L[[Z]][t]. \quad (11)$$

If  $\alpha(Z)$  and  $\beta(Z)$  are not units, we see that  $1 - \alpha(Z) \neq 0$ , and  $\alpha_0 = 0, \beta_0 = 0$ , so that  $f_1(t) = t^{p^r}$ . Using the above corollary,  $f_1(t)$  is a permutation polynomial if, and only if,

$$f(t) = t(1 - \alpha(Z)) + \beta(Z),$$

which is indeed a permutation polynomial. Next, if  $\alpha(Z)$  is a unit and  $\beta_0 = 0$ , then  $f_1(t) = t^{p^r} - \alpha_0 t$  and  $\alpha_0 \neq 0$ . If  $p < p^{r+1} < q$ , this polynomial is a permutation polynomial if, and only if,  $\alpha_0$  is not a  $(p^r - 1)^{\text{th}}$  power in  $L$  (see, e.g., [1, Proposition 2.6]). But using Lemma 2.2 and the fact that the characteristic  $p$  of  $L$  does not divide  $p^r - 1$ , we see that  $\alpha(Z)$  is not the  $(p^r - 1)^{\text{th}}$  power of an element in  $L[[Z]]$ . Thus we have proved the following

**Proposition 3.4.** *If  $\beta(Z)$  is not a unit, then the polynomial (11) is a permutation polynomial if, and only if,  $\alpha(Z)$  is not a unit and  $r = 0$ , or  $\alpha(Z)$  is a unit which is not a  $(p^r - 1)^{\text{th}}$  power ( $p < p^{r+1} < q$ ) of some element of  $L[[Z]]$ .*  $\square$

The previous proposition gives necessary and sufficient conditions to determine when the polynomial  $t^{p^r} - \alpha(Z)t \in L[[Z]][t]$  is a permutation polynomial. A sufficient condition to decide if (11) is a permutation polynomial when  $\beta(Z)$  is a unit, is stated in the next corollary.

**Corollary.** *If  $t^{p^r} - \alpha(Z)t \in L[[Z]]$  is a permutation polynomial and  $\beta(Z)$  is a unit, then the polynomial (11) is a permutation polynomial.*

*Proof.* If  $t^{p^r} - \alpha(Z)t$  is a permutation polynomial then  $t^{p^r} - \alpha_0 t$  is a permutation polynomial and by Proposition 2.4 in [1],  $t^{p^r} - \alpha_0 t + \beta_0$  is a permutation polynomial. Moreover it is clear that its zero is non singular.

Therefore the polynomial (11), by proposition 3.2, is a permutation polynomial.  $\square$

**Lemma 3.4.** *If  $f(t) \in L[[Z]][t]$  is a permutation polynomial and  $\gamma(Z) \in L[[Z]]$  is not a unit, then  $f(t) + \gamma(Z)$  is a permutation polynomial.*  $\square$

In the previous lemma the hypothesis that  $\gamma(Z)$  is a not unit is necessary since otherwise we can find permutation polynomials  $f(t)$  such that  $f(t) + \gamma(Z)$  is not a permutation polynomial. For example, the polynomial  $f(t) = t^5 + 2 \in \mathbb{F}_3[[Z]]$  is a permutation polynomial but the polynomial  $f(t) + 1 = t^5$  ( $\gamma(Z) = 1$ ) is not a permutation polynomial (corollary to proposition 3.3).

If  $f(t) \in L[[Z]][t]$  is a permutation polynomial, let us consider the polynomial:

$$g(t) = \alpha(Z)f(t + \beta(Z)) + \gamma(Z) \in L[[Z]], \quad (12)$$

where  $\alpha(Z)$  is a unit and  $\gamma(Z)$  is not a unit. Since  $f(t)$  is a permutation polynomial,  $f_1(t)$  is also a permutation polynomial whose zero is non singular. Therefore, by Proposition 2.4 in [1],  $g_1(t) = \alpha_0 f_1(t + \beta_0)$  is a permutation polynomial. Now, if  $g_1(\tau_0) = 0$ , then  $\alpha_0 f_1(\tau_0 + \beta_0) = 0$ , i.e.,  $\tau_0 + \beta_0$  is a zero of  $f_1(t)$ . If  $g'_1(\tau_0) = 0$ , then  $f'_1(\tau_0 + \beta_0) = 0$  but this is a contradiction since  $f(t)$  is a permutation polynomial. Therefore  $\tau_0$  is non singular zero of  $g_1$ . Then Proposition 3.2 and lemma 3.4 yield that  $g(t)$  is a permutation polynomial. Thus we have proved the following

**Proposition 3.5.** *If  $f(t) \in L[[Z]][t]$  is a permutation polynomial,  $\alpha(Z)$  is a unit, and  $\gamma(Z)$  is not a unit in  $L[[Z]]$ , then the polynomial (12) is a permutation polynomial.*  $\square$

The following proposition generalize results stated in [1] and [8, pp 362, 390].

**Proposition 3.6.** *Let  $L/K$  be an extension of degree  $m$  and consider the polynomial*

$$f(t) = \sum_{j=0}^{m-1} \alpha_j(Z)t^{q^j} \in L[[Z]][t],$$

where  $\alpha_0(Z) \in L[[Z]]$  is a unit. Then

- a)  $f(t)$  is a permutation polynomial if, and only if, 0 is its only zero in  $L[[Z]]$ .
- b) If  $f(t)$  is a permutation polynomial then  $\det(\alpha_{|i-j|}^{q^i}(Z)) \neq 0$ . Furthermore if  $\det(\alpha_{|i-j|}^{q^i}(Z)) \neq 0$  where  $i, j = 0, 1, \dots, m-1$ , then  $f(t)$  is a permutation polynomial.

c) If  $f(t) \in K[t]$  then  $f(t)$  is a permutation polynomial in  $L[[Z]]$  if, and only if,

$$\left( \sum_{j=0}^{m-1} \alpha_j t^j, t^m - 1 \right) = 1.$$

*Proof.* a) If  $f(t)$  is a permutation polynomial and since  $f(0) = 0$ , it is clear that 0 is its unique zero in  $L[[Z]]$ . Conversely, suppose that 0 is the only zero of  $f(t)$  in  $L[[Z]]$ . Then  $f_1(t)$  has  $t$  as a factor. Moreover, since  $f'_1(t) = \alpha_0 \neq 0$  all its zeroes will be then non singular. Suppose now that  $\tau_0 \neq 0$  is another non singular zero of  $f_1(t)$  in  $L$ . The proof of the sufficiency in the proposition 3.2 give us an argument to conclude the existence of  $\tau(Z) \neq 0$  in  $L[[Z]]$  such that  $\pi_1(\tau(Z)) = \tau_0$  and  $f(\tau(Z)) = 0$ , which is a contradiction. Then by proposition 2.5 of [1],  $f_1(t)$  is a permutation polynomial and since its unique zero is non singular, so  $f(t)$  is a permutation polynomial.

b) If  $f(t)$  is a permutation polynomial then  $f_1(t)$  is again a permutation polynomial, which amounts to say that  $\det(\alpha_{|i-j|}^i) \neq 0$ , ( $i, j = 0, 1, \dots, m$ ) because of item (4) in [7]; therefore  $\det(\alpha_{|i-j|}^i(Z)) \neq 0$ . Furthermore, if  $\det(\alpha_{|i-j|}^i) \neq 0$  then  $f_1(t)$  is permutation polynomial, and again because of item (4) in [7], its zero is non singular. Therefore,  $f(t)$  is a permutation polynomial.  $\square$

c) If  $f(t)$  permutes  $L[[Z]]$  then  $f_1(t)$  permutes  $L$  (and its zero is non singular), then by item (4) in [7] we have the conclusion. Conversely, if

$$\left( \sum_{j=0}^{m-1} \alpha_j t^j, t^m - 1 \right) = 1,$$

then,  $f_1(t)$  is a permutation polynomial [7]. Moreover, since  $f'_1(t) = \alpha_0 \neq 0$  its unique zero ( $= 0$ ) is non singular, and thus  $f(t) \in L[[Z]][t]$  is a permutation polynomial, by proposition 3.2.

**Proposition 3.7.** Let  $q$  be odd and  $f(t) = t^{(q+1)/2} + \alpha(Z)t + \beta(Z) \in L[[Z]][t]$ ,  $\alpha(Z)$  a unit and  $\beta(Z)$  not a unit. Then  $f(t)$  is a permutation polynomial if, and only if,  $\alpha(Z)^2 - 1$  is a square in  $L[[Z]]$ .

*Proof.* If  $f(t)$  is a permutation polynomial over  $L[[Z]]$  then  $f_1(t)$  is a permutation polynomial in  $L$ , thus  $\alpha_0^2 - 1$  is a square in  $L$  ([3, theor. 4.1]), and by lemma 2.2  $\alpha(Z)^2 - 1$  is a square in  $L[[Z]]$ . Conversely, if  $\alpha(Z)^2 - 1$  is a square in  $L[[Z]]$  then  $\alpha_0^2 - 1$  is a square in  $L$  (lemma 2.2), therefore, again by [3, theor. 4.1],  $f_1(t)$  is a

permutation polynomial, moreover  $f_1(0) = 0$ . But

$$f'_1(t) = \frac{q+1}{2} t^{(q-1)/2} + \alpha_0,$$

and since  $\alpha_0 \neq 0$ , zero is a non singular zero of  $f_1(t)$ . Therefore, proposition 3.2 and lemma 3.4 implies  $f(t)$  is a permutation polynomial.  $\square$

The previous proposition is a partial analogue of **Wan Daqing's** theorem 4.1 in [3]. The following proposition includes analogues of results obtained by **Wan Daqing** in [3, Section 2]. We omit the proof since it is straightforward.

**Proposition 3.8.** If  $1 < k < q$ ,  $\gamma(Z)$  is not a unit and  $\alpha(Z) \in L[[Z]]$ , then

1. If  $k$  is not a power of  $p$  that satisfies  $q \geq (k^2 - 4k + 6)^2$ , then  $f(t) = t^k + \alpha(Z)t + \gamma(Z) \in L[[Z]]$ , is not a permutation polynomial over  $L[[Z]]$ .
2. Let  $J$  be an integer such that  $1 \leq J \leq q - 2$ . If  $f(t) = t^k + \alpha(Z)t + \gamma(Z) \in L[[Z]]$ ,  $\alpha(Z)$  a unit, is a permutation polynomial in  $L[[Z]]$  then the equation

$$ki + j \equiv 0 \pmod{q-1}, \quad i + j = J,$$

$$\binom{J}{j} \not\equiv 0 \pmod{p}, \quad 0 \leq j \leq J$$

has either no solutions  $(i, j)$  or at least two solutions of  $(i, j)$ .  $\square$

The following proposition lists permutation polynomials over  $L[[Z]]$ , of degree at most 5, corresponding to the classical list in [4, § 90].

**Proposition 3.9.** Let  $\alpha(Z), \beta(Z), \gamma_1(Z), \gamma_2(Z), \gamma_3(Z)$  and  $\gamma(Z)$  elements of  $L[[Z]]$ . If  $\gamma_1(Z), \gamma_2(Z), \gamma_3(Z)$ , and  $\gamma(Z)$  are not units then the following polynomials in  $L[[Z]]$  are permutation polynomials:

- a)  $t^3 + \gamma_1(Z)t^2 - \alpha(Z)t + \gamma(Z)$ , if  $\alpha(Z) \notin L[[Z]]^2$  and  $q = 3^n$ ,
- b)  $t^4 + \gamma_1(Z)t^2 + \gamma_2(Z)t \pm 3t + \gamma(Z)$ , if  $q = 7$ ,
- c)  $t^4 + \gamma_1(Z)t^3 + \alpha(Z)t^2 + \beta(Z)t + \gamma(Z)$ , if  $\beta(Z)$  is a unit, the unique zero of its projection in  $L$  is  $t = 0$  and if  $q = 2^n$ ,
- d)  $t^5 - \gamma_1(Z)t^4 + \gamma_2(Z)t^3 + \gamma_3(Z)t^2 - \alpha(Z)t + \gamma(Z)$ , si  $\alpha(Z) \notin L[[Z]]^4$  and  $q = 5^n$ ,
- e)  $t^5 + \gamma_2(Z)t^4 + \gamma_2(Z)t^3 + \gamma_3(Z)t^2 \pm 2^{1/2}t + \gamma(Z)$ , if  $q = 3^2$ ,

- f)  $t^5 + \gamma_1(Z)t^4 + \alpha(Z)t^3 \pm t^2 + 3\alpha(Z)^2t - \gamma(Z)$ , if  $\alpha(Z) \notin L[[Z]]^2$  and  $q = 7$ ,
- g)  $t^3 + \gamma_1(Z)t^4 + \alpha(Z)t^3 + \gamma_2(Z)t^2 + \frac{\alpha(Z)^2}{5}t + \gamma(Z)$ , if  $\alpha(Z)$  is a unit and  $q = 5m \pm 2$ ,
- h)  $t^5 + \gamma_1(Z)t^4 + \alpha(Z)t^3 + \gamma_2(Z)t^2 + 3\alpha(Z)^2t + \gamma(Z)$ , if  $\alpha(Z) \notin L[[Z]]^2$  and  $q = 13$ ,
- i)  $t^5 + \gamma_1(Z)t^4 - 2\alpha(Z)t^3 + \gamma_2(Z)t^2 + \alpha(Z)^2t + \gamma(Z)$ , if  $\alpha(Z) \notin L[[Z]]^2$  and  $q = 5^n$ .

*Proof.* The projections over  $L$  of these polynomials are identical to the polynomials listed by Dickson in [4]. The resultant polynomials over  $L$  are permutation polynomials which have 0 as their unique zero. Moreover it is easy to see that 0 is a non singular zero for each one of them, so the given polynomials are permutation polynomials in  $L[[Z]]$ .  $\square$

#### 4. Dickson Polynomials

Dickson introduced a particular kind of polynomials over a finite field afterwards coined by I. Schur as *Dickson polynomials*. Dickson polynomials have interesting applications in coding theory, the construction of RSA (Reed-Solomon-Aldeman) cryptosystems, and *complete mappings* of finite fields. In 1923 Schur conjectured that polynomials over  $\mathbb{Z}$  which are permutation polynomials modulo  $p$  for infinitely many primes  $p$  are precisely compositions of linear and Dickson polynomials. Michael Fried in 1970 [5, §1] succeeded in proving this was so. Also, Dickson polynomials have interesting and diverse properties that make them a valuable study topic.

A polynomial in  $L[[Z]][t]$  of the type

$$g_k(t, \alpha(Z)) = \sum_{j=0}^{\lfloor k/2 \rfloor} \frac{k}{k-j} \binom{k}{j} (-\alpha(Z))^j t^{k-2j},$$

where  $\alpha(Z) \in L[[Z]]$ ,  $k$  is a positive integer and  $\lfloor k/2 \rfloor$  denotes the integer part of  $k/2$ , is called a *Dickson polynomial of the second kind with parameter  $\alpha(Z)$  and degree  $k$* , or simply a *Dickson polynomial*.

In this section we are interested in finding values for  $\alpha(Z)$  and/or  $k$ , telling us when a Dickson polynomial is a permutation polynomial. For example, if  $\alpha(Z) = 0$  then  $g_k(t, \alpha(Z)) = t^k$ , and corollary to proposition 3.3 tells us that  $g_k(t, 0)$  is a permutation polynomial only when  $k = 1$ . If  $k$  is even, all exponents of  $t$  are even, and clearly  $g_k$  is not a permutation polynomial. From now on we suppose that  $\alpha(Z) \neq 0$  and that  $k$  is odd and we denote by  $g_k(t, \alpha_0)$  the projection of  $g_k(t, \alpha(Z))$  in  $L[t]$ .

**Proposition 4.1.** *If  $g_k(t, \alpha(Z)) \in L[[Z]][t]$  is a Dickson polynomial of the second kind, then  $g_k(t, \alpha(Z))$  is a permutation polynomial if, and only if,  $(k, p(q^2 - 1)) = 1$  and  $\alpha(Z)$  is a unit.*

*Proof.* We suppose that  $g_k(t, \alpha(Z))$  is a permutation polynomial. Then  $g_k(t, \alpha_0) \in L[t]$  is a permutation polynomial whose zero is non singular. If  $g_k(t, \alpha_0)$  is a permutation polynomial and  $k$  is odd, by [7, (3)],  $(k, q^2 - 1) = 1$ . Moreover, since

$$\frac{d}{dt} g_k(0, \alpha_0) = k(-\alpha_0)^{\lfloor k/2 \rfloor},$$

and  $\alpha_0 \neq 0$ , if  $p \mid k$  then the previous equality is zero, i.e. 0 is a singular zero of  $g_k(t, \alpha_0)$ , which is a contradiction. Therefore,  $(k, p(q^2 - 1)) = 1$ .

We suppose now that  $(k, p(q^2 - 1)) = 1$ , then,  $(k, q^2 - 1) = 1$ . Again by (3) in [7] we have that  $g_k(t, \alpha_0)$  is a permutation polynomial. Since  $\alpha_0 \neq 0$  then 0, the unique zero of  $g_k(t, \alpha_0)$ , is regular, since if  $k(-\alpha_0)^{\lfloor k/2 \rfloor} = 0$  then  $\alpha_0 = 0$  or  $k = 0$ . But  $\alpha_0 \neq 0$  and since  $(k, p(q^2 - 1)) = 1$ , then  $p \nmid k$ , and therefore  $k \neq 0$ . Thus  $g_k(t, \alpha_0)$  is a permutation polynomial whose zero is non singular. We conclude finally that  $g_k(t, \alpha(Z))$  is a permutation polynomial.  $\square$

#### ACKNOWLEDGEMENTS

We wish to express our thanks to Yuguang Lu for his help in reading and understanding of [11] and [13].

#### References

- [1] Albis, V. S. *Polinomios de permutacion. Algunos problemas de interés*, *Lecturas Matemáticas* 22 (2001), 35–58.
- [2] Albis, V. S. & Chaparro, R. *On a conjecture of Beresnevich and Shafarevich*, *Rev. Acad. Colomb. Cienc.* 21 (1997), 313–319. [MR: 98g:11130].
- [3] Daqing, W. *Permutation binomials over finite fields*, *Acta. Math. Sinica.* 10 (1992), 30–35. [MR: 94m:11145].
- [4] Dickson, L. E. *Linear Groups with an Exposition of the Galois Field Theory*. Dover Publ.: New York, 1958.
- [5] Fried, M. *On a conjecture of Schur*, *Michigan Math. J.* 17 No. 1 (1970), 41–55. [MR: 41# 1688].
- [6] Greenberg, M. J. *Lectures on Fermat in Many Variables*. W. A. Benjamin, New York, 1969.
- [7] Lidl, R. & Mullen, G. L. *When does a polynomial over a finite field permute the elements of the field?*, *Amer. Math. Month.* 95 (1988), 243–246.
- [8] Lidl, R. & Niederreiter, H. *Finite Fields*, *Encycl. of Math. and its Appl.*, Addison Wesley Pub. Comp. Reading Mass., 1983. [MR: 85c:11106].
- [9] McDonald, B. R. *Finite Rings with Identity*, Marcel Dekker, New York, 1974.

- [10] Smits, T. H. *On the group of units of  $GF(q)[X]/(a(X))$* . *Indag. Math.* **44** (1982), 355-358.
- [11] Sun, Q. *A note on permutation polynomials vectors over  $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$* . *Adv. Math. (China)* **25** No. 1 (1996), 311-314. [In Chinese] [MR: 98h:11157].
- [12] Zhang, Q. *On the polynomials in several indeterminates which can be extended to permutation polynomial vector over  $\mathbb{Z}/p^l\mathbb{Z}$* . *Adv. Math.* **22** No. 5 (1993), 456-457.
- [13] Zhang, Q. *Permutation polynomials in several indeterminates over  $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$* . *Chinese Ann. Math. Ser. A.* **16** No. 2 (1995), 168-172. [In Chinese] [MR: 96g:11143].

Recibido el 5 de agosto de 2005

Aceptado para su publicación el 19 de julio de 2008

# A TWO-STAGE ESTIMATOR OF INDIVIDUAL REGRESSION COEFFICIENTS IN MULTIVARIATE LINEAR GROWTH CURVE MODELS

por

Gabriela Beganu<sup>1</sup>

## Resumen

**Beganu, G:** A two-stage estimator of individual regression coefficients in multivariate linear growth curve models. *Rev. Acad. Colomb. Cienc.* **30** (117): 549-554, 2006. ISSN 0370-3908.

Se considera una familia de modelos lineales de curvas de crecimiento multivariadas con efectos aleatorios. El propósito del artículo es describir un método de cálculo para la estimación de coeficientes de regresión individuales cuando las componentes de covarianza sean conocidas o no. En el segundo caso, la matriz de covarianza de los datos se estimará usando una versión generalizada del método III de Henderson mediante proyecciones ortogonales sobre subespacios lineales que corresponden al modelo y se obtiene un estimador en dos etapas para los coeficientes individuales de regresión. Se presenta la estimación de efectos fijos y aleatorios usando un abordaje bayesiano.

**Palabras clave:** Estimador empírico de Bayes estimado, estimador cuadrático insesgado, proyección ortogonal.

## Abstract

A family of multivariate linear growth curve models with random effects is considered. The purpose of this article is to describe a computational method required for estimation of individual

---

<sup>1</sup> Department of Mathematics, Academy of Economic Studies, Str. Piața Romană Nr. 6, Bucharest, Romania, e-mail: Gabriela\_beganu@yahoo.com. 2000 Mathematics Subject Classification: Primary 62H12, 62J12. Secondary 62H40.

regression coefficients when the covariance components are known or unknown. In the second case the covariance matrix of the data will be estimated by a generalized version of the Henderson method III using the orthogonal projections onto linear subspaces corresponding to the model and a two-stage estimator of individual regression coefficients is obtained. The estimation of fixed and random effects is presented in a Bayesian approach.

**Key words:** Estimated empirical Bayes estimator, quadratic unbiased estimator, orthogonal projection.

## 1. Introduction

This article is concerned with estimation of regression coefficients in a multivariate linear growth curve model with a multivariate random effect when the covariance structure of the model is known or unknown. Since the model also contains fixed effects, it is considered to be a mixed linear model. The main emphasis of the proposed analysis is on estimation of the regression coefficients in a Bayesian approach by means of a two-stage estimator constructed with quadratic unbiased estimators of the covariance components ([5]). A family of multivariate linear growth curve models with random effects is considered as a generalized linear model of Potthoff and Roy [22]. Reinsel [24] assumed that, for each of  $n$  individual sampling units having  $m$  characteristics measured at each of  $p$  occasions, the  $pm \times 1$  observable random vector is

$$y_k = (X \otimes I_m)Ba_k + (X \otimes I_m)\lambda_k + e_k, \quad k = 1, \dots, n \quad (1)$$

The within-individual and between-individuals design matrices  $X$  and  $A' = (a_1, \dots, a_n)$  are known  $p \times q$  and  $r \times n$  matrices of full column rank  $q \leq p$  and  $r < n$ , respectively and  $B$  is a  $qm \times r$  matrix of unknown regression parameters. The assumption made by Reinsel [24], [25] regarding the covariance structure of the random effect can be changed without loss of generality as follows:  $\lambda_k$  is a  $qm \times 1$  vector obtained from an  $m \times q$  random matrix having columns identically distributed as  $N(0, \Sigma_\lambda)$ . Then the random vectors  $\lambda_k$  are independent of each other and of the error vectors  $e_k$ , which are distributed as  $N(0, I_p \otimes \Sigma_e)$ ,  $k = 1 \dots n$ .  $I_m$  is the  $m \times m$  identity matrix and  $\otimes$  denotes the Kronecker matrix product ( $C \otimes D = (c_{i,j}D)$ ). Then the independent random vectors  $y_k$  have the normal distribution with the expected value

$$E(y_k) = (X \otimes I_m)Ba_k \quad (2)$$

and the covariance matrix

$$\text{cov}(y_k) = V = (XX') \otimes \Sigma_\lambda + I_p \otimes \Sigma_e, \quad k = 1, \dots, n \quad (3)$$

where  $\Sigma_\lambda$  and  $\Sigma_e$  are  $m \times m$  positive definite matrices. The individual regression coefficients

$$\beta_k = Ba_k + \lambda_k, \quad k = 1 \dots n \quad (4)$$

may serve to characterize some aspects of an individual's growth [10] or in prediction of future observations for a given individual [25]. The problem of estimation of individual regression coefficients is of particular interest,  $\beta_k$  being composed of both fixed and random effects. Hence the estimation for model (1) can be based either on ordinary least squares and maximum likelihood methods, or on empirical Bayes methodology [20]. The classical approach uses the maximum likelihood estimation of the fixed effects  $B$  and of the covariance components  $\Sigma_\lambda$  and  $\Sigma_e$  from the marginal normal distribution of  $Y' = (y_1, \dots, y_n)$  having the mean  $(X \otimes I_m)BA'$  and the covariance matrix of  $\text{vec } Y'$  given by  $I_n \otimes V$ , where  $V$  is the covariance matrix in (3) and  $\text{vec } Y' = (y'_1, \dots, y'_n)'$ . The realized values of the random effects  $\Lambda' = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  can be estimated using the generalized version of the Gauss-Markov theorem [13], [14]. A possible alternative [13] is based on a Bayesian estimation of the model parameters (4) and it was used in [26], [23], [7], [27]. The empirical Bayes estimators of  $B$  and  $\lambda_k, k = 1, \dots, n$ , will be the estimated means of the posterior distribution of  $Y'$ . When the covariance components of the observation vectors are unknown, the corresponding estimators could be found in [10] and [18] by the EM algorithm (see [9]). In [8] and [19] the ordinary least squares residuals were used for computing the maximum likelihood estimators (MLE) and the restricted maximum likelihood estimators (REMLE) of the variance and covariance components in linear models for serial measurements that include both growth curves and repeated

measures models. A generalized version ([5], [6]) of the Henderson method III (also called the method of fitting constants [15]) was chosen to obtain the quadratic unbiased estimators of  $\Sigma_\lambda$  and  $\Sigma_e$  and it will be presented in Section 2 for the specific case of model (1). In order to obtain the estimators of regression coefficients when the covariance matrix of data is unknown, a multistage procedure is required. An estimated generalized least squares estimator (GLSE) of regression coefficients in multivariate mixed linear models is calculated in three steps in [8]. Two-stage procedures are used in [16], [17] and [23] to estimate the fixed effects and the realized values of the random effects in some special cases of general mixed linear models.

A two-stage procedure is employed to estimate the individual regression coefficients (4), when the covariance components are unknown and the corresponding estimators are obtained by the generalized Henderson method III. Section 3 deals with determining of two-stage estimators of regression coefficients (4), when the multivariate growth curve model (1) is balanced and unbalanced (missing data), respectively.

**2. Estimation of the covariance components**

Various methods of estimation of the covariance components are available for mixed linear models, but I confine myself to the Henderson method III. Unlike ML and REML estimations, the Henderson method III is a computationally simple method and does not require the assumption of normality. The development of this method can be made if the model (1) is put into an appropriate form using a coordinate-free approach ([2], [3], [4]). A matricial form of model (1) is

$$Y = AB'(X' \otimes I_m) + \Lambda(X' \otimes I_m) + E \quad (5)$$

where  $\Lambda' = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  and  $E' = (e_1, \dots, e_n)$  are  $qm \times n$  and  $pm \times n$  random matrices, respectively. From the relations (2) and (3) we obtain that

$$E(Y) = AB'(X' \otimes I_m)$$

$$\text{cov}(\text{vec } Y) = V \otimes I_n$$

Some notations are required in the sequel [12]. Let  $\mathcal{L}_{n,m}$  be the real vector space of linear transformations on  $R^m$  to  $R^n$  endowed with the inner product  $(C, D) = \text{tr}(CD')$  for every  $C, D \in \mathcal{L}_{n,m}$  and let  $R(C) \subset R^m$  be the linear space spanned by the columns of  $C \in \mathcal{L}_{n,m}$ . If  $A \in \mathcal{L}_{r,n}$  and  $X \in \mathcal{L}_{q,p}$  are known design matrices of model (5), then

let  $\Omega = \{AB'(X' \otimes I_m) \mid B \in \mathcal{L}_{r,qm}\}$  be a linear manifold of  $\mathcal{L}_{pm,n}$  such that  $E(Y) \in \Omega$  for  $B \in \mathcal{L}_{r,qm}$ . In a similar way the linear manifold  $\Theta$  can be considered such that  $E(Y) = AB'(X' \otimes I_m) + \Lambda(X' \otimes I_m) \in \Theta$  for every  $B \in \mathcal{L}_{r,qm}$  and  $\Lambda \in \mathcal{L}_{qm,n}$ , when the random effects are considered to be fixed effects. Hence  $P_A = A(A'A)^{-1}A'$  and  $P_X = [X(X'X)^{-1}X'] \otimes I_m$  are the orthogonal projections onto  $R(A)$  and  $R(X \otimes I_m)$ , respectively, it is easy to find that  $P_1 = P_A \otimes P_X$  (see [11]) and  $P_2 = I_n \otimes P_X$  (see [6]) are the orthogonal projections onto  $\Omega$  and  $\Theta$ , respectively. Then

$$I_{npm} - P_2 = I_n \otimes M_X \quad (6)$$

and

$$P_2 - P_1 = M_A \otimes P_X \quad (7)$$

where  $M_A = I_n - P_A$  and  $M_X = I_{pm} - P_X$  are the orthogonal projections onto the orthogonal complements of  $R(A)$  and  $R(X \otimes I_m)$ , respectively. The quadratic forms used in the generalized Henderson method III ([5]) corresponding to the model (5) will have the symmetric matrices (6) and (7) and will be obtained from the following

$$\begin{aligned} & [(I_{npm} - P_2)Y]'[(I_{npm} - P_2)Y] \\ &= [(I_n \otimes M_X)Y]'[(I_n \otimes M_X)Y] \\ &= (YM_X)'(YM_X) = M_X Y' Y M_X \end{aligned} \quad (8)$$

and

$$\begin{aligned} & [(P_2 - P_1)Y]'[(P_2 - P_1)Y] \\ &= [(M_A \otimes P_X)Y]'[(M_A \otimes P_X)Y] \\ &= (M_A Y P_X)'(M_A Y P_X) = P_X Y' M_A Y P_X \end{aligned} \quad (9)$$

where there were used the definition of the Kronecker operators product  $(P \otimes Q)C = PCQ'$  (see [11]) and the properties of the orthogonal projections)  $P_A$  and  $P_X$  to be symmetric and idempotent operators. It is also proved ([6]) that (6) and (7) are the matrices of the quadratic forms corresponding to model (5) founded by an iterative method of estimation based on Gram-Schmidt orthogonalization process of design matrices in mixed linear models. The expected values of the random quadratic forms (8) and (9) can be found from [21] and using [1] as

$$\begin{aligned} & E(M_X Y' Y M_X) \\ &= M_X [(X \otimes I_m)BA'AB'(X' \otimes I_m) + n \cdot V]M_X \quad (10) \\ &= n \cdot M_X V M_X = n \cdot M_X (I_p \otimes \Sigma_e)M_X \end{aligned}$$



and

$$\begin{aligned} E(P_X Y' M_A Y P_X) &= P_X [(X \otimes I_m) B A' M_A A B' (X' \otimes I_m) \\ &+ \text{tr } M_A \cdot V] P_X = (n-r) \cdot P_X V P_X \quad (11) \\ &= (n-r)(X \otimes I_m) [I_q \otimes \Sigma_\lambda \\ &+ (X' X)^{-1} \otimes \Sigma_\epsilon] (X' \otimes I_m) \end{aligned}$$

The Henderson method III consists in equating the quadratic forms (8) and (9) to their expected values (10) and (11), respectively. It was proved in [5] that the equation obtained by this method are consistent. Then the solution  $\hat{\Sigma}_\lambda$  and  $\hat{\Sigma}_\epsilon$  of the estimating equations

$$\begin{cases} Y'Y = n \cdot (I_p \otimes \Sigma_\epsilon) \\ [(X'X)^{-1} X' \otimes I_m] Y' M_A Y [X(X'X)^{-1} \otimes I_m] \\ = (n-r) [I_q \otimes \Sigma_\lambda + (X'X)^{-1} \otimes \Sigma_\epsilon] \end{cases} \quad (12)$$

are the quadratic unbiased estimators of covariance components. The difference between the solution of (12) and the estimators obtained in [24], [25] by ANOVA method also comes from the assumption regarding the covariance structure of the random effect.

### 3. Estimation of the individual regression coefficients

a) **Balanced case.** Using the variability between and within sampling units, the estimators based on the data from a single unit can be improved by an appropriate use of data from the remaining units. Thus empirical Bayes methodology will be used for finding the estimators of fixed and random effects when the covariance matrix of data is known or unknown by means of the posterior expected value and posterior covariance. When the covariance components  $\Sigma_\lambda$  and  $\Sigma_\epsilon$  are known, then the fixed effects  $B$  and the realized values of the random vectors  $\lambda_k, k = 1, \dots, n$ , are the unknown parameters of model (1). The MLE of  $B$ , which is also the ordinary least squares estimator of  $B$ ,

$$\hat{B} = [(X'X)^{-1} X' \otimes I_m] Y' A(A'A)^{-1} \quad (13)$$

was given in [24] and [19]. Thus  $\hat{B}$  is the best linear unbiased estimator of  $B$  because maximizes the likelihood based on the marginal distribution of  $y_k, k = 1, \dots, n$ . The estimator of the realized value of  $\lambda_k$  is derived by the generalized Gauss-Markov theorem [13] as

$$\hat{\lambda}_k = (X' \otimes \Sigma_\lambda) V^{-1} [y_k - (X \otimes I_m) \hat{B} a_k] \quad (14)$$

which is also the empirical Bayes estimator of  $\lambda_k$  expressed by

$$\hat{\lambda}_k = E(\lambda_k | y_k, V, \hat{B}) \quad (15)$$

that is the conditional mean of  $\lambda_k$  given  $y_k$ , the known covariance  $V$  of  $y_k$  and the unknown parameters  $B$  estimated by (13),  $k = 1, \dots, n$ . The expression (14) of  $\hat{\lambda}_k$  can be found from (15) using formulas given in [28]. Thus the estimator of the individual regression coefficients  $\beta_k$  is

$$\hat{\beta}_k = \hat{B} a_k + \hat{\lambda}_k, \quad k = 1, \dots, n \quad (16)$$

with  $\hat{B}$  and  $\hat{\lambda}_k$  given by (13) and (14), respectively. When the covariance matrix  $V$  of data is unknown, a two-stage estimator of  $\beta_k$  will be derived by the following computational steps: - the covariance components due to the random effect and the unobservable errors are estimated using the generalized version of the Henderson method III. Then  $\hat{\Sigma}_\lambda$  and  $\hat{\Sigma}_\epsilon$  are the solution of (12); - the GLSE of the fixed effects  $B$  in model (1) will be

$$\begin{aligned} \hat{B}(\hat{V}) &= [(X' \otimes I_m) \hat{V}^{-1} (X \otimes I_m)]^{-1} (X' \otimes I_m) \hat{V}^{-1} Y' A(A'A)^{-1} \\ & \quad (17) \end{aligned}$$

where  $\hat{V} = (X'X) \otimes \hat{\Sigma}_\lambda + I_p \otimes \hat{\Sigma}_\epsilon$ . The estimated empirical Bayes estimator of the realized values of random effect  $\lambda_k$  will be the following conditional mean

$$\begin{aligned} \hat{\lambda}_k(\hat{V}) &= E(\lambda_k | y_k, \hat{V}, \hat{B}(\hat{V})) \\ &= (X' \otimes \hat{\Sigma}_\lambda) \hat{V}^{-1} [y_k - (X \otimes I_m) \hat{B}(\hat{V}) a_k], \end{aligned} \quad (18)$$

$k = 1, \dots, n$ . The two-stage estimator of individual regression coefficients (4) of model (1) will be

$$\hat{\beta}_k(\hat{V}) = \hat{B}(\hat{V}) a_k + \hat{\lambda}_k(\hat{V}), \quad k = 1, \dots, n \quad (19)$$

Laird and Ware [18] showed that the use of a combination of an estimated empirical Bayes estimator (18) corresponding to the random effects is agreed in the literature for some choice of  $\hat{V}$ , once  $\hat{V}$  is available.

b) **Missing data case of model (5).** The importance of studying the missing data models should be clear to any researcher carrying out a large scale multivariate experiments. Such experiments do not always yield complete data (i.e. with no missing observations). Thus the researcher is frequently faced with the necessity of analyzing the "incomplete" data. A generalisation of model (5) allows for missing data in the sense that different individuals may not have observations at the same time points. In this case it is supposed that the  $n$  individuals with  $m$  characteristics are divided into  $c$  disjoint sets  $S_1, \dots, S_c$  with  $n_1, \dots, n_c$  experimental

units, respectively. On each individual in  $S_i$  measurements are taken on  $p_i \leq p$  response variates and two different sets  $S_i$  and  $S_{i'}$  can not have measurements at the same time, although they have  $p_i = p_{i'}$ . Let  $Y_i$  be the  $n_i \times p_i m$  random matrix of observations in the set  $S_i$ ,  $i = 1, \dots, c$ . Analogous to model (5), we assume that the growth curve model corresponding to  $S_i$  is

$$Y_i = A_i B' [(X' C_i') \otimes I_m] + \lambda_i [(X' C_i') \otimes I_m] + E_i \quad (20)$$

where  $A_i$  is an  $n_i \times r$  between-individuals design matrix,  $C_i$  is an  $p_i \times p$  incidence matrix of 0's and 1's and  $\lambda_i$  is an  $n_i \times qm$  matrix of random effects,  $i = 1, \dots, c$ . The rows of  $Y_i$  are independent and normally distributed as

$$\begin{aligned} E(Y_i) &= A_i B' [(X' C_i') \otimes I_m] \\ \text{cov}(\text{vec } Y_i) &= V_i \otimes I_{n_i} \\ &= [(C_i X X' C_i') \otimes \Sigma_{\lambda_i} + I_{p_i} \otimes \Sigma_{e_i}] \otimes I_{n_i} \end{aligned}$$

and  $Y_i$  and  $Y_{i'}$  are independent for  $i \neq i'$ . The empirical Bayes estimators of individual regression coefficients in the multivariate growth curve model with missing data can be obtained for every set  $S_i$  of observations using the formulae (16) and (19) corresponding to model (20), or rewriting the model by means of the vec operator as

$$\text{vec } Y = D \text{vec } B + G \text{vec } \Lambda + \text{vec } E$$

where

$$\begin{aligned} D &= \begin{pmatrix} (C_1 X) \otimes I_m \otimes A_1 \\ \vdots \\ (C_c X) \otimes I_m \otimes A_c \end{pmatrix}, \\ G &= \begin{pmatrix} (C_1 X) \otimes I_m \otimes I_{n_1} \\ \vdots \\ (C_c X) \otimes I_m \otimes I_{n_c} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

and  $\text{vec } B$ ,  $\text{vec } \Lambda$  and  $\text{vec } E$  are obtained like  $\text{vec } Y = ((\text{vec } Y_1)', \dots, (\text{vec } Y_c)')'$ . Then, assuming the normality of the observations, the expected mean and the positive definite covariance matrix are

$$E(\text{vec } Y) = D \text{vec } B$$

$$\text{cov}(\text{vec } Y) = \text{diag}(V_i \otimes I_{n_i})$$

Therefore the multivariate growth curve model with missing data is of the form of the univariate linear regression model. A two stage estimator of individual regression coefficients is recommended to be used in mixed linear models because it uses all the information contained in data and takes into account the random nature of the effects.

REFERENCES

- [1] Baksalary, J.K. and Kala, R. (1979), *Criteria for estimability in multivariate linear models*, Math. Operationsforsch. Statist. ser. Statist., **7**, 5-9.
- [2] Beganu, G. (1987), *Estimation of regression parameters in a covariance linear model*, Stud. Cerc. Mat., **39**, 3-10.
- [3] Beganu, G. (1987), *Estimation of covariance components in linear models. A coordinate-free approach*, Stud. Cerc. Mat., **39**, 228-233.
- [4] Beganu, G. (2003), *The existence conditions of the best linear unbiased estimators of the fixed factor effects*, Econom. Cumput. Econom. Cybernet. Studies and Research, **36**, 95-102.
- [5] Beganu, G. *Quadratic estimator of covariance components in a multivariate mixed linear model*, Statistical Methods and Applications (to appear).
- [6] Beganu, G. (2005), *On Gram-Schmidt orthogonalizing process of design matrices in linear models as estimating procedure of covariance components*, Rev. R. Acad. Cien. Serie A. Mat., **99**, 187-194.
- [7] Chen, Z. and Dunson, D. B. (2003), *Random effects selection in linear mixed models*, Biometrics, **59**, 762-771.
- [8] De Gruttola, V.; Ware, J. H. and Louis, T.A. (1987), *Influence analysis of generalized least squares estimators*, J. Amer. Statist. Assoc., **82**, 911-917.
- [9] Dempster, A. P.; Laird, N. M. and Rubin, D. B. (1977), *Maximum likelihood from incomplete data via the EM algorithm*, J.Royal Statist. Soc., Ser. B, **39**, 1-38.
- [10] Dempster A. P.; Rubin, D. B. and Tsutakawa, R. K. (1981), *Estimation in covariance components models*, J.Amer. Statist. Assoc., **76**, 341-353.
- [11] Eaton, M. L. (1970), *Gauss-Markov estimation for multivariate linear models: A coordinate-free approach*, Ann. Math. Statist., **41**, 528-538.
- [12] Halmos, P. R. (1958), *Finite Dimensional Vector Spaces*, 2nd ed., Van Nostrand, Princeton, New Jersey.
- [13] Harville, D. A. (1976), *Extension of the Gauss-Markov theorem to include the estimation of random effects*, Ann. Statist., **4**, 384-395.
- [14] Harville, D. A. (1977), *Maximum likelihood approaches to variance component estimation and to related problems*, J. Amer. Statist. Assoc., **72**, 320-340.
- [15] Henderson, C. R. (1953), *Estimation of variance and covariance components*, Biometrics, **9**, 226-252.
- [16] Khan, S. and Powell J.L. (2001), *Two-step estimation of semiparametric censored regression models*, J. Econometrics, **103**, 73-110.
- [17] Khuri, A. I. (1992), *Response surface models with random block effects*, Technometrics, **34**, 26-37.
- [18] Laird, N. M. and Ware, J. H. (1982), *Random-effects models for longitudinal data*, Biometrics, **38**, 963-974.
- [19] Lange, N. and Laird, N. M. (1989), *The effect of covariance structure on variance estimation in balanced growth-curve models with random parameters*, J.Amer. Statist. Assoc., **84**, 241-247.
- [20] Morris, C.N. (1983), *Parametric empirical Bayes inference: Theory and applications*, J.Amer. Statist. Assoc., **78**, 47-55.
- [21] Neudecker, N. (1990), *The variance matrix of a matrix quadratic form under normality assumptions. A derivation*

- based on its moment-generating function, *Math. Operationsforsch. Statist., ser. Statistics*, **3**, 455-459.
- [22] **Potthoff, R. F. and Roy, S. N.** (1964), *A generalized multivariate analysis of variance model useful especially for growth curve problems*, *Biometrika*, **51**, 313-326.
- [23] **Prasad, N. G. N. and Rao, J. N. K.** (1990), *The estimation of the mean squared error of small-area estimators*, *J.Amer. Statist. Assoc.*, **85**, 163-171.
- [24] **Reinsel, G.** (1982), *Multivariate repeated-measurement or growth curve models with multivariate random-effects covariance structure*, *J.Amer. Statist. Assoc.*, **77**, 190-195.
- [25] **Reinsel, G.** (1984), *Estimation and prediction in a multivariate random effects generalized linear model*, *J.Amer. Statist. Assoc.*, **79**, 406-414.
- [26] **Reinsel, G.** (1985), *Mean squared error properties of empirical Bayes estimators in a multivariate random effects general linear model*, *J.Amer. Statist. Assoc.*, **80**, 642-650.
- [27] **Sala-i-Martin, X., Doppelhofer, G. and Miller, R. I.** (2004), *Determinants of long-term growth: A Bayesian averaging of classical estimates (BACE) approach*, *American Economic Review*, **94**, 813-835.
- [28] **Smouse E. P.** (1984), *A note on Bayesian least squares inference for finite population models*, *J.Amer. Statist. Assoc.*, **79**, 390-392.

Recibido el 13 de marzo de 2006

Aceptado para su publicación el 19 de agosto de 2006

# HOMOGENIZED POLYNOMIALS AND CURVES WITH MANY POINTS

por

Álvaro Garzón<sup>1</sup>

Resumen

**Garzón, A.:** Homogenized polynomials and curves with many points. Rev. Acad. Colomb. Cienc. **30** (117): 555-561, 2006. ISSN 0370-3908.

En este artículo construimos una clase de polinomios sobre cuerpos finitos, los cuales surgen como resultado de la homogenización de polinomios simétricos. Estos polinomios son usados para la construcción de cubrimientos de Kummer del cuerpo de funciones hermitiano, el cual tiene muchos lugares de grado uno.

**Palabras clave:** Cuerpos finitos, curvas algebraicas, puntos racionales.

Abstract

We construct some classes of polynomials over finite fields as homogenization of symmetric polynomials. These polynomials are then used to construct a Kummer covers over the Hermitian function field with many places of degree one.

**Key words:** Finite fields, algebraic curves, rational points.

## 1. Introduction

The theory of equations over finite fields is a basic topic in classical number theory. Assuming an analogue of Riemann's hypothesis for the zeta function that he introduced, Artin conjectured an upper bound for the number of solutions of equations of type

$$Y^2 = f(X) \pmod{\text{a prime number}} \quad (1)$$

and was widely generalized by Weil as follows: Let  $\mathcal{C}$  be a non-singular projective absolutely irreducible curve of genus  $g$  defined over a finite field  $\mathbb{F}_q$ , then

$$|\#\mathcal{C}(\mathbb{F}_q) - (q + 1)| \leq 2g\sqrt{q} \quad (2)$$

where  $\mathcal{C}(\mathbb{F}_q)$  denotes the set of  $\mathbb{F}_q$ -rational points of  $\mathcal{C}$ . This inequality is equivalent to validity of Riemann's hypothesis for the zeta function associated to the curve.

<sup>1</sup> Departamento de Matemáticas, Universidad del Valle, Apartado Aéreo 25360, Cali, Colombia E-mail: alvarogr@univalle.edu.co AMS Classification 2000: 14G05.

The interest in curves over finite fields with many rational points (i.e.,  $\#\mathcal{C}(\mathbb{F}_q)$  is "close" to the upper bound in (2)) was renewed after Goppa's construction of codes with good parameters from such curves [4]. Moreover the number of solutions of congruences in two or more variables is related to estimates of exponential sums over finite fields [7]. The construction of curves with many points over  $\mathbb{F}_{q^r}$  is often performed using special polynomials  $\sigma(X) \in \mathbb{F}_q[X]$ .

The goal of this paper is to consider a special class of polynomials  $\sigma_{m,j}(X, Y)$ , obtained as product of certain symmetric polynomials  $s_{m,j}(X)$  defined in [1]. We obtain a nice properties of these new polynomials similar to the ones obtained in [1], and we use them to construct function fields with many places of degree one, equivalently to construct curves with many rational points.

### 2. The Polynomials $s_{m,j}(X)$ and $\sigma_{m,j}(X, Y)$

In this section we introduce the polynomials  $s_{m,j}(X)$  (see [1]) and we use them to define a new kind of polynomials  $\sigma_{m,j}(X, Y) \in \mathbb{F}_q[X, Y]$ , which have similar properties to those of the polynomials  $s_{m,j}(X)$ .

**Definition 2.1.** For integers  $m \geq 1$  and  $j = 1, \dots, m$  we define a polynomial  $s_{m,j}(X) \in \mathbb{F}_q[X]$  as follows

$$s_{m,j}(X) := s_j(X, X^q, \dots, X^{q^{m-1}}),$$

where  $s_j(X_1, \dots, X_m)$  is the  $j$ -th elementary symmetric polynomial in  $m$  variables over  $\mathbb{F}_q$ . We agree to define  $s_{m,0}(X) := 1$  and  $s_{m,j}(X) := 0$  for  $j > m$  and for  $j < 0$ .

Observe that according to with Definition 2.1,

$$\begin{aligned} s_{m,1}(X) &= X + X^q + \dots + X^{q^{m-1}} \\ &\vdots \\ s_{m,m}(X) &= X^{1+q+\dots+q^{m-1}} \\ s_{m,j}(X) &= 0, \quad \text{for } j > m \end{aligned}$$

and  $\deg(s_{m,j}(X)) = q^{m-1} + q^{m-2} + \dots + q^{m-j}$  for  $1 \leq j \leq m$ .

**Lemma 2.1.** For all  $j \in \mathbb{Z}$  and  $m \geq 2$  the following statements hold true

- i)  $s_{m,j}(X) = s_{m-1,j}(X)^q + X s_{m-1,j-1}(X)^q$ ,
- ii)  $s_{m,j}(X) = X^{q^{m-1}} s_{m-1,j-1}(X) + s_{m-1,j}(X)$ .
- iii)  $s_{m,j}(X)^q - s_{m,j}(X) = (X^{q^m} - X) s_{m-1,j-1}(X)^q$ .

*Proof.* See [1].  $\square$

**Remark 2.1.** The item iii) in Lemma 2.1 gives two interesting facts: first of all the polynomial function  $s_{m,j}$  sends  $\mathbb{F}_{q^m}$  to  $\mathbb{F}_q$  for  $j = 0, \dots, m$  (moreover, it is not hard to see that the polynomial function  $s_{m,j}$  is either constant or surjective); secondly, the roots of the polynomial  $s_{m,j}(X)$  belong to  $\bigcup_{1 \leq t \leq m} \mathbb{F}_{q^t}$  ([1, Th. 3.2]).

**Definition 2.2.** For integers  $m \geq 1$  and  $j = 1, \dots, m$  we define a polynomial  $\sigma_{m,j}(X, Y) \in \mathbb{F}_q[X, Y]$  as

$$\sigma_{m,j}(X, Y) := s_{m,m}(Y) s_{m,j} \left( \frac{X}{Y} \right).$$

In this case we have

$$\begin{aligned} \sigma_{m,0}(X, Y) &= s_{m,m}(Y) s_{m,0} \left( \frac{X}{Y} \right) \\ &= Y^{1+q+\dots+q^{m-1}} \\ \sigma_{m,1}(X, Y) &= s_{m,m}(Y) s_{m,1} \left( \frac{X}{Y} \right) \\ &= XY^{q^{m-1}+\dots+q} + \dots + X^{q^m-1} Y^{q^{m-2}+\dots+1} \\ &\dots \\ \sigma_{m,m}(X, Y) &= s_{m,m}(Y) s_{m,m} \left( \frac{X}{Y} \right) = X^{1+q+\dots+q^{m-1}} \end{aligned}$$

Observe that the polynomials  $s_{m,j}(X)$  can be obtained from the  $\sigma_{m,j}(X, Y)$  for appropriate values of  $X$  or  $Y$ , more precisely we have  $s_{m,j}(X) = \sigma_{m,j}(X, 1)$ .

**Proposition 2.1.** For all  $l \in \mathbb{Z}$  and  $r \geq 2$  it holds that

- i)  $\sigma_{m,j}(X, Y) = X^{q^{m-1}} \sigma_{m-1,j-1}(X, Y) + Y^{q^{m-1}} \sigma_{m-1,j}(X, Y)$ .
- ii)  $\sigma_{m,j}(X, Y) = Y \sigma_{m-1,j}(X, Y)^q + X \sigma_{m-1,j-1}(X, Y)^q$ .
- iii)  $\sigma_{m,j}(X, Y)^q - \sigma_{m,j}(X, Y) = (X^{q^m} - X) \sigma_{m-1,j-1}(X, Y)^q + (Y^{q^m} - Y) \sigma_{m-1,j}(X, Y)^q$ .

*Proof.* Since  $s_{m,m}(Y) = Y^{q^{m-1}} s_{m-1,m-1}(Y)$ , by Lemma 2.1, ii), we have

$$\begin{aligned} \sigma_{m,j}(X, Y) &= Y^{q^{m-1}} s_{m-1,m-1}(Y) \left( \left( \frac{X}{Y} \right)^{q^{m-1}} s_{m-1,j-1} \left( \frac{X}{Y} \right) \right. \\ &\quad \left. + s_{m-1,j} \left( \frac{X}{Y} \right) \right) \\ &= X^{q^{m-1}} s_{m-1,m-1}(Y) s_{m-1,j-1} \left( \frac{X}{Y} \right) \\ &\quad + Y^{q^{m-1}} s_{m-1,m-1}(Y) s_{m-1,j} \left( \frac{X}{Y} \right) \\ &= X^{q^{m-1}} \sigma_{m-1,j-1}(X, Y) + Y^{q^{m-1}} \sigma_{m-1,j}(X, Y) \end{aligned}$$

On the other hand, by 2.1, i),

$$\begin{aligned}\sigma_{m,j}(X, Y) &= s_{m,m}(Y)s_{m,j}\left(\frac{X}{Y}\right) \\ &= Ys_{m-1,m-1}(Y)^qs_{m-1,j}\left(\frac{X}{Y}\right)^q \\ &\quad + Xs_{m-1,m-1}(Y)^qs_{m-1,j-1}\left(\frac{X}{Y}\right)^q \\ &\quad - Y\sigma_{m-1,j}(X, Y)^q + X\sigma_{m-1,j-1}(X, Y)^q\end{aligned}$$

Now, by i) we have

$$\sigma_{m,j}(X, Y)^q = X^{q^m}\sigma_{m-1,j-1}(X, Y)^q + Y^{q^m}\sigma_{m-1,j}(X, Y)^q$$

and by ii),

$$\sigma_{m,j}(X, Y) = Y\sigma_{m-1,j}(X, Y)^q + X\sigma_{m-1,j-1}(X, Y)^q,$$

Combining these equalities we obtain iii)  $\square$

**Remark 2.2.** Additionally to the result obtained in the Proposition 2.1 we have other properties of the polynomials  $\sigma_{m,j}(X, Y)$  for example, since  $s_{m,j}(X) = s_{m,m}(X)s_{m,m-j}(\frac{1}{X})$  we have that:

$$\begin{aligned}\sigma_{m,j}(X, Y) &= s_{m,m}(Y)s_{m,j}\left(\frac{X}{Y}\right) \\ &= s_{m,m}(Y)s_{m,m}\left(\frac{X}{Y}\right)s_{m,m-j}\left(\frac{Y}{X}\right) \\ &= s_{m,m}(X)s_{m,m-j}\left(\frac{Y}{X}\right) - \sigma_{m,m-j}(Y, X).\end{aligned}$$

And therefore  $\sigma_{m,j}(X, Y) = \sigma_{m,j}(Y, X)$  if and only if  $m$  is even and  $j = \frac{m}{2}$ .

**Definition 2.3.** Given a sequence  $(c_0, c_1, \dots, c_m)$  of elements  $c_i \in \mathbb{F}_q$ , we define a sequence of polynomials  $\tau_m(X, Y) \in \mathbb{F}_q[X, Y]$  by

$$\tau_m(X, Y) = \sum_{i=0}^m c_i \sigma_{m,m-i}(X, Y) \quad \text{for all } m \geq 1.$$

According to Definition 2.3 we have:

$$\begin{aligned}\tau_1(X, Y) &= c_0X + c_1Y, \\ \tau_2(X, Y) &= c_0X^{q+1} + c_1XY^q + c_1X^qY + c_2Y^{q+1}, \\ \tau_3(X, Y) &= c_0X^{q^2+q+1} + c_1X^{q^2+q}Y + c_1X^{q^2+1}Y^q \\ &\quad + c_1X^{q+1}Y^{q^2} + c_2X^{q^2}Y^{q+1} \\ &\quad + c_2X^qY^{q^2+1} + c_2XY^{q^2+q} + c_3Y^{q^2+q+1}, \\ &\dots\end{aligned}$$

**Remark 2.3.** First, observe that if the equality  $c_i = c_{m-i}$  holds then we have  $\tau_m(X, Y) = \tau_m(Y, X)$ , on the other hand by taking the sequence  $(1, -1, 1, \dots)$  with alternating 1 and -1 and denoting by  $M(m) = 1 + q + \dots + q^{m-1}$  the exponent of the norm for the extension  $\mathbb{F}_{q^m}$  over  $\mathbb{F}_q$ , we have  $\tau_m(X, Y) = (X - Y)^{M(m)}$ .

**Theorem 2.1.** For all  $m \geq 2$  the following equalities holds

$$\begin{aligned}\tau_m(X, Y)^q - \tau_m(X, Y) &= (X^{q^m} - X)\tau_{m-1}(X, Y)^q \\ &\quad + (Y^{q^m} - Y)\hat{\tau}_{m-1}(Y, X)^q\end{aligned}$$

where the polynomials  $\tau_{m-1}(X, Y)$  and  $\hat{\tau}_{m-1}(Y, X)$  are defined as 2.3 and they are associated to the sequences given by  $c_i$  and  $\hat{c}_i = c_{m-1-i}$ ,  $i = 0, \dots, m-1$ , respectively.

*Proof.* By definition and since the coefficients  $c_i \in \mathbb{F}_q$  we have

$$\begin{aligned}\tau_m(X, Y)^q - \tau_m(X, Y) &= \sum_{i=0}^m c_i^q \sigma_{m,m-i}(X, Y)^q \\ &\quad - \sum_{i=0}^m c_i \sigma_{m,m-i}(X, Y) \\ &= \sum_{i=0}^m c_i (\sigma_{m,m-i}(X, Y)^q - \sigma_{m,m-i}(X, Y)) \\ &= (X^{q^m} - X) \left( \sum_{i=0}^m c_i \sigma_{m-1,m-i-1}(X, Y)^q \right) \\ &\quad + (Y^{q^m} - Y) \left( \sum_{i=0}^m c_i \sigma_{m-1,m-i}(X, Y)^q \right) \\ &= (X^{q^m} - X) \left( \sum_{i=0}^{m-1} c_i \sigma_{m-1,m-1-i}(X, Y)^q \right) \\ &\quad + (Y^{q^m} - Y) \left( \sum_{i=0}^{m-1} c_{m-1-i} \sigma_{m-1,i}(Y, X)^q \right).\end{aligned}$$

The last equality is obtained by the Remark 2.2.  $\square$

### 3. An application: curves with many points over $\mathbb{F}_{q^2}$

In this section we use the polynomials  $\tau_m$  to construct function fields with many places of degree one over  $\mathbb{F}_{q^2}$ . We define the function field  $F = \mathbb{F}_{q^2}(x, y, z)$  over  $\mathbb{F}_{q^2}$ , where  $q$  is a prime power, by the equations

$$y^q + y = x^{q-1},$$

$$z^r = u(x, y), \quad r \mid q+1,$$

where  $u(X, Y) \in \mathbb{F}_{q^2}[X, Y]$  is the polynomial  $\tau_2(X, Y) \pm c$  with  $c \in \mathbb{F}_q$  and  $\tau_2(X, Y)$  defined as 2.3 associated to suitable sequences in  $\mathbb{F}_{q^2}$ . This is a Kummer extension of degree  $r$  of the Hermitian function field

$$H = \mathbb{F}_{q^2}(x, y) \text{ with } y^q + y = x^{q+1}.$$

We compute the genus of  $F/\mathbb{F}_{q^2}$  by using the genus formula for Kummer extensions [8, Prop. III. 7.3]

$$g(F) = 1 + r(g(H) - 1) + \frac{1}{2} \sum_{P \in \mathbb{P}(H)} (r - r_P) \deg(P) \quad (3)$$

where  $r_P = \gcd(\nu_P(u), r)$  for a place  $P$  in  $H$  with discrete valuation  $\nu_P$  in  $H$ .

By considering the ramification of the places of degree one of  $H$  in  $F$  we then determine the number of places of degree one in  $F/\mathbb{F}_{q^2}$ . In order to use the genus formula (3) for computing the genus of the Kummer extension  $F$  of  $H$  we have to determinate the principal divisor of  $u$  in  $H$ .

Let us first recall some properties of the Hermitian function field [8, p. 203]. The genus of  $H$  is  $g = \frac{q(q-1)}{2}$ , the number  $N = N(H)$  of places of degree one is  $N = q^2 + 1$ , namely

- (1) The common pole  $P_\infty$  of  $x$  and  $y$  and
- (2) For each rational point  $(a, b) \in \mathbb{F}_{q^2} \times \mathbb{F}_{q^2}$  with  $b^q + b = a^{q+1}$  there is a unique place  $P_{a,b}$  of degree one in  $H$  such that  $x(P_{a,b}) = a$  and  $y(P_{a,b}) = b$ .

And the pole divisors of  $x$  and  $y$  in  $H/\mathbb{F}_{q^2}$  are

$$(x)_\infty = qP_\infty \quad \text{and} \quad (y)_\infty = (q+1)P_\infty. \quad (4)$$

**3.1. An optimal function field over  $\mathbb{F}_{q^2}$ .** We consider the function field  $F = \mathbb{F}_{q^2}(x, y, z)$  over  $\mathbb{F}_{q^2}$  with

$$y^q + y = x^{q+1}, \quad z^r = u(x, y)$$

with  $u(x, y) = (x - y)^{q+1} - 1$  and  $r \mid q + 1$ . Observe that  $u(X, Y)$  is nothing but  $\tau_2(X, Y) - 1$  with  $\tau_2(X, Y)$  associated to the sequence  $(1, -1, 1)$ . Now we want to compute the genus  $g = g(F)$  and the number  $N(F)$  of places of degree one of  $F/\mathbb{F}_{q^2}$ .

**3.1.1. The principal divisor of  $u$ .** By (4) we get for the pole divisor of  $u = (x - y)^{q+1} - 1$

$$(u)_\infty = (q+1)^2 P_\infty.$$

To compute the zero divisor of  $u$  in  $H$  is much harder work. If  $P = P_{a,b}$  with  $a, b \in \overline{\mathbb{F}_{q^2}}$  (where  $\overline{\mathbb{F}_{q^2}}$  denotes the algebraic closure of  $\mathbb{F}_{q^2}$ ) is a zero of  $u$  then

$$b^q + b = a^{q+1} \quad (5)$$

and

$$(a - b)^{q+1} - 1 = 0. \quad (6)$$

Let us first consider  $\zeta \in \mathbb{F}_{q^2}$  such that  $\zeta^{q+1} = 1$  and consider the straight line  $x = y + \zeta$  now, since  $y^q + y = x^{q+1}$  then, the common points of this locus satisfies

$$y^{q+1} + (\zeta - 1)y^q + (\zeta - 1)^q y + 1 = 0 \quad (7)$$

**Lemma 3.1.1.1.** *Let us consider the family of polynomials*

$$\theta_\zeta(T) = T^{q+1} - (\zeta - 1)T^q + (\zeta - 1)^q T + 1 \text{ with } \zeta^{q+1} = 1.$$

*All polynomials in the family above have all roots in  $\mathbb{F}_{q^2}$ . Moreover, they are separable polynomials except if*

- i)  $p = 3$  and  $\zeta = -1$ . In this case  $T - 1 - \zeta - -1$  is the only multiple root of  $\theta_{-1}(T)$  and its multiplicity is  $(q + 1)$ .
- ii)  $q \equiv 2 \pmod{3}$  and  $a^2 = a - 1$ . For each of the two values of  $a$  satisfying  $a^2 = a - 1$ , we have that  $T = 1 - a$  is the only multiple root of  $\theta_a(T)$  and its multiplicity is  $(q + 1)$ .

*Proof.* It is easy to see that the polynomial  $\theta(T)$  satisfies

$$\theta(T)^q - \theta(T) = (T^{q^2} - T)(T - (1 - \zeta))^q.$$

This proves that all roots of  $\theta(T)$  are in  $\mathbb{F}_{q^2}$ . On the other hand, since  $\theta'(T) = (T - (1 - \zeta))^q$ , we have that  $\theta(1 - \zeta) = 0$  if and only if  $\zeta^q + \zeta - 1 = 0$  if and only if  $\zeta$  satisfies the system

$$S = \begin{cases} \zeta^{q+1} = 1 \\ \zeta^q + \zeta - 1 = 0. \end{cases}$$

But  $S$  has one solution, namely  $\zeta = -1$ , if  $q \equiv 0 \pmod{3}$ ;  $S$  has two solutions, namely the roots of the polynomial  $T^2 - T + 1$  if  $q \equiv 2 \pmod{3}$ ; and  $S$  has no solution if  $q \equiv 1 \pmod{3}$ .  $\square$

**Theorem 3.1.1.1.** *The following properties hold*

- i) *If  $q \equiv 0 \pmod{3}$ , then  $u$  has  $q^2 + q$  simple zeros and one zero of multiplicity  $q+1$ , all of degree one.*
- ii) *If  $q \equiv 1 \pmod{3}$ , then  $u$  has  $(q+1)^2$  simple zeros.*
- iii) *If  $q \equiv 2 \pmod{3}$ , then  $u$  has  $q^2 - 1$  simple zeros and two zeros of multiplicity  $q+1$ , all of degree one.*

*Proof.* It follows directly from Lemma 3.1.1.1.  $\square$

**3.1.2. The genus and the number of rational places of  $F/\mathbb{F}_{q^2}$ .** In order to determinate de genus of  $F/\mathbb{F}_{q^2}$  we rewrite the formula (3) by using  $g(H) = \frac{q(q-1)}{2}$ , and we obtain

$$g(F) = \frac{1}{2} \left[ r(q^2 - q - 2) + 2 + \sum_{P \in \mathcal{P}(H)} (r - r_P) \deg(P) \right] \quad (8)$$

where  $r_P = \gcd(\nu_P(u), r)$ .

**Theorem 3.1.2.1.** *The genus  $g(F)$  of the function field  $F/\mathbb{F}_{q^2}$  satisfies:*

$$g(F) = \begin{cases} (r(q^2 - q) + (r-1)(q^2 + q - 2))/2 & \text{if } q \equiv 0 \pmod{3}, \\ (r(q^2 - q) + (r-1)(q^2 + 2q - 1))/2 & \text{if } q \equiv 1 \pmod{3}, \\ (r(q^2 - q) + (r-1)(q^2 - 3))/2 & \text{if } q \equiv 2 \pmod{3}. \end{cases}$$

*Proof.* It follows from Lemma 3.1.1.1 and formula (8).  $\square$

**Theorem 3.1.2.2.** *The number  $N(F)$  of rational places of the function field  $F/\mathbb{F}_{q^2}$  satisfies:*

$$N(F) = \begin{cases} r(q^3 - q^2 - q + 1) + (q^2 + q) & \text{if } q \equiv 0 \pmod{3}, \\ r(q^3 - q^2 - 2q) + (q + 1)^2 & \text{if } q \equiv 1 \pmod{3}, \\ r(q^3 - q^2) + (q^2 - 1) & \text{if } q \equiv 2 \pmod{3}. \end{cases}$$

*Proof.* Let  $P$  be a place of degree one of  $H$ , then  $P$  is either totally ramified with exactly one extension of degree one in  $F$  or  $P$  is unramified. The first case holds for the simple zeros of  $u$ . The second case holds for the zeros  $P$  with  $\nu_P(u) = q + 1$ , for the pole  $P_\infty$ , and for the places  $P$  such that  $\nu_P(u) = 0$ . Let us first consider the case of rational places  $P = P_{a,b}$  of the Hermitian function field  $H$  with  $\nu_P(u) = 0$ . If  $\nu_P(u) = 0$  then  $u(P) = (a - b)^{q+1} - 1 \in \mathbb{F}_q^*$ . Then the polynomial  $T^r - u(P_{a,b})$  has  $r$  distinct roots in  $\mathbb{F}_{q^2}$ . Therefore there exist  $r$  extensions of degree one in  $F$ . Now, consider one of the zeros with  $\nu_{P_{a,b}}(u) = q + 1$ . We claim that if  $p \neq 3$  then there is no place of degree one in  $F$  lying over  $P_{a,b}$ . In order to prove this claim we consider the

$P_{a,b}$ -adic expansion of  $u$  with respect to  $t - x - a$ . Since  $y(P_{a,b}) = b$ , then  $y = b + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \dots + \alpha_{q+1} t^{q+1} + \lambda$  with  $\nu_P(\lambda) > q + 1$ . On the other hand, the equation  $x^{q+1} = y^q + y$  implies

$$\begin{aligned} t^{q+1} + at^q + a^q t + a^{q+1} &= b^q + \alpha_1^q t^q + \alpha_2^q t^{2q} + \dots \\ &+ \alpha_{q+1}^q t^{q^2+q} - \lambda^q + b + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \dots \\ &+ \alpha_{q+1} t^{q+1} + \lambda. \end{aligned}$$

Therefore we have  $\alpha_1 = a^q, \alpha_q = a - a^{q^2}, \alpha_{q+1} = 1$  and  $\alpha_i = 0$   $i = 2, \dots, q-1$ , and this implies that  $u(x, y) = -(a - b)^q t^{q+1} + \omega$  where  $\nu_{P_{a,b}}(\omega) > q + 1$ . Now since  $P_{a,b}$  is a multiple zero of  $u$  then, by Lemma 3.1.1.1 we have

$$\begin{cases} a = 1 \text{ and } b = -1 & \text{if } q \equiv 0 \pmod{3} \\ a = 1 \text{ and } b = 1 - \gamma & \text{if } q \equiv 2 \pmod{3} \end{cases}$$

with  $\gamma$  being one of the two roots of the polynomial  $\gamma^2 - \gamma + 1$ . If a place of degree one in  $F$  lies over  $P_{a,b}$  then by the equation  $z^r = u(x, y)$  and the expression  $u = -(a - b)^q t^{q+1} + \omega$ , we obtain

$$\left( \frac{z}{t^{q+1}} \right)^r (P) = -(a - b)^q.$$

Hence there has to exist an element  $\beta \in \mathbb{F}_{q^2}$  such that

$$\beta^r - u(P_{a,b}) = \begin{cases} -(-1)^q = 1 & \text{if } q \equiv 0 \pmod{3} \\ -(a - b)^q = -\gamma^q = \gamma & \text{if } q \equiv 2 \pmod{3} \end{cases}$$

Then, the  $r$  places lying over  $P$  are rational if and only if  $q \equiv 0 \pmod{3}$ .

For the pole, let  $t = \frac{x}{y}$  be an uniformizer to  $P_\infty$ , then

$$u(x, y) = (x - y)^{q+1} - 1 = y^{q+1}(t - 1)^{q+1} - 1$$

and therefore all places lying over  $P_\infty$  are rational.  $\square$

**Remark 3.1.1.** For  $q = 2$  and  $r = q + 1$  we get  $g(F) = 4$  and  $N = 15$ , which is optimal since there is no other function field over  $\mathbb{F}_4$  with genus 4 and more than 15 places of degree one [2].

**3.2. Another Example.** In this section, we consider the function field  $F = \mathbb{F}_{q^2}(x, y, z)$  over  $\mathbb{F}_{q^2}$  with

$$y^q + y = x^{q+1}$$

$$z^r = u(x, y)$$

with  $r \mid q + 1$  and  $u(X, Y) = Y^{q+1} + Y^q X + Y X^q$ .



**3.2.1. The principal divisor of  $u$ .** In this case we have that the pole divisor of  $u$  is  $(u)_\infty = (q + 1)^2 P_\infty$ . In order to compute the zero divisor of  $u$  we proceed as follows:

If  $P = P_{a,b}$  with  $a, b \in \overline{\mathbb{F}}_{q^2}$  (where  $\overline{\mathbb{F}}_{q^2}$  denotes the algebraic closure of  $\mathbb{F}_{q^2}$ ) is a zero of  $u$  then

$$\sigma_{2,1}(1, b) = \sigma_{2,2}(a, 1), \tag{9}$$

$$\sigma_{2,1}(a, b) - \sigma_{2,0}(a, b) = 0. \tag{10}$$

By definition of  $\sigma_{m,j}$ , the equation (10) can be rewritten as

$$0 = s_{2,2}(b)s_{2,1}\left(\frac{a}{b}\right) + s_{2,2}(b) = s_{2,2}(b) \left[ s_{2,1}\left(\frac{a}{b}\right) + 1 \right]. \tag{11}$$

Let us first consider  $\zeta \in \overline{\mathbb{F}}_{q^2}$  such that  $s_{2,1}(\zeta) + 1 = 0$ ; i.e.,  $\zeta^q + \zeta = -1$  and then consider the straight line  $x = y\zeta$ . Now since  $y^q + y = x^{q+1}$  then, the common points of this locus satisfies

$$y^q + y = (y\zeta)^{q+1}. \tag{12}$$

**Lemma 3.2.1.** *The polynomial  $\theta_\zeta(T) = (\zeta T)^{q+1} - T^q - T$  is separable and has its roots in  $\mathbb{F}_{q^2}$*

*Proof.* The polynomial  $\theta_\zeta(T)$  satisfies

$$\theta_\zeta(T)^q - \theta_\zeta(T) = -(T^{q^2} - T)(\zeta^{q-1}T - 1)^q.$$

Now the lemma follows from

$$\theta'_\zeta(T) = (\zeta^{q+1}T - 1)^q,$$

and since  $T = \zeta^{-(q+1)}$  is not a root of  $\theta_\zeta(T)$ .  $\square$

**Remark 3.2.1.** First observe that the equation (11) implies that  $P_{0,0}$  is a zero of  $u$  [ $s_{2,2}(b) = 0$  implies  $b = 0 = a$ ]. On the other hand by Lemma 3.2.1 for each  $\zeta \in \overline{\mathbb{F}}_{q^2}$  such that  $\zeta^q + \zeta = -1$  and for each root  $\beta$  of the polynomial  $\theta_\zeta(T)$ , the pair  $(\zeta\beta, \beta)$  satisfies the equations (9) and (10), but  $T = 0$  is zero of  $\theta_\zeta(T)$  for all  $\zeta$ , therefore  $P_{0,0}$  is a multiple zero of  $u$ .

**Lemma 3.2.2.** *Let  $P = P_{a,b}$  be a zero of  $u$ ; then  $t = x - a$  is a  $P$ -prime element, and  $\nu_P(u) > 1$  iff  $b = -\frac{a^2}{a+1}$ .*

*Proof.* Denoting by  $\delta_t$  the derivation of  $F/\mathbb{F}_{q^2}$  with respect to  $t$ , then from the  $P$ -adic power series expansion of  $u$  with respect to  $t$  we have

$$\nu_P(u) > 1 \text{ iff } \frac{du}{dt}(P) = 0$$

From the equation  $y^q + y = x^{q+1}$  follows  $\frac{dx}{dt} = 1$  and  $\frac{dy}{dt} = x^q$  then,

$$\frac{du}{dt} = y^q \frac{dy}{dt} + y^q \frac{dx}{dt} + x^q \frac{dy}{dt}$$

implies  $\frac{du}{dt}(P) = (ab + b + a^2)^q. \quad \square$

**Lemma 3.2.3.**  $\nu_{P_{0,0}}(u) = 2q + 1$ .

*Proof.* In order to prove that the multiplicity of  $P = P_{0,0}$  is  $q + 1$  we compute the  $P$ -adic power series expansion of  $u$  with respect to  $t = x$ . We write  $x = t$  and  $y = \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \dots + \alpha_{q+1} t^{q+1} + \lambda$  with  $\nu_P(\lambda) > q + 1$  and  $\alpha_i \in \overline{\mathbb{F}}_{q^2}$ . From the equation  $y^q + y = x^{q+1}$  by comparing coefficients we obtain  $y = t^{q+1} + \alpha_{q+2} t^{q+2} + \alpha$ , therefore

$$\begin{aligned} u(x, y) &= x^q y + x y^q + y^{q+1} \\ &= (t^q)(t^{q+1} + \alpha_{q+2} t^{q+2} + \alpha) \\ &\quad + t(t^{q+1} + \alpha_{q+2} t^{q+2} + \alpha)^q + \omega \end{aligned}$$

with  $\nu_P(\omega) > (q + 1)^2. \quad \square$

**3.2.2. The genus and the number of rational places of  $F/\mathbb{F}_{q^2}$ .** As in the section 3.1.2 we use (8) together with lemma 3.2.3 to compute the genus and the number of rational places of the function field  $F/\mathbb{F}_{q^2}$ .

**Theorem 3.2.1.** *The genus and the number of places of degree one of the function field  $F/\mathbb{F}_{q^2}$  are given by*

$$g(F) = \frac{r(2q^2 - q - 1) - (q^2 - 1)}{2}$$

and

$$N(F) = r(q^3 - q^2) + (q^2 + 1).$$

*Proof.* The proof is similar to (3.1.2.1), by (3.2.3) the only multiple zero of  $u$  is  $P_{0,0}$ , and we have  $r_{P_{0,0}} = 1$ ; for the pole  $P_\infty$ ,  $r_{P_\infty} = r$ , and therefore the formula to genus follows of (8). To compute the number of rational places observe that if  $P$  be a place of degree one of  $H$ , then  $P$  is either totally ramified with exactly one extension of degree one in  $F$  or  $P$  is unramified. The first case holds for the simple zeros of  $u$ . The second case holds for the the pole  $P_\infty$  and for the places  $P$  such that  $\nu_P(u) = 0$ . Let us first consider the case of rational places  $P = P_{a,b}$  of the Hermitian function field  $H$  with  $\nu_P(u) = 0$ . If  $\nu_P(u) = 0$  then  $u(P) = \tau_2(a, b) \in \mathbb{F}_q$  and therefore, the polynomial  $T^r - u(P)$  has  $r$  distinct roots in  $\mathbb{F}_{q^2}$ . Therefore there exist  $r$  extensions of degree one

in  $F$ . For the pole, again let  $t = \frac{x}{y}$  be an uniformizer to  $P_\infty$ , then

$$u(x, y) = (xt)^{q+1} + t^q x^{q+1} + tx^{q+1}$$

and therefore all places lying over  $P_\infty$  are rational.  $\square$

**Remark 3.2.2.** For  $q = 2$  and  $r = 3$  we get  $g(F) = 6$  and  $N(F) = 17$  rational places, this value is close to the best value know of 20 rational points, however this curve was obtained by using methods from general class field theory and this method produces a mere existence result and not an explicit curve, see [2]. For  $q = 3$  and  $r = 4$  we get  $g(F) = 24$  and  $N(F) = 82$ , the best value know is 91 and as before case this curve was obtained by using methods of class field theory based on Drinfeld modules of rank one, see [2].

**Acknowledgements.** The author deeply appreciates the helpful comments of the referee on this work.

## References

- [1] **A. Garcia and H. Stichtenoth.** *A Class of Polynomials over Finite Fields*, *Finite Fields and their Appl.* **5** (1999), 424–435.
- [2] **G. van der Geer and M. van der Vlugt.** *Tables for the function  $N_q(g)$* , available at <http://www.wins.uva.nl/~geer>.
- [3] **H. Hasse.** *Theorie der relativ zyklischen algebraischen Funktionenkörper*, *J. Reine Angew. Math* **172** (1934), 37–54.
- [4] **V. D. Goppa.** *Codes on algebraic curves*. *Sov. Math. Dokl.* **24** (1981), 170–172.
- [5] **Y. Ihara.** *Some remarks on the number of rational points of algebraic curves over finite fields*, *J. Fac. Sci. Tokyo* **28** (1981), 721–724.
- [6] **R. Lidl and H. Niederreiter.** *Finite Fields and Applications*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1994.
- [7] **C. J. Moreno.** *Algebraic Curves over Finite Fields*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1991.
- [8] **H. Stichtenoth.** *Algebraic Function Fields and Codes*, Springer-Verlag, Berlin, 1993.
- [9] **V. Shabat.** *Tables of curves with many points*, available at <http://www.wins.uva.nl/~shabat/tables.html>.

Recibido el 2 de mayo de 2006

Aceptado para su publicación el 10 de agosto de 2006



# POLINOMIOS ORTOGONALES NO ESTÁNDAR. APLICACIONES EN ANÁLISIS NUMÉRICO Y TEORÍA DE LA APROXIMACIÓN

por

Francisco Marcellán<sup>1</sup>

## Resumen

**Marcellán, F.:** Polinomios ortogonales no estándar. Aplicaciones en análisis numérico y teoría de la aproximación. Rev. Acad. Colomb. Cienc. **30** (117): 563-579, 2006. ISSN 0370-3908.

En esta contribución presentamos un sumario de recientes resultados sobre aplicaciones de la teoría de polinomios ortogonales no estándar (en particular, asociados a medidas soportadas en la circunferencia unidad y respecto a productos de Sobolev asociados a vectores de medidas soportados en la recta real). Consideramos transformaciones espectrales de medidas y su tratamiento desde el punto de vista de factorización de matrices. Finalmente, se abordan algunos problemas de teoría de aproximación en espacios de Sobolev.

**Palabras clave:** Polinomios ortogonales, generadores de espacios de estados, matrices de momentos, transformaciones espectrales.

## Abstract

In this contribution we present a summary of recent results on applications of the theory of non standard orthogonal polynomials (in particular, associated with measures supported on the unit circle and with respect to Sobolev products associated with a vector of measures supported on the real line). We consider spectral transformations of measures and their analysis from the point of view of matrix factorization. Finally, we deal with some problems of approximation theory in Sobolev spaces.

**Key words:** Orthogonal polynomials, state-space generators, moment matrices, spectral transformations.

---

<sup>1</sup> Departamento de Matemáticas, Universidad Carlos III de Madrid. Avenida de la Universidad 30, 28911, Leganés, España. E-mail: pacomarc@ing.uc3m.es

AMS Classification 2000: 42C05, 15A23.

## 1. Introducción

Sea  $\mu$  una medida de Borel positiva cuyo soporte es un subconjunto  $\mathbb{I}$ , no finito, de la recta real y tal que

$$\left| \int_{\mathbb{I}} x^n d\mu \right| < +\infty,$$

para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

De manera unívoca queda definida una sucesión de polinomios mónicos  $\{P_n\}_{n \geq 0}$  tal que

$$\int_{\mathbb{I}} x^k P_n(x) d\mu = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

$\{P_n\}_{n \geq 0}$  se denomina sucesión estándar de polinomios ortogonales mónicos respecto a la medida  $\mu$ .

Si  $d_n = \int_{\mathbb{I}} (P_n(x))^2 d\mu$ , entonces la sucesión  $\left\{ d_n^{-\frac{1}{2}} P_n \right\}_{n \geq 0}$  se denomina sucesión estándar de polinomios ortonormales respecto a la medida  $\mu$ .

$\{P_n\}_{n \geq 0}$  satisface una relación de recurrencia a tres términos

$$xP_n(x) = P_{n+1}(x) + \beta_n P_n(x) + \gamma_n P_{n-1}(x), \quad (1.1)$$

donde  $\beta_n \in \mathbb{R}$  y  $\gamma_n \in \mathbb{R}_+$ .

En términos matriciales, la anterior relación viene dada por

$$x \begin{bmatrix} P_0(x) \\ P_1(x) \\ \vdots \\ P_n(x) \\ \vdots \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} P_0(x) \\ P_1(x) \\ \vdots \\ P_n(x) \\ \vdots \end{bmatrix},$$

donde  $M$  es una matriz tridiagonal

$$M = \begin{bmatrix} \beta_0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ \gamma_1 & \beta_1 & 1 & 0 & \ddots \\ 0 & \gamma_2 & \beta_2 & 1 & \ddots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix}.$$

Estos polinomios ortogonales aparecen en diversas áreas de las matemáticas como la teoría de aproximación, análisis numérico (fórmulas de cuadratura gaussiana, métodos espectrales para problemas de valores en la frontera), teoría de códigos, sistemas integrales, etc.

El interés de su estudio ha crecido en los últimos 20 años como consecuencia de sus aplicaciones que han enriquecido de manera notable la teoría clásica. A modo de ejemplo, en [24] se consideran transformaciones de Darboux discretas para familias de polinomios ortogonales que satisfacen (1.1), entendiéndose dicha relación como una ecuación de Schrödinger discreta. De manera natural aparecen las denominadas transformaciones espectrales canónicas que corresponden a perturbaciones de la medida  $\mu$

(i) Christoffel

$$d\tilde{\mu} = (x-a)d\mu, \quad a \notin \mathbb{I}.$$

(ii) Uvarov

$$d\tilde{\mu} = d\mu + M\delta_a,$$

con  $M \in \mathbb{R}_+$  y  $\delta_a$  la función de Dirac en  $a$ .

(iii) Geronimus

$$d\tilde{\mu} = \frac{1}{x-a} d\mu + M\delta_a,$$

con  $a \notin \mathbb{I}$ .

La relación entre las matrices tridiagonales asociadas se establece a través de la factorización LU y UL de la matriz  $M$  correspondiente a la medida  $\mu$  (véase [1]) mientras que a través de la factorización QR de  $M$  se puede abordar la iteración de la transformación  $d\tilde{\mu} = (x-a)^2 d\mu$  (véase [2]).

El objeto de este trabajo es presentar un análisis matricial de polinomios ortogonales no estándar, en particular, de dos situaciones ampliamente estudiadas en la literatura:

(i) El caso de la circunferencia unidad  $\mathbb{T}$  como soporte de una medida  $\mu$  que define un producto escalar

$$\langle p, q \rangle = \int_{\mathbb{T}} p(z) \overline{q(z)} d\mu,$$

donde  $p, q$  son polinomios con coeficientes complejos (véase [23] así como [7] y [22] desde una perspectiva numérica).

(ii) El caso de ortogonalidad respecto a un vector de medidas a través de un producto de Sobolev

$$\langle p, q \rangle = \sum_{k=0}^N \int_{\mathbb{I}_k} p^{(k)}(z) \overline{q^{(k)}(z)} d\mu_k,$$

donde  $\mathbb{I}_k \subset \mathbb{R}$  denota el soporte de la medida  $\mu_k$ ,  $k = 0, 1, \dots, N$  (véase [16], [17], [18] y [19]).

El marco general se analiza en la sección 2 donde se establece una conexión natural entre productos escalares generales, matrices de momentos, matrices de Hessenberg y matrices de controlabilidad.

En la sección 3 se estudian transformaciones espectrales para medidas soportadas en la circunferencia unidad. En particular, analizamos los análogos de las de Christoffel, Uvarov y Geronimus estableciendo la conexión con las funciones de Carathéodory definidas por la sucesión de momentos.

En la sección 4 se consideran las nuevas matrices de Hessenberg asociadas a una transformación espectral lineal como es la de Christoffel así como dos ejemplos racionales no lineales.

Finalmente, en la sección 5 presentamos algunos resultados relativos a matrices de momentos para productos de Sobolev y sus implicaciones en el análisis de los coeficientes de Fourier correspondientes a los polinomios ortogonales asociados.

## 2. Polinomios ortogonales y sistemas lineales

En el espacio vectorial  $\mathbb{P}$  de los polinomios en una variable con coeficientes complejos introducimos un producto escalar  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , i. e. una aplicación de  $\mathbb{P} \times \mathbb{P}$  en  $\mathbb{C}$  tal que

- (i)  $\langle \alpha p + \beta q, r \rangle = \alpha \langle p, r \rangle + \beta \langle q, r \rangle$  con  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ ,  $p, q, r \in \mathbb{P}$ .
- (ii)  $\langle p, q \rangle = \overline{\langle q, p \rangle}$ ,  $p, q \in \mathbb{P}$ .
- (iii)  $\langle p, p \rangle \in \mathbb{R}_+$ ,  $p \in \mathbb{P} \setminus \{0\}$ .

Si se considera la base canónica  $\{z^n\}_{n \geq 0}$  del espacio  $\mathbb{P}$ , tenemos asociada la matriz infinita de Gram  $R = (r_{k,j})_{k,j \geq 0}^\infty$ , también denominada matriz de momentos, donde  $r_{k,j} = \langle z^k, z^j \rangle$ .  $R_n$ ,  $n = 0, 1, \dots$ , denotará la submatriz principal de orden  $(n+1) \times (n+1)$  de la matriz  $R$ .

Por otra parte, aplicando a la base canónica el método de ortogonalización de Gram-Schmidt podemos construir una única familia de polinomios  $\{P_n\}_{n \geq 0}$  tal que

- (i)  $P_n(z) = \kappa_{n,n} z^n +$  términos de grado inferior,  $\kappa_{n,n} > 0$ .
- (ii)  $\langle P_n, P_k \rangle = \delta_{n,k}$ , para  $0 \leq k \leq n$ , donde  $\delta_{n,k}$  es la delta de Kronecker.

La familia  $\{P_n\}_{n \geq 0}$  se denomina familia de polinomios ortonormales respecto al producto escalar  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . La familia  $\{\kappa_{n,n}^{-1} P_n\}_{n \geq 0}$  se denomina familia de polinomios ortogonales mónicos asociada al anterior producto escalar.

Si mediante  $w_{n+1} = [1, z, \dots, z^n]^t$  y  $v_{n+1} = [P_0(z), P_1(z), \dots, P_n(z)]^t$  denotamos los vectores polinómicos de orden  $n+1$  correspondientes a las bases  $\{z^n\}_{n \geq 0}$  y  $\{P_n\}_{n \geq 0}$ , entonces se deduce fácilmente

### Proposición 2.1.

- (i)  $\langle w_{n+1}, w_{n+1}^t \rangle = R_n$ .
- (ii)  $\langle v_{n+1}, v_{n+1}^t \rangle = I_{n+1}$ .

Con la anterior notación queremos denotar que el producto escalar se aplica a cada una de las entradas de las matrices producto.

Por otra parte,  $v_{n+1} = A_n w_{n+1}$  donde  $A_n \in \mathbb{C}^{(n+1), (n+1)}$  es una matriz triangular inferior con elementos diagonales positivos. Más concretamente, los elementos diagonales son los coeficientes conductores  $\kappa_{0,0}, \kappa_{1,1}, \dots, \kappa_{n,n}$  de los polinomios ortonormales  $P_0(z), P_1(z), \dots, P_n(z)$ .

Teniendo en cuenta que

$$z v_{n-1} = M_n v_{n+1} + [0, \dots, 0, \alpha_{n+1} P_{n+1}(z)]^t, \quad (2.1)$$

donde  $\alpha_{n+1} = \frac{\kappa_{n,n}}{\kappa_{n+1,n+1}}$  y  $M_n$  una matriz Hessenberg inferior, se tiene

$$z A_n w_{n-1} = M_n A_n w_{n+1} + [0, \dots, 0, \alpha_{n+1} P_{n+1}(z)]^t,$$

esto es

$$z w_{n+1} = A_n^{-1} M_n A_n w_{n+1} + \left[ 0, \dots, 0, \frac{P_{n+1}(z)}{\kappa_{n+1,n+1}} \right]^t. \quad (2.2)$$

Identificando las entradas en los dos miembros de la anterior igualdad, se tiene

$$A_n^{-1} M_n A_n = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & & 1 \\ -a_{n-1,n+1} & -a_{n+1,n} & \dots & & -a_{n+1,1} \end{bmatrix} = F_n^{(0)}, \tag{2.3}$$

donde  $F_{n+1}(z) = \kappa_{n+1,n+1} (z^{n+1} + a_{n+1,1} z^n + \dots + a_{n-1,n} z - a_{n+1,n+1})$ ,  $(F_n^{(0)})^k = Z_n + u_n e_n^t$  como

$$u_n = ( a_{n+1,n+1}, -a_{n+1,n}, \dots, -a_{n+1,1} )^t \in \mathbb{C}^{n-1,1}, \quad e_n = (0, 0, \dots, 0, 1)^t \in \mathbb{C}^{n+1,1}$$

y  $Z_n$  es la matriz de orden  $(n+1) \times (n+1)$  con 1 en la primera subdiagonal y las restantes entradas son nulas.

De (2.3) se sigue que el polinomio característico de  $M_n$  es precisamente el polinomio  $\kappa_{n-1,n+1}^{-1} P_{n+1}$ . Por otra parte,

$$R_n = \langle w_{n+1}, w_{n+1}^t \rangle = \langle A_n^{-1} v_{n+1}, v_{n+1}^t A_n^{-1} \rangle - A_n^{-1} A_n^{-*} = L_n L_n^* \tag{2.4}$$

Puesto que  $L_n = A_n^{-1}$  es triangular inferior con elementos diagonales positivos, (2.4) es la factorización de Cholesky de la matriz  $R_n$ .

En la teoría de sistemas lineales [13] el par  $( (F_n^{(0)})^k, e_0 )$ , donde  $e_0 = (1, 0, \dots, 0)^t \in \mathbb{C}^{n-1,1}$ , se denomina par canónico de controlabilidad de la matriz  $R_n$ . De hecho, para  $k = 0, 1, \dots, n$

$$\begin{aligned} r_{k,j} &= e_k^t (A_n^{-1} A_n^{-*})^j e_j \\ &= e_0^t (F_n^{(0)})^k A_n^{-1} A_n^{-*} (F_n^{(0)*})^j e_0 \\ &= e_0^t (A_n^{-1} M_n^k) (M_n^j)^* A_n^{-*} e_0 \\ &= (e_0^* A_n^{-1}) M_n^k (M_n^j)^* (e_0^* A_n^{-1})^* \end{aligned}$$

Si denotamos  $g_n^* = e_0^* A_n^{-1}$ , esto es  $g_n = A_n^{-*} e_0 = L_n^* e_0$  y, por tanto

$$R_n = \begin{bmatrix} g_n^* \\ g_n^* M_n \\ \vdots \\ g_n^* M_n^n \end{bmatrix} [g_n, M_n^* g_n, \dots, (M_n^*)^n g_n] = C_n^* C_n, \tag{2.5}$$

donde  $C_n = [g_n, M_n^* g_n, \dots, (M_n^*)^n g_n]$  es la matriz de controlabilidad asociada al par  $(M_n^*, g_n)$ .

Ahora bien, de (2.3) se sigue que

$$A_n^* (M_n^*)^k = (F_n^{(0)*})^k A_n^*, \quad k \in \mathbb{N}$$

y, por tanto,

$$A_n^* C_n = I_{n+1}.$$

En conclusión, la matriz de controlabilidad  $C_n \in \mathbb{C}^{(n+1) \times (n+1)}$  asociada al par  $(M_n^*, g_n)$  es la inversa de la matriz  $A_n^*$ .

En el caso del producto escalar estándar asociado a una medida positiva  $\mu$  soportada en la recta real, la matriz  $M_n$  es una matriz de Jacobi.

En el caso del producto escalar no estándar asociado a una medida positiva  $\mu$  soportada en la circunferencia unidad, la matriz  $M_n$  es una matriz casi-unitaria (ver [15]).

**Definición 2.2** ([13], [14]). *La sucesión  $(F_n, g_n)$  donde  $F_n \in \mathbb{C}^{n-1,n+1}$ ,  $g_n \in \mathbb{C}^{n+1,1}$  se denomina sucesión generadora de espacios de estado para la matriz de momentos  $R$  si, para cada  $n$ , la matriz de controlabilidad de  $R_n$  es  $C_n = [g_n, F_n g_n, \dots, F_n^n g_n]$ .*

El par  $(M_n^*, g_n)$  es una sucesión generadora de espacios de estado asociada a la matriz de momentos  $R$ . Veamos como se puede construir por inducción dicha sucesión generadora de espacios de estado, esto es, presentaremos un método recursivo que permite deducir  $(M_{n+1}^*, g_{n+1})$  a partir de  $(M_n^*, g_n)$ .

Denotaremos  $R_0 = [r_{0,0}]$ ,

$$R_{n+1} = \begin{bmatrix} R_n & a_n \\ a_n^* & r_{n+1,n+1} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{n+2,n+2}$$

para  $n \in \mathbb{N}$ , con  $a_n \in \mathbb{C}^{n+1,1}$ , y supongamos que hemos encontrado un generador de espacios de estado  $(F_n, g_n)$  para la matriz  $R_n$ . Queremos encontrar un generador de espacios de estado  $(F_{n+1}, g_{n+1})$  para la matriz  $R_{n+1}$  de manera que

$$F_{n+1} = \begin{bmatrix} F_n & * \\ * & * \end{bmatrix}, \quad g_{n+1} = \begin{bmatrix} g_n \\ * \end{bmatrix}. \tag{2.6}$$

Si  $R_n = L_n L_n^*$ , con  $L_n$  triangular inferior y elementos diagonales positivos, denota la factorización de Cholesky de la matriz  $R_n$ , es fácil probar que

$$\begin{aligned} R_{n+1} &= \begin{bmatrix} R_n & a_n \\ a_n^* & r_{n+1,n+1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} L_n & 0 \\ a_n^* L_n^{-*} & l_{n+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_n^* & L_n^{-1} a_n \\ 0 & l_{n+1} \end{bmatrix} \quad (2.7) \\ &= L_{n+1} L_{n+1}^*, \end{aligned}$$

donde  $l_{n+1} \in \mathbb{R}_+$  y  $l_{n+1}^2 = r_{n+1,n+1} - a_n^* L_n^{-*} L_n^{-1} a_n$ . Así pues, la matriz  $L_{n+1}$  es triangular inferior con elementos diagonales positivos y, por consiguiente, (2.7) es la factorización de Cholesky de  $R_{n+1}$ .

Por otra parte,  $g_n = L_n^* e_0 = [r_{0,0}^{1/2}, 0, \dots, 0]^t$ . Determinaremos, a continuación,  $F_{n+1}$ . Dado que, de acuerdo

con (2.3), podemos asumir que

$$F_n = L_n^* (Z_n + \bar{u}_n e_n^t) L_n^{-*},$$

donde  $u_n$  es un vector a determinar en  $\mathbb{C}^{n+1,1}$ , y  $e_n = [0, \dots, 0, 1]^t \in \mathbb{C}^{n+1,1}$ , se sigue que

$$\begin{aligned} F_{n+1} &= L_{n+1}^* (Z_{n+1} + \bar{u}_{n+1} e_{n+1}^t) L_{n+1}^{-*} \\ &= L_{n+1}^* \begin{bmatrix} Z_n & v_n \\ e_n^t & \beta_n \end{bmatrix} L_{n+1}^{-*}, \end{aligned}$$

donde

$$\bar{u}_{n+1} = \begin{bmatrix} v_n \\ \beta_n \end{bmatrix}, \quad v_n \in \mathbb{C}^{n+1,1}, \beta_n \in \mathbb{C}$$

y  $Z_n$  es la matriz de orden  $(n+1) \times (n+1)$  que tiene 1 en la primera subdiagonal y las restantes entradas son nulas.

Utilizando (2.6)

$$\begin{aligned} F_{n+1} &= \begin{bmatrix} L_n^* & L_n^{-1} a_n \\ 0 & l_{n+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_n & v_n \\ e_n^t & \beta_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_n^{-*} & -l_{n+1}^{-1} L_n^{-*} L_n^{-1} a_n \\ 0 & l_{n+1}^{-1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} L_n^* (Z_n - L_n^{-*} L_n^{-1} a_n e_n^t) L_n^{-*} & \\ l_{n+1} e_n^t L_n^{-*} & \beta_n - e_n^t L_n^{-*} L_n^{-1} a_n \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

donde

$$s_n = l_{n+1}^{-1} (L_n^* v_n + \beta_n L_n^{-*} a_n - L_n^* L_n^{-1} a_n e_n^t).$$

Sin más que escoger

$$\bar{u}_n = L_n^{-*} L_n^{-1} a_n = R_n^{-1} a_n \quad (2.8)$$

de manera que

$$F_{n+1} = \begin{bmatrix} F_n & s_n \\ l_{n+1} e_n^t L_n^{-*} & \beta_n - e_n^t L_n^{-*} L_n^{-1} a_n \end{bmatrix}.$$

Así pues, hemos obtenido explícitamente  $F_{n+1}$  y  $g_{n+1}$  satisfaciendo las condiciones de anidamiento (2.6).

Es importante reseñar que las matrices  $F_n$  son Hessenberg superiores, esto es, las entradas por debajo de la primera subdiagonal son nulas. Además, la elección de  $u_n$  en (2.8) tiene una importancia especial. De hecho

$$\begin{aligned} [-u_n^t, 1] R_{n+1} &= [-u_n^t, 1] \begin{bmatrix} R_n & a_n \\ a_n^* & r_{n+1,n+1} \end{bmatrix} \\ &= [0, \dots, 0, l_{n+1}^2]. \end{aligned}$$

Esto significa que el vector fila  $[-u_n^t, 1] \in \mathbb{C}^{1,n+2}$  define un polinomio mónico de grado  $n+1$  que es ortogonal a  $\mathbb{F}_n$  respecto al producto escalar asociado a la matriz de Gram  $R$ .

Obsérvese que  $F_n = M_n^*$ , de acuerdo con la notación (2.5).

### 3. Polinomios ortogonales en el círculo unidad y transformaciones espectrales

Sea  $F : \Omega \subset \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$  una función compleja que es analítica en un entorno de  $z = 0$ , i. e.

$$F(z) = c_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} c_k z^k, \quad (3.1)$$

donde  $c_0 \in \mathbb{R}$ ,  $c_k \in \mathbb{C}$  para  $k \in \mathbb{N}$  y  $\limsup |c_k|^{1/k} < \infty$ . A dicha función le podemos asociar un funcional lineal  $\mathcal{L}_F$  definido en el espacio de los polinomios de Laurent



$\Lambda = \text{span} \{z^k : k \in \mathbb{Z}\}$  de manera que

$$\mathcal{L}_F(z^k) = c_{-k}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

donde asumimos que  $c_{-k} = \bar{c}_k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ .  $\mathcal{L}_F$  define una aplicación bilineal  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  en el espacio  $\mathbb{P}$  de los polinomios con coeficientes complejos de la siguiente forma

$$\langle p, q \rangle = \mathcal{L}_F(p(z)q(z^{-1})).$$

La aplicación bilineal  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  satisface las propiedades (i) y (ii) de los productos escalares introducidos en la sección precedente. Si, además, se satisfacen (iii) diremos que  $\mathcal{L}_F$  es un funcional definido positivo. En este caso, existe una medida positiva no trivial  $\mu$  soportada en la circunferencia unidad de manera que

$$F(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} d\mu. \quad (3.2)$$

**Definición 3.1** ([4], [21]). Una función compleja  $F$  que admite una representación de la forma (3.2) donde  $\mu$  es una medida positiva se denomina función de Carathéodory (C-función).

Es inmediato probar que  $F$  es C-función si y sólo si  $F$  es analítica en  $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$  y  $\Re(F(z)) > 0$  para  $|z| < 1$ .

De acuerdo con este resultado,  $F$  es una C-función si y sólo si  $\frac{1}{F}$  es una C-función.

La matriz de momentos  $R$  asociada a la forma bilineal  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  determinada por un funcional lineal satisface la propiedad

$$r_{k,j} = \langle z^k, z^j \rangle = \langle z^{k-j}, 1 \rangle = c_{j-k},$$

esto es, las entradas de cada subdiagonal son invariantes. La matriz  $R$  se denomina matriz de Toeplitz (ver [8]).

Si asumimos que las submatrices principales  $R_n$  de  $R$  son no singulares para todo  $n \in \mathbb{N}$ , el funcional  $\mathcal{L}_F$  se denomina cuasi-definido. En este caso, existe una única sucesión de polinomios mónicos  $\{\Phi_n\}_{n \geq 0}$ , con  $\deg \Phi_n = n$ , de manera que

$$\begin{aligned} \langle \Phi_n, z^k \rangle &= 0, & k &= 0, 1, \dots, n-1 \text{ y} \\ \langle \Phi_n, z^n \rangle &= d_n \neq 0, & n &\in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

La familia  $\{\Phi_n\}_{n \geq 0}$  se denomina sucesión de polinomios ortogonales mónicos respecto al funcional  $\mathcal{L}_F$  (ver [4], [12]).

**Proposición 3.2** ([4], [23], [25]). La sucesión  $\{\Phi_n\}_{n \geq 0}$  satisface dos tipos de relaciones de recurrencia

(i) *Recurrencia ascendente:*

$$\Phi_{n+1}(z) = z\Phi_n(z) + \Phi_{n+1}(0)\Phi_n^*(z), \quad (3.3)$$

(ii) *Recurrencia descendente*

$$\Phi_{n+1}(z) = (1 - \Phi_{n+1}(0)z^{-1})z\Phi_n(z) + \Phi_{n+1}(0)\Phi_{n+1}^*(z), \quad (3.4)$$

donde  $\Phi_n^*(z) = z^n \overline{\Phi_n(\bar{z}^{-1})}$

Las evaluaciones  $\Phi_{n+1}(0)$  de los polinomios ortogonales en  $z = 0$  se denominan *coeficientes de reflexión*.

Una demostración de este resultado utilizando los generadores de espacios de estado de la matriz de Toeplitz  $R$  aparece en [14]. Sin embargo, utilizando el hecho de que el operador de multiplicación por  $z$  es unitario respecto a la forma bilineal  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  se puede dar una demostración alternativa.

**Lema 3.3.** Si  $J_n \in \mathbb{C}^{n+1, n+1}$  es una matriz con 1 en la anti-diagonal principal y las restantes entradas son nulas, entonces

$$J_n \bar{R}_n J_n = R_n$$

*Demostración.* Es inmediata teniendo en cuenta que  $R_n$  es una matriz Toeplitz y hermitiana.  $\square$

**Lema 3.4.**

$$\begin{aligned} \langle \Phi_n^*, z^k \rangle &= 0, & k &= 1, 2, \dots, n, \\ \langle \Phi_n^*, 1 \rangle &= d_n. \end{aligned}$$

*Demostración.* Si  $\Phi_n(z) = z^n + a_{n,1}z^{n-1} + \dots + a_{n,n}$  entonces tenemos

$$[a_{n,n}, \dots, a_{n,1}, 1]R_n = [0, 0, \dots, 0, d_n].$$

Considerando conjugados

$$[\bar{a}_{n,n}, \dots, \bar{a}_{n,1}, 1] \bar{R}_n = [0, 0, \dots, 0, d_n].$$

$$[1, \bar{a}_{n,1}, \dots, \bar{a}_{n,n}] J_n \bar{R}_n = [0, 0, \dots, 0, d_n].$$

Multiplicando a la derecha por  $J_n$

$$[1, \bar{a}_{n,1}, \dots, \bar{a}_{n,n}] R_n = [d_n, 0, \dots, 0].$$

De aquí se sigue el enunciado.  $\square$

*Demostración de la proposición 3.2.*

(i)  $\Phi_{n+1}(z) - z\Phi_n(z) \in \mathbb{P}_n$  y, además,

$$\langle \Phi_{n+1}(z) - z\Phi_n(z), z^k \rangle = 0,$$

para  $k = 1, 2, \dots, n$ . Por tanto,  $\Phi_{n+1}(z) - z\Phi_n(z) = \lambda_n \Phi_n^*(z)$ . Evaluando esta igualdad en  $z = 0$  se tiene  $\lambda_n = \Phi_{n+1}(0)$ , de donde se sigue el enunciado.

(ii)  $\Phi_{n+1}(z) - \Phi_{n-1}(0)\Phi_{n+1}^*(z) \in z^{\mathbb{P}_n}$  y, además,  
 $\langle \Phi_{n+1}(z) - \Phi_{n+1}(0)\Phi_{n+1}^*(z), z^k \rangle = 0,$   
 para  $k = 1, 2, \dots, n$ . Por tanto,  
 $\Phi_{n+1}(z) - \Phi_{n+1}(0)\Phi_{n+1}^*(z) = \xi_n z \Phi_n(z).$  (3.5)

Identificando los coeficientes de  $z^{n-1}$  en ambos miembros de la igualdad anterior, se tiene  $\xi_n = 1 - |\Phi_{n+1}(0)|^2$ , de donde se sigue el enunciado.  $\square$

**Corolario 3.5.**

$$\frac{d_{n+1}}{d_n} = 1 - |\Phi_{n+1}(0)|^2, \quad n \in \mathbb{N}.$$

*Demostración.* Es una consecuencia inmediata de multiplicar los dos miembros de la igualdad (3.5) por  $z\Phi_n(z)$  y aplicar el producto escalar.  $\square$

De aquí se sigue que  $|\Phi_{n-1}(0)| \neq 1$ . Recíprocamente, dada una sucesión  $\{a_n\}_{n \geq 0}$  de números complejos tales que  $|a_n| \neq 1$  existe un único funcional lineal  $\mathcal{L}_F$  tal que la correspondiente sucesión de polinomios ortogonales mónicos  $\{\Phi_n\}_{n \geq 0}$  satisface  $\Phi_{n+1}(0) = a_n$ . Para ello, basta utilizar la recurrencia ascendente y construir la familia de polinomios mónicos  $\{\Phi_n\}_{n \geq 0}$  de manera que los momentos se determinan de forma recurrente a partir de

$$\langle z\Phi_n(z), 1 \rangle = -\Phi_{n+1}(0)d_n,$$

esto es,

$$c_{-n-1} - a_{n,1}c_{-n} + \dots + a_{n,n}c_{-1} = -\Phi_{n+1}(0)d_n,$$

para  $n \in \mathbb{N}$  con  $d_0 = c_0$ .

**Definición 3.6** ([4], [23]). *Los polinomios mónicos  $\Omega_n$  de grado  $n$  definidos mediante*

$$\Omega_n(z) = \frac{1}{c_0} \mathcal{L}_F \left( \frac{y+z}{y-z} (\Phi_n(y) - \Phi_n(z)) \right) \quad (3.6)$$

se denominan polinomios de segunda especie asociados al funcional  $\mathcal{L}_F$ .

Es un sencillo ejercicio comprobar que

$$\Omega_{n+1}(z) - z\Omega_n(z) - \Phi_{n+1}(0)\Omega_n^*(z)$$

y, por tanto,  $\{\Omega_n\}_{n \geq 0}$  es una sucesión de polinomios ortogonales mónicos respecto a un funcional lineal  $\mathcal{L}_{\tilde{F}}$ .

**Proposición 3.7** ([21]).

(i)  $\begin{cases} F(z)\Phi_n(z) - \Omega_n(z) &= O(z^n), \\ F(z)\Phi_n^*(z) - \Omega_n^*(z) &= O(z^{n+1}). \end{cases}$   
 (ii)  $\tilde{F}(z) = \frac{1}{F(z)}.$

De esta forma, aparece un primer ejemplo de lo que denominaremos transformación espectral de funcionales lineales  $\mathcal{L}_F$ .

**Definición 3.8.** *Dada una función  $F$  analítica en un entorno de  $z = 0$  diremos que  $\tilde{F}$ , función analítica en un entorno de  $z = 0$ , es una transformación racional de  $F$  si existen polinomios  $A, B, C, D$  tales que*

$$\tilde{F}(z) = \frac{A(z)F(z) + B(z)}{C(z)F(z) + D(z)}, \quad (3.7)$$

con  $A(z)D(z) - B(z)C(z) \neq 0$ .

Si  $\{\Phi_n\}_{n \geq 0}$  es una sucesión de polinomios ortogonales mónicos respecto a  $\mathcal{L}_F$ , parece natural analizar las condiciones necesarias y suficientes para la existencia de una sucesión de polinomios ortogonales mónicos respecto a  $\mathcal{L}_{\tilde{F}}$ . Este es un problema abierto.

Mostraremos a continuación algunos ejemplos de transformaciones racionales.

**3.1. Transformación de Christoffel.** Considerese un funcional lineal  $v$  tal que la forma bilineal asociada satisface

$$\langle y, q \rangle_v = \langle (z-a)y, (z-a)q \rangle_{\mathcal{L}_v}, \quad a \in \mathbb{C}. \quad (3.8)$$

$v = C_a(\mathcal{L}_F)$  se denomina transformación canónica de Christoffel de  $\mathcal{L}_F$ .

En [3] y [15] se han presentado condiciones necesarias y suficientes para la existencia de una sucesión de polinomios mónicos ortogonales respecto a  $v$ . De hecho

**Proposición 3.9** ([3], [15]).  *$v$  es cuasi-definido si y sólo si  $K_n(a, a) \neq 0, n \in \mathbb{N}$ , donde*

$$K_n(z, y) = \sum_{j=0}^n \frac{\Phi_j(z)\overline{\Phi_j(y)}}{d_j}.$$

Vcamos que  $\tilde{F}(z) = v_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} v_k z^k$ , donde  $v_{-k} = v(z^k)$  es una transformación racional de  $F$ .

$$\begin{aligned} v_{-k} &= v(z^k) = \langle z^k, 1 \rangle_v \\ &= \langle (z-a)z^k, z-a \rangle_{\mathcal{L}_v} = \langle z^{k+1} - az^k, z-a \rangle_{\mathcal{L}_F} \\ &= c_{-k} - ac_{-(k-1)} - ac_{-(k+1)} + |a|^2 c_{-k} \\ &= (1 + |a|^2) c_{-k} - ac_{-(k-1)} - \bar{a}c_{-(k+1)}. \end{aligned}$$

De esta manera,

$$\begin{aligned} \tilde{F}(z) &= v_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} v_k z^k \\ &= (1 + |a|^2) c_0 - a c_1 - \bar{a} c_{-1} - 2\bar{a} \sum_{k=1}^{\infty} c_{k-1} z^k \\ &\quad - 2a \sum_{k=1}^{\infty} c_{k+1} z^k + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (1 + |a|^2) c_k z^k \\ &= (1 + |a|^2) F(z) - \bar{a} \left( c_{-1} + 2 \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^{k+1} \right) \\ &\quad - a \left( c_1 + 2 \sum_{k=2}^{\infty} c_k z^{k-1} \right) \\ &= (1 + |a|^2) F(z) - \bar{a} \left( c_{-1} + z(F(z) + c_0) \right) \\ &\quad - a \left( c_1 + \frac{1}{z} (F(z) - c_0 - 2c_1 z) \right) \\ &= \left( 1 + |a|^2 - \bar{a}z - \frac{a}{z} \right) F(z) + a \left( c_1 + \frac{c_0}{z} \right) \\ &\quad - \bar{a} (c_{-1} + c_0 z). \end{aligned}$$

**Proposición 3.10.**

$$\tilde{F}(z) = \frac{A(z)F(z) + B(z)}{D(z)},$$

donde

$$\begin{aligned} A(z) &= -az^2 + (1 + |a|^2)z - a, \\ B(z) &= -\bar{a}c_0z^2 + (ac_1 - \bar{a}c_{-1})z + ac_0, \\ D(z) &= z. \end{aligned}$$

En el caso definido positivo, iteraciones de estas transformaciones de Christoffel han sido estudiadas en [5] y [11].

**3.2. Transformación de Uvarov.** Considérese un funcional lineal  $v$  tal que la forma bilineal asociada satisface

$$\langle p, q \rangle_v = \langle p, q \rangle_{\mathcal{L}_F} + Mp(a)q(a^{-1}) + \bar{M}p(\bar{a}^{-1})\overline{q(a)}, \quad (3.9)$$

con  $|a| \neq 1$  y  $M \in \mathbb{C}$ .  $v = U_{a,M}(\mathcal{L}_F)$  se denomina transformación canónica de Uvarov de  $\mathcal{L}_F$ .

**Proposición 3.11.**  $v$  es cuasi-definido si y solo si

$$\det \Lambda_n = \begin{vmatrix} K_{n-1}(a, a) & \frac{1}{M} + K_{n-1}(a, \bar{a}^{-1}) \\ \frac{1}{\bar{M}} + K_{n-1}(\bar{a}^{-1}, a) & K_{n-1}(\bar{a}^{-1}, \bar{a}^{-1}) \end{vmatrix} \neq 0 \quad (3.10)$$

para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

*Demostración.* Supongamos que  $v$  es cuasi-definido y sea  $\{V_n\}_{n \geq 0}$  la sucesión de polinomios ortogonales mónicos asociada. Entonces

$$V_n(z) = \Phi_n(z) + \sum_{j=0}^{n-1} \lambda_{n,j} \Phi_j(z),$$

donde

$$\begin{aligned} \lambda_{n,j} &= \frac{\langle V_n, \Phi_j \rangle_{\mathcal{L}_F}}{d_j} \\ &= - \frac{MV_n(a)\overline{\Phi_j(a^{-1})} - \bar{M}V_n(\bar{a}^{-1})\overline{\Phi_j(a)}}{d_j}. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} V_n(z) &= \Phi_n(z) - MV_n(a)K_{n-1}(z, \bar{a}^{-1}) \\ &\quad - \bar{M}V_n(\bar{a}^{-1})K_{n-1}(z, a). \end{aligned} \quad (3.11)$$

Evaluando la anterior igualdad en  $z = a$  y  $z = \bar{a}^{-1}$ , respectivamente,

$$\begin{aligned} V_n(a) (1 + MK_{n-1}(a, \bar{a}^{-1})) + \\ \bar{M}V_n(\bar{a}^{-1})K_{n-1}(a, a) \\ = \Phi_n(a)MV_n(a)K_{n-1}(\bar{a}^{-1}, \bar{a}^{-1}) + \\ V_n(\bar{a}^{-1}) (1 + \bar{M}K_{n-1}(\bar{a}^{-1}, a)) \\ = \Phi_n(\bar{a}^{-1}), \end{aligned}$$

de manera que

$$\begin{aligned} V_n(z) &= \Phi_n(z) - [\bar{M}K_{n-1}(z, a), MK_{n-1}(z, \bar{a}^{-1})] \begin{bmatrix} V_n(\bar{a}^{-1}) \\ V_n(a) \end{bmatrix} \\ &= \Phi_n(z) - [K_{n-1}(z, a), K_{n-1}(z, \bar{a}^{-1})] \Lambda_n^{-1} \begin{bmatrix} \Phi_n(a) \\ \Phi_n(\bar{a}^{-1}) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.12)$$

donde

$$\Lambda_n = \begin{bmatrix} K_{n-1}(a, a) & \frac{1}{M} + K_{n-1}(a, \bar{a}^{-1}) \\ \frac{1}{\bar{M}} + K_{n-1}(\bar{a}^{-1}, a) & K_{n-1}(\bar{a}^{-1}, \bar{a}^{-1}) \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

es una matriz no singular dado que  $\langle V_n, V_n \rangle_v = \frac{\det \Lambda_n}{\det \Lambda_{n-1}} d_n \neq 0$ . El recíproco es inmediato sin más que probar que el polinomio mónico  $V_n$  dado por (3.12) verifica

$$\begin{aligned} \langle V_n(z), z^k \rangle_v &= 0, \quad 0 \leq k \leq n-1, \\ \langle V_n(z), z^n \rangle_v &\neq 0. \quad \square \end{aligned}$$

Veamos que  $\tilde{F}(z) = v_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} v_k z^k$ , donde  $v_{-k} = v(z^k)$  es una transformación racional de  $F$ .

$$v_{-k} = \langle z^k, 1 \rangle_v = \langle z^k, 1 \rangle_{\mathcal{L}_F} + Ma^k + \bar{M}\bar{a}^{-k}.$$

Así pues

$$\begin{aligned} \tilde{F}(z) &= c_0 + M + \bar{M} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (c_k + \bar{M}a^k + Ma^{-k}) z^k \\ &= F(z) + \bar{M} \left( 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} a^k z^k \right) + M \left( 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} a^{-k} z^k \right) \\ &= F(z) + \bar{M} \frac{1 + \bar{a}z}{1 - \bar{a}z} + M \frac{a + z}{a - z} \\ &= F(z) + \frac{a(M + \bar{M}) + (1 - |a|^2)(M - \bar{M})z - \bar{a}(M + M)z^2}{(z - a)(\bar{a}z - 1)}. \end{aligned}$$

**Proposición 3.12.**

$$\tilde{F}(z) = \frac{A(z)F(z) + B(z)}{D(z)},$$

donde

$$\begin{aligned} A(z) &= D(z) = (z - a)(\bar{a}z - 1), \\ B(z) &= (a - \bar{a}z^2)(M + \bar{M}) + (1 - |a|^2)(M - \bar{M})z. \end{aligned}$$

**3.3. Transformación de Geronimus.** Considérese un funcional lineal  $v$  tal que la forma bilineal asociada satisface

$$\langle (z - a)p, (z - a)q \rangle_v = \langle p, q \rangle_{\mathcal{L}_F}, \quad a \neq 0. \quad (3.14)$$

$v = G_a(\mathcal{L}_F)$  se denomina transformada canónica de Geronimus de  $\mathcal{L}_F$ . Entonces

$$\begin{aligned} c_k &= \langle 1, z^k \rangle_{\mathcal{L}_F} = \langle z - a, z^k(z - a) \rangle_v \\ &= v_k(1 + |a|^2) - av_{k+1} - \bar{a}v_{k-1}, \quad k \geq 0. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Haciendo  $s_k = \frac{c_k}{\bar{a}^k}$ ,  $t_k = \frac{v_k}{\bar{a}^k}$ , la anterior expresión resulta ser

$$s_k = (1 + |a|^2)t_k - |a|^2 t_{k-1} - t_{k+1}, \quad k \geq 0,$$

de modo que

$$s_k = t_k - t_{k-1} - |a|^2(t_{k+1} - t_k), \quad k \geq 0.$$

Si hacemos  $q_k = t_k - t_{k-1}$ ,  $k \geq 0$ ,

$$s_k = q_k - |a|^2 q_{k-1}, \quad k \geq 0,$$

y, por tanto,

$$\begin{aligned} q_k &= \frac{q_0 - s_0 - |a|^2 s_1 - \dots - |a|^{2k-2} s_{k-1}}{|a|^{2k}} \\ &= \frac{q_0 - c_0 - ac_1 - \dots - a^{k-1} c_{k-1}}{|a|^{2k}}, \quad k \geq 1, \end{aligned} \quad (3.16)$$

así como

$$\begin{aligned} q_0 &= t_0 - t_{-1} = v_0 - \bar{a}v_1 \\ q_1 &= \frac{q_0 - c_0}{|a|^2} = t_1 - t_0 = \frac{v_1}{\bar{a}} - v_0. \end{aligned}$$

$q_0$  aparece como un parámetro libre. De esta forma

$$\begin{aligned} v_0 - av_1 &= \bar{q}_0 \\ v_0 - \frac{v_1}{\bar{a}} &= \frac{c_0 - q_0}{|a|^2} \end{aligned} \quad (3.17)$$

y, por tanto,

$$(1 - |a|^2)v_0 = 2\Re c(q_0) - c_0,$$

esto es,  $v_0 \in \mathbb{R}$ . Si asumimos  $|a| \neq 1$ ,  $v_0$  queda unívocamente determinado y de (3.17) deducimos  $v_1$ . Reiterando (3.16) se sigue que

$$\frac{v_k}{\bar{a}^k} = v_0 - \sum_{j=1}^k q_j, \quad k \geq 2.$$

Por tanto, disponemos de un grado de libertad que es la elección de  $q_0$ . Por otra parte, multiplicando en (3.15) por  $z^k$ ,  $k \geq 1$ , se tiene

$$\begin{aligned} F'(z) &= v_0(1 + |a|^2) - av_1 - \bar{a}v_1 + \\ &2(1 + |a|^2) \sum_{k=1}^{\infty} v_k z^k - 2a \sum_{k=1}^{\infty} v_{k+1} z^k - 2\bar{a} \sum_{k=1}^{\infty} v_{k-1} z^k \\ &- (1 + |a|^2)\tilde{F}(z) - a \left( v_1 + \frac{2}{z} \sum_{k=2}^{\infty} v_k z^k \right) \\ &- \bar{a} \left( \bar{v}_1 + 2z \sum_{k=0}^{\infty} v_k z^k \right) \\ &= (1 + |a|^2)\tilde{F}(z) - a \left( v_1 + \frac{1}{z} (\tilde{F}(z) - v_0 - 2v_1 z) \right) \\ &- \bar{a} \left( \bar{v}_1 + z(v_0 + \tilde{F}(z)) \right) \\ &= (1 + |a|^2)\tilde{F}(z) + a \left( v_1 + \frac{v_0}{z} \right) \frac{a}{z} \tilde{F}(z) \\ &+ a(v_1 + v_0 z) - az\tilde{F}(z) \\ &= \left( 1 + |a|^2 - \frac{a}{z} - \bar{a}z \right) \tilde{F}(z) + av_1 - \bar{a}v_1 \\ &+ v_0 \left( \frac{a}{z} - \bar{a}z \right) \\ &- \left( 1 + |a|^2 - \frac{a}{z} - \bar{a}z \right) \tilde{F}(z) - v_0 - \bar{q}_0 - \bar{v}_0 + \\ &q_0 + v_0 \left( \frac{a}{z} - \bar{a}z \right). \end{aligned} \quad (3.18)$$

Por tanto,

**Proposición 3.13.**

$$\tilde{F}(z) = \frac{A(z)F(z) + B(z)}{D(z)},$$

donde

$$\begin{aligned} A(z) &= z, \\ B(z) &= \bar{a}v_0z^2 - 2i\Im(q_0)z - av_0, \\ D(z) &= \bar{a}z^2 + (1 + |a|^2)z - a. \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta

$$\begin{aligned} \tilde{F}(z) &= \frac{A(z)}{D(z)}F'(z) + \frac{B(z)}{D(z)} \\ &= \frac{A(z)}{D(z)}F'(z) + \frac{\bar{a}v_0z^2 - 2i\Im(q_0)z - av_0}{-\bar{a}z^2 + (1 + |a|^2)z - a} \\ &= \frac{A(z)}{D(z)}F'(z) \\ &\quad + \frac{\frac{\bar{a}z^2 - a}{1 - |a|^2}(2\Re(q_0) - c_0) - 2i\Im(q_0)z}{\bar{a}z^2 - (1 + |a|^2)z - a} \\ &= \frac{A(z)}{D(z)}F'(z) \\ &\quad + \frac{(\bar{a}z^2 - a)(q_0 + \bar{q}_0 - c_0) + (1 - |a|^2)(q_0 - \bar{q}_0)z}{(1 - |a|^2)(-\bar{a}z^2 + (1 + |a|^2)z - a)} \\ &= \frac{A(z)}{D(z)}F'(z) \\ &\quad + \frac{(\bar{a}z^2 - a)(l_0 + \bar{l}_0) + (1 - |a|^2)(l_0 - \bar{l}_0)z}{-\bar{a}z^2 + (1 + |a|^2)z - a} \end{aligned}$$

con  $l_0 = \frac{\bar{q}_0 - c_0}{1 - |a|^2}$ . En conclusión

$$\begin{aligned} \tilde{F}(z) &= \frac{A(z)}{D(z)}F'(z) \\ &\quad - \frac{(\bar{a}z^2 - a)(l_0 + \bar{l}_0) + (1 - |a|^2)(l_0 - \bar{l}_0)z}{(1 - \bar{a}z)(a - z)} \\ &= \frac{A(z)}{D(z)}F'(z) + M \frac{a + z}{a - z} + \bar{M} \frac{1 + \bar{a}z}{1 - \bar{a}z}, \end{aligned}$$

donde  $M = \bar{l}_0 = \frac{q_0 - c_0}{1 - |a|^2}$ . En el caso definido positivo, un ejemplo de transformación de Geronimus con  $M = 0$  ha sido analizado en [6].

**Proposición 3.14.**

- (i)  $G_a \circ C_a(\mathcal{L}_F) = U_{a, \bar{a}}(\mathcal{L}_F)$ .
- (ii)  $C_a \circ G_a(\mathcal{L}_F) = \mathcal{L}_F$ .

*Demostración.*

(i) Sea  $G$  la función analítica asociada al funcional  $C_a(\mathcal{L}_F)$ . Entonces, de acuerdo con la Proposición 3.10

$$G(z) = \frac{A(z)}{z}F'(z) - \left( \bar{a}c_0z - (ac_1 - \bar{a}\bar{c}_1) - ac_0 \frac{1}{z} \right)$$

donde  $A(z) = -(az - 1)(z - a)$ . Si  $H$  es la función analítica asociada al funcional  $G_a \circ C_a(\mathcal{L}_F)$  de acuerdo con la Proposición 3.13,

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{z}{A(z)}G(z) + M \frac{a + z}{a - z} + \bar{M} \frac{1 + \bar{a}z}{1 - \bar{a}z} \\ &= F'(z) + \frac{\bar{a}c_0z^2 - (ac_1 - \bar{a}\bar{c}_1)z - ac_0}{(\bar{a}z - 1)(z - a)} \\ &\quad + M \frac{a + z}{a - z} + \bar{M} \frac{1 + \bar{a}z}{1 - \bar{a}z} \\ &= F'(z) + \tilde{M} \frac{a + z}{a - z} + \bar{\tilde{M}} \frac{1 + \bar{a}z}{1 - \bar{a}z} \end{aligned}$$

donde

$$\tilde{M} = M - \frac{1}{2} \left( c_0 + \frac{ac_1 - \bar{a}\bar{c}_1}{1 - |a|^2} \right).$$

(ii) Sea  $\tilde{F}$  la función analítica asociada al funcional  $v = G_a(\mathcal{L}_F)$ . Entonces, de acuerdo con la Proposición 3.13

$$\tilde{F}(z) = \frac{z}{A(z)}F'(z) + M \frac{a + z}{a - z} + \bar{M} \frac{1 + \bar{a}z}{1 - \bar{a}z},$$

donde  $A(z) = -(az - 1)(z - a)$ .

Si  $K$  es la función analítica asociada al funcional  $C_a \circ G_a(\mathcal{L}_F)$  de acuerdo con la Proposición 3.10 se tiene

$$\begin{aligned} K(z) &= \frac{A(z)}{z}\tilde{F}(z) - \left( \bar{a}v_0z + (av_1 - \bar{a}\bar{v}_1) - \frac{av_0}{z} \right) \\ &= F'(z) + \frac{A(z)}{z} \left( M \frac{a + z}{a - z} + \bar{M} \frac{1 + \bar{a}z}{1 - \bar{a}z} \right) \\ &\quad - \frac{A(z)}{z} \left( M \frac{a + z}{a - z} + \bar{M} \frac{1 + \bar{a}z}{1 - \bar{a}z} \right) \\ &= F'(z). \end{aligned}$$

Las transformaciones de Christoffel, Uvarov y Geronimus se denominan transformaciones espectrales lineales canónicas. En un caso definido positivo, corresponden a transformaciones de las medidas dadas por

$$\begin{aligned} d\tilde{\mu} &= |e^{i\theta} - a|^2 d\mu, \\ d\tilde{\mu} &= d\mu + M\delta_a + \bar{M}\delta_{a^{-1}}, \quad |a| \neq 1, \\ d\tilde{\mu} &= \frac{d\mu}{|e^{i\theta} - a|^2} + M\delta_a + \bar{M}\delta_{a^{-1}}, \quad |a| \neq 1, \end{aligned}$$

respectivamente.

Ejemplos de transformaciones espectrales racionales propias aparecen en la literatura cuando se perturban los parámetros de reflexión.

**Definición 3.15.** Sea  $\{\Phi_n\}_{n \geq 0}$  una sucesión de polinomios ortogonales mónicos respecto a un funcional cuasi-definido  $\mathcal{L}_\mu$ . Denominaremos polinomios asociados de  $\{\Phi_n\}_{n \geq 0}$  y orden  $N$ ,  $\{\Phi_n^{(N)}\}_{n \geq 0}$ , a los generados por la recurrencia

$$\Phi_{n+1}^{(N)}(z) = z\Phi_n^{(N)}(z) + \Phi_{n+N+1}(0) \left(\Phi_n^{(N)}\right)^*(z). \quad (3.19)$$

Si  $\mathcal{L}_{\mu^{(N)}}$  es el correspondiente funcional de ortogonalidad y  $F^{(N)}$  denota la función analítica asociada, se tiene

**Proposición 3.16** ([21]).

$$F^{(N)}(z) = \frac{A(z)F(z) + B(z)}{C(z)F(z) + D(z)}$$

donde

$$\begin{aligned} A(z) &= \Phi_N(z) + \Phi_N^*(z), \\ B(z) &= \Omega_N(z) - \Omega_N^*(z), \\ C(z) &= \Phi_N(z) - \Phi_N^*(z), \\ D(z) &= \Omega_N(z) + \Omega_N^*(z). \end{aligned}$$

Si consideramos un desplazamiento en los parámetros de reflexión en sentido inverso, se tiene el siguiente resultado

**Proposición 3.17** ([21]). Sean  $b_1, b_2, \dots, b_N$  números complejos con  $|b_k| < 1$ ,  $k = 1, 2, \dots, N$ . Si mediante  $\{\tilde{\Phi}_n\}_{n \geq 0}$  denotamos la sucesión de polinomios ortogonales mónicos generados por los parámetros de reflexión  $\{b_k\}_{k=1}^N \cup \{\tilde{\Phi}_n(0)\}_{n=1}^\infty$ , entonces

$$\tilde{F}(z) = \frac{A(z)F(z) + B(z)}{C(z)F(z) + D(z)}$$

donde

$$\begin{aligned} A(z) &= \tilde{\Omega}_N(z) - \tilde{\Omega}_N^*(z), \\ B(z) &= \tilde{\Omega}_N^*(z) - \tilde{\Omega}_N(z), \\ C(z) &= \tilde{\Phi}_N(z) - \tilde{\Phi}_N^*(z), \\ D(z) &= \tilde{\Phi}_N^*(z) - \tilde{\Phi}_N(z). \end{aligned}$$

Finalmente, si se considera la sucesión de parámetros de reflexión  $\{\lambda\Phi_n(0)\}_{n=1}^\infty$  donde  $|\lambda| = 1$  y, si mediante  $\{\tilde{\Phi}_n(\cdot, \lambda)\}_{n \geq 0}$  denotamos la correspondiente sucesión de polinomios ortogonales mónicos, se tiene

**Proposición 3.18** ([23]).

$$\tilde{F}(z) = \frac{A(z)F(z) + B(z)}{C(z)F(z) + D(z)}$$

donde

$$\begin{aligned} A(z) &= 1 + \lambda, \\ B(z) &= 1 - \lambda, \\ C(z) &= 1 - \lambda, \\ D(z) &= 1 + \lambda. \end{aligned}$$

Esta transformación espectral racional se denomina transformación de Aleksandrov.

#### 4. Polinomios ortogonales en el círculo unidad y factorización de matrices Hessenberg

A continuación, estudiaremos la expresión explícita de la matriz de Hessenberg inferior  $M$  introducida en (2.1), que representa la matriz del operador de multiplicación por  $z$  respecto a la base de polinomios ortonormales asociados a un funcional definido positivo  $\mathcal{L}_F$ .

Teniendo en cuenta que  $\langle \Phi_n, \Phi_n \rangle = d_n > 0$ , denotemos mediante  $\{\varphi_n\}_{n \geq 0}$  la correspondiente familia de polinomios ortonormales, esto es,  $\varphi_n(z) = d_n^{-\frac{1}{2}} \Phi_n(z)$ .

De (3.4) se sigue que

$$\Phi_{n+1}^*(z) = \left(1 - \Phi_{n+1}(0)\right)^2 \Phi_n^*(z) + \overline{\Phi_{n+1}(0)} \Phi_{n+1}(z),$$

esto es, de acuerdo con el corolario 3.5

$$\Phi_{n+1}^*(z) = \frac{d_{n+1}}{d_n} \Phi_n^*(z) + \overline{\Phi_{n+1}(0)} \Phi_{n+1}(z).$$

Por tanto

$$\frac{\Phi_{n+1}^*(z)}{d_{n+1}} = \frac{\Phi_n^*(z)}{d_n} + \frac{\overline{\Phi_{n+1}(0)}}{d_{n+1}} \Phi_{n+1}(z).$$

De aquí deducimos

$$\frac{\Phi_n^*(z)}{d_n} = \sum_{k=0}^n \frac{\overline{\Phi_k(0)} \Phi_k(z)}{d_k}.$$

Sustituyendo en (3.3)

$$z\Phi_n(z) = \Phi_{n-1}(z) - \Phi_{n+1}(0)\Phi_n^*(z)$$

y utilizando polinomios ortonormales, la anterior expresión se convierte en

$$z\varphi_n(z) = \left(\frac{d_{n+1}}{d_n}\right)^{\frac{1}{2}} \varphi_{n+1}(z) - \Phi_{n+1}(0) d_n^{\frac{1}{2}} \sum_{k=0}^n \frac{\overline{\Phi_k(0)} \varphi_k(z)}{d_k^{\frac{1}{2}}}.$$

Así pues, hemos probado

**Proposición 4.1** ([15]). Si  $\mathbf{v}(z) = [\varphi_0(z), \varphi_1(z), \dots]^t$  y  $z\mathbf{v}(z) = M\mathbf{v}(z)$ , entonces las entradas de la matriz  $M$  vienen dadas por

$$m_{k,j} = \begin{cases} -\left(\frac{d_k}{d_j}\right)^{\frac{1}{2}} \Phi_{k+1}(0)\overline{\Phi_j(0)}, & \text{si } 0 \leq j \leq k, \\ \left(\frac{d_{k+1}}{d_k}\right)^{\frac{1}{2}}, & \text{si } j = k + 1, \\ 0, & \text{si } j > k + 1, \end{cases}$$

$k, j = 0, 1, 2, \dots$  Además,

$$MM^* = I,$$

$$M^*M = I - \alpha\mathbf{v}(0)[\mathbf{v}(0)]^*,$$

donde  $\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sum_{k=0}^n |\varphi_k(0)|^2}$ .

Así pues,  $M^*$  es inversa a la derecha de  $M$ , mientras que  $M^*M - I$  es una matriz de rango 1, a lo más.

Es bien conocido [23] que  $\alpha = 0$  si y solo si  $\log \mu' \notin L^1\left(\frac{d\theta}{2\pi}\right)$ . En este caso,  $M$  es unitaria. Por otra parte, si consideramos la submatriz principal  $M_n$  de orden  $(n+1) \times (n+1)$  se tiene

**Corolario 4.2.** Si  $\mathbf{v}_n(z) = [\varphi_0(z), \varphi_1(z), \dots, \varphi_n(z)]^t$ , entonces las entradas de la matriz  $M_n$  vienen dadas por

$$m_{k,j} = \begin{cases} -\left(\frac{d_k}{d_j}\right)^{\frac{1}{2}} \Phi_{k+1}(0)\overline{\Phi_j(0)}, & \text{si } 0 \leq j \leq k, \\ \left(\frac{d_{k+1}}{d_k}\right)^{\frac{1}{2}}, & \text{si } j = k + 1, \\ 0, & \text{si } j > k + 1. \end{cases}$$

$k = 0, 1, \dots, n,$   
 $k = 0, 1, \dots, n-1,$

con  $k, j = 0, 1, 2, \dots, n$ . Además,

$$M_n M_n^* = I_{n+1} - \frac{d_{n+1}}{d_n} e_n e_n^t,$$

$$M_n^* M_n = I_{n+1} - d_{n+1} \mathbf{v}_n(0) \mathbf{v}_n(0)^*.$$

*Demostración.* Basta efectuar los correspondientes productos escalares y observar que los vectores fila son ortonormales salvo el último que tiene por cuadrado de su norma  $1 - \frac{d_{n+1}}{d_n}$ .

En el cálculo con los productos escalares de los vectores columnas se utiliza, básicamente, la identidad del Corolario 3.5.  $\square$

Si consideramos la sucesión  $\{\tilde{\varphi}_n\}_{n \geq 0}$  de polinomios ortonormales correspondiente a la transformada de

Christoffel  $v$  del funcional definido positivo  $\mathcal{L}_F$  y denotamos por  $\tilde{M}$  la matriz de Hessenberg asociada a la sucesión  $\{\tilde{\varphi}_n\}_{n \geq 0}$  abordaremos a continuación el análisis de la relación existente entre  $\tilde{M}$  y  $M$ .

**Proposición 4.3** ([15]).

$$(z - Va)\tilde{\varphi}_n(z) = \frac{b_n}{b_{n+1}} \varphi_{n+1}(z) - \sum_{j=0}^n \frac{\varphi_{n+1}(a)\overline{\varphi_j(a)}}{b_n b_{n+1}} \varphi_j(z), \tag{4.1}$$

donde  $b_n = K_n(a, a)^{\frac{1}{2}}$ .

De esta forma, si  $\mathbf{v}(z) = [\varphi_0(z), \varphi_1(z), \dots]^t$  y  $\tilde{\mathbf{v}}(z) = [\tilde{\varphi}_0(z), \tilde{\varphi}_1(z), \dots]^t$ , entonces (4.1) se escribe en términos matriciales

$$(z - a)\tilde{\mathbf{v}}(z) = S\mathbf{v}(z), \tag{4.2}$$

donde  $S$  es una matriz Hessenberg inferior con entradas

$$s_{k,j} = \begin{cases} -\frac{\varphi_{k+1}(a)\overline{\varphi_j(a)}}{b_k b_{k+1}}, & \text{si } 0 \leq j \leq k, \\ \frac{b_k}{b_{k+1}}, & \text{si } j = k + 1, \\ 0, & \text{si } j > k + 1. \end{cases}$$

La matriz  $S$  satisface

**Proposición 4.4** ([15]). (i)  $SS^* = I$ ,

(ii)  $S^*S = I - \beta\mathbf{v}(a)\mathbf{v}(a)^*$ ,

donde  $\beta = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{K_n(a, a)}$ .

**Corolario 4.5** ([15]). Sea  $S_n$  la submatriz principal de orden  $(n+1) \times (n+1)$  de  $S$ , entonces

(i)  $S_n S_n^* = I_{n+1} - \left(\frac{b_n}{b_{n+1}}\right)^2 e_n e_n^t$ .

(ii)  $S_n^* S_n = I_{n+1} - \frac{1}{b_{n+1}^2} \mathbf{v}_n(a)\mathbf{v}_n(a)^*$

Para obtener la relación entre las matrices de Hessenberg  $M$  y  $\tilde{M}$ , introducimos la matriz triangular inferior  $L$  de cambio de base  $\mathbf{v}(z) = L\tilde{\mathbf{v}}(z)$ .

**Proposición 4.6.**

(i)  $L = (M - aI)S^*$ .

(ii)  $\tilde{M} - aI = SL$ .

*Demostración.*

(i) Dado que

$$(z - a)\tilde{\mathbf{v}}(z) = (z - a)L^{-1}\mathbf{v}(z),$$

de (4.2) se sigue que

$$S\mathbf{v}(z) = L^{-1}(M - aI)\mathbf{v}(z).$$

Por tanto,  $LS = M - aI$  y puesto que  $SS^* = I$ , se sigue el resultado.

(ii) Puesto que  $(z - a)\tilde{\mathbf{v}}(z) = S\mathbf{v}(z)$ , entonces

$$\left(\tilde{M} - aI\right)\tilde{\mathbf{v}}(z) = S\mathbf{v}(z) = SL\tilde{\mathbf{v}}(z),$$

de donde se sigue el enunciado.  $\square$

Ahora bien, si consideramos la factorización QR de la matriz  $(M - aI)^*$ , donde  $QQ^* = I$  y  $R$  es una matriz triangular superior con entradas diagonales positivas, se tiene

**Proposición 4.7.** Si  $(M - aI)^* = QR$ , entonces

$$\tilde{M} - aI = Q^*R^*.$$

*Demostración.* Teniendo en cuenta que

$$\langle \mathbf{v}\mathbf{v}^t \rangle_{\mathcal{L}_F} = \langle L\tilde{\mathbf{v}}\tilde{\mathbf{v}}^tL^t \rangle_{\mathcal{L}_F} = LL^*,$$

así como

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{v}\mathbf{v}^t \rangle_{\mathcal{L}_F} &= \langle (z - a)\mathbf{v}(z - a)\mathbf{v}^t \rangle_{\mathcal{L}_F} \\ &= (M - aI)(M - aI)^* \\ &= R^*R, \end{aligned}$$

de la unicidad de la factorización de Cholesky de una matriz se sigue que  $L = R^*$ . Por otra parte,

$$\begin{aligned} \tilde{M} - aI &= \left(\tilde{M} - aI\right)\langle \tilde{\mathbf{v}}\tilde{\mathbf{v}}^t \rangle_{\mathcal{L}_F} \\ &= \langle (z - a)\tilde{\mathbf{v}}\tilde{\mathbf{v}}^t \rangle_{\mathcal{L}_F} \\ &= \langle (z - a)L^{-1}\mathbf{v}\mathbf{v}^tL^{-t} \rangle_{\mathcal{L}_F} \\ &= L^{-1}\langle (z - a)\mathbf{v}\mathbf{v}^t \rangle_{\mathcal{L}_F}L^{-t} \\ &= L^{-1}(M - aI)\langle \mathbf{v}\mathbf{v}^t \rangle_{\mathcal{L}_F}L^{-t} \\ &= L^{-1}(M - aI)LL^*L^{-t} \\ &= L^{-1}R^*Q^*L = Q^*R^* \quad \square \end{aligned}$$

**Ejemplo 4.8.** Sea  $\mathcal{L}_F$  el funcional lineal asociado a la medida de Lebesgue normalizada de manera que

$$\langle p, q \rangle_{\mathcal{L}_F} = \int_{-\pi}^{\pi} p(e^{i\theta})\overline{q(e^{i\theta})} \frac{d\theta}{2\pi}.$$

Es bien conocido que la sucesión de polinomios ortonormales respecto a  $\mathcal{L}_F$  es  $\{z^n\}_{n \geq 0}$ . Si consideramos la

transformada de Christoffel  $v$  de  $\mathcal{L}_F$  para  $a = 1$ , determinaremos la matriz de Hessenberg de la familia de polinomios ortonormales  $\{\tilde{\varphi}_n\}_{n \geq 0}$  correspondiente al funcional  $v$ . Teniendo en cuenta que

$$M - aI = \begin{bmatrix} -a & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & a & 1 & \cdots \\ 0 & 0 & -a & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}.$$

La factorización QR de la matriz  $(M - aI)^*$  es tal que

$$r_{k,j} = \begin{cases} \left(\frac{k+2}{k+1}\right)^{\frac{1}{2}}, & \text{si } j = k, \\ -\frac{1}{a} \left(\frac{k+1}{k+2}\right)^{\frac{1}{2}}, & \text{si } j = k + 1, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

$$q_{k,j} = \begin{cases} \frac{-1}{a^{j-k-1} \sqrt{(j+1)(j-2)}}, & \text{si } j \geq k, \\ \left(\frac{k}{k-1}\right)^{\frac{1}{2}}, & \text{si } j = k - 1, \\ 0, & \text{si } j < k - 1. \end{cases}$$

Por tanto

$$\tilde{M} - aI = Q^*R^* = (\tilde{m}_{k,j} - a\delta_{k,j})_{k,j \geq 0}^{\text{ix}},$$

donde

$$\tilde{m}_{k,j} = \begin{cases} 0, & \text{si } j \geq k + 2, \\ \frac{\sqrt{(k-1)(k+3)}}{k+2}, & \text{si } j = k + 1, \\ -\frac{a}{(k+1)(k+2)}, & \text{si } j = k, \\ -\frac{a^{k-j-1}}{\sqrt{(k+1)(k+2)(j+1)(j+2)}}, & \text{si } j < k. \end{cases}$$

Si consideramos la sucesión  $\{\tilde{\varphi}_n\}_{n \geq 0}$  de polinomios ortonormales correspondiente a la transformada de Aleksandrov  $v$  del funcional definido positivo  $\mathcal{L}_F$  y denotamos por  $\tilde{M}$  la matriz de Hessenberg asociada a la sucesión  $\{\tilde{\varphi}_n\}_{n \geq 0}$ , abordamos a continuación el análisis de la relación existente entre  $M$  y  $\tilde{M}$ .

Puesto que  $\tilde{\Phi}_k(0) = \lambda\Psi_k(0)$ ,  $|\lambda| = 1$ , deducimos del Corolario 3.5 que  $\frac{\tilde{d}_{n+1}}{\tilde{d}_n} = \frac{d_{n+1}}{d_n}$ ,  $n \geq 0$ , junto con

$$\tilde{d}_0 = \frac{(1 + \lambda)d_0 - (1 - \lambda)}{(1 - \lambda)d_0 - (1 + \lambda)}. \text{ Esto significa que } \tilde{d}_n = \frac{\tilde{d}_0}{d_0}d_n.$$



De acuerdo con la Proposición 4.1, las entradas de la matriz  $\tilde{M}$  son las de la matriz  $M$  salvo las que se encuentran en la primera columna que resultan de multiplicar la primera columna de  $M$  por  $\lambda$ . Así pues

**Proposición 4.9.**

$$\tilde{M} = M \operatorname{diag}(\lambda, 1, 1, \dots),$$

con  $|\lambda| = 1$ .

Finalmente, si consideramos la sucesión  $\{\tilde{\varphi}_n\}_{n \geq 0}$  de polinomios ortonormales correspondiente a la transformación de asociación de orden  $N$  definida en la sección 3, sabemos que  $\tilde{\Phi}_n(0) = \Phi_{n+N}(0)$ ,  $n = 1, 2, \dots$

Dado que

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{d}_{n+1}}{\tilde{d}_n} &= 1 - \left| \tilde{\Phi}_{n+1}(0) \right|^2 \\ &= 1 - \left| \Phi_{n+N+1}(0) \right|^2 \\ &= \frac{d_{n+N+1}}{d_{n+N}}, \quad n \geq 0, \end{aligned}$$

de acuerdo con la Proposición 4.1, las entradas de la matriz de Hessenberg  $\tilde{M}$  correspondiente a la sucesión  $\{\tilde{\varphi}_n\}_{n \geq 0}$  vienen dadas por

$$\tilde{m}_{k,j} = \begin{cases} - \left( \frac{\tilde{d}_k}{\tilde{d}_j} \right)^{\frac{1}{2}} \tilde{\Phi}_{k+1}(0) \overline{\tilde{\Phi}_j(0)} & \text{si } 0 \leq j \leq k, \\ \left( \frac{\tilde{d}_{k+1}}{\tilde{d}_k} \right)^{\frac{1}{2}}, & \text{si } j = k+1, \\ 0, & \text{si } j > k+1. \end{cases}$$

Salvo las entradas de la primera columna, que satisfacen  $\tilde{m}_{k,0} = m_{k+N,0}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , las restantes entradas satisfacen

$$\tilde{m}_{k,j} = \begin{cases} m_{k+N,j+N}, & \text{si } 1 \leq j \leq k, \\ m_{k+N,k+N+1}, & \text{si } j = k+1, \\ 0, & \text{si } j > k+1. \end{cases}$$

Por tanto,

**Proposición 4.10.**

$$\tilde{M} \operatorname{diag}(\Phi_N(0), 1, 1, \dots) = (Z^t)^N M Z^N, \quad N \geq 1,$$

donde  $Z$  es la matriz infinita con 1 en la subdiagonal principal inferior y las restantes entradas son nulas.

## 5. Polinomios ortogonales y espacios de Sobolev

El estudio de polinomios ortogonales respecto a un producto escalar de Sobolev

$$\langle p, q \rangle_S = \sum_{k=0}^N \int_{I_k} p^{(k)}(x) q^{(k)}(x) d\mu_k(x), \quad (5.1)$$

donde  $\mu = (\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_N)$  es un vector de medidas positivas de Borel donde el soporte de  $\mu_k$ ,  $k = 0, 1, \dots, N$  es un subconjunto  $I_k$  de la recta real y  $p, q \in \mathbb{P}$ , aparece en diversas áreas de Matemática Aplicada.

(i) En ajuste por mínimos cuadrados con condiciones de suavidad, dichos polinomios constituyen la base natural en los subespacios de aproximación.

(ii) En series de Fourier, el análisis de los fenómenos de Gibbs se puede mejorar utilizando tales polinomios tal y como se muestra en experimentos numéricos [9].

(iii) Finalmente, la utilización de dichos polinomios en el tratamiento de métodos espectrales para problemas con valores en la frontera es más competitivo que la consideración de polinomios ortogonales estándar.

Si denotamos mediante  $R$  la matriz de Gram del producto escalar (5.1) respecto a la base canónica  $\{x^n\}_{n \geq 0}$  y mediante  $R^{(j)}$  la matriz de Gram del producto escalar estándar relativo a la medida  $\mu_j$ ,  $j = 0, 1, \dots, N$ , entonces

**Proposición 5.1.**

$$R = \sum_{k=0}^N Z^k D_k R^{(k)} D_k (Z^t)^k, \quad (5.2)$$

donde  $D_k = \operatorname{diag} \left( d_j^{(k)} \right)_{j=0}^{\infty}$  con  $d_j^{(k)} = k! \binom{k+j}{k}$ ,  $k = 0, 1, \dots$

Las matrices  $R^{(k)}$  son matrices de Hankel.

Si consideramos la sucesión de polinomios ortogonales respecto a (5.1), las entradas de la matriz de Hessenberg asociada no se pueden determinar de manera explícita como hemos realizado en la sección 3 para el caso de los polinomios ortonormales en la circunferencia unidad. No obstante, en algunos casos particulares sí que se puede abordar este problema.

Consideremos (5.1) con  $N = 1$  y  $d\mu_1 = \lambda d\tilde{\mu}_1$ . El par de medidas  $(\mu_0, \tilde{\mu}_1)$  se dice *coherente* [10] si las

correspondientes sucesiones de polinomios ortogonales mónicos  $\{P_n\}_{n \geq 0}$  y  $\{S_n\}_{n \geq 0}$  están relacionadas mediante

$$S_n(x) = \frac{P'_{n+1}(x)}{n+1} + b_n \frac{P'_n(x)}{n}, \quad n \geq 1, \tag{5.3}$$

donde  $\{b_n\}_{n \geq 0}$  es una sucesión no nula de números reales.

De aquí se sigue que si  $\{Q_n^\lambda\}_{n \geq 0}$  es la sucesión de polinomios ortogonales mónicos respecto al producto escalar de Sobolev, se tiene

$$P_{n+1}(x) + b_n \frac{n+1}{n} P_n(x) = Q_{n+1}^\lambda(x) + \sum_{j=0}^n a_{n,j} Q_j^\lambda(x),$$

donde

$$a_{n,j} = \frac{\langle P_{n+1}(x) + b_n \frac{n+1}{n} P_n(x), Q_j^\lambda(x) \rangle_S}{\langle Q_j^\lambda(x), Q_j^\lambda(x) \rangle_S} = 0,$$

para  $0 \leq j \leq n-1$  y  $x$

$$a_{n,n} = \frac{\frac{n+1}{n} b_n \int P_n^2(x) d\mu_0}{\langle Q_n^\lambda(x), Q_n^\lambda(x) \rangle_S}.$$

Por tanto, hemos establecido una relación algebraica sencilla entre los polinomios  $\{Q_n^\lambda\}_{n \geq 0}$  y  $\{P_n\}_{n \geq 0}$  de manera que

$$P_n(x) + c_n P_{n-1}(x) = Q_n^\lambda(x) + e_n(\lambda) Q_{n-1}^\lambda(x), \tag{5.4}$$

donde  $c_n = b_{n-1} \frac{n}{n-1}$ ,  $e_n(\lambda) = a_{n-1,n-1}$ ,  $n \geq 2$ . En términos matriciales, si  $\mathbf{a}(x) = [P_0(x), P_1(x), \dots]^t$  y  $\mathbf{q}(x) = [Q_0^\lambda(x), Q_1^\lambda(x), \dots]^t$ , (5.4) resulta ser

$$A\mathbf{a}(x) = B\mathbf{q}(x), \tag{5.5}$$

donde  $A$  y  $B$  son matrices bidiagonales inferiores con entradas diagonales 1.

Por tanto, si  $M$  es la matriz tridiagonal asociada a la familia  $\{P_n\}_{n \geq 0}$ , esto es,  $x\mathbf{a}(x) = M\mathbf{a}(x)$ , y  $\tilde{M}$  es la matriz de Hessenberg asociada a la familia  $\{Q_n^\lambda\}_{n \geq 0}$ , esto es,  $x\mathbf{q}(x) = \tilde{M}\mathbf{q}(x)$  de (5.5) se sigue que

$$AM\mathbf{a}(x) = B\tilde{M}\mathbf{q}(x),$$

esto es,

$$AMA^{-1}B\mathbf{q}(x) = B\tilde{M}\mathbf{q}(x).$$

Por tanto, deducimos el siguiente resultado

**Proposición 5.2.** *Si el par de medidas  $(\mu_0, \tilde{\mu}_1)$  es coherente, la matriz de Hessenberg  $\tilde{M}$  asociada a la familia de polinomios ortogonales mónicos de Sobolev es*

$$\tilde{M} = (B^{-1}A)M(B^{-1}A)^{-1},$$

donde  $A, B$  son las matrices bidiagonales que han sido introducidas en (5.5).

La descripción de todos los pares coherentes de medidas ha sido obtenida en [20]. Esencialmente, una de ellas es la medida de Jacobi o Laguerre y la otra es una transformada espectral lineal de la anterior.

A modo de ejemplo, en el caso Laguerre se tienen tres situaciones

$$(i) \begin{cases} d\mu_0 = (x+a)x^{\alpha-1}e^{-x}dx, \\ d\tilde{\mu}_1 = x^\alpha e^{-x}dx, \quad \alpha > 0, \alpha > 0. \end{cases}$$

$$(ii) \begin{cases} d\mu_0 = e^{-x}dx + M\delta(x), \\ d\tilde{\mu}_1 = e^{-x}dx, \quad M > 0. \end{cases}$$

$$(iii) \begin{cases} d\mu_0 = x^\alpha e^{-x}dx, \\ d\tilde{\mu}_1 = \frac{x^{\alpha+1}e^{-x}}{x+a}dx + M\delta(x+a), \\ \alpha \geq 0, \alpha > -1, M \geq 0. \end{cases}$$

En el caso de Jacobi, se tienen las siguientes situaciones

$$(i) \begin{cases} d\mu_0 = (x+a)(1-x)^{\alpha-1}(1+x)^{\beta-1}dx, \\ d\tilde{\mu}_1 = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta dx, \quad \alpha, \beta > 0, a > -1. \end{cases}$$

$$(ii) \begin{cases} d\mu_0 = (1-x)^{\alpha-1}dx + M\delta(x+1), \\ d\tilde{\mu}_1 = (1-x)^\alpha dx, \quad \alpha > 0, M \geq 0. \end{cases}$$

$$(iii) \begin{cases} d\mu_0 = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta dx, \\ d\tilde{\mu}_1 = \frac{(1-x)^{\alpha+1}(1+x)^{\beta-1}}{x-a}dx + M\delta(x+a), \\ a > 1, \alpha, \beta > -1, M \geq 0. \end{cases}$$

De la relación (5.4) se sigue una interesante aplicación al tratamiento de la series de Fourier respecto a familias de polinomios ortogonales de Sobolev. Sea

$$\mathbb{W}^{s,1} = \left\{ f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} : \int f^2 d\mu_0 < +\infty, \int f'^2 d\tilde{\mu}_1 < +\infty \right\}.$$

Denotaremos mediante  $\tilde{\mathbf{a}}, \tilde{\mathbf{b}}, \tilde{\mathbf{q}}$  los vectores columnas cuyas  $(n+1)$ -ésimas componentes son, respectivamente,

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{a}}(n) &= \int f(x)P_n(x)d\mu_0 \\ \tilde{\mathbf{b}}(n) &= \int f'(x)S_n(x)d\tilde{\mu}_1 \\ \tilde{\mathbf{q}}(n) &= \langle f(x), Q_n^\lambda(x) \rangle_S.\end{aligned}$$

De (5.5) se sigue que

$$B\tilde{\mathbf{q}} - A\tilde{\mathbf{a}} + \lambda D\tilde{\mathbf{b}},$$

donde  $D = \text{diag}(1, 2, \dots, n, \dots)$ .

Por tanto,

**Proposición 5.3.**

$$\tilde{\mathbf{q}} = B^{-1}A\tilde{\mathbf{a}} + \lambda B^{-1}D\tilde{\mathbf{b}}.$$

De esta forma se pueden determinar los coeficientes del desarrollo de Fourier de la función  $f$  respecto a los polinomios ortonormales de Sobolev en términos de los coeficientes de Fourier de  $f$  respecto a  $\{P_n\}_{n \geq 0}$  y los coeficientes de Fourier de  $f'$  respecto a  $\{S_n\}_{n \geq 0}$ .

Un interesante problema es el análisis de los errores de aproximación  $f - S_N f$ , donde  $S_N$  denota el proyector  $N$ -ésimo de Fourier respecto a las familias  $\{Q_n^\lambda\}_{n \geq 0}$ ,  $\{P_n\}_{n \geq 0}$  y  $\{S_n\}_{n \geq 0}$ , respectivamente. Las correspondientes estimaciones en términos de  $N$  permitirían la comparación entre la aproximación estándar y la aproximación de Sobolev, hasta ahora sólo realizada entre el caso Legendre y el Legendre Sobolev [10].

### Agradecimientos

Este trabajo ha sido realizado en el marco del proyecto BFM 2003-06335-C03-02 financiado por la Dirección General de Investigación del Ministerio de Educación y Ciencia de España. Asimismo deseo agradecer los comentarios y sugerencias de Javier Hernández Benítez que con su cuidadosa revisión ha contribuido a mejorar sustancialmente su contenido.

### Referencias

- [1] Bueno, M. I. & Marcellán, F. Darboux transformations and perturbation of linear functionals. *Linear Alg. and Appl.* **384** (2004), 215–242.
- [2] Buhmann, M. & Iserles, A. On orthogonal polynomials transformed by the QR algorithm. *J. Comput. Appl. Math.* **43** (1992), 117–134.
- [3] Daruis, L., Hernández, J. & Marcellán, F. Spectral transformations for Hermitian Toeplitz matrices. *J. Comput. Appl. Math.* (2006). En prensa.
- [4] Geronimus, Ya. L. *Orthogonal Polynomials: Estimates, Asymptotic Formulas, and Series of Polynomials Orthogonal on the Unit Circle and on an Interval*. Consultants Bureau, New York, 1961.
- [5] Godoy, F. & Marcellán, F. An analogue of the Christoffel formula for polynomial modification of a measure on the unit circle. *Boll. Un. Mat. Ital A* **5** (1991), 1–12.
- [6] Godoy, F. & Marcellán, F. Orthogonal polynomials and rational modification of measures. *Canad. J. Math.* **45** (1993), 930–943.
- [7] Gragg, W. B. The QR algorithm for unitary Hessenberg matrices. *J. Comput. Appl. Math.* **16** (1986), 1–8.
- [8] Grenander, U. & Szegő, G. *Toeplitz Forms and their Applications*. University of California Press: Berkeley, 2<sup>nd</sup> ed. Chelsea: New York, 1984.
- [9] Iserles, A., Koch, P. E., Nørsett, S. P. & Sanz-Serna, J. M. Orthogonality and approximations in a Sobolev space. In *Algorithms for Approximations*, J. C. Mason & M. G. Cox, eds. Chapman and Hall: London (1990) 117–124.
- [10] Iserles, A., Koch, P. E., Nørsett, S. P. & Sanz-Serna, J. M. On polynomials orthogonal with respect to certain Sobolev inner product. *J. Approx. Theory* **65** (1991), 151–175.
- [11] Ismail, M. E. H. & Ruedemann, R. W. Relation between polynomials orthogonal on the unit circle with respect to different weights. *J. Approx. Theory* **71** (1992), 39–60.
- [12] Jones, W. B., Njåstad, O. & Thron, W. J. Moment theory, orthogonal polynomials, quadrature, and continued fractions associated with the unit circle. *Bull. London Math. Soc.* **21** (1989), 113–152.
- [13] Kailath, T. *Linear Systems*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1980.
- [14] Kailath, T. & Porat, B. State-space generators for orthogonal polynomials. In: *Prediction Theory and Harmonic Analysis*. Eds. V. Mandrekar & H. Salehi. The Post Massani Volume, 1983, 131–163.
- [15] Marcellán, F. & Hernández, J. Christoffel transforms and Hermitian linear functionals. *Mediterr. J. Math.* **2** (2005), 451–458.
- [16] Marcellán, F. & Moreno-Balcázar, J. J. Asymptotics and zeros of Sobolev orthogonal polynomials on unbounded supports. *Acta Appl. Math.* **49** (2006), 163–192.
- [17] Marcellán, F. & Szafraniec, F. H. The Sobolev type moment problem. *Proc. Amer. Math. Soc.* **128** (2000), 2309–2318.
- [18] Martínez Finkelstein, A. Analytic aspects of Sobolev orthogonal polynomials revisited. *J. Comput. Appl. Math.* **127** (2001), 255–266.
- [19] Meijer, M. G. A short history of orthogonal polynomials in a Sobolev space I: The non-discrete case. *Nieuw Arch. Wisk.* **14** (1996), 93–112.
- [20] Meijer, M. G. Determination of all coherent pairs of functionals. *J. Approx. Theory* **89** (1997), 321–343.
- [21] Pöcherstorfer, F. A special class of polynomials orthogonal on the unit circle including the associated polynomials. *Constr. Approx.* **12** (1995), 161–185.

- [22] Reichel, L., Ammar, G. S. & Gragg, W. B. *Discrete least squares approximation by trigonometric polynomials*. *Math. Comp.* **57** (1991), 273–289.
- [23] Simon, B. *Orthogonal polynomials on the unit circle*. Amer. Math. Soc. Coll. Publ. Series 54, two vols. Amer. Math. Soc.: Providence, RI, 2005.
- [24] Spiridonov, V. & Zhedanov, A. *Spectral transformations, self-similar reductions and orthogonal polynomials*. *J. Phys. A: Math. Gen.* **30** (1997), 7621–7637.
- [25] Szegő, G. *Orthogonal Polynomials*. 4<sup>th</sup> ed. Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. Series 23. Amer. Math. Soc.: Providence, RI, 1975.

Recibido el 5 de octubre de 2006

Aceptado para su publicación el 4 de diciembre de 2006



# USO DEL SiO<sub>2</sub> OBTENIDO DE LA CASCARILLA DE ARROZ EN LA SÍNTESIS DE SILICATOS DE CALCIO

por

L.M. Ahumada & J.E. Rodríguez-Páez<sup>1</sup>

## Resumen

**Ahumada, L.M. & J.E. Rodríguez-Páez:** Uso del SiO<sub>2</sub> obtenido de la cascarilla de arroz en la síntesis de silicatos de calcio. Rev. Acad. Colomb. Cienc. **30** (117): 581-594, 2006. ISSN 0370-3908.

La cascarilla de arroz es un desecho agro-industrial que se produce en altos volúmenes en zonas donde se siembra y se procesa la planta de arroz; este desecho se puede utilizar como fuente de silicio para la obtención de silicatos de calcio. Los silicatos de calcio se utilizan en la fabricación de ladrillos de cal y arena, en la industria del cemento, como material de relleno en las industrias de pinturas y plásticos y en la fabricación de porcelanas dieléctricas, entre otros múltiples usos. Muy recientemente se han comenzado a utilizar en la fabricación de vidrios bioactivos. En este trabajo se empleó el método de precipitación controlada para sintetizar silicatos de calcio. Se determinaron las condiciones óptimas de síntesis para obtener silicatos de calcio con una cierta composición y distribución de tamaño de partícula. Se analizaron los fenómenos fisicoquímicos que ocurren durante el proceso de síntesis y se estudio el efecto de ciertos parámetros del proceso tales como la concentración de los precursores, naturaleza del precipitante y la temperatura sobre las fases cristalinas que se obtienen al final del proceso. Se estudio la evolución de las fases cristalinas del compuesto al ser sometido a tratamientos térmicos; para ello se utilizó difracción de rayos X (DRX). Además se empleo análisis térmico (ATD/TG) para conocer el comportamiento del sólido ante tratamientos térmicos y Microscopia Electrónica de Transmisión (MET) para determinar la morfología y el tamaño de las partículas sintetizadas.

**Palabras clave:** Síntesis, silicatos de calcio, cascarilla de arroz, precipitación controlada.

## Abstract

The rice husk is an agroindustrial waste which is produced in large amounts where rice industry is established. The ash of rice husk can be used as a source of silicon to produce calcium silicates. These compounds are used to make bricks of lime and sand. In the cement industry, as filler material in paint and polymers industry and also to produce dielectric porcelain.

Recently, the calcium silicates have been used to manufacture bioactive glasses. In this work, the controlled precipitation method was used to synthesize calcium silicates. The best conditions of synthesis were determined to obtain compounds with a certain composition and distribution of particle

size. Moreover, It was analyzed the different physical-chemical phenomena that occur during the synthesis processes. Besides, It was studied the effects on certain conditions of the process such as precursors concentrations, nature of precipitant and temperature effect on the crystalline phases obtained at the end of the process. The evolution of crystalline phases during the thermal treatment was studied with X-ray diffraction (XRD). Other techniques of characterization used were the thermal analyses (DTA/TG) to know the evolution of the powers on thermal treatment and transmission electronic microscopy (TEM), to determine the morphology and the size of the synthesized particles.

**Key words:** Synthesis, calcium silicates, rice husk, controlled precipitation.

## 1. Introducción

La planta de arroz, científicamente denominada *Orizac sativa* y perteneciente a la familia de las gramíneas, está constituida por cuatro componentes principales: a) el germen, la parte más rica en nutrientes, ácidos grasos, aminoácidos y enzimas, y que se constituye en la parte germinal que da lugar al crecimiento del grano; b) el endospermo, que representa alrededor del 70% del volumen del grano y constituye al final del proceso el producto denominado arroz blanco; c) la cutícula o polvillo, el cual alcanza un 6.8% en volumen en el grano de arroz, utilizado como alimento para animales por su alto contenido de grasas y d) la cáscara o pajilla, que constituye aproximadamente 20% en peso del grano y que es separado en el proceso de pilado formándose verdaderas montañas de cascarilla al costado de los molinos, lo que ocasiona problemas de espacio por la acumulación de este desecho (Gutiérrez R., 1998). Normalmente, la cascarilla se incinera para reducir su volumen generando humos contaminantes. Como combustible genera calor, debido a su valor calorífico (aproximadamente 16720 kJ/kg), y la ceniza resultante contiene un porcentaje en sílice superior al 90%, lo cual la hace una potencial fuente de sílice. Las principales impurezas que contiene esta sílice son: calcio, potasio, magnesio y manganeso y como secundarias aluminio, hierro (10-20ppm), boro y fósforo. (1-40 ppm) (Rodríguez, J.E. et al., 1992); para obtener sílice de alta pureza es necesario eliminar estas impurezas.

Por otro lado, los silicatos de calcio son compuestos del sistema CaO-SiO<sub>2</sub>-H<sub>2</sub>O entre los que se destaca la wollastonita, la cual se origina principalmente de procesos hidrotermales de sedimentos de calizas mezcladas con sílice (Chen, Jeffrey et al., 2004, Kurczyk, H.G. et al., 1978). Otros compuestos de interés son el silicato dicálcico (SiO<sub>2</sub>.2CaO o C<sub>2</sub>S) y el tricálcico (SiO<sub>2</sub>.3CaO o C<sub>3</sub>S) que son fases importantes del cemento. El primero puede presentar cuatro formas polimórficas α, α', β y γ y las transformaciones entre ellas ocurren a temperaturas determinadas tal como se indican en la literatura (Older I. 2000). La fase γ-C<sub>2</sub>S (trigonal) es termodinámicamente

estable a temperatura ambiente, mientras que las modificaciones α, α'H, α'L (ortorrómbico) y la β- (monoclínico) son inestables termodinámicamente a cualquier temperatura. El β-C<sub>2</sub>S se genera durante el enfriamiento y es metaestable con relación al γ-C<sub>2</sub>S; la transformación β → γ puede ocurrir a una temperatura por debajo de 500°C. Para estabilizar la fase β del silicato dicálcico (C<sub>2</sub>S) se utilizan ciertos óxidos destacándose el MgO, Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>, P<sub>2</sub>O<sub>5</sub>, B<sub>2</sub>O<sub>3</sub>, Cr<sub>2</sub>O<sub>3</sub>, Na<sub>2</sub>O y K<sub>2</sub>O (Kurczyk H.G. et al., 1978, Older I. 2000, Goves G.W. 1983). El C<sub>3</sub>S puro presenta una estructura cristalina triclinica pero en solución sólida, cuando contiene pequeñas cantidades de óxidos como Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>, Fe<sub>2</sub>O<sub>3</sub>, MgO y/o CaO, puede transformarse a monoclínica o trigonal. El silicato tricálcico es termodinámicamente estable entre 1250°C y 2150°C y funde incongruentemente por encima de esta última temperatura (Taylor H.F. 1978); por debajo de 1250°C, el C<sub>3</sub>S es termodinámicamente inestable con relación al C<sub>2</sub>S y al CaO y en contacto con el agua se hidrata produciendo un silicato de calcio amorfo hidratado, fase C-S-H, e hidróxido de calcio como producto de hidratación (Rivera G.A. 1992).

Las aplicaciones más importantes de los silicatos de calcio se encuentran en la industria cerámica, fabricación de cerámicas tenaces y biocerámicas, en fundiciones metalúrgicas como aditivo fundente o simplemente como carga o recubrimiento, en la fabricación de porcelanas dieléctricas, en las pinturas, en la conformación de vidrios bioactivos (Kotsis I. et al., 1989), producción de resinas y plásticos (poliéster, polivinilo, nylon y polipropileno), como material reforzante mejorando las propiedades físicas, químicas y eléctricas del producto acabado (Taylor H.F. 1978). Los silicatos de calcio se han obtenido principalmente por reacción en estado sólido (Kurczyk H.G. et al., 1978, Kotsis I. et al., 1989, Ibáñez A. et al., 1993) mezclando homogéneamente limo y finos granos de sílice a una temperatura entre 700 y 800 °C, método hidrotermal (Chen J. et al., 2004, Kurczyk H.G. et al., 1978, Ibáñez A. et al., 1993, Tsunematsu S. et al., 2004) sometiendo a presión una solución acuosa; procedimiento vitrocerámico (Kurczyk H.G. et al., 1978, Ibáñez A. et al., 1993) fusionando una mezcla homogé-

nea de materias primas, cuarzo y carbonato de calcio, a temperaturas mayores de 1500°C y enfriando bruscamente el fundido; método Sol-Gel (Messing G. *et al.*, 1995) utilizando como precursor el tetraetil ortosilicato, TEOS, mezclándolo con una disolución acuosa de nitrato de calcio en presencia de ácido acético y de 2-propanol y síntesis a partir de sales fundidas (Kurczyk H.G. *et al.*, 1978, Ibáñez A. *et al.*, 1993) mediante reacciones de intercambio. En este trabajo se utilizó la sílice de la cascarilla de arroz para, a través del método de precipitación controlada, sintetizar silicatos de calcio. Los polvos cerámicos obtenidos se caracterizaron utilizando DRX para observar la evolución de fases durante las diferentes etapas del proceso, MET para determinar el tamaño y morfología de las partículas y ATD/TG para definir el comportamiento del polvo obtenido frente a tratamientos térmicos.

## 2. Procedimiento experimental

El SiO<sub>2</sub> que se utilizó en el presente proyecto se obtuvo de la cascarilla de arroz a través del proceso que se describe en la literatura (Chakraverty, A. *et al.*, 1988, Arcos C. 2004, Ahumada L.M. 2005). Se tomaron 4.20g de SiO<sub>2</sub> y se dispersaron en una solución acuosa sin y con HNO<sub>3</sub>, agitando el sistema a 400 r.p.m. Posteriormente se adicionaron a la solución 16.37g de acetato de calcio, Ca(CH<sub>3</sub>COO)<sub>2</sub> (Analyticals), para formar una solución de acetato con una concentración de 0.05M, manteniendo el sistema en continua agitación. Se procedió a la adición de una base con el fin de favorecer la hidrólisis del Ca<sup>2+</sup>; para ello se utilizó el hidróxido de amonio (NH<sub>4</sub>OH Marca Mallinckrodt). El seguimiento de la variación del pH del sistema se realizó utilizando un pHmetro marca Metrohm 744.

### 2.1 Valoración potenciométrica

Este ensayo permitió determinar las principales etapas del proceso de síntesis, durante la adición de hidróxido de amonio, y establecer un medio de control para garantizar la reproducibilidad del método. El comportamiento de la curva de valoración potenciométrica, obtenida al adicionar el NH<sub>4</sub>OH al sistema, se determinó para diferentes relaciones CaO/SiO<sub>2</sub>. La curva de valoración potenciométrica se obtuvo utilizando un Dosimat marca Methrom 712, que permitió la adición controlada de la base, y un pH-metro para medir la variación del pH del sistema. El hidróxido de amonio concentrado se adicionó lentamente a la suspensión de SiO<sub>2</sub> con ácido, 0.1N de HNO<sub>3</sub>, o sin ácido que contenía el Ca(CH<sub>3</sub>COO)<sub>2</sub> en solución. Las relaciones porcentuales de silicio y calcio empleadas se escogieron con base en el diagrama de fases binario CaO-SiO<sub>2</sub> (Taylor H.F., 1978). Considerando la

síntesis de silicatos de calcio de interés tecnológico, que se encuentra reportados en la literatura (Treviño B. *et al.*, 2002), se eligieron los porcentajes 58/42, 70/30 y 75/25 en peso, para las relaciones CaO/SiO<sub>2</sub> (tabla 1), ya que con estas proporciones se podrían obtener las fases cristalinas β-C<sub>2</sub>S, C<sub>3</sub>S y CS (wollastonita o parawollstonita) (Taylor H.F. 1978). Las muestras se referenciaron como A1S, A2S y A3S para composiciones 58/42, 70/30 y 75/25 respectivamente, sin ácido, y como A1C, A2C y A3C para las mismas composiciones pero utilizando ácido en el sistema durante su síntesis.

### 2.2 Obtención de la fase sólida

Para estudiar la síntesis de los silicatos de calcio se tomaron como variables: la concentración de los precursores, presencia o no de HNO<sub>3</sub> en el sistema, pH del sistema (entre 9-12) y temperatura (60°C). La suspensión final se dejó en reposo unas horas, se decantó y finalmente se secó en una estufa a 60°C con el fin de obtener un polvo cerámico; el sólido obtenido y molido se caracterizó con DRX, ATD/ TG y MET. El polvo cerámico sintetizado se sometió a tratamientos térmicos a 500°C, 1000°C y 1100°C durante dos horas a una velocidad de calentamiento de 5°C/min; estas muestras se caracterizaron utilizando DRX.

## 3. Resultados y análisis

### 3.1 Valoración potenciométrica

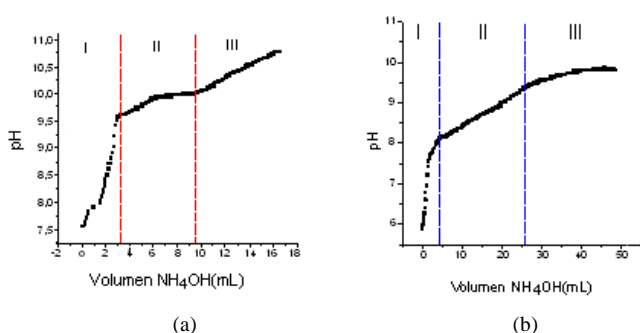
En la curva de valoración potenciométrica de la figura 1, obtenida para el sistema 75/25 sin ácido, se observan tres regiones bien definidas si se considera su cambio de pendiente. En la primera región se presenta un aumento progresivo del pH, hasta pH 9.5, enriqueciéndose el sistema con especies OH<sup>-</sup> en solución. En la región II, a partir de un pH > 9.5, se deberían formar los pares iónicos CaOH<sup>+</sup> y otros complejos de calcio. Finalmente, en la región III, ocurre la precipitación de un compuesto de calcio, a un pH > 10.5, proceso que se evidenció por la formación de un sedimento en el fondo del recipiente. Para determinar el efecto del ácido, sobre el comportamiento del sistema

**Tabla 1.** Cantidad en gramos de los precursores de acetato de calcio y sílice, empleadas en la síntesis para las diferentes relaciones de CaO/SiO<sub>2</sub>

CaO/SiO <sub>2</sub> , % p/p*	58/42	65/35	70/30	75/25
Ca(CH <sub>3</sub> COO) <sub>2</sub> /g	16.37 g	18.35 g	19.79 g	21.17 g
SiO <sub>2</sub> /g	4.20 g	3.50 g	3.01 g	2.50 g

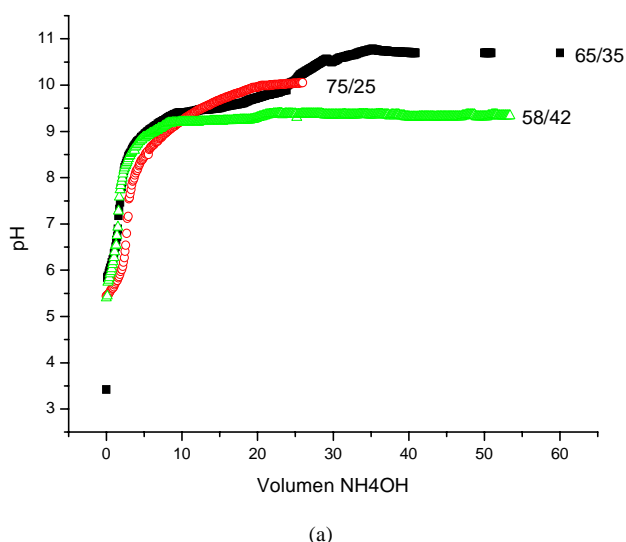
\* Indica el porcentaje peso a peso para obtener 10 g del producto final.





**Figura 1.** Curvas de valoración potenciométrica del sistema 75/25 CaO/SiO<sub>2</sub> sin ácido (a) y con HNO<sub>3</sub> 0.1M (b).

SiO<sub>2</sub>-Ca(CH<sub>3</sub>COO)<sub>2</sub>, se adicionó HNO<sub>3</sub> a las soluciones. La curva de valoración potenciométrica, figura 1(b), presenta inicialmente un cambio abrupto, un aumento del pH de 5.5 a 7.5, con la adición de 0.7mL de hidróxido de amonio. Este incremento se puede deber, principalmente, a la formación de CH<sub>3</sub>COOH en el sistema debido a la reacción de los iones H<sup>+</sup> presentes en solución y el CH<sub>3</sub>COO<sup>-</sup> procedente de la disociación del acetato de calcio. Posteriormente, el pH aumenta lentamente hasta un pH 10 comportamiento que se puede justificar considerando la adsorción del OH<sup>-</sup> sobre la superficie de la sílice y la conformación de especies de calcio, CaOH<sup>+</sup> y Ca(OH)<sub>2</sub> principalmente; a un pH mayor a 10 deberían precipitarse compuestos de calcio. En la figura 2 se observan las curvas de valoración potenciométrica para diferentes concentraciones de los precursores de silicio y calcio. Para estos sistemas, las curvas de valoración potenciométricas, figura 2(a), son

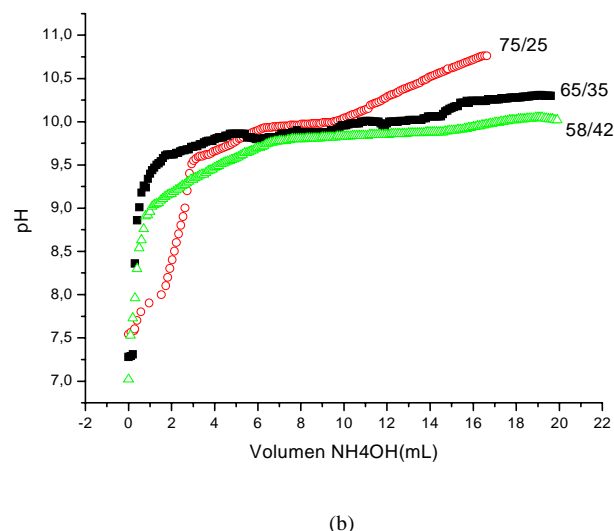


similares a la indicada en la figura 1(a), independiente de la relación CaO/SiO<sub>2</sub> utilizada; presentan un incremento abrupto en el pH al adicionar una poca cantidad de base. Las curvas potenciométricas para sistemas con ácido, figura 2(b), también son similares a la de la figura 1(b); el pH inicial tiene un valor mayor a 6.0 y presentan un apreciable incremento de este parámetro al adicionar pequeños volúmenes de NH<sub>4</sub>OH.

### 3.2 Principales reacciones que ocurren en el sistema SiO<sub>2</sub>-H<sub>2</sub>O-Ca(CH<sub>3</sub>COO)<sub>2</sub> durante la adición del NH<sub>4</sub>OH

Con base en las curvas de valoración potenciométrica, la información bibliográfica y las observaciones de lo que sucedió durante la síntesis de los silicatos, se proponen algunas reacciones que permitirían justificar fenómenos fisicoquímicos que ocurren en el sistema.

Inicialmente se tiene en el sistema SiO<sub>2</sub> suspendido en agua, o en agua con HNO<sub>3</sub>, y acetato de calcio disuelto. Uno de los procesos que debe ocurrir, aún antes de la adición de la base, es la disolución de la sílice “amorfa” en el solvente. La sílice amorfa, proveniente de la cascarilla de arroz, no se solubiliza completamente (Cotton F.A., 1986); la solubilidad de la sílice amorfa, a valores de pH menores de 8, está en el rango de los 100 a 150 ppm a 20°C, y se incrementa con la temperatura (Iler R., 1979). La disolución del SiO<sub>2</sub> ocurre a través de reacciones de hidratación por medio de las cuales se forma el monómero ácido silícico, Si(OH)<sub>4</sub>, u otra especie soluble de sílice; esta reacción requiere de la presencia de OH<sup>-</sup> como catalizador

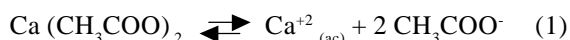


**Figura 2.** Curvas potenciométricas del sistema CaO/SiO<sub>2</sub> para distintas relaciones de SiO<sub>2</sub>/CaO 58/42, 65/35 y 75/25, precipitadas con hidróxido de amonio: (a) sin ácido y (b) con HNO<sub>3</sub> 0.1M en el sistema.

para favorecer la formación de los monómeros (**Otterstedt, J.E. et al.**, 1998).

Los OH<sup>-</sup> químisorbidos sobre los coloides de SiO<sub>2</sub> amorfo incrementan el número de coordinación del átomo de silicio superficial en más de cuatro, ocasionando que el enlace Si-O en la superficie se debilite y se desprenda un ion silicato, Si(OH)<sub>5</sub><sup>-</sup>. De acuerdo con la literatura (**Otterstedt, J.E. et al.**, 1998), para valores de pH < 3, la disolución del SiO<sub>2</sub> es poca porque la concentración de OH<sup>-</sup> es muy baja; al incrementar la cantidad de OH<sup>-</sup> en el sistema, por la adición de la base, se aumentaría la disolución de la sílice amorfa, siempre que no se dificulte la salida del Si(OH)<sub>5</sub><sup>-</sup> así como la adsorción del OH<sup>-</sup> al aumentar la carga superficial del SiO<sub>2</sub> por el incremento del pH en el sistema. Lo anterior se pudo comprobar experimentalmente ya que al disociarse el H<sub>2</sub>O, en iones H<sup>+</sup> y OH<sup>-</sup>, los hidróxilos se adsorbieron sobre la superficie de las partículas de sílice quedando los H<sup>+</sup> en solución ocasionando una disminución en el pH del sistema acuoso. Para el sistema estudiado, el pH final de la suspensión que contenía el SiO<sub>2</sub> disperso fue de 4.48 diferente al ~ pH 7 correspondiente al agua destilada que se utilizó como solvente.

Al adicionar el acetato de calcio a la dispersión de SiO<sub>2</sub> se produjo un aumento del pH, alcanzándose un valor de 7.48, debido al carácter iónico que presenta esta sal (**Manku J.**, 1992). Una reacción que ocurre previamente, antes de comenzar el suministro del NH<sub>4</sub>OH, es la disociación del acetato de calcio:



Debido a la alta concentración de acetato de calcio, 2.5M, se presentó el mencionado aumento apreciable del pH debido a la reacción del CH<sub>3</sub>COO<sup>-</sup> con el agua y el aumento de la concentración de hidróxilos en el sistema:



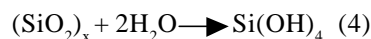
Dadas las características fisicoquímicas del calcio, carga efectiva baja y radio iónico grande, tienen muy baja probabilidad de ocurrencia las reacciones de hidrólisis de este catión; la literatura reporta como posible reacción durante la hidrólisis del calcio la siguiente (**Baes C. et al.**, 1976):



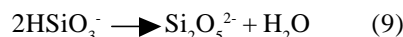
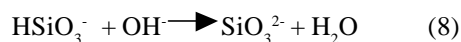
Por otro lado, el diagrama de carga formal Z en función del pH indica que la hidrólisis de cationes con valencias bajas (z<4) producen compuestos acuo, hidroxido o complejos acuo-hidroxido dependiendo del pH del siste-

ma (**Greenwood N. N. et al.**, 1995, **Jolivet**, 2000). De ahí que en la solución de calcio, catión con valencia +2, se debería presentar en todo el rango de pH el complejo acuo como especie predominante y solo a valores de pH mayores de 10 se podría esperar algún complejo acuo-hidroxido de calcio. Las reacciones 1, 2 y 3 ocurrirían simultáneamente con la disolución de la sílice.

Durante la adición de NH<sub>4</sub>OH, el hidróxido se disocia produciendo especies OH<sup>-</sup> y NH<sub>4</sub><sup>+</sup>. Observando la curva de valoración potenciométrica de la figura 1(a), inicialmente se presenta una variación abrupta del pH, de 7.5 a 8.0 región donde la sílice presenta su mínima solubilidad (**Otterstedt, J.E. et al.**, 1998), lo que indica una baja adsorción de OH<sup>-</sup> por parte del SiO<sub>2</sub> quedando muchos hidroxilos en solución. Por otro lado, los iones NH<sub>4</sub><sup>+</sup> provenientes del precipitante pueden reaccionar con el ion acetato existente en el sistema para formar NH<sub>4</sub>CH<sub>3</sub>COO. A un pH entre 8 y 9.5 todo el OH<sup>-</sup> suministrado a través del precipitante estaría en solución favoreciéndose la disolución de la sílice y por lo tanto el desprendimiento de Si(OH)<sub>4</sub>; este proceso se incrementaría al alcanzar el sistema un valor de pH entre 9.5 y 10.75 donde es muy importante la siguiente reacción (**Otterstedt, J.E. et al.**, 1998):



Considerando el producto de la reacción anterior, es posible que se conformen otros iones silicato a través de las siguientes reacciones (**Iler R.**, 1979):

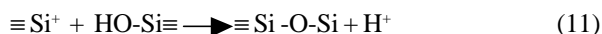
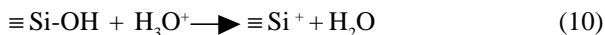


Por lo tanto, para altos valores de pH, las especies de silicio presentes en la solución serían: Si(OH)<sub>4</sub>, Si(OH)<sub>5</sub><sup>-</sup>, Si<sub>2</sub>O<sub>5</sub><sup>2-</sup> y SiO<sub>3</sub><sup>2-</sup>. Al tener un sistema silicio – calcio, como en el presente caso, el Si<sub>2</sub>O<sub>5</sub><sup>2-</sup> (ion disilicato) promovería la formación de complejos de iones disilicato en los cuales los enlaces Si-O-Ca estarían involucrados (**Iler R.**, 1979).

### 3.3 Reacciones que ocurren en el sistema SiO<sub>2</sub> – HNO<sub>3</sub> - Ca(OCOCH<sub>3</sub>)<sub>2</sub> durante la adición del NH<sub>4</sub>OH

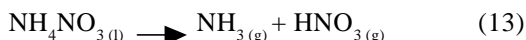
Se tiene en solución SiO<sub>2</sub> y HNO<sub>3</sub> 0.1M por lo que era de esperar que la solubilidad de la sílice amorfa disminuyera por la presencia del ácido nítrico tal como lo indica la literatura (**Otterstedt, J.E. et al.**, 1998), pero debido a

la baja concentración de ácido que se utilizó el efecto no fue tan marcado, razón por la cual el comportamiento de este sistema debe ser muy parecido al de  $\text{SiO}_2 - \text{H}_2\text{O} - \text{Ca}(\text{OCOCH}_3)_2$  descrito anteriormente. Según la literatura (Iler R., 1979), cuando se disuelve la sílice en ácido en un rango de pH de 1.5-2, se presenta una reacción catalizada por el ácido donde el ion  $\text{Si}^+$  se comporta como una especie intermedia:

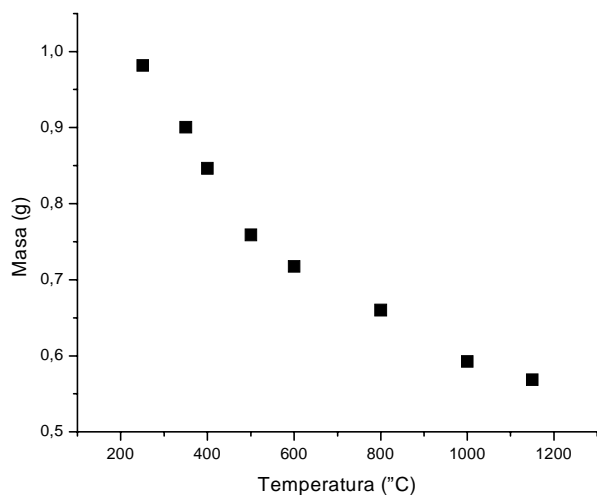


La reacción entre la sílice y el ácido nítrico ocurriría con la liberación de protones hacia la solución, generando una disminución del pH.

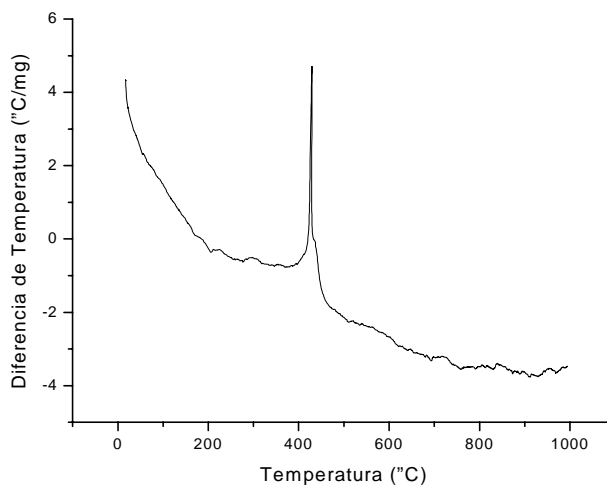
Al adicionar hidróxido de amonio al sistema, los iones  $\text{H}^+$  existentes en solución neutralizan los  $\text{OH}^-$  provenientes de la base, además se requiere poca cantidad de  $\text{OH}^-$  para neutralizar el 0.02M de ácido y formar especies como  $\text{NH}_4\text{NO}_3$ , la cual se volatiliza a temperaturas moderadas entre 60 y 70°C como las utilizadas en el presente trabajo, condición que permitiría el desarrollo de las siguientes reacciones (Cotton F.A. et al., 1986) y la posterior volatilización del amoníaco y del ácido nítrico:



En la primera región de la curva potenciométrica, figura 2(a), no se consumen muchos  $\text{OH}^-$  quedando gran parte de estos en solución ocasionando un incremento abrupto del pH en la curva.



(a)



(b)

Figura 3. Análisis térmico de la muestra AIS: (a) curva de TG y (b) curva de ATD.

### 3.4 Caracterización de los polvos obtenidos

#### 3.4.1 Análisis térmico

Con el fin de determinar el efecto de los tratamientos térmicos sobre las muestras sólidas del sistema  $\text{CaO-SiO}_2$  sin y con  $\text{HNO}_3$ , con composiciones 58/42 y 75/25 precipitadas con  $\text{NH}_4\text{OH}$ , se realizaron ensayos de TG y ATD (figuras 3 y 4).

En la curva de TG para la muestra AIS, figura 3 (a), se observa que en todo el intervalo de duración del programa de calentamiento la muestra pierde peso; la mayor pérdida de peso ocurre entre 200 y 500°C. En la curva de ATD, figura 3 (b), el pico exotérmico a 429°C representa la descomposición del  $\text{Ca}(\text{CH}_3\text{COO})_2$  que existe aún en la muestra secada a 60°C, como lo indican los resultados de DRX que se muestran más adelante. Muy cerca de este pico exotérmico, a continuación del mismo, hay un pequeño hombro que debe contener información de las transformaciones de fase que pueden ocurrir en la muestra AIS.

En la curva de TG de la muestra AIC, figura 4(a), se observa una gran pérdida de peso entre 250 y 500°C y por encima de esta temperatura la muestra continúa perdiendo peso a una menor velocidad; a partir de los 800°C el peso de la muestra es aproximadamente constante. La curva de ATD correspondiente a la muestra AIC, figura 4 (b), presenta un pico exotérmico, muy bien definido, a 438°C. Este pico contiene información tanto de la descomposición del acetato, que aún existe en la muestra secada a 60°C, así como de las transformaciones de fase que puede presentar la muestra durante su calentamiento. Aproximadamente a 670°C se observa una pequeña variación de la

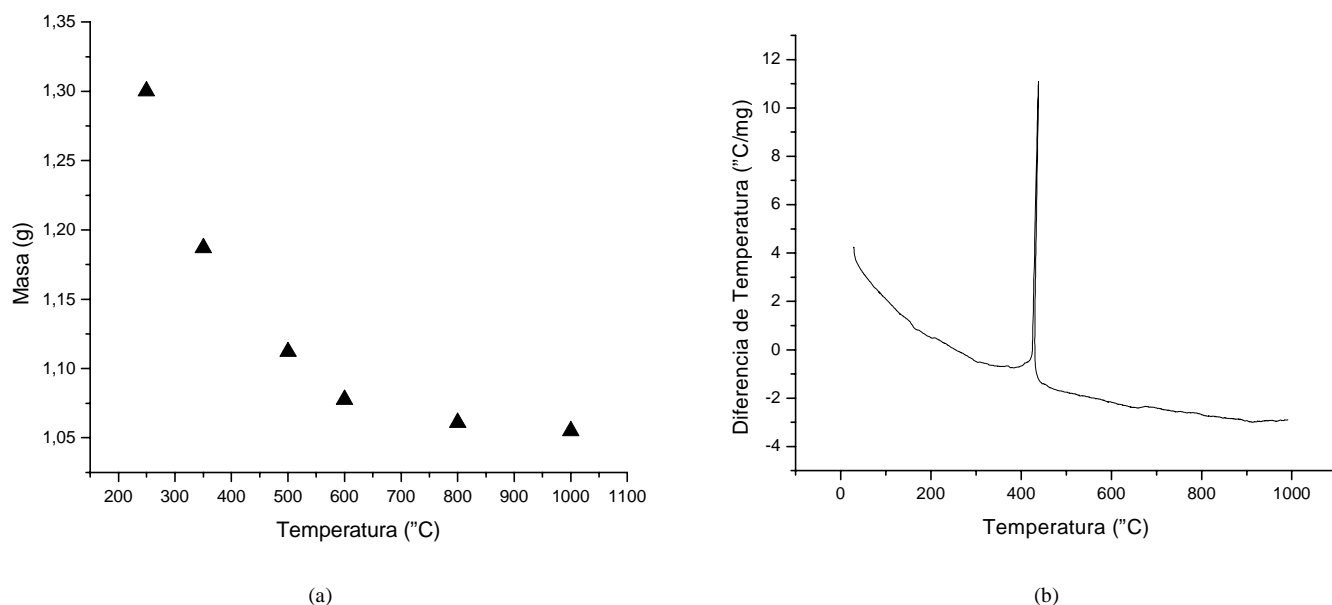


Figura 4. Análisis térmico de la muestra A1C: (a) curva de TG y (b) curva de ATD.

pendiente en la línea de base que puede representar una transformación de fase que experimenta la muestra. Según la literatura (Older I., 2000), al precalentar una muestra que contenga  $\beta$ -C<sub>2</sub>S, la curva ATD debería presentar un pequeño pico endotérmico alrededor de 700°C que representaría la transformación de fase  $\beta \rightarrow \alpha'$ -C<sub>2</sub>S.

Para las otras muestras, con diferentes concentraciones de SiO<sub>2</sub> y precursor de calcio, los resultados de TG y ATD son similares a los de las figuras 3 y 4 por lo que se puede realizar un análisis semejante al que se mencionó para las muestras A1.

### 3.4.2 Fases cristalinas presentes en los sólidos

Para determinar las fases cristalinas presentes en los sólidos, y ver su evolución al someterlas a diferentes tratamientos térmicos, se empleó difracción de rayos X (DRX).

En la figura 5 se muestran los difractogramas de rayos X correspondientes a muestras sólidas obtenidas al secar a 60°C la suspensión coloidal del sistema SiO<sub>2</sub>-Ca(CH<sub>3</sub>COO)<sub>2</sub>-H<sub>2</sub>O-NH<sub>4</sub>OH, en una relación 70/30 de CaO/SiO<sub>2</sub> (muestra A2S60), y tratadas térmicamente a 1100°C durante una hora (muestra A2S1100). El difractograma correspondiente a la muestra A2S60, figura 5 (a), indica que el sólido es amorfo y la forma del mismo coincide con el del SiO<sub>2</sub> obtenido de la cascarilla de arroz (Ahumada L.M., 2005, Arcos C., 2004). Al tratar el sólido a 1100°C, figura 5 (b), su difractograma muestra la presencia de

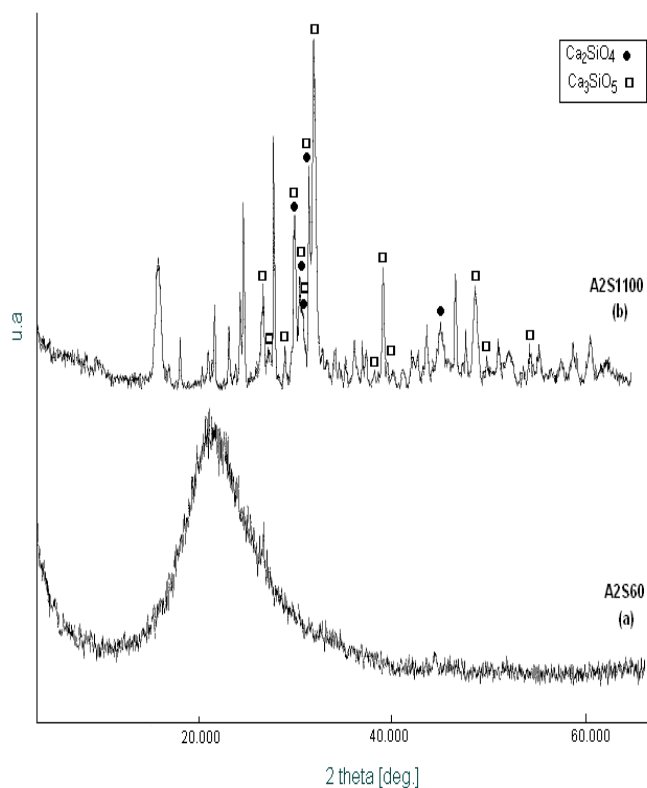
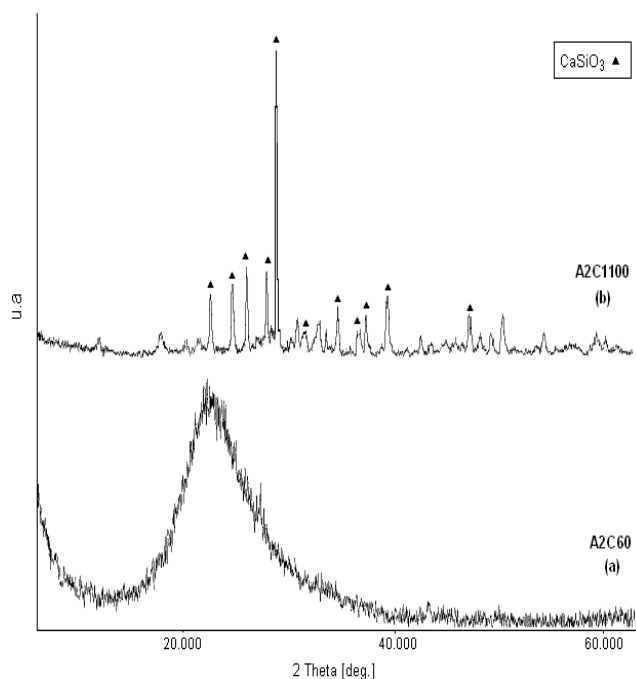


Figura 5. Difractogramas de rayos X correspondientes a muestras sólidas obtenidas del sistema SiO<sub>2</sub>-Ca(CH<sub>3</sub>COO)<sub>2</sub>-H<sub>2</sub>O-NH<sub>4</sub>OH, con una relación 70/30 de CaO/SiO<sub>2</sub>, secada a 60°C (A2S60) (a) y tratada térmicamente a 1100°C (A2S1100) (b).

$\text{Ca}_2\text{SiO}_4$  (ortorrómbico) y  $\text{Ca}_3\text{SiO}_5$  (rombohedral y monoclinico), estas últimas fases cristalinas de la familia de las que presentan propiedades cementantes.

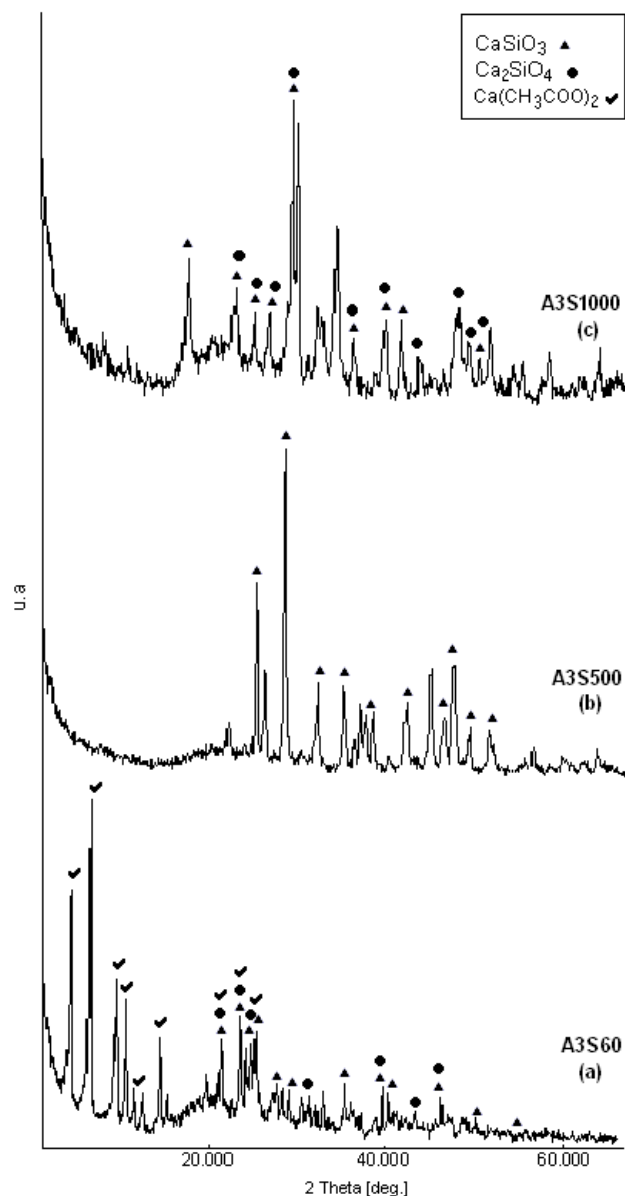
De acuerdo a los resultados, la fase amorfa que existe en la muestra A2S a  $60^\circ\text{C}$  se transforma, a través del tratamiento térmico a  $1100^\circ\text{C}$ , en  $\alpha'$ - $\text{C}_2\text{S}$ , fase que predomina por encima de los  $600^\circ\text{C}$  y que es el resultado de la transformación  $\beta \rightarrow \alpha'$  al calentar la muestra (Older I., 2000), y en las fases monoclinica y romboédrica del  $\text{C}_3\text{S}$  que son estables a temperaturas mayores de  $1000^\circ\text{C}$  (Taylor H.F., 1978); considerando estos resultados se puede concluir que en la muestra A2S1100 se han estabilizado fases de alta temperatura, tanto del  $\text{C}_2\text{S}$  y el  $\text{C}_3\text{S}$ , probablemente debido al pequeño tamaño de partícula del material en polvo.

En la figura 6 se muestran los difractogramas correspondientes a sólidos del sistema  $\text{CaO}:\text{SiO}_2$  con una relación 70/30, con  $\text{HNO}_3$  0.1M, y precipitadas con amonio. Según los datos de DRX, la muestra secada a  $60^\circ\text{C}$  (figura 6 a) es amorfa y se transforma totalmente en  $\text{CaSiO}_3$ , triclinica (PDF 290372) y monoclinica (PDF 431460), al tratarla térmicamente a  $1100^\circ\text{C}$



**Figura 6.** Difractogramas de rayos X correspondientes a muestras sólidas obtenidas del sistema  $\text{SiO}_2$ - $\text{Ca}(\text{CH}_3\text{COO})_2$ - $\text{HNO}_3$ - $\text{NH}_4\text{OH}$ , con una relación 70/30 de  $\text{CaO}/\text{SiO}_2$ ; secada a  $60^\circ\text{C}$  (A2C60) (a) y tratada térmicamente a  $1100^\circ\text{C}$  (A2C1100) (b).

Dado que la forma del difractograma de las muestras tratadas a  $60^\circ\text{C}$ , figuras 5(a) y 6(a), es similar al del  $\text{SiO}_2$  obtenido de la cascarilla de arroz (Arcos C. A., 2004), fuente de silicio para el presente trabajo, la primera impresión es de que no esta presente el calcio en el sólido. Esta incertidumbre se elimina cuando se tratan las muestras a  $1100^\circ\text{C}$  donde se hacen evidentes los picos característicos de los compuestos  $\text{CaSiO}_3$ ,  $\text{Ca}_2\text{SiO}_4$  y  $\text{Ca}_3\text{SiO}_5$ . Para



**Figura 7.** Difractogramas de rayos X correspondientes a muestras sólidas obtenidas del sistema  $\text{SiO}_2$ - $\text{Ca}(\text{CH}_3\text{COO})_2$ - $\text{H}_2\text{O}$ - $\text{NH}_4\text{OH}$ , con una relación 75/25 de  $\text{CaO}/\text{SiO}_2$ , secada a  $60^\circ\text{C}$  (A3S60) (a) y tratada térmicamente a  $500^\circ\text{C}$  (A3S500) (b) y  $1000^\circ\text{C}$  (A3S1000) (c) durante 5 minutos.

explicar esta evolución de fases se puede considerar que en las muestras secadas a 60°C se tienen partículas de SiO<sub>2</sub> cubiertas con complejos de calcio que se depositaron sobre la superficie de las mismas durante el proceso de adición del NH<sub>4</sub>OH; dado que el “core” de cada partícula es sílice, el difractograma indicaría la presencia de este óxido y no detectaría la presencia de compuestos de calcio debido al pequeño espesor que debe tener el recubrimiento conformado por ellos. Al calentar el sistema, y más a una temperatura de 1100°C, el calcio difundiría de la superficie de la partícula de sílice hacia el interior de la misma favoreciendo la reacción del calcio con el silicio y la formación de los silicatos de calcio mencionados anteriormente.

#### *Efecto de la temperatura de tratamiento*

En la tabla 2 se resumen las fases cristalinas presentes en las muestras sólidas obtenidas del sistema 75/25 de CaO/SiO<sub>2</sub>, sin ácido (figura 7) y con ácido (figura 8), además de las muestras tratadas térmicamente durante 5 minutos a diferentes temperaturas. Analizando los resultados de la tabla 2, la variación más notable se observa en las muestras del sistema con ácido, donde los difractogramas, figura 8, presentan una fase amorfa, lo que no sucede con las muestras obtenidas de un sistema sin ácido, figura 7.

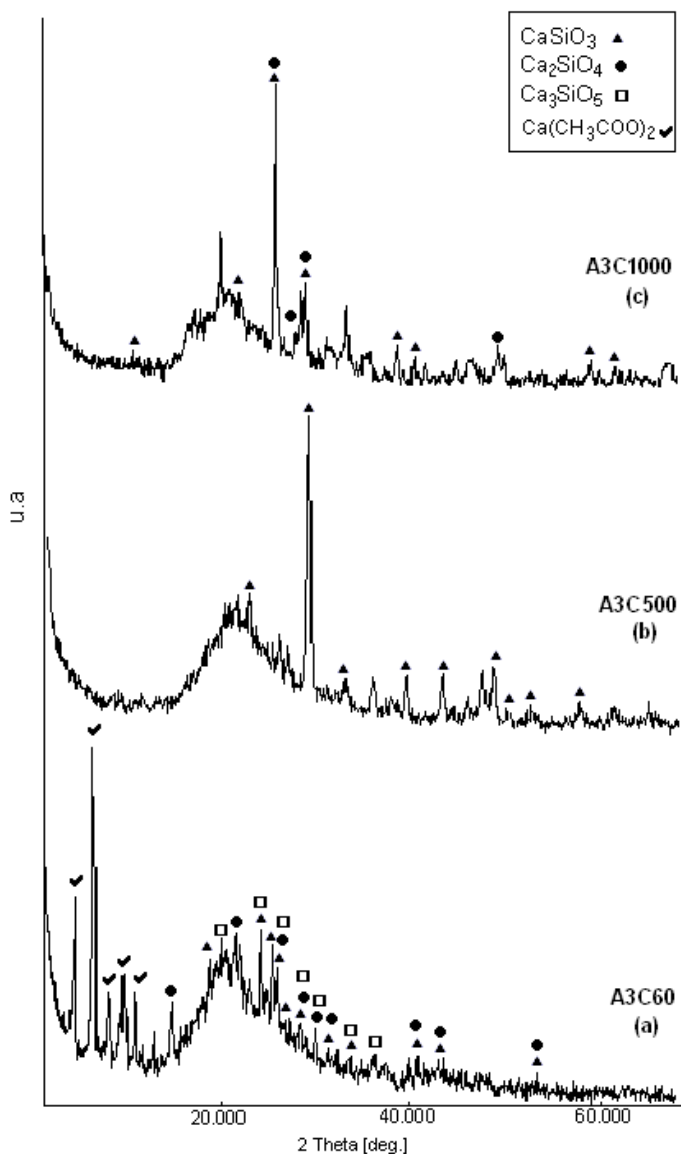
#### *Efecto de la concentración*

Para determinar el efecto de la relación de las concentraciones de los óxidos CaO/SiO<sub>2</sub>, sobre las fases que se obtienen a diferentes temperaturas, se consideraron las razones 58/42 y 75/25 para sistemas sin y con ácido, figuras 9 y 10. Considerando los difractogramas de la figura 9 se puede concluir que en las muestras tratadas a 60°C, además de la fase amorfa existe CaSiO<sub>3</sub> y Ca<sub>3</sub>SiO<sub>5</sub> para la muestra A1S y Ca<sub>2</sub>SiO<sub>4</sub> para la A3S. Para las muestras tratadas a 1000°C es evidente la existencia de wollastonita y para-wollastonita, además de Ca<sub>2</sub>SiO<sub>4</sub>, en la muestra A3S.

De los difractogramas de la figura 10 se puede concluir que en las muestras tratadas a 60°C existe CaSiO<sub>3</sub> y Ca<sub>2</sub>SiO<sub>4</sub>, además de una fase Ca<sub>8</sub>Si<sub>5</sub>O<sub>18</sub> para la muestra A1C y Ca<sub>3</sub>SiO<sub>2</sub> para la A3C. Las muestras tratadas térmicamente a 500°C presentan una fase amorfa y CaSiO<sub>3</sub>, mientras que en las tratadas a 1000°C es evidente la presencia de parawollastonita, en la muestra A3C, y de Ca<sub>2</sub>SiO<sub>4</sub> en ambas muestras.

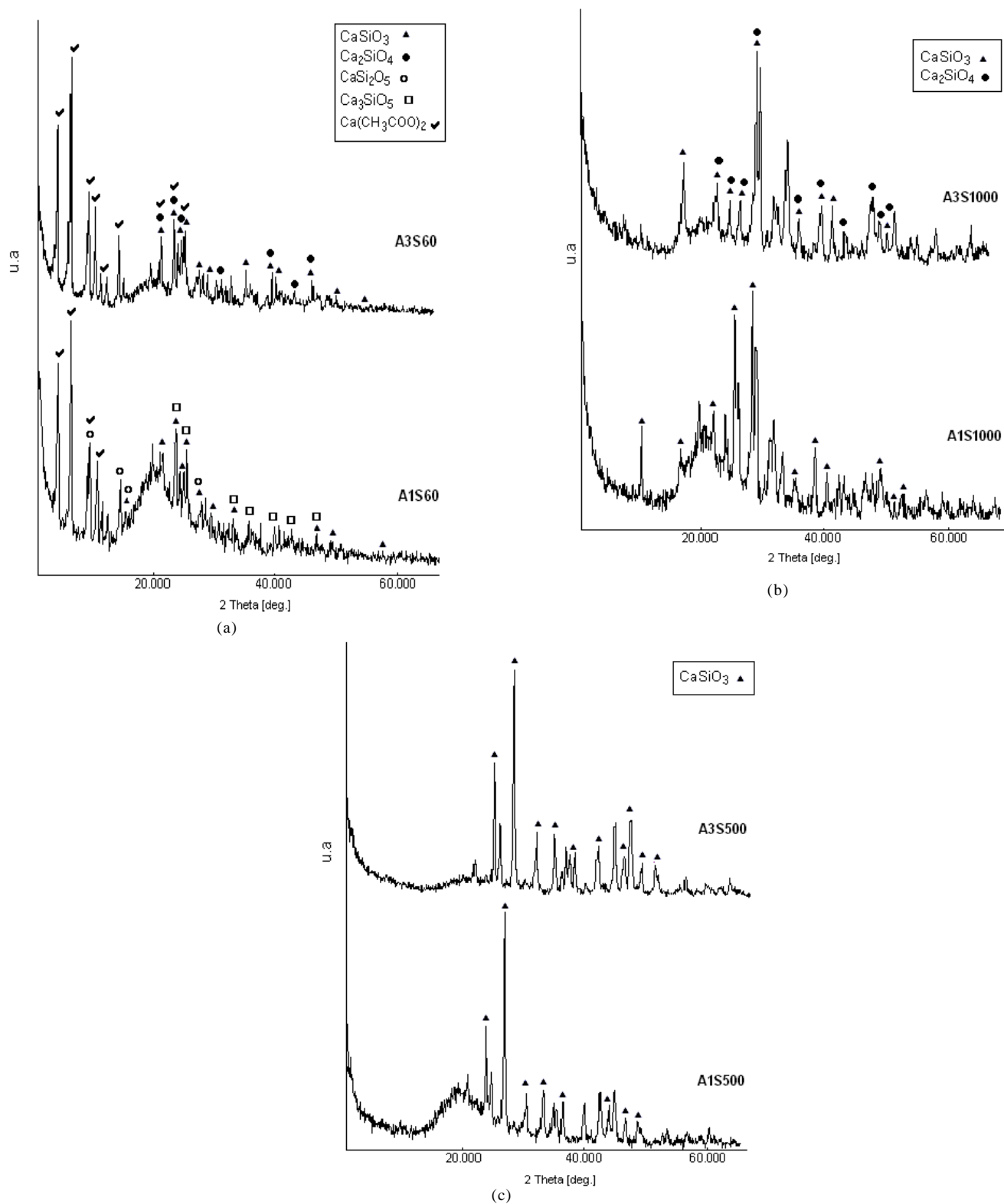
#### *3.4.3 Morfología y tamaño de partícula de los silicatos de calcio obtenidos*

La figura 11 muestra fotografías obtenidas con MET de los sólidos sintetizados del sistema CaO/SiO<sub>2</sub> para una

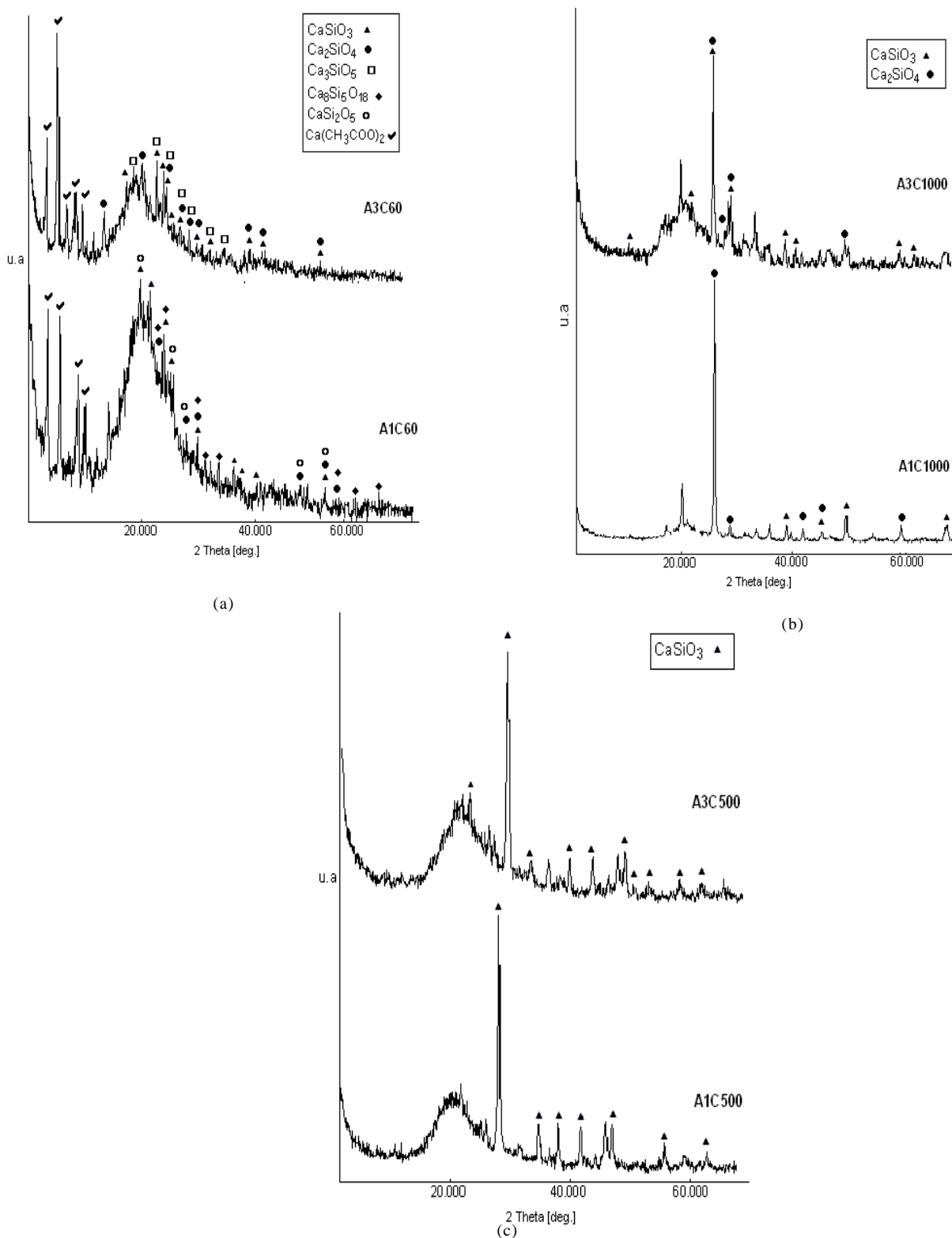


**Figura 8.** Difractogramas de rayos X correspondientes a muestras sólidas obtenidas del sistema SiO<sub>2</sub>-Ca(CH<sub>3</sub>COO)<sub>2</sub>-HNO<sub>3</sub>-NH<sub>4</sub>OH, con una relación 75/25 de CaO/SiO<sub>2</sub>, secada a 60°C (A3C60) (a) y tratada térmicamente a 500°C (A3C500) (b) y 1000°C (A3C1000) (c) durante 5 minutos.

concentración de 75/25 de CaO/SiO<sub>2</sub>. La figura 11(a) muestra partículas del sistema 75/25 de CaO/SiO<sub>2</sub> sin ácido y la figura 11(b) partículas del mismo sistema pero con ácido. Se observa en estas fotografías que el tamaño de las partículas es nanométrico, < 200nm, y que forman aglomerados. Comparando las dos fotografías se observa que el sistema con ácido presenta pequeñas partículas, de forma alargada o esférica, y que conforman grandes aglomerados duros.



**Figura 9.** Difractogramas de rayos x correspondientes a muestras sólidas obtenidas del sistema  $\text{SiO}_2\text{-Ca}(\text{CH}_3\text{COO})_2\text{-H}_2\text{O}-\text{NH}_4\text{OH}$ , con una relación 58/42 y 75/25 secadas a 60°C(a) y tratadas térmicamente a 500°C (b) y 1000°C(c) durante 5 minutos.



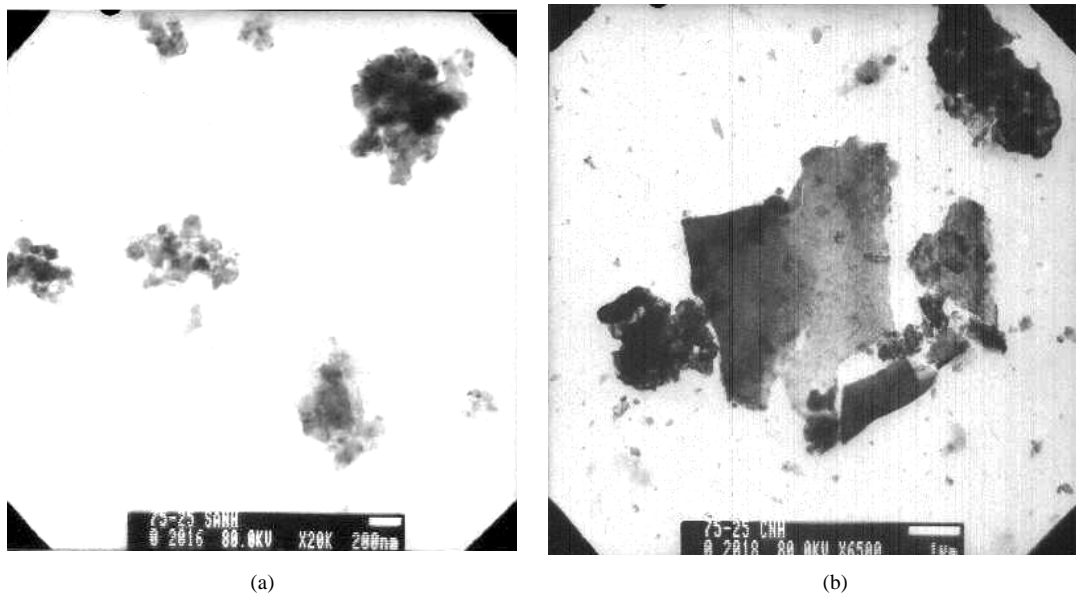
**Figura 10.** Difractogramas de rayos X correspondientes a muestras sólidas obtenidas del sistema SiO<sub>2</sub>-Ca (CH<sub>3</sub>COO)<sub>2</sub>-HNO<sub>3</sub>-NH<sub>4</sub>OH, con una relación 58/42 (A1C) y 75/25 (A3C), secadas a 60°C (a) y tratadas térmicamente a 500°C (b) y 1000°C(c) durante 5 minutos.



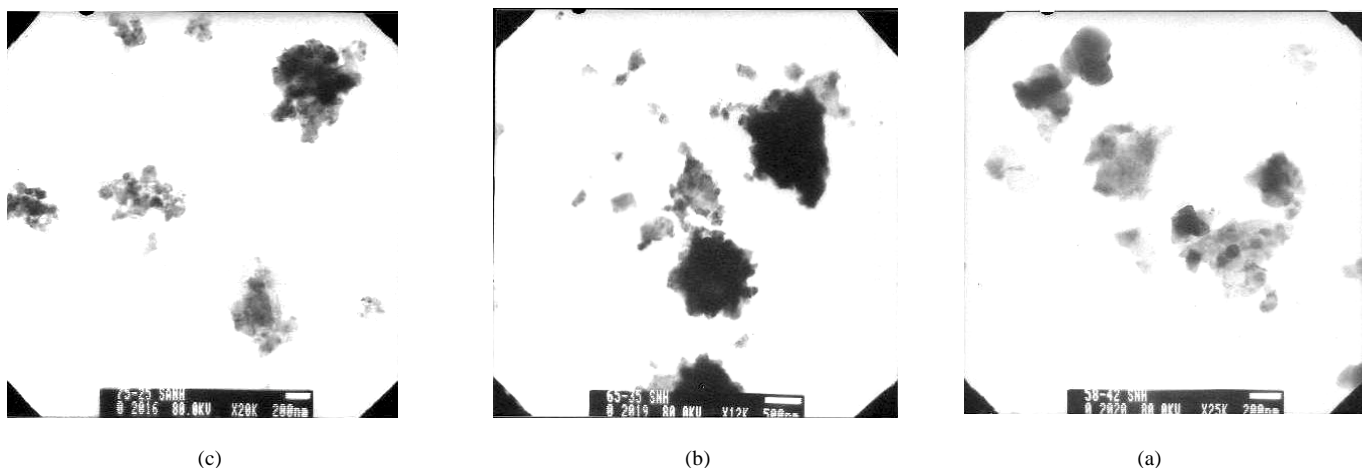
**Tabla 2.** Principales fases cristalinas presentes en muestras sólidas obtenidas del sistema 75/25 de CaO/SiO<sub>2</sub>, sin ácido y con ácido HNO<sub>3</sub>, secadas a 60°C y tratadas a 500 y 1000 °C .

Temperatura Muestra	60°C	500°C	1000°C
A3S	<ul style="list-style-type: none"> <li>- CaSiO<sub>3</sub> -monocl nica (PDF 270088), tr clinico (PDF 420547), (SEC) (PDF 460044)</li> <li>- Ca<sub>2</sub>SiO<sub>4</sub>-ortorr mbica (PDF 200237),( SEC) (PDF 310302), hexagonal (PDF 231042)</li> <li>- (CH<sub>3</sub>COO)<sub>2</sub>Ca5H<sub>2</sub>O (PDF 190199)</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- CaSiO<sub>3</sub> - tricl nico (PDF 420550), ortorr mbica (PDF290368)</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- CaSiO<sub>3</sub> monocl nico (PDF 431460), tricl nico (PDF 420547)</li> <li>- Ca<sub>2</sub>SiO<sub>4</sub>-ortorr mbico (PDF 310299), monocl nico (PDF 330302)</li> </ul>
A3C	<p style="text-align: center;">Fase amorfa</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- CaSiO<sub>3</sub> -monocl nico (PDF 431460), tricl nico (PDF 310300)</li> <li>- Ca<sub>2</sub>SiO<sub>4</sub>- ortorr mbico (PDF 240234), hexagonal (PDF 231042)</li> <li>- Ca<sub>3</sub>SiO<sub>5</sub>- ortorr mbico (PDF 160407)</li> <li>(CH<sub>3</sub>COO)<sub>2</sub>Ca5H<sub>2</sub>O- (PDF 190199)</li> </ul>	<p style="text-align: center;">Fase amorfa</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- CaSiO<sub>3</sub> - tricl nico (PDF 420550), (SEC) (PDF 450156)</li> </ul>	<p style="text-align: center;">Fase amorfa</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- CaSiO<sub>3</sub> monocl nica (PDF 431460)</li> <li>- Ca<sub>2</sub>SiO<sub>4</sub> - (SEC) (PDF 310302)</li> </ul>

SEC: estructura cristalina sin identificar.



**Figura 11.** Partículas del sistema 75/25 de CaO/SiO<sub>2</sub> obtenidas utilizando NH<sub>4</sub>OH como precipitante y que corresponden a sistemas: (a) sin ácido y (b) con HNO<sub>3</sub>.



**Figura 12.** Fotografías obtenidas por MET de sistemas sin ácido con distintas relaciones CaO/SiO<sub>2</sub>, precipitadas con NH<sub>4</sub>OH: (a) concentración 58/42, (b) 65/35 y (c) 75/25.

El efecto de la concentración de CaO/SiO<sub>2</sub> en los sistemas estudiados, sobre el tamaño y morfología de las partículas, se observa en la figura 12. Se ve en todas las muestras pequeños aglomerados conformados por partículas manométricas (< 200 nm); aún estos aglomerados presentan tamaño manométrico. No se observa una gran diferencia en el tamaño y la morfología de las partículas para las diferentes concentraciones estudiadas por lo que se puede concluir que la relación CaO/SiO<sub>2</sub> no tiene un efecto apreciable sobre estos parámetros.

#### 4. Conclusiones

Considerando los resultados obtenidos en el presente trabajo se puede concluir lo siguiente:

1. Se estructuró un método de síntesis para obtener silicatos de calcio utilizando como fuente de silicio el SiO<sub>2</sub> obtenido de la cascarilla de arroz. Para garantizar la reproducibilidad del método se utilizaron como medio de control las curvas de valoración potenciométricas del sistema acuoso silicio-calcio, empleando como precipitante NH<sub>4</sub>OH. Definidas las etapas del proceso, a partir de las curvas de valoración, se realizó un estudio de los procesos fisicoquímicos más importantes que ocurren en el sistema: la disolución del SiO<sub>2</sub> amorfo y la formación de complejos de calcio, principalmente pares iónicos Ca:OH<sup>+</sup>.
2. La reactividad del sistema silicio-calcio permitió obtener a bajas temperaturas silicatos de calcio para algunas de las composiciones de CaO/SiO<sub>2</sub> estudiadas. Con base en los resultados de DRX se puede concluir

que el SiO<sub>2</sub> amorfo sirvió como sustrato para que se depositaran sobre él complejos de calcio; es evidente en los difractogramas de las muestras tratadas a bajas temperaturas el “lomo” característica del SiO<sub>2</sub> amorfo. Al aumentar la temperatura del tratamiento térmico, el calcio difundió a través del SiO<sub>2</sub> favoreciéndose la reacción del Si y el Ca y por lo tanto la formación de los silicatos de calcio: a 500°C de CaSiO<sub>3</sub> y a 1000°C de Ca<sub>2</sub>SiO<sub>4</sub>, principalmente.

3. El tamaño de partícula de los polvos cerámicos obtenidos, utilizando el método de síntesis desarrollado, es manométrico (< 200nm) aunque forman aglomerados que van desde los cientos de manómetros hasta unas cuantas micras. El tamaño manométrico de las partículas permitió la estabilización de las fases de silicatos de calcio de alta temperatura a temperatura ambiente, entre ellas el Ca<sub>2</sub>SiO<sub>4</sub> y el Ca<sub>3</sub>SiO<sub>5</sub>.

#### 5. Agradecimientos

Este trabajo fue realizado gracias al proyecto COLCIENCIAS código 1103 -08-12132. Agradecimientos especiales a la VRI y a la Licenciada Patricia Mosquera de la Unidad de Microscopía Electrónica de la Universidad del Cauca.

#### 6. Bibliografía

- Ahumada, L. M. 2005. “Síntesis y caracterización de silicatos de calcio utilizando como precursor de sílice la cascarilla de arroz”, Trabajo de Grado. Universidad del Cauca. Facultad de Ciencias Naturales Exactas y de la Educación.

- Arcos, C.** 2004. "Obtención biomimética de películas delgadas a partir de las monocapas moleculares de langmuir blodgett", p. 103. Trabajo de grado. Universidad del Cauca. Facultad de Ciencias Naturales, Exactas y de la Educación.
- Baes C., Mesmer, R.** 1976. The hydrolysis of cations. A willey-intersciencie publication., John Wiley & Sons, New York.
- Chakraverty, A., Mishra, P. & Banerjee, H.D.** 1988. Investigation of combustion of raw and acid-leached rice husk for production of pure amorphous white silica, *Journal of Materials Science*, **23**: 21-24.
- Chen, J., Thomas, J., Taylor, F.W., Jennings, H.M.** 2004. Solubility and structure of calcium silicate hydrate, *Cement and Concrete Research*, **20** (20): 1-21.
- Cotton, F.A. & Wilkinson, G.** 1986. Química inorgánica avanzada. Limusa, México.
- Goves, G.W.** 1983. Phase transformations in dicalcium silicate, *Journal of Materials Science*, **18**: 1615-1624.
- Greenwood, N.N & Earnshaw, A.** 1995. Chemistry of the elements. Butterworth – Heineman Ltd., p. 23, 122.
- Gutiérrez, R.** 1998. La cascarilla de arroz como fuente energética, Instituto Colombiano de productores de Cemento I.C.P.C, Centro de documentación: 4-9
- Ibáñez, A. & Sandoval, F.** 1993. La Wollastonita: propiedades, síntesis y aplicaciones cerámicas, *Bol. Soc. Esp. Ceram. Vidr.*, **32** (6): 349-361.
- Jolivet, J.** 2000. Metal oxide chemistry and synthesis, John Wiley & Sons, LTD.
- Kotsis, I. & Balogh, A.** 1989. Synthesis of Wollastonite, *Ceramics International*, **15**: 79-85.
- Kurczyk, H.G. & Wuhrer, J.** 1978. Synthetic Wollastonite and its Use in ceramic Bodies, *J. Soc. Chem* 1-6.
- Iler, R.** 1979. The Chemistry of Silica: Solubility, Polymerization, Colloid and Surface Properties, and Biochemistry, A Wiley – Interscience Publication, New York .
- Manku, J.** 1992. Principios de Química Inorgánica, Ed. Limusa, México.
- Messing, G. & Hirano, S.** 1995. Ceramic Processing Science and Technology. United States of America : Ceramic Transactions **51**: 550-553.
- Older, I.** 2000. Special Inorganic Cements. Ed. 1: E&FN SPON, New York.
- Otterstedt, J.E. & Brandreth, D.** 1998. Small Particles Technology. Plenum Press, New York.
- Rivera, G.A.** 1992. Concreto Simple. Universidad del Cauca, Popayán.
- Rodríguez, J.E., Vivas G. & Montalvo L.** 1992. Fuentes Biológicas de Silicio: Cascarilla de arroz, Unicauca Ciencia 1-4.
- Taylor, H.F.** 1978. La química de los cementos., Urmo de Ediciones., Vol. I. España.
- Treviño, B. & Gómez, I.** 2002. Obtención de fases del cemento utilizando desechos agrícolas e industriales, *Ciencia UNAL*. **5** (2): 190-196.
- Tsunematsu, S. & Inoue, K.** 2004. Improvement of acid resistance of calcium silicate hydrate by thermal treatment, *Cement and Concrete Research* **34**: 717-720.

Recibido el 19 de octubre de 2005

Aceptado para su publicación el 4 de diciembre de 2006

# DESARROLLO DE UNA BIO CERÁMICA BIOMIMÉTICA PARA USO ESPECÍFICO EN ODONTOLOGÍA

por

Claudia I. Guevara<sup>1</sup>, Gloria Romero de Pérez<sup>2</sup>, Martha L. Calle<sup>3</sup> & Edgar Delgado<sup>4\*</sup>

## Resumen

**Guevara C.I., G. Romero, M. Calle & E. Delgado:** Desarrollo de una biocerámica biomimética para uso específico en odontología. Rev. Acad. Colomb. Cienc. **30** (117): 595-604, 2006. ISSN 0370-3908.

Los tejidos naturales duros como hueso, esmalte y dentina son tejidos calcificados además de algunos componentes orgánicos. El diente tiene un alto porcentaje de tejido mineral, conformado básicamente por fosfatos de calcio como la hidroxiapatita. En este artículo se describe el diseño y aplicación de dos biocerámicas fosfoalcalinas, biomiméticas, sintetizadas a partir de la cáscara de huevo, por el grupo GRAMO. Estas fueron colocadas en molares de ratas *Wistar*, como fase preliminar en el desarrollo de un nuevo material para uso sobre humanos. En los premolares se observó el comportamiento biológico tanto en respuesta aguda como en respuesta crónica.

**Palabras clave:** Biocerámicas, fosfatos de calcio, pulpa dental, biomimético.

## Abstract

Natural hard tissues such as bone, enamel and dentine are calcified tissues accompanied by some organic components. Tooth has a high percentage of mineral tissue, basically consisting of calcium phosphates like hydroxyapatite. In this article the design and application of two bioceramics consisting of various calcium phosphates is described. Calcium phosphates phases were synthesized from eggshells. Some physicochemical properties were taken into account to produce a balanced blend of biomimetic phosphates. Two of these mixtures were applied in *Wistar* rats premolars. The biological acute and chronic pulpar response was evaluated. This preliminary assessment indicates the feasibility of pursuing further studies on these composite materials for human use.

**Key words:** Bioceramics, calcium phosphates, dental pulp, biomimetic.

---

Grupo Aplicación de Materiales a la Odontología (GRAMO).

1 Departamento de Química.

2 Laboratorio de Microscopía.

3 Facultad de Odontología.

4 Departamento de Química. Universidad Nacional de Colombia. Sede Bogotá.

\* Correo electrónico: edelgadam@unal.edu.co Avenida Carrera 30 #45-03, Bogotá. Fax +57 1 3165220.

## Introducción

Los tejidos calcificados (hueso, dentina y esmalte) están constituidos de una parte orgánica y una mineral. El contenido mineral alcanza el 70% en la dentina y 96% en el esmalte dental (**Pashley D, Walton R.** 1997). El mineral es hidroxiapatita (HA) no estequiométrica con sustituciones de  $Mg^{2+}$ ,  $Na^+$ ,  $K^+$ ,  $CO_3^{2-}$ ,  $HPO_4^{2-}$ , F y vacancias. La composición química, la morfología cristalina y la distribución de cristales de las apatitas biológicas varían según las especies, los tejidos y la edad de los individuos (**Doremus RH,** 1992; **LeGeros RZ,** 1991).

En tejidos duros, las biocerámicas podrían ser los biomateriales de sustitución ideales, ya que poseen una buena biocompatibilidad e integración con estos tejidos y, a su vez, son los materiales más parecidos al componente mineral humano (Tabla 1).

### Las biocerámicas

Las cerámicas pueden ser naturales como el cuarzo, la piedra imán, el topacio, el corindón y las piedras preciosas. Pueden ser sintéticas como la alúmina, en especial las de alta pureza, las ferritas de los medios magnéticos de almacenamiento de datos, el carburo de silicio de las lijas, los transistores, los aislantes eléctricos, los superconductores, el combustible nuclear y muchísimos más.

De manera general la cerámica puede definirse como todo material inorgánico, no metálico, con enlaces iónicos o iónico-covalentes (la mayoría de materiales cerámicos son óxidos), conformado a partir de un polvo en el que la consolidación se hace con sinterización. Entre estas cerámicas existen las biocerámicas o biomateriales cerámicos y entre estas biocerámicas las más utilizadas son los compuestos de fosfato y calcio o compuestos fosfocálcicos.

Entre los compuestos fosfocálcicos se encuentra una gama muy variada de biocerámicas en donde las más biomiméticas son los fosfatos que provienen del ácido ortofosfórico. Entre estos ortofosfatos encontramos la hidroxiapatita  $Ca_{10}(PO_4)_6(OH)_2$ , el fosfato tricálcico beta  $Ca_3(PO_4)_2$ , el fosfato monocálcico monohidratado  $Ca(H_2PO_4)_2 \cdot H_2O$ , el fosfato octacálcico  $Ca_8(HPO_4)_2(PO_4)_4 \cdot 5H_2O$ , el fosfato dicálcico dihidratado  $CaHPO_4 \cdot 2H_2O$ , el fosfato monocálcico anhidro  $Ca(H_2PO_4)_2$ , el fosfato tetracálcico  $Ca_4(PO_4)_2O$ , la carboapatita  $Ca_{10}(PO_4)_3(CO_3)_3(OH)_2$ , el fosfato dicálcico anhidro  $CaHPO_4$  y el fosfato de calcio amorfo. La mayoría de estos se encuentran en tejidos naturales en condiciones naturales o patológicas (**Mathai M, Ahozo T.** 2001).

Las cerámicas mono o dicálcicas son muy ácidas y en la actualidad tienen aplicaciones restringidas principalmente a los biocementos y a otras pocas aplicaciones. Las características esenciales de estas cerámicas, especialmente las menos ácidas, son la biocompatibilidad y la bioactividad. La biocompatibilidad inerte puede describirse como ausencia de toxicidad, de inflamación y de generación de respuesta a cuerpo extraño. La bioactividad se define como ausencia de toxicidad, ausencia de inflamación con interacción constructiva con las células y tejidos vivientes circundantes.

Los fosfatos cálcicos, especialmente los sinterizados o los obtenidos por sinterización reactiva, son materiales cerámicos. La apatita es un material cerámico natural que se encuentra en yacimientos geológicos frecuentemente como fluoroapatita. Estos mismos dos minerales a su vez se encuentran en sistemas vivos donde hacen parte del metabolismo de varios iones, principalmente del calcio que se almacena en fase sólida y proporciona soporte

**Tabla 1.** Comparación de la composición inorgánica de tejidos calcificados con un material cerámico (**Dorozhikin SV, Epple M.** 2002).

Composición	Esmalte	Dentina	Hueso	Hidroxiapatita
Calcio [wt%]	36,5	35,1	34,8	39,6
Fósforo (P) [wt%]	17,7	16,9	15,2	18,5
Ca/P (relación molar)	1,63	1,61	1,71	1,67
Sodio [wt%]	0,5	0,6	0,9	-
Magnesio [wt%]	0,44	1,23	0,72	-
Potasio [wt%]	0,08	0,05	0,03	-
Carbonato ( $CO_3^{2-}$ ) [wt%]	3,5	5,6	7,4	-

mecánico y funcionalidad como instrumento de defensa y masticación para la digestión. Una biocerámica puede ser una cerámica natural como las constituyentes de tejidos duros pero también abarca las cerámicas sintéticas que tienen aplicaciones médicas y odontológicas.

La palabra biomimético designa los procesos o los materiales que se han obtenido imitando las condiciones de proceso o las características finales de los materiales naturales de los seres vivos. El esmalte dental que es hidroxiapatita en un alto porcentaje debe su dureza a una sinterización biológica lenta pero muy eficiente que se lleva a cabo a temperatura corporal.

La apatita que el hombre produce artificialmente no tiene la maravillosa microestructura de la natural y la endurecemos en poco tiempo por sinterización a temperaturas cercanas a los 1000°C. Esta temperatura definitivamente no es biomimética. Las propiedades mecánicas de la HA policristalina artificial son pobres comparadas con las de la HA natural o sea la perfectamente biomimética.

#### **Bio-Remineralización dental en recubrimiento pulpar directo**

La biomineralización es la elaboración de una matriz orgánica seguida de una nucleación heterogénea ionotrópica de sales de calcio a partir de una solución acuosa para formar un tejido duro. La mineralización es un proceso complejo en donde intervienen diferentes tejidos y células, factores de origen celular, moléculas y especies químicas que participan en reacciones químicas asociadas con las células. La primera etapa del proceso de mineralización es la sobresaturación de iones de calcio y fosfato en el medio. Esta condición no es suficiente para la mineralización, ya que no es sólo un fenómeno físico-químico, también los factores biológicos intervienen. El paso de estado líquido a estado sólido se llama nucleación, es decir, formación del primer núcleo sólido a partir de iones individuales. Para formar un núcleo estable, los iones se tienen que ordenar de forma apropiada. Si el tamaño del núcleo en la solución es estable y suficiente, se puede generar crecimiento cristalino y la formación de un primer cristal (**Posner AS**, 1985).

El tejido vivo de los dientes o sea la pulpa puede quedar expuesta por causas traumáticas, de caries o clínicas y frecuentemente muere conllevando a tratamiento de conductos, muerte pulpar y pérdida del diente. Sin tratamiento las consecuencias pueden ser inflamaciones, infecciones, encefalitis, meningitis y muerte.

El recubrimiento pulpar es la colocación de un material para cubrir y proteger la pulpa, evitar su muerte y

permitir la cicatrización de la pulpa por medio de un proceso de bio-remineralización. El recubrimiento, entre otros beneficios, protege el diente e induce el cierre del extremo apical de la raíz dental. El producto más utilizado para este recubrimiento es el hidróxido de calcio además de algunas cerámicas biocompatibles o también de polímeros. El recubrimiento pulpar tiene varios propósitos, el primero es proteger la pulpa de la agresión continuada y agravante, el segundo es el mantenimiento de la vitalidad del diente tratado. La protección de la pulpa vital busca llevar, en un tiempo prolongado, a la regeneración de la dentina por la producción que realiza la pulpa viva de un tipo de dentina llamada terciaria para reemplazar la dentina primaria o secundaria que se destruyó debido a diferentes causas. Este proceso de regeneración por bioremineralización lo realizan células especializadas llamadas odontoblastos

Se ha demostrado que la utilización de hidroxiapatita pura en ratas, algunas veces, genera una reacción inflamatoria y una necrosis superficial en el tejido de la pulpa dental. El fosfato tricálcico ha demostrado dar buenos resultados y se ha observado neoformación de dentina alrededor de los gránulos de cerámica, mostrando ser superior al  $\text{Ca}(\text{OH})_2$  en algunas oportunidades (**Merray PE et al.** 2002).

Se han utilizado otros materiales para este fin, como resinas compuestas, adhesivos, ionómeros, etc. (**Elledge DA**. 1998, **Jean A et al** 1988) y se ha demostrado que las cerámicas, más que otros materiales, tienen una buena biocompatibilidad y una posible acción de regeneración tisular.

La integración entre el material cerámico y el tejido tiene 3 fases: la primera es una reabsorción, la segunda es la interposición de capas de tejido fibroso que a su vez se da en varias etapas: se generará una inflamación, y luego vendrán al lugar células osteogénicas especializadas que son controladas por varios factores y en la tercera fase vendrá una mineralización en donde se sabe que existe una transformación de odontoblastos a odontoblastoides que son los que posteriormente secretan la matriz para mineralización que se reboseará de iones de calcio y fosfato generando finalmente los cristales de hidroxiapatita (**Ten Cate A.R.** 1989).

Este artículo muestra el proceso de diseño e implementación de materiales biomiméticos cerámicos según sus propiedades fisicoquímicas, con el fin de compararlas con las del hidróxido de calcio, para obtener una cerámica compuesta que supere el desempeño de éste último. Al mismo tiempo, se quiere mostrar un estudio preliminar en

donde se utilizaron dos cerámicas biomiméticas no estequiométricas (llamadas QCP1 y QCP2), sintetizadas a partir de cáscara de huevo en el Departamento de Química de la Universidad Nacional de Colombia. Las dos cerámicas utilizadas están compuestas por fosfato tricálcico (TCP), hidroxiapatita (HA) sinterizada y HA no sinterizada unida a otros compuestos o elementos químicos tales como carbonatos, potasio, sodio, cloro y magnesio, entre otros combinados en diferentes proporciones para dar origen a los dos materiales cerámicos antes mencionados y determinar su capacidad de interacción con el tejido vivo, para una posible regeneración dentinal en recubrimientos pulpares directos usando normas internacionales (**American Dental Association**, 1972,1979, **Norma ISO 7405**, 1997).

## Metodología

### Selección de materiales

El primer factor que se tuvo en cuenta fue la composición química de la o las fases que se van a emplear. Para que los resultados sean más cercanos a los de los materiales naturales se debe buscar que la composición química sea lo más biomimética posible por lo que se analizó la composición reportada en literatura para esmalte y dentina y se seleccionaron tanto un material de partida para la síntesis como un proceso biomimético.

Aunque los huesos tienen composición muy parecida a la de los otros tejidos duros como la dentina, se decidió no emplearlo debido a que por las propiedades de intercambiador iónico de la HA, en el material óseo se acumulan los iones benéficos y además los metales pesados con consecuencias negativas en el funcionamiento de los materiales implantados. Se seleccionó un material de desecho con constitución iónica muy parecida a la de la dentina que es la cáscara de huevo de gallina ya que consta en su parte inorgánica casi totalmente de carbonato de calcio (98%) y el 2% restante es carbonato de magnesio y pequeñas cantidades de iones sodio, potasio y fosfato. La composición global de los tejidos duros también se puede obtener por mezcla de compuestos puros que contengan los iones mencionados en cantidades apropiadas pero esto conlleva complejidad al requerir un número de reactivos analíticos que contengan como iones mayoritarios los recién mencionados y que no contengan elementos pesados o extraños a los organismos vivos. Así que como material de partida se empleó la cáscara de huevo. Los análisis de fluorescencia de rayos X, de difracción de rayos X, de análisis térmico diferencial, termogravimétrico e infrarrojo de la cáscara justifican ampliamente esta selección.

### Selección de la fuente de calcio y del proceso

Para llegar a materiales más biomiméticos es preciso que el tratamiento químico no dañe el balance de iones del material de partida. Se decidió emplear como vía de síntesis la reacción ácido base heterogénea (líquido-sólido) debido a que además de las fases cerámicas de fosfatos de calcio el único subproducto es agua y esto favorece la alta biocompatibilidad. Esta vía empieza por la descomposición térmica de la cáscara de huevo a 1000°C, temperatura que asegura la eliminación de toda materia orgánica de la cáscara que podría generar respuesta inmunológica a los implantes. Además el carbonato se descompone completamente para dar CaO. Este se hace reaccionar con exceso de agua desmineralizada para obtener el hidróxido. Este se suspende en agua y se hace reaccionar con solución acuosa de ácido ortofosfórico para obtener el fosfato de calcio deseado. Por tratarse de un sistema heterogéneo la reacción no se completa a pesar de tiempos de reacción prolongados y agitación fuerte y permanente. Para favorecer la biomimeticidad se sustituyó en todo el proceso el agua por suero biológico artificial (SBA) que contiene los iones inorgánicos más abundantes en concentraciones iguales a las del suero sanguíneo humano de forma tal que el proceso no drene los iones originales de la cáscara si no que los mantiene y puede incorporar a los sólidos nuevos iones en concentraciones biológicas.

### Selección de las fases

El material cerámico biocompatible por excelencia para tejidos duros comprobado en estudios clínicos es la HA. Esta se obtiene en la síntesis descrita anteriormente en forma nativa y la usada en implantes es la HA sinterizada a temperaturas que varían entre 900 y 1200°C según algunas propiedades de los polvos antes de sinterizarlos. Las cerámicas sinterizadas son muy poco porosas, densas y tienen baja solubilidad. Como la remineralización la efectúan células que no se desplazan por los fluidos biológicos si no que lo hacen por superficies sólidas, es conveniente aportar un material como la HA sinterizada que ofrezca soporte físico estable, cosa que se logra bien pues la HA sinterizada tiene una solubilidad bastante pequeña ( $-\log K_{sp} = 116,8$  (**Dorozhikin SV, Epple M.** 2002) que la hace muy poco resorbible y tiende a ser más un material biocompatible inerte que un material biocompatible activo (Tabla 2). Así que se decidió que esta HA debía ser un componente del material a ensayar.

Sin embargo, los odontoblastos para poder crear neodentina requieren de calcio y fósforo en solución que otras células existentes en la pulpa pueden disolver con

**Tabla 2.** Propiedades relevantes de algunos fosfatos de calcio (Dorozhikin SV, Epple M. 2002).

[a] No precipitan en solución a ningún pH y se deben obtener en fase sólida.

Componente	Fórmula	Solubilidad a 25°C - log(K <sub>sp</sub> )	Solubilidad a 37°C - log (K <sub>sp</sub> )	pH: estabilidad en solución acuosa a 25°C
Brushita, fosfato dicálcico dihidratado	CaHPO <sub>4</sub> .2H <sub>2</sub> O	6,59	6,63	2,0-6,0
Fosfato octacálcico	Ca <sub>8</sub> (HPO <sub>4</sub> ) <sub>2</sub> (PO <sub>4</sub> ) <sub>4</sub> .5H <sub>2</sub> O	96,6	95,9	5,5-7,0
α-fosfato tricálcico	α-Ca <sub>3</sub> (PO <sub>4</sub> ) <sub>2</sub>	25,5	25,5	[a]
β-fosfato tricálcico	β-Ca <sub>3</sub> (PO <sub>4</sub> ) <sub>2</sub>	28,9	29,5	[a]
Hidroxiapatita	Ca <sub>10</sub> (PO <sub>4</sub> ) <sub>6</sub> (OH) <sub>2</sub>	116,8	117,2	9,5-12

flujo muy pequeño desde tejidos duros (Guevara CI, Delgado E. 2006). También en la irrigación sanguínea hay concentraciones de ambos elementos en bajas concentraciones. Por lo anterior parece necesario aumentar las concentraciones de calcio y fósforo disponibles en el sitio del implante para que se de una remineralización acelerada. Esto se implementó de dos formas, la primera con la incorporación de HA no sinterizada que tiene una solubilidad mayor que no corresponde a la del material cristalino. Este suministro de iones será un poco más elevado que el natural y estable por largo tiempo. Cabe anotar que las HA sintetizadas en laboratorio para este material compuesto fueron HAs no estequiométricas debido no solamente a las vacancias frecuentes en este material si no también a la existencia de cationes mono y bivalentes así como a sustitución de carbonato tipo A y o B que desvían la relación Ca/P del valor de 1,67.

Para lograr un aporte de iones calcio y fósforo de mayor concentración es necesario recurrir a otras fases de entre las que se seleccionó el fosfato tricálcico beta con estructura de whitlockita debido a la estabilidad conferida por la pequeña cantidad de magnesio proveniente de la cáscara y del SBA del proceso. Esta cerámica tiene un  $-\log K_{sp} = 25,5$  (Dorozhikin SV, Epple M. 2002) que indica el papel de aporte incrementado de los iones mineralizantes.

Los tejidos de restauración inducidos por implantes de HA de alta pureza son diferentes a los tejidos naturales porque estos se han formado en un ambiente que contiene CO<sub>2</sub> de la respiración y carbonatos y la HA es capaz de intercambiar iones, entre ellos el ión carbonato en dos posiciones estructurales llamadas A y B. La A solamente sucede cuando el carbonato se incorpora durante la formación de la cerámica pues estos sitios son estructurales inamovibles y cuando la exposición es tardía el intercambio ya es imposible. La sustitución B se puede dar durante o des-

pues de la formación. Así que la HA natural tiene ambas sustituciones y la sintética de alta pureza no tiene ninguna sustitución y en contacto con fluidos biológicos solamente puede tener la sustitución B. Por esta razón durante la síntesis del material biomimético se incorporó el carbonato y además se agregó como una fase cerámica adicional en el material polifásico sintético, para acelerar lo que los histólogos llaman la maduración del tejido neoformado.

A la luz de lo discutido es más fácil diagnosticar ahora los limitantes que tiene el material tradicionalmente usado en la terapia de recubrimiento pulpar directo o sea el hidróxido de calcio. Este es un material con pH cercano a 13 que lo hace cáustico. Su pH tan básico puede inducir la muerte del tejido pulpar en diente por alta irritabilidad al tejido. Esto explica la disparidad de resultados obtenidos con este hidróxido pues a veces cura a veces necrosa, dependiendo de la salud de la pulpa. Si es saludable aguanta el choque y si está débil la mata. Sin embargo el hidróxido tiene una gran ventaja y es que su pH esteriliza, factor extremadamente importante ya que si se da infección pulpar no hay material mineralizante que sirva y la infección puede tener resultados fatales.

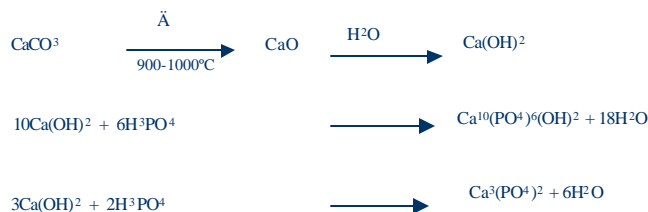
Otra desventaja que se le encuentra al hidróxido es que aporta únicamente calcio y no fósforo. Este problema se resuelve con la selección de las tres fases fosfocálcicas ya mencionadas. El problema del pH también se resuelve en la misma forma ya que las cerámicas son menos alcalinas que el Ca(OH)<sub>2</sub>. Queda el problema de mantener la asepsia para lo cual una opción sería adicionar un antibiótico a la cerámica, cosa que se consideró indeseable y por lo que se recurrió a incluir trazas de hidróxido de calcio en las otras fases cerámicas de forma tal que se mantiene la asepsia del material pero el efecto del pH no es duradero pero si suficiente para que se pueda llevar a cabo la implantación y obturar la restauración.



Para mejorar la homogeneidad del material el  $\text{Ca}(\text{OH})_2$  y la HA no se dosificaron aparte si no que se obtuvieron en mezcla íntima por control de las reacciones de síntesis y así se dosificó.

### Producción

Para aplicar los conceptos del diseño del material cerámico polifásico descrito, se sintetizaron los varios componentes cerámicos mencionados, se caracterizaron por técnicas de difracción de rayos X, fluorescencia de rayos X, análisis térmico diferencial, análisis termogravimétrico, espectroscopia infrarroja por transformada de Fourier, tamaño de partícula por sedigravimetría de rayos X y análisis químico por vía húmeda de la relación Ca/P. La mezcla de fases se secó, se molió y homogenizó en mortero vibratorio de ágata, se empacó en cantidades de 0.2 g en recipientes herméticos de vidrio grado farmacéutico, se sellaron los recipientes y se esterilizaron con radiación gama. Se prepararon dos composiciones que se bautizaron QCP1 y QCP2 que se diferenciaban en la proporción de las múltiples fases (Díaz CC, 2003).



### Implantación

Las cerámicas QCP1 o QCP2 se implantaron en molares de ratas *Wistar*, al igual que el hidróxido de calcio como material de control, bajo el manejo de bioterio certificado.

Para evaluar su comportamiento biológico sobre la pulpa dental, se establecieron dos grupos de ratas:

Grupo 1: **respuesta aguda**, ratas sacrificadas 3 días después de la implantación de los diferentes materiales.

Grupo 2: **respuesta crónica**, ratas sacrificadas 90 días después de la implantación de los diferentes materiales.

Para este trabajo, se utilizaron quince ratas *Wistar* de 3 meses de edad y de un peso aproximado de 250 gramos.

Se utilizaron diez molares para cada uno de los materiales y cinco para el material control, en cada uno de los grupos (1 y 2). En cada molar se realizó una cavidad oclusal clase I, previa desinfección con peróxido de hidrógeno 3% (vol/vol) y clorhexidina, luego de desinfectado el molar, se hizo una cavidad con fresa de diamante de un cuarto de milímetro de diámetro, hasta llegar a una exposición pulpar mínima, para lo cual se utilizó una lupa. La hemorragia se controló con torundas de algodón estéril. Al limpiar el área, se aplicó una pequeña cantidad (1 mm de espesor, aproximadamente) de hidróxido de calcio o de los materiales QCP1 o QCP2, respectivamente, sobre la exposición. Para implantar el material, previamente, se mezcló el polvo con agua esterilizada hasta formar una pasta espesa aplicable con un bruñidor de bola esférica. Finalmente, se restauró la cavidad con amalgama de plata, como material permanente.

tado el molar, se hizo una cavidad con fresa de diamante de un cuarto de milímetro de diámetro, hasta llegar a una exposición pulpar mínima, para lo cual se utilizó una lupa. La hemorragia se controló con torundas de algodón estéril. Al limpiar el área, se aplicó una pequeña cantidad (1 mm de espesor, aproximadamente) de hidróxido de calcio o de los materiales QCP1 o QCP2, respectivamente, sobre la exposición. Para implantar el material, previamente, se mezcló el polvo con agua esterilizada hasta formar una pasta espesa aplicable con un bruñidor de bola esférica. Finalmente, se restauró la cavidad con amalgama de plata, como material permanente.

Los animales se sacrificaron en dos tiempos quirúrgicos: siete animales a los 3 días y ocho animales a los 3 meses después de colocar el material. se extrajeron los molares que tenían tratamiento con las dos cerámicas y el material de referencia.

Para la respuesta biológica aguda (Grupo 1) se realizaron los siguientes tres análisis:

1. Análisis histopatológico de las muestras, teniendo en cuenta tres niveles así:

Nivel 0, no se encontraron cambios histopatológicos.

Nivel 1, se encontraron cambios histopatológicos moderados.

Nivel 2, se encontraron cambios histopatológicos graves.

2. Análisis radiográfico en la respuesta aguda de los molares Se determinaron cuatro aspectos, así:

0, no hay cambios radiográficos.

1, se presenta un ensanchamiento periapical leve en el molar tratado.

2, se presenta un ensanchamiento periapical grave en el molar tratado.

3, se presentan otros cambios como reabsorciones radiculares internas y externas y calcificaciones intrapulparas.

1. Análisis del comportamiento de los animales.

Los animales del bioterio se observaron continuamente para determinar cambios en el comportamiento que suponen dolor, como pérdida del apetito, inquietud o sueño exagerado.

Para evaluar la respuesta crónica a los materiales, se tomaron dos de las muestras de cada uno de los grupos y

del material control, se prepararon y se llevaron a microscopía óptica. De igual manera, se tomaron otras dos muestras de cada material para llevarlas al microscopio electrónico de barrido; en este último caso, las muestras no sufrieron el proceso de desmineralización.

Se determinaron cuatro parámetros, así:

1. Presencia del puente dentinal,
2. Ausencia del puente dentinal,
3. Presencia de dentina terciaria, y
4. Ausencia de dentina terciaria.

### Resultados y discusión

La caracterización de las cerámicas fue realizada en trabajos anteriores realizados por el grupo de trabajo en donde se confirmó la obtención de hidroxiapatita y fosfato tricálcico (Díaz CC, 2003).

Los materiales que sintetizamos y usamos en este trabajo tienen varias ventajas con respecto al  $\text{Ca}(\text{OH})_2$ : son más fisiológicos, pues su pH es de 7 a 8, mientras que el del  $\text{Ca}(\text{OH})_2$  es de 12, aproximadamente. Nuestras cerámicas son materiales multifásicos que proveen iones  $\text{Ca}^{++}$  y  $\text{HPO}_4=$  de manera pronta y sostenida, lo que permite que se forme un esqueleto en el material con la hidroxiapatita sinterizada, la cual tiene una solubilidad de aproximadamente  $117,2 (-\log K_{sp})$  por otra parte, el  $\beta$ -fosfato tricálcico se va reabsorbiendo permitiendo la entrada de la matriz de colágeno que se va mineralizando.

El  $\beta$ -fosfato tricálcico no se encuentra en sistemas biológicos. Sin embargo, es muy importante y relevante en un proceso de mineralización, ya que éste, después de una saturación inicial de iones calcio y fósforo en el medio, pasa a convertirse en fosfato octacálcico. Posteriormente, se convierte en hidroxiapatita, la cual sufre un proceso de maduración con ayuda de los carbonatos y se convierte, a su vez, en carbonatoapatita: finalmente, se conforman los núcleos de calcificación y terminan en una



**Figura 1.** Ratas Wistar en el momento en que se preparan las diferentes cavidades y se coloca el material. Nótese el espacio reducido para realizar el procedimiento.

matriz mineralizada (Dorozhikin SV, Epple M. 2002, Jean A, 1988).

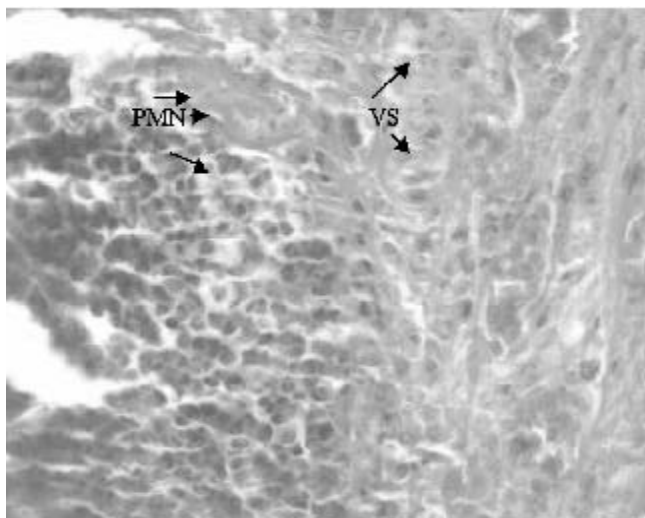
Los resultados de las muestras analizadas en el microscopio óptico se muestran en la Tabla 3. El 75% de los molares implantados con el material QCP1 sufrieron algún grado de inflamación, con presencia de polimorfonucleares neutrófilos y, posiblemente, eosinófilos; mientras que los molares implantados con QCP2 no mostraron inflamación pulpar en ninguno de los molares evaluados, es decir, hubo 100% de biocompatibilidad. Si bien el hidróxido de calcio mostró una buena aceptación por parte de la pulpa, hubo uno, de seis molares, que resultó con inflamación grave.

Tanto en los molares con QCP1 como en aquéllos con hidróxido de calcio, las pulpas inflamadas mostraron una inflamación típica: presencia de polimorfonucleares, aumento de los vasos sanguíneos, desprendimiento de la empalizada odontoblástica y pérdida de la homogeneidad de la matriz colágena (Figuras 2 y 3).

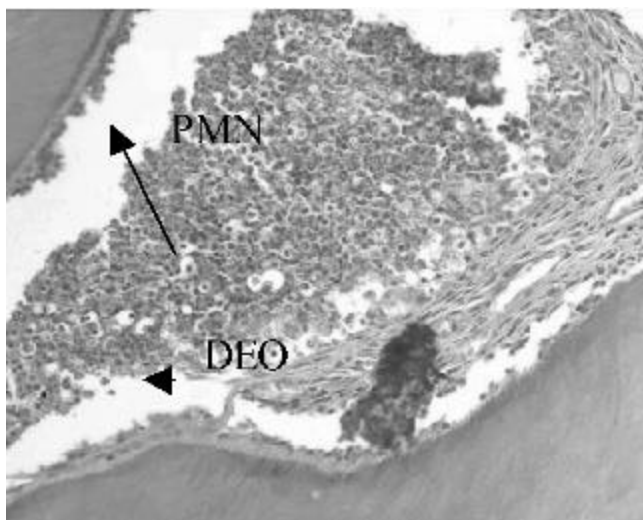
La respuesta positiva del QCP2 se podría explicar por el pH fisiológico y por las propiedades biomiméticas del

**Tabla 3.** Resultados del estudio histopatológico de las muestras, tres días después de la colocación de los diferentes materiales.

Material	Sin cambios histopatológicos	Inflamación pulpar moderada	Inflamación pulpar grave
QCP1	2	5	1
QCP2	9	0	0
$\text{Ca}(\text{OH})_2$	5	0	1



**Figura 2.** Microscopía óptica del material QCP1. Se observa importante infiltrado de polimorfonucleares neutrófilos (PMN), exceso de vasos sanguíneos (VS) y pérdida de la homogeneidad en la matriz de colágeno (MC); (40X).



**Figura 3.** Microscopía óptica del material QCP1. Se observa importante infiltrado de polimorfonucleares neutrófilos (PMN) y desprendimiento de la empalizada odontoblástica (DEO); (20X).

material. Además, podría afirmarse que el uso de carbonatos no es benéfico para la integración del material, ya que este componente era el único que difería entre QCP2 y QCP1, cuyos resultados tuvieron una diferencia estadísticamente significativa ( $p = 0,002$ ).

Ahora bien, por la presencia de inflamación pasadas 72 horas, no se puede considerar un hecho la necrosis de la pulpa. Algunos autores afirman que la inflamación posoperatoria puede desaparecer hasta 8 días después de la agresión (Mjör Ivar A. 2002).

El estudio radiográfico presentó una gran concordancia con lo encontrado en el estudio histopatológico. Sin embargo, debe considerarse como un análisis complementario y no de diagnóstico. Los resultados se presentan en la Tabla 4. Se observa que tanto el QCP1 como el  $\text{Ca}(\text{OH})_2$  presentan un importante ensanchamiento periapical y no se encuentran cambios radiográficos en el material QCP2.

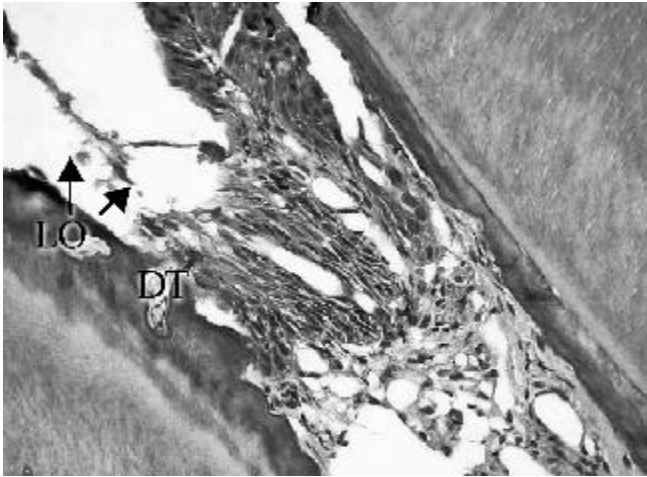
En la respuesta crónica de la pulpa dental con los diferentes materiales sintetizados y el hidróxido de calcio, se quisieron determinar dos aspectos principales: neoformación de dentina terciaria y presencia de puente dental.

Las muestras de QCP1, QCP2 y el hidróxido de calcio presentaron neoformación dental con un patrón de crecimiento vertical y no horizontal que es el que permite la formación de puente dental. De igual manera, se pudo observar que el nuevo tejido formado en los tres materiales se caracterizó por ser una osteodentina (dentina en donde hay una formación de lagunas); en ella se observa cómo la matriz mineral se va formando y va encapsulando los odontoblastos (Figura 4), estas observaciones se hicieron tanto en el microscopio óptico como en el electrónico de barrido. Igualmente, en los dientes tratados con QCP1 y en los tratados con QCP2, se puede observar la formación de una matriz densa, inmadura, pero mucho más homogénea que la encontrada con el hidróxido de calcio y que posteriormente se mineraliza.

En el proceso de mineralización de la dentina, existen unas células que juegan un papel muy importante, denominadas células odontoblastoides (*odontoblast-like cells*)

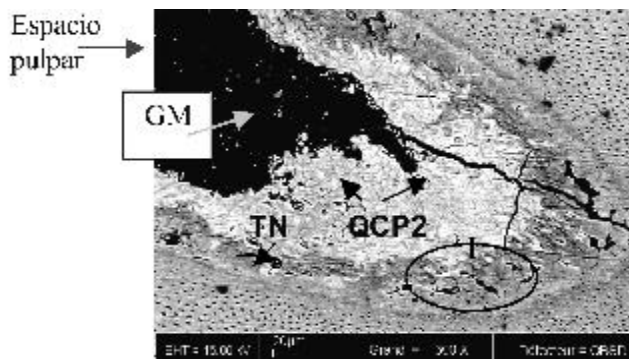
**Tabla 4.** Resultados del estudio radiográfico de las muestras, tres días después de la colocación de los diferentes materiales.

Material	Sin cambios radiográficos	Ensanchamiento periapical leve	Ensanchamiento periapical grave
QCP1	3	5	1
QCP2	7	2	0
$\text{Ca}(\text{OH})_2$	4	1	1



**Figura 4.** Microscopía óptica del material QCP2. Se observa formación de lagunas de osteodentina (LO) y matriz de posible dentina terciaria (DT); (40X).

que, posiblemente, se diferencian a partir de fibroblastos pulpareos y que se convierten en las células que secretan la matriz de mineralización (Mjör Ivar A. 2002, Goldberg M, Smith A. 2004). Estas células se observaron en este trabajo con el material QCP2 (Figura 4). Se ha determinado que estos cambios morfológicos en las células son directamente proporcionales a la capacidad de reparar dentina. Es interesante el hallazgo, observado con microscopía electrónica de barrido, de zonas perfectamente diferenciadas de generación y conducción (orientación) del material de la dentina neoformada, lo que demuestra una verdadera integración (Figura 5).



**Figura 5.** Microscopía electrónica de barrido del material QCP2. Se observan gránulos del material (GM) dentro de la pulpa, dentina terciaria, material QCP2 y una verdadera integración del material (I) y el nuevo tejido formado (TN); (300X).

Todas las muestras observadas tanto en MO como en microscopio electrónico SEM presentaron neoformación dentinal con un patrón de crecimiento vertical y no horizontal que permitiera la formación de un puente dentinal. Se demuestra la generación y conducción del material con la dentina neoformada, y una verdadera integración entre el material, el tejido existente y el nuevo tejido (figura 1).

De manera general podemos decir que la biocerámica QCP2 presentó la mejor biocompatibilidad obteniendo no solamente un 100% de éxito en la evaluación aguda sino adicionalmente presentando una buena homogeneidad y densidad de la dentina terciaria neoformada e inclusive una posible organización de los túbulos dentinales. Igualmente el material QCP2 mostró una verdadera integración con la dentina ya existente. Futuros estudios pueden profundizar en la inocuidad y biocompatibilidad en el material QCP2 cuyos resultados son buenos, siguiendo la normalización de estudios tanto in Vitro como in Vivo para usar en humanos e incluso explorar otras posibles indicaciones como pueden ser: apicoformación o apicogénesis, pulpotomías, resorciones, obturaciones retro y perforaciones dentales entre otras.

Se necesitan estudios complementarios para resolver los problemas presentados en la técnica en cuanto al tamaño de la cavidad, el tiempo esperado para la respuesta crónica, la posible toxicidad del carbonato en este tipo de terapias, la influencia en el porcentaje de las diferentes fases y la importancia que tiene el tamaño de partícula en la respuesta de la pulpa dentaria.

## Conclusiones

Los resultados positivos de regeneración de dentina terciaria incipientemente estructurada como respuesta pulpar a los implantes de cerámicas multifásicas biomiméticas QCP1 y QCP2 diseñadas sobre los principios aquí descritos parecen indicar que los conceptos tenidos en cuenta son decisivos en el buen funcionamiento tanto fisicoquímico como biológico y tisular.

## Agradecimientos

Deseamos agradecer a la DIB – División de Investigaciones de la Sede Bogotá de la Universidad Nacional de Colombia por la financiación del proyecto 203004; a la Universidad de Nantes (Francia)- Laboratorio INSERM de Investigación sobre Materiales de Interés Biológico, Ing. Paul Pilet por su ayuda con Microscopía Electrónica y al personal del Bioterio Central de la Sede Bogotá de la Universidad Nacional de Colombia por la cooperación en este trabajo.

**Bibliografía**

1. **American Dental Association.** 1972. Council on dental materials and devices: recommended standard practices for biological evaluation of dental materials. *J Am Dent Assoc.* **84**: 382.
2. ————— 1979. Recommended standard practices for biological evaluation of dental materials. *J Am Dent Assoc.* **99**: 697.
3. **Díaz, CC.** 2003. Síntesis de fosfatos de calcio biológicos a partir de cáscara de huevo de gallina. *Tesis de grado.* Dpto. de Química, Facultad de Ciencias, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá D. C.
4. **Doremus, RH.** 1992. Review bioceramics. *J Mater Sci.* **12**: 285-297.
5. **Dorozhikin SV, Epple M.** 2002. Biological and medical significance of calcium phosphates. *Ang. Chem. Int.* **41**: 3130-3146.
6. **Elledge DA.** 1998. Multifuncional bases and liners. *Dent Clin North Amer.* **42**(4): 739-754.
7. **Goldberg M, Smith A.** 2004. Cells and extracellular matrices of dentin and pulp: a biological basis for repair and tissue engineering. *Crit Rev Oral Biol Med.*; **15**(1): 13-27.
8. **Guevara CI, Delgado E.** 2006 Estudio de la Interacción Superficial de un Material Cerámico Multifásico Biomimético con el Tejido Dentino Pulpar. *Tesis de maestría*, Universidad Nacional de Colombia, sede Bogotá D.C.
9. **Jarcho M.** 1981 Calcium phosphate ceramics as hard tissue prosthetics. *Clin Orthop.* **157**: 259-278.
10. **Jean A, Kerebel LM, Kerebel B, Legeros R, Hamel H.** 1988 Effects of various calcium-phosphate biomaterials on reparative dentin bridge formation. *J Endod.* **14**:83-87.
11. **LeGeros RZ.** 1991 Calcium phosphates in oral biology and medicine. En: Myers HM, editor. Monographs in oral science. San Francisco.
12. **Mathai M, Ahozo T** 2001. Structures of biological minerals in dental research. *J Res Natl Inst Stand Technol*; **106**: 1035-1044.
13. **Mjör Ivar A.** 2002 Pulp-dentin biology in restorative dentistry. Part 7: The exposed pulp. *Quintessence Int.* **33**: 113-135.
14. **Murray PE, Windsor LJ, Smyth TW.** 2002. Analysis of pulpal reactions to restorative procedures, materials, pulp capping and future therapies. *Crit. Rev. Oral Biol Med*; **13**(6): 509-520.
15. **Nooshi H.** 1986 Studies on the adsorption of proteins to synthetic hydroxyapatite. *J Osaka Odont Soc.* **49**: 531-549.
16. **Norma ISO 7405 Draft International Standard ISO/DIS 7405.** 1997. Preclinical evaluation of biocompatibility of medical devices used in dentistry- Test methods. International Organization for Standardization. Genève. Switzerland.
17. **Pashley D, Walton R.** 1997. Histología y fisiología de la pulpa dental. En: Ingle J, Bakland L, editores. Endodoncia. Editorial Mc Graw Hill. 4ta ed. México.
18. **Posner AS.** 1985. The mineral bone. *Clin Orthop.* **200**: 87-99.
19. **Ten Cate A.R.** 1989. Hard tissue formation and destruction. En: Reinhardt RW, editor. Oral histology: development, structure and formation. Toronto. Canadá.

Recibido el 10 de julio de 2006

Aceptado para su publicación el 15 de septiembre de 2006

# EL IMPACTO DE LA PRODUCCIÓN BIBLIOGRÁFICA DE NUEVO CONOCIMIENTO EN CIENCIA, TECNOLOGÍA E INNOVACIÓN EN COLOMBIA DE 1996 AL 2005

por

Liliana Castro<sup>1</sup>, Álvaro Montenegro<sup>2</sup>, Javier Rodríguez <sup>2</sup>, Camilo Torres<sup>3</sup>, Doris Velásquez<sup>3</sup>, Lina Franco<sup>3</sup>, Mauricio Arias<sup>3</sup> & Felipe García Vallejo<sup>1 (✉)</sup>

## Resumen

Castro, L., A. Montenegro, J. Rodríguez, C. Torres, D. Velásquez, L. Franco, M. Arias & F. García Vallejo: El impacto de la producción bibliográfica de nuevo conocimiento en ciencia, tecnología e innovación en Colombia de 1996 al 2005. Rev. Acad. Colomb. Cienc. 30 (117): 605-613, 2006. ISSN 0370-3908.

A partir de los datos consignados en la base nacional de productos y de la plataforma Scienti-Colombia, se realizó un análisis cuantitativo del impacto de la producción científica, de los grupos de investigación en nuestro País. De la producción bibliográfica 1996 al 2005 registrada por los 1825 grupos reconocidos, se identificaron un total de 30123 publicaciones en revistas científicas de circulación periódica indexadas u homologadas; el 19,33% fueron en revistas que registraron factor de impacto. El 47,7% se registró en el área de las Ciencias de la Vida y la Salud y un 37,4% en el de las Ciencias Exactas, Físicas y Naturales

**Palabras clave:** Factor de impacto, ISI, publicaciones científicas, grupos de investigación de Colombia, índice scinticol.

<sup>1</sup> Dirección General. Instituto Colombiano para el Desarrollo de la Ciencia y la Tecnología “Francisco José de Caldas”. Colciencias. Bogotá. D.C.

<sup>2</sup> Grupo Académico CT&S-UN, Universidad Nacional de Colombia. Bogotá. D.C.

<sup>3</sup> Corporación Ciencia Tecnología y Sociedad. Bogotá. D.C.

✉ Dirigir correspondencia al: Dr. Felipe García Vallejo PhD. Director General del Instituto Colombiano para el Desarrollo de la Ciencia y la Tecnología “Francisco José de Caldas”. Colciencias. Transversal 9A Bis. # 132-28. Bogotá, D.C.

### Abstract

Using the records of the National Database of Scientific Products and the Scienti-Colombia informational platform, a quantitative analysis of the impact of the scientific production by Colombian research groups was done. Of the bibliographic production since 1996 to 2005, recorded from the 1825 recognized Colombian groups it was possible to identify **30123** scientific articles published. **The 19,33% (5825)** of scientific papers were published in scientific journal with Impact Factor (IF) as defined by ISI. The 47.7% were in life sciences and health and 37.4% in biological and physical sciences.

**Key words:** Impact factor, ISI, Scientific publications, Colombian research groups, Scienticol Index.

### Introducción

La naturaleza de las publicaciones científicas permite, en mayor o menor medida, utilizar canales exclusivos de información para los actores de la investigación y ser herramientas válidas en el proceso de clasificar investigaciones. La trascendencia especial de las publicaciones periódicas (**Arribalzaga, 1995**) se debe a los efectos que causan en el progreso de la comunidad científica mundial. Sin embargo, muchas revistas científicas de países periféricos tienen una citación menor al 2 % en comparación con las revistas editadas en países desarrollados (**Cho et al., 1999**) (**Gibbs, 1995**) (**García et al., 1998**), y los autores que en ellas publican, sienten que existe un estigma o discriminación embozada a sus trabajos con la imposibilidad de difundir sus experimentos y/o investigaciones.

Las publicaciones científicas desempeñan un papel fundamental en las distintas etapas de la actividad investigadora. Constituyen el punto de partida de cualquier investigación, pues aportan el estado del conocimiento en un tema determinado, y son el canal preferente porque darán a conocer los resultados de una investigación ya concluida. Facilitan la difusión del conocimiento, que será la base para futuras investigaciones de otros científicos, de forma que las contribuciones de sucesivas generaciones de investigadores hacen posible el crecimiento acumulativo de la ciencia y, en última instancia, el progreso científico.

Uno de los objetivos estratégicos de COLCIENCIAS, es el de contar con información y estadísticas confiables sobre la capacidad tanto del recurso humano y comunidades de grupos de investigación, como de la infraestructura con la cual cuenta el Sistema Nacional de Ciencia y Tecnología del país, para el desarrollo de la investigación en todos los campos del conocimiento. A pesar de que esta labor se viene haciendo desde principios de la década

de los noventa del siglo pasado, solamente a partir del 2001 se redefinieron los marcos conceptuales y se desarrollaron estrategias e instrumentos tecnológicos para llevar a cabo, de manera reproducible y estadísticamente confiable, la obtención de datos sobre el comportamiento del capital humano, de los recursos y de la comunidad de grupos de investigación colombianos en las diferentes áreas del conocimiento.

En el 2002, COLCIENCIAS, adaptó y desarrolló dos sistemas de acumulación y procesamiento de la información: La Base Nacional de Grupos de Investigación o GrupLAC (herramienta para el acopio de información de grupos de investigación) y el CvLAC (herramienta para el acopio de información de currículos de personas que están involucradas en la labor de generación de conocimiento en todos los niveles); ellos consintieron, por primera vez, disponer de una base de datos con información en tiempo real, proveída directamente por los investigadores la cual se ha convertido en soporte fundamental para la toma de decisiones e implementación de políticas sobre ciencia, tecnología e innovación en nuestro país. Estos desarrollos permitieron, en el 2002, clasificar a los grupos de investigación por una serie de requisitos mínimos de producción, formación de recurso humano y apropiación social del conocimiento, en una categoría de reconocidos. En noviembre de 2005 había 1825 grupos reconocidos equivalentes al 33,77% de los grupos registrados en el aplicativo Grup-LAC de la plataforma Scienti-Colombia.

En el 2004 y con el objetivo de tener información que permitiera diferenciar los grupos reconocidos entre sí, Colciencias en colaboración con la comunidad de investigadores del país, desarrolló y probó el índice Scienticol; como un instrumento cuantitativo, que permitió medir los grupos de investigación por criterios no solamente de producción sino de la calidad y el impacto de los productos de nuevo conocimiento. Con base en este índice, en el

2005 se clasificaron voluntariamente 1032 grupos de investigación en categorías, A, B, C y grupos reconocidos no medidos.

Para examinar la productividad y el impacto de la investigación científica en el mundo, se han creado diferentes indicadores bibliométricos o de indización (4), muchos de los cuales son poco conocidos, destacándose en especial el denominado factor de impacto (**Bador & Petit, 1998**) (**Lehrl, 1999**) (**Valentinuzzi, 1997**). Estos indicadores sirven para valorar la producción, difusión, consumo y repercusión de la información científica (Tabla 1).

Muchos de ellos analizan la cantidad de publicaciones científicas elaboradas por grupos de autores o revistas, la cantidad de ellas incluidas en bases de datos como el Science Citation Index (SCI) y el Social Science Citation Index (SSCI) del ISI, la obsolescencia y aislamiento de las referencias bibliográficas o su clara alusión como la visibilidad, influencia o impacto.

El factor de impacto (FI), es una medida de la frecuencia de aparición de citas de un artículo en un año o período determinado de tiempo.

El JCR (Journal Citation Reports) lo considera una más de las herramientas de carácter cualitativo útil para la evaluación. De otra parte, el FI, es un indicador bibliométrico basado en el recuento de citas del SCI y el SSCI que se calcula, para cada revista, estableciendo la relación entre las citas que en un año determinado han recibido los trabajos publicados durante los dos años anteriores, y el total de artículos publicados en ella durante esos dos años.

El factor de impacto resulta una medida útil para aclarar la significancia de las frecuencias absolutas de la cantidad de citas, esta medida elimina algunos de los sesgos ya que favorece a las grandes revistas (revistas con mayor cantidad de artículos publicados) de las pequeñas,

a las frecuentemente publicadas de las que son publicadas con poca frecuencia, y a las más antiguas de las más nuevas. Particularmente en el último caso dichas revistas tienen un cuerpo de citación más largo que aquellas más pequeñas o jóvenes, lo cual contribuye con un principio de equidad, el cual radica en que cuanto mayor sea la cantidad de artículos previamente publicados, la revista será citada con mayor frecuencia.

El índice ScientiCol (**Colciencias, 2005**) y demás medidas de la producción científica de grupos de investigación desarrolladas por COLCIENCIAS (**Colciencias, 2006**), no han considerado hasta el momento, de manera directa, medidas de impacto de los resultados de investigación debido a la dificultad de obtener indicadores adecuados. Aún en el caso de los artículos, medir el impacto de los grupos y luego de las instituciones, no es directo; debido a que los índices son calculados originalmente por revista o por investigador, basados en la referencias a los artículos respectivos. En este sentido es pues necesario desarrollar aproximaciones experimentales que valoren la contribución efectiva al conocimiento y el impacto de la producción científica bibliográfica por grupo o institución.

En este trabajo se realizó un análisis de uno de los índices de repercusión como es el FI, el cual fue modificado como un acercamiento hacia posibles estimaciones cuantitativas del impacto de la producción bibliográfica colombiana, publicada en revistas indexadas en el Science Citation Index y en Social Science Citation Index de ISI. Con base en estos resultados se efectuó un análisis de correspondencia entre el cálculo del indicador realizado por el índice Scienticol desarrollado por Colciencias en el 2005 (**Colciencias, 2005**) y el cálculo del FI para 16105 artículos de investigación publicados por grupos de investigación colombianos en revistas indexadas u homologadas entre 1996 y el 2005.

## Metodología

### Análisis de la producción científica

Para este trabajo se utilizó la información registrada en la Plataforma Scienti- Colombia que fue depurada durante la convocatoria de medición de grupos 2005 y que estaba avalada institucionalmente en el Instituto-LAC de la plataforma Scienti-Colombia. Así a diciembre de 2005, dicha información estaba totalmente normalizada y depurada. En este sentido los datos pueden considerarse como una muestra significativa de toda la información disponible en la plataforma y por lo tanto las conclusiones generales son aplicables.

**Tabla 1.** Diferentes tipos de indicadores bibliométricos.

Grupo	Detalle
De producción	- Índice de productividad - Índice de transitoriedad - Índice de cooperación - Índice de productividad fraccionada - Tasa de referencias por artículo
De circulación	- Índice de productividad circulante - Índice de circulación - Índice de difusión internacional - Zonas de distribución de Bradford



Para las publicaciones científicas periódicas se aplicó la clasificación de acuerdo con los parámetros establecidos en la base de datos Publindex desarrollada por Colciencias para indexar y/o homologar las revistas científicas nacionales e internacionales. Para otros productos, entre los que se encuentran los libros y los capítulos de libro producto de investigación, las patentes, las normas, el secreto industrial y empresarial y otros productos de nuevo conocimiento, se aplicaron diferentes criterios de existencia y de calidad, desarrollados en el índice Scienticol de Colciencias.

### Cálculo del factor de impacto para revistas

El cálculo del factor de impacto se realizó anualmente, éste es llamado factor de impacto anual, y se definió y calculó de la siguiente forma: El Factor de impacto anual, es el cociente entre la cantidad de citas y la cantidad de artículos recientemente publicados; de esta manera el factor de impacto para una revista es calculado como el cociente entre el número total de citas en el año y la cantidad de citas de los dos años anteriores (tabla 2).

A: Cantidad de citas en el año X para los artículos publicados en los dos años anteriores al año X.

B: Cantidad de artículos publicados en los dos años anteriores al año X.

C: Factor de impacto anual en el año X es A/B

En algunas disciplinas se calculó el factor de impacto por periodo de cinco años, esta modificación se hizo teniendo en cuenta la cantidad de años del periodo, la cual afecta los parámetros A y B, aunque también es válido que el parámetro B pueda ser afectado no por el número

de años comprendido en el periodo, sino por uno o dos años menos (tabla 2).

Algunos de los artículos que produjeron un gran número de citas, son los de métodos, pero aunque muchas revistas se dedican enteramente a los métodos, estos no alcanzan niveles altos en el factor de impacto; esto se debe a que muchos de los artículos citados son consideradas obras clásicas, lo cual se compensa en la limitación cronológica de estas obras, las cuales son eliminadas en el cálculo del factor de impacto.

Por otra parte, es importante anotar que en el sistema JCR cualquier artículo que contenga más de 100 referencias es codificado como revisado. Los artículos en secciones de "revisión" de investigación o revistas clínicas son también codificados como revisiones, tal como aquellos títulos que contienen la palabra "revisión" o "descripción".

El listado de los datos de la fuente en el JCR, proporcionó no sólo datos en el número de revisiones de cada revista; sino también el promedio de las referencias citadas en los artículos del mismo.

### Revistas citadas-solamente en el JCR

Para el cálculo del FI no se tuvieron en cuenta las citas de la misma revista. Esto es significativo puesto que las autocitas representan a menudo cerca del 13% de las citas que una revista recibe. Por otra parte, las revistas con autocitas que cuentan con factor de impacto en el sistema JCR pueden ser revistas suspendidas, títulos reemplazados o revistas que cubren ediciones científicas con contenido relevante; pero, estas no cuentan con un índice de citas.

Con base en lo anterior, se identificaron las revistas de autocita revisando el listado de revistas de citación en JCR. Además, se establecieron factores de impacto análogos, (excluyendo auto-citas), para las revistas que se evaluaron usando los datos proporcionados por la lista de diarios citados

### Comparación del índice Scienticol con el factor de impacto

En este trabajo se optó por hacer cálculos acumulados por grupos o por instituciones. Para una comparación del resultado obtenido con el FI con los del índice Scienticol, se construyó un índice ponderado a partir del acumulado, anualizado con un tiempo de observación medido desde enero 1 de 1996 hasta 17 de noviembre de 2005. Se tomó un umbral de 45 que se ubica un poco por encima del segundo valor del índice ordenando de mayor a menor. El

**Tabla 2.** Cálculo para el factor del impacto revisado para excluir auto-citas

Cálculo para el factor del impacto revisado para excluir autocitas.
A = las citas en 1992 a los artículos publicados en 1990-91
B = autocitas en 1992 a los artículos publicados en 1990-91
C = A - B = citas totales menos autocitas a los artículos recientes
D = el número de artículos publicados en 1990-91
E = factor de impacto revisado (C/D)
(ver tabla para ejemplos numéricos)

acumulado se calculó de la siguiente manera: a cada artículo registrado por un determinado grupo se asignó como peso el valor del impacto de la revista correspondiente. Para el cálculo se utilizó el reporte JCR de ISI del año 2004. Para los cálculos se tomaron los artículos publicados de 1996 hasta noviembre de 2005.

## Resultados y discusión

### La producción científica e innovativa en los Programas Nacionales de Ciencia y Tecnología.

Teniendo en cuenta la producción registrada y avalada institucionalmente en la plataforma ScienTI-Colombia, con corte a diciembre de 2005, se encontró que existían 30123 artículos de investigación publicados en revistas indexadas u homologadas; dicha información está registrada y depurada en la base nacional de productos desde 1996 al 2005. Un análisis de correlación realizado en esta base de datos, mostró una correlación del 97% con relación a la información anterior no depurada.

Tal como se presenta en la tabla 3, de la producción científica global y dentro de cada una de los programas nacionales de CyT, se destaca al artículo científico publicado en revistas de circulación periódica indexadas u homologadas, nacionales o internacionales, como el principal producto de nuevo conocimiento generado por los grupos de investigación reconocidos al 2005 en los últimos diez años.

Aunque en el Programa de Ciencias Sociales, la mayor producción en artículos se registra en revistas que no están indexadas en la base de datos Publindex. De otra par-

te, la producción de tipo A, en el programa de Ciencias Sociales, es fundamentalmente en libros y capítulos de libros de investigación (tabla 4).

De los análisis globales de la producción científica realizados, se determinó la existencia de diferencias en las costumbres de producción en cada uno de los programas nacionales de CyT; según la información obtenida, hay tres tipos de programas nacionales que tienen una forma de producción bien diferenciada. En un primer grupo se ubican los programas de Ciencias Básicas, Ciencia y Tecnología de la Salud, de Mar y de Ciencias Agropecuarias. En ellos la producción predominante es el artículo científico.

Al segundo grupo pertenecen los programas de Ciencias Sociales y Estudios Científicos de la Educación en donde la producción de nuevo conocimiento se concentra en libros y capítulos de libro. El tercer grupo está constituido por los programas de Biotecnología, que tiende a estar próximo al grupo 1, Medio Ambiente y Hábitat, Electrónica, Telecomunicaciones e Informática -ETI-, Energía y Minería y Desarrollo Tecnológico y Calidad. Este grupo de programas se distingue más por la participación de las tesis y trabajos de grado, los registros de producción tecnológica, los productos de secreto industrial y los trabajos de asesoría científica o tecnológica.

Al realizar el mismo análisis con base únicamente en la producción de tipo A que se consigna en la tabla 4, sólo se registró un cambio; el programa nacional de Biotecnología se desplazó al grupo de programas en el que el artículo de investigación es la producción de nuevo conocimiento predominante. Por lo demás, la caracterización de los programas nacionales de CyT sigue siendo la misma. De los **30123**

**Tabla 3.** Resumen de la información de producción de nuevo conocimiento bibliográfica y de innovación discriminada por Programa Nacional de CyT existente en la plataforma ScienTI-Colombia (Fuente: Plataforma ScienTI-Colombia, noviembre de 2005)

Programa Nacional de CyT	Artículo	Libro	Cap. Libro	Norma	Reg. Pat.	Sec. Indust	Total
Biotecnología	94	5	2	0	0	5	106
Salud	1187	37	177	3	8	8	1420
Mar	210	6	14	0	2	0	232
Agropecuaria	99	6	20	0	3	0	128
Básicas	2220	26	77	0	29	6	2358
Ambiente	179	52	79	5	1	15	331
Sociales	210	385	597	14	1	3	1210
Des Tecno	135	18	15	1	26	10	205
ETI	82	37	22	0	17	45	203
Educación	11	84	101	0	21	0	217
Energía	150	7	24	0	17	16	214
<b>Total</b>	<b>4577</b>	<b>663</b>	<b>1128</b>	<b>23</b>	<b>125</b>	<b>108</b>	<b>6624</b>

**Tabla 4.** Diferentes tipos de productos de nuevo conocimiento caracterizados como de calidad A identificados en la plataforma Scienti-Colombia (Fuente: Plataforma Scienti-Colombia, noviembre de 2005)

Programa Nacional de CyT	Artículo	Libro	Cap. Libro	Lit. Gris	Norma	Reg. Pat.	Sec. Indust	Serv. Tecno	Tesis	Divulg.	Total
Biotecnología	350	5	5	9	0	0	6	0	282	355	1012
Salud	3381	45	272	131	3	8	10	2	896	2091	6839
Mar	372	8	24	6	0	2	0	0	148	235	795
Agropecuaria	737	7	32	12	0	3	0	2	347	518	1658
Básicas	4032	40	133	126	0	29	6	3	1622	1995	7986
Ambiente	844	65	142	28	5	1	15	10	1236	1011	3357
Sociales	3775	453	965	368	14	1	12	13	2068	4301	11970
Des Tecno	614	20	23	59	1	26	17	27	1084	847	2718
ETI	571	42	41	24	0	17	49	11	1189	940	2884
Educación	762	98	163	59	0	21	4	27	372	1447	2953
Energía	667	8	27	36	0	17	47	10	890	579	2281
<b>Total</b>	<b>16105</b>	<b>791</b>	<b>1827</b>	<b>868</b>	<b>23</b>	<b>125</b>	<b>166</b>	<b>105</b>	<b>10134</b>	<b>14319</b>	<b>44453</b>

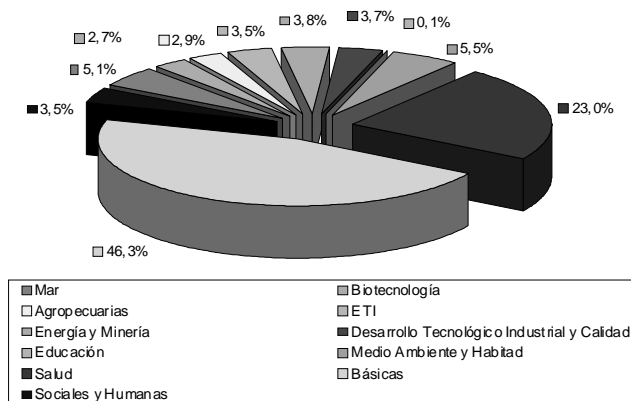
artículos de investigación registrados en la base nacional de productos, el 28,47% (4577), se publicó en revistas clasificadas como A en el Publindex Colombia del 2005. De los 4577 artículos clasificados como de calidad A un 48,5% (2220) correspondió al programa nacional de Ciencias Básicas y 25,9% (1187) al de Ciencia y Tecnología de la Salud (tabla 4).

### El factor de impacto de las publicaciones de autores colombianos

Solamente el 19,33% de los artículos de investigación publicados por autores colombianos pertenecientes a grupos de investigación colombianos, se realizó en revistas científicas reportadas por JCR que registran FI a diciembre del 2004. Con base en la clasificación por áreas del conocimiento establecida por el ISI, el 47.7% de ellos, correspondió al área de las ciencias de la vida y la salud; 37.4% a las ciencias biológicas; 10.3% a las Ingenierías y tecnologías.; 4% a las ciencias sociales y un 0.6% a las multidisciplinas (figura 1).

De acuerdo con lo que se muestra en la figura 2, los programas nacionales que mas publican artículos en revistas con factor de impacto son el de Ciencias Básicas (46.3%) y el de Ciencia y Tecnología de la Salud (23.0%). El restante 40.7% de los artículos publicados en revistas con factor de impacto se distribuye entre los otros nueve programas nacionales de CyT (figura 2).

A pesar de que se ha registrado un incremento exponencial de las publicaciones científicas de autores colombianos de grupos de investigación en nuestro país de 1996 al 2005, el crecimiento anual de las publicacio-

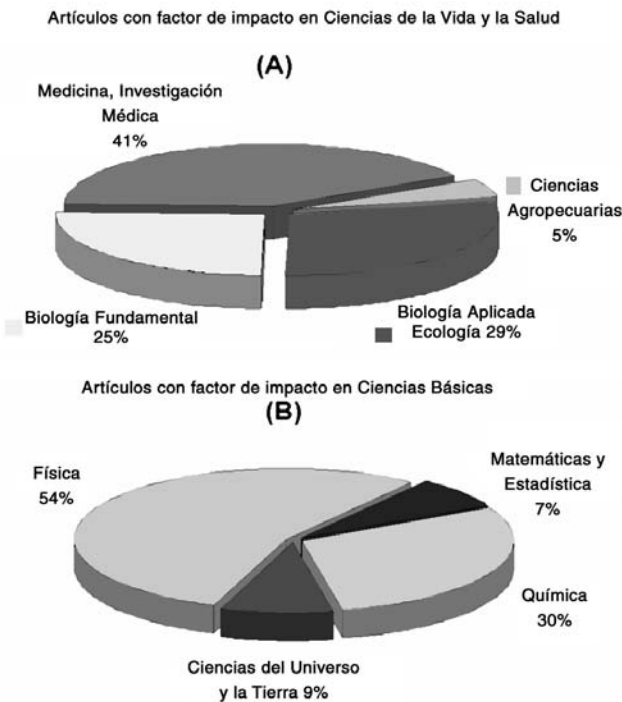


**Figura 1.** Distribución, por Programas Nacionales de Ciencia y Tecnología, de los artículos científicos publicados en revistas con factor de impacto de 1996 al 2005. (Fuente: Plataforma Scienti-Colombia noviembre 2005, e ISI diciembre 2004)

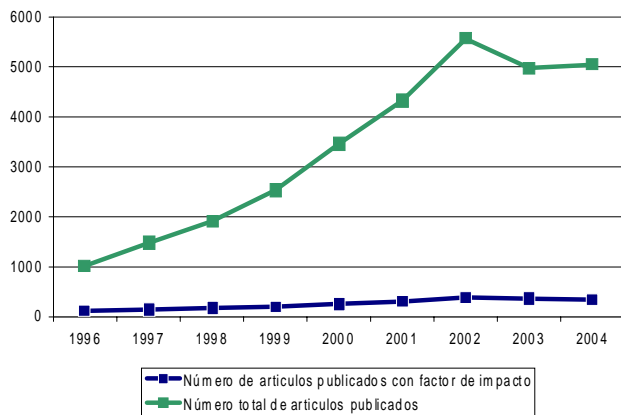
nes en revistas con factor de impacto no se ha incrementado significativamente (figura 3).

En este sentido, es posible que el efecto de la política de estimular la publicabilidad de las investigaciones científicas en nuestro país, implementada por Colciencias desde los años 80, no haya tenido efecto en el impacto que tienen en los escenarios internacionales de publicación. Es un aspecto para resaltar la necesidad de estimular la publicación de los resultados de investigación de los grupos colombianos en revistas con FI para que podamos tener una mayor visibilidad internacional y podamos ser citados con mayor frecuencia.

Las publicaciones colombianas con impacto se registran en revistas publicadas en Estados Unidos (2539), Gran



**Figura 2.** Distribución de las publicaciones de autores colombianos por subareas del conocimiento clasificadas por el ISI. (A) Área de las Ciencias de la Vida y la Salud. (B). Área de las Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. (Fuente: Plataforma Scienti-Colombia, Diciembre 2005)



**Figura 3.** Comparación del comportamiento del crecimiento anual del total de las publicaciones en revistas científicas y en revistas con factor de impacto de autores colombianos de grupos de investigación en Colombia de 1996 al 2004 (Fuente: Plataforma Scienti - Colombia, noviembre de 2005)

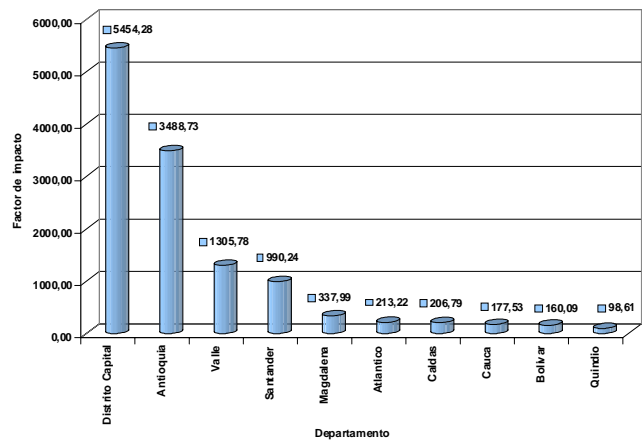
Bretaña (1087), Holanda (836) y Alemania (401). Las publicaciones de autores colombianos, se registran en revistas de 20 países diferentes que incluyen la mayoría de los

de la Unión Europea como de Países Latinoamericanos además de Japón y Corea.

**El impacto de las publicaciones científicas por departamento e instituciones de investigación.**

Para calcular el factor de impacto de los departamentos y de las instituciones de investigación, se tomó el factor de impacto de las revistas asociadas a los artículos de investigación, dentro de la ventana de estudio, que va desde el 01 de enero de 1996 hasta el 17 de noviembre de 2005, y se calculó la suma total. Con base en este cálculo, se observó una fuerte concentración en Colombia del número de publicaciones con impacto. Bogotá D.C. y los departamentos de Antioquia y el Valle del Cauca, registran más del 70% del FI en nuestro País. Sin embargo es interesante resaltar que otros departamentos comienzan a figurar en los que el crecimiento de las publicaciones con impacto es notable (figura 4).

Las instituciones de investigación con mayor número de artículos publicados en revistas con FI, fueron en su orden, la Universidad de los Andes, la Universidad de Antioquia, la Universidad Nacional (incluyendo todas sus sedes), la Universidad del Valle y la Pontificia Universidad Javeriana. Sin embargo cabe destacar que instituciones con desarrollo relativo menor comienzan a publicar en revistas con FI, entre ellas se incluyen la Universidad Industrial de Santander en Bucaramanga, la Pontificia Universidad Bolivariana en Medellín, La Universidad Autónoma de Bucaramanga, la Universidad de Pamplona, la Universidad del Magdalena en Santa Marta, La Universidad del Cauca en Popayán y la Fundación UNINORTE en Barranquilla



**Figura 4.** Distribución de la suma de factor de impacto asociada a los grupos de investigación en los departamentos de Colombia (Fuente: Plataforma Scienti - Colombia, noviembre de 2005)

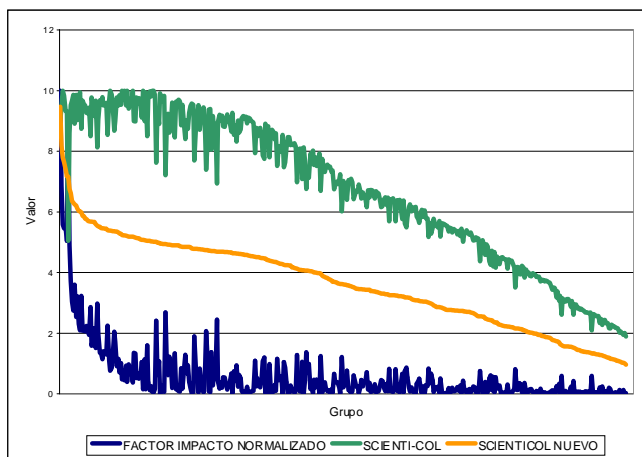
### Comparación del factor de impacto con el índice ScientiCol

El FI fue anualizado y normalizado para obtener un índice que permitiera compararlo con el índice ScientiCol. Dada la forma como está construido el índice ScientiCol, se obtuvo una correlación del 33% con el índice. Los resultados obtenidos sugieren redefinir el índice ScientiCol vinculado con el FI.

De manera experimental se introdujo una modificación al índice ScientiCol. Se realizó el cálculo de un nuevo índice ScientiCol teniendo en cuenta, en este nuevo índice, el FI. Para ello, se calculó un promedio ponderado entre ScientiCol y el índice de factor de impacto de acuerdo con la siguiente fórmula:

$$\text{ScientiCol- Nuevo} = \text{ScientiCol} * P1 + \text{IndiceFactorImpacto} * P2$$

Con ponderaciones de 0.5 para P1 y 0.5 para P2. Se obtuvo un nuevo índice ScientiCol, que incluyó el FI, cuyo valor es intermedio entre el ScientiCol clásico desarrollado por Colciencias y el FI (figura 5). Cuando este nuevo índice ScientiCol se aplicó a los 1825 grupos de investigación reconocidos, se encontró una correspondencia del 96.89% con el clásico. Con el objetivo de generar un nuevo panorama de medición de grupos de investigación, se calculó la correspondencia entre ambos índices para los grupos que actualmente se han clasificado como A, B y C. Los resultados mostraron una correspondencia del 96.9% para los grupos A, del 84% para los B y del 96.4% para los grupos C.



**Figura 5.** Comparación del nuevo índice ScientiCol experimental con el índice original desarrollado por Colciencias ene. 2004 y el factor de impacto (Fuente: Plataforma Scienti – Colombia, noviembre de 2005)

Aunque el factor de impacto es una poderosa y útil herramienta para evaluar las revistas científicas de publicación periódica (Parthasarathy, 2005) (Bador & Petit, 1998), se debe emplear con ciertos argumentos y complementos si se desea tener un panorama detallada del efecto de las políticas de fortalecimiento a las capacidades investigativas de los grupos en país (Cho *et al.*, 1999) (Coleman, 1999). Este aspecto quedó demostrado plenamente en nuestros análisis. Es importante tener en cuenta que tanto la variación existente entre las distintas disciplinas, y otras variables como la existencia de otros índices diferentes y aun la existencia del Publindex en nuestro País, se deben tener en cuenta en el momento de poder definir el impacto de la producción de conocimiento científico de los investigadores, los grupos de investigación y los países (Gallagher & Barnaby, 1998) (Gensini & Conti, 1999). Por esta razón es que hemos realizado un análisis cruzado del efecto del FI y del Índice ScientiCol desarrollado por Colciencias, para poder estimar de una manera más real el verdadero efecto de las publicaciones colombianas sobre el conocimiento global.

Nuestros resultados nos permiten concluir que aunque los dos cálculos, índice ScientiCol y FI, estiman de manera importante el efecto de la publicación científica en Colombia, se deben tomar como complementarios al momento de estimar el efecto de la generación de nuevo conocimiento por publicaciones científicas en nuestro país (Garfield, 1999) (Saha *et al.*, 2003).

### Bibliografía

1. Arribalzaga, EB. 1995. *Inquietudes ante un artículo científico*. Rev Argent Cirug. **69**: 86-90.
2. Cho, M., Gastel B, Marusic A, Mandel JS, Marcos A. *Publishing in developing countries: problems and solutions*. CBE Views, 1999; 22(6): 198.
3. Colciencias. 2005. Índice para la Medición de Grupos de Investigación Científica, Tecnológica o de Innovación. Subdirección de programas de Desarrollo Científico y Tecnológico. 2004 2005, 2006.
4. Colciencias. 2006. Índice para la medición de Grupos de Investigación, Tecnológica o de Innovación, Instituto Colombiano para el Desarrollo de la Ciencia y la Tecnología "Francisco José De Caldas" Colciencias, Mayo de 2006.
5. Gibbs WW. 1995. *Lost science in the third world*. Scientific American August:76-83.
6. García Río, F., Álvarez-Sala Walther R., Gómez de Terres Caro J. & Villamor León J. 1998. *Búsqueda bibliográfica e indicadores bibliométricos*. En: *Manual de Neumología y Cirugía Torácica* SEPAR. Edit Ediciones Médicas, Madrid. Vol. 2, 1945-56.

7. **Bador P, Petit O.** 1998. *Factor impact and indexing in bibliographic databases: comparison of these quality criteria for the assessment of pharmaceutical journals.* J Pharm Belg. **53**:71-3.
8. **Lehrl S.** 1999. *The impact factor as an assessment criterion of scientific achievements- the right to equal chances.* Strahlenther Onkol. **175**:141-53.
9. **Valentinuzzi ME.** 1997. *Evaluación de la producción científica.* Rev Médica Tucumán. **3**:5-28.
10. **Parthasarathy H.** 2005 Measures of Impact. PLoS Biol. **3**: e296
11. **Bador P, Petit O.** 1998. *Factor impact and indexing in bibliographic databases: comparison of these quality criteria for the assessment of pharmaceutical journals.* J Pharm Belg. **53**:71-3.
12. **Cho, M., Gastel, B., Marusic, A., Mandel, JS., Marcos, A.** 1999. *Publishing in developing countries: problems and solutions.* CBE Views. **22**:198.
13. **Coleman, R.** 1999. *Impact factors: use and abuse in biomedical research.* Anat Rec. **257**:54-7.
14. **Gallagher EJ, Barnaby DP.** 1998. *Evidence of methodologic bias in the derivation of the Science Citation Index impact factor.* Ann Emerg Med. **31**: 83-6.
15. **Gensini GR., Conti AA.** 1999. *The impact factor: a factor of impact or the impact of a (sole) factor? The limits of a bibliometric indicator as a candidate for an instrument to evaluate scientific production.* Ann Ital Med Int. **14**:130-5.
16. **Garfield, E.** 1999. *Journal impact factor: a brief review.* Can Med Assoc J. **161**:979-80.
17. **Saha S, Sanjay S, Christakis DA.** 2003. *Impact factor: a valid measure of journal quality?* Journal of Medical Library Association; **91**: 42-4.

Recibido el 1° de noviembre de 2006

Aceptado para su publicación el 4 de diciembre de 2006



# REDESCUBRIMIENTO Y AMPLIACIÓN DEL ÁREA DE DISTRIBUCIÓN DE *BOLITOGLOSSA CAPITANA* (CAUDATA: PLETHODONTIDAE), ESPECIE ENDÉMICA Y AMENAZADA DE COLOMBIA

por

Giovanni Chaves-Portilla<sup>1</sup>, Oswaldo Cortés-Herrera<sup>2</sup>  
& Jorge E. Morales-Sánchez<sup>3</sup>

## Resumen

**Chaves-Portilla, G., O. Cortés-Herrera & J. E. Morales-Sánchez:** Redescubrimiento y ampliación del área de distribución de *Bolitoglossa capitana* (Caudata: plethodontidae), especie endémica y amenazada de Colombia. Rev. Acad. Colomb. Cienc. **30** (117): 615-617, 2006. ISSN 0370-3908.

Reportamos el hallazgo de un individuo de *Bolitoglossa capitana* en inmediaciones de la Laguna de Pedropalo en la vertiente occidental de la cordillera oriental de Colombia, redescubriendo así esta especie después de 34 años sin registros documentados y ampliando el área de distribución de este tipo de salamandra, la cual se restringía a la localidad típica de Albán (Cundinamarca).

**Palabras clave:** Amphibia, caudata, plethodontidae, *Bolitoglossa capitana*, redescubrimiento, endémica, Colombia.

## Abstract

We report the finding of one specimen of *Bolitoglossa capitana* in the surroundings of the Laguna de Pedropalo in the Western slope of the Eastern Andes mountain range of Colombia. The species was rediscovered more 34 years without documented records and therefore the range of distribution is extending far beyond the type locality Alban (Cundinamarca).

**Key words:** Amphibia, caudata, plethodontidae, *Bolitoglossa capitana*, rediscovery, endémica, Colombia.

1 Proyecto Curricular de Licenciatura en Biología, Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá, Colombia. Correo electrónico: biochaves@yahoo.com

2 Proyecto Curricular de Licenciatura en Biología, Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá, Colombia. Correo electrónico: oswaldo\_aves@yahoo.com

3 Proyecto Curricular de Licenciatura en Biología. Grupo de Investigación Biodiversidad de Alta Montaña (BAM), Bogotá, Colombia. Correo electrónico: jorgeemoraless@supercabletv.net.co



## Introducción

Las poblaciones de anfibios están declinando drásticamente a nivel mundial (Houlahan *et al.*, 2000; Young, *et al.*, 2001), en este aspecto Colombia posee actualmente tres especies amenazadas de salamandras, todas ellas del género *Bolitoglossa*; la Salamandra de Pandi (*Bolitoglossa pandi*), la Salamandra de Albán (*Bolitoglossa capitana*) y la salamandra corpulenta café (*Bolitoglossa lozanoi*) (Rueda *et al.*, 2004); estas especies son endémicas de los bosques andinos de la Cordillera Oriental de Colombia. Una de estas salamandras, *Bolitoglossa capitana* ha sido una de las especies de anfibios más enigmáticas de Colombia ya que entre los años 1963 y 1971 se colectaron un total de siete (7) ejemplares en la localidad típica (Colombia, Departamento de Cundinamarca, Municipio de Albán, Vereda Tres Marías, Hacienda la Victoria, 50 Km. NW de Bogotá) y desde entonces no se hicieron registros subsecuentes hasta ahora (Rueda & Acosta, 2004). Actualmente no se cuenta con estudios realizados con esta especie y los factores que la afectan, por lo que es prioritario determinar estrategias adecuadas para su conservación.

Dada la distribución restringida y el grado de destrucción de los hábitats naturales en la región típica hacen de *B. capitana* una especie en peligro crítico de extinción CR B2ab (iii) (Rueda & Acosta, 2004). Dentro de las medidas de conservación propuestas por los autores arriba mencionados, se sugiere la exploración de hábitats similares a la localidad típica, en los bosques Andinos correspondientes a la región del Tequendama, sitio donde se localiza la Laguna de Pedropalo. El trabajo de campo se llevó a cabo entre el 19 y 24 de marzo de 2005 y consistió en búsquedas exhaustivas durante el día y la noche, teniendo en cuenta los periodos de lluvia para optimizar las posibilidades de encuentro. Se buscaron los individuos entre el sotobosque especialmente entre las hojas axilares de Bromeliáceas y Aráceas, lográndose la recolección de un individuo hembra juvenil (MUJ 4382) de *Bolitoglossa capitana*.

### Localidad

Colombia, Departamento de Cundinamarca, Municipio de Tena, Vereda Catalamonte, 2010 msnm (4°43' Lat. N, 74°19' Long O). marzo 21 de 2005. Colectores: Giovanni Chaves-Portilla y Oswaldo Cortés-Herrera.

### Coloración *In vivo*

Superficie dorsal cefálica café oscuro con punteaduras amarillentas oscuras. Superficies dorsal troncal y caudal café rojizo oscuro. Patas dorsalmente café amarillentas

oscuras. Vientre gris amarillento con punteaduras pequeñas que van de blanco a crema. Iris naranja con muy pocas punteaduras negras (Fig. 1).

### Coloración en etanol al 70%

Región cefálica dorsal de color sepia oscuro uniforme y a nivel ventral café amarillento claro. Superficies dorsal troncal y caudal de color sepia oscuro con presencia de zonas cafés claras. El vientre se torna de color grisáceo claro y las punteaduras mantienen la coloración del blanco a crema. Los flancos se tornan de color grisáceo, con punteaduras color crema.

### Dimensiones

Longitud estándar= 44.5 mm; Longitud cola= 47mm; Diámetro del ojo= 4mm; Longitud cefálica= 10 mm; Ancho cefálico= 8.5 mm; Ancho del párpado= 2 mm; Distancia órbita-narina= 5 mm, Distancia íterorbital= 4 mm, Distancia internarinas= 2 mm; Distancia órbita-rostro=3 mm; Longitud tibia= 4mm; Peso 2.8 gramos.

### Hábitat y notas ecológicas

El área donde se logró colectar el individuo de *B. capitana* se clasifica como bosque andino húmedo, (Holdridge, 1986), caracterizado por el dominio de una asociación vegetal entre Roble (*Quercus humboldtii*), Tuno (*Miconia* sp), Laurel de cera (*Myrica pubescens*), Aguacatillos (*Nectandra* spp), Yarumos (*Cecropia* spp) y jaques (*Clusia* spp); en el sotobosque abunda una gran variedad de helechos, bromelias y plantas epífitas; es de



Figura 1. *Bolitoglossa capitana* (Fotografía Rodríguez-Páez J.C.)

resaltar que en el área donde se colectó el ejemplar no existe un cauce de agua cercano.

El individuo de *B. capitana* fue colectado entre las partes axilares de una bromelia (*Racinaea* sp), la cual se encontraba a nivel del suelo fijada a un tronco en descomposición, en sus axilas se registra tanques de agua que proporcionan un micro-hábitat húmedo para la especie, (ca. 70% de humedad relativa) que al parecer necesita de estas bromelias de gran porte. La especie fue registrada en simpatria con otros anfibios como *Eleutherodactylus ingeri* (VU), muy común en los alrededores de la Laguna de Pedropalo, (Rueda, *et al.*, 2004) y *Eleutherodactylus* sp (ambas ranas en estado juvenil), además de gran cantidad de crustáceos isópodos (*Oniscus* sp).

### Comentarios

El área de estudio se encuentra fuertemente intervenida y sus condiciones originales se han transformado por diferentes actividades agrícolas y ganaderas. La deforestación y los procesos de quema, sumado a un pastoreo extensivo de ganado desde hace varias décadas están generando un proceso de potrerización en toda la zona. *B. capitana* está asociado a vegetación de Aráceas, Bromeliáceas y con una buena cobertura de dosel que permite que el sotobosque permanentemente tenga acumulación de hojarasca y humedad. Sin embargo todas las actividades antrópicas de agricultura, urbanización y pastoreo, destruyen estas condiciones, que tiene como consecuencia una reducción drástica del hábitat de *B. capitana*.

Por último cabe resaltar que en la laguna de Pedropalo se han adelantando varios inventarios no sistemáticos de la herpetofauna por diversas instituciones pero en ninguno de estos trabajos se reportó la presencia de *B. capitana*, demostrando que este hallazgo es un gran aporte al conocimiento de la distribución de la especie y otorga valiosa información a los escasos datos obtenidos sobre la ecología e historia natural de esta salamandra.

### Agradecimientos

Ofrecemos nuestros más sinceros agradecimientos al profesor Andrés Acosta Galvis de la Pontificia Universidad Javeriana y a José Vicente Rueda Almonacid de Conservación Internacional Colombia, por la asesoría prestada en la identificación de la salamandra.

Además extendemos nuestros agradecimientos a nuestros compañeros Alejandro Hernández, Jenny Gallo, Sandra Alarcón, Jaime Rueda y a los profesores José Joaquín Castro y Abelardo Rodríguez de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas; a Juan Carlos Rodríguez Páez de Conservación Internacional por las fotografías de la salamandra; y a todos aquellos que nos han acompañado en esta laboriosa tarea con sus consejos y correcciones.

### Bibliografía

- Holdridge, L. R. 1986. Ecología basada en las zonas de vida. Colección de libros y materiales educativos. No 83. Instituto Interamericano de Cooperación para la Agricultura. San José.
- Houlahan, J. E., C. S. Findlay, B. R. Schmidt, A. H. Meyer and S. L. Kuzmin. 2000. Quantitative evidence for global amphibian population declines. *Nature* **404** (6779): 752-755.
- Rueda-Almonacid, J. V. & A. R. Acosta Galvis. 2004. Salamandra de Albán. *Bolitoglossa capitana*. pp. 142-145. En Rueda-Almonacid, J. V., J. D. Lynch & A. Amézquita (Eds). Bogotá, Colombia.
- \_\_\_\_\_, J. D. Lynch & A. Amézquita (Eds). 2004. Libro rojo de anfibios de Colombia. Serie de Libros Rojos de Especies Amenazadas de Colombia. Conservación Internacional Colombia, Instituto de Ciencias Naturales- Universidad Nacional de Colombia. Ministerio del Medio Ambiente. Bogotá, Colombia. 384 pp.
- Young, B. E., K. R. Lips, J. K. Reaser, R. Ibáñez, A. W. Salas, J. R. Cedeño, L. A. Coloma, S. Ron, E. La Marca, J. R. Meyer, A. Muñoz, F. Bolaños, G. Chaves and D. Romo. 2001. Population declines and priorities for amphibian conservation in Latin America. *Conservation Biology* **15**(5): 1213-1223.

Recibido el 9 de febrero de 2006

Aceptado para su publicación el 9 de agosto de 2006



# CARACTERIZACIÓN TEMPORAL DE LA LLUVIA DE SEMILLAS EN UN BOSQUE NUBLADO DEL CERRO DE MAMAPACHA (BOYACÁ - COLOMBIA)

por

María Fernanda Rodríguez-Santamaría<sup>1</sup>, Johanna María Puentes-Aguilar<sup>1</sup> & Francisco Cortés-Pérez<sup>2</sup>

## Resumen

**Rodríguez-Santamaría, M.F., J.M. Puentes-Aguilar & F. Cortés-Pérez:** Caracterización temporal de la lluvia de semillas en un bosque nublado del cerro de Mamapacha (Boyacá - Colombia). Rev. Acad. Colomb. Cienc. **30** (117): 619-624, 2006. ISSN 0370-3908.

Se evaluó la variación temporal de la lluvia de semillas en un bosque de niebla del cerro de Mamapacha en el departamento de Boyacá (Colombia). Se instalaron 16 parcelas, cada una de 25 x 25 m cubriendo un área total de 1 ha. En cada parcela se colocaron 5 trampas con una superficie de recolección de 1.25 m<sup>2</sup>. El material vegetal fue colectado mensualmente durante siete meses, periodo que incluye la época seca y la época lluviosa. Se contabilizó un total de 51489 semillas distribuidas en 18 familias, 16 géneros, 10 especies y 6 no identificadas. La lluvia de semillas estuvo representada por los árboles del dosel dominantes, aunque también se encontró una gran abundancia de semillas de la familia Orchidaceae. Las ocho especies más representativas fueron: *Miconia* sp., Orchidaceae, *Weinmannia* sp., Asteraceae sp.2, *Clusia* sp., Asteraceae sp.3, Asteraceae sp.1 y *Brunellia occidentalis*. La mayor cantidad de semillas se presentó finalizando la época seca (febrero y marzo), y la menor en plena época lluviosa (agosto), demostrando que la lluvia de semillas se encuentra influenciada por las condiciones climáticas de la región.

**Palabras clave:** Lluvia de semillas, variación temporal, bosque nublado, Boyacá.

## Abstract

The temporary variation of seed rain was evaluated in a cloudy forest of the Mamapacha hill in the state of Boyacá (Colombia). They settled 16 plots of 25 x 25 m. each one, covering a total area of 1 ha. In each plot, 5 traps were placed with a surface of harvest of 1.25 m<sup>2</sup>. The vegetable material was collected monthly during seven months. 51489 seeds were counted distributed in 17 families,

<sup>1</sup> Grupo de Estudios en Sistemas Andinos – GESA. Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia – Tunja. Correo electrónico: frodriguez@tunja.uptc.edu.co, johannapuentes@hotmail.com

<sup>2</sup> Grupo Ecología de Bosques Andinos Colombianos – EBAC. Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia – Tunja. Correo electrónico: frcortes2001@yahoo.com

14 genus, 9 species and 7 unidentified. The seed rain was represented by the trees of the dominant canopy, although a great abundance of seeds of the family Orchidaceae was also found. The eight more representative morphospecies were: *Miconia* sp., Orchidaceae, *Weinmannia* sp., Asteraceae sp. 2, *Clusia* sp., Asteraceae sp. 3, Asteraceae sp. 1 and *Brunellia occidentalis*. The biggest quantity of seeds was presented concluding the dry time (February and March), and the minor in full rainy time (August), demonstrating that seed rain is influenced by the weather conditions of the region.

**Key words:** Seed rain, temporary variation, cloudy forest, Boyacá.

## Introducción

La entrada de semillas en un ambiente está determinada por la lluvia de semillas, la cual es influenciada por la fenología de las especies y por la producción estacional de las semillas (Penhalver & Matovani, 1997). La degradación de un ecosistema disminuye la disponibilidad de semillas y consecuentemente, la calidad ambiental de un área, ya que esta disponibilidad es fundamental para el desarrollo de un bosque (Martínez-Ramos & Soto-Castro, 1993).

Parece ser que en áreas intervenidas la cantidad y composición de semillas llegan a ser muy diferentes, debido a la influencia de factores externos como: la composición y estructura de la vegetación del sitio, fenología de la fructificación, dispersión, impacto de los vientos que puede acelerar la caída de semillas y el grado de aperturas en el bosque (presencia de claros) (Chapman & Chapman, 1997; Foster & Graham, 1987; Giraldo, 1993; Zapp, 2000).

Las semillas son la mayor fuente de propagación para la regeneración avanzada de bosques, constituyendo así, un enorme potencial para la conservación y manejo de los recursos naturales (Martínez-Ramos & Soto-Castro, 1993; Clark *et al.*, 2001; Zonforlin-Martini, 2002). Esta regeneración de especies de plantas en los bosques, se debe a la entrada de propágulos desde la lluvia de semillas (Álvarez-Buylla & García-Barrios, 1991; Loiselle *et al.*, 1996), siendo ésta un aporte permanente al suelo, influyendo así en la regeneración inmediata o futura, dependiendo de su capacidad para germinar inmediatamente o entrar a formar el banco de semillas según sus latencias (Garwood, 1992), periodos de viabilidad (Giraldo, 1993), dispersión, rangos y mecanismos de depredación (Montenegro & Vargas, 2000; Schupp *et al.*, 1989)

Es conocido que cualquier área está sujeta a continuos flujos de semillas y esporas (Wagner, 1965; Harper, 1977), por lo tanto, su conocimiento es importante para entender la dinámica de cambio en las comunidades de

plantas (Peart, 1989; Molau & Larsson, 2000), razón por la cual los ecólogos han estado mucho tiempo interesados en medir la lluvia de semillas (Foster & Graham, 1987) siendo ésta, uno de los factores más importantes para determinar los patrones sucesionales (Wagner, 1965).

De acuerdo con Zimmerman *et al.*, (2000) y Cubiña & Aide (2001) el aporte de semillas puede ser el factor más limitante para la restauración natural de un área degradada. La sobrevivencia y dinámica de los bosques depende en gran parte del aporte de semillas determinado por la lluvia de semillas, consecuencia de la composición florística y de sus vecinos, de la variación espacial y temporal de propágulos y del comportamiento de los dispersores de semillas. Así, evaluar la disponibilidad de semillas y los factores que la determinan, es fundamental para prever la necesidad de determinadas intervenciones adicionales en áreas de recuperación permitiendo con esto, la optimización en el desarrollo de las actividades de restauración.

En Colombia son escasos los datos de taxonomía, morfología, fenología y ecología de las semillas. Es necesario comprender la forma en que las presiones selectivas afectan los patrones de regeneración de las plantas, y la forma en que las características de las semillas influyen en los procesos de dispersión, colonización y establecimiento de plántulas (Dalling, 2002). Los trabajos realizados en ecología de semillas en ecosistemas de alta montaña son pocos. Principalmente se han enfocado en el banco de semillas en páramo y pastizales, como los estudios de Jaimes & Rivera (1991); Posada & Cárdenas (1999) y Núñez & Pabón (2002). En cuanto a lluvia de semillas, en los últimos años ha tomado especial importancia con el fin de evaluar las estrategias de regeneración natural de las plantas frente a disturbios, como en los trabajos de Díaz & Vargas (2004) y Ramos *et al.* (2001).

El objetivo de este estudio fue caracterizar la lluvia de semillas con el fin de establecer si existe estacionalidad en la entrada de semillas, y si ésta es influenciada por las condiciones climáticas de la región.

## Materiales y métodos

### Área de estudio

La serranía de Mamapacha se encuentra localizada al suroccidente del departamento de Boyacá (05°11'19"N y 73°17'01"W), a una altura de 3277 m. Comprende un área total de 27511 Ha (9700 corresponden a bosques y 17811 a páramo) (Rubio, 1996). El clima de la región se caracteriza por una época lluviosa (abril a noviembre) y una época seca (diciembre a marzo), con una precipitación media anual de 2071.9mm (Rocha, *en prensa*). Se encuentran 26 especies distribuidas entre las que se destacan: *Clusia multiflora*, *Weinmannia silvatica*, *Brunellia occidentalis*, *Miconia* cf. *cundinamarcensis* y *Geissanthus* sp. (Sánchez & Vega, 2002).

Se trabajó en una hectárea de bosque caracterizado por ser homogéneo y estar dominado por el estrato arbóreo, con alturas que no sobrepasan los 18 metros y áreas basales relativamente grandes. El área se dividió en 16 parcelas, cada una con un área de 625 m<sup>2</sup> (25m x 25m) siguiendo la metodología propuesta por Martínez-Ramos & Soto-Castro (1993). En cada parcela se colocaron aleatoriamente cinco trampas con forma piramidal invertida y una superficie de recolección de 1.25 m<sup>2</sup> (50 cm x 50 cm de lado) (Dalling *et al.*, 1998; Clark *et al.*, 2001; Sánchez & Vega, 2002) a una altura de 1.5 m del suelo - en total se muestreó un área de 20 m<sup>2</sup>. En la base de cada trampa se colocó un recipiente de 15 cm de profundidad y 6 cm de diámetro, al cual se le hicieron orificios laterales como sistema de drenaje, cubiertos por un velo que sirve de tamiz para evitar el posible escape de semillas (Foster, 1992).

El material vegetal recolectado en las trampas, se recogió mensualmente en bolsas de papel. Adicionalmente, se recolectaron ejemplares botánicos que se encontraban en flor y fruto, con el fin de extraer sus semillas y crear una colección de referencia para facilitar la determinación de las semillas halladas en las trampas. Las muestras fueron examinadas bajo estereoscopio registrando la cantidad de semillas por especie de cada una de las trampas. A partir del número total de semillas por especie durante cada mes, se halló el número de semillas por metro cuadrado, la abundancia y la frecuencia relativa. Con el índice de similaridad de Jaccard se estimaron las diferencias en la composición de especies durante los meses.

### Resultados y discusión

Durante un periodo de siete meses se colectaron 51489 semillas, de las cuales el 80% se determinaron a nivel de familia, género o especie (Tabla 1). La mayor cantidad de

**Tabla 1.** Abundancia absoluta de las semillas colectadas en un bosque nublado del cerro de Mamapacha (Boyacá, Colombia)

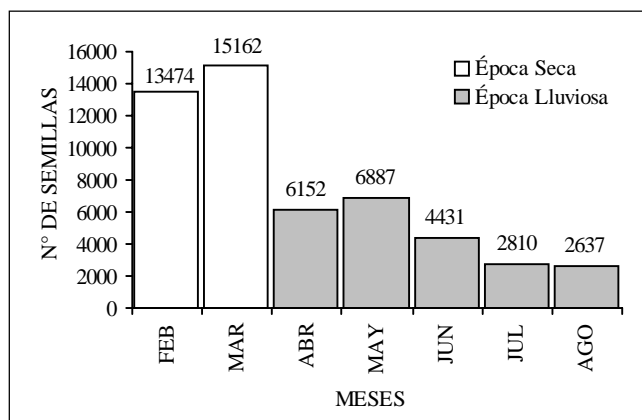
Familia/Especie	Abundancia Absoluta
<b>ALSTREMERIACEAE</b> <i>Bomarea floribunda</i>	3
<b>ASTERACEAE</b>	
ASTERACEAE sp.1	1358
ASTERACEAE sp.2	5775
ASTERACEAE sp.3	1386
ASTERACEAE sp.4	2
ASTERACEAE sp.5	24
<b>BEGONIACEAE</b> <i>Begonia urtica</i>	14
<b>BROMELIACEAE</b> <i>Puya</i> sp.	13
<b>BRUNELLIACEAE</b> <i>Brunellia occidentalis</i>	682
<b>CLUSIACEAE</b> <i>Clusia</i> sp.	3523
<b>CUNNONIACEAE</b> <i>Weinmannia</i> sp.	6544
<b>ERICACEAE</b> ERICACEAE sp.1	54
<b>CHLORANTHACEAE</b> <i>Hedyosmum bonplandianum</i> <i>Hedyosmum colombianum</i>	92 169
<b>MELASTOMATACEAE</b> <i>Miconia</i> sp.	22954
<b>MYRSINACEAE</b> <i>Myrsine coriacea</i> <i>Myrsine dependens</i>	6 1
<b>MYRTACEAE</b> <i>Myrciantes</i> sp.	1
<b>ORCHIDACEAE</b> ORCHIDACEAE sp.	8490
<b>ROSACEAE</b> <i>Rubus</i> sp.	3
<b>RUBIACEAE</b> <i>Palicourea aschersonianoides</i> <i>Relbunium hypocarpium</i>	2 2
<b>SOLANACEAE</b> <i>Solanum</i> sp.	2
<b>SYMPLOCACEAE</b> <i>Symplocos</i> sp.	2
<b>WINTERACEAE</b> <i>Drimys granadensis</i>	7
<b>INDETERMINADAS</b>	382

semillas se encontró en los meses de febrero (13470) y marzo (15154) coincidiendo con la época seca. En los siguientes meses hubo una disminución significativa en la caída de semillas, siendo julio y agosto (época de mayor precipitación) donde se encontró la menor cantidad (2804 y 2624 respectivamente) (Figura 1)

La lluvia de semillas estuvo representada principalmente por las familias Melastomataceae (44,5%) y Orchidaceae (16,5%). Según **Sudgen** (1982), **Foster** (1992) y **Dalling et al.** (1998), estas dos familias producen gran cantidad de semillas muy pequeñas y son fácilmente dispersadas por el viento. En el bosque nublado de Mamapacha, las semillas de *Miconia* sp. (Melastomataceae) fueron las más abundantes (contienen entre 30 y 90 semillas por fruto); sin embargo, esta especie no es dominante de la vegetación del bosque.

*Weinmannia* sp. también presentó una alta abundancia de semillas (12,7%) debido a que es una de las especies dominantes del bosque. Produce continuamente frutos con 3 a 6 semillas muy pequeñas, las cuales poseen pelos que le permiten dispersarse fácilmente por la acción del viento. **Díaz & Vargas** (2004), reportan que *Weinmannia tomentosa* fue la única especie del bosque altoandino que se dispersó hacia pastizales abandonados. Esto indica que la morfología de estas semillas les permite dispersarse a grandes distancias.

De la familia Asteraceae se encontraron cinco morfoespecies, de las cuales tres aportaron una cantidad significativa de semillas a pesar de no formar parte de la vegetación dominante de la zona (Asteraceae sp.2, 11,2%; Asteraceae sp.3, 2,7%; y Asteraceae sp.1, 2,6%). Quizá la participación de estas especies se deba a que la morfología de sus semillas les permite dispersarse fácilmente por la acción del viento.



**Figura 1.** Total de semillas recolectadas por mes en un área de 20m<sup>2</sup> en un bosque nublado del cerro de Mamapacha (Boyacá, Colombia).

Teniendo en cuenta la composición de la vegetación, se encontraron semillas de cinco especies inmigrantes. Tres pertenecen a la zona de páramo: *Puya* sp., *Symplocos* sp. y Ericaceae (**Rangel**, 2000). Las dos restantes, *Solanum* sp. y *Myrciastes* sp. son propias de bosque. Probablemente fueron dispersadas por aves, mamíferos y/o viento desde bosques vecinos (**Cavelier & Tobler**, 1998). Esto concuerda con los estudios realizados por **Peart** (1989); **Martínez-Ramos & Soto-Castro** (1993); **Walker & Neris** (1993); **Chapman & Chapman** (1997); **Molau & Larsson** (2000) y **Sánchez & Vega** (2002), que encontraron que las especies inmigrantes fueron menos abundantes comparadas con las especies locales. Sin embargo, no siempre la lluvia de semillas refleja la vegetación del sitio (**Denslow & Gómez**, 1990).

Se reporta una significativa variación temporal de la lluvia semillas (Figura 1), al igual que en los estudios realizados por **Foster** (1992); **Dalling et al.** (1998); **Loiselle et al.** (1996); **Martínez-Ramos & Soto-Castro** (1993); **Walker & Neris** (1993); **Jackson** (1981); **Giraldo** (1993); **Zapp** (2000); **Houle** (1998) y **Shibata & Nakashizuka** (1995). Estas fluctuaciones a nivel temporal influyen en la abundancia de vertebrados frugívoros y depredadores de semillas (**Ramírez & Arroyo**, 1987; **Horvitz & Schemske**, 1986; **Chidumayo**, 1997), pues los patrones estacionales de fructificación definen la variación temporal en el flujo de semillas. Esto es fundamental para determinar la población potencial de un hábitat particular (**Grombone-Guaratini & Ribeiro-Rodrigues**, 2002).

La caída de semillas fue seis veces mayor en marzo (época seca) que en agosto (época lluviosa). Esto demuestra una significativa influencia climática, al igual que lo reportado por **Jackson** (1981); **Walker et al.** (1986), **Sánchez & Vega** (2002), **Díaz & Vargas** (2004), **Montenegro & Vargas** (2000) y **Ramos et al.** (2001).

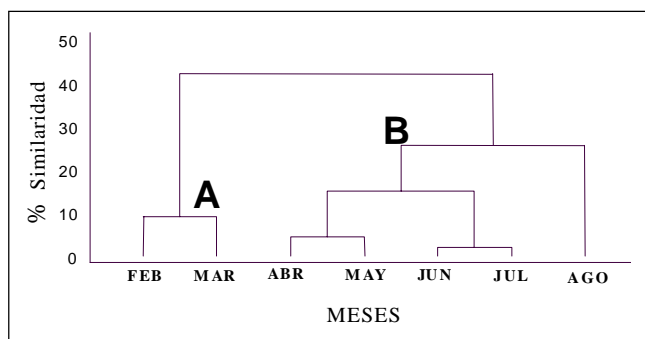
Este comportamiento de liberar las semillas en diferentes épocas climáticas, puede deberse a que las plantas buscan evitar la competencia inter e intraespecífica para garantizar su éxito reproductivo. En *Clusia* sp., por ejemplo, se observó que presenta semillas que germinan inmediatamente después de su dispersión. **Ramos et al.** (2001) encontraron que en bosques altoandinos de Monserrate, el Granizo y Neusa-Laureles, *C. multiflora* y *Weinmannia tomentosa* tienen un bajo tiempo de residencia en el suelo. Esto permite afirmar que la lluvia de semillas de *Clusia* sp. varía temporalmente mes a mes, pero la variación anual no es tan pronunciada si se compara con los resultados obtenidos por **Sánchez & Vega** (2002) en el mismo bosque.

Nueve especies presentaron semillas durante todo el periodo de muestreo: *Miconia* sp., Orchidaceae, *Wein-*

*mannia* sp., *Clusia* sp., *Brunellia occidentalis*, Asteraceae sp.1 y sp.2, *Hedyosmum colombianum* y Morfoespecie 3, con picos de mayor liberación en distintas épocas. Por el contrario, hay semillas que solo aparecieron en uno de los meses, por ejemplo: Asteraceae sp.4 y sp.5, *Bomarea* sp., *Myrciantes* sp., *Myrsine dependens*, *Palicourea aschersonianoides*, *Relbunium hypocarpium*, *Solanum* sp., *Symplocos* sp. y las morfoespecies 2, 5 y 8. Esto puede ser porque algunas semillas provienen de otros bosques por la acción de agentes dispersores o porque las plantas parentales presentan diferencias en su ciclo fenológico.

El índice de similaridad de Jaccard indicó diferencias en la abundancia de la lluvia de semillas, mostrando dos grupos claramente separados (Figura 2). El primero conformado por febrero y marzo (época seca - Grupo A) y el segundo por los meses de abril a agosto (época de mayor precipitación - Grupo B). Estas diferencias temporales en la lluvia de semillas pueden ser atribuidas a las variaciones estacionales en los patrones fenológicos y de dispersión presentes en la zona. Sin embargo, no se encontraron diferencias significativas en cuanto a la composición de especies de la lluvia de semillas en los dos periodos estudiados. En otros bosques de niebla como en la Reserva Natural la Planada, donde se tuvo en cuenta la presencia-ausencia de las especies, también se reporta la mayor cantidad de especies durante la época seca, que allí corresponde al mes de julio (Giraldo, 1993).

Los estudios sobre patrones temporales y espaciales en la lluvia de semillas son escasos. Aún así la lluvia de semillas junto con el banco de semillas y otros procesos como dispersión, germinación, reclutamiento y predación, representan un importante componente de las comunidades de plantas. La comprensión de su dinámica en una escala espacial y temporal es esencial para la recuperación, manejo y conservación de áreas degradadas por factores naturales y/o antrópicos.



**Figura 2.** Índice de Similaridad de Jaccard para los siete meses de muestreo en un bosque nublado del cerro de Mamapacha (Boyacá, Colombia).

Finalmente, los resultados permiten afirmar que en el bosque estudiado, el comportamiento fenológico de las especies presentes varía de un año a otro; pues un número importante de especies permanecieron en estado vegetativo y no aportaron semillas. Por lo tanto, para lograr caracterizar la lluvia de semillas de este ecosistema, se requiere extender el trabajo de recolección de muestras durante varios años y ampliar las observaciones a otros aspectos que probablemente disparan mecanismos endógenos en las plantas y las inducen a florecer, fructificar y producir semillas.

### Agradecimientos

Agradecemos a la Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia, en especial al Grupo de Estudios en Sistemas Andinos y el grupo de Ecología de Bosques Andinos Colombianos, por el apoyo brindado durante el desarrollo del estudio. También al propietario de la reserva de Mamapacha, Dr. Osman Roa y sus empleados quienes apoyaron la gestión en campo.

### Bibliografía

- Alvarez-Buylla, E. & R. García-Barrios. 1991. Seed and forest dynamics: a theoretical framework and an example from the Neotropics. *American Naturalist*, 137(2): 133-154.
- Cavelier, J. & A. Tobler. 1998. The effect of abandoned plantations of *Pinus patula* and *Cupressus lusitanica* on soils and regeneration of a tropical montane rain forest in Colombia. *Biodiversity and Conservation*, 7(3): 335-347.
- Chapman, C. & L. Chapman. 1997. Forest regeneration in logged and unlogged forest of Kibale National Park, Uganda. *Biotropica*, 29(4): 396-412.
- Chidumayo, E. 1997. Fruit production and seed predation in two Miombo Woodland trees in Zambia. *Biotropica*, 29(4): 452-458.
- Clark, C.; J. Poulsen & V. Parker. 2001. The role of arboreal seed dispersal groups on the seed rain of a Lowland Tropical Forest. *Biotropica* 33(4): 606-620.
- Cubiña, A. & T.M. Aide. 2001. The effect of distance from forest edge on seed rain and soil seed bank in a tropical pasture. *Biotropica* 33(2): 260-267.
- Dalling, J.; M. Swaine & N. Garwood. 1998. Dispersal patterns and seed bank dynamics of pioneer trees in moist tropical forest. *Ecology*, 79(2): 564-578.
- Dalling, J. 2002. Ecología de semillas. En: Guariguata M & G. Kattan (Ed). *Ecología y conservación de bosques Neotropicales*. Ediciones LUR. Costa Rica.
- Denslow, J.S. & A.E. Gómez. 1990. Seed rain to treefall gaps in a neotropical rain forest. *Canadian Journal of Forest Research*, 20(5): 642-648.
- Diaz, R. & O. Vargas. 2004. Variación espacio temporal de la lluvia de semillas en pastizales abandonados de Alta montaña tropical (Reserva forestal municipal de Cogua). *Acta Biologica Colombiana*, 9(2).



- Foster, L. & C. Graham.** 1987. A new sticky trap for monitoring seed rain in grasslands. *Journal of Range Management*, 40(4).
- Foster, R.** 1992. Ciclo estacional de caída de frutos en la isla de Barro Colorado. *En*: Leigh, E.G., Jr., R.A. Stanley & D.M. Windsor (Eds.). *Ecología de un bosque tropical: ciclos estacionales y cambios a largo plazo*. P 219-241
- Garwood, N.** 1992. Ciclo estacional de germinación de semillas en un bosque semicaducifolio tropical. *En*: Leigh E.G., Jr.; R.A. Stanley & D.M. Windsor (Eds.). *Ecología de un bosque tropical: ciclos estacionales y cambios a largo plazo*. P 243 - 255
- Giraldo, R.** 1993. Evaluación del banco de semillas y de la lluvia de semillas en bosque de niebla premontano de la reserva natural La Planada, Nariño, Colombia. Trabajo de Grado (Biólogo) Universidad de Antioquia, Facultad de Ciencias. Medellín.
- Grombone-Guaratini, M.T. & R.R. Rodrigues,** 2002. Seed bank and seed rain in a seasonal semi-deciduous forest in south-eastern Brazil. *Journal of Tropical Ecology*, 18: 759-771
- Harper, J.** 1977. *Population biology of plants*. Academic Press. Londres. 892p.
- Horvitz, C. & D. Schemske.** 1986. Seed dispersal of a Neotropical Myrmecochore: variation in removal rates and dispersal distance. *Biotropica*, 18(4): 319-323
- Houle, G.** 1998. Seed dispersal and seedling recruitment of *Betula alleghaniensis*: Spatial inconsistency in time. *Ecology*, 79(3): 807-818
- Jackson, J.** 1981. Seed size as a correlate of temporal and spatial patterns of seed fall in a neotropical forest. *Biotropica*, 13(2): 121-130
- Jaimes, V. & D. Rivera.** 1991. Banco de semillas y tendencias en la regeneración natural de un bosque altoandino en la región de Monserrate (Cundinamarca, Colombia). *PÉREZ ARBELAEZIA* 3 (9).
- Loiselle, B.; E. Ribbens & O. Vargas.** 1996. Spatial and temporal variation of seed rain in a tropical lowland wet forest. *Biotropica*, 28(1): 82-95.
- Martínez-Ramos, M. & A. Soto-Castro.** 1993. Seed rain and advanced regeneration in a tropical forest. *Vegetatio*, 108: 299-318
- Molau, U. & E. Larsson.** 2000. Seed rain and seed bank along an alpine altitudinal gradient in Swedish lapland. *Canadian Journal of Botany*, 78(6): 728-747.
- Montenegro, A. & O. Vargas.** 2000. Estrategias de dispersión y regeneración por bancos de semillas en dos comunidades de bosque altoandino (Embalse de San Rafael, La Calera - Cundinamarca). *Acta Biologica*, Vol 5 N° 2
- Núñez, M & M. Pabon.** 2002. Banco de semillas germinable en suelos de páramo en el Santuario de Flora y Fauna de Iguaque Boyacá. Tesis (Biólogo) Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia. Tunja.
- Peart, D.** 1989. Species interactions in a successional grassland. I. Seed rain and seedling recruitment. *Journal of Ecology*, 77(1): 252-266
- Penhalver, E.F. & W. Matovani.** 1997. Floração e chuva de sementes em mata secundária em São Paulo, SP. *Revista Brasileira de Botânica*, 20(2): 205-220
- Posada, C. & C. Cárdenas.** 1999. Banco de semillas germinable de una comunidad vegetal de páramo sometida a quema y pastoreo (Parque Nacional Natural Chingaza). Trabajo de grado (Biólogo). Universidad Nacional de Colombia, Facultad de Ciencias. Bogotá.
- Ramírez, N. & M. Arroyo.** 1987. Variación espacial y temporal en la depredación de semillas de *Copaifera pubiflora* Benth. (Leguminosae: Caesalpinoideae) en Venezuela. *Biotropica*, 19(1): 32-39.
- Ramos, C., M. García & E. Narbona.** 2001. Estrategias regenerativas de *Clusia multiflora*, *Drymis granadensis* y *Weinmannia tomentosa* en el Bosque altoandino. *Acta Biológica Colombiana*, 6(1).
- Rangel, O.** 2000. Flora: Espermatofitos. *En*: Rangel (Ed.). *Colombia diversidad Biótica III. La región de vida paramuna de Colombia*.
- Rubio, F.** 1996. Mamapacha: madre de las aguas y del bosque. *En*: Fundación ecosistemas andinos Ecoan (Eds.) *El páramo, ecosistema a conservar*. Bogotá.
- Sánchez, A. & V. Vega.** 2002. Lluvia de semillas en un bosque altoandino en una zona de la región de Mamapacha (Boyacá, Colombia). Trabajo de grado (Biólogo) Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia.
- Shibata, M. & T. Nakashizuka.** 1995. Seed and seedling demography of four co-occurring *Carpinus* species in a temperate deciduous forest. *Ecology*, 76(4): 1099-1108.
- Schupp, E.W.; H.F. Howe; C.K. Augspurger & D.J. Levey.** 1989. Arrival and survival in tropical treefall gaps. *Ecology*, 70(3): 562-564.
- Sudgen, A.** 1982. Long-distance dispersal, isolation, and the cloud forest flora of the Serranía de Macuira, Guagira, Colombia. *Biotropica*, 14(3): 208-219.
- Wagner, R.** 1965. The annual seed rain of adventive herbs in a radiation damaged forest. *Ecology*, 46(4): 517-520.
- Walker, L. & L. Neris.** 1993. Posthurricane seed rain dynamics in Puerto Rico. *Biotropica*, 25(4): 408-418.
- Walker, L.; J. Zasada & F. Stuart.** 1986. The role of life history processes in primary succession on an Alaskan floodplain. *Ecology*, 67(5): 1243-1253.
- Zapp, M.C.** 2000. Evaluación de la lluvia de semillas en un bosque de niebla en el departamento de Risaralda, Colombia. Trabajo de grado (Biólogo) Universidad de los Andes. Bogotá.
- Zimmerman, J.K ; J.B. Pascarella & T.M. Aide.** 2000. Barriers to forest regeneration in an abandoned pasture in Puerto Rico. *Restoration Ecology*, 8(4): 350-360.
- Zonforlin-Martini, A.M.** 2002. Estrutura e composição da vegetação e chuva de sementes em sub-bosque, clareiras naturais e área perturbada por fogo em floresta tropicval no sul da Bahia. Tese (Doutorado). Universidad Estadual de Campinas. Instituto de Biología. Campinas, SP.

Recibido el 17 de enero de 2005

Aceptado para su publicación el 2 de octubre de 2006

## REVISTA DE LA ACADEMIA COLOMBIANA DE CIENCIAS EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES

## ÍNDICE GENERAL DEL VOLUMEN XXX, AÑO 2006

Número 114, páginas	1 – 150 (Marzo)
Número 115, páginas	151 – 312 (Junio)
Número 116, páginas	313 – 484 (Septiembre)
Número 117, páginas	485 – 636 (Diciembre)

**Vida Académica**

Discurso pronunciado por el Dr. Moisés Wasserman al dejar la Presidencia de la Corporación	465
Palabras pronunciadas por el Dr. Jaime Rodríguez Lara al asumir la Presidencia de la Academia Colombiana de Ciencias	468
Informe sobre las actividades desarrolladas durante el año académico 2005-2006	470

**Antropología**

Arqueología y patrimonio: conocimiento y apropiación social	5
---	---

**Astronomía**

Hipótesis astronómica al misterioso “ruido” escuchado en Santafé de Bogotá el domingo 9 de marzo de 1687	321
--	-----

**Biología Molecular**

Caracterización molecular y genómica del proceso de integración de provirus del virus linfotrópico humano (HTLV) tipo I	155
---	-----

**Botánica**

Nueva Especie Colombiana de <i>Browningia</i> (Cactaceae, Cactoideae, Browningieae) potencialmente promisoría para el país	19
<i>Sphagnum</i> (Sphagnaceae) en el Departamento de Boyacá, Colombia	31
Novedades taxonómicas y nomenclaturales en <i>Cremosperma</i> y <i>resia</i> (Gesneriaceae) de Colombia	171
<i>Aristolochia grandiflora</i> sw. (Aristolochiaceae): desarrollo y morfología de la flor más larga del mundo	181
Interesantes novedades en Epeletiinae (Asteraceae Heliantheae) de Colombia	331
Clave para la identificación de las especies del género <i>Diplostephium</i> (Asteraceae, Astereae) en Colombia	489

**Ciencias de la Tierra**

Alteración química de los fragmentos de matriz y de los vidrios volcánicos de los suelos y paleosuelos ándicos del norte de la cordillera central colombiana	47
Patrones de variabilidad de las temperaturas superficiales del mar en la costa caribe colombiana	195

Método híbrido de fronteras no reflectivas en límites de modelos sísmicos	209
Repelencia al agua en suelos: una síntesis	215
Aplicación de medidas repetidas a cuatro propiedades edáficas en los manglares del Brazo Calanaca, Río Ranchería	233
Alteración física de los fragmentos de matriz y de los vidrios volcánicos	243
Vulcanismo Cenozoico en la Sabana de Bogotá	495
<i>Eulophoceras jacobii</i> Hourcq y Palinomorfos asociados del coniaciano temprano, formación loma gorda, Quebrada Bambucá (Aipe-Huila-Colombia, S.A.)	503

### Ecología

Estudio preliminar de algunos aspectos ambientales y ecológicos de las comunidades de peces y macroinvertebrados acuáticos en el río Tutunendo, Chocó, Colombia	67
---	----

### Física

Síntesis de polvos cerámicos de cinc - bismuto - aluminio - antimonio - lantano y su uso en la fabricación de varistores	259
Síntesis y caracterización de perovskitas dobles tipo $\text{Sr}_2\text{FeMoO}_6$	511
Comparación de los tratamientos en radioterapia convencional y conformal para cáncer de próstata por medio de dosimetría termoluminiscente	517

### Genética

Estado Actual, consideraciones éticas y perspectivas de la terapia génica en errores innatos del metabolismo	525
--	-----

### Historia de la Ciencia

Gilberto Rodríguez (1929-2004): un gran naturalista	77
---	----

### Matemáticas y Estadísticas

El problema de Cauchy asociado con una ecuación no lineal generalizada de Schrödinger	353
Cálculo eficiente del estimador <i>Jackknife</i> para mínimos cuadrados lineales de rango completo	361
Permutation polynomials in one indeterminate over modular algebras	541
A two-stage estimator of individual regression coefficients in multivariate linear Growth curve models	549
Homogenized polynomials and curves with many points	551
Polinomios ortogonales no estándar. Aplicaciones en Análisis numérico y Teoría de aproximación	563

### Micología

<i>Coccidioides immitis</i> Rixford & Gilchrist 1895, y <i>Paracoccidioides Brasiliensis</i> (Splendore 1912) Almeida 1930: Dos hongos patógenos restringidos al Continente Americano	367
---	-----

### Química

Thermodynamic magnitudes of mixing and solvation of acetaminophen in ethanol + water cosolvent mixtures	87
Significado biológico del eje hormona de crecimiento (GH) / factor de crecimiento similar a la insulina (IGF)	101
Análisis de la microporosidad de catalizadores de FCC	271
Desarrollo de propiedades bactericidas en esmaltes para cerámica sanitaria	387
Reducción catalítica de NO <sub>x</sub> sobre soportes carbonosos. Efecto del Potasio y el Co	397
Efecto de la sensibilización en oxidación foto-catalítica	407
Termodinámica de los procesos irreversibles de un metabolismo	419
Uso del SiO <sub>2</sub> obtenido de la cascarilla de arroz en la síntesis de silicatos de calcio	581
Desarrollo de una biocerámica biomimética para uso en odontología	595

### Zoología

Información cariológica del género <i>Callicebus</i> en Colombia	109
Anatomía comparada y evolución de las especies de <i>pseudoplatystoma</i> bleeker 1862 (siluriformes: pimelodidae)	117
Descubrimiento de una nueva especie de <i>Atelopus</i> (Bufonidae) para Colombia: ¿Una luz de esperanza o el ocaso de los sapos arlequines?	279
Aproximación al conocimiento de los anfibios en una localidad del Magdalena Medio (Departamento de Caldas, Colombia)	291
Hormigas Urbanas en el Departamento del Valle del Cauca, Colombia	435
The tadpoles of frogs and toads found in the lowlands of Northern Colombia	443
Actividad enzimática de isoenzimas de l-lactato: Nad <sup>+</sup> oxidoreductasa (LDH; EC. 1.1.1.27) durante el desarrollo embrionario del pez combatiente siames <i>Betta splendens</i> (Regan, 909)	459

### Notas

Al finalizar una tarea	317
El impacto de la producción bibliográfica de nuevo conocimiento en ciencia, tecnología e innovación en Colombia de 1996 al 2005	605
Redescubrimiento y ampliación del área de distribución de <i>Bolitoglossa Capitana</i> (Caudata: Plethodontidae), especie endémica y amenazada de Colombia	615
Caracterización temporal de la lluvia de semillas en un bosque nublado del Cerro de Mamapacha (Boyacá – Colombia)	619

**Constitución de la Academia** 143, 305, 478, 630

**Publicaciones de la Academia** 145, 307, 480, 632

**Lista de Evaluadores (Volumen XXX)** 629

## ÍNDICE DE AUTORES

Abad Mejía, Pablo	387	Jaramillo, Gloria Isabel	435
Acosta Galvis, Andrés	279, 291	Jiménez, Jackson A.	87
Acosta-Solarte, Pablo A.	541	Leibovici, M.	109
Agámez, Yazmín	271	Linares, Edgar Leonardo	31
Ahumada, L. M.	581	López, Diana	397
Albis, Víctor S.	541	López, K.	511
Alméciga-Díaz, Carlos Javier	525	Lozano, Margarita María	435
Andrade, Carlos	195	Lynch, John D.	443
Arias, Mauricio	605	Machado, H.	517
Asprilla, Sonia	67	Madriñán, R.	47
Barragán, Daniel	419	Madriñán, Santiago	489
Barrera, Luis Alejandro	525	Maestre-Serrano, Ronald	459
Beganu, Gabriela	549	Mahecha, L.	517
Bello, María Angélica	181	Malagón, D.	47, 243
Bernal, Gladis	195	Marcellán, Francisco	563
Bueno, M. L.	109	Mariño, A.	511
Buitrago-Suárez, Uriel Ángel	117	Martínez, Fleming	87
Calo, Joseph	397	Martínez, Héctor Jairo	361
Calle, Martha L.	595	Meléndez, Rafael	233
Castellanos, Martha L.	233	Montenegro, Álvaro	605
Castro, Liliana	605	Montes Vides, Luis Alfredo	209
Centeno, Miguel	271	Morales-P., María Eugenia	31
Cortés Delvalle, Ricardo	495	Morales-Sánchez, Jorge E.	615
Cortés-Herrera, Oswaldo	615	Moreno Cárdenas, Freddy	321
Cortés-Pérez, Francisco	619	Muñoz, J. J.	259
Chacón de Ulloa, Patricia	435	Navarro, Uriel	271
Chávez-Portilla, Giovanni	615	Odriozola, José	271
De la Espriella, Ricardo	495	Oviedo, Luis A.	271
Delgado, Edgar	595	Pachón Muñoz, Ernesto	459
Díaz Piedrahita, Santiago	331	Páez Mozo, Edgar A.	407
Dueñas, Hernando	503	Parra, L. N.	243
Duque, Omar	353	Patarroyo, Pedro	503
Fernández –Alonso, José Luis	19, 171	Peña-Prieto, J.	279
Flórez M., M.T.	47, 243	Perea, S.	517
Franco, Lina	605	Pérez, Gloria de	595
Galindo, Robinson	331	Plazas, María Cristina	517
Galvis Vergara, Jaime	495	Polanía, Jaime H.	233
García Vallejo, Felipe	155, 605	Portilla Barbosa, José Gregorio	321
Garzón, Álvaro	563	Poveda, Germán	195
Ghisays Ruiz, Alfredo	209	Puentes-Aguilar, Johanna María	619
González, Favio	181	Rada, Marco	291
Groot, Ana María	5	Ramírez Orjuela, C.	109
Guevara, Claudia I.	595	Restrepo Moreno, Ángela	367
Huertas-Salgado, Carolina	291	Restrepo, Carlos Mario	387
Jaramillo Jaramillo, Daniel F.	215	Rivas, Tulia Sofía	67

Robles, Edson	419	Sanabria, Ana María	361
Rodríguez Santamaría, María F.	619	Sánchez de Gómez, Myriam	101
Rodríguez, Betsy Viviana	331	Sánchez, S.	279
Rodríguez, Javier	605	Suárez, Héctor	77
Rodríguez, María F.	619	Torres, O. M.	109
Rodríguez-Blanco, Guillermo	353	Torres, Camilo	605
Rodríguez-Páez, J. E.	259, 581	Torres, Yencith	67
Roldán, Gabriel	67	Valois Cuesta, Hamleth	181
Roldán, Paola	195	Vargas, Carlos Alberto	209
Romero de Pérez, Gloria	595	Vargas, Óscar M.	489
Rueda-Almonacid, J. V.	279	Velásquez, A.	279
Ruiz-Ochoa, Mauricio	233	Velásquez, Doris	605
Ruiz-Suárez, Erika Johana	31	Viloria, Ángel L.	77
Sáenz, Homero	525	Zapata, R.	47

**DURANTE LA EDICIÓN DEL VOLUMEN XXX  
COLABORARON EN LA EVALUACIÓN DE ARTÍCULOS**

Favio González	Eduardo Brieua
Carlos Alberto Vargas	Edgar Páez
Germán Galvis	José María Rincón
Inés Bernal	Myriam Sánchez de Gómez
Augusto Rivera	Luis H. Blanco
Santiago Díaz	Germán Amat
Víctor Albis	Carmenza Duque
John D. Lynch	Luis Guillermo Díaz
Jesús Eslava	Orlando Rangel
Jairo Mojica	Elizabeth Castañeda
Clara Chamorro	Martha Bueno
Dimas Malagón	Arnaldo García
Diógenes Campos	Wilson Zúñiga
Ángela Camacho	L. G. Díaz
Jaime Rodríguez Lara	Rafael Jorio
Carlos A. Trujillo	Manuel Soler
María Cristina Ardila	Armando Espinosa