

# DINÁMICA DE DOS NODOS DE RANVIER ACOPLADOS

por

Jorge Enrique Ruiz<sup>1</sup>, Diógenes Campos<sup>2,3</sup> & Ramón Fayad<sup>4</sup>

## Resumen

**Ruiz, J. E., Campos, D. & Fayad, R.:** Dinámica de dos nodos de Ranvier acoplados. Rev. Acad. Colomb. Cienc. **29** (113): 515-524, 2005. ISSN 0370-3908.

Dos nodos de Ranvier se modelan mediante circuitos de FitzHugh-Nagumo acoplados eléctricamente y se estudia su comportamiento dinámico. El parámetro de acoplamiento, con valores en la vecindad de la bifurcación de Hopf, genera variados tipos de comportamiento que dependen además de las condiciones iniciales: excitabilidad, biestabilidad y birritmicidad.

**Palabras clave:** Nodo de Ranvier, Circuito de FitzHugh-Nagumo, bifurcación de Hopf, excitabilidad, biestabilidad, birritmicidad.

## Abstract

Two Ranvier nodes are modelled by FitzHugh-Nagumo coupled electric circuits, and their dynamic behaviour is studied. Taking values around the Hopf bifurcation the coupling parameter generates a rich initial-condition-dependent behaviour: excitability, bistability, and birhythmicity.

**Key words:** Ranvier node, FitzHugh-Nagumo circuit, Hopf bifurcation, excitability, bistability, birhythmicity.

## 1. Introducción

La neurona, que es la unidad básica para el funcionamiento del sistema nervioso, es una entidad especializada en recibir, integrar y transmitir información. La información se transporta a través del axón de la neurona desde el soma hasta

los sitios sinápticos de otras neuronas (dendritas y somas), músculos o glándulas. En ciertas neuronas, por ejemplo en los vertebrados, el axón está cubierto de una capa de mielina que sirve como un aislador eléctrico; esta capa presenta a lo largo del axón pequeñas aberturas (aproximadamente un micrómetro de ancho) que se denominan *nodos de Ranvier*.

<sup>1</sup>Universidad Nacional de Colombia, E-mail: jeruizt@universia.net.co

<sup>2</sup>Departamento de Física, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá. E-mail: dcamposr@unal.edu.co

<sup>3</sup>Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Bogotá.

<sup>4</sup>Departamento de Física, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá. E-mail: rfayadn@unal.edu.co

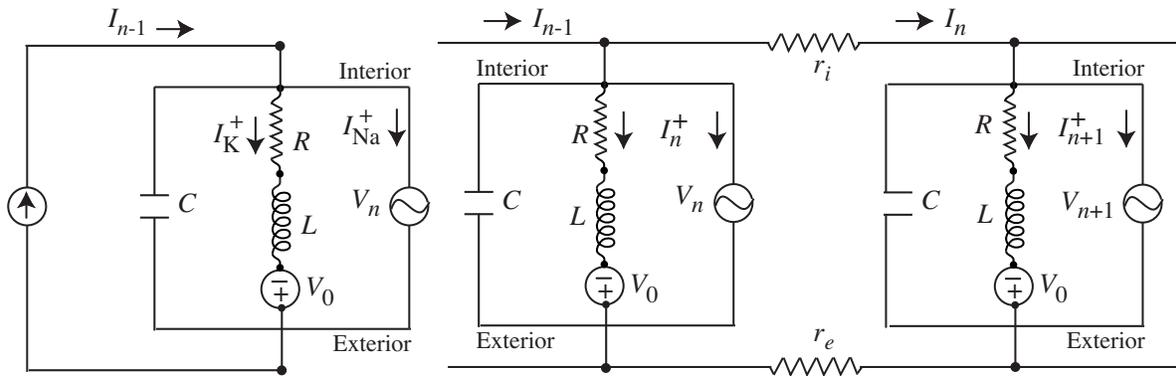


Figura 1: A la izquierda: circuito equivalente para el modelo de FitzHugh-Nagumo de las propiedades eléctricas de la membrana de una neurona;  $I_{n-1}$  designa la corriente externa total que excita el nodo  $n$ -ésimo de Ranvier. A la derecha: dos circuitos consecutivos acoplados mediante resistencias;  $I_n^+$  es la corriente neta de iones de potasio y de sodio en el nodo  $n$ -ésimo.

Los nodos se distribuyen en el axón como una estructura periódica discreta y la separación entre ellos varía entre  $50\mu\text{m}$  y  $1000\mu\text{m}$  para diferentes nervios.

Por lo anterior, las corrientes eléctricas a través de la membrana de la neurona sólo se presentan en los nodos de Ranvier. Los impulsos eléctricos no se propagan suavemente sino que saltan de un nodo al siguiente a una velocidad típica de unos  $120\text{ m/s}$ . En un momento dado, la influencia colectiva de todas las neuronas que conducen impulsos a una neurona dada es la que determina si se inicia, o no, un potencial de acción que se propaga a lo largo del axón.

El axón mielinizado se modela por medio de las leyes de Kirchhoff que conducen al sistema (ver fig. 1)

$$\begin{aligned} V_n - V_{n+1} &= R_e I_n, \\ I_{n-1} - I_n &= C \frac{dV_n}{dt} + I_n^+, \end{aligned} \quad (1)$$

donde  $n (= 1, 2, 3, \dots)$  enumera los nodos de Ranvier. El  $n$ -ésimo nodo se caracteriza por un voltaje transversal  $V_n$  a través de la membrana y por la corriente  $I_n$  que fluye longitudinalmente a lo largo del axón del nodo  $n$  al nodo  $n + 1$ . Los parámetros en el modelo son:  $R_e = r_i + r_e$  es la suma de las resistencias interior y exterior entre dos nodos, cantidad que es inversamente proporcional al espaciamiento  $s$  entre los nodos;  $C$  es la capacitancia de la membrana de un nodo;  $I_n^+$  es la corriente neta de iones de sodio ( $\text{Na}^+$ ) y de potasio ( $\text{K}^+$ ) en el nodo  $n$ .

Alan Hodgkin y Andrew Huxley propusieron en 1952 un modelo para explicar la excitabilidad eléctrica del axón en el que la corriente iónica efectiva  $I_n^+$  se representa por una expresión analítica de cierto grado de complejidad y de alta precisión (Hodgkin & Huxley, 1952), que a su vez garantiza

una excelente correspondencia entre experimento y teoría. El modelo Hodgkin-Huxley (HH) involucra cuatro variables de estado.

Con el propósito de explicar la razón por la cual los impulsos nerviosos tienen lugar en el modelo HH, en 1961 R. FitzHugh usó el modelo HH como un miembro de una clase de sistemas no lineales que presenta comportamiento excitable y oscilatorio (FitzHugh, 1961), en estrecha analogía con el circuito eléctrico que Bonhoeffer Van der Pol había utilizado en 1926 para describir cualitativamente el comportamiento oscilatorio del corazón. En 1962 Nagumo *et al* hacen contribuciones importantes al modelo (Nagumo, Arimoto & Yoshizawa, 1962), razón por la cual hoy en día se habla del modelo FitzHugh-Nagumo (FN). En este modelo sólo intervienen dos variables de estado: la *variable excitable* y la *variable de recuperación*, que se conocen también como las variables rápida y lenta, respectivamente.

Los modelos HH y FN describen el mismo fenómeno fisiológico, es decir, el control del potencial eléctrico a través de la membrana de la neurona. Este control se efectúa regulando el cambio de flujo en los canales iónicos de la membrana, lo que conlleva una modificación en el potencial y ésta genera a su vez una señal eléctrica entre dos nodos de Ranvier consecutivos.

La corriente de  $\text{Na}^+$  es rápida y depende fuertemente del voltaje de la membrana, de tal manera que se modela por una conductancia no-lineal independiente del tiempo; la corriente de  $\text{K}^+$  es lenta, independiente del voltaje de la membrana, y se modela por una resistencia lineal  $R$  conectada en serie con una inductancia  $L$  y una fuente de voltaje  $V_0$  que representa el potencial en reposo de la membrana. Es decir, el circuito equivalente para el modelo FN consta de tres componentes:

(i), un condensador  $C$  que representa la capacitancia de la membrana; (ii), un dispositivo no lineal corriente-voltaje que describe la corriente rápida; (iii), una resistencia, inductancia y batería en serie que simulan la corriente lenta (fig. 1).

Un nodo de Ranvier se describe en el modelo FN por un conjunto de ecuaciones diferenciales de primer orden:

$$\begin{aligned} C \frac{dV}{dt} &= I - I_K^+ - I_{Na}^+(V) \\ L \frac{dI_K^+}{dt} &= V + V_0 - RI_K^+. \end{aligned} \quad (2)$$

Por comodidad se suprime temporalmente el subíndice  $n$  que hace referencia al nodo  $n$ -ésimo. Obsérvese que  $\sqrt{LC}$  tiene unidades de tiempo y  $R\sqrt{C/L}$  es adimensional. Ahora, désignesen como  $R_*, C_*, L_*, I_*, V_* := I_* R_*$  unidades apropiadas para medir la resistencia, la capacitancia, la inductancia, la corriente y el voltaje. Entonces, las siguientes transformaciones conducen a una forma adimensional de (2):

$$\begin{aligned} \tau &:= \frac{1}{\sqrt{L_* C_*}} t, \quad u(\tau) := \frac{V(t)}{V_*}, \\ i(\tau) &:= \frac{\sqrt{L_* C_*}}{R_* C} \times \frac{I}{I_*}, \\ f(u) &:= -\frac{\sqrt{L_* C_*}}{R_* C} \times \frac{I_{Na}^+(V_* u)}{I_*}, \\ w(\tau) &:= \frac{\sqrt{L_* C_*}}{R_* C} \times \frac{I_K^+(t)}{I_*}. \end{aligned}$$

Es decir, las ecuaciones (2) adoptan la forma

$$\begin{aligned} \frac{du}{d\tau} &= f(u) - w + i, \\ \frac{dw}{d\tau} &= bu + \sigma - \gamma w, \end{aligned} \quad (3)$$

con los parámetros

$$b := \frac{L_* C_* R}{L C R_*} > 0, \quad \sigma := \frac{V_0}{V} b, \quad \gamma := \frac{RC}{\sqrt{L_* C_*}} b > 0. \quad (4)$$

En (3), la función  $i(\tau)$  describe el forzamiento del nodo de Ranvier por un estímulo externo. El carácter no lineal del circuito se manifiesta en la elección de la función

$$f(u) = u(u - a)(1 - u) = -au + (a + 1)u^2 - u^3 \quad (5)$$

que, en concordancia con **Buric** (2003), representa la corriente de iones de  $\text{Na}^+$ . El parámetro  $a$  es un número real, positivo o negativo.

En el presente trabajo se estudia un sistema formado por dos nodos de Ranvier que se acoplan mediante resistencias, tal como se esquematiza en la figura 1. La combinación de

las ecuaciones (3), que describen un nodo aislado, con las relaciones (1), que acoplan dos nodos consecutivos de Ranvier, conduce al siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} \frac{du_1}{d\tau} &= f(u_1) - w_1 + d(u_1 - u_2), \\ \frac{dw_1}{d\tau} &= bu_1 + \sigma - \gamma w_1, \\ \frac{du_2}{d\tau} &= f(u_2) - w_2 + d(u_2 - u_1), \\ \frac{dw_2}{d\tau} &= bu_2 + \sigma - \gamma w_2, \end{aligned} \quad (6)$$

donde el parámetro  $d$  representa el acoplamiento entre los nodos. Por comodidad se elige  $V_0 = 0$ , de tal manera que  $\sigma = 0$ . El sistema dinámico (6) se estudia para valores de los parámetros que conducen a diferentes tipos de comportamiento: excitabilidad, biestabilidad y birritmicidad.

## 2. Circuito de FitzHugh-Nagumo para un nodo

### 2.1. Estados de equilibrio

Considérense las ecuaciones (3) en ausencia de la corriente  $i(\tau)$  que fluye del nodo  $n$  al nodo  $n + 1$ , es decir, con  $i(\tau) = 0$ . Los estados de equilibrio del sistema dinámico son los puntos  $(u_e, w_e)$  del espacio de fase tales que:

$$\begin{aligned} \left. \frac{du}{d\tau} \right|_{(u_e, w_e)} &= f(u_e) - w_e = 0, \\ \left. \frac{dw}{d\tau} \right|_{(u_e, w_e)} &= bu_e - \gamma w_e = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Existen tres estados de equilibrio,

$$(u_e, w_e)_0 = (0, 0), \quad (u_e, w_e)_\pm = (u_\pm, w_\pm), \quad (8)$$

que se determinan con las cantidades auxiliares

$$\begin{aligned} u_\pm &:= \frac{1+a}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(a-1)^2 - 4\kappa} \\ w_\pm &:= \frac{b}{\gamma} u_\pm, \quad \kappa := \frac{b}{\gamma}. \end{aligned} \quad (9)$$

En lo que sigue, se eligen los parámetros de tal manera que  $(a-1)^2\gamma - 4b < 0$ , lo que conlleva a valores complejos de  $u_\pm$  y de  $w_\pm$ ; es decir, el único estado de equilibrio que subsiste en los reales es el punto fijo  $(0, 0)$ . Esta elección concuerda con la evidencia experimental que indica que los nodos de Ranvier presentan un estado de equilibrio que corresponde al potencial de reposo de la membrana.

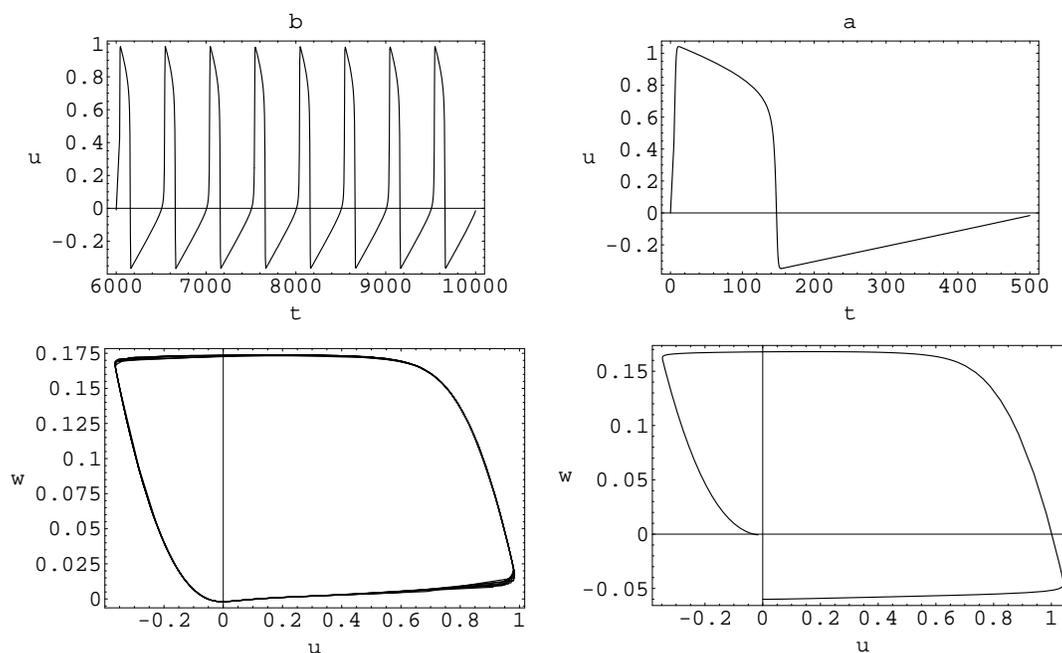


Figura 2: Transformación de un sistema excitable en un sistema periódico: a) si  $a > -0,002$ , el sistema es excitable; b), si  $a < -0,002$ , el sistema es oscilatorio. Los parámetros utilizados en ambos casos son  $b = 0,002$  y  $\gamma = 0,002$ .

## 2.2. Estabilidad del punto fijo $(0, 0)$

Al linealizar el sistema (3) alrededor del punto fijo  $(0, 0)$  se obtiene la ecuación diferencial matricial

$$\frac{d}{d\tau} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathbf{J} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \mathbf{J} := \begin{pmatrix} -a & -1 \\ b & -\gamma \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Las raíces de la ecuación característica  $\lambda^2 + \alpha_1\lambda + \alpha_0 = 0$ , o valores propios de la matriz  $\mathbf{J}$ , están dadas por

$$\lambda_{\pm} = -\frac{1}{2}(a + \gamma) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(a + \gamma)^2 - 4(a\gamma + b)}, \quad (11)$$

con las cantidades auxiliares

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \det(\mathbf{J}) = a\gamma + b, \\ \alpha_1 &= -2\alpha = -\text{tr}(\mathbf{J}) = a + \gamma. \end{aligned} \quad (12)$$

El estado de equilibrio  $(0, 0)$  es estable, es decir, los dos valores propios  $\lambda_{\pm}$  tienen parte real negativa, si  $\alpha_1 > 0$  y  $\alpha_0 > 0$ ; los parámetros  $b$  y  $\gamma$  son positivos, pero  $a$  puede tomar valores positivos o negativos.

Un sistema dinámico que tiene un estado de equilibrio estable es un *sistema excitable* si existe una trayectoria que a partir de un estado inicial en la vecindad del punto de

equilibrio realiza grandes excursiones en el espacio de fase, antes de regresar a las vecindades del estado inicial. Para garantizar la excitabilidad del sistema (3) se eligen los parámetros en concordancia con el rango de valores que utiliza (Rinze, 1981), tales que  $a > b$  y  $b \approx \gamma$ . Así, el estado de equilibrio  $(0, 0)$  es un punto hiperbólico atractivo que será: un foco, si  $(a + \gamma)^2 - 4(a\gamma + b) < 0$ ; un nodo, si  $(a + \gamma)^2 - 4(a\gamma + b) > 0$ .

## 2.3. Bifurcación de Hopf para un nodo

Existen potenciales de acción que son rítmicos (periódicos) (Hall & Guyton, 2000), hecho que se asocia con altas concentraciones extracelulares de potasio. El modelo de FitzHugh-Nagumo incorpora estos potenciales mediante el parámetro  $a$  (Keener & Sneyd, 1998) que describe fisiológicamente la transformación del nodo excitable en una órbita periódica en el espacio de fase.

En el caso de un sistema con dos variables de estado  $(u, w)$ , la ecuación característica  $\lambda^2 + \alpha_1(a)\lambda + \alpha_0(a) = 0$  da origen en  $a = a_e$  a una bifurcación de Hopf si (Campos & Isaza, 2002)

$$\alpha_1(a_e) = 0, \quad \alpha_0(a_e) > 0, \quad \left. \frac{d}{da} \alpha_1(a) \right|_{a=a_e} \neq 0. \quad (13)$$

Es decir, al cambiar el parámetro  $a$  y pasar por el valor  $a_e$  el punto fijo  $(0, 0)$  desaparece para dar origen a una solución periódica no trivial en el espacio de fase  $u-w$ . Se concluye que el sistema (3) presenta una bifurcación de Hopf, si:

$$a_e = -\gamma, \quad \alpha_0(a_e) = b - \gamma^2 > 0. \quad (14)$$

Las figuras 2 muestran este comportamiento: para  $a < -0,002$  el sistema tiene un comportamiento oscilatorio mientras que para  $a > -0,002$  el sistema es excitable.

### 3. Dos circuitos acoplados

Considérense ahora las ecuaciones que definen los estados de equilibrio  $(u_1, w_1, u_2, w_2)_e$  del sistema dinámico (6). De la segunda y cuarta ecuación (6) se obtienen las relaciones

$$w_1 = \kappa u_1, \quad w_2 = \kappa u_2, \quad \text{con } \kappa := \frac{b}{\gamma}. \quad (15)$$

Las otras dos ecuaciones (6) conducen al sistema

$$\begin{aligned} f(u_1) - \kappa u_1 + d(u_1 - u_2) &= 0, \\ f(u_2) - \kappa u_2 + d(u_2 - u_1) &= 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Es decir, se identifican las siguientes soluciones

$$\begin{aligned} u_1 &= u_2 = 0, \\ u_1^\pm &= u_2^\pm = \frac{1+a}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(a-1)^2 - 4\kappa}, \end{aligned} \quad (17)$$

que son independientes del parámetro  $d$ . Los valores  $u_1^\pm$  y  $u_2^\pm$  son complejos en el rango  $1 - 2\sqrt{\kappa} \leq a \leq 1 + 2\sqrt{\kappa}$ ; es decir, para estos valores de  $a$ , el estado de equilibrio  $(u_1, w_1, u_2, w_2)_e = (0, 0, 0, 0)$  es el único punto fijo en los reales. Por ejemplo, para  $b = \gamma = 0,002$  se tiene  $\kappa = 1$  y en el rango  $-1 \leq a \leq 3$  sólo existe el punto real  $(0, 0, 0, 0)$ . Los estados de equilibrio que se han obtenido en el caso de dos nodos acoplados coinciden con la situación de dos nodos independientes, debido a que los valores (17) son independientes del acoplamiento  $d$ . En lo que sigue se eligen valores de  $d$  en el rango  $0 \leq d \leq d_p$ , con  $d_p \approx 0,575$ .

#### 3.1. Simetría de las ecuaciones

Las ecuaciones (6) son invariantes en forma bajo la transformación  $(u_1, w_1, u_2, w_2) \leftrightarrow (u_2, w_2, u_1, w_1)$ . Esta propiedad sugiere estipular *condiciones iniciales idénticas* para los dos nodos de Ranvier, en el sentido de elegir las así:

$$u_1(0) = u_2(0), \quad w_1(0) = w_2(0).$$

Entonces, los nodos permanecen en *fase* en todo instante de tiempo  $\tau$ , en el sentido de que las variables de estado satisfacen  $u_1(\tau) = u_2(\tau)$  y  $w_1(\tau) = w_2(\tau)$ .

#### 3.2. Estabilidad del punto fijo

Hay dos parámetros  $(a, d)$  de interés fisiológico que se deben tener en cuenta para el análisis del sistema: el parámetro  $a$  se asocia con la concentración extracelular de iones de potasio (Hall & Guyton, 2000) y el parámetro  $d$  con la resistencia interna de la membrana a los diferentes iones (Keener & Sneyd, 1998).

En analogía con (10), al linealizar el sistema dinámico (6) alrededor del punto fijo  $(u_1, w_1, u_2, w_2)_e = (0, 0, 0, 0)$  se obtiene que la matriz del Jacobiano esta dada por

$$J = \begin{pmatrix} -(a-d) & -1 & -d & 0 \\ b & -\gamma & 0 & 0 \\ -d & 0 & -(a-d) & -1 \\ 0 & 0 & b & -\gamma \end{pmatrix}.$$

El polinomio característico de  $J$  es dado por

$$\lambda^4 + \alpha_3 \lambda^3 + \alpha_2 \lambda^2 + \alpha_1 \lambda + \alpha_0 = 0, \quad (18)$$

con coeficientes

$$\begin{aligned} \alpha_3 &:= 2(a-d) + 2\gamma, \\ \alpha_2 &:= (a-d)^2 + 2b - d^2 + 4(a-d)\gamma + \gamma^2, \\ \alpha_1 &:= 2(a-d)b + 2[(a-d)^2 + b - d^2]\gamma + 2(a-d)\gamma^2, \\ \alpha_0 &:= b^2 + 2(a-d)b\gamma + ((a-d)^2 - d^2)\gamma^2. \end{aligned}$$

Los correspondientes valores propios son:

$$\begin{aligned} \lambda_\pm &= -\frac{a-2d+\gamma}{2} \\ &\pm \frac{1}{2} \sqrt{(a-2d+\gamma)^2 - 4b - 4(a-2d)\gamma}, \\ \Lambda_\pm &= -\frac{a+\gamma}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(a+\gamma)^2 - 4b - 4a\gamma}. \end{aligned} \quad (19)$$

Estas expresiones son similares en forma a raíces de ecuaciones cuadráticas  $\lambda^2 + \alpha_1 \lambda + \alpha_0 = 0$ , previa identificación apropiada de los coeficientes  $\alpha_0$  y  $\alpha_1$ .

La estabilidad del estado de equilibrio  $(u_1, w_1, u_2, w_2)_e = (0, 0, 0, 0)$  lo determinan los signos de las partes reales de los cuatro valores propios. Como el sistema dinámico es de 4 dimensiones y los valores propios vienen en pares, el punto fijo se puede clasificar de la siguiente manera (Burić & Todovorić, 2003):

**Nodo-Nodo estable (NNE)**, si los cuatro valores propios son reales negativos.

**Foco-Nodo estable (FNE)**, si dos valores propios son reales negativos y los otros dos son complejos conjugados, con parte real negativa.

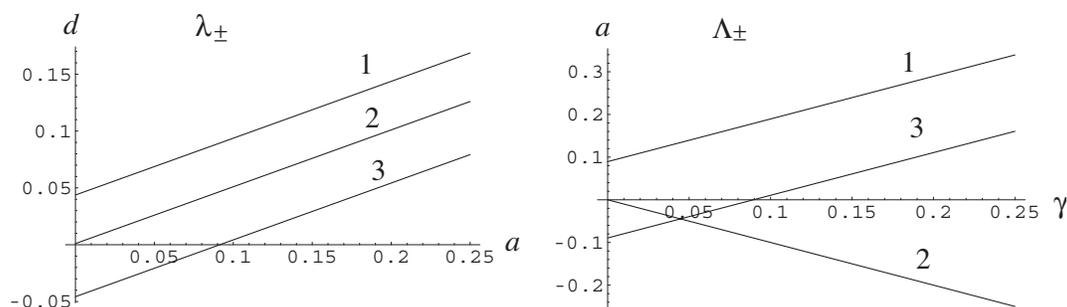


Figura 3: Diagramas de bifurcación para los valores propios (19), con  $b = 0,002$ .

**Foco-Nodo inestable (FNI)**, si dos valores propios son reales negativos y los otros dos son complejos conjugados, con parte real positiva.

**Nodo-Nodo inestable (NNI)**, si dos valores propios son reales negativos y los otros dos son reales positivos.

Para el estudio de la estabilidad del punto fijo  $(0, 0, 0, 0)$  es útil hacer un gráfico en el espacio de parámetros  $(a, d)$ , como se muestra en la figura 3 de la izquierda. El gráfico se construye encontrando los puntos  $(a, d)$  tales que:

- Las partes reales de los valores propios  $\lambda_{\pm}$  se anulan, los que forman la línea marcada con el número 2.
- El discriminante de los valores propios  $\lambda_{\pm}$  cambia de signo, los que forman las líneas marcadas con 1 y 3.

En la figura 3 de la derecha se muestra el comportamiento de los valores propios  $\Lambda_{\pm}$  en el espacio de parámetros  $(a, \gamma)$ .

El comportamiento del sistema dinámico (6) para diferentes valores de los parámetros  $(a, d)$  se resume así:

- Si el valor de  $d$  está por debajo de la línea 3 el punto fijo es un nodo-nodo estable (NNE).
- Si el valor de  $d$  está entre las líneas 3 y 2 el punto fijo es un foco-nodo estable (FNE).
- Si el valor de  $d$  está entre las líneas 2 y 1 el punto fijo es un foco-nodo inestable (FNI).
- Si el valor de  $d$  está por encima de la línea 1 el punto fijo es un nodo-nodo inestable (NNI).

En conclusión: Existe un cambio de estabilidad del punto fijo  $(0, 0, 0, 0)$  cuando se modifica el parámetro de acoplamiento  $d$ , pasando de ser un punto estable a un punto inestable.

### 3.3. Bifurcación de Hopf

En esta sección se muestra que el acoplamiento entre unidades excitables genera un comportamiento oscilatorio en el sistema. A partir de ahora los valores de los parámetros son:  $a = 0,25$ ,  $b = 0,002$  y  $\gamma = 0,002$ . Se estudian los efectos de modificar el parámetro de acoplamiento  $d$ .

La existencia de una bifurcación de Hopf en el sistema dinámico ((6)) se establece mediante la aplicación de criterios existentes en la literatura (Liu, 1994), (Campos & Isaza, 2002), (Asada & Yoshida, 2003). El criterio de Liu se aplica a una “bifurcación de Hopf simple” en un sistema  $n$ -dimensional, designación que se emplea para indicar que todas las raíces características tienen partes reales negativas, excepto un par que son puramente imaginarias. Al sistema (6) se aplican criterios específicos desarrollados para sistemas tetradimensionales (Asada & Yoshida, 2003).

En los valores propios (19) se observa el cumplimiento de las siguientes condiciones que garantizan la existencia de una bifurcación de Hopf en un punto  $d = d_c$ :

- Los valores propios  $\lambda_{\pm}(d_c)$  son puramente imaginarios cuando el acoplamiento  $d$  toma el valor

$$d_c := \frac{1}{2}(a + \gamma). \quad (20)$$

- La parte real de las raíces  $\Lambda_{\pm}$  es diferente de cero.
- La derivada de la parte real de  $\lambda_{\pm}(d)$  con respecto a  $d$ , evaluada en  $d_c$ , es diferente de cero.

A la luz de lo enunciado por Asada & Yoshida (2003), la existencia de una bifurcación de Hopf requiere las condiciones  $b > \gamma^2$  y  $b + a\gamma \neq 0$ .

### 3.4. Simulación numérica

Al realizar experimentos numéricos cerca al valor  $d_c$  donde ocurre la bifurcación de Hopf, se muestra que el sistema

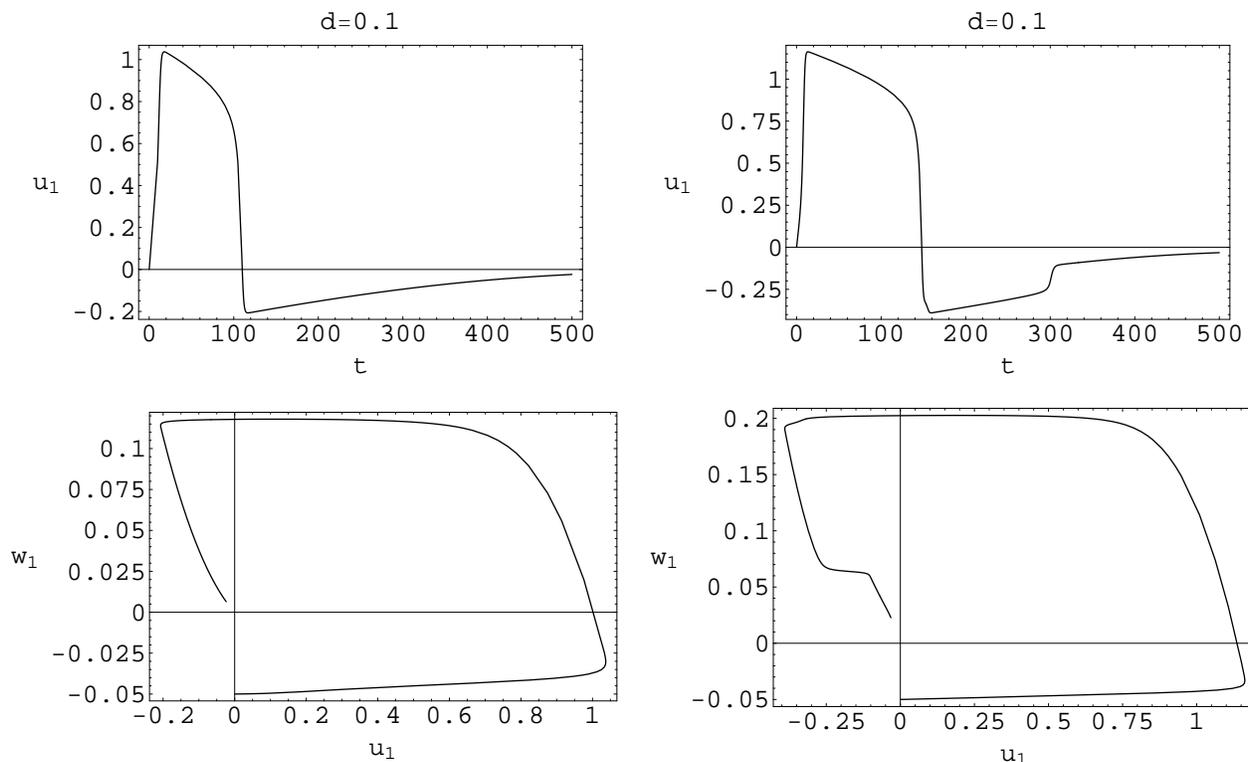


Figura 4: Excitabilidad del sistema para valores de  $d$  menores que  $d_c$ .

dinámico ((6)) tiene diferentes comportamientos, que dependen del valor del parámetro  $d$ . Existen cuatro valores de  $d$ , encontrados numéricamente, que son importantes para caracterizar la dinámica del sistema. Estos valores se denotan como sigue y su significado se explica más adelante:

$$d_c, \quad d_l, \quad d_i, \quad d_p.$$

El comportamiento del sistema dinámico (6) se visualiza mediante gráficas de  $u_1(t)$  y mediante diagramas  $u_1-w_1$  en el espacio de fase, para las siguientes situaciones:

**Caso  $d < d_c$ .** En este rango de valores de  $d$  existe el estado de equilibrio  $(0, 0, 0, 0)$  y el sistema es excitable (figura 4).

**Caso  $d_c < d < d_l$ .** Aparecen dos comportamientos:

- El sistema es excitable para condiciones iniciales de la forma  $u_1(0) = u_2(0)$  y  $w_1(0) = w_2(0)$ .
- El sistema es periódico con condiciones iniciales  $u_1(0) \neq u_2(0)$  y  $w_1(0) \neq w_2(0)$  (figura 5). Es decir, en este caso se tiene un sistema biestable. El valor de  $d_l$  depende de las condiciones iniciales

$(u_1(0), w_1(0))$ , pero exploración numérica conduce a  $d_l \approx 0,148$

**Caso  $d_l < d < d_i$ .** El sistema presenta birritmicidad, en el sentido de existir dos ciclos límites diferentes. Una trayectoria en el espacio de fase tenderá hacia un ciclo límite si el sistema tiene condiciones iniciales de la forma  $u_1(0) = u_2(0)$  y  $w_1(0) = w_2(0)$ . El otro ciclo límite se alcanza con condiciones iniciales  $u_1(0) \neq u_2(0)$  y/o  $w_1(0) \neq w_2(0)$ . En nuestro caso  $d_i = 0,168$  (figura 6).

**Caso  $d_i < d < d_p$ .** Para este rango de parámetros el sistema tiene un único ciclo límite sin importar las condiciones iniciales (figura 7).

### 3.5. Diagramas de máxima amplitud

Tal como se presentó en la sección 3.2, sea  $d_c$  el valor del parámetro  $d$  para el cual ocurre la bifurcación de Hopf.

El punto  $(0, 0, 0, 0)$  es un foco-nodo estable para  $d < d_c =$

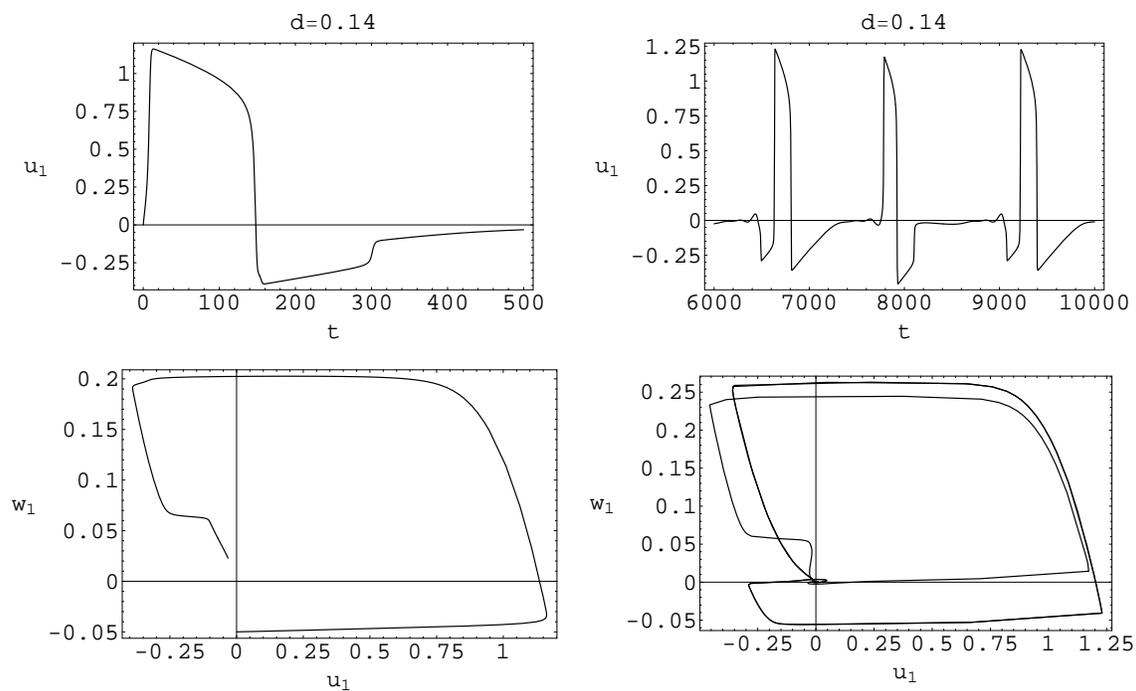


Figura 5: Biestabilidad para valores de  $d$  en el rango  $(d_c, d_i)$ .

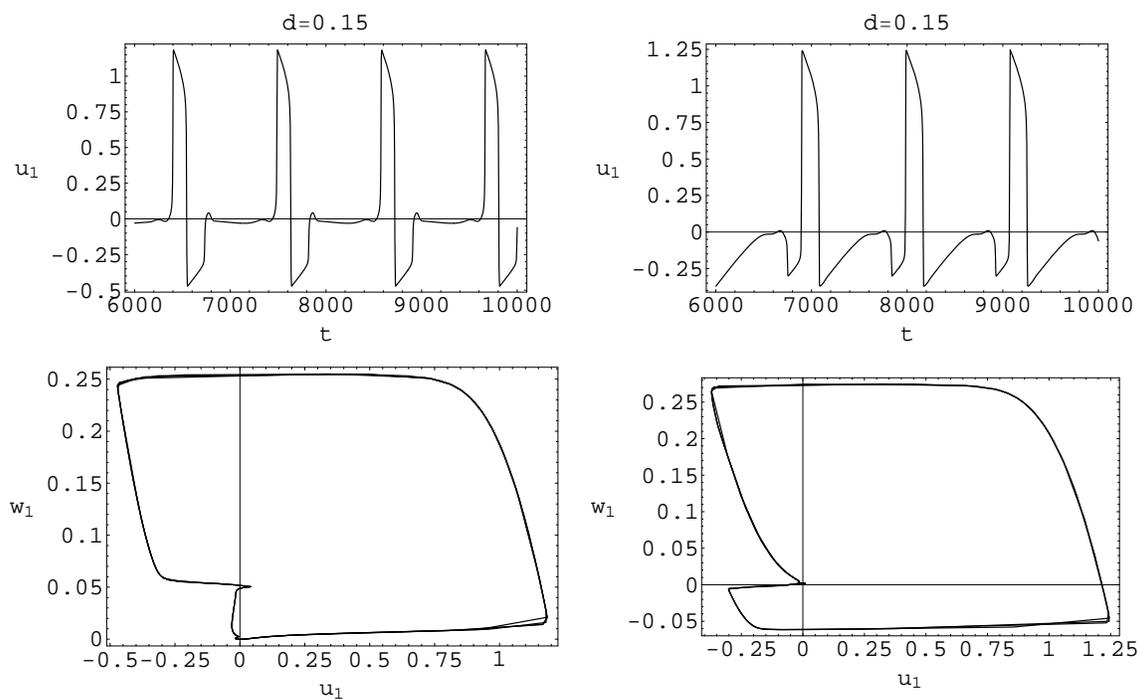


Figura 6: Birritmicidad para valores de  $d$  en el rango  $(d_c, d_i)$ .

0,126, un foco-nodo inestable para  $d_c < d < d_i$ , con

$$d_i = \frac{1}{2} (\sqrt{b} + a - \gamma) = 0,168; \quad (21)$$

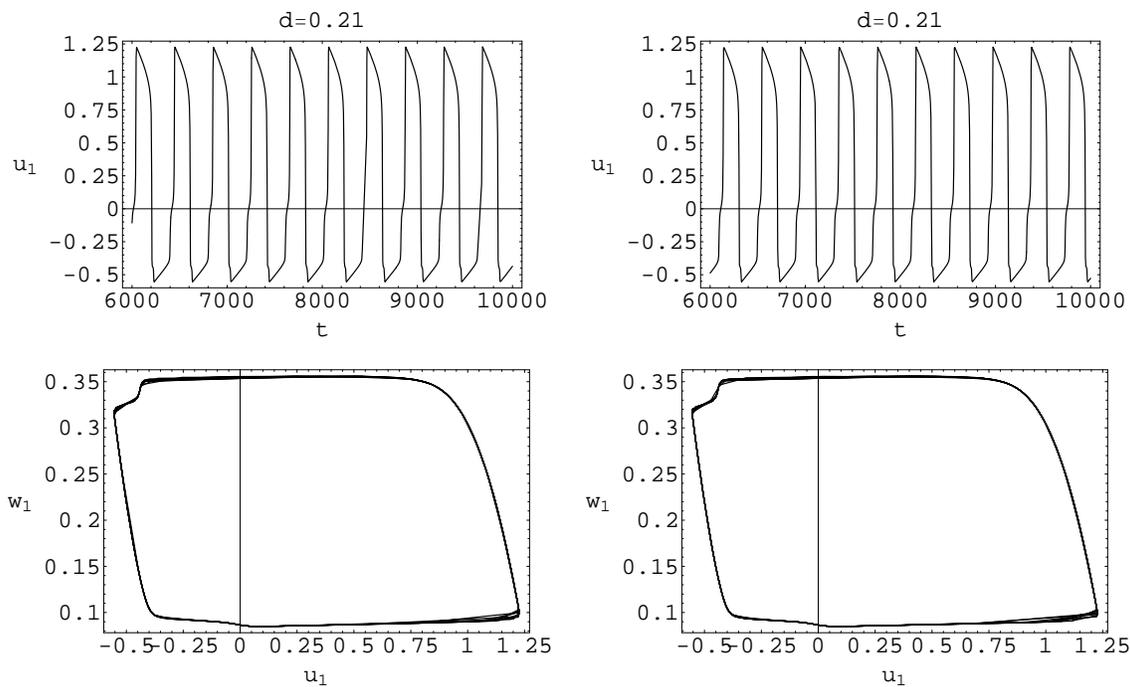


Figura 7: Existencia de un ciclo límite en el rango  $d_i < d < d_p$ .

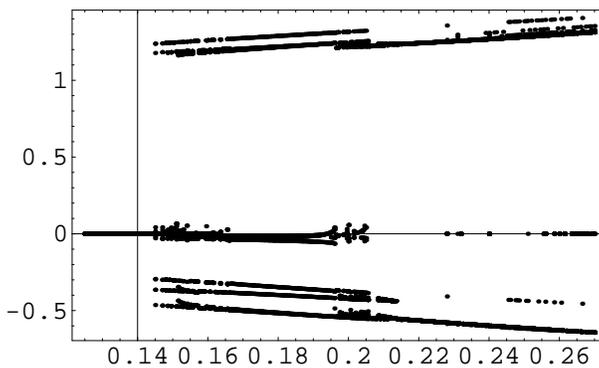


Figura 8: Diagrama de máxima amplitud.

si  $d_i < d < d_p$ , el punto es un nodo-nodo inestable.

Para los valores indicados del parámetro  $d$  se presentan cambios de estabilidad que se manifiestan en diferentes comportamientos dinámicos. Para entender el tipo de comportamiento se realizan ahora estudios numéricos de las ecuaciones (6). En la figura 8 se muestran los máximos y mínimos de la variable  $u_1$  como función de  $d$ , en el rango  $d_c < d < d_i$ . Se observa que el sistema tiene diferentes máximos para valores de  $d$  entre  $d_c$  y  $d \approx 0,20$ , lo que indica la existencia

de oscilaciones con una estructura compleja. A partir de este valor de  $d$  el sistema presenta solo un máximo, de lo que se concluye que el sistema es periódico.

Los exponentes de Lyapunov permiten determinar el tipo de periodicidad que tiene el sistema. Para valores de  $d$  en el intervalo  $[0.15, 0.20]$  el sistema se comporta de manera biperiódica, puesto que los exponentes de Lyapunov ( $\lambda_1, \lambda_2$ ) son aproximadamente cero, como se ve en la figura 9. El carácter biperiódico significa que el sistema se alterna entre dos ci-

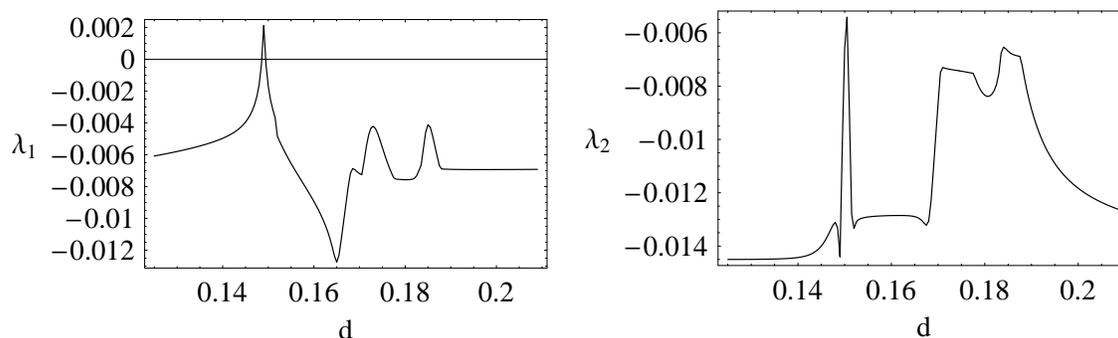


Figura 9: Espectro de Lyapunov.

los límites. Para valores mayores que  $d = 0,20$  el sistema solo tiene un ciclo limite.

Los resultados anteriores aplican para cualquier conjunto de parámetros  $(a, d)$ , pues el cambio de estabilidad es el mismo, como se vió en el espacio de parámetros  $(a, d)$  de la figura 3, con  $b = \gamma = 0,002$ .

La interpretación fisiológica de los resultados previos no es inmediata, ya que el modelo de FitzHugh-Nagumo es una simplificación del propuesto por Hodgkin y Huxley que tiene en cuenta la evidencia experimental. Desde el punto de vista fisiológico no es posible mantener el parámetro  $a$  constante y modificar el parámetro  $d$ , pues los dos están asociados con las concentraciones de los diferentes iones. Los resultados indican que el acoplamiento introduce oscilaciones a una célula excitable, fenómeno que se observa en las células cardíacas. Las oscilaciones en esta clase de modelos también se pueden introducir por medio de corrientes externas al sistema (Keener & Sneyd, 1998), fenómeno que se observa experimentalmente. En este trabajo hemos visto una manera de introducir oscilaciones a un circuito acoplado modificando la constante de acoplamiento.

### Agradecimientos

Uno de los autores (JER) agradece los comentarios de Andrés Vanegas.

### Referencias

- Hodgkin, A. L. & Huxley, A. F., 1962. A quantitative description of membrane current and its application to conduction and excitation in nerve, *Journal of Physiology*, **117**, 500.
- FitzHugh, R., 1961. Impulses and physiological states in models of nerve membrane, *Biophysical Journal* **1**, 445.
- Nagumo, J. S., Arimoto, S. & S Yoshizawa, S., 1962. An active pulse transmission line simulating nerve axon, *Proceeding of IRE*, **50**, 2061.
- Campos, D. & Isaza, J. F., 2002. *Prolegómenos a los sistemas dinámicos*, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá.
- Burić, N., Todovorić, D., 2003. Dynamics of FitzHugh-Nagumo excitable systems with delayed coupling, *Phys. Rev. E* **67**, 066222. También: arXiv:nlin.CD/0305010.
- Liu, W-M., 1994. Criterion of Hopf Bifurcations without Using Eigenvalues, *J. Math. Analysis and Appl.* **182**, 250.
- Asada, T., Yoshida, H., 2003. Coefficient criterion for four - dimensional Hopf bifurcations: a complete mathematical characterization and applications to economic dynamics, *Chaos, Solitons and Fractals* **18**, 525.
- Keener, J. P. & Sneyd, J., 1998. *Mathematical Physiology*, Springer, New York.
- Rinze, J., 1981. *Models in neurobiology*, Plenum Press, New York.
- Hall, J. E. & Guyton, A. C., 2000. *Tratado de Fisiología Médica*, McGraw-Hill, Mexico.

Recibido el 25 de agosto de 2005.

Aceptado para su publicación el .

# PEDRO J. SOSA: UN GRAN INGENIERO MATEMÁTICO

por

Víctor S. Albis & Deisy Y. Camargo<sup>1</sup>

## Resumen

**Albis, Víctor S. & Deisy Y. Camargo:** Pedro J. Sosa: Un gran ingeniero matemático. Rev. Acad. Colomb. Cienc. **29** (113): 525-534, 2005. ISSN 0370-3908.

Se presenta un esbozo biográfico del ingeniero panameño Pedro José Sosa y de su importancia en la historia de la ingeniería y las matemáticas colombianas del siglo XIX.

**Palabras clave:** Historia de la matemática, cuaternios, historia de la ingeniería, Colombia, Panamá, Canal de Panamá.

## Abstract

A biographical sketch of Panamanian engineer Pedro José Sosa is presented, stressing his significance for the history of Colombian engineering and mathematics in the 19<sup>th</sup> century.

**Key words:** History of mathematics, quaternions, history of civil engineering, Colombia, Panama, Panama Canal.

## 1. Introducción

En el siglo XIX Colombia pasó por un proceso de profesionalización de la ingeniería, con la creación y fortalecimiento de instituciones dedicadas a su enseñanza y divulgación. El *Colejio Militar*, su posterior anexión como *Escuela de Ingeniería* a la

Universidad Nacional, la creación de la *Sociedad Colombiana de Ingenieros* y de su revista, los *Anales de Ingeniería*, son claros ejemplos de este proceso. También, como parte de este proceso, muchas familias enviaron a sus hijos al exterior a estudiar ingeniería, con el propósito de que a su regreso aplicarían lo aprendido en beneficio de su país. **Pedro José Sosa** fue uno de

<sup>1</sup> Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, Colombia. Correo electrónico: valbis@accefyn.org.co, dy-camargog@yahoo.com AMS Classification 2000: 01A55, 01A70, 01A80, 01A85.

los jóvenes enviados al exterior a estudiar y al regresar a su país participó en los proyectos de ingeniería más importantes del momento. Pero su interés fue más allá de regresar a aplicar lo aprendido, pues estaba interesado realmente en la matemática como ciencia. Ejemplo notable de este interés es su artículo *Introducción elemental al cálculo de los cuaternios*, publicado por entregas en los Anales de Ingeniería a partir de 1890.

El propósito de este trabajo es dar una semblanza de la vida y obra de Sosa, en el marco de la profesionalización de la ingeniería colombiana. En particular, señalaremos el admirable papel que tuvo en la construcción del canal de Panamá y también el influjo que pudo tener su mencionado trabajo en el ulterior desarrollo de las matemáticas colombianas.

En efecto, si miramos los temas de los escritos de matemáticas publicados en Colombia en el siglo XIX, una revisión de los mismos nos muestra que la geometría euclídea, la física, la aritmética, el álgebra elemental o la astronomía eran los más comunes. De modo que el trabajo escrito por Sosa, sobre cálculo vectorial y los cuaternios, pudo haber sido el comienzo de un nuevo camino en la innovación matemática en el país. Esto no sucedió por motivos que serán entendidos a lo largo del desarrollo de este escrito.

## 2. Esbozo biográfico de Pedro José Sosa

En esta sección añadimos a la información biográfica que hemos considerado básica, algunos datos sobre la vida familiar y estudiantil de Sosa que no aparecen en los trabajos historiográficos que hemos examinado, escritos la mayoría por autores panameños (véase la bibliografía, en especial [3, págs. 55–62]).

**Pedro José Sosa** nació el 19 de mayo de 1851<sup>2</sup>, en el Departamento de Panamá, de la entonces Nueva Granada<sup>3</sup>. Recibió su educación básica en Panamá y luego se trasladó a los Estados Unidos donde realizó sus estudios universitarios en el *Rensselaer Polytechnic Institute* (citado de ahora en adelante como RPI) de Troy, en el estado de Nueva York.

Allí se vinculó a su club de remo como consta en los archivos del Instituto [4].

Su trabajo final de grado se tituló *Review of the New Wrought Iron Girder Bridge over the Hudson River, at Troy, New York*,<sup>4</sup> con el cual obtuvo el título de Ingeniero Civil en el año de 1873.<sup>5</sup>

Según F. Safford [30, pág. 226], en el siglo XIX en el RPI estudiaron cinco neogranadinos. De ellos solo se graduaron tres, incluyendo a Sosa, quien fue el primero.

El segundo fue **Fabriciano Botero**, graduado en 1885, hijo de **José María Botero** y **Rosalía de Botero**, nacido el 4 de julio de 1859, en el Retiro, estado de Antioquia, de los Estados Unidos de Colombia. Antes de ingresar al Rensselaer, estudió dos años en la Universidad de Antioquia y uno en el Colejio Militar de Bogotá. Ingresó al IPR en 1882 y trabajó con la Keystone Bridge Company, de Pittsburgh, de 1885 a 1886, año en que regresó a Colombia [21, págs. 534–535].

El tercero fue **Ricardo Manuel Arango**, graduado en 1886, hijo de **José Agustín Arango** y **Josefa Matilda Chiari de Arango**, nacido en el Estado de Panamá, Estados Unidos de Colombia, el 25 de diciembre de 1865. Ingresó al Instituto en septiembre de 1883, después de pasar algún tiempo en la Escuela Preparatoria de Minas de la ciudad de Nueva York [21, pág. 540].

Los estudiantes colombianos que no se graduaron del Rensselaer fueron: **Luis G. Johnson** (1877–8), de Medellín, y **Octavio A. Puyana** (1883–4), de Bucaramanga [21, págs. 578 y 581].

Después de su grado, entre 1873 y 1875, Sosa se desempeñó como ingeniero en Estados Unidos y México (véase [31, pág. 259]). Regresó a los Estados Unidos de Colombia en 1875 y poco después contrajo matrimonio con **Eugenia Jované Díaz** y con quien tuvo cuatro hijos: el primero fue **José Antonio** quien murió con su padre; el segundo hijo se llamaba **Pedro José**, quien también murió a muy temprana edad; el tercero **Martín**, quien llegó a ser Contralor General

<sup>2</sup>El obituario escrito por **Diódoro Sánchez** [31, pág. 259] señala a 1852 como el año de su nacimiento. Pero en los registros encontrados en el archivo del Instituto Politécnico Rensselaer, en el pedestal del busto de Sosa en la *Plaza de Francia*, en la ciudad de Panamá, y en las estampillas emitidas por el gobierno panameño aparece 1851 como el año de su nacimiento. Por esta razón pensamos que esta es la fecha correcta.

<sup>3</sup>La República de Colombia ha tenido distintos nombres a lo largo de su historia. Entre 1832 y 1857 se llamaba la Nueva Granada [30, pág. 17].

<sup>4</sup>*Revisión del nuevo puente de vigas de hierro forjado sobre el río Hudson, en Troy, Nueva York*. Desconocemos si aún existen copias de este trabajo en el RPI. Si tal es el caso sería interesante examinar una copia para entender el desempeño de Sosa como ingeniero.

<sup>5</sup>**Alfaro** señala en su trabajo que: “[Sosa] obtuvo con honores el diploma de ingeniero civil” [3, pág. 57]. Sin embargo, no nos ha sido posible corroborar esta afirmación.

de la República de Panamá<sup>6</sup> [3, pág. 61] y hubo otro **José Antonio**, al parecer cuarto y póstumo hijo.

A los pocos meses de su regreso a los Estados Unidos de Colombia fue invitado a participar en el proyecto del Ferrocarril del Norte, el proyecto de mayor envergadura de la época, cuya construcción estaba planeada para que se extendiese desde un punto del río Magdalena navegable en cualquier tiempo del año hasta Bogotá; por sus estudios en Troy fue escogido para exponer en Bogotá un proyecto alternativo al que proponía la construcción de un *leñocarril*<sup>7</sup> en lugar de un ferrocarril. Ambos proyectos se truncaron por la inestabilidad política de la época y **Sosa** regresó a Panamá.

Allí, prontamente se vinculó como ingeniero en la construcción del canal de Panamá, en donde ocupó variados cargos, desde hacer parte de los ingenieros encargados de los primeros trabajos exploratorios hasta *Jefe de control técnico y del departamento topográfico* de la Compañía Universal del Canal Interoceánico de Panamá. **Sosa** trabajó para el Canal hasta el último día de su vida.

Muere prematuramente el 4 de julio de 1898 a sus 47 años, en compañía de su hijo mayor **José Antonio Sosa**,<sup>8</sup> al zozobrar el buque francés *La Bourgogne* cuando se dirigía a París para representar a Colombia en el *Congreso Internacional de Ingenieros*. La noticia se supo en Bogotá el 12 de julio por el cable que envió **Abelardo Ramos** el 11 de julio desde San José de Costa Rica. De inmediato, **Diódoro Sánchez** la divulgó el 13 de julio en la edición diaria del periódico *La Crónica* de la ciudad de Bogotá<sup>9</sup>.

Inmediatamente después de su muerte, le rindieron honores, mediante decretos, proposiciones y resoluciones, el Senado de la República de Colombia [9], la Gobernación del Departamento de Panamá [5], el Directorio Liberal del Departamento de Panamá [31, pág. 276] y la Sociedad Colombiana de Ingenieros [6].

El 4 de diciembre de 1923 se inauguró en la ciudad de Panamá la *Plaza de Francia*<sup>10</sup>. Allí se encuentran los bustos en bronce de **Pedro José Sosa**<sup>11</sup>, **Ferdinand de Lesseps**, **Armand Reclus** y **Lucien Napoléon Bonaparte Wyse**, realizados por **Pierre Félix Masseau** (*Fix-Masseau*)<sup>12</sup>.



*Busto de Sosa ubicado en la plaza de Francia, Ciudad de Panamá*

En homenaje a **Sosa**, el gobierno de Panamá ha emitido dos sellos postales, el primero en el año de 1915.<sup>13</sup> El segundo, el 22 de noviembre de 1955 con motivo del 75 aniversario del inicio de la construcción del canal.<sup>14</sup>

### 3. Pedro J. Sosa, el Canal de Panamá y la Sociedad Colombiana de Ingenieros.

Como lo mencionamos anteriormente, **Sosa** se incorporó en Panamá a las dos expediciones de campo que se realizaron previamente a la construcción del Canal. La

<sup>6</sup>Como tal propuso, en 1933, la emisión de papel moneda en Panamá, propuesta que no fue aceptada por la Asamblea Nacional de su país [28]. En su honor se emitió un sello postal

<sup>7</sup>**A. Bateman** dice en [8, pág. 543] que se trataba de un ferrocarril primitivo. Si nos atenemos a la etimología, pudiera tratarse de una vía que en vez de rieles de hierro usara rieles de maderas.

<sup>8</sup>El padrino de **José Antonio** era **Lucien Napoléon Bonaparte Wyse** [3, pág. 55].

<sup>9</sup>[32, pág. 257].

<sup>10</sup>La primera piedra de la *Plaza de Francia*, en la ciudad de Panamá, se colocó el 13 de febrero de 1921, en la antigua *Plaza de Chiriquí*.

<sup>11</sup>Este busto y el retrato que aparece en la obra de **Armand Reclus**, son de los pocos registros gráficos de **Sosa**.

<sup>12</sup>**Pierre Félix Masseau** (Lyon, 1896 - París, 1937). Célebre escultor francés. Entre sus obras se encuentra un hermoso busto de **L. van Beethoven**, que reposa en el *Museo Beethoven* en Bonn. Sus obras aún siguen subastándose.

<sup>13</sup>De color chocolate, formato rectangular, vertical, grabado en acero, impreso por la *American Bank Note Company*.

<sup>14</sup>Formato rectangular vertical, en tonos verdes, sin marca de agua, impreso por *La Estrella de Panamá*

primera entre diciembre de 1876 y abril de 1877. Resultado de esta expedición es el levantamiento del plano de Turia, realizado conjuntamente con los ingenieros **Gerster, Musso y Barbier**.

La segunda entre noviembre de 1877 y mayo de 1878. Por un problema de salud de **Armand Reclus**, **Sosa** tuvo que viajar solo para terminar las exploraciones de la región del Valle del Caimito y comenzar las exploraciones de la línea Chagres-Riogrande. La dificultad y los problemas que presentaba la segunda exploración y el hecho de realizarla con poca mano de obra capacitada, le ganaron la admiración y el respeto de sus compañeros. Evidencia de lo anterior son las múltiples citas encomiosas sobre **Sosa** que se encuentran en los diarios, libros e informes de los ingenieros que allí trabajaron. En particular, en el libro *Exploraciones a los istmos de Panamá y Darién, 1876-1878*, de **Armand Reclus** encontramos: ... *tuve la mala fortuna de caer del caballo y lastimarme fuertemente; esto fue causa de que M. SOSA saliera solo de Panamá el 5 de Marzo, llegando al medio día a la embocadura del Caimito, al sitio que llaman Puerto de la Chorrera. Aquella noche misma llegó hasta Chorrera para proporcionarse un guía y algunos conductores que le eran de todo punto necesarios. A la mañana siguiente emprendió los trabajos, y con una paciencia y un desinterés que nunca será bien alabado, realizó las operaciones, llevándolas todas adelante, y al mismo tiempo, manejando el taqueómetro y el nivel de burbuja de aire, haciendo los croquis y dirigiendo la trocha.* [26, pág. 291]

De hecho, estas exploraciones y la expectativa que generaba la construcción del canal interoceánico despertaron el interés de los istmeños por los estudios geográficos y cartográficos. Al respecto dice **Alberto Arturo McKay** [20]: *Al final del Siglo XIX, por efecto de los avances de una educación realista germánica obtenida en universidades de Colombia, en los colegios y en la Escuela Normal de Varones de Panamá, muchos intelectuales istmeños cultivaron la geografía. Otros panameños adquirieron formación geográfica y cartográfica complementaria en centros educativos de Europa y los Estados Unidos. Así, los conocimientos sobre la hidrografía del Istmo que poseía el Ingeniero Pedro José Sosa fueron citados en libros franceses sobre exploraciones en los istmos de Panamá y Darién en las que este profesional participó activamente.*



Grabado de G. VUILLIERS que aparece en el libro *Exploraciones a los Istmos de Panamá y Darién, 1876 - 1878* de **ARMAND RECLUS**, pág. 297

En el *Congreso Universal del Canal Interoceánico de Panamá* que se celebró en París el 15 de mayo de 1879, se acordó la línea para el Canal, de Panamá a Colón, y se la llamó la línea **Wyse-Reclus-Sosa**, en honor a quienes la habían trazado: **Luciano Napoleón Bonaparte Wyse, Armand Reclus y Pedro J. Sosa**, quienes la habían trazado.

Los estudios que sustentaron esta decisión fueron muy aplaudidos y el gobierno francés condecoró por esta razón a **Sosa** con la *Legión de Honor*, en el grado de caballero de la Orden.

Luego de los trabajos de exploración y trazado, **Sosa** ocupó el puesto de *Jefe de control técnico y del departamento topográfico* de la *Compañía Universal del Canal Interoceánico de Panamá* [21] y unos años después reemplazó al ingeniero **Reclus** como *Inspector de las obras de estudios, trabajos y hospitales*<sup>15</sup>.

La Asamblea legislativa del Estado de Panamá reconoció por ley especial del 17 de noviembre de 1883, como acreedores a la estimación pública, a los señores **Wyse, Reclus, Verburgghe y Sosa**, por sus trabajos notables conducentes a la unión de los dos mares. Pero

<sup>15</sup>La Compañía del Canal construyó dos hospitales, uno en la Ciudad de Panamá (para 500 camas) y otro en la ciudad de Colón, más muchas clínicas a lo largo de la línea del ferrocarril, y un centro para convalecientes en la isla de Taboga. Los costos de estos hospitales fueron, por supuesto, inmensos pero justificados por la prevalencia de enfermedades tropicales [27].

las autoridades y el pueblo panameños ya reconocían para entonces otros aspectos de la labor de Sosa, en particular, su insistencia en la construcción de un acueducto para la ciudad de Panamá [32].

Sosa se vinculó a la Sociedad Colombiana de Ingenieros, después de recibir la siguiente carta invitadora.

*Bogotá, Junio 24 de 1887*

*Sociedad Colombiana de Ingenieros.*

*Muy Señor Nuestro.*

*Por los Estatutos que se le acompañan, se informará usted cómo se ha organizado la SOCIEDAD COLOMBIANA DE INGENIEROS, la cual, deseosa de contar en su seno á los ingenieros y demás personas dedicadas á algún ramo de esta profesión, se espera se sirva usted manifestar si quiere pertenecer á ella; y en tal caso, dar cumplimiento á las disposiciones reglamentarias y a la resolución 4.ª, que hallará usted en la última página de los Estatutos, concordante con el artículo 76 de estos. Se interpretará como excusa la falta de contestación antes del 1.º de Septiembre próximo; pero, seguros de que usted acogerá bien los propósitos de la Sociedad, esperamos el favor de una respuesta.*

*Somos de usted muy atentos y seguros servidores.*

*El Presidente, ABELARDO RAMOS, -El Vicepresidente, NEPOMUCENO SANTAMARÍA, -El secretario DIÓDORO SÁNCHEZ.*

*Al Sr. D. Pedro J. Sosa, Panamá*

A ella respondió en estos términos:

*Panamá, Agosto 23 de 1887.*

*Sres. Presidente, Vicepresidente y Secretario de la Sociedad Colombiana de Ingenieros.-Bogotá. Muy señores míos.*

*Tengo el honor de acusar a ustedes recibo de la circular y Estatutos que ustedes se sirvieron enviarme, relativos a la Fundación de la Sociedad Colombiana de Ingenieros. En vista de ellos, suplico a ustedes se dignen participar á los fundadores de dicha Sociedad que acepto gustoso la honorífica invitación que me ha sido*

*hecha para pertenecer á ella, á la vez que mis sinceras felicitaciones por la realización de una idea que está llamada á dejar huella en los fastos de la ciencia patria. Acompaño á esta un billete de \$10, de acuerdo con la resolución 4.ª á que hace referencia la circular. Sólo me queda pedir á ustedes que excusen la demora ocurrida en mi contestación, habiendo esta tenido lugar por motivos de ausencia, y me suscribo de ustedes, con sentimientos de alta consideración, muy atento y seguro servidor.*

*Pedro J. Sosa*

Después de su vinculación como socio fundador<sup>16</sup> de la Sociedad Colombiana de Ingenieros, envía su primera colaboración a los *Anales de Ingeniería*, órgano difusor de la Sociedad, titulado: *Expedición al Darién*, fechado en Panamá en diciembre de 1887, y publicado en el séptimo número, volumen I, de la mencionada revista [34].

En este trabajo Sosa relata las principales características de la expedición que acababa de salir de la ciudad de Panamá para el Darién y Chiriquí, y realiza la descripción del *compás solar*, un instrumento utilizado en la expedición y relativamente novedoso para los ingenieros colombianos.

Sus actividades en la construcción del canal<sup>17</sup> consumían la mayoría de su tiempo, al igual que sus viajes casi continuos por Europa, los Estados Unidos y algunas repúblicas del Caribe. Pero esto no le impedía conservar su interés por la Sociedad Colombiana de Ingenieros y, en particular, de la labor de formación de los ingenieros colombianos en temas modernos de su interés desde las páginas de los *Anales de Ingeniería*. Así lo expresa en su carta del 31 de diciembre de 1889:

*... Mis muchas ocupaciones y el hecho de haber estado ausente del país por más de un año, me han impedido comunicarme con la redacción de los Anales, como hubiera deseado; no por eso ha menguado el interés con que siempre he seguido las importantes labores profesionales a que se dedican los miembros de nuestra Sociedad de Ingenieros, y en prueba de ello me permito enviar un ligero trabajo sobre la interesante teoría de los Cuaternios, que espero sea de agrado del director de los Anales.*

<sup>16</sup>Diódoro Sánchez en [31, pág. 258] llama *socio fundador* a Sosa. Sin embargo, en la carta que acabamos de citar, Sosa habla de la invitación que le hacen los fundadores de la Sociedad. Por otra parte, la Sociedad considera como únicos fundadores a quienes firmaron su Acta de Constitución en la casa de Diódoro Sánchez. Debemos, pues, entender que en [31] éste quiso rendirle un homenaje muy merecido a Sosa por haber sido uno de los primeros socios y colaboradores de los *Anales de Ingeniería*.

<sup>17</sup>Los trabajos físicos de la construcción comenzaron simbólicamente el 1.º de enero de 1880, con la primera palada de tierra. Técnicamente, los trabajos empezaron el 1.º de febrero de 1881, de acuerdo con el cable que Reclus envió a Lesseps a París: *Travail commencé*.

Otra contribución de Sosa a la Sociedad Colombiana de Ingenieros fue el estrechar los lazos de ésta con la Sociedad de Ingenieros Civiles del Estado de Nueva York, como lo señala Dióodoro Sánchez [31, pág. 272].

En 1896 se constituyó una Comisión Técnica para que asesorara a los ingenieros de la Nueva Compañía del Canal, surgida después de la debacle de la primera. Al respecto dice Alfaro [3]: ... *de esa Comisión fue miembro Sosa en unión de un grupo internacional de reputados ingenieros. Mientras tanto corría el tiempo fijado para la terminación del canal y surgía el riesgo de que caducara la concesión del gobierno colombiano y de que pasara a este la propiedad de todos los bienes, derechos y acciones de la Compañía. Sosa fue entonces a Bogotá, en una comisión de que formaban también parte, el doctor Manuel Amador Guerrero, don Ricardo Arango, don José N. Recuero y el ilustrísimo señor Obispo de la Diócesis doctor José Alejandro Peralta, con el objeto de recabar la concesión de una prórroga para la terminación de los trabajos, misión que alcanzó el éxito deseado.*

Según Safford [30], este Ricardo Arango Ramón aparece en 1855 como estudiante en Fort Edward. A su regreso a Panamá se dedica a la política, y llega a ser gobernador del Departamento de Panamá, cargo que ocupaba en 1898 por designación del presidente Miguel A. Caro, pues firma como tal el Decreto de honores a Sosa, del 12 de julio de ese año.

#### 4. Pedro José Sosa, el matemático

Al tema del estudio, aceptación y apropiación de los números imaginarios y de los cuaternios en la cultura matemática de un país los historiadores de la matemática lo acostumbran llamar *imaginarismo*. De modo que el trabajo de Sosa titulado *Introducción elemental al cálculo de los cuaternios*, del cual nos ocuparemos en seguida, se enmarca en la historia del imaginarismo en Colombia. Este trabajo tuvo inicialmente problemas para ser publicado en los Anales de Ingeniería porque contenía gran cantidad de símbolos matemáticos, cuyas fuentes no se encontraban en las imprentas de Bogotá. Al enterarse de esto, Sosa hizo llegar desde Nueva York una caja con los tipos necesarios para remediar esta situación.

El artículo fue publicado en nueve entregas. En el número 32 (mayo de 1890), tomo III, de la revista Anales

de Ingeniería apareció la primera y terminó de publicarse en el número 49 (agosto de 1891), tomo V, de la misma revista.

Para empezar, anotemos que Sosa siempre tuvo la intención de publicar trabajos sobre temas matemáticos que pensaba podrían ser útiles a los ingenieros colombianos. De hecho, en carta del 14 de diciembre de 1887, dice lo siguiente: ... *Actualmente estoy terminando un modesto trabajo sobre la teoría de los Determinantes, y como una parte, por lo menos, de esta importante teoría es de utilidad práctica para el ingeniero que se dedica a ciertos ramos de la profesión, me ha venido la idea de hacer un extracto de dicha parte y enviarlo a los Anales.* [31, pág. 271]

Este trabajo nunca lo envió, como consta en su carta del 31 de diciembre de 1889, remitida del artículo sobre los cuaternios: ... *recordando que en época pasada ofrecí a ustedes una colaboración [el trabajo sobre determinantes] que nunca mandé debido a circunstancias análogas a las presentes [su falta de tiempo por sus múltiples viajes relacionados con su trabajo en el canal].*

De todas maneras, suponemos que Sosa consideraba que su trabajo sobre determinantes podría ser de utilidad para los lectores de su subsiguiente trabajo sobre los cuaternios, ya que en él utiliza determinantes de segundo y tercer orden.<sup>18</sup>

La primera sección del trabajo es una sencilla pero completa explicación de los fundamentos del **cálculo vectorial** a la cual le dedica bastantes páginas. En ella explica la noción de **vector**, sus **operaciones**, **propiedades** y **aplicaciones**, para exponer luego un número considerable de ejemplos sobre estos temas.

La segunda sección la dedica al **cálculo de los cuaternios**. En ella presenta el concepto de **división vectorial** o **cociente geométrico**, el concepto de **cuaternio**, las **operaciones** que se pueden establecer entre cuaternios, sus **propiedades** y la clásica y muy conocida expresión de un **cuaternio como suma de un escalar y un vector en  $\mathbb{R}^3$** :  $a + bi + cj + dk$ , donde  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  y  $i^2 = j^2 = k^2 = -1$ ,  $ij = -ji = k$ , además de múltiples aplicaciones de estos conceptos a la física, la trigonometría y por supuesto a la simplificación de expresiones algebraicas.

Es muy importante señalar que Sosa en la introducción de su trabajo es muy cuidadoso en señalar muy

<sup>18</sup>Como se desprende de la carta que acabamos de citar, Sosa estaba escribiendo un tratado (modesto dice) sobre la teoría de los determinantes y sus aplicaciones, el cual, si publicado, hubiese sido el primer texto colombiano sobre la teoría de las ecuaciones lineales, es decir, de lo que hoy se suele llamar *álgebra lineal*.

claramente sus fuentes principales (por ejemplo, de **Volson Wood** [37] y **William J. M. Rankine** [25]) y citar las obras, que aparentemente conocía, de los creadores de estas novísimas teorías: **William R. Hamilton** [17], **Hermann Grassmann** [13], **Giuseppe Peano** [22] y **Benjamin Peirce** [23].

Con **Sosa** y su trabajo sobre cuaternios, llega pues al país una corriente de *imaginariismo* de avanzada en el siglo XIX, y no solo en el medio colombiano, que arranca en **William R. Hamilton**, cuya teoría de los *números hipercomplejos* buscaba una construcción lógica abstracta de sistemas numéricos más allá de los números complejos.<sup>19</sup> Por su parte, **Wessel** y **Grassmann** habían buscado el desarrollo de un *cálculo geométrico*. Las dos cosas se interconectan, como puede verse al estudiar el trabajo de **Sosa** [35]. En ambos casos se empieza a sentir la necesidad de *abandonar la conmutatividad de la multiplicación*. Ya existían ejemplos de operaciones no conmutativas en la composición de funciones, en particular, en la composición de transformaciones lineales (de espacios vectoriales de dimensión finita), o lo que es lo mismo la multiplicación de matrices (**Cayley**). **Hamilton** y su escuela insistieron en las aplicaciones geométricas y físicas de los cuaternios, tal como lo repite **Sosa**. Pero, cuando **Maxwell** lee el tratado de **Tait** (*Elementary Treatise on Quaternions*, 1867), entiende de qué se trata, conoce su utilidad en la física, observa que son *vectores disfrazados*, y en cierta forma decide abandonarlos. Los cuaternios “se refugian” entonces, más tarde, en los *grupos* y las *álgebras de Lie* y vuelven desde allí a la física por vía de la mecánica cuántica.

Desafortunadamente, parece que el trabajo de **Sosa** no suscitó ningún interés en la comunidad de los ingenieros matemáticos colombianos del siglo XIX y la primera mitad del siglo XX, de modo que esta corriente nace y muere al mismo tiempo.

Este desinterés puede explicarse en parte por el fuerte contenido vectorial de todas sus partes y porque los ingenieros colombianos, por los estudios que hemos realizado hasta el momento, parecían desconocer el manejo algebraico de los vectores, los cuales para ellos solo interpretaban como **fuerzas** y su composición mediante la **ley del paralelogramo** al uso de la mecánica.

Otra posible causa es que el artículo fue publicado por entregas y que estas fueron impresas con demasiados

meses de distancia entre ellas, lo que dificultaba mantener sostenidamente el interés de los lectores.

El otro aspecto que debemos considerar en una historia del imaginariismo en Colombia, es el conocimiento, apropiación y manejo de los números imaginarios. Su uso rutinario durante la segunda mitad del siglo XIX en la enseñanza en el Colegio Militar y luego en la Escuela de Ingeniería de la Universidad Nacional, se evidencia en los libros de álgebra escritos por **Lino de Pombo** [24], **Indalecio Liévano** [18], **Manuel A. Rueda** [29] y en el manuscrito del curso de cálculo diferencial de **Aimé Bergeron** [1]. En este último, por ejemplo, se establece la ecuación  $(u(x) + iv(x))' = u'(x) + iv'(x)$ , la cual vuelve a aparecer, en 1916, en las lecciones manuscritas de cálculo de **Julio Garavito** [12]. Con otras evidencias de libros que circularon en Colombia y carteles que convocaban a exámenes públicos en la temprana primera mitad del siglo XIX [2], podemos conjeturar que los números imaginarios formaban parte del bagaje mínimo que debía tener un ingeniero en el país o una persona interesada en temas algebraicos.

Ahora bien, con un poco más de certeza se puede afirmar la influencia, directa o indirecta, de **A.-L. Cauchy** en los cursos del Colegio Militar, a través de los textos franceses utilizados allí en la enseñanza de la matemática [1]. Aunque este matemático en algunos de sus escritos usa algunas veces a  $\sqrt{-1}$  como símbolo de la perpendicularidad, inspirado en los trabajos de **Caspar Wessel** y **Jean-Robert Argand** quienes consideraban a  $\sqrt{-1}$  como un “operador” equivalente a una rotación de  $90^\circ$ , este aspecto geométrico de los imaginarios no aparece en ninguno de los textos o manuscritos colombianos que se han encontrado y examinado hasta ahora, excepto en la introducción a los cuaternios de **Sosa**.

Podemos, pues, concluir que el uso de los imaginarios en los cursos del *Colegio* y la Escuela de ingeniería no sobrepasaba el tratamiento algebraico elemental de los números complejos. Nada de esto cambia hasta que posiblemente en la Escuela Normal Superior, en la década de los años 30 del siglo XX, empiezan a enseñarse cursos avanzados de matemáticas y, más tarde, en la Universidad Nacional, en la década de los años 60, cursos sobre álgebra abstracta y teoría de funciones de variable compleja.

Finalmente, esperamos que esta nota haya servido para recalcar la importancia de **Sosa** en la historia de

<sup>19</sup>El libro de **A. Macfarlane** [19] es una extensa bibliografía, hasta 1904, sobre el tema de los números imaginarios, los cuaternios y el cálculo geométrico, la cual incluye a dos latinoamericanos (el argentino **Valentín Balbín** [7, 1888] y el peruano **Federico Villareal** [36, 1901], pero no a **Sosa**) y varios españoles como **Rey** y **Heredía** [10], [11].

la ingeniería y la matemática del país en el siglo XIX, así como para mostrar lo mucho que falta por investigar sobre los inicios de estas ciencias en el país y cómo ocurrió su desarrollo.

En los Anexos incluimos reproducciones facsimilares de las cartas de Sosa que se encuentran en [6] y que tienen que ver con los temas de este artículo.

**Agradecimientos.** Los autores quieren agradecer a las siguientes personas: Don **Vladimir Berrío Lemm**, Director de la Sección de Filatelia de los Correos de la República de Panamá; Don **José Javier Escribano**, Profesor del I.E.S. "Valle del Cidaco" (Calahorra), España; Don **Luis Español**, Profesor de la Universidad de la Rioja (España); Doña **Tammy Gobert**, encargada del Archivo del Rensselaer Polytechnic Institute; Don **Daniel Rodríguez**, de la Sociedad Colombiana de Ingenieros; Doña **Guadalupe Tejada de Castillo**, Profesora de la Universidad de Panamá, por sus valiosas colaboraciones en la obtención de información para la elaboración de este trabajo.

### Bibliografía

- [1] **Albis, Víctor S. & Clara H. Sánchez.** Descripción del curso de cálculo diferencial de Aimé Bergeron en el Colegio Militar. Rev. Acad. Colomb. Cienc. **23** (1999), 73-79.
- [2] **Albis, Víctor S. & Deisy Camargo.** Dos carteles que dan noticia de la enseñanza del álgebra en Colombia a principios del siglo XIX. (Manuscrito en preparación.)
- [3] **Alfaro, Ricardo J.** Esbozos biográficos. Prólogo de Rodrigo Miró. Panamá: Academia Panameña de la Historia, 1982. Disponible en: <http://bdigital.binal.ac.pa/bdp/esbozos1.pdf>, <http://bdigital.binal.ac.pa/bdp/esbozos2.pdf>, <http://bdigital.binal.ac.pa/bdp/esbozos3.pdf>
- [4] **Archivos del Instituto Politécnico de Rensselaer**, Troy, Nueva York.
- [5] **Archivos del Departamento de Panamá.** Decreto No. 47 del 12 de julio de 1898.
- [6] **Archivos de la Sociedad Colombiana de Ingenieros.**
- [7] **Balbín, Valentín.** Elementos de cálculo de los cuaterniones y sus aplicaciones principales a la geometría, al análisis y a la mecánica, 378 págs. Buenos Aires, 1888.
- [8] **Bateman, Alfredo D.** Páginas para la historia de la ingeniería colombiana. Galería de Ingenieros Colombianos. Kelly, Bogotá D.E. 1972.
- [9] **Diario Oficial.** República de Colombia, **34** (No. 10731, 15 de agosto) (1898).
- [10] **Escribano Benito, José J.** El imaginarismo según Rey y Heredia. Lluç 21 (1998).
- [11] **Escribano Benito, José J.** Notas sobre la introducción de los vectores en la matemática española (1865-1980); manuscrito.
- [12] **Garavito, Julio.** Curso de cálculo. Curso policopiado. Bogotá: 1916.
- [13] **Grassmann, Hermann.** Die lineale Ausdehnungslehre. Ein neuer Zweig der Mathematik. Dargestellt und durch Anwendungen auf die übrigen Zweige der Mathematik, wie auch auf die Statik, Mechanik, die Lehre vom Magnetismus und die Krystallogonomie erläutert. Leipzig: Otto Wigand, 1844.
- [14] **Grassmann, Hermann.** Teoría de la extensión. Nueva disciplina matemática expuesta y aclarada mediante aplicaciones. Traducción de Emilio Oscar Roxin. Colección Historia y filosofía de la ciencia, dirigida por Julio Rey Pastor. Buenos Aires: Espasa-Calpe Argentina, 1947.
- [15] **Grassmann, Hermann.** A New Branch of Mathematics. The Ausdehnungslehre of 1844 and other Works. Translated by Lloyd C Kannenberg. Open Court: Chicago IL, 1995.
- [16] **Grassmann, Hermann.** The position of the Hamiltonian quaternions in extension theory. En [15, págs. 525-538].
- [17] **Hamilton, W. R.** Elements of Quaternions. London: Longmans, Green & Co., 1866.
- [18] **Liévano, Indalecio.** Tratado de álgebra. Bogotá: Focion Mantilla, 1875.
- [19] **Macfarlane, Alexander.** Bibliography of Quaternions and Allied Systems of Mathematics. Dublin: The University Press, 1904.
- [20] **McKay, Alberto Arturo.** Cien años de geografía en Panamá (1903-2003). Revista Cultural Lotería (2003), 114-143.
- [21] **Nason, Henry Bradford.** Biographical Record of the Officers and Graduates of the Rensselaer Polytechnic Institute, 1824-1886. Institute Archives and Special Collections, Rensselaer Polytechnic Institute. Benjamin Franklin Greene, D.H. Jones & Co.: Troy, NY, 1887. Disponible en: [http://www.lib.rpi.edu/Archives/e-collections/Nason.HB\\_1887/index.html](http://www.lib.rpi.edu/Archives/e-collections/Nason.HB_1887/index.html)
- [22] **Peano, Giuseppe.** Calcolo geometrico secondo l'Ausdehnungslehre di H. Grassmann preceduto dalle operazioni della logica deduttiva. Torino: Fratelli Bocca, 1888.
- [23] **Peirce, Benjamin** Linear Associative Algebra, private edition, Washington, DC. 1870. Reimpreso en: American Journal of Mathematics **4** (1890), 97-229.
- [24] **Pombo, Lino de.** Lecciones de aritmética y álgebra. Bogotá: Imprenta de la Nación, 1850.
- [25] **Rankine, William John Macquorn.** Manual of Applied Mechanics. Londres: Griffin, 1858.
- [26] **Reclus, Armand.** Exploraciones a los Istmos de Panamá y Darién, 1876, 1876, 1878. Le Tour du Monde: Nouveau Journal des Voyages **39,40** = Panamá et Darién: voyages d'exploration 1876-1878. París: Hachette, 1888.
- [27] **Roy, Alonso.** Algunas causas de la debacle del Canal francés. <http://www.alonsoroy.com/cp/cp42.html>
- [28] **Roy, Alonso.** El primer papel moneda en Panamá. <http://www.alonsoroy.com/pn/pn04.html>
- [29] **Rueda, Manuel A.** Curso de álgebra. 2.ª edición. Bogotá: Librería Colombiana, 1893.
- [30] **Safford, Frank.** El ideal de lo práctico. El desafío de formar una élite técnica y empresarial en Colombia. Bogotá: Empresa Editorial Universidad Nacional-Áncora Editores, 1989.
- [31] **Sánchez, Diódoro.** Sección Editorial. Anales de Ingeniería, **10** (1898), 257-279.
- [32] **Sánchez, Diódoro.** La Crónica. Bogotá: Año II (No. 391, julio 13 de 1898).

- [33] **Sánchez Botero, Clara Helena.** Cien años de historia de la matemática en Colombia 1848-1948. *Rev. Acad. Colomb. Cienc.* 26 (99) (2002), 239-260.
- [34] **Sosa, Pedro J.** *Expedición al Darién.* *Anales de Ingeniería*, 1, (1888), 196-203.
- [35] **Sosa, Pedro J.** *Introducción elemental al cálculo de los cuaternios.* *Anales de Ingeniería*, I: 3 (32) (1890), 253-258; II: 4 (40) (1890), 116-128; III: 4 (41) (1890), 150-159; IV: 4 (43) (1891), 211-223; V: 4 (44) (1891), 246-255; VI: 4 (46) (1891) 312-316; VII: 4 (47) (1891) 335-340; VIII: 4 (48) (1891) 364-370; IX: 5 (49) (1891), 3-11.
- [36] **Villareal, Federico.** *Cálculo geométrico.* Lima: Mesinas, 1901.
- [37] **Wood, de Volson.** *The elements of coördinate geometry.*: In three parts. I. Cartesian geometry. II. Quaternions. III. Modern geometry, and an appendix. New York: J. Wiley & Sons, 1879.
- [38] **Wood, de Volson.** *Quaternions.* *The Analyst* 7 (1880), 11-23, 33-38, 65-71, 121-128. Disponible en Jstor.
- [39] **Zentner, Federico.** *Nombres y apellidos de forjadores de la patria.* Panamá: Centro de Impresión Educativa, 1973.

Recibido el 5 de mayo de 2005

Aceptado para su publicación el 9 de agosto de 2005

### Anexo 1

Panamá, Agosto 23 de 1887

Señor Presidente, Vicepresidente y Secretarios de la  
Sociedad Colombiana de Ingenieros,  
Bogotá.

Muy señores míos:

Tengo el honor de acusar a V<sup>ds</sup> recibo de la Circular y Estatutos que V<sup>ds</sup> se sirvieran enviarme relativos a la fundación de la Sociedad Colombiana de Ingenieros.

En vista de ella suplico a V<sup>ds</sup> se dignen participar a los distinguidos fundadores de dicha Sociedad que acepto gustoso la honorífica invitación que me ha sido hecha para pertenecer a ella, a la vez que mis sinceras felicitaciones por la realización de una idea que está llamada a dejar huella en los fastos de la Ciencia patria.

Acompaño a este un billete de \$10, de acuerdo con la resolución de V<sup>ds</sup> que hace referencia la Circular. Solo me queda pedir a V<sup>ds</sup> que excusen la demora ocurrida en mi contestación, habiendo en todo lugar por motivos de ausencia y me suscribo:

de V<sup>ds</sup> con sentimientos de alta Consideración,

Muy atento y s. s. Pedro J. Sosa



# LA MALARIA: ESTRATEGIAS ACTUALES PARA EL DESARROLLO DE UNA VACUNA EFECTIVA

por

Sócrates Herrera Valencia, MD<sup>1</sup>

## Resumen

**Herrera Valencia, S.:** La malaria: estrategias actuales para el desarrollo de una vacuna efectiva. Rev. Acad. Colomb. Cienc. **29** (113): 535-546. 2005. ISSN 0370-3908.

La malaria es la enfermedad parasitaria más importante por generar anualmente, cerca de 500 millones de casos en todo el mundo y alrededor de tres millones de muertes en solo África, lo que produce un impacto extraordinario sobre el producto interno bruto (PIB) de los países endémicos de ese continente y un riesgo creciente para los viajeros a países endémicos en los trópicos. Más de 10.000 turistas de Norte América, Europa y Japón contraen malaria cada año en estos países. Las estrategias clásicas de control han fallado por lo que se considera prioritario el desarrollo de nuevos métodos para combatirla. Dado que las vacunas representan el método más eficaz para prevenir enfermedades infecciosas, actualmente se hace un esfuerzo significativo en el desarrollo de vacunas, principalmente contra la malaria ocasionada por *Plasmodium falciparum* y por *P. vivax*, que son las especies predominantes en el mundo. Las estrategias de diseño son múltiples y abarcan desde la utilización de parásitos atenuados hasta el análisis sistemático del genoma del parásito en busca de blancos vitales para el mismo. Aquí se resumen aspectos relevantes del trabajo realizado en el Instituto de Inmunología del Valle y en el Centro Internacional de Vacunas en el desarrollo de una vacuna eficaz.

**Palabras clave:** *Plasmodium*, malaria, inmunidad, vacunas.

## Abstract

Malaria represents the most common parasitic disease worldwide producing an estimated burden of 500 millions cases and about 3 million deaths every year in Africa only. It has an enormous impact in the Gross Domestic Product (GDP) of malaria endemic countries from that continent and represents a challenge for international travelers since it has been estimated that more than 10,000 travelers from North America, Europe, and Japan contract malaria every year. The limited success in the classical strategies for malaria control has prompted the design of new methods to fight malaria. Vaccination represents the most efficient method to prevent infectious diseases; therefore, a great

<sup>1</sup> Profesor Titular, Facultad de Salud, Universidad del Valle, Director Instituto de Inmunología del Valle, A.A. 25574 Cali, Colombia. Correo electrónico: sherrera@inmuno.org

deal of effort is being invested in the development of a malaria vaccine that may control both *Plasmodium falciparum* and *P. vivax*, the most prevalent malaria species worldwide. Multiple strategies that include from the use of attenuated parasites to the systematic analysis of the *plasmodium* genome in search for vital parasite targets are being used. Here the contribution of the Instituto de Inmunología del Valle and the Centro Internacional de Vacunas from Cali (Colombia) for the development a malaria vaccine is described.

**Key words:** *Plasmodium*, malaria, immunity, vaccines.

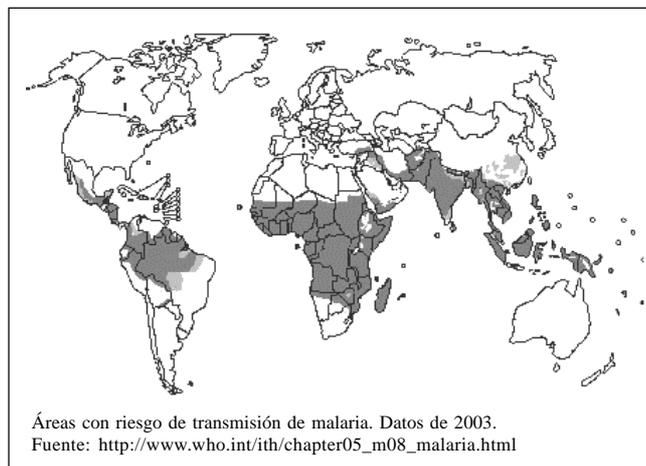
## Introducción

La malaria es una enfermedad de transmisión vectorial, causada por parásitos del género *Plasmodium* y transmitida por mosquitos del género *Anopheles*. Actualmente, la malaria representa la enfermedad parasitaria de mayor importancia mundial al generar cerca de 500 millones de casos/año en todo el mundo y cerca de 3 millones de muertes en solo África<sup>1,2</sup>. Estas cifras explican el hecho por el cual, el producto interno bruto (PIB) de los países donde la malaria es prevalente, se haya reducido en 50% durante los últimos 20 años, comparado con el de los países no maláricos<sup>2</sup>. Adicionalmente, existe una población de viajeros creciente en riesgo de contraer la malaria; la Organización Mundial de Turismo, registró en el año 2000, cerca de 17 millones de viajeros al África, 19.8 millones a Centro y Sudamérica, y 46,6 millones al Sudeste Asiático<sup>3</sup>; se estima que más de 10.000 viajeros de América del Norte, Europa y Japón contraen malaria cada año.

No obstante la mayor abundancia global del *P. falciparum* y la gravedad de la enfermedad producida por esta especie, el *P. vivax* es el parásito más frecuente en el continente americano, en donde países como Brasil y Colombia presentan la mayor incidencia de la enfermedad. El *P. vivax* genera alrededor de 70-100 millones de casos clínicos que representan alrededor del 20% de la malaria mundial<sup>4</sup>, pero ha tenido una expansión sostenida los últimos 30 años y ha comenzado a mostrar resistencia a los tratamientos estandarizados. Adicionalmente esta especie se caracteriza por recidivas debido a la permanencia crónica del parásito en forma de hipnozoitos, en el tejido hepático<sup>5</sup>. (Figura 1).

La campaña mundial de erradicación de la malaria desarrollada conjuntamente entre la Organización Mundial de la Salud (OMS) y los gobiernos de los países endémicos fue exitosa inicialmente y muchas áreas bien definidas de países endémicos lograron su erradicación; sin embargo, en la década de los 70 aparecieron parásitos resistentes a la Cloroquina, droga de gran efectividad y bajo costo, y casi simultáneamente, se produjo

resistencia de los mosquitos al DDT, insecticida controversial por su toxicidad aunque efectivo y económico<sup>6-8</sup>. El reemplazo de medicamentos e insecticidas elevó los costos de las campañas antimaláricas haciéndolas poco viables para los países endémicos y de bajo ingreso per capita. En 1975 la OMS promovió el desarrollo de estrategias alternativas de control específicamente para mejoramiento del diagnóstico, del tratamiento y el desarrollo de vacunas. Dada la importancia que juegan las vacunas en el control de las enfermedades transmisibles y su balance positivo de costo/beneficio, al igual que varios avances tecnológicos simultáneos motivaron en las dos últimas décadas, la iniciación de una era de investigación dinámica orientada al desarrollo de vacunas. En este periodo se hizo posible cultivar el *P. falciparum* en el laboratorio, se desarrolló la tecnología de hibridomas que permite la producción de anticuerpos monoclonales en escala industrial<sup>9-11</sup>, se progresó significativamente en ingeniería genética, particularmente en las técnicas de ADN recombinante que facilitan la expresión de proteínas maláricas en sistemas bacterianos o de levaduras<sup>12-14</sup>, se mejoraron las técnicas



**Figura 1.** Distribución global de malaria

de síntesis peptídica<sup>15</sup> y finalmente se estableció la tecnología de vacunas de ADN desnudo<sup>16</sup>.

El desarrollo de vacunas contra la malaria es un proceso muy complicado debido al complejo ciclo de vida del *Plasmodium*, el cual se divide en una fase de multiplicación sexual en el mosquito (ciclo esporogónico) y otra de crecimiento asexual que se desarrolla en un huésped vertebrado, primero en el hígado y luego en la circulación sanguínea. La Figura 2 indica como la inoculación de esporozoitos por el mosquito, da inicio a la invasión del parásito al hígado del humano y luego de su multiplicación se transfiere a los glóbulos rojos en circulación. Este proceso se acompaña de cambios continuos en su morfología y en la expresión de antígenos que le permiten escapar de la respuesta inmune del huésped. Algunos parásitos sanguíneos se diferencian sexualmente y son tomados nuevamente por el mosquito para continuar la transmisión de la infección en individuos sanos. Las manifestaciones clínicas de la malaria como la fiebre, el escalofrío, el malestar general, el vomito entre otras se presenta en la fase aguda de la enfermedad, que coincide con la rápida multiplicación asexual del parásito en los

glóbulos rojos. La ruptura de los glóbulos rojos infectados y la liberación de antígenos solubles del parásito al plasma parecen ser los culpables de la inducción de estos síntomas. Si la infección no es tratada oportunamente, la enfermedad puede progresar y desarrollarse como una forma de falla multi-sistémica severa que puede terminar en la muerte del paciente. En este complicado ciclo del *Plasmodium* han sido identificados tres posibles blancos para el desarrollo de vacunas: **a)** el pre-eritrocítico, cuyo bloqueo evitaría la invasión del parásito y futuro desarrollo en el hígado; **b)** el sanguíneo donde se limitaría su invasión y desarrollo dentro del glóbulo rojo y protegería al individuo contra las manifestaciones clínicas y **c)** el intestino del mosquito donde se limitaría la fertilización de las formas sexuales del parásito bloquearía directamente la transmisión de la infección en las comunidades<sup>17-19</sup>.

Desde el punto de vista de respuesta inmune tanto los anticuerpos como la activación de células (linfocitos CD4+ y CD8+) con la producción de citoquinas juegan un papel importante en protección. Se ha observado que individuos expuestos repetidamente a la malaria en áreas endémicas logran desarrollar un grado importante de inmunidad clínica a partir de los 10-15 años con títulos de anticuerpos que los protegen de las manifestaciones clínicas de la infección<sup>20-22</sup>.

Durante la infección hay producción de anticuerpos, activación de linfocitos (CD4+ y CD8+) y producción de citoquinas, componentes que juegan todos un papel importante en la protección contra la malaria. Los individuos expuestos repetidamente a la malaria en áreas endémicas logran desarrollar un grado de inmunidad clínica a partir de los 10-15 años de edad con reducción de las manifestaciones clínicas<sup>23-24</sup>. Adicionalmente, se ha demostrado que la transferencia de anticuerpos y células de individuos y animales inmunes a receptores no inmunes inducen protección parcial. Más aún, la inmunización con esporozoitos atenuados por irradiación, protege completamente contra la infección experimental con esporozoitos viables<sup>25-27</sup>. Adicionalmente, experimentos en humanos y animales han demostrado que la transferencia de anticuerpos y células de individuos inmunes a sujetos no inmunes o su inmunización con esporozoitos atenuados por irradiación, los protege completamente de la infección experimental<sup>28</sup>.

El Instituto de Inmunología de la Universidad del Valle en Cali (Colombia) ha sido escenario para la selección y prueba de múltiples vacunas experimentales y simultáneamente ha aprovechado importantes ventajas competitivas para el establecimiento del Centro Internacional de Vacunas, que mediante financiación del gobierno Colombiano,

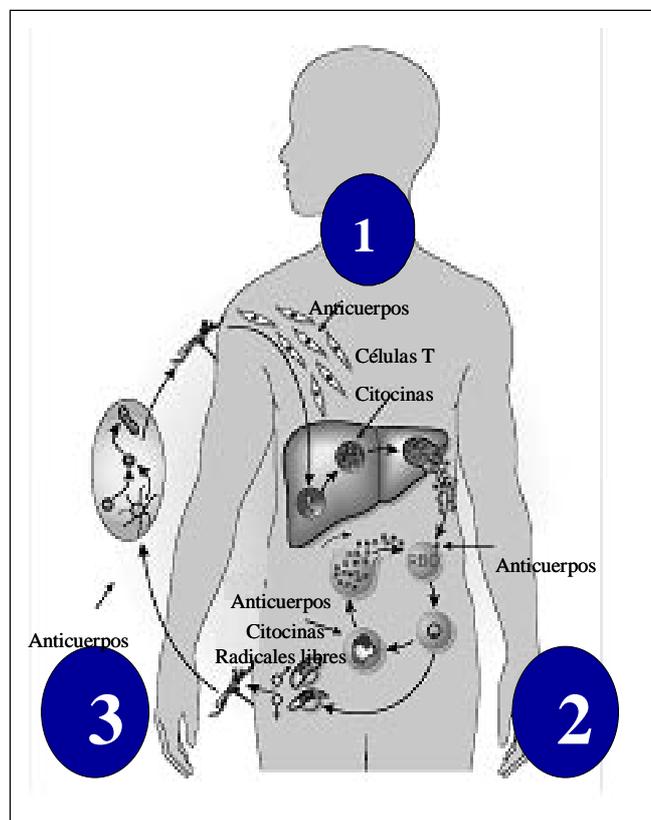


Figura 2. Ciclo de vida del *Plasmodium*

de la Organización Mundial de la Salud (OMS), del Instituto Nacional de Salud de los Estados Unidos (NIH/NIAID) y de otras agencias. Allí actualmente se evalúa un variado repertorio de vacunas experimentales (ver tabla 2).

### Metodología

La metodología utilizada incluye desde el análisis de la respuesta inmune de individuos con un grado significativo de respuesta a la malaria, debido a su permanencia en áreas endémicas, hasta la realización de detallados análisis inmunológicos de proteínas seleccionadas en busca de epítopes relevantes para su inclusión en vacunas y su prueba en ensayos pre-clínicos y clínicos. Los estudios se han desarrollado en el marco de una dinámica cooperación internacional y se ajustan a estándares internacionales de: buenas prácticas de laboratorio (BPL), ética animal y humana y buenas prácticas clínicas (BPC). A continuación se describen sujetos humanos y modelos animales, así como los métodos, materiales y técnicas más relevantes utilizadas en este proceso.

### Sujetos humanos

Para el análisis de la respuesta inmune del humano a la malaria, se utilizaron muestras de sangre obtenidas de individuos expuestos a infección malárica repetida, en diferentes localidades de la costa colombiana del Pacífico. Dentro de estas localidades se encuentran: Zacarias, Punta Soldado, La Delfina y Bajo Calima, todas ellas localizadas en jurisdicción del municipio de Buenaventura, así como Charambirá y Docordó en el Departamento del Chocó y Guapi en el Departamento del Cauca.

Los ensayos clínicos en Fase I, se han adelantado con la participación de voluntarios sanos, adultos, hombres y mujeres, sin experiencia previa con la malaria y con residencia en la ciudad de Cali. Estos voluntarios fueron instruidos sobre los riesgos y beneficios de los estudios en desarrollo y los ensayos han contado con la monitoría clínica de la Organización Mundial de la Salud (OMS).

### Animales de experimentación

En los estudios descritos aquí se utilizaron ratones BALB/c y ratones C57/DBA transgénicos que portan el gene que codifica la molécula HLA-A2.1 del humano<sup>29</sup>. Adicionalmente, se han utilizado monos *Aotus lemurinus griseimembra*, originarios de las selvas de la región Caribe colombiana. Estas especies se mantienen en bioterios diseñados para los programas tanto de zootecnia, como de experimentación pre-clínica. Los trabajos descritos se han realizado bajo estándares internacionales de BPL<sup>30-33</sup>.

### Proteínas

Se ha estudiado un número significativo de antígenos de los diferentes estadios de desarrollo del parásito: fase pre-eritrocítica<sup>29, 32, 34, 35</sup>, fase sanguínea sexual<sup>30, 36, 37</sup>, y fase esporogónica, tanto del *P. falciparum* como de *P. vivax* (Tabla 1). Mientras algunos corresponden a antígenos desarrollados y producidos por nuestro grupo en Colombia, otros han sido producidos por grupos de investigación extranjeros y evaluados en el Centro Internacional de Vacunas en Cali, en diferentes fases de su desarrollo (Tabla 2).

Tabla 1. Antígenos de *Plasmodium* candidatos a vacuna

Especie de <i>Plasmodium</i>	Estadio de Desarrollo		
	Pre-eritrocíticos	Eritrocíticos	
		Asexuales	Sexuales
<i>P. falciparum</i>	CSP TRAP LSA1, LSA3 SALSA STARP EXP1	MSP-1, MSP-3, MSP-4 EBA175, AMA-1 GLURP, SERA PF155/RESA RAP1, RAP2 EMP1, Rifins Pf332, GPI	Pfs25 Pfs28 Pfs45/48 Pfs230
<i>P. vivax</i>	CSP TRAP	MSP-1, MSP-3 MSP-4, MSP-5 DBP AMA-1 RBP	Pvs25 Pvs28 Pvs48

**Tabla 2.** Estado actual de candidatos a vacuna contra *P. vivax*

Estadio Parásito	Inmunógeno	Tipo	Estado		Institución
			Preclínico	Clínico	
Pre-eritrocítico	CS SSP2/TRAP	Péptidos sintético	<i>Aotus</i>	Humano	MVDC*
		Péptidos sintético			MVDC
Eritrocítico Asexual	MSP-1*	Prot. recombinante	<i>Aotus</i>		MVDC
	MSP-3,9	Prot. recombinante	ratones		Emory+ <sup>1,2</sup>
	DBP	Prot. recombinante	<i>Aotus</i>		MVDC
	AMA-1	Prot. recombinante	ratones		BPRC** <sup>3</sup>
Eritrocítico Sexual	PvS25*	Prot. recombinante	<i>Aotus</i>	Humano	MVDB**
	PvS28*	Prot. recombinante			MVDC
	PvS48*	Prot. recombinante			MVDC

\* MVDC = Centro Internacional de Vacunas, Cali, Colombia.

+ Emory: Emory University, Atlanta (GA), USA.

\*\* BPRC = Biomedical Primate Research Center, Rijswijk, Holanda.

\*\*\* MVDB = Malaria Vaccine Development Branch, Rockvill (MD), USA.

<sup>1</sup> Vaccine. 2004 May 7; 22(15-16): 2023-30.

<sup>2</sup> Mol Biochem Parasitol. 2001 Jun; 115(1): 41-53.

<sup>3</sup> Infect Immun. 1999 Jan; 67(1): 43-9.

### Estudios serológicos

La respuesta de producción de anticuerpos específicos contra estos antígenos experimentales y contra sus homólogos naturales en el parásito se ha estudiado tanto en los voluntarios humanos como en los animales de experimentación vacunados, utilizando técnicas como el ELISA, la inmunofluorescencia indirecta (IFI) y la inmuno-transferencia (IT). Además, la función biológica de los mismos ha sido evaluada mediante ensayos biológicos *in vitro*.

### Estudios de respuesta inmune celular

Los estudios orientados a evaluar la respuesta inmune mediada por células (IMC), se han realizado utilizando células mononucleares (linfocitos y monocitos) obtenidas a partir de sangre periférica tanto de individuos residentes en de áreas endémicas para la malaria, descritas previamente, como de los voluntarios humanos resistentes en Cali y participantes en el ensayo clínico fase I. Igualmente se han utilizado células de roedores y primates inmunizados con diferentes candidatos a vacuna. En todos los estudios, las células mononucleares fueron aisladas de los otros componentes de la sangre periférica mediante el uso de gradientes de densidad con ficoll-hypaque. Las células mononucleares fueron estimuladas *in vitro* con las proteínas parasitarias en estudio y con extractos crudos del parásito en ensayos de proliferación linfocitaria *in vitro*, para las cuales se utilizaron condiciones estándar previamente descritas<sup>38</sup>. El

sobrenadante de estos cultivos fue analizado para determinar la presencia de citocinas liberadas por las células estimuladas mediante una prueba de ELISA<sup>39</sup> que usa como sonda anticuerpos anti-citocina (Ej: anti-IFN- $\gamma$ ). Adicionalmente la técnica ELISpot, ha sido utilizada para realizar la enumeración de células productoras de la citocina en estudio<sup>40</sup>.

### Infección experimental

Los primates del género *Aotus* poseen susceptibilidades variables a la infección por distintas cepas de *Plasmodium* que afectan al humano<sup>33,41</sup>. Para los experimentos aquí descritos se utilizó la cepa FVO de *P. falciparum*, cepa altamente virulenta que genera una infección muy reproducible en *A.l.griseimembra* así como con la cepa Santa Lucia<sup>30, 42, 43</sup>. En los experimentos con vacunas contra *P. vivax* la cepa seleccionada fue la Salvador I (Sal 1) que igualmente posee un patrón de crecimiento muy reproducible en esta especie de primates<sup>44</sup>. Para el análisis de la eficacia protectora de los antígenos correspondientes a la fase pre-eritrocítica (esporozoitos y formas hepáticas) se realizó el reto de los animales con esporozoitos viables producidos en mosquitos *Anopheles albimanus* utilizando una técnica descrita adelante, los cuales fueron inoculados por vía intravenosa. En las pruebas de protección inducida por antígenos de las formas sanguíneas asexuales, la infección de los animales vacunados se realizó mediante la inoculación de glóbulos rojos parasitados con trofozoitos viables, obtenidos de un

animal donante<sup>45</sup>. Finalmente, para la determinación de la eficacia de antígenos de la fase esporogónica, para inducir bloqueo de la transmisión de malaria a los mosquitos, se utilizó un método alimentación artificial de mosquitos adultos descrito en detalle adelante.

Para la evaluación de la protección inducida por vacunas contra la fase pre-eritrocítica, los primates fueron retados mediante la inoculación intravenosa de  $10^5$  esporozoitos en los casos de *P. falciparum* y de  $2 \times 10^4$  en los estudios de *P. vivax*. En la evaluación de la protección contra la infección por formas sanguíneas de *P. falciparum* o *P. vivax*, se utilizó una dosis  $10^5$  glóbulos rojos parasitados inoculados por vía intravenosa. La parasitemia de los animales retados fue determinada mediante observación microscópica en extendidos gruesos (gota gruesa) o delgados de sangre periférica<sup>46</sup>. Ocasionalmente se utilizó la técnica de reacción en cadena de la polimerasa (PCR), para confirmar los resultados de la observación microscópica<sup>47</sup>.

### Producción de esporozoitos

El *A. albimanus* representa una de las especies vectoras de malaria predominantes en el continente americano<sup>48</sup>. Esta especie es fácil de colonizar y de infectar experimentalmente<sup>49,50</sup>. En los estudios aquí descritos se utilizaron mosquitos colonizados a partir de muestras obtenidas en la costa Atlántica (Cepa Cartagena) y en la costa Pacífica (Cepa Buenaventura). Los mosquitos fueron adaptados a condiciones de laboratorio, a una temperatura de  $27 \pm 1^\circ\text{C}$  y una humedad relativa de 80%. Las dos colonias de anofelinos fueron mantenidas en los insectarios del Instituto de Inmunología en sus sedes de Cali y Buenaventura respectivamente. Para la producción de esporozoitos, los mosquitos fueron alimentados con sangre humana o de *Aotus*, con parásitos diferenciados sexualmente (gametocitos masculinos y femeninos). La alimentación de los mosquitos se realizó utilizando el método de alimentación a través de membranas artificiales previamente descrito<sup>41</sup>, luego de lo cual fueron mantenidos hasta el día 13 en las condiciones de temperatura y humedad estandarizadas y descritas<sup>45</sup>. Una muestra de los mismos, fue estudiada para determinar la presencia de esporozoitos maduros en las glándulas salivales, mediante disección microscópica. Los esporozoitos fueron cosechados, contados microscópicamente e inoculados a los primates por vía intravenosa.

### Ensayos de bloqueo de la transmisión de malaria al mosquito

Este ensayo permite medir la eficacia de los anticuerpos contra componentes de las formas sexuales del parásito

para bloquear su transmisión y desarrollo en el intestino del mosquito. Para éste ensayo se utilizan mosquitos adultos, de 2-3 días de edad, los cuales son sometidos a un periodo de ayuno de por lo menos 12 horas luego del cual son alimentados con sangre infectada con gametocitos maduros de *P. falciparum* o *P. vivax*. Para el procedimiento descrito se utilizó un alimentador de vidrio, regulado a  $37^\circ\text{C}$  y cubierto con una membrana artificial, de acuerdo con el método descrito previamente<sup>45,51</sup>. Luego de la alimentación artificial, los mosquitos fueron evaluados una semana más tarde para identificar y cuantificar la presencia de ooquistes en sus intestinos. El bloqueo de la transmisión corresponde al porcentaje de reducción en el número de ooquistes producidos, así como en el número de mosquitos infectados.

### Análisis estadísticos

Los datos clínicos e inmunológicos de los estudios en humanos y animales de experimentación utilizados, (ratones y monos) han sido registrados en un programa de base de datos (Programa Acces) y analizados con programas estadísticos como SPSS o Epi-info. Los análisis categóricos se realizaron por el test de Chi-cuadrado. Los datos serológicos y parasitológicos con las pruebas de Kruskal-Wallis, ANOVA en una vía para comparar grupos múltiples con el método de Dunn's para determinar la diferencia entre grupos. El método de Spearman rank order correlation, para las relaciones lineales entre variables. Las diferencias de  $p < 0,05$  fueron consideradas como significantes en los diferentes estudios.

## Resultados

### Caracterización inmunológica y respuesta inmunogénica de la proteína CS de *P. vivax*

Los estudios de antigenicidad realizados utilizando proteínas recombinantes y péptidos sintéticos correspondientes a diferentes regiones de la proteína CS de *P. vivax* permitieron la localización de múltiples epítopes B, T de ayuda y T CD8+, dispersos sobre la longitud completa de la molécula. En la figura 3 se observa la localización de los diferentes epítopes B, T de ayuda y T CD8+ en la proteína CS, igualmente se indica la extensión de los péptidos largos (N y C) utilizados en los ensayos de seguridad e inmunogenicidad en voluntarios humanos. Los péptidos p6, p11, p24 y p25 comprendían a epítopes con capacidad de inducir proliferación linfocitaria *in vitro* y producción de IFN- $\gamma$  determinada mediante la técnica de ELISA<sup>29</sup>. La respuesta inmunogénica de la proteína CS medida en ratones BALB/c inmunizados con diferentes concentraciones decrecientes (30, 10, 3, 0,3 y 0.1 mg/ml)

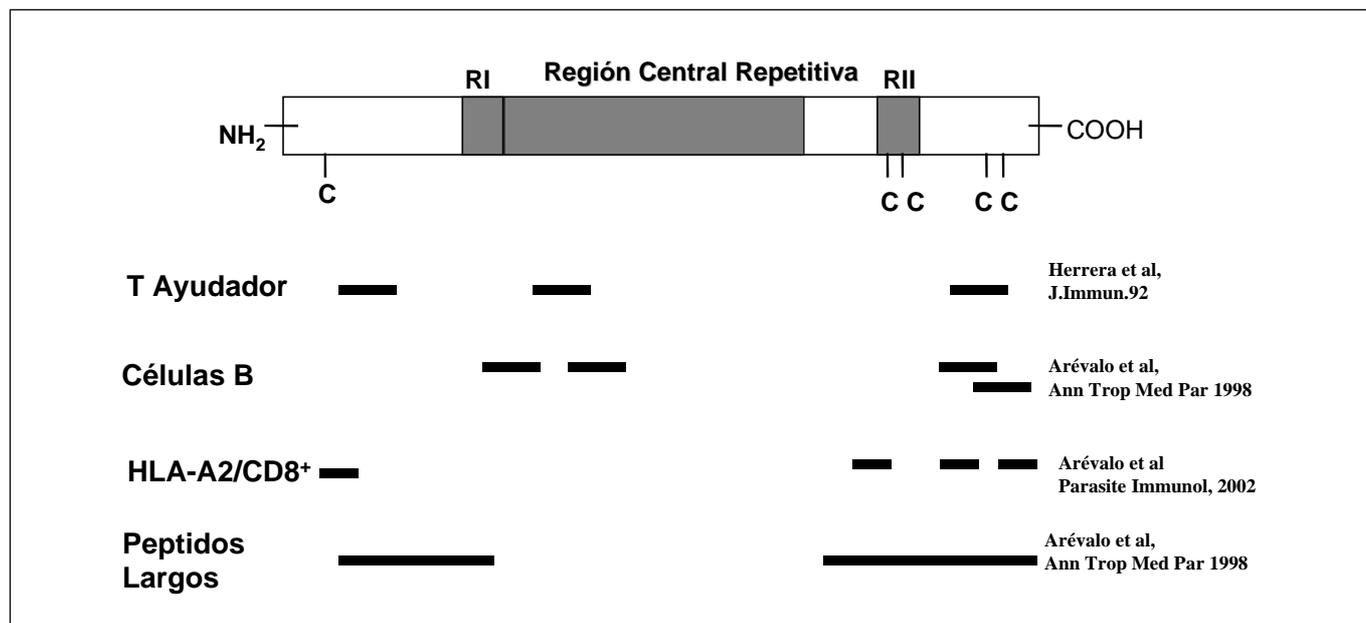


Figura 3. Estructura de la proteína CS de *P. vivax* y localización de epítopes relevantes.

de cada uno de los péptidos largos N y C demostró ser específica contra los diferentes fragmentos en dosis tan pequeñas como de 3 - 10 mg/ml. De otro lado la inmunización de ratones transgénicos que expresan la molécula humana HLA-A2.1 permitió demostrar una alta capacidad inmunogénica de péptidos con especificidad por linfocitos CD8+.

La interacción entre los epítopes contenidos en estos últimos péptidos y los linfocitos CD8+ depende de la presencia en los mismos de "motivos" de unión al antígeno de histocompatibilidad clase I (HLA-A2.1), expresado por los linfocitos, lo que determina su capacidad de estimular la producción de IFN- $\gamma$  de estas células, luego de su estimulación *in vitro* con péptidos. La inmunogenicidad de la proteína fue estudiada adicionalmente mediante la inmunización de monos *Aotus*, con péptidos ramificados (Multiple Antigen Peptides/MAP) y con péptidos largos (N y C) que contienen varios de los epítopes seleccionados en los estudios de antigenicidad. La inoculación de estos péptidos (N y C), denominados así por su localización en las regiones amino y carboxilo de la proteína CS respectivamente, demostró que los mismos inducían una sólida respuesta de anticuerpos (N-ter: 1:60.000 y C-ter: 1:12.000) luego de tres dosis de inmunización (100  $\mu$ g/dosis) con los mismos mezclados en adyuvantes Completo e Incompleto de Freund. Células T de los mismos primates produjeron altos títulos de IFN- $\gamma$  luego de su estimulación *in vitro* con los péptidos correspondientes<sup>52</sup>.

### Vacunación en humanos

Los péptidos N y C previamente caracterizados en ensayos pre-clínicos en roedores y primates, han sido más recientemente usados para inmunizar voluntarios (estudios clínicos) sin experiencia previa con malaria. Los péptidos han sido inoculados por vía intramuscular (deltoides) en un régimen de vacunación con dosis escalonadas. Datos preliminares de este estudio han demostrado que los péptidos son bien tolerados, no han inducido eventos adversos y su respuesta inmune ha sido satisfactoria<sup>53,54</sup>. Una fase posterior en el análisis de estos candidatos a vacuna viene siendo preparada por los grupos del Instituto de Inmunología del Valle y del Centro Internacional de Vacunas<sup>55</sup>.

### Inmunidad y eficacia protectora de otras proteínas de estadios pre-eritrocíticos

En los organelos (roptrias y micronemas) de los esporozoitos tanto de *P.falciparum* como de *P.vivax* se ha identificado la proteína TRAP (Trombospondin Related Anonymous Protein) con potencial para su desarrollo como vacuna<sup>56</sup>. La inmunogenicidad de un péptido sintético derivado de ésta proteína ha sido evaluada en estudios preliminares en ratones BALB/C donde se observa su gran capacidad para inducir anticuerpos con rangos que varían entre 1:60.000-100.000 por el método ELISA (Tabla 3), así como una buena inducción de proliferación

linfocitaria *in vitro*. De otro lado, el análisis de cuatro antígenos expresados en esporozoitos y formas hepáticas de *P. falciparum* identificadas inicialmente por el Dr. Pierre Druilhe del Instituto Pasteur de Paris, han permitido demostrar, en estudios cooperativos, su inmunogenicidad en monos *Aotus*. Estas proteínas (STARP, SALSA, LSA-1 y LSA-3) fueron producidas tanto en forma de proteínas recombinantes como en forma de péptidos sintéticos y utilizadas para evaluar la respuesta humoral en primates, donde se demostró que los antígenos LSA1 y LSA3 son los más inmunogénicos. Estas proteínas indujeron además, una buena estimulación linfocitaria y alta producción de IFN-g *in vitro*<sup>57</sup>. La vacunación y reto de *Aotus* con la proteína LSA-3 en estudios más recientes demostró la reproducibilidad de los resultados, los cuales se asociaron con la capacidad protectora.

### Evaluación de la antigenicidad e inmunogenicidad de proteínas de los estadios eritrocíticos

Como se observa en la Tabla 1, numerosos antígenos han sido identificados como candidatos potenciales a vacuna, principalmente en los estadios eritrocíticos de *P. falciparum*. Sin embargo tanto para *P. falciparum* como para *P. vivax* la proteína más estudiada ha sido la proteína Mayor de Superficie los Merozoitos (MSP-1). Los estudios realizados con esta proteína recombinante conjuga-

da con un fragmento de la proteína CS permitieron demostrar que esta proteína híbrida es altamente inmunogénica en monos *Aotus*. Estos estudios desarrollados conjuntamente con el Dr Ulrich Certa de la compañía Hoffmann-La Roche (Basilea, Suiza) permitieron demostrar la inducción no solo de anticuerpos capaces de reconocer la proteína nativa y de bloquear el desarrollo del parásito *in vitro*, sino también, la capacidad de inducción de niveles de IFN-g que se correlacionaron con protección contra el reto infeccioso experimental<sup>31</sup>. La proteína homóloga MSP1 en *P. vivax* ha sido denominada (Pv200) y posee una importante homología estructural y funcional con la MSP-1 de *P. falciparum*. Un fragmento derivado de la región N terminal de la proteína ha sido expresada como proteína recombinante y purificada por nuestro grupo recientemente. Los estudios preliminares de antigenicidad utilizando sueros de individuos expuestos a malaria demuestran que alrededor del 90% de los individuos reconocieron esta proteína con altos títulos anticuerpos (1:4.000 - 1:500.000). Estudios de inmunogenicidad en ratones BALB/c demostraron una extraordinaria capacidad de inducción de anticuerpos medidos por la prueba ELISA (títulos 1:10<sup>7</sup>)<sup>58</sup>.

El *P. vivax* usa como receptor para su invasión al eritrocito el grupo sanguíneo Duffy (Fy) con el cual interactúa a través de una proteína expresada por el merozoito, de-

**Tabla 3.** Antigenicidad e Inmunogenicidad contra antígenos de Plasmodium.

Estadio	Especie	Antígeno	Antigenicidad*	Inmunogenicidad**
Pre-eritrocítica	<i>P. vivax</i> <i>P. falciparum</i>	CS	1:100 - 1:1000	1:1000 - 1:100.000 <sup>a)</sup>
		CS	1:100 - 1:4000	1:200 - 1: 6000 <sup>a)</sup>
		LSA-1	nd	1:100 - 1:1000
		LSA-3	nd	1:50 - 1:100
		STARP	nd	1:2000 - 1:25.000
		SALSA	nd	1:2000 - 1:8000
Eritrocítico	<i>P. vivax</i>	200L	1:4.000 - 1:500.000	1:2x10 <sup>6</sup> - 10 <sup>7b)</sup>
		DBP	1:100 - 1:1000	1:10 <sup>5</sup> - 4 x10 <sup>6a)</sup>
	<i>P. falciparum</i>	MSP-1	1:2000 - 1:200.000	1:200 - 1:200.000 <sup>a)</sup>
		GLURP	nd	1:100 - 1:2000
Mosquito	<i>P. vivax</i>	Pv25	1:100 - 1:500	1:5000 - 1:20.000 <sup>a)</sup>

\* Rango de títulos de anticuerpos en individuos expuestos a antígenos de *Plasmodium*

\*\* Rango de títulos anticuerpos de monos *Aotus*<sup>a)</sup> o ratones<sup>b)</sup> inmunizados

nd: No determinado

nominada Duffy Binding Protein (DBP). Un fragmento funcional de esta proteína (RII), ha sido expresado y purificado por el grupo del Dr Chetan Chitnis del Centro Internacional de Ingeniería Genética y Biotecnología de Nueva Delhi (ICGEB/India). En el contexto de un proyecto cooperativo entre el Centro Internacional de Vacunas (Colombia) y el ICGEB se viene analizando la inmunogenicidad y eficacia protectora de la DBP-RII en monos *Aotus*. Los títulos de anticuerpos inducidos por la inmunización de los monos con diferentes formulaciones de la vacuna variaron entre  $1:10^5$  y  $1:10^6$ . Igualmente los estudios de antigenicidad de esta proteína, utilizando sueros de individuos de áreas maláricas colombianas, demostraron que la DBP-RII es reconocida por individuos expuestos a malaria con rangos que variaron entre  $1:10^2$  -  $10^3$ . Otras proteínas de *P. falciparum* como AMA-1, MSP-3, GLURP se están probando en experimentos de inmunogenicidad y eficacia protectora en monos *Aotus*.

#### **Evaluación de la antigenicidad e inmunogenicidad de proteínas de Bloqueo de la Transmisión**

La capacidad de los sueros obtenidos en individuos permanentemente expuestos a la malaria en áreas endémicas, para bloquear la transmisión del parásito del humano al mosquito representa un blanco adicional de ataque al parásito de gran valor. Para ello se requiere interferir el proceso de fertilización y/o de unión del parásito a las células huésped en el mosquito. En *P. falciparum*, cuatro proteínas (Pfs25, Pfs28, Pf230, Pf48) de la fase sexual del parásito han sido identificadas y dos homólogos de estas la Pv25 y Pvs28 en *P. vivax* han sido aisladas y se encuentran en evaluación actualmente. En proyectos cooperativos recientes con el grupo de los doctores Louis H. Miller y Carole Long de la Unidad de Desarrollo de Vacunas (MVDB) del Instituto Nacional de Alergias y Enfermedades Infecciosas (NIAID) de los Estados Unidos se ha probado la inmunogenicidad de las proteínas Pv25 y Pvs28. La inmunización de monos *Aotus* con estas dos proteínas indujo altos títulos de anticuerpos los cuales fueron usados en ensayos de bloqueo de la transmisión por el método de alimentación artificial de mosquitos *A. albimanus*. Estos estudios han demostrado, de manera reproducible, la capacidad bloqueadora (90% de inhibición) de estos anticuerpos sobre el desarrollo esporogónico del parásito en el mosquito.

#### **Discusión**

Como se describe en la gráfica 1, el *Plasmodium* posee por lo menos tres niveles claramente identificables sus-

ceptibles de bloqueo inmunológico, y por lo tanto adecuados para el desarrollo de vacunas. La fase pre-eritrocítica, durante la cual los esporozoitos pueden ser bloqueados antes de su ingreso al hígado o posteriormente, el parásito puede ser inhibido en su desarrollo y diferenciado dentro del hepatocito, evitando su aparición en la sangre y la consecuente enfermedad. La fase sanguínea asexual cuyo bloqueo puede prevenir o disminuir la sintomatología y eventualmente el desarrollo de formas diferenciadas sexualmente, con las que podría también reducir su transmisión a la comunidad. Finalmente las vacunas que inducen bloqueo de la fertilización y del desarrollo del parásito dentro del mosquito, sin bien revisten alguna resistencia, por cuanto su efecto no se produce sobre el sujeto vacunado sino sobre la comunidad, contribuiría significativamente al éxito de una vacuna eficaz.

El parásito posee una gran capacidad de transformación morfológica y antigénica durante su ciclo, lo que le permite evadir permanentemente los mecanismos de defensa inmune del huésped. A pesar de estos mecanismos de evasión, la exposición permanente al parásito o la vacunación experimental han demostrado la capacidad de controlar la multiplicación del parásito, indicando en algunos estudios, de manera contundente, que la vacunación contra la malaria es posible. Sin embargo, a pesar de que biológica y técnicamente el desarrollo de vacunas ha demostrado ser posible, el mismo parece ser extraordinariamente difícil, debido a innumerables factores: 1) En la mayoría de áreas endémicas del mundo, coexisten varias especies de *Plasmodium*, y el efecto antimalárico de una vacuna solo será visible para la comunidad en la medida que las diferentes especies circulantes disminuyan o desaparezcan simultáneamente. 2) La dinámica de la respuesta inmune en infecciones por más de un *Plasmodium* (infecciones mixtas) es poco conocida. 3) La respuesta inmunológica contra unos pocos antígenos del parásito puede generar una presión genética que se manifieste como una variación antigénica y un escape inmunológico del parásito. Esto es particularmente importante en la medida que hasta el momento solo se trabaja con una porción muy limitada de componentes del parásito, equivalentes a no más de 0.1-05% del genoma del mismo. 4) Ni los recursos requeridos para el diseño de las vacunas en el laboratorio, ni el presupuesto para la lucha anti-malárica mundial están disponibles, lo que conduce a una falta de interés en su desarrollo por parte de la industria farmacéutica.

No obstante los esfuerzos de la comunidad científica, a escala mundial, son significativos. Durante las últimas décadas se ha demostrado contundentemente el valor protec-

tor de las vacunas basadas en parásitos irradiados. Estas vacunas que parecían no ser factibles para su uso masivo, son investigadas actualmente como una alternativa menos remota. Adicionalmente, los sueros y células de voluntarios protegidos con estas vacunas han servido para identificar sub-unidades del parásito como proteína CS cuya localización difusa sobre la membrana del esporozoito y su función como ligando para la invasión<sup>57</sup> la hacen blanco fácil de los anticuerpos capaces de bloquear su función. Una proteína recombinante (RTS-S) desarrollada conjuntamente por los laboratorios Glaxo-Smith-Kline y el Instituto Walter Reed de las Fuerzas Armadas de los Estados Unidos usando fragmentos de la CS de *P. falciparum* ha demostrado su potencial protector en humanos<sup>59</sup>. Fragmentos similares producidos y analizados conjuntamente por nosotros y por el Dr. Giampietro Corradin del Instituto de Bioquímica de la Universidad de Lausana (Suiza) igualmente han demostrado su alta inmunogenicidad en modelos experimentales y en ensayos en humanos.

Otros antígenos de la fase pre-eritrocítica de *P. falciparum* representados por las proteínas: LSA-3, LSA-1, TRAP, STARP vienen siendo investigadas conjuntamente con el Instituto Pasteur (París). La inmunogenicidad I eficacia protectora de la LSA-3 en monos *Aotus* [56] ha justificado la iniciación de pruebas clínicas que se desarrollan actualmente en Europa (P. Druilhe, comunicación personal). A pesar del progreso significativo en el análisis de la fase pre-eritrocítica en *P. falciparum*, la identificación de antígenos de esta fase en *P. vivax* se limita a las proteínas CS y TRAP que son estudiadas en Cali (Tabla 1).

Dentro de los antígenos expresados por el *P. falciparum* y el *P. vivax* durante su desarrollo como formas asexuales, las proteínas Pf-MSP1, PfMSP2, PfMSP3, RESA y GLURP todos han sido evaluados extensamente en modelos animales y en estudios clínicos preliminares. Las proteínas PvMSP-1, Pv-DBP hacen su curso en ensayos pre-clínicos en primates y pronto serán sujeto de investigación en humanos. Recientemente se dio inicio en el MVDU (Rockville) a una ensayo clínico (Fase I) para evaluar la proteína Pvs25 cuyo mecanismo de acción es la inducción de anticuerpos capaces de bloquear la transmisión de *P. vivax* al mosquito. Estos estudios se basan en pruebas hechas en primates por varios grupos<sup>60-63</sup>.

La reciente publicación del genoma de *P. falciparum* y el progreso que se logra por parte del Instituto TIGR (The Institute for Genomic Research) en la secuenciación del genoma de *P. vivax*, han puesto en evidencia que a pesar del importante avance en el desarrollo de vacunas antimaláricas, dado el tamaño del genoma, estimado en

5000-6000 genes, toda la vacunología en malaria de los últimos años se ha concentrado en algo menos que 1% del genoma. Con el decisión de afrontar el reto de la vacuna antimalarica de manera más global y racional el Instituto de Inmunología del Valle y el Instituto TIGR trabajan actualmente en el desarrollo de técnicas de investigación que permitan un análisis de gran escala de los genomas de *Plasmodium*, lo que indudablemente acelerará el desarrollo de vacunas eficaces y de cobertura global.

En conclusión, el proceso de desarrollo de vacunas contra la malaria es muy complejo y afronta importantes restricciones de tipo económico. Sin embargo, durante las últimas dos décadas se han realizado importantes avances que ratifican la posibilidad de desarrollar vacunas funcionales. El progreso en el estudio del genoma y el proteoma de la especie de *Plasmodium* más prevalente en el humano, facilitara en la presente década la identificación de nuevos y más relevantes antígenos del *Plasmodium*.

### Agradecimientos

Mis sinceros agradecimientos a los voluntarios humanos tanto de las comunidades de las áreas endémicas, como de la ciudad de Cali por su generosa participación en las diferentes fases del estudio. El Servicio de Erradicación de la Malaria, actualmente, Programa del Centro de Investigación en Enfermedades Tropicales (CIET) por su permanente apoyo en sus sedes de Buenaventura. Mi reconocimiento al invaluable apoyo de grupo de investigadores del Instituto de Inmunología del Valle, del Centro Internacional de Vacunas, de la Fundación Centro de Primates, de la Corporación Instituto de Inmunología, de Laboratorio de Inmunología ASOCLINIC y del Laboratorio de Investigación Clínica y Molecular de la Fundación Clínica Valle del Lili. A las diferentes agencias que a través de su financiación han hecho posible el desarrollo de los estudios y el establecimiento del Consorcio de Investigación Médica: Colciencias, Fondo de Inversión Social (FIS), Secretaria Departamental de Salud del Valle del Cauca, OMS, CEE y NIH.

### Bibliografía

1. **Breman, J.G., A. Egan, and G.T. Keusch.** *The intolerable burden of malaria: a new look at the numbers.* Am J Trop Med Hyg, 2001. **64** (1-2 Suppl): p. iv-vii. 2: Murphy SC, et al. Gaps in the childhood malaria... [PMID:11425178]Related Articles, Links.
2. **Sachs, J. and P. Malaney.** *The economic and social burden of malaria.* Nature, 2002. **415**(6872): p. 680-5.

3. **Organization, W.T.** *International Tourism arrivals by sub-region*. [http://www.world-tourism.org/market\\_research/facts&figures/latest\\_data/tita01\\_07-02.pdf](http://www.world-tourism.org/market_research/facts&figures/latest_data/tita01_07-02.pdf), 2002.
4. **Mendis, K., et al.** *The neglected burden of Plasmodium vivax malaria*. *Am J Trop Med Hyg*, 2001. **64** (1-2 Suppl): p. 97-106.
5. **Baird, J.K. and K.H. Rieckmann.** *Can primaquine therapy for vivax malaria be improved?* *Trends Parasitol*, 2003. **19**(3): p. 115-20. 2: Hale BR, et al. A randomized, double-blind, p...[PMID:12594633]Related Articles, Links.
6. **Harinasuta, T., P. Suntharasamai, and C. Viravan.** *Chloroquine-resistant falciparum malaria in Thailand*. *Lancet*, 1965. **2**(7414): p. 657-60.
7. **Comer, R.D., et al.** *Chloroquine resistance in Plasmodium falciparum malaria on the Pacific coast of Colombia*. *Am J Trop Med Hyg*, 1968. **17**(6): p. 795-9.
8. **Davidson, G. and A. Zahar.** *The practical implication of resistance of malaria vectors to insecticides*, in *Bulletin of the World Health Organization*, WHO, Editor. 1973, WHO: Geneva. p. 475-483.
9. **Kohler, G. and C. Milstein.** *Continuous cultures of fused cells secreting antibody of predefined specificity*. *Nature*, 1975. **256**(5517): p. 495-7.
10. **Kohler, G., S.C. Howe, and C. Milstein.** *Fusion between immunoglobulin-secreting and nonsecreting myeloma cell lines*. *Eur J Immunol*, 1976. **6**(4): p. 292-5. 3: Kohler G, et al. Continuous cultures of fused ...[PMID:1172191]Related Articles, Links.
11. **Kohler, G. and C. Milstein.** *Derivation of specific antibody-producing tissue culture and tumor lines by cell fusion*. *Eur J Immunol*, 1976. **6**(7): p. 511-9. 2: Kohler G, et al. Fusion between immunoglobulin...[PMID:825374]Related Articles, Links.
12. **Berg, P., et al.** *Letter: Potential biohazards of recombinant DNA molecules*. *Science*, 1974. **185**(148): p. 303.
13. **Cohen, S.N., et al.** *Construction of biologically functional bacterial plasmids in vitro*. *Proc Natl Acad Sci U S A*, 1973. **70**(11): p. 3240-4.
14. **Krans, H.M.** *[Human insulin prepared with the aid of recombinant DNA]*. *Ned Tijdschr Geneesk*, 1981. **125**(21): p. 840-2. 2: [No authors listed] From the NIH: Insulin and hum...[PMID:7012389]Related Articles, Links.
15. **Schroder, E. and R. Hempel.** *Bradykinin, kallidin, and their synthetic analogues*. *Experientia*, 1964. **20**(10): p. 529-44.
16. **Engers, H. and T. Godal.** *Malaria vaccine development: current status*. *Parasitol Immunol*, 1998. **14**(2): p. 56-64.
17. **Gwadz, R.W. and I. Green.** *Malaria immunization in Rhesus monkeys. A vaccine effective against both the sexual and asexual stages of Plasmodium knowlesi*. *J Exp Med*, 1978. **148**(5): p. 1311-23.
18. **Carter, R., et al.** *Target antigens in malaria transmission blocking immunity*. *Philos Trans R Soc Lond B Biol Sci*, 1984. **307**(1131): p. 201-13.
19. **Carter, R. and K. Mendis.** *Transmission immunity in malaria: reflections on the underlying immune mechanisms during natural infections and following artificial immunization*. *Mem Inst Oswaldo Cruz*, 1992. **87**(Suppl 3): p. 169-73.
20. **Baird, J.K., et al.** *Age-dependent acquired protection against Plasmodium falciparum in people having two years exposure to hyperendemic malaria*. *Am J Trop Med Hyg*, 1991. **45**(1): p. 65-76.
21. **Andersen, E., et al.** *Assessment of age-dependent immunity to malaria in transmigrants*. *Am J Trop Med Hyg*, 1997. **56**(6): p. 647-9. 3: Baird JK, et al. Age-dependent acquired protec...[PMID:1867349]Related Articles, Links.
22. **Baird, J.K.** *Age-dependent characteristics of protection v. susceptibility to Plasmodium falciparum*. *Ann Trop Med Parasitol*, 1998. **92**(4): p. 367-90. 2: Andersen E, et al. Assessment of age-dependent i...[PMID:9230797]Related Articles, Links.
23. **Sabchareon, A., et al.** *Parasitologic and clinical human response to immunoglobulin administration in falciparum malaria*. *Am J Trop Med Hyg*, 1991. **45**(3): p. 297-308.
24. **McGregor, I.E.** *The passive transfer of human malarial immunity*. *Am J Trop Med Hyg*, 1964. **13**: p. 237-239.
25. **Clyde, D.F.,** *Immunization of man against falciparum and vivax malaria by use of attenuated sporozoites*. *Am J Trop Med Hyg*, 1975. **24**(3): p. 397-401.
26. **Clyde, D.F.** *Immunity to falciparum and vivax malaria induced by irradiated sporozoites: a review of the University of Maryland studies, 1971-75*. *Bull World Health Organ*, 1990. **68**(Suppl): p. 9-12.
27. **Rieckmann, K.H.** *Human immunization with attenuated sporozoites*. *Bulletin of the World Health Organization*, 1990.
28. **Arevalo-Herrera, M. and S. Herrera.** *Plasmodium vivax malaria vaccine development*. *Mol Immunol*, 2001. **38**(6): p. 443-55.
29. **Arevalo-Herrera, M., et al.** *Identification of HLA-A2 restricted CD8(+) T-lymphocyte responses to Plasmodium vivax circumsporozoite protein in individuals naturally exposed to malaria*. *Parasite Immunol*, 2002. **24**(3): p. 161-9.
30. **Herrera, S., et al.** *Immunization of Aotus monkeys with Plasmodium falciparum blood-stage recombinant proteins*. *Proc Natl Acad Sci U S A*, 1990. **87**(10): p. 4017-21.
31. **Herrera, S., et al.** *Antigenicity and immunogenicity of multiple antigen peptides (MAP) containing P. vivax CS epitopes in Aotus monkeys*. *Parasite Immunol*, 1997. **19**(4): p. 161-70.
32. **Perlaza, B.L., et al.** *Immunogenicity of four Plasmodium falciparum preerythrocytic antigens in Aotus lemurinus monkeys*. *Infect Immun*, 1998. **66**(7): p. 3423-8.
33. **Herrera, S., et al.** *Aotus monkeys: their great value for anti-malaria vaccines and drug testing*. *Int J Parasitol*, 2002. **32**(13): p. 1625-35.
34. **Lopez, J.A., et al.** *Recognition of synthetic 104-mer and 102-mer peptides corresponding to N- and C-terminal nonrepeat regions of the Plasmodium falciparum circumsporozoite protein*

- by sera from human donors. *Am J Trop Med Hyg*, 1996. **55**(4): p. 424-9.
35. **Perlaza, B.L., et al.** Preclinical study of long synthetic peptides derived from *P. falciparum* liver stage antigen 3 in *Aotus lemurinus griseimembra* monkeys. In preparation, 2000.
  36. **Herrera, M.A., et al.** Protection against malaria in *Aotus* monkeys immunized with a recombinant blood-stage antigen fused to a universal T-cell epitope: correlation of serum gamma interferon levels with protection. *Infection & Immunity*, 1992. **60**(1): p. 154-8.
  37. **Michon, P.A., et al.** Serologic responses to recombinant *Plasmodium vivax* Duffy binding protein in a Colombian village. *Am J Trop Med Hyg*, 1998. **59**(4): p. 597-9.
  38. **Herrera, S., et al.** Human recognition of T cell epitopes on the *Plasmodium vivax* circumsporozoite protein. *J Immunol*, 1992. **148**(12): p. 3986-90.
  39. **Harpaz, R., et al.** Serum cytokine profiles in experimental human malaria. Relationship to protection and disease course after challenge. *J Clin Invest*, 1992. **90**(2): p. 515-23.
  40. **Di Fabio, S., et al.** Quantitation of human influenza virus-specific cytotoxic T lymphocytes: correlation of cytotoxicity and increased numbers of IFN-gamma producing CD8+ T cells. *Int Immunol*, 1994. **6**(1): p. 11-9.
  41. **Zapata, J.C., et al.** Reproducible infection of intact *Aotus lemurinus griseimembra* monkeys by *Plasmodium falciparum* sporozoite inoculation. *J Parasitol*, 2002. **88**(4): p. 723-9.
  42. **Taylor, D.W. & W.A. Siddiqui.** Susceptibility of owl monkeys to *Plasmodium falciparum* infection in relation to location of origin, phenotype, and karyotype. *J Parasitol*, 1979. **65**(2): p. 267-71.
  43. **Collins, W.E., et al.** The Santa Lucia strain of *Plasmodium falciparum* as a model for vaccine studies. I. Development in *Aotus lemurinus griseimembra* monkeys. *Am J Trop Med Hyg*, 1996. **54**(4): p. 372-9.
  44. **Collins, W.E., et al.** Further studies on the sporozoite transmission of the Salvador I strain of *Plasmodium vivax*. *J Parasitol*, 1994. **80**(4): p. 512-7.
  45. **Salas, M.L., et al.** Development of sporogonic cycle of *Plasmodium vivax* in experimentally infected *Anopheles albimanus* mosquitoes. *Mem Inst Oswaldo Cruz*, 1994. **89**(Suppl 2): p. 115-9.
  46. **Beck, J.W.** Malaria and its diagnosis. *Trans R Soc Trop Med Hyg*, 1968. **62**(1): p. 58-68.
  47. **Ciceron, L., et al.** Development of a *Plasmodium* PCR for monitoring efficacy of antimalarial treatment. *J Clin Microbiol*, 1999. **37**(1): p. 35-8.
  48. **Zimmerman, R.H.** Ecology of malaria vectors in the Americas and future direction. *Mem Inst Oswaldo Cruz*, 1992. **87**(Suppl 3): p. 371-83. 2: Breeiland SG. Population patterns of Anophe...[PMID:4548395]Related Articles, Links.
  49. **Warren, M., et al.** Morphologic variants of *Anopheles albimanus* and susceptibility to *Plasmodium vivax* and *P. falciparum*. *Am J Trop Med Hyg*, 1977. **26**(4): p. 607-11.
  50. **Chan, A.S., et al.** Susceptibility of three laboratory strains of *Anopheles albimanus* (Diptera: Culicidae) to coindigenous *Plasmodium vivax* in southern Mexico. *J Med Entomol*, 1994. **31**(3): p. 400-3. 2: Warren M, et al. Morphologic variants of Anoph...[PMID:329696]Related Articles, Links.
  51. **Herrera, S., et al.** Proceso para el desarrollo de una vacuna contra la fase hepática de *Plasmodium vivax*. *Colombia Médica* (En prensa), 2004.
  52. **Graves, P.M.** Studies on the use of a membrane feeding technique for infecting *Anopheles gambiae* with *Plasmodium falciparum*. *Trans R Soc Trop Med Hyg*, 1980. **74**(6): p. 738-42.
  53. **Herrera, S., et al.** Phase I Clinical Trial of a synthetic CS protein vaccine against *P. vivax* in Colombia. *NEJM* (Sometime), 2004.
  54. **Templeton, T.J. and D.C. Kaslow.** Cloning and cross-species comparison of the thrombospondin-related anonymous protein (TRAP) gene from *Plasmodium knowlesi*, *Plasmodium vivax* and *Plasmodium gallinaceum*. *Mol Biochem Parasitol*, 1997. **84**(1): p. 13-24.
  55. **Arévalo, M., et al.** Ensayo Clínico Fase Ib de un candidato a vacuna contra malaria: Seguridad e inmunogenicidad de péptidos sintéticos derivados de la proteínas CS de *Plasmodium vivax* formulados en dos adyuvantes. *Colciencias Contrato No. 487-2003.*, 2003.
  56. **Perlaza, B.L., et al.** Immunogenicity and Protective efficacy of *P. falciparum* liver-stage Ag-3 in *Aotus lemurinus griseimembra* monkeys. *European Journal of Immunology*, 2003. **33**: p. 1321-1327.
  57. **Herrera, S., et al.** A conserved region of the MSP-1 surface protein of *Plasmodium falciparum* contains a recognition sequence for erythrocyte spectrin. *Embo J*, 1993. **12**(4): p. 1607-14.
  58. **Pradel, G., S. Garapaty, and U. Frevert.** Proteoglycans mediate malaria sporozoite targeting to the liver. *Mol Microbiol*, 2002. **45**(3): p. 637-651.
  59. **Stoute, J.A., et al.** Long-term efficacy and immune responses following immunization with the RTS,S malaria vaccine. *J Infect Dis*, 1998. **178**(4): p. 1139-44.
  60. **Bottius, E., et al.** A novel *Plasmodium falciparum* sporozoite and liver stage antigen (SALSA) defines major B, T helper, and CTL epitopes. *J Immunol*, 1996. **156**(8): p. 2874-84.
  61. **Fidock, D.A., et al.** *Plasmodium falciparum* liver stage antigen-1 is well conserved and contains potent B and T cell determinants. *Journal of Immunology*, 1994. **153**(1): p. 190-204.
  62. **Pasquetto, V., et al.** *Plasmodium falciparum* sporozoite invasion is inhibited by naturally acquired or experimentally induced polyclonal antibodies to the STARP antigen [published erratum appears in *Eur J Immunol* 1997 Nov;27(11):3084]. *Eur J Immunol*, 1997. **27**(10): p. 2502-13.
  63. **Aidoo, M., et al.** Cytotoxic T-lymphocyte epitopes for HLA-B53 and other HLA types in the malaria vaccine candidate liver-stage antigen 3. *Infect Immun*, 2000. **68**(1): p. 227-32.

Recibido el 12 de julio de 2004.

Aceptado para su publicación el 14 de agosto de 2004.

# VIEJOS Y NUEVOS RESULTADOS SOBRE INTEGRALES SINGULARES E HIPERSINGULARES

por

**J. Horváth**<sup>1</sup>

## Resumen

**Horváth J.:** Viejos y nuevos resultados sobre integrales singulares e hipersingulares. Rev. Acad. Colomb. Cienc. **29** (113): 547-569, 2005. ISSN 0370-3908.

Exposición de algunos trabajos del autor sobre integrales singulares e hipersingulares, publicados entre 1953 y 1987, completada con resultados nuevos, observaciones sobre contribuciones de otros matemáticos, simplificaciones y algunas correcciones.

**Palabras clave:** Operadores integrales singulares, transformada de Hilbert, distribuciones, convolución de distribuciones.

## Abstract

Exposition of some works of the author on singular and hypersingular integrals, published between 1953 and 1987, complemented with new results, and remarks on contributions by other mathematicians, simplifications, and some amendments.

**Key words:** Singular integral operators, Hilbert transforms, distributions, convolution of distributions.

---

<sup>1</sup> University of Maryland, Department of Mathematics, College Park, MD, 20742-4015, USA. Correo electrónico: jhorvath@wam.umd.edu.  
AMS Classification 2000: 46F12, 46F10, 44A15, 44A35, 47G10, 42B20.

## 1.

Mi intención es dar en estas páginas un resumen de algunos de mis trabajos sobre integrales singulares e hipersingulares, publicados entre 1953 y 1987, completándolo con algunos resultados nuevos, observaciones sobre las contribuciones de mis colaboradores y de otros matemáticos, simplificaciones de varias demostraciones y correcciones de errores.

Si bien me acuerdo, fue alrededor de 1948 que **Jean Leray** me habló de **Georges Giraud** y de sus trabajos sobre ecuaciones integrales con valores principales. Me dijo que valdría la pena estudiar estos trabajos porque había mucho que hacer. Yo no seguí inmediatamente este consejo y fue sólo en 1955 que me interesé por las investigaciones de **Giraud**, de manera que hablaré de él más abajo en la sección 11.

**Marcel Riesz** fue quien me dió el impulso para ocuparme con integrales singulares. El estubo en París en el verano de 1949 y una segunda vez al principio de 1951. Ya con ocasión de su primera visita mencionó que tenía una idea de cómo se podría generalizar la transformada de Hilbert a varias variables, y el 12 de febrero de 1951, durante un almuerzo me explicó de que se trataba.

Antes de contar lo que **Marcel Riesz** me dijo durante aquel almuerzo, tengo que recordar los conceptos de función conjugada y transformada de Hilbert. Sea  $f$  una función integrable en el sentido de Lebesgue en el intervalo  $[-\pi, \pi]$  (o bien una función localmente integrable, periódica sobre la recta  $\mathbf{R}$ , con período  $2\pi$ ). Su serie de Fourier

$$S(\theta) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta)$$

con coeficientes

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt dt, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kt dt,$$

determina completamente (es decir en casi todos los puntos) la función  $f$ , aunque no es necesariamente convergente (maximalidad del sistema trigonométrico). Consideremos ahora la serie de potencias

$$w(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k z^k = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k r^k (\cos k\theta + i \sin k\theta),$$

donde  $z = r e^{i\theta}$ . Si ponemos  $\gamma_k = \alpha_k + i\beta_k$ , obtenemos

$$w(z) = \sum_{k=0}^{\infty} r^k (\alpha_k \cos k\theta - \beta_k \sin k\theta) + i \sum_{k=0}^{\infty} r^k (\beta_k \cos k\theta + \alpha_k \sin k\theta).$$

Por lo tanto, se define la serie conjugada de  $S(\theta)$  por

$$\tilde{S}(\theta) \sim \sum_{k=1}^{\infty} (-b_k \cos k\theta + a_k \sin k\theta).$$

Cuando esta serie converge, su suma se llama la *función conjugada*  $\tilde{f}$  de  $f$ . Si por ejemplo  $f \in L^2$ , entonces  $\sum |\alpha_k|^2 + |\beta_k|^2 < \infty$  y por consiguiente  $\tilde{S}$  converge hacia la función  $\tilde{f} \in L^2$ . Se tiene

$$-b_k \cos k\theta + a_k \sin k\theta = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin k(\theta - t) dt,$$

y se comprueba utilizando la parte imaginaria de la progresión geométrica  $\sum_{k=1}^n e^{ikt}$  que

$$\sum_{k=1}^n \sin kt = \frac{\cos \frac{t}{2} - \cos (n + \frac{1}{2})t}{2 \sin \frac{t}{2}}.$$

Esta expresión se simplifica si restamos la mitad del último término de la suma:

$$\frac{\cos \frac{t}{2} - \cos (n + \frac{1}{2})t}{2 \sin \frac{t}{2}} - \frac{1}{2} \sin nt = \frac{1 - \cos nt}{2 \tan \frac{t}{2}}.$$

Así la  $n$ -ésima suma parcial modificada de  $\tilde{S}$  es

$$\tilde{S}_n^*(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{1 - \cos n(\theta - t)}{\tan \frac{\theta - t}{2}} dt,$$

y la función conjugada, si existe, está dada por el valor principal de Cauchy:

$$\tilde{f}(\theta) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{2\pi} \int_{|t-\theta| \geq \epsilon} f(t) \frac{dt}{\tan \frac{\theta - t}{2}}. \quad (1)$$

## 2.

Otro camino para llegar a la expresión (1) de la función conjugada es la *sumación de Abel* de la serie de Fourier. Para esto es preferible servirse de la forma compleja de la serie y escribir

$$S(\theta) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\theta},$$

donde

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ikt} dt,$$

es decir  $a_k = c_k + c_{-k}$ ,  $b_k = i(c_k - c_{-k})$ , o sea  $c_k = \frac{1}{2}(a_k - ib_k)$  para  $k \geq 0$  y  $c_{-k} = \bar{c}_k$ . Poniendo  $z = re^{i\theta}$ , la serie

$$u(re^{i\theta}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k r^{|k|} e^{ik\theta}$$

converge para  $r < 1$ , ya que por el lema de Riemann los coeficientes  $c_k$  tienden a cero, además  $u$  es una función armónica en  $|z| < 1$ . La fórmula para la suma de la serie geométrica da

$$1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} r^k e^{ikt} = \frac{1 + re^{it}}{1 - re^{it}},$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned} \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|} e^{ikt} &= 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} r^k \cos kt \\ &= \Re \frac{1 + re^{it}}{1 - re^{it}} = \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos t + r^2}. \end{aligned}$$

Reemplazando el valor de  $c_k$  en la serie que define  $u(re^{i\theta})$  se tiene

$$u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|} e^{ik(\theta-t)} dt,$$

desde luego obtenemos para la *suma de Abel* de la serie  $S(\theta)$  la expresión

$$u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos(\theta - t) + r^2} dt.$$

La expresión a la derecha es la *integral de Poisson* de la función  $f$ .

Ahora bien,

$$\Im \frac{1 + re^{it}}{1 - re^{it}} = \frac{2r \sin t}{1 - 2r \cos t + r^2},$$

y por lo tanto la función armónica conjugada de  $u(z)$  es

$$v(re^{i\theta}) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{r \sin(\theta - t)}{1 - 2r \cos(\theta - t) + r^2} dt,$$

donde a la derecha tenemos la *integral conjugada de Poisson* de  $f$ . Observemos que cuando  $r \rightarrow 1$ , la integral  $v(re^{i\theta})$  tiende formalmente a

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{\sin(\theta - t)}{1 - \cos(\theta - t)} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{dt}{\tan \frac{\theta - t}{2}},$$

es decir a la integral cuyo valor principal define  $\tilde{f}(\theta)$  en (1), ya que

$$\frac{\sin t}{1 - \cos t} = \frac{2 \sin(t/2) \cos(t/2)}{2 \sin^2(t/2)} = \frac{1}{\tan(t/2)}.$$

### 3.

Sería fácil demostrar ahora el teorema de **A. Plessner** [67] según cual si  $f \in L^2$ , entonces  $\tilde{f}$  existe, pertenece a  $L^2$  y se tiene  $\|f\|_2 = \|\tilde{f}\|_2$ . Sin embargo prefiero hacer esto en el caso análogo, casi idéntico, en que  $f$  es una función definida sobre la recta  $\mathbf{R}$  en vez del "toro" porque las fórmulas son más sencillas. Sea pues  $f$  una función medible sobre  $\mathbf{R}$  tal que  $(1 + |x|^2)^{-1} f$  es integrable. Su *integral de Poisson*

$$u(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbf{R}} f(t) \frac{y}{(x - t)^2 + y^2} dt$$

resuelve el problema de Dirichlet para el semiplano superior, es decir  $u(x, y)$  es armónico para  $x \in \mathbf{R}, y > 0$  y el límite de  $u(x, y)$  es  $f(x)$  para casi todo  $x \in \mathbf{R}$  cuando  $y \rightarrow 0+$ , como lo veremos más abajo. La función  $u(x, y)$  es la convolución con respecto a la variable  $x$  de la función  $f$  y del núcleo de Poisson  $P_y(x) = \frac{1}{\pi} \frac{y}{x^2 + y^2}$ .

Ahora bien para  $z = x + iy \in \mathbf{C}$  se tiene

$$\frac{i}{\pi z} = \frac{i}{\pi |z|^2} = \frac{i}{\pi} \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{1}{\pi} \frac{y}{x^2 + y^2} + \frac{i}{\pi} \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

Por consiguiente el *núcleo conjugado* de Poisson se define como  $Q_y(x) = \frac{1}{\pi} \frac{x}{x^2 + y^2}$ , y la integral conjugada de Poisson de  $f$  es

$$v(x, y) = Q_y * f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbf{R}} f(t) \frac{x - t}{(x - t)^2 + y^2} dt,$$

la cual tiende cuando  $y \rightarrow 0+$  hacia la integral (en general divergente)

$$\frac{1}{\pi} \int_{\mathbf{R}} f(t) \frac{dt}{x - t}.$$

La *función conjugada* (o *transformada de Hilbert*) de  $f$  se define por el valor principal

$$\tilde{f}(x) = (\mathcal{H}f)(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0+} \frac{1}{\pi} \int_{|t-x|>\epsilon} f(t) \frac{dt}{x - t}.$$

**Marcel Riesz** me explicó una vez que esta transformación lleva el nombre de **Hilbert** por la razón de que él consideró en su curso sobre ecuaciones integrales el análogo discreto: sea  $a = (a_k) \in l^2$ , es decir  $\|a\|_2^2 = \sum |a_k|^2 < \infty$ , y pongamos  $b_j = \sum_k \frac{a_k}{j+k}$ . **Hilbert** demostró que  $b = (b_j) \in l^2$  y se tiene  $\|b\|_2 \leq \pi \|a\|_2$  ([20,

pág. 226]). Quiero demostrar el análogo del teorema de Plessner:

**Teorema.** Si  $f \in L^2(\mathbf{R})$  entonces  $\bar{f}$  existe en casi todas partes, pertenece a  $L^2(\mathbf{R})$  y  $\|f\|_2 = \|\bar{f}\|_2$ .

Reproduciré la demostración que se encuentra en el libro de **Titchmarsh** ([96], 5.3, Theorem 91, pág. 122), la cual utilicé para generalizar el teorema a varias variables. Desgraciadamente la referencia a **Titchmarsh** se omitió accidentalmente en [28].

**Lema 1.** Sea  $f$  una función medible sobre  $\mathbf{R}$  tal que  $(1 + |x|^2)^{-1}f(x)$  es integrable. Entonces para casi todo  $x \in \mathbf{R}$  se tiene  $u(x, y) = P_y * f(x) \rightarrow f(x)$  cuando  $y \rightarrow 0+$ .

*Demostración.* Observemos ante todo que según un teorema de Lebesgue ([106, II.(11.1), pág. 65]) para casi todo  $x \in \mathbf{R}$  se tiene

$$\lim_{y \rightarrow 0+} \frac{1}{y} \int_{|x-t| \leq y} |f(x) - f(t)| dt = 0. \quad (2)$$

Ya que

$$\begin{aligned} \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{(x-t)^2 + y^2} &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{ds}{1+s^2} \\ &= \frac{1}{\pi} \arctan s \Big|_{-\infty}^{\infty} = 1, \end{aligned}$$

podemos escribir

$$f(x) - u(x, y) = \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x) - f(t)}{(x-t)^2 + y^2} dt.$$

Partimos la integral en tres:  $I_1, I_2, I_3$  correspondientes a los conjuntos de integración  $|x-t| \leq y$ ,  $y < |x-t| \leq 1$ ,  $|x-t| > 1$  y suponemos que para  $x$  se cumple la condición (2) de Lebesgue.

Se tiene

$$|I_1| \leq \frac{1}{\pi y} \int_{|x-t| \leq y} |f(x) - f(t)| dt,$$

y esta expresión en virtud de (2) tiende a cero cuando  $y \rightarrow 0+$ .

Para tratar  $I_2$  introduzcamos la función

$$\varphi(\rho) = \varphi(\rho; x) = \int_{|x-t| \leq \rho} |f(x) - f(t)| dt.$$

Entonces

$$\begin{aligned} |I_2| &= \left| \frac{y}{\pi} \int_{y < |x-t| \leq 1} \frac{f(x) - f(t)}{(x-t)^2 + y^2} dt \right| \\ &\leq \frac{y}{\pi} \int_{y < |x-t| \leq 1} \frac{|f(x) - f(t)|}{(x-t)^2} dt = \frac{y}{\pi} \int_y^1 \frac{1}{\rho^2} d\varphi(\rho) \\ &= \frac{y}{\pi} \left( \left[ \frac{\varphi(\rho)}{\rho^2} \right]_y^1 + 2 \int_y^1 \frac{\varphi(\rho)}{\rho^3} d\rho \right). \end{aligned}$$

Ahora bien,

$$\frac{y}{\pi} \left( \varphi(1) - \frac{\varphi(y)}{y^2} \right) = \frac{1}{\pi} \left( y\varphi(1) - \frac{\varphi(y)}{y} \right) \rightarrow 0$$

cuando  $y \rightarrow 0+$ . Por otra parte

$$y \int_y^1 \frac{\varphi(\rho)}{\rho^3} d\rho = y \int_y^{\sqrt{y}} \frac{\varphi(\rho)}{\rho^3} d\rho + y \int_{\sqrt{y}}^1 \frac{\varphi(\rho)}{\rho^3} d\rho.$$

Puesto que  $\frac{\varphi(\rho)}{\rho} \leq \varepsilon$  si  $\rho$  es suficientemente pequeño, se tiene

$$\begin{aligned} y \int_y^{\sqrt{y}} \frac{\varphi(\rho)}{\rho^3} d\rho &\leq \varepsilon y \int_y^{\sqrt{y}} \frac{d\rho}{\rho^2} = \varepsilon y \left[ -\frac{1}{\rho} \right]_y^{\sqrt{y}} \\ &= \varepsilon(1 - \sqrt{y}) \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Sea  $\frac{\varphi(\rho)}{\rho} \leq M$ . Entonces

$$\begin{aligned} y \int_{\sqrt{y}}^1 \frac{\varphi(\rho)}{\rho^3} d\rho &\leq My \int_{\sqrt{y}}^1 \frac{d\rho}{\rho^2} \\ &= My \left[ -\frac{1}{\rho} \right]_{\sqrt{y}}^1 = M(\sqrt{y} - y) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Luego  $I_2 \rightarrow 0$  cuando  $y \rightarrow 0+$ . Finalmente

$$|I_3| \leq \frac{y}{\pi} \int_{|x-t| > 1} \frac{|f(x) - f(t)|}{(x-t)^2} dt \rightarrow 0$$

cuando  $y \rightarrow 0+$ , con lo cual el lema queda demostrado.

**Lema 2** ([96, Theorem 92, pág. 124]). Sea  $f$  una función medible sobre  $\mathbf{R}$  tal que  $(1 + |x|^2)^{-1}f(x)$  sea integrable. Entonces para casi todo  $x \in \mathbf{R}$  se tiene

$$v(x, y) - \frac{1}{\pi} \int_{|t-x| \geq y} f(t) \frac{dt}{x-t} \rightarrow 0$$

cuando  $y \rightarrow 0+$ .

*Demostración.* Descompongamos la diferencia en dos integrales

$$\int_{\mathbf{R}} f(t) \frac{x-t}{(x-t)^2+y^2} dt - \int_{|t-x|\geq y} f(t) \frac{dt}{x-t} = \int_{|t-x|<y} f(t) \frac{x-t}{(x-t)^2+y^2} dt + \int_{|t-x|\geq y} f(t) \left( \frac{x-t}{(x-t)^2+y^2} - \frac{1}{x-t} \right) dt.$$

Observemos de una vez que para  $0 < a < b$  tenemos

$$\int_{a\leq|t-x|\leq b} \frac{dt}{x-t} = 0 \quad \text{y} \quad \int_{a\leq|t-x|\leq b} \frac{x-t}{(x-t)^2+y^2} dt = 0$$

porque las funciones a integrar toman valores opuestos en puntos simétricos con respecto a  $x$ . Entonces

$$\left| \int_{|t-x|<y} f(t) \frac{x-t}{(x-t)^2+y^2} dt \right| = \left| \int_{|t-x|<y} (f(t) - f(x)) \frac{x-t}{(x-t)^2+y^2} dt \right| \leq \frac{1}{y} \int_{|t-x|<y} |f(t) - f(x)| dt \rightarrow 0$$

cuando  $y \rightarrow 0+$ . Por otro lado

$$\frac{x-t}{(x-t)^2+y^2} - \frac{1}{x-t} = \frac{-y^2}{(x-t)((x-t)^2+y^2)}$$

y, por consiguiente,

$$\begin{aligned} \left| \int_{y\leq|t-x|<1} f(t) \left( \frac{x-t}{(x-t)^2+y^2} - \frac{1}{x-t} \right) dt \right| &\leq y^2 \int_{y\leq|t-x|<1} |f(t) - f(x)| \frac{dt}{|x-t|((x-t)^2+y^2)} \\ &\leq y^2 \int_{y\leq|t-x|<1} |f(t) - f(x)| \frac{dt}{|t-x|^3} = y^2 \int_y^1 \frac{d\varphi(\rho)}{\rho^3}, \end{aligned}$$

donde hemos usado la notación utilizada en la demostración del Lema 1. Se ve similarmente como en aquella demostración que la última cantidad tiende a cero cuando  $y \rightarrow 0+$ . Finalmente tenemos que

$$\left| \int_{|x-t|\geq 1} f(t) \left( \frac{x-t}{(x-t)^2+y^2} - \frac{1}{x-t} \right) dt \right| \leq \left| y^2 \int_{|t-x|\geq 1} \frac{f(t)}{|t-x|^3} dt \right| \rightarrow 0$$

cuando  $y \rightarrow 0+$ .

La idea de introducir la función  $\varphi(\rho)$  e integrar por partes me fue sugerida por **Marcel Riesz** quien tenía gran experiencia en este tipo de cálculos por haber investigado la sumación de series de Fourier ([71]; [74, No. 25, págs. 104-113]; [106, III.5]).

#### 4.

Para continuar la demostración del Teorema, necesito recordar algunos hechos del análisis de Fourier. Consideraré funciones definidas sobre la recta real  $\mathbf{R}$ , pero todo es casi lo mismo sobre  $\mathbf{R}^n$ , o sobre el toro  $\mathbf{T} = \mathbf{R}/\mathbf{Z}$ , o más generalmente sobre un grupo conmutativo localmente compacto [40], [76], [92].

Sea  $p$  un número real,  $p \geq 1$ . Por  $L^p = L^p(\mathbf{R})$  denotaremos el espacio vectorial de las funciones  $f$  definidas sobre  $\mathbf{R}$  que son medibles (en el sentido de Lebesgue) y tales que  $|f|^p$  es integrable. En verdad no son las funciones mismas los elementos de  $L^p$ , sino las clases de funciones, considerando equivalentes

dos funciones cuando toman el mismo valor con la excepción posible de un conjunto de medida cero (es decir, cuando son iguales en casi todas partes). La expresión  $\|f\|_p = (\int_{\mathbf{R}} |f(x)|^p dx)^{1/p}$  es una verdadera norma sobre  $L^p$ : si  $\|f\|_p = 0$ , entonces  $f$  es el elemento 0.

La primera cosa a señalar es la *desigualdad de Hölder*: Si  $f \in L^p, g \in L^q$  y los exponentes satisfacen a  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ , entonces  $fg \in L^1$  y  $\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$ . La desigualdad vale también para  $p = 1$  y  $q = \infty$ , donde  $L^\infty$  denota el espacio de las (clases de) funciones acotadas y medibles y  $\|g\|_\infty$  es el extremo inferior de los números  $M$  tales que  $|g(x)| \leq M$  para casi todo  $x \in \mathbf{R}$ . Si  $p = q = 2$ , la desigualdad lleva el nombre de **H. A. Schwarz** (sin la letra t). La generalización siguiente es inmediata: si  $f \in L^p, g \in L^q$  y  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} \leq 1$ , entonces  $fg \in L^r$  y  $\|fg\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q$ . En efecto

$$\int |f|^r |g|^r dx \leq \left( \int (|f|^p)^{r/p} dx \right)^{r/p} \left( \int (|g|^q)^{r/q} dx \right)^{r/q}.$$

La transformada (o integral) de Fourier  $\mathcal{F}f = \hat{f}$  de una función  $f \in L^1(\mathbf{R})$  se define por

$$\mathcal{F}f(\xi) = \hat{f}(\xi) = \int_{\mathbf{R}} f(x)e^{-2\pi i x \xi} dx.$$

Obviamente  $\hat{f} \in L^\infty(\mathbf{R})$  y  $\|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$ . Además  $\hat{f}$  es continua por una aplicación directa del teorema de la convergencia dominada de Lebesgue. De hecho, si  $\xi \rightarrow \alpha$ , entonces  $f(x)e^{-2\pi i x \xi} \rightarrow f(x)e^{-2\pi i x \alpha}$  y  $|f(x)e^{-2\pi i x \xi}| \leq |f(x)|$ , luego  $\hat{f}(\xi) \rightarrow \hat{f}(\alpha)$ . Análogamente al Lema de Riemann en la teoría de las series de Fourier,  $\hat{f}(\xi)$  tiende a cero cuando  $|\xi| \rightarrow \infty$ .

La transformada conjugada de Fourier se define por

$$\overline{\mathcal{F}}g(\xi) = \int_{\mathbf{R}} g(x)e^{2\pi i x \xi} dx.$$

Si  $\hat{f}$  pertenece también a  $L^1$ , entonces vale la relación de reciprocidad

$$\overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}f(x) = \int_{\mathbf{R}} \hat{f}(\xi)e^{2\pi i \xi x} d\xi = f(x).$$

En general  $\hat{f}$  no es integrable, de manera que para obtener  $f$  a partir de  $\hat{f}$  se necesita algún método de sumación, por ejemplo el de Cesàro:

$$f(x) = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \left(1 - \frac{|\xi|}{R}\right) \hat{f}(\xi)e^{2\pi i \xi x} d\xi$$

([40, VI,1.11, pág. 125]).

Sea ahora  $1 < p \leq 2$  y  $p'$  el exponente conjugado, es decir  $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ . Para definir la transformada de Fourier de un elemento  $f \in L^p$  se utiliza el hecho de que  $L^1 \cap L^p$  es denso en  $L^p$ . Dado  $f \in L^p$  se considera por ejemplo la sucesión  $(f_k)$  definida de la manera siguiente:  $f_k(x) = f(x)$  si  $|x| \leq k$  y  $f_k(x) = 0$  si  $|x| > k$ . Entonces los elementos  $\mathcal{F}f_k$  pertenecen a  $L^{p'}$  y cuando  $k \rightarrow \infty$  tienden hacia un elemento de  $L^{p'}$  en el sentido de la norma, este elemento es por definición  $\mathcal{F}f = \hat{f} \in L^{p'}$ . Se tiene  $\|\hat{f}\|_{p'} \leq \|f\|_p$ : desigualdad de Hausdorff-Young ([40, pág. 142]; [92, V, §1, pág. 178]; [96, Chap.IV, pág. 96]). En particular para  $p = p' = 2$  la aplicación  $f \rightarrow \mathcal{F}f$  es un isomorfismo isométrico de  $L^2$  sobre sí mismo, es decir  $\|\hat{f}\|_2 = \|f\|_2$  (Teorema de Parseval-Plancherel).

La convolución de dos funciones integrables  $f$  y  $g$  se define por

$$f * g(x) = \int_{\mathbf{R}} f(x-y)g(y)dy.$$

Puesto que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{R}} |f * g(x)|dx &\leq \int_{\mathbf{R}} \int_{\mathbf{R}} |f(x-y)g(y)|dydx \\ &= \int_{\mathbf{R}} |g(y)|dy \int_{\mathbf{R}} |f(x-y)|dx, \end{aligned}$$

se tiene  $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$ . Más generalmente, si  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \geq 1$ ,  $f \in L^p$ ,  $g \in L^q$ , entonces se puede definir  $f * g$  que pertenecerá a  $L^r$  con  $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1$  y satisface a  $\|f * g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q$  (desigualdad de Young, [92, pág. 178]).

Formalmente se tiene

$$\begin{aligned} \int f(x-y)g(y)e^{-2\pi i x \xi} dydx &= \\ \int f(x-y)e^{-2\pi i(x-y)\xi} dx \int g(y)e^{-2\pi i y \xi} dy, \end{aligned}$$

es decir

$$\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}(f) \cdot \mathcal{F}(g)$$

([96, pág. 51]). Esta fórmula vale por ejemplo cuando  $f \in L^p$ ,  $g \in L^q$ ,  $p \leq 2$ ,  $q \leq 2$  ([96, 4.7, Th.77, pág. 106]).

La relación entre el producto y la convolución aclara por qué  $f * g$  pertenece a  $L^r$ . Si  $f \in L^p$ ,  $g \in L^q$ , entonces  $\hat{f} \in L^{p'}$ ,  $\hat{g} \in L^{q'}$  y por la desigualdad de Hölder  $\hat{f}\hat{g} \in L^s$ , donde  $\frac{1}{s} = \frac{1}{p'} + \frac{1}{q'} = 2 - \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$ . Desde luego  $f * g = \overline{\mathcal{F}}(\hat{f}\hat{g}) \in L^r$  con  $\frac{1}{r} = 1 - \frac{1}{s} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1$ .

## 5.

Ahora podemos seguir con la demostración del Teorema. Nuestra primera tarea es encontrar la transformada de Fourier del núcleo de Poisson  $P_y$  y del núcleo conjugado  $Q_y$ . Una aplicación sencilla del teorema del residuo muestra que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iaz}}{x^2 + 1} dx = \pi e^{-|a|}. \quad (3)$$

En efecto

$$\frac{1}{x^2 + 1} = \frac{i}{2} \left( \frac{1}{x+i} - \frac{1}{x-i} \right).$$

Si  $a > 0$ , integramos a lo largo de un semicírculo  $C_R^+$  en el semiplano superior cuyo diámetro es el intervalo  $[-R, R]$  del eje real. Si  $R > 1$  entonces el polo  $z = i$  está en el interior de  $C_R^+$ , desde luego

$$\oint_{C_R^+} \frac{e^{iaz}}{z^2 + 1} = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=i} \frac{e^{iaz}}{z^2 + 1} = -2\pi i \frac{i}{2} e^{ia} = \pi e^{-a}.$$

Puesto que  $|e^{iaz}| = |e^{iaz} \cdot e^{-ay}| = e^{-ay} < 1$ , la integral sobre la parte curva de  $C_R^+$  tiende a cero cuando  $R \rightarrow \infty$  y se obtiene (3).

En el caso  $a < 0$  se integra sobre el semicírculo  $C_R^-$  en el semiplano  $y < 0$ . Si  $R > 1$ , entonces  $C_R^-$  contiene el polo  $z = -i$  en su interior. Ahora también  $ay > 0$ , luego  $|e^{iaz}| < 1$  y la integral sobre la parte curva  $\rightarrow 0$ . Puesto que  $a = -|a|$  y la dirección de la integración sobre el diámetro es opuesto a aquella en la cual integramos sobre  $\mathbf{R}$ , obtenemos otra vez (3).

Un cambio de variables nos da ahora la transformada de Fourier de  $P_y$ . En primer lugar con  $y > 0$  tenemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iax}}{x^2 + y^2} dx = \frac{1}{y} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ia y(x/y)}}{(\frac{x}{y})^2 + 1} d(\frac{x}{y}) = \frac{1}{y} \pi e^{-|a|y},$$

por consiguiente

$$(\mathcal{F}P_y)(\xi) = \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2\pi i \xi x}}{x^2 + y^2} dx = e^{-2\pi y|\xi|}.$$

Para calcular la transformada de Fourier de  $Q_y(x) = \frac{x}{y} P_y(x)$  utilizaremos la fórmula

$$\mathcal{F}(xf(x)) = -\frac{1}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial \xi} \hat{f}(\xi) \tag{4}$$

la cual se obtiene derivando bajo el signo integral cuando  $xf(x)$  es integrable, y cuya validez general resultará de las consideraciones de la sección 10. Se tiene

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(Q_y)(\xi) &= \frac{1}{y} \mathcal{F}(xP_y(x)) = \frac{1}{y} \left( -\frac{1}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial \xi} \right) (\mathcal{F}P_y)(\xi) = \\ &= \frac{1}{y} \left( -\frac{1}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial \xi} \right) e^{-2\pi y|\xi|} = -i \operatorname{sgn} \xi \cdot e^{-2\pi y|\xi|}. \end{aligned}$$

Pongamos  $G(\xi) = -i \operatorname{sgn} \xi \hat{f}(\xi)$  y sea  $g(x) = (\mathcal{F}G)(x)$ . Se tiene

$$(f * Q_y)(x) = (g * P_y)(x) \tag{5}$$

ya que las transformadas de Fourier de ambos lados son iguales a

$$-i \operatorname{sgn} \xi e^{-2\pi y|\xi|} \hat{f}(\xi).$$

Por el Lema 1,  $g * P_y$  converge hacia  $g \in L^2$  cuando  $y \rightarrow 0+$ . Del Lema 2 y de (5) resulta que

$$\frac{1}{\pi} \int_{|t-z| \geq y} f(t) \frac{dt}{x-t} \rightarrow g(x)$$

para casi todo  $x \in \mathbf{R}$  cuando  $y \rightarrow 0+$ , es decir  $\hat{f}$  existe y pertenece a  $L^2$ . Además

$$\|\hat{f}\|_2 = \|g\|_2 = \|G\|_2 = \|\hat{f}\|_2 = \|f\|_2,$$

con lo cual el Teorema queda completamente demostrado.

## 6.

La generalización de la transformada de Hilbert que **Marcel Riesz** me propuso en febrero de 1951 está definida por

$$(\mathcal{H}f)(x) = \frac{\Gamma((n+1)/2)}{\pi^{(n+1)/2}} \text{v.p.} \int_{\mathbf{R}^n} f(t) \frac{x-t}{|x-t|^{n+1}} dt. \tag{6}$$

La función  $g = \mathcal{H}f$  toma sus valores en  $\mathbf{R}^n$ , es decir es una función vectorial  $g(x) = (g_1(x), \dots, g_n(x))$ . **Riesz** conjeturó que si  $f \in L^2(\mathbf{R}^n) = L^2$ , entonces  $(\mathcal{H}f)(x)$  existe para casi todo  $x \in \mathbf{R}^n$ , que  $g \in L^2(\mathbf{R}^n) = L^2$ , donde sobre  $L^2$  se considera la norma  $\|g\|_2 = (\int_{\mathbf{R}^n} \sum_{j=1}^n |g_j(x)|^2 dx)^{1/2}$ , que  $\|g\|_2 = \|f\|_2$ , y finalmente que  $\mathcal{H}(\mathcal{H}f) = -f$ , donde para definir  $\mathcal{H}$  se considera el producto escalar  $g(x) \cdot (x-t) = \sum_{j=1}^n g_j(t)(x_j - t_j)$  bajo la integral (6). Fue sólo algunos días más tarde que nos pusimos de acuerdo sobre la manera de definir el valor principal: se debe integrar fuera de una bola  $|x| < \rho$  y tomar el límite cuando  $\rho \rightarrow 0$ .

El argumento heurístico con el cual **Riesz** llegó a su conjetura está basado sobre su generalización de la integral de Riemann-Liouville, llamado también potencial de orden  $\alpha$ , que para una función  $f$  apropiada sobre  $\mathbf{R}^n$  se define por

$$(\mathcal{R}_\alpha f)(x) = \frac{\Gamma(\frac{n-\alpha}{2})}{\pi^{n/2} 2^\alpha \Gamma(\frac{\alpha}{2})} \int_{\mathbf{R}^n} f(t) |x-t|^{\alpha-n} dt.$$

Si  $f$  decrece muy rápidamente al infinito, la integral tiene sentido para  $0 < \Re \alpha < n$ , y por prolongación analítica para los otros valores de  $\alpha \in \mathbf{C}$ , como lo veremos muy detalladamente más abajo ([73], [74, No.47, págs. 571-793]). Las propiedades esenciales del operador  $\mathcal{R}_\alpha$  son:  $\mathcal{R}_\alpha(\mathcal{R}_\beta f) = \mathcal{R}_{\alpha+\beta} f$ ,  $\mathcal{R}_0 f = f$  y  $\mathcal{R}_{-2} f = -\Delta f$ .

Si  $n \neq 1$ , entonces para el valor  $\alpha = 1$  obtenemos

$$\mathcal{R}_1 f(x) = \frac{\Gamma(\frac{n-1}{2})}{2\pi^{(n+1)/2}} \int_{\mathbf{R}^n} \frac{f(t)}{|x-t|^{n-1}} dt.$$

Esto es lo que **Pierre Humbert** [39] llama un *prepotencial*: Si consideramos el espacio  $(n+1)$ -dimensional y notamos por  $(x, y) = (x_1, \dots, x_n, y)$  los vectores de  $\mathbf{R}^{n+1}$ , entonces

$$\Phi(x, y) = \frac{\Gamma(\frac{n-1}{2})}{2\pi^{(n+1)/2}} \int_{\mathbf{R}^n} \frac{f(t)}{(|x-t|^2 + y^2)^{(n-1)/2}} dt$$

es el valor en  $(x, y)$  del potencial newtoniano de una masa o carga repartida sobre el hiperplano  $y = 0$  con

densidad  $f$ . El límite de  $\Phi(x, y)$  cuando  $y \rightarrow 0$  es  $\mathcal{R}_1 f(x)$ . Llamando ahora

$$\nabla_y = \frac{\partial}{\partial y} \quad \text{y} \quad \nabla_x = \left( \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right)$$

los gradientes parciales,  $-\nabla_x \mathcal{R}_1 f$  es la expresión (6) que desde el artículo [9, pág. 906] de **Calderón y Zygmund** se llama la *transformada de Riesz*. El cálculo formal  $\nabla_x \mathcal{R}_1 * \nabla_x \mathcal{R}_1 = \Delta \mathcal{R}_1 * \mathcal{R}_1 = \Delta \mathcal{R}_2 = -\mathcal{R}_0$  rinde verosímil la reciprocidad conjeturada por **Riesz**.

Es razonable suponer que

$$V(x, y) = -\nabla_x \Phi(x, y) \\ = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\pi^{(n+1)/2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(t) \frac{x-t}{(|x-t|^2 + y^2)^{(n+1)/2}} dt$$

tiende hacia  $\mathcal{H}f(x)$  cuando  $y \rightarrow 0+$ , es decir

$$Q_y(x) = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\pi^{(n+1)/2}} \frac{x}{(|x|^2 + y^2)^{(n+1)/2}}$$

es ahora nuestro *núcleo conjugado de Poisson*. La integral de Poisson

$$U(x, y) = -\nabla_y \Phi(x, y) \\ = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\pi^{(n+1)/2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(t) \frac{y}{(|x-t|^2 + y^2)^{(n+1)/2}} dt$$

resuelve el problema de Dirichlet para el semi-espacio  $y > 0$ , es decir  $\Delta U = 0$  y  $U(x, y) \rightarrow f(x)$  cuando  $y \rightarrow 0+$ . El *núcleo de Poisson* es pues

$$P_y(x) = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\pi^{(n+1)/2}} \frac{y}{(|x|^2 + y^2)^{(n+1)/2}}$$

Cuando  $n = 1$ , debemos considerar en vez del potencial newtoniano el potencial logarítmico en el plano, que corresponde al prepotencial

$$\mathcal{R}_1 f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \log|x-t| dt.$$

Entonces la expresión para la función conjugada es

$$\tilde{f}(x) = \frac{1}{\pi} \frac{d}{dx} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \log|x-t| dt$$

y es bajo esta forma que **Titchmarsh** la introduce al principio de su discusión ([96, 5.2, Theorem 90, pág. 121]).

7.

La demostración dada en [28] a las conjeturas de **Marcel Riesz** sigue paso por paso la demostración dada arriba en el caso  $n = 1$ . En primer lugar, hay

que averiguar si el coeficiente que figura en la definición de  $P_y(x)$  es correcto, es decir si es cierto que  $\int_{\mathbb{R}^n} P_y(x) dx = 1$ . Con el cambio de variables  $t = x/y$  e introduciendo coordenadas polares se tiene

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{y}{(|x|^2 + y^2)^{(n+1)/2}} dx = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{dt}{(1 + |t|^2)^{(n+1)/2}} \\ = \int_0^{\infty} \int_{S(r)} \frac{d\omega dr}{(1 + r^2)^{(n+1)/2}} \\ = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2})} \int_0^{\infty} \frac{r^{n-1} dr}{(1 + r^2)^{(n+1)/2}},$$

donde  $d\omega$  es el elemento de superficie sobre la esfera  $S(r)$  con radio  $r$ . Con el cambio de variable  $s = \frac{1}{r}$  se ve que la última expresión es igual a

$$\frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2})} \int_0^{\infty} \frac{ds}{(1 + s^2)^{(n+1)/2}}.$$

Todavía en París, calculé esta última integral separadamente para  $n$  par y para  $n$  impar, reduciendo el exponente integrando por partes. Una vez llegado a Bogotá en el verano de 1951, enseñé el curso de Análisis de tercer semestre en la Universidad de los Andes utilizando el texto de **Reddick y Miller**, de donde aprendí que la integral vale

$$\frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{\Gamma(\frac{n+1}{2})} \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Entonces nuestra integral original es igual a

$$\frac{\pi^{(n+1)/2}}{\Gamma(\frac{n+1}{2})}$$

que es efectivamente el recíproco del coeficiente en  $P_y(x)$ .

Los análogos  $n$ -dimensionales de los Lemas 1 y 2 se demuestran casi palabra por palabra como en el caso de una dimensión.

Las transformadas de Fourier de los núcleos de Poisson son

$$\mathcal{F}(P_y)(\xi) = e^{-2\pi y|\xi|} \quad \text{y} \quad \mathcal{F}(Q_y)(\xi) = -i \frac{\xi}{|\xi|} e^{-2\pi y|\xi|}.$$

La primera se encuentra en el libro de **S. Bochner** ([3, (21), pág. 189]). Pero como él utiliza la función de Bessel, di una nueva deducción empleando una fórmula debida a **Leray** concerniente a la transformada de Fourier de una función radial, que aprendí el año anterior en su curso sobre ecuaciones diferenciales parciales del tipo hiperbólico ([47, No. 13, págs. 29-30]). Para la transformada de  $Q_y$  utilicé también la fórmula de **Leray**, pero no directamente ya que  $Q_y$  no es radial. En el curso

de la computación me topé con una integral que me parecía imposible de calcular. Por pura casualidad encontré en el libro de **Magnus y Oberhettinger** [49] que la integral se puede expresar mediante la función modificada de Hankel, que después se elimina del resultado final. Fue sólo treinta años más tarde, al leer el libro de **George O. Okikiolu** ([59, Chap. 5.2, pág. 328]), que me dí cuenta que mis esfuerzos eran inútiles ya que  $\mathcal{F}(Q_y)$  se deduce en una manera muy sencilla de  $\mathcal{F}(P_y)$  utilizando el análogo  $n$ -dimensional de (4).

La demostración se termina como en el caso  $n = 1$ . Se define  $G(\xi) = -i \frac{\xi}{|\xi|} \hat{f}(\xi)$ , es decir,  $G = (G_1, \dots, G_n)$  es una función vectorial, con componentes  $G_j(\xi) = -i \frac{\xi_j}{|\xi|} \hat{f}(\xi)$ , que satisface a

$$\|G\|_2^2 = \int \sum_{j=1}^n \frac{|\xi_j|^2}{|\xi|^2} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi = \|\hat{f}\|_2^2 = \|f\|_2^2.$$

Sea  $g = (g_1, \dots, g_n) \in \mathbf{L}^2$  tal que  $\hat{g}_j = G_j(1 \leq j \leq n)$ . Entonces  $\|g\|_2 = \|G\|_2 = \|f\|_2$ . Por otro lado

$$f * Q_y = g * P_y$$

ya que la transformada de Fourier de cualquier lado es  $-i \frac{\xi}{|\xi|} e^{-2\pi y|\xi|} \hat{f}(\xi)$ . Para casi todo  $x \in \mathbf{R}^n$  el miembro a la izquierda tiende hacia  $\mathcal{H}f$ , el de la derecha hacia  $g \in \mathbf{L}^2$ . Luego  $\mathcal{H}f(x)$  existe,  $\mathcal{H}f$  pertenece a  $\mathbf{L}^2$  y su norma es igual a  $\|f\|_2$ . La reciprocidad sigue de que

$$-i \frac{\xi}{|\xi|} \cdot -i \frac{\xi}{|\xi|} = -1.$$

8.

En 1924 **Marcel Riesz** ([72]; [74, No.29, págs. 360–362; No. 33, págs. 410–436]) generalizó el resultado de **Plessner**. Ya **Plessner** demostró que si  $1 < p < \infty$  y  $f \in L^p$ , entonces  $\tilde{f}(x)$  existe en casi todo  $x \in \mathbf{R}$ . **Riesz** demuestra que  $\tilde{f}$  también pertenece a  $L^p$  y que  $\|\tilde{f}\|_p \leq M_p \|f\|_p$ , donde la constante  $M_p$  depende sólo de  $p$ . Dame **Mary Lucy Cartwright** [10] publicó la correspondencia entre **G. H. Hardy** y **Marcel Riesz** acerca del teorema. **Hardy** quiso ver la demostración ya que él y su alumno **Titchmarsh** habían ensayado demostrar el resultado sin éxito. **Marcel Riesz** le envió la demostración detallada con el cuento muy divertido de la manera en que la había encontrado: “el paso más importante es olvidar el teorema de Parseval”. Relata que en un examen dió a un alumno con poco talento el problema mucho más fácil que corresponde al caso  $p = 2$ .

Empezó a reflexionar como podría éste demostrarlo si no conocía el teorema de Parseval, y esto le dió la idea de la marcha a seguir. **Hardy** le contestó el 5 de enero de 1924 que la vida del alumno no será sin valor (pero nunca entenderá por qué). El gran matemático argentino **Alberto P. Calderón** dió una nueva demostración del teorema de **Marcel Riesz** [5] con la cual empezó su brillante carrera, como lo relata **Robert Fefferman** en la introducción de la tercera edición del libro de **Zygmund** [106].

En un trabajo histórico, dedicado a **Marcel Riesz** con la ocasión de su sexagésimo quinto cumpleaños, el susodicho **Calderón** y **Antoni Zygmund** [6] demostraron el análogo  $n$ -dimensional del teorema de **Riesz**. Yo me encontré con **Zygmund** en 1951 en París y él me habló del artículo que estaba por aparecer, de manera que no lo había visto cuando redacté mi nota [28]. Así no sabía que como motivación ellos también se refieren (en el caso  $n = 2$ ) al comportamiento de la función notada  $V(x, y)$  más arriba, cuando  $y \rightarrow 0+$ .

**Calderón** y **Zygmund** toman una función  $\Omega$  definida sobre la esfera unidad  $S_{n-1}$  de  $\mathbf{R}^n$  que satisface

$$\int_{S_{n-1}} \Omega(\omega) d\omega = 0,$$

condición que figura ya en obras anteriores([50,Chap II, Th.1, pág. 156]) y cuyo verdadero significado se entiende sólo a base de la teoría de las funciones holomorfas con valores distribuciones. Suponen además que  $\Omega$  satisface una cierta condición de tipo de Lipschitz y consideran para  $\varepsilon > 0$  las integrales

$$\tilde{f}_\varepsilon(x) = \int_{|x-t| \geq \varepsilon} \Omega\left(\frac{x-t}{|x-t|}\right) \frac{f(t)}{|x-t|^n} dt.$$

Demuestran el siguiente resultado:

Si  $1 < p < \infty$  y  $f \in L^p(\mathbf{R}^n)$ , entonces  $\tilde{f}_\varepsilon$  tiende, cuando  $\varepsilon \rightarrow 0+$ , en el sentido de la norma de  $L^p(\mathbf{R}^n)$  y en casi todo  $x \in \mathbf{R}^n$  hacia una función  $\tilde{f}$  que pertenece a  $L^p$ . Además,  $\|\tilde{f}\|_p \leq C \|f\|_p$ , donde  $C > 0$  depende sólo de  $n, p$  y  $\Omega$ .

El caso de la transformada de **Riesz** corresponde a  $\Omega(\omega) = \omega = (\omega_1, \dots, \omega_n) \in S_{n-1}$ . **Calderón** y **Zygmund** volvieron en otro artículo [8] a integrales singulares, en el cual presentan demostraciones simplificadas de algunos resultados usando la transformada de **Riesz**. Desde entonces el número de los trabajos dedicados a las integrales singulares ha llegado seguramente a más de mil. Gran parte de su teoría se puede estudiar en los

libros de **E. M. Stein** [88], [89], **Stein y Weiss** [92], **Christ** [11] y los apuntes de **Alejandro Ortiz F.** [60].

Puesto que conocía el teorema de Calderón-Zygmund, traté de demostrar en [28] que la reciprocidad  $\tilde{\mathcal{H}}(\mathcal{H}f) = -f$  vale también para  $f$  en  $L^p$ ,  $1 < p < \infty$ . **G. O. Thorin**, quien dió una famosa demostración de una generalización del teorema de convexidad de **Marcel Riesz** ([94], [95]), que según **J. E. Littlewood** ([48, pág. 20]) se basa sobre la idea más impudente en matemáticas, encontró un error en mi demostración. A pesar de no tener puesto académico (trabajaba para una compañía de seguros), **Thorin** mantenía contacto con la vida matemática, y **Riesz** le prestó mi manuscrito. Quisiera dar ahora una demostración correcta, basada sobre la sugestión de **Thorin** en su carta a **Riesz** del 2 de febrero de 1953.

Sea pues  $f \in L^p$  con  $1 < p < \infty$ . Consideremos una sucesión  $(f_\nu)$  de elementos de  $L^p \cap L^2$  que converge hacia  $f$  cuando  $\nu \rightarrow \infty$  en el sentido de  $L^p$  y en casi todo punto  $x \in \mathbf{R}^n$ . Pongamos  $g = \mathcal{H}f$ ,  $g_\nu = \mathcal{H}f_\nu$ . Entonces por el teorema de Calderón-Zygmund  $g$  pertenece a  $L^p(\mathbf{R}^n)$  y  $\|g\|_p \leq M_p \|f\|_p$ . Por otro lado  $g_\nu \in L^p \cap L^2$  y  $\|g - g_\nu\|_p \leq M_p \|f - f_\nu\|_p$ , así que  $g_\nu \rightarrow g$  en  $L^p(\mathbf{R}^n)$ . Por el resultado que vale para  $p = 2$  se tiene  $\mathcal{H}g_\nu = -f_\nu$ . Por el teorema de Calderón-Zygmund

$$\mathcal{H}g(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\pi^{(n+1)/2}} \int_{|x-t| \geq \varepsilon} g(t) \cdot (x-t) \frac{dt}{|x-t|^{n+1}}$$

existe, pertenece a  $L^p$  y se tiene

$$\|\mathcal{H}g + f_\nu\|_p = \|\mathcal{H}g - \mathcal{H}g_\nu\|_p \leq M_p \|g - g_\nu\|_p \rightarrow 0$$

cuando  $\nu \rightarrow \infty$ . Finalmente

$$\|\mathcal{H}g + f\|_p \leq \|\mathcal{H}g + f_\nu\|_p + \|f_\nu - f\|_p \rightarrow 0,$$

es decir  $\mathcal{H}g = -f$ .

9.

En nuestra conversación de febrero de 1951, **Marcel Riesz** insistió sobre el hecho de que la función

$$\begin{aligned} W(x, y) &= U(x, y) + V(x, y) \\ &= U(x, y)e_0 + V_1(x, y)e_1 + \dots + V_n(x, y)e_n \end{aligned}$$

de la sección 6 satisface a un sistema de ecuaciones diferenciales que generaliza el de Cauchy-Riemann y que fue introducido por el matemático suizo **R. Fueter** [17] y sus discípulos [79], [87] para definir funciones regulares en álgebras:

$$\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V_1}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial V_n}{\partial x_n} = 0,$$

$$\frac{\partial U}{\partial x_j} = \frac{\partial V_j}{\partial y}, \quad \frac{\partial V_j}{\partial x_k} = \frac{\partial V_k}{\partial x_j},$$

es decir  $\text{div}W = 0$ ,  $\text{rot}W = 0$ . **E. M. Stein** y **Guido Weiss** [90], [91], [101] construyeron una gran teoría de espacios  $H^p$  en el semi-espacio superior  $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}_+$  y en su borde  $\mathbf{R}^n$  que generaliza los espacios de Hardy introducidos por **Frigyes Riesz** [70], hermano de **Marcel**, y que tiene una enorme importancia en análisis armónico. Más tarde **Stein** escribió un artículo en colaboración con **Charles Fefferman** [15] quien demostró que el dual de  $H^1$  es el espacio  $BMO$  de funciones cuyo promedio tiene una oscilación acotada, introducido poco antes por **John y Nirenberg**, lo que le valdría la Medalla Fields a **Fefferman**. La teoría está expuesta de manera muy clara y detallada en los libros de **Stein** [88], [89] y de **Stein-Weiss** [92]. Con un desliz curioso de terminología, **Stein y Weiss** dan al sistema de Fueter el nombre "sistema de Riesz" ([92, pág. 234]) y **Ch. Fefferman** en su elogio de la obra de **E. M. Stein** ([16, pág. 10]) lo llama "ecuaciones de Stein-Weiss".

10.

En los años 1952 y 1956 el matemático francés **Laurent Schwartz** (con la letra  $\ell$ ) visitó Bogotá y enseñó varios cursos en los cuales se sirvió de la teoría de las distribuciones que él inventó [80], y por la cual recibió la *Medalla Fields* en 1950. Este contacto me hizo caer en cuenta que la mejor manera de tratar las transformadas de Riesz era considerarlas como la convolución de la distribución v.p.  $\frac{x}{|x|^{n+1}}$  con una función  $f$  (o, mejor, con una distribución).

Daré cuenta de los resultados obtenidos relativos a integrales singulares e hipersingulares empezando con un breve bosquejo de la teoría de las distribuciones (fuera del libro de **Schwartz** citado arriba, recomendando [26]). Notamos por  $\mathcal{D}$  (o por  $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$  si es necesario) el espacio vectorial de las funciones  $\varphi$  definidas sobre  $\mathbf{R}^n$ , con valores en  $\mathbf{R}$  o  $\mathbf{C}$ , que tienen derivadas parciales continuas de todos los órdenes y cuyo soporte

$$\text{Supp } \varphi = \overline{\{x \in \mathbf{R}^n : \varphi(x) \neq 0\}}$$

es compacto. Una *distribución* (de Schwartz)  $T$  sobre  $\mathbf{R}^n$  es una aplicación lineal  $\varphi \mapsto \langle T, \varphi \rangle$  de  $\mathcal{D}$  en  $\mathbf{R}$  o  $\mathbf{C}$  que satisface la condición siguiente: para todo conjunto compacto  $K \subset \mathbf{R}^n$  existe una constante  $M > 0$  y un número entero  $m \geq 0$  tal que

$$|\langle T, \varphi \rangle| \leq M \max_{|\alpha| \leq m} \max_x |\partial^\alpha \varphi(x)| \quad (7)$$

para todo  $\varphi \in \mathcal{D}$  con  $\text{Supp } \varphi \subset K$ . Aquí nos servimos de una notación hoy generalmente utilizada:  $\rho = (\rho_1, \dots, \rho_n) \in \mathbf{N}^n$  es un multi-índice, es decir una  $n$ -tupla de números enteros  $\rho_j \geq 0$ , y  $|\rho| = \rho_1 + \dots + \rho_n$  es su orden;  $\partial_j = \frac{\partial}{\partial x_j}$  y  $\partial^\rho = \partial_1^{\rho_1} \dots \partial_n^{\rho_n}$ .

La desigualdad (7) expresa el hecho de que  $T$  es una forma lineal *continua* sobre  $\mathcal{D}$  para una cierta topología localmente convexa. Una sucesión  $(\varphi_\nu)$  en  $\mathcal{D}$  converge a cero para esta topología si existe un conjunto compacto  $K \subset \mathbf{R}^n$  tal que  $\text{Supp } \varphi_\nu \subset K$  para todo  $\nu$ , y si para todo  $\rho \in \mathbf{N}^n$  la sucesión  $(\partial^\rho \varphi_\nu(x))$  converge uniformemente hacia cero. Desde luego el espacio  $\mathcal{D}' = \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$  de las distribuciones es el dual topológico de  $\mathcal{D}$ .

**Ejemplo 1.** Sea  $f$  una función localmente integrable sobre  $\mathbf{R}^n$ , es decir integrable sobre cada conjunto compacto  $K \subset \mathbf{R}^n$ . Entonces

$$\left| \int_{\mathbf{R}^n} f(x)\varphi(x)dx \right| \leq \int_K |f(x)|dx \cdot \max_x |\varphi(x)|$$

para todo  $\varphi \in \mathcal{D}$  con  $\text{Supp } \varphi \subset K$ . De esta manera  $f$  define una distribución que podemos notar  $T_f$  o simplemente  $f$  si no hay peligro de confusión.

**Ejemplo 2.** La distribución de Dirac  $\delta$  se define por  $\langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0)$ .

Inspirado por los casos cuando  $T = T_f$  para una función  $f$  apropiada, Laurent Schwartz introdujo las operaciones siguientes para distribuciones.

*Diferenciación.* Si  $T \in \mathcal{D}'$  y  $\rho \in \mathbf{N}^n$ , entonces

$$\langle \partial^\rho T, \varphi \rangle = (-1)^{|\rho|} \langle T, \partial^\rho \varphi \rangle$$

para todo  $\varphi \in \mathcal{D}$ . Así por ejemplo  $\langle \partial^\rho \delta, \varphi \rangle = (-1)^{|\rho|} \partial^\rho \varphi(0)$ .

*Multiplicación.* Se nota por  $\mathcal{E}$  o  $\mathcal{E}(\mathbf{R}^n)$  el espacio de todas las funciones definidas en  $\mathbf{R}^n$ , con valores en  $\mathbf{R}$  o  $\mathbf{C}$ , que tienen derivadas parciales continuas de todos los órdenes. Una sucesión  $(f_\nu)$  de elementos de  $\mathcal{E}$  tiende hacia  $f \in \mathcal{E}$  si para todo conjunto compacto  $K \subset \mathbf{R}^n$  y para todo  $\rho \in \mathbf{N}^n$  la sucesión  $(\partial^\rho f_\nu)$  converge hacia  $\partial^\rho f$  uniformemente sobre  $K$ .

Si  $T \in \mathcal{D}'$  y  $f \in \mathcal{E}$ , entonces la distribución  $fT$  se define por  $\langle fT, \varphi \rangle = \langle T, f\varphi \rangle$  para todo  $\varphi \in \mathcal{D}$ . Está claro que  $f\varphi \in \mathcal{D}$ , y la regla de Leibniz muestra que  $fT$  es en efecto una distribución.

Las últimas dos operaciones, y mayoría de las operaciones con distribuciones en general, se pueden definir

igualmente por continuidad aprovechando el hecho de que por ejemplo  $\mathcal{D}$  o  $\mathcal{E}$  es denso en  $\mathcal{D}'$ .

*Soporte.* Si  $\Omega$  es un subconjunto abierto de  $\mathbf{R}^n$ , se dice que  $T \in \mathcal{D}'$  es cero en  $\Omega$  si  $\langle T, \varphi \rangle = 0$  para todo  $\varphi \in \mathcal{D}$  con  $\text{Supp } \varphi \subset \Omega$ . El soporte  $\text{Supp } T$  de  $T$  es el complemento de la reunión de todos los conjuntos abiertos en los cuales  $T$  vale cero. Obviamente  $\text{Supp } T$  es un conjunto cerrado. Por ejemplo  $\text{Supp } \delta = \{0\}$ .

Las distribuciones con soporte compacto forman el espacio  $\mathcal{E}'$ , dual topológico de  $\mathcal{E}$ .

*Producto tensorial.* El producto tensorial de dos funciones  $f$  y  $g$  definidas en  $\mathbf{R}^n$  es la función definida en  $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n = \mathbf{R}^{2n}$  por  $(f \otimes g)(x, y) = f(x) \cdot g(y)$ . Desde luego el producto tensorial de las distribuciones  $S, T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$  es la distribución  $S \otimes T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^{2n})$  definida por

$$\langle S \otimes T, \varphi \otimes \psi \rangle = \langle S, \varphi \rangle \langle T, \psi \rangle$$

para  $\varphi, \psi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ . Para averiguar que la definición tiene sentido, es menester probar que las sumas finitas  $\sum_{j=1}^k \varphi_j(x)\psi_j(y)$  forman un conjunto denso en  $\mathcal{D}(\mathbf{R}^{2n})$ .

La definición de la *convolución*, que para nosotros tiene mayor importancia, es más delicada. Si  $f$  y  $g$  son dos funciones integrables sobre  $\mathbf{R}^n$ , entonces de la definición de su convolución (véase sección 4) resulta que

$$\begin{aligned} \langle f * g, \varphi \rangle &= \int_{\mathbf{R}^n} \int_{\mathbf{R}^n} f(x-y)g(y)\varphi(x)dydx = \\ &= \int_{\mathbf{R}^n} \int_{\mathbf{R}^n} f(x)g(y)\varphi(x+y)dx dy. \end{aligned}$$

Esto sugiere definir la convolución de  $S, T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$  por

$$\langle S * T, \varphi \rangle = \langle S \otimes T, \varphi^\Delta \rangle$$

para  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ , donde  $\varphi^\Delta$  es la función  $(x, y) \mapsto \varphi(x+y)$  sobre  $\mathbf{R}^{2n}$ . El problema con esta definición es que  $\varphi^\Delta$  tiene soporte compacto únicamente cuando  $\varphi$  es idénticamente cero.

Laurent Schwartz en su seminario sobre la tesis doctoral de Alexander Grothendieck ([81, Exposé 22]) propuso una definición muy general de la convolución de dos distribuciones.

Notemos por  $\mathcal{B}$  el espacio de las funciones  $\varphi$  cuyas derivadas de todos los órdenes existen, son continuas y acotadas. Una sucesión  $(\varphi_\nu)$  en  $\mathcal{B}$  tiende a cero en el sentido de la topología de  $\mathcal{B}$  si para todo  $\rho \in \mathbf{N}^n$  la sucesión  $(\partial^\rho \varphi_\nu(x))$  tiende uniformemente a cero sobre  $\mathbf{R}^n$  cuando  $\nu \rightarrow \infty$ .

Designamos por  $\mathcal{B}_0$  el subespacio cerrado de  $\mathcal{B}$  que consiste de las funciones  $\varphi$  tales que para todo  $\rho \in \mathbf{N}^n$  la derivada  $\partial^\rho \varphi$  tiende a cero al infinito, es decir dado  $\varepsilon > 0$  existe  $R > 0$  tal que  $|\partial^\rho \varphi(x)| \leq \varepsilon$  cuando  $|x| \geq R$ . Obviamente  $\mathcal{D} \subset \mathcal{B}_0$ , además  $\mathcal{D}$  es denso en  $\mathcal{B}_0$  y la inyección  $\mathcal{D} \rightarrow \mathcal{B}_0$  es continua, por lo tanto el dual topológico  $\mathcal{B}'_0$  de  $\mathcal{B}_0$  se puede considerar como un subespacio de  $\mathcal{D}'$ , es decir sus elementos son distribuciones.

Sea  $T \in \mathcal{B}'_0$  y  $\varphi \in \mathcal{B}$ . Si  $(\varphi_\nu)$  es una sucesión en  $\mathcal{B}_0$  tal que para todo  $\rho \in \mathbf{N}^n$  la sucesión  $(\partial^\rho \varphi_\nu)$  converge hacia  $\partial^\rho \varphi$ , uniformemente sobre cada subconjunto compacto de  $\mathbf{R}^n$ , entonces la sucesión  $\langle T, \varphi_\nu \rangle$  converge hacia un valor que por definición es igual a  $\langle T, \varphi \rangle$ .

En particular si notamos por  $\mathbf{1}$  la función que vale uno en todo punto  $x \in \mathbf{R}^n$ , entonces tiene sentido la expresión  $\langle T, \mathbf{1} \rangle$  que se llama la *integral* de  $T$  y se nota también  $\int T$ . Por consiguiente la distribuciones en  $\mathcal{B}'_0$  se dicen *integrables*. (Laurent Schwartz escribe  $\mathcal{D}'_L$ , en vez de  $\mathcal{B}'_0$ ).

Dos distribuciones  $S, T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$  son *convolubles* si para todo  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$  la distribución  $\varphi^\Delta S \otimes T$  es integrable. Su convolución se define entonces por

$$\langle S * T, \varphi \rangle = \langle \varphi^\Delta S \otimes T, \mathbf{1} \rangle = \int \varphi^\Delta S \otimes T.$$

Por ejemplo  $S$  y  $T$  son convolubles siempre cuando para todo conjunto compacto  $K \subset \mathbf{R}^n$  la faja  $K^\Delta = \{(x, y) \in \mathbf{R}^{2n} : x + y \in K\}$  interseca  $\text{Supp } S \times \text{Supp } T$  en un conjunto compacto.

Norbert Ortner observó que equivale decir que para todo  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$  la distribución  $\varphi^\Delta S \otimes T$  tiene soporte compacto. Puesto que  $\mathcal{E}' \subset \mathcal{B}'_0$ , la condición implica efectivamente aquella de la definición. En particular  $S$  y  $T$  son convolubles si uno de ellos tiene soporte compacto.

Durante el año escolar 1950/51 Claude Chevalley, el gran algebrista francés, enseñó un curso sobre las distribuciones de Laurent Schwartz en la Columbia University de Nueva York, en la cual introdujo otra definición de la convolución. Si  $f$  es una función definida sobre  $\mathbf{R}^n$ , entonces se suele escribir  $\tilde{f}(x) = f(-x)$  y  $(\tau_a f)(x) = f(x-a)$ . La *regularizada*  $T * \varphi$  de  $T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$  por  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$  es la función infinitamente diferenciable dada por

$$(T * \varphi)(x) = \langle T, \tau_x \tilde{\varphi} \rangle.$$

Chevalley dice que  $S$  y  $T$  son convolubles si para todo  $\varphi$  y  $\psi$  en  $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$  la función  $(S * \varphi) \cdot (\tilde{T} * \psi)$  es integrable sobre  $\mathbf{R}^n$ , donde  $\langle \tilde{T}, \varphi \rangle = \langle T, \tilde{\varphi} \rangle$ . Entonces  $S * T$  es

la distribución determinada por

$$\langle (S * T)\varphi, \psi \rangle = \int (S * \varphi) \cdot (\tilde{T} * \psi) dx.$$

Del curso de Chevalley se publicaron apuntes que yo nunca tuve la oportunidad de consultar, pero que llegaron al Japón, donde un grupo de matemáticos: Y. Hirata, M. Itano, H. Ogata, R. Shiraishi y K. Yoshinaga escribieron una serie de trabajos sobre convolución y multiplicación de distribuciones [21], [22], [85], [103]. En particular, introdujeron nuevas maneras de definir la convolución de distribuciones y demostraron que las definiciones son equivalentes. Hirata y Ogata anticiparon un resultado del que hablaré más abajo, a saber que  $\text{Pf}|x|^\alpha$  y  $\text{Pf}|x|^\beta$  son convolubles cuando  $\Re(\alpha + \beta) < -n$  ([22, pág. 148, ejemplo 2]).

Mientras tanto Laurent Schwartz publicó su gran trabajo sobre distribuciones con valores vectoriales [82], [83]. En la primera de las dos entregas introduce el concepto de distribución parcialmente integrable y a base de esto da otra definición de la convolución. El matemático ruso W. S. Wladimirow ha dado todavía otra definición de dicha operación. En un bellissimo trabajo [13], P. Dierolf y J. Voigt demuestran de manera sencilla que todas las definiciones son equivalentes.

A pesar de haber estudiado el seminario [81] de Schwartz en los años cincuenta, presenté en 1974 la definición general de  $S * T$  como si fuera nueva [35]. En esta nota demostré que las definiciones usuales de la convolución (por ejemplo cuando  $f \in L^p, g \in L^q, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \geq 1$ ) son casos particulares de la definición general. Bernhard Roeder en una nota [75] que complementa [35], demuestra de manera sencilla el hecho ya demostrado por Shiraishi [85] que las dos definiciones dadas por Laurent Schwartz son equivalentes. Los dos presentamos propiedades de la convolución, de los cuales quiero enumerar algunas:

Si las distribuciones  $S$  y  $T$  son convolubles, entonces  $T$  y  $S$  son convolubles y se tiene  $S * T = T * S$ .

$$\delta * T = T \text{ para todo } T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n).$$

**Definición.** Se dice que la tripla  $(R, S, T)$  de distribuciones en  $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$  es convoluble si  $\varphi^{3\Delta} R \otimes S \otimes T \in \mathcal{B}'_0(\mathbf{R}^{3n})$ , donde  $\varphi^{3\Delta}(x, y, z) = \varphi(x + y + z)$ , y entonces  $\langle R * S * T, \varphi \rangle = \langle \varphi^{3\Delta} R \otimes S \otimes T, \mathbf{1} \rangle$  para  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ .

Si la tripla  $(R, S, T)$  es convoluble, entonces son convolubles  $R$  y  $S$ ,  $S$  y  $T$ ,  $R * S$  y  $T$ ,  $R$  y  $S * T$ , y se tiene

$$R * S * T = R * (S * T) = (R * S) * T.$$

Esto es interesante porque el famoso ejemplo de **Laurent Schwartz**:

$$Y * (\partial\delta + 1) = 0, \quad (Y * \partial\delta) + 1 = \delta + 1 = 1,$$

donde  $Y$  es la función de Heaviside:  $Y(x) = 1$  para  $x \geq 0$ ,  $Y(x) = 0$  para  $x < 0$ , muestra que si la tripla no es convolvable, la convolución no es necesariamente asociativa.

Si  $S$  y  $T$  son convolvibles, entonces para todo  $\rho \in \mathbf{N}^n$  las distribuciones  $\partial^\rho S$  y  $T$  son convolvibles y se tiene  $\partial^\rho(S * T) = \partial^\rho S * T$ .

**Teorema de N. Ortner** [62], [63]. Sean  $S$  y  $T$  dos distribuciones sobre  $\mathbf{R}^n$  de las cuales **no** suponemos que son convolvibles. Sea  $j$  un índice ( $1 \leq j \leq n$ ) y suponemos que se cumplen las condiciones siguientes:

- (a)  $\partial_j S$  y  $T$  son convolvibles;
- (b)  $S$  y  $\partial_j T$  son convolvibles;
- (c)  $(\varphi * \dot{S}) \cdot T$  pertenece a la cerradura de  $\mathcal{E}'$  en  $\mathcal{D}'_{L^\infty}$  para todo  $\varphi \in \mathcal{D}$ .

Entonces  $\partial_j S * T = S * \partial_j T$ .

**Laurent Schwartz** descubrió una teoría muy satisfactoria de la *transformación de Fourier* definiendo  $\mathcal{F}$  no para todas las distribuciones sino sólo para aquellas que pertenecen a un cierto subespacio de  $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$ . Notemos  $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ , o sencillamente  $\mathcal{S}$  si no hay posibilidad de confusión, el espacio vectorial de todas las funciones  $\varphi$  definidas en  $\mathbf{R}^n$  que tienen derivadas parciales continuas de todos los órdenes y que son tales que

$$(1 + |x|^2)^m |\partial^\rho \varphi(x)|$$

es acotado para todo  $\rho \in \mathbf{N}^n$  y  $m \in \mathbf{N}$ . Una sucesión  $(\varphi_\nu)$  tiende a cero en  $\mathcal{S}$  si para todo  $\rho \in \mathbf{N}^n$  y  $m \in \mathbf{N}$  la sucesión  $((1 + |x|^2)^m \partial^\rho \varphi_\nu(x))$  tiende a cero uniformemente sobre  $\mathbf{R}^n$  cuando  $\nu \rightarrow \infty$ . Los elementos del dual topológico  $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^n) = \mathcal{S}'$  de  $\mathcal{S}$  se llaman *distribuciones temperadas*. Puesto que el espacio  $\mathcal{D}$  es denso en  $\mathcal{S}$  y la inclusión  $\mathcal{D} \rightarrow \mathcal{S}$  es continua, los elementos de  $\mathcal{S}'$  pueden efectivamente considerarse como distribuciones. Una distribución  $T$  es temperada si para todo  $\rho \in \mathbf{N}^n$  y  $m \in \mathbf{N}$  existe  $M > 0$  tal que

$$| \langle T, \varphi \rangle | \leq M \max_{x \in \mathbf{R}^n} (1 + |x|^2)^m |\partial^\rho \varphi(x)|$$

para todo  $\varphi \in \mathcal{D}$  (o todo  $\varphi \in \mathcal{S}$ ).

La *transformada de Fourier* de una función  $\varphi \in \mathcal{S}$  se define naturalmente por

$$\hat{\varphi}(\xi) = \mathcal{F}\varphi(\xi) = \int_{\mathbf{R}^n} \varphi(x) e^{-2\pi i \xi \cdot x} dx,$$

donde  $\xi \cdot x = \xi_1 x_1 + \dots + \xi_n x_n$  es el producto escalar. La función  $\mathcal{F}\varphi$  también pertenece a  $\mathcal{S}$  y de hecho la aplicación  $\varphi \mapsto \mathcal{F}\varphi$  es un isomorfismo lineal y continuo en ambas direcciones, cuyo inverso es la transformada de Fourier conjugada

$$\overline{\mathcal{F}}\psi(x) = \int_{\mathbf{R}^n} \psi(\xi) e^{2\pi i x \cdot \xi} d\xi,$$

es decir  $\overline{\mathcal{F}} \circ \mathcal{F} = \mathcal{F} \circ \overline{\mathcal{F}}$  es la aplicación identidad.

Si  $f \in L^1(\mathbf{R}^n)$ , entonces  $\mathcal{F}f \in L^\infty(\mathbf{R}^n)$  define una distribución tal que para todo  $\varphi \in \mathcal{S}$  se tiene

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{F}f, \varphi \rangle &= \int \int f(x) e^{-2\pi i \xi \cdot x} dx \varphi(\xi) d\xi \\ &= \int f(x) \int \varphi(\xi) e^{-2\pi i \xi \cdot x} d\xi dx \\ &= \langle f, \overline{\mathcal{F}}\varphi \rangle. \end{aligned}$$

Esta identidad es la motivación para definir la transformada de Fourier de  $T \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$  por transposición:

$$\langle \mathcal{F}T, \varphi \rangle = \langle T, \overline{\mathcal{F}}\varphi \rangle$$

para  $\varphi \in \mathcal{S}$ . La transformada conjugada se define por una relación semejante. De manera equivalente se puede definir  $\mathcal{F}T$  por continuidad ya que hay una inclusión continua  $\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}'$  y  $\mathcal{S}$  es denso en  $\mathcal{S}'$ . Esta definición de la transformada de Fourier abarca aquella dada para  $L^p$  ( $1 < p \leq 2$ ) en la sección 4.

$\mathcal{F}$  es un isomorfismo de  $\mathcal{S}'$  sobre sí mismo cuyo inverso es  $\overline{\mathcal{F}}$ . Cuando  $T$  tiene soporte compacto, su transformada de Fourier es la función infinitamente diferenciable  $\xi \mapsto \mathcal{F}T(\xi) = \langle T, \exp 2\pi i \xi \cdot \rangle$ , donde  $\exp 2\pi i \xi \cdot$  es la función  $x \mapsto \exp 2\pi i \xi \cdot x$  de  $\mathcal{E}(\mathbf{R}^n)$ .

Un ejemplo importante es  $\mathcal{F}(\delta) = 1$ . La transformada de Fourier intercambia la multiplicación por un monomio  $\xi^\rho = \xi_1^{\rho_1} \dots \xi_n^{\rho_n}$  y la diferenciación. Si ponemos  $D_j = \frac{1}{2\pi i} \partial_j$ , entonces

$$\mathcal{F}(D^\rho T)(\xi) = \xi^\rho \mathcal{F}T,$$

lo que muestra la validez general de la fórmula (4). Más generalmente, si  $P(D) = \sum_{|\rho| \leq m} a_\rho D^\rho$  es un operador diferencial parcial con coeficientes constantes y  $P(\xi) = \sum_{|\rho| \leq m} a_\rho \xi^\rho$  es el polinomio que le corresponde, entonces

$$\mathcal{F}(P(D)T) = P(\xi) \cdot \mathcal{F}(T).$$

Sea  $\mathcal{O}_M$  el espacio vectorial de las funciones  $f$  sobre  $\mathbf{R}^n$  cuyas derivadas de todos los órdenes son continuas y tales que para todo  $\rho \in \mathbf{N}^n$  existe un número  $m = m(\rho) \in \mathbf{Z}$  tal que

$$(1 + |x|^2)^m |\partial^\rho f(x)| \tag{8}$$

es acotada. Este es el espacio de multiplicadores de  $S'$ , es decir si  $f \in \mathcal{O}_M$  y  $T \in S'$ , entonces  $fT \in S'$  y  $\mathcal{O}_M$  es el subespacio más grande de  $\mathcal{E}$  que tiene esta propiedad.

Por otro lado, sea  $\mathcal{O}_C$  el espacio vectorial de las funciones  $f$  que tienen derivadas parciales continuas de todos los órdenes y para los cuales existe un  $m \in \mathbf{Z}$  tal que la función (8) es acotada para todo  $\rho \in \mathbf{N}^n$ . Obviamente  $\mathcal{O}_C \subset \mathcal{O}_M$ , y el ejemplo de la función  $e^{i|x|^2}$  muestra que la inclusión es estricta. Una sucesión  $(f_\nu)$  tiende a cero en  $\mathcal{O}_C$  si existe  $m \in \mathbf{Z}$  tal que para todo  $\rho \in \mathbf{N}^n$  la sucesión  $((1 + |x|^2)^m \partial^\rho f_\nu(x))$  tiende a 0 uniformemente sobre  $\mathbf{R}^n$  cuando  $\nu \rightarrow \infty$ .

**Hirata y Ogata** ([22, pág. 148]) introdujeron la definición siguiente: las distribuciones temperadas  $S$  y  $T$  son  $S'$ -convolutables si para todo  $\varphi \in S$  la distribución  $\varphi^\Delta S \otimes T$  es integrable. En este caso también se define  $S * T$  por la misma fórmula que antes:

$$\langle S * T, \varphi \rangle = \langle \varphi^\Delta (S \otimes T), 1 \rangle,$$

pero se puede afirmar además que  $S * T$  es temperada. **Dierolf y Voigt** [13] contestaron una pregunta de **Shiraishi** ([85, pág. 20]) exhibiendo un ejemplo bastante complicado de dos distribuciones temperadas convolutables  $S$  y  $T$  tales que  $S * T$  no es temperada, es decir  $S$  y  $T$  no son  $S'$ -convolutables. Un poco más tarde, **N. Ortner** y **P. Wagner** observaron que en  $\mathbf{R}^2$  las distribuciones

$$S = \arctan\left(\frac{\exp(2x^2)}{y^2}\right) \quad \text{y} \quad T = \delta_x \otimes 1_y$$

son convolutables pero  $S * T$  no es temperada.

Una distribución  $T \in S'$  es  $S'$ -convolutable con toda distribución  $S$  que pertenece al dual topológico  $\mathcal{O}'_C$  de  $\mathcal{O}_C$ . Inversamente  $\mathcal{O}'_C$  es el subespacio de  $\mathcal{D}'$  más grande cuyos elementos son  $S'$ -convolutables con toda distribución temperada.

La transformación de Fourier es un isomorfismo de  $\mathcal{O}'_C$  sobre  $\mathcal{O}_M$ . Para  $S \in \mathcal{O}'_C$  y  $T \in S'$  se tiene la fórmula de canje de **Laurent Schwartz**:

$$\mathcal{F}(S * T) = \mathcal{F}S \cdot \mathcal{F}T. \quad (9)$$

Para generalizar esta fórmula, **Hirata y Ogata** ([22, pág. 150]) introdujeron una multiplicación para ciertas distribuciones. Una sucesión  $(\psi_\nu)$  en  $\mathcal{D}$  es una *regularización* si  $\psi_\nu \geq 0$ ,  $\int \psi_\nu(x) dx = 1$  y  $\text{Supp } \psi_\nu \rightarrow \{0\}$  cuando  $\nu \rightarrow \infty$ . Si para dos regularizaciones  $(\psi_\nu)$ ,  $(\chi_\nu)$  las sucesiones  $((\psi_\nu * S) \cdot T)$  y  $(S \cdot (\chi_\nu * T))$  convergen en  $\mathcal{D}'$  hacia el mismo límite  $P$  cuando  $\nu \rightarrow \infty$ , entonces se dice que el producto de  $S, T \in \mathcal{D}'$  existe y se pone  $S \cdot T = P$ . **Shiraishi e Itano** han demostrado que  $S \cdot T$  existe si y sólo si para cada  $\varphi \in \mathcal{D}$  existe una vecindad  $V$  de 0 en

$\mathbf{R}^n$  tal que  $\varphi S * T$  es una función acotada en  $V$ , continua en el punto 0. En este caso  $\langle S \cdot T, \varphi \rangle = (\varphi S * T)(0)$ . Vale entonces la siguiente generalización del teorema de canje: Si  $S$  y  $T$  son  $S'$ -convolutables,  $\mathcal{F}S \cdot \mathcal{F}T$  existe y se tiene (9) ([22, pág. 151]).

Sea  $p$  un número real,  $1 < p < \infty$ . **Schwartz** nota  $\mathcal{D}_{L^p}$  el espacio vectorial de las funciones  $f$  definidas sobre  $\mathbf{R}^n$  que tienen derivadas continuas de todos los órdenes pertenecientes a  $L^p(\mathbf{R}^n)$ . Una sucesión  $(f_\nu)$  de elementos de  $\mathcal{D}_{L^p}$  tiende a cero en  $\mathcal{D}_{L^p}$  si para todo  $\rho \in \mathbf{N}^n$  la sucesión de los  $\|\partial^\rho f_\nu\|_p = (\int_{\mathbf{R}^n} |\partial^\rho f_\nu(x)|^p dx)^{1/p}$  tiende a 0 cuando  $\nu \rightarrow \infty$ .

Las funciones que pertenecen a  $\mathcal{D}_{L^p}$  son acotadas, de donde sigue que  $p \leq q$  implica  $\mathcal{D}_{L^p} \subset \mathcal{D}_{L^q}$ .

El dual topológico de  $\mathcal{D}_{L^p}$  se nota  $\mathcal{D}'_{L^p}$  cuando  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ , es decir  $(\mathcal{D}_{L^p})' = \mathcal{D}'_{L^p}$  donde  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . (Nota: es por eso que no me gusta designar el espacio  $B'_0$  de las distribuciones integrables por  $\mathcal{D}'_{L^1}$  como lo hace **Schwartz**: no es el dual de  $B = \mathcal{D}_{L^\infty}$  sino de  $B_0$ .) Una aplicación lineal  $T : \mathcal{D}_{L^q} \rightarrow \mathbf{R}$  o  $\mathbf{C}$  pertenece a  $\mathcal{D}'_{L^p}$  si existen una constante  $C > 0$  y un número entero  $m > 0$  tales que  $|\langle T, \varphi \rangle| \leq C \sum_{|\rho| \leq m} \|\partial^\rho \varphi\|_q$ . Los elementos de  $\mathcal{D}'_{L^p}$  son distribuciones y se tiene  $\mathcal{D} \subset \mathcal{D}_{L^p} \subset L^p \subset \mathcal{D}'_{L^p} \subset \mathcal{D}'$ , las inclusiones son continuas y  $\mathcal{D}$  es denso en cada uno de los espacios. Si  $p \leq q$ , entonces  $q' \leq p'$ , es decir  $\mathcal{D}_{L^{q'}} \subset \mathcal{D}_{L^{p'}}$  y por lo tanto  $\mathcal{D}'_{L^p} \subset \mathcal{D}'_{L^{q'}}$ .

Una distribución  $T \in \mathcal{D}'$  pertenece a  $\mathcal{D}'_{L^p}$  si y sólo si se cumple cualquiera de las dos condiciones:

- Para todo  $\varphi \in \mathcal{D}$  la distribución  $\varphi * T$  pertenece a  $L^p$ ;
- $T$  es una suma finita de derivadas (en el sentido de distribuciones) de funciones que pertenecen a  $L^p$ .

Si  $f \in \mathcal{D}_{L^p}$  y  $T \in \mathcal{D}'_{L^q}$ , entonces  $f \cdot T$  pertenece a  $\mathcal{D}'_{L^r}$ , donde  $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$  (véase la sección 4), y por lo tanto a todos los espacios  $\mathcal{D}'_{L^s}$  con  $s \geq r$ .

Ya que obviamente  $S \subset \mathcal{D}_{L^p}$  para todo  $p$  y la inclusión es continua, se tiene  $\mathcal{D}'_{L^p} \subset S'$  y las dos propiedades siguientes tienen sentido.

Si  $S \in \mathcal{D}'_{L^p}$  y  $T \in \mathcal{D}'_{L^q}$  con  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \geq 1$ , entonces  $S$  y  $T$  son  $S'$ -convolutables y  $S * T \in \mathcal{D}'_{L^r}$  para  $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1$ .

Si  $S \in \mathcal{D}'_{L^p}$  y  $T \in \mathcal{D}'_{L^q}$  con  $1 \leq p \leq 2$ ,  $1 \leq q \leq 2$ , entonces  $\mathcal{F}(S * T)$  es una función igual a  $\mathcal{F}(S) \cdot \mathcal{F}(T)$ .

11.

En 1954 llegué finalmente a estudiar la obra de **Georges Giraud**, no sólo a través de sus propias publicaciones, sino sobre todo en la presentación de **S. G. Mihlin** [50] sobre la cual **Zygmund** me llamó la atención.

**Giraud** considera una función continua  $\Omega(x, \omega)$  definida sobre  $\mathbf{R}^n \times S_{n-1}$  tal que

$$\int_{S_{n-1}} \Omega(x, \omega) d\omega = 0$$

para todo  $x \in \mathbf{R}^n$  ([50, pág. 156]) y define el operador "con integral principal"

$$(\mathcal{K}f)(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{|t-x| \geq \epsilon} \Omega\left(x, \frac{x-t}{|x-t|}\right) \frac{f(t)}{|x-t|^n} dt.$$

Desarrollando  $\Omega$  en una serie de polinomios armónicos  $\Omega(x, \omega) = \sum_k a_k Y_k(\omega)$ , donde  $k$  es el grado de  $Y_k$ , se tiene formalmente

$$(\mathcal{K}f)(x) = \sum_k a_k(x) \int \frac{Y_k(x-t)}{|x-t|^{n+k}} f(t) dt.$$

Sin dar alguna indicación, **Giraud** [18], [19] define el símbolo de  $\mathcal{K}$  por

$$\sigma(\mathcal{K})(x, \xi) = \sum_k a_k(x) \frac{i^k \pi^{n/2} \Gamma(\frac{k}{2})}{\Gamma(\frac{n+k}{2})} Y_k\left(\frac{\xi}{|\xi|}\right).$$

R. S. Seeley ([84, pág. 311]) dice lo siguiente: "la naturaleza misteriosa del símbolo no fue eliminada hasta dieciseis años más tarde por la obra de **Calderón** y **Zygmund** [6], [7], [9], de **Horváth** [28], [29], [31] y de **Kohn** [42]. En efecto por el teorema de canje  $S * T = \mathcal{F}(\mathcal{F}S \cdot \mathcal{F}T)$  podemos escribir

$$(\mathcal{K}f)(x) = \sum_k a_k(x) \int \mathcal{F}\left(\frac{Y_k(x)}{|x|^{n+k}}\right) \hat{f}(\xi) e^{2\pi i x \cdot \xi} d\xi,$$

y en [29] demostré que

$$\mathcal{F}\left(\frac{Y_k(x)}{|x|^{n+k}}\right) = \frac{i^k \pi^{n/2} \Gamma(\frac{k}{2})}{\Gamma(\frac{n+k}{2})} Y_k\left(\frac{\xi}{|\xi|}\right). \tag{10}$$

Substituyendo en la integral y escribiendo  $a$  en vez de  $\sigma(\mathcal{K})$  obtenemos

$$(\mathcal{K}f)(x) = \int a(x, \xi) \hat{f}(\xi) e^{2\pi i x \cdot \xi} d\xi.$$

La expresión a la derecha es un operador *pseudodiferencial* con símbolo  $a$ . Estos operadores fueron introducidos

alrededor de 1965 por **A. Unterberger** y **J. Bokobza** [98], por **J. J. Kohn** y **L. Nirenberg** [43] y por **Lars Hörmander** [23], [24], [25], y tienen una enorme importancia en la teoría de las ecuaciones diferenciales parciales lineales. Sus propiedades se pueden estudiar por ejemplo en las monografías de **Eskin** [14], **Hörmander** [27], **Kumano-Go** [44], **Simanca** [86], **Taylor** [93], **Treves** [97] y **Zaidman** [104], [105].

Consideraré sólo el caso cuando  $\Omega$  no depende de  $x$ . La distribución  $K = \text{v.p.} \frac{\Omega(\omega)}{|x|^n}$  se define por

$$\langle K, \varphi \rangle = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{|x| \geq \epsilon} \frac{\Omega(\omega)}{|x|^n} \varphi(x) dx,$$

donde  $\omega = x/|x|$  y  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ . Poniendo  $\psi(t) = \varphi(tx)$ , de  $\psi(1) - \psi(0) = \int_0^1 \psi'(t) dt$  resulta que

$$\varphi(x) = \varphi(0) + \sum_{k=1}^n \int_0^1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}(tx) x_k dt.$$

Sea  $\varphi_k(x) = \int_0^1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}(tx) dt$  y  $\varphi(x) = 0$  para  $|x| > R$ . Puesto que

$$\int_{|x| \geq \epsilon} \frac{\Omega(\omega)}{|x|^n} \varphi(0) dx = 0,$$

utilizando coordenadas polares  $x = r\omega$  podemos escribir:

$$\int_{|x| \geq \epsilon} \frac{\Omega(\omega)}{|x|^n} \varphi(x) dx = \int_{\epsilon}^R \int_{S_{n-1}} \Omega(\omega) \sum_{k=1}^n \varphi_k(r\omega) \omega_k d\omega dr,$$

de donde se ve que el límite existe cuando  $\epsilon \rightarrow 0^+$  y que

$$|\langle K, \varphi \rangle| \leq R \int_{S_{n-1}} |\Omega(\omega)| d\omega \cdot \sum_{k=1}^n \max_x \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}(x) \right|,$$

es decir  $K$  es una distribución.

Supongamos adicionalmente que  $\Omega$  pertenece a un espacio  $L^s(S_{n-1})$  para un índice  $s$  con  $1 < s < \infty$ . En este caso  $K$  pertenece a todos los espacios  $\mathcal{D}'_{L^p}$  con  $1 < p < \infty$ , y en particular a  $\mathcal{S}'$ , desde luego es lícito hablar de  $\mathcal{F}(K)$ . Del teorema de Calderón- Zygmund resulta que  $T \mapsto K * T$  es una aplicación continua de  $\mathcal{D}'_{L^p}$  en  $\mathcal{D}'_{L^p}$ . En la página 55 de [29] me refiero al teorema de la gráfica cerrada relativa a espacios metrizables. Ahora bien, los espacios  $\mathcal{D}'_{L^p}$  no son metrizables, pero el teorema vale igualmente para límites inductivos de espacios metrizables.

Para obtener (10) introduje un álgebra conmutativa  $\mathcal{Q}$  sobre el cuerpo  $\mathbf{R}$  de los números reales engendrada

por  $n$  elementos  $e_1, \dots, e_n$  que satisfacen a

$$e_1^2 + e_2^2 + \dots + e_n^2 = 0.$$

$Q$  es un álgebra graduada, es decir la suma directa de subespacios  $Q_j$  engendrados por los productos

$$e^K = e_1^{k_1} e_2^{k_2} \dots e_n^{k_n}$$

donde  $|K| = k_1 + \dots + k_n = j$  y  $k_n$  es igual a cero o a uno. Si ponemos

$$x^j = (x_1 e_1 + \dots + x_n e_n)^j = \sum_{|K|=j} Y_K(x) e^K,$$

entonces los polinomios  $Y_K(x)$  son armónicos ya que

$$\Delta x^j = j(j-1)x^{j-2}(e_1^2 + \dots + e_n^2) = 0.$$

Además los  $Y_K$  son linealmente independientes por la manera de haber escogido la base de  $Q_j$  y su número es exactamente el número de un sistema maximal linealmente independiente de polinomios armónicos de grado  $j$ .

Basta pues calcular la transformada de Fourier de  $x^k |x|^{-n-k}$ . **Laurent Schwartz** encontró que  $\mathcal{F}(|x|^{-n-k})$  es igual a

$$\pi^{(n/2)+k} \frac{\Gamma(-k/2)}{\Gamma((n+k)/2)} |\xi|^k$$

si  $k$  es impar ([80, VII.7.13, pág. 257]) y a

$$\frac{2(-1)^{k/2} \pi^{(n/2)+k}}{\Gamma(\frac{n+k}{2}) \Gamma(\frac{k+2}{2})} |\xi|^k \left[ \log \frac{1}{\pi|\xi|} + C(n, k) \right]$$

si  $k$  es par ([80, VII.7.14, pág. 258]), donde  $C(n, k)$  es una constante. **Schwartz** dice que para  $k > 0$  hay que meter Pf delante de la integral que define  $|x|^{-n-k}$ ; explicaré más abajo el significado de esta notación.

De la fórmula

$$\mathcal{F}(x^j T) = \frac{(-1)^j}{(2\pi i)^j} \mathbf{D}^j \mathcal{F}(T)$$

con

$$\mathbf{D} = e_1 \frac{\partial}{\partial \xi_1} + e_2 \frac{\partial}{\partial \xi_2} + \dots + e_n \frac{\partial}{\partial \xi_n}$$

resulta (10) considerando componentes.

Con el mismo método **S. G. Samko** ([77],[78, pág. 111]) demostró que

$$\mathcal{F}\left(\frac{Y_k(x)}{|x|^{n+k-\alpha}}\right) = \frac{i^{k/2} 2^\alpha \pi^{n/2} \Gamma\left(\frac{k+\alpha}{2}\right) Y_k(\xi)}{\Gamma\left(\frac{n+k-\alpha}{2}\right) |\xi|^{k+\alpha}}$$

cuando  $\alpha \neq -k - 2l$  y  $\alpha \neq n + k + 2l$  ( $l \in \mathbf{N}$ ), y encontró también las fórmulas en los casos excepcionales. Ya

en 1951 **S. Bochner** [4] demostró estas fórmulas utilizando relaciones modulares sin conexión con integrales singulares.

Quiero aprovechar de esta oportunidad para señalar tres errores de imprenta en [29]:

- pág. 57, línea 4: tachar la palabra "orthogonal";
- pág. 58, línea 5: tachar "(13)ε meter al final: "which satisfy (13)";
- pág. 60, línea 7: reemplazar "σμ" por "σ<sub>μ</sub>".

## 12.

El método que nos sirvió para encontrar un sistema total de polinomios armónicos en  $n$  variables sirve también para construir un sistema total de soluciones polinomiales de una ecuación diferencial parcial lineal homogénea con coeficientes constantes.

Sea  $m$  un número entero  $\geq 1$  y

$$P(\partial) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha \partial^\alpha.$$

Para simplificar supondremos que  $a_M = 1$ , donde  $M = (m, 0, \dots, 0)$ . Por consiguiente  $\alpha_1 < m$  para todo  $\alpha \neq M$ . Sea como antes  $Q = \cup Q_j$  el álgebra sobre  $\mathbf{R}$  engendada por los elementos  $e_1, \dots, e_n$  que satisfacen a  $\sum_{|\alpha|=m} a_\alpha e^\alpha = 0$ . Ponemos  $Q_0 = \mathbf{R}$  y para  $j \geq 1$  el subespacio vectorial  $Q_j$  engendrado por los  $e^j$  con  $|J| = j_1 + \dots + j_n = j$  tiene por base los productos

$$e^J = e_1^{j_1} e_2^{j_2} \dots e_n^{j_n}$$

con  $|J| = j$  y  $0 \leq j_1 < m$ . Estos vectores son obviamente linealmente independientes y en virtud de la relación

$$e_1^m = - \sum_{\alpha_1 < m} a_\alpha e^\alpha$$

cada producto  $e^J$  con  $j_1 \geq m$  se puede expresar como combinación lineal de tales productos con  $\alpha_1 < m$ . Para todo  $j \in \mathbf{N}$  se tiene

$$P(\partial)(x_1 e_1 + \dots + x_n e_n)^j = j(j-1) \dots (j-m+1) (x_1 e_1 + \dots + x_n e_n)^{j-m} \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha e^\alpha = 0.$$

Entonces poniendo

$$(x_1 e_1 + \dots + x_n e_n)^j = \sum_{j_1 < m} Y_J(x) e^J,$$

los polinomios  $Y_J(x)$  de grado  $|J| = j$  satisfacen a  $P(\partial)Y_J(x) = 0$ .

Los polinomios  $Y_j(x)$ ,  $|J| = j$ , forman un sistema maximal linealmente independiente de soluciones polinomias de grado  $j$  de la ecuación  $P(\partial)Y = 0$ .

Daré la demostración detallada de este resultado ya que aquella que se encuentra en [30] es demasiado sucinta y además contiene un error descubierto por **Walter Strodt** (véase [32, pág. 45, nota]).

El número de todos los monomios  $e_1^{\alpha_1} \dots e_n^{\alpha_n}$  con  $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n = j$  es

$$\binom{n+j-1}{j}. \tag{11}$$

Efectivamente, si ponemos

$$j_1 = \alpha_1 \leq j_2 = \alpha_1 + \alpha_2 \leq \dots \leq j_n = \alpha_1 + \dots + \alpha_n = j,$$

entonces  $(j_1, \dots, j_{n-1})$  es una combinación con repeticiones tomando  $n - 1$  elementos entre los  $j + 1$  elementos  $0, 1, \dots, j$ . Si ahora consideramos  $(j_1, j_2 + 1, \dots, j_{n-1} + n - 2)$ , vemos que el número de estas combinaciones con repeticiones es el mismo que el número de combinaciones sin repeticiones de  $n - 1$  elementos escogidos entre los  $j + n - 1$  elementos  $(0, 1, \dots, j + n - 2)$ , o sea

$$\binom{n+j-1}{n-1}$$

es decir (11).

Para averiguar la dimensión de  $Q_j$  se necesita calcular el número de soluciones de

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = j \tag{12}$$

con  $\alpha_1 < m$ . Ahora bien, si  $j < m$ , la ecuación (12) no tiene ninguna solución con  $j_1 \geq m$ . Si  $j \geq m$ , entonces (12) tiene tantas soluciones con  $\alpha_1 \geq m$  como

$$\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_n = j - m$$

tiene soluciones en total, es decir

$$\binom{n+j-m-1}{j-m} \tag{13}$$

Desde luego la dimension de  $Q_j$  es la diferencia entre (11) y (13).

Por la primera computación de arriba, el número de los términos en el polinomio general homogéneo en  $n$  variables

$$Y_j(x) = \sum_{|J|=j} \beta_J x^J$$

es igual a (11). Consideremos los coeficientes indeterminados como un punto  $(\beta_J)$  del espacio vectorial sobre  $\mathbf{R}$

de dimensión (11). La relación

$$P(\partial)Y_j(x) = \sum_{|K|=j-m} \gamma_K x^K = 0$$

da relaciones lineales  $\gamma_K = 0$  entre los coeficientes cuyo número es igual a (13). Miremos cuáles son los  $\beta_J$  que entran en un término

$$\gamma_K x^K = \gamma_{k_1, \dots, k_n} x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n}$$

dado.

En primer lugar, el término  $\partial_1^m$  de  $P(\partial)$  produce un término que proviene de

$$\beta_{k_1+m, k_2, \dots, k_n} x_1^{k_1+m} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n}$$

en  $Y_j(x)$ . Después los términos de la forma

$$\beta_{k_1+\alpha_1, k_2+\alpha_2, \dots, k_n+\alpha_n} x_1^{k_1+\alpha_1} x_2^{k_2+\alpha_2} \dots x_n^{k_n+\alpha_n}$$

contribuirán el término

$$a_{\alpha_1 \dots \alpha_n} \beta_{k_1+\alpha_1, \dots, k_n+\alpha_n} \partial_1^{\alpha_1} \dots \partial_n^{\alpha_n} x_1^{k_1+\alpha_1} \dots x_n^{k_n+\alpha_n}$$

a la combinación lineal  $\gamma_K$  de los  $\beta_J$ . En  $\gamma_K$  un solo  $\beta_J$  tiene el primer índice  $j_1 = k_1 + m$ . Para los otros  $k_1 + \alpha_1 < k_1 + m$  ya que  $\alpha_1 < m$ . Llamemos este  $\beta_J$  el término conductor. Los términos conductores de dos relaciones  $\gamma_K = 0$  y  $\gamma_L = 0$  son distintos. En efecto, si

$$\beta_{k_1+m, k_2, \dots, k_n} = \beta_{l_1+m, l_2, \dots, l_n},$$

entonces  $(k_1 + m, k_2, \dots, k_n) = (l_1 + m, l_2, \dots, l_n)$ , es decir  $K = L$ .

Desde luego, las relaciones lineales  $\gamma_K = 0$  son linealmente independientes, en consecuencia el número que da las soluciones linealmente independientes de  $P(\partial)Y_j = 0$  con  $|J| = j$  es exactamente  $\dim Q_j$ .

Un poco antes, **E. P. Miles, jr.** y **E. Williams** ([53], [54]) encontraron el mismo sistema básico de polinomios armónicos que yo, sin servirse del álgebra  $Q$ . **E. P. Miles jr.** encontró soluciones polinomiales de otros operadores diferenciales, aún con coeficientes variables, y aplicaciones de estas soluciones, solo [51], [52], en colaboración con **E. Williams** [55], [56], [57], y con **Eutiquio C. Young** [58]. En los años cincuenta varios otros autores presentaron sistemas de soluciones polinomias de ecuaciones diferenciales: **Joaquín B. Díaz** [12], **E. Lammel** [45], [46], **M.H. Protter** [68], [69] y **M. C. Wicht** [102]. En el caso  $n = 3$  ya en 1929 **Ketchum** [41] obtuvo  $2j + 1$  soluciones polinomiales linealmente independientes de grado  $j$  de la ecuación  $\Delta Y = 0$  considerando potencias  $w^j$  de una hipervariable  $w$ .

13.

Formalmente, el potencial  $\mathcal{R}_\alpha f$  de orden  $\alpha$  de **Marcel Riesz** es –dejando de lado por el momento el factor numérico– la convolución  $|x|^{\alpha-n} * f$ . Es entonces natural considerar más generalmente la convolución de  $|x|^{\alpha-n}$  con una distribución. Para  $\alpha > 0$  la función  $x \mapsto |x|^{\alpha-n}$  es localmente integrable, pero tenemos interés en definir la distribución  $|x|^{\alpha-n}$  también para  $\alpha \leq 0$ .

**Marcel Riesz** definió su operador  $\mathcal{R}_\alpha$  para aquellos valores de  $\alpha$  para los cuales la integral no converge, por prolongación analítica. De nuestro punto de vista es preferible considerar  $|x|^{\alpha-n}$  como función holomorfa de la variable  $\alpha$  cuyos valores están en  $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$  y considerar su prolongación analítica. Por tal motivo tengo que resumir algunos hechos de la teoría de las funciones holomorfas con valores distribuciones. Trataré de hacerlo de la manera más breve posible porque ya publiqué en castellano un artículo muy detallado sobre el asunto en la *Revista Colombiana de Matemáticas* [34]. Un resumen del artículo salió anteriormente [33].

Notemos por  $E$  uno cualquiera de los espacios de “funciones de prueba”  $\mathcal{D}, \mathcal{S}, \mathcal{E}$ , y por  $E'$  su dual topológico, es decir el espacio correspondiente de distribuciones  $\mathcal{D}', \mathcal{S}'$  o  $\mathcal{E}'$ . Sea  $\Lambda$  un subconjunto abierto y conexo del plano complejo  $\mathbf{C}$ . Una función  $\lambda \mapsto T_\lambda$  definida en  $\Lambda$  y con valores  $T_\lambda \in E'$  es *holomorfa* en  $\Lambda$  si para todo  $\lambda_0 \in \Lambda$  el límite

$$\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} \frac{T_\lambda - T_{\lambda_0}}{\lambda - \lambda_0}$$

existe; en tal caso el límite se nota  $\frac{dT}{d\lambda}(\lambda_0)$  o  $\left. \frac{dT_\lambda}{d\lambda} \right|_{\lambda=\lambda_0}$ .

Las propiedades de las funciones holomorfas con valores distribuciones se deducen del *principio fuerte-débil* de Grothendieck ([34,(1.1.4)]): La función  $\lambda \mapsto T_\lambda \in E'$  es holomorfa en  $\Lambda$  si y sólo si para todo  $\varphi \in E$  la función  $\lambda \mapsto \langle T_\lambda, \varphi \rangle \in \mathbf{C}$  es holomorfa en  $\Lambda$ .

Una función holomorfa es *analítica* en el sentido que tiene desarrollo en serie de potencias. Más precisamente, sea  $\lambda \mapsto T_\lambda \in E'$  una función holomorfa en  $\Lambda$ . Para  $\lambda_0 \in \Lambda$  sea  $\rho$  el radio de un disco abierto con centro  $\lambda_0$  contenido en  $\Lambda$ . Para cualquier  $\sigma < \rho$  la serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{d^k T_\lambda}{d\lambda^k}(\lambda_0)(\lambda - \lambda_0)^k$$

converge en  $E'$  hacia  $T_\lambda$ , uniformemente para  $|\lambda - \lambda_0| \leq \sigma$ .

Sea ahora  $\Lambda_1$  otro subconjunto abierto y conexo de  $\mathbf{C}$  tal que  $\Lambda_1 \supset \Lambda$ , y sea  $\lambda \mapsto T_\lambda \in E'$  una función holomorfa definida en  $\Lambda$ . Para  $\lambda \in \Lambda$  y  $\varphi \in E$  pongamos  $g(\lambda; \varphi) = \langle T_\lambda, \varphi \rangle$ . Si para todo  $\varphi \in E$  existe una función holomorfa  $\lambda \mapsto h(\lambda; \varphi)$  en  $\Lambda_1$  que coincide con  $g(\lambda; \varphi)$  en  $\Lambda$  (es decir, si  $h(\cdot; \varphi)$  es prolongación analítica de  $g(\cdot; \varphi)$ ), entonces existe una función holomorfa  $\lambda \mapsto S_\lambda$  en  $\Lambda_1$  con valores en  $E'$  tal que  $S_\lambda = T_\lambda$  para  $\lambda \in \Lambda$  y  $\langle S_\lambda, \varphi \rangle = h(\lambda; \varphi)$  para  $\lambda \in \Lambda_1$  y  $\varphi \in E$ . Se dice que  $S_\lambda$  es la *prolongación analítica* de  $T_\lambda$  en  $\Lambda$ .

Supongamos que  $\lambda_0 \in \Lambda$  y que  $\lambda \mapsto T_\lambda \in E'$  es holomorfa en  $\Lambda \setminus \{\lambda_0\}$ . Si para  $\lambda \neq \lambda_0$  en un disco con centro  $\lambda_0$  se tiene

$$T_\lambda = \frac{S_{-m}}{(\lambda - \lambda_0)^m} + \dots + \frac{S_{-1}}{\lambda - \lambda_0} + S_0 + \sum_{k=1}^{\infty} S_k(\lambda - \lambda_0)^k,$$

donde  $m \in \mathbf{N}$ , las  $S_k, (k \geq -m)$  son distribuciones en  $E'$  y  $S_{-m} \neq 0$ , entonces si  $m > 0$ , se dice que  $T_\lambda$  tiene un *polo* de orden  $m$  en  $\lambda_0$ , en particular si  $m = 1$  se dice que el polo  $\lambda_0$  es *simple*. La distribución  $S_{-1}$  es el *residuo* de  $T_\lambda$  en  $\lambda_0$  y  $S_0$  su *parte finita*:

$$S_0 = \text{Pf}_{\lambda=\lambda_0} T_\lambda = \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} \left( T_\lambda - \sum_{k=1}^m \frac{S_{-k}}{(\lambda - \lambda_0)^k} \right).$$

que se nota también  $\text{Pf}T_{\lambda_0}$ . Cuando en el desarrollo arriba los términos que contienen  $S_k$  con  $k < 0$  faltan, se dice que  $T_\lambda$  es *regular* en  $\lambda_0$ . Obviamente  $T_{\lambda_0}$  es entonces  $S_0$ .

El caso más frecuente es cuando en  $\Lambda$  la distribución  $T_\lambda$  está dada por una familia  $(f_\lambda)$  de funciones localmente integrables tal que  $\langle T_\lambda, \varphi \rangle = \int f_\lambda(x)\varphi(x)dx$  y  $\lambda \mapsto \int f_\lambda(x)\varphi(x)dx$  es una función holomorfa en  $\Lambda$  para todo  $\varphi \in E$ . La prolongación analítica  $S_\lambda$  en  $\Lambda_1 \supset \Lambda$  de  $T_\lambda$  ya no está dada en general por funciones localmente integrables. Se dice que  $S_\lambda$  es una *pseudofunción*. Si  $S_\lambda$  es regular en  $\lambda_0$ , se escribe  $S_{\lambda_0} = \text{Pf}_{\lambda=\lambda_0} f_\lambda$  donde  $\text{Pf}$  tiene el significado “pseudofunción”. Si  $S_\lambda$  tiene polo en  $\lambda_0$ , se escribe  $\text{Pf}S_{\lambda_0} = \text{Pf}_{\lambda=\lambda_0} f_\lambda$  y ahora  $\text{Pf}$  es abreviatura para “parte finita”. A **Schwartz** le ha gustado mucho este juego de palabras.

Si  $\lambda \mapsto T_\lambda \in E'$  es holomorfa en  $\Lambda$ , entonces para todo  $\rho \in \mathbf{N}^n$  la función  $\lambda \mapsto \partial^\rho T_\lambda$  es holomorfa en  $\Lambda$ . Si  $T_\lambda$  tiene una prolongación analítica  $S_\lambda$  en  $\Lambda_1 \supset \Lambda$ , entonces para cualquier  $\rho \in \mathbf{N}^n$  la función  $\lambda \mapsto \partial^\rho T_\lambda$  tiene prolongación analítica en  $\Lambda_1$  la cual es igual a  $\partial^\rho S_\lambda$ . Si  $T_\lambda$  tiene polo en  $\lambda_0$ , entonces  $\partial^\rho T_\lambda$  también lo tiene y  $\text{Pf}_{\lambda=\lambda_0} \partial^\rho T_\lambda = \partial^\rho \text{Pf}_{\lambda=\lambda_0} T_\lambda$ .

Sea  $\lambda \mapsto T_\lambda \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$  una función holomorfa en  $\Lambda$ . Entonces  $\lambda \mapsto \mathcal{F}T_\lambda$  es también holomorfa en  $\Lambda$ .

Si  $T_\lambda$  tiene prolongación analítica  $S_\lambda$  en  $\Lambda_1 \supset \Lambda$ , entonces  $\mathcal{F}T_\lambda$  también tiene prolongación analítica  $R_\lambda$  en  $\Lambda_1$  y  $R_\lambda = \mathcal{F}S_\lambda$ . Si  $T_\lambda$  tiene polo en  $\lambda_0$ , entonces  $\mathcal{F}(\text{Pf}_{\lambda=\lambda_0}T_\lambda) = \text{Pf}_{\lambda=\lambda_0}(\mathcal{F}T_\lambda)$ .

Sea  $(\alpha_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  una familia de funciones que pertenecen a  $\mathcal{E}(\mathbf{R}^n)$ . Supongamos que  $\lambda \mapsto \alpha_\lambda \in \mathcal{E}$  es holomorfa en  $\Lambda$  en un sentido análogo a la definición dada arriba. Si  $\lambda \mapsto T_\lambda \in \mathcal{D}'$  es holomorfa en  $\Lambda$ , también  $\lambda \mapsto \alpha_\lambda \cdot T_\lambda \in \mathcal{D}'$  lo es.

Si  $\lambda \mapsto S_\lambda \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$  y  $\lambda \mapsto T_\lambda \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$  son funciones holomorfas en  $\Lambda$ , entonces  $\lambda \mapsto S_\lambda \otimes T_\lambda = R_\lambda$  es holomorfa con valores en  $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^{2n})$ . Si  $S_\lambda$  y  $T_\lambda$  tienen prolongación analítica en  $\Lambda_1 \supset \Lambda$ , entonces  $R_\lambda$  también tiene y sigue siendo  $R_\lambda = S_\lambda \otimes T_\lambda$  para  $\lambda \in \Lambda_1$ .

Una función  $\lambda \mapsto S_\lambda \in \mathcal{E}'$  holomorfa en  $\Lambda$  se puede considerar como función holomorfa con valores en  $\mathcal{D}'$  si la componemos con la inclusión  $\mathcal{E}' \subset \mathcal{D}'$ . Si  $S_\lambda$  tiene prolongación analítica en  $\Lambda_1 \supset \Lambda$  en tanto que función con valores en  $\mathcal{D}'$ , entonces  $S_\lambda \in \mathcal{E}'$  también para  $\lambda \in \Lambda_1$  y  $\lambda \mapsto S_\lambda \in \mathcal{E}'$  es holomorfa en  $\Lambda_1$ . Sean ahora  $\lambda \mapsto S_\lambda \in \mathcal{E}'(\mathbf{R}^n)$  y  $\lambda \mapsto T_\lambda \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$  funciones holomorfas en  $\Lambda$ . Entonces  $\lambda \mapsto R_\lambda = S_\lambda * T_\lambda$  es holomorfa. Si  $S_\lambda$  y  $T_\lambda$  tienen prolongación analítica en  $\Lambda_1 \supset \Lambda$ , entonces  $R_\lambda$  también tiene una y  $R_\lambda = S_\lambda * T_\lambda$  para  $\lambda \in \Lambda_1$ .

Quiero terminar esta sección con un resultado muy reciente de **Norbert Ortner** y **Peter Wagner**. Primero hay que notar la condición siguiente ([13, (1.3), pág. 190]): Las distribuciones  $S$  y  $T$  son convolvibles si y sólo si para todo  $\varphi \in \mathcal{D}$  la distribución  $(\varphi * \check{S})T$  es integrable y entonces se tiene  $\langle S * T, \varphi \rangle = \langle (\varphi * \check{S})T, \mathbf{1} \rangle$ . He aquí el teorema de Ortner y Wagner ([65, Prop. 9, pág. 372]):

- (a) Sea  $\Lambda$  un conjunto abierto, conexo en  $\mathbf{C}$  y  $\lambda \mapsto S_\lambda \in \mathcal{D}', \lambda \mapsto T_\lambda \in \mathcal{D}'$  dos funciones holomorfas en  $\Lambda$ . Si se cumple la condición:

$(\Gamma_\Lambda)$  para todo  $\varphi \in \mathcal{D}$  la aplicación  $\lambda \mapsto (\varphi * \check{S}_\lambda)T_\lambda$  de  $\Lambda$  en  $\mathcal{B}'_0$  es débilmente continua,

entonces la aplicación  $\lambda \mapsto R_\lambda = S_\lambda * T_\lambda$  de  $\lambda$  en  $\mathcal{D}'$  es holomorfa.

- (b) Sea  $\Lambda_1$  un subconjunto abierto, conexo de  $\mathbf{C}$  que contiene  $\Lambda$ . Si  $S_\lambda$  y  $T_\lambda$  tienen prolongaciones analíticas en  $\Lambda_1$  y si la condición  $(\Gamma_{\Lambda_1})$  (es decir  $(\Gamma_\Lambda)$  con  $\Lambda$  reemplazado por  $\Lambda_1$ ) se cumple, entonces  $R_\lambda$  tiene prolongación analítica en  $\Lambda_1$  y  $R_\lambda = S_\lambda * T_\lambda$  vale para  $\lambda \in \Lambda_1$ .

Wagner ha dado un ejemplo (todavía no publicado) que muestra que la condición  $(\varphi * \check{S}_\lambda)T_\lambda \in \mathcal{B}'_0$  no implica la continuidad débil contenida en  $(\Gamma_\Lambda)$  y que entonces la convolución no es holomorfa.

14.

Para  $\Re\lambda > -n$  la función  $x \mapsto |x|^\lambda$  es localmente integrable sobre  $\mathbf{R}^n$ , así define una distribución que notaremos por  $|x|^\lambda$ , es decir

$$\langle |x|^\lambda, \varphi \rangle = \int_{\mathbf{R}^n} |x|^\lambda \varphi(x) dx.$$

En realidad  $|x|^\lambda$  es temperada y la función  $\lambda \mapsto |x|^\lambda \in \mathcal{S}'$  es holomorfa en el semiplano  $\Re\lambda > -n$ . La prolongación analítica de la función al plano  $\mathbf{C}$  tiene polos simples en los puntos  $\lambda = -n - 2k (k \in \mathbf{N})$ , en los cuales sus residuos son

$$\text{Res}_{\lambda=-n-2k} |x|^\lambda = \frac{2\pi^{n/2}}{2^{2k} k! \Gamma(\frac{n+2k}{2})} \Delta^k \delta. \tag{14}$$

Haciendo el cambio de variables  $\lambda = \alpha - n$ , obtenemos la función  $\alpha \mapsto |x|^{\alpha-n}$  que tiene polos simples en los puntos  $\alpha = -2k (k \in \mathbf{N})$ . La función  $\alpha \mapsto \Gamma(\frac{\alpha}{2})$  tiene polos simples en los mismos puntos, de manera que el cociente  $|x|^{\alpha-n} / \Gamma(\frac{\alpha}{2})$  es regular en todos los puntos de  $\mathbf{C}$ : es una función entera. De (14) y del valor del residuo de  $\Gamma(\frac{\alpha}{2})$  resulta que el valor de  $|x|^{\alpha-n} / \Gamma(\frac{\alpha}{2})$  en  $\alpha = -2k$  es

$$\frac{2^{-2k} \pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n+2k}{2})} (-\Delta)^k \delta.$$

Por tal razón es natural considerar la pseudofunción elíptica de **Marcel Riesz**

$$R_\alpha = \text{Pf} \frac{\Gamma(\frac{n-\alpha}{2})}{2^\alpha \pi^{n/2} \Gamma(\frac{\alpha}{2})} |x|^{\alpha-n}$$

cuyo valor en el punto  $\alpha = -2k$  es  $R_{-2k} = (-\Delta)^k \delta$ . El factor  $\Gamma(\frac{n-\alpha}{2})$  en el numerador causa que  $\alpha \mapsto R_\alpha$  tenga polos simples en los puntos  $\lambda = n + 2k (k \in \mathbf{N})$ .

La pseudofunción vectorial  $N_\alpha = -\nabla R_{\alpha+1}$  está definida para  $\Re\alpha > 0, \alpha \neq n + 2k + 1$  por la función localmente integrable

$$\frac{\Gamma(\frac{n-\alpha+1}{2})}{2^\alpha \pi^{n/2} \Gamma(\frac{\alpha+1}{2})} \frac{x}{|x|} |x|^{\alpha-n}.$$

Obsérvese que  $N_0$  es el núcleo de la transformada de Riesz  $\mathcal{H}$  de (6).

Generalizando los dos ejemplos anteriores, sea  $\Omega$  una función integrable sobre la esfera unidad  $S_{n-1}$  de  $\mathbf{R}^n$ . Introduzcamos los momentos

$$M_\alpha = \int_{S_{n-1}} \omega^\alpha \Omega(\omega) d\omega$$

de  $\Omega$ , donde  $\alpha \in \mathbf{N}^n$ ,  $\omega^\alpha = \omega_1^{\alpha_1} \dots \omega_n^{\alpha_n}$ . Ahora no suponemos que  $M_0 = 0$  como en la sección 11. Para  $\Re \lambda > -n$  definimos la distribución  $K_\lambda^\Omega \in \mathcal{S}'$  por

$$\langle K_\lambda^\Omega, \varphi \rangle = \int_{\mathbf{R}^n} \Omega\left(\frac{x}{|x|}\right) |x|^\lambda \varphi(x) dx.$$

La función  $\lambda \mapsto K_\lambda^\Omega \in \mathcal{S}'$  tiene prolongación analítica con polos simples en los puntos  $\lambda = -n - k$  ( $k \in \mathbf{N}$ ) donde sus residuos son

$$\text{Res}_{\lambda = -n-k} K_\lambda^\Omega = (-1)^k \sum_{|\alpha|=k} \frac{1}{\alpha!} M_\alpha \partial^\alpha \delta,$$

donde  $\alpha! := \alpha_1! \dots \alpha_n!$ . En particular, para  $\lambda = -n$  se tiene ([36, pág. 175])

$$\begin{aligned} & \langle \text{Pf}_{\lambda=-n} K_\lambda^\Omega, \varphi \rangle \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left\{ \int_{|x| \geq \epsilon} \Omega\left(\frac{x}{|x|}\right) |x|^{-n} \varphi(x) dx + M_0 \varphi(0) \log \epsilon \right\}. \end{aligned}$$

Vemos entonces que la condición  $M_0 = 0$  usada por **Giraud**, **Mihlin** y otros significa que  $K_\lambda^\Omega$  es regular en el punto  $\lambda = -n$  y la "parte finita" es un "valor principal" de Cauchy.

**Teorema** ([36, Th. 3, pág. 185]; [61, Satz 1, pág. 23]). *Sea  $\Omega$  acotada y medible sobre  $S_{n-1}$  y pongamos  $\mu = \Re \lambda$ . Si  $T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$  es tal que  $(1 + |x|^2)^{\mu/2} T$  es integrable, entonces  $T$  y  $K_\lambda^\Omega$  son  $\mathcal{S}'$ -convolutibles y se tiene  $\mathcal{F}(T * K_\lambda^\Omega) = \mathcal{F}(T) \mathcal{F}(K_\lambda^\Omega)$  en el sentido de **Hirata** y **Ogata**.*

Yo demostré solamente que son convolutibles. La  $\mathcal{S}'$ -convolutibilidad se debe a **Norbert Ortner**. **Peter Wagner** ([99, pág. 474]) mostró que la condición  $\Omega \in L^1(S_{n-1})$  no es suficiente para que el teorema sea cierto.

**Recíproco** ([61, Satz 4, pág. 29]). *Si  $T \in \mathcal{D}'$  y  $\text{Pf}|x|^\lambda$  son convolutibles, entonces  $(1 + |x|^2)^{\mu/2} \in \mathcal{B}'_0$  ( $\mu = \Re \lambda$ ).*

**Corolario** ([36, Corol. del Th.3, pág. 189]). *Sean  $\Omega_1$  y  $\Omega_2$  dos funciones acotadas y medibles sobre  $S_{n-1}$ , y  $K_\lambda^{(1)}, K_\nu^{(2)}$  las distribuciones que les corresponden. Si  $\Re(\lambda + \nu) < -n$ , entonces  $K_\lambda^{(1)}$  y  $K_\nu^{(2)}$  son convolutibles.*

En particular ([61, Satz 6, pág. 31]):

- 1) Si  $\alpha = -2k$  o  $\beta = -2k$ , entonces  $R_\alpha$  y  $R_\beta$  son  $\mathcal{S}'$ -convolutibles (obvio);
- 2) Si  $\alpha \neq -2k$  y  $\beta \neq -2k$ , entonces  $R_\alpha$  y  $R_\beta$  son convolutibles si y sólo si  $\Re(\alpha + \beta) < n$ .

En ambos casos se tiene  $R_\alpha * R_\beta = R_{\alpha+\beta}$  ([61, Satz 9, pág. 40, pág. 44]).

La pseudofunción  $N_\alpha = -\nabla R_{\alpha+1}$  corresponde a la función vectorial  $\Omega(\omega) = \omega$  sobre  $S_{n-1}$ . Se tiene  $N_{2k-1} = (-1)^{k+1} \nabla (\Delta^k \delta)$  para  $k \in \mathbf{N}$ , y en particular

$$N_{-1} = -\nabla \delta = -\frac{\partial}{\partial x_1} \epsilon_1 - \dots - \frac{\partial}{\partial x_n} \epsilon_n.$$

Las  $N_\alpha$  son  $\mathcal{S}'$ -convolutibles en los casos siguientes [61], [63], [65]:

- 1) Si  $\alpha = 2k - 1$  o  $\beta = 2k - 1$ , entonces  $N_\alpha$  y  $N_\beta$  son  $\mathcal{S}'$ -convolutibles;
- 2) Si  $\alpha \neq 2k - 1$  y  $\beta \neq 2k - 1$  entonces  $N_\alpha$  y  $N_\beta$  son  $\mathcal{S}'$ -convolutibles si y sólo si  $\Re(\alpha + \beta) < n$ .

En todos los casos se tiene  $N_\alpha * N_\beta = -R_{\alpha+\beta}$ , lo que contiene el caso particular  $N_0 * N_0 = -\delta$ , es decir la reciprocidad del operador  $\mathcal{H}$  de Riesz. En efecto

$$\begin{aligned} N_\alpha * N_\beta &= \nabla R_{\alpha+1} * \nabla R_{\beta+1} = \Delta R_{\alpha+1} * R_{\beta+1} \\ &= -R_{\alpha-1} * R_{\beta+1} = -R_{\alpha+\beta}. \end{aligned}$$

Cuando  $n-2 \leq \alpha + \beta < n$ , es decir  $n \leq \alpha + \beta + 2 < n+2$ , las distribuciones  $R_{\alpha+1}$  y  $R_{\beta+1}$  no son convolutibles: es entonces que el Teorema de Ortner de la sección 10 sirve.

**Josefina Alvarez** y **Christine Carton-Lebrun** [1] dieron una demostración circular del teorema siguiente:

*Sea  $T \in \mathcal{S}'$ . Entonces las tres condiciones que siguen son equivalentes: (a)  $(1 + |x|^2)^{-n/2} T \in \mathcal{B}'_0$ ; (b)  $T$  es  $\mathcal{S}'$ -convolutible con  $N_0$ ; (c)  $(1 + |x|^2)^{-1/2} T$  es  $\mathcal{S}'$ -convolutible con  $R_1$ .*

Ellas investigaron también la  $\mathcal{S}'$ -convolutibilidad de  $T \in \mathcal{S}'$  con una componente de la distribución vectorial  $N_0$  ([1, Th. 15.6, pág. 246]).

En un artículo escrito en colaboración con **Norbert Ortner** y **Peter Wagner** ([38]; véase también [64]) hemos considerado las distribuciones

$$K_{\lambda,j} = \frac{\Gamma(\frac{n-\lambda+j}{2})}{2^\lambda \pi^{n/2} \Gamma(\frac{\lambda+j}{2})} \text{Pf}\left(\frac{x}{|x|}\right)^j |x|^{\lambda-n},$$

donde la potencia  $x^j$  se entiende en el sentido del álgebra  $Q$  asociada al operador de Laplace  $\Delta$  (véase la sección 12). Las componentes de esta distribución vectorial son las escalares  $\text{Pf}Y_j(x)|x|^{\lambda-j}$ , donde las  $Y_j$  son un sistema linealmente independiente maximal de polinomios armónicos de grado  $j$ . Hemos calculado las transformadas de Fourier de estas distribuciones y demostrado la regla de convolución  $K_{\lambda,j} * K_{\nu,k} = K_{\lambda+\nu,j+k}$ .

Para concluir, observemos que el método de **Marcel Riesz** consiste en encontrar un semigrupo  $R_\alpha$  que liga el operador diferencial  $-\Delta = R_{-2}$  con su solución elemental (o fundamental)  $R_2$  que satisface  $-\Delta R_2 = R_0 = \delta$ . Se puede decir que  $R_\alpha = (-\Delta)^{-\alpha/2}$ . **Riesz** construyó un semigrupo análogo para el operador de ondas  $\square = \partial_1^2 - \partial_2^2 - \dots - \partial_n^2$ .

En un artículo, desgraciadamente poco conocido [100], Peter Wagner consideró un polinomio arbitrario  $P$  de  $n$  indeterminadas con coeficientes reales. Con la ayuda de polinomios asociados a  $P$ , debidos a **Joseph Bernstein** y **Mikio Sato** [2], se ve que  $P^\lambda$ , definido originalmente para  $\Re\lambda > 0$ , tiene prolongación analítica meromorfa a todo el plano complejo. **Wagner** llama  $T_\lambda = \mathcal{F}P^\lambda$  el grupo de convolución (Faltungsguppe) del operador  $P(-\frac{1}{2\pi i}\partial)$ . Se tiene  $P(-\frac{1}{2\pi i}\partial)T_\lambda = T_{\lambda+1}$  y en particular  $T_{-l}$  es solución elemental de  $P(-\frac{1}{2\pi i}\partial)^l$  para  $l \in \mathbb{N}$ . Si  $P$  es un polinomio homogéneo de grado  $m$ ,  $P(x) > 0$  para  $x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0$ , y  $P$  no es una potencia de otro polinomio, entonces  $T_\lambda$  y  $T_\nu$  son convolubles si y sólo si  $\lambda$  o  $\nu$  es un número entero  $\geq 0$  o bien  $\Re(\lambda + \nu) > -n/m$ . En estos casos  $T_\lambda * T_\nu = T_{\lambda+\nu}$ . En un trabajo todavía no aparecido **Ortner** y **Wagner** [66] investigan el grupo de convolución para un sistema casihiperbólico de operadores diferenciales.

## REFERENCIAS

- [1] **Alvarez, Josefina; Carton-Lebrun, Christiane**: *Optimal spaces for the  $S'$ -convolutions with Marcel Riesz kernels and the  $N$ -dimensional Hilbert kernel*. Analysis of divergence (Orono, ME, 1997), Appl. Numer. Harmon. Anal., Birkhäuser, págs. 233–248.
- [2] **Björck, Jan-Erik**: *Rings of differential operators*. North-Holland, Amsterdam, 1979.
- [3] **Bochner, Salomon**: *Vorlesungen über Fouriersche Integrale*. Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1932.
- [4] —: *Theta relations with spherical harmonics*. Proc. Nat. Acad. Sci. USA **37** (1951), 804–808.
- [5] **Calderón, Alberto P.**: *On theorems of M. Riesz and Zygmund*. Proc. Amer. Math. Soc. **1** (1950), 533–535.
- [6] **Calderón, A. P.; Zygmund, A.**: *On the existence of certain singular integrals*. Acta Math. **88** (1952), 85–139.
- [7] —: *On a problem of Mihlin*. Trans. Amer. Math. Soc. **78** (1955), 209–224.
- [8] —: *On singular integrals*. Amer. J. Math. **78** (1956), 289–309.
- [9] —: *Singular integral operators and differential equations*. Amer. J. Math. **79** (1957), 901–921.
- [10] **Cartwright, Mary Lucy**: *Manuscripts of Hardy, Littlewood, Marcel Riesz and Titchmarsh*. Bull. London Math. Soc. **14** (1982), 472–532.
- [11] **Christ, Michael**: *Lectures on singular integral operators*. Conf. Board of the Math. Sciences, Regional Conferences in Math., No. 77. Amer. Math. Soc., 1990.
- [12] **Diaz, Joaquin B.**: *On a class of partial differential equations of even order*. Amer. J. Math. **68** (1946), 611–659.
- [13] **Dierolf, Peter; Voigt, Jürgen**: *Convolution and  $S'$ -convolution of distributions*. Collect. Math. **29** (1978), 185–196.
- [14] **Eskin, G. I.**: *Boundary value problems for elliptic pseudo-differential equations*. Translations of Mathematical Monographs, Vol. 52. Amer. Math. Soc., 1981.
- [15] **Fefferman, C.; Stein, E. M.**:  *$HP$  spaces of several variables*. Acta Math. **129** (1972), 137–193.
- [16] **Fefferman, Charles**: *Selected theorems by Eli Stein*. Essays on Fourier analysis in honor of Elias M. Stein, ed.: Ch. Fefferman, R. Fefferman, St. Wainger. Princeton University Press, 1995, págs. 1–35.
- [17] **Fueter, R.**: *Die Funktionentheorie der Differentialgleichungen  $\Delta u = 0$  und  $\Delta\Delta u = 0$  mit vier reellen Variablen*. Commentarii Math. Helvetici **7** (1934/35), 307–330.
- [18] **Giraud, Georges**: *Sur une classe générale d'équations à intégrales principales*. C.R. Acad. Sci. Paris **202** (1936), 2124–2127.
- [19] —: *Complément à un résultat sur les équations à intégrales principales*. C.R. Acad. Sci. Paris **203**, 292–294.
- [20] **Hardy, G. H.; Littlewood, J. E.; Pólya, G.**: *Inequalities*. Cambridge University Press, 1934.
- [21] **Hirata, Yukio**: *On convolutions in the theory of distributions*. J. of Science of the Hiroshima University, Ser. A, **22** (1958), 89–98.
- [22] **Hirata, Y.; Ogata, Hayao**: *On the exchange formula for distributions*. Journal of Science of the Hiroshima University, Ser. A. **22** (1958), 147–152.
- [23] **Hörmander, Lars**: *Pseudo-differential operators*. Comm. Pure Applied Math. **18** (1965), 501–517.
- [24] —: *Pseudo-differential operators and non-elliptic boundary problems*. Ann. of Math. **83** (1966), 129–209.
- [25] —: *Pseudo-differential operators and hypoelliptic equations*. Singular Integrals, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, Vol. 10. Amer. Math. Soc., 1967, págs. 138–183.
- [26] —: *The analysis of linear partial differential operators I*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 256. Springer, 1983.
- [27] —: *The analysis of linear partial differential operators III*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 274. Springer, 1985.
- [28] **Horváth, J.**: *Sur les fonctions conjuguées à plusieurs variables*. Indag. Math. **15** (1953), 17–29.
- [29] —: *Singular integral operators and spherical harmonics*. Trans. Amer. Math. Soc. **82** (1956), 52–63.

- [30] —: *Basic sets of polynomial solutions for partial differential equations*. Proc. Amer. Math. Soc. **9** (1958), 569–575.
- [31] —: *On some composition formulas*. Proc. Amer. Math. Soc. **10** (1959), 433–437.
- [32] —: *A generalization of the Cauchy-Riemann equations*. Contributions to Diff. Equations **1** (1961), 39–58.
- [33] —: *Finite parts of distributions*. Linear operators and approximations (Oberwolfach, August 14–22, 1971). Internat. Series Num. Math., Vol. 20. Birkhäuser, 1972, págs. 142–158.
- [34] —: *Distribuciones definidas por prolongación analítica*. Rev. Colombiana Mat. **8** (1974), 47–95.
- [35] —: *Sur la convolution des distributions*. Bull. Sci. Math. **98** (1974), 183–192.
- [36] —: *Composition of hypersingular integral operators*. Applicable Analysis **7** (1978), 171–190.
- [37] —: *Convolution des noyaux hypersinguliers*. G. Choquet, M. Rogalski, J. Saint-Raimond (Eds.), Séminaire initiation à l'analyse, 19e année, 1979/80, exposé no. 8. Univ Paris VI, 1980, págs. 1–17.
- [38] Horváth, J.; Ortner, N.; Wagner, P.: *Analytic continuation and convolution of hypersingular higher Hilbert-Riesz kernels*. J. Math. Anal. Appl. **123** (1987), 429–447.
- [39] Humbert, Pierre: *Potentiels et prépotentiels*. Cahiers Scientifiques, fasc. 15. Gauthier-Villars, Paris, 1936.
- [40] Katznelson, Yitzhak: *An introduction to harmonic analysis*. Dover, New York, 1976.
- [41] Ketchum, P. W.: *A complete solution of Laplace's equation by an infinite hypervariable*. Amer. J. Math. **51** (1929), 179–188.
- [42] Kohn, J. J.: *Singular integral equations for differential forms on Riemannian manifolds*. Proc. Nat. Acad. Sci. USA **42** (1956), 650–653.
- [43] Kohn, J. J.; Nirenberg, L.: *An algebra of pseudo-differential operators*. Comm. Pure Applied Math. **18** (1965), 269–305.
- [44] Kumano-go, Hitoshi: *Pseudo-differential operators*. MIT Press, Cambridge, MA, 1974.
- [45] Lammell, Ernst: *Über eine zur Differentialgleichung  $(a_0(\partial^n/\partial x^n) + a_1(\partial^n/\partial x^{n-1}\partial y) + \dots + a_n(\partial^n/\partial y^n))u(x, y) = 0$  gehörige Funktionentheorie I*. Math. Ann. **122** (1950), 109–126.
- [46] —: *Generalizaciones de la teoría de las funciones de variables complejas*. Segundo symposium sobre algunos problemas matemáticos que se están estudiando en Latino América, Villavicencio-Mendoza, 1954. UNESCO, págs. 191–197.
- [47] Leray, Jean: *Hyperbolic differential equations*. The Institute of Advanced Study, Princeton, N.J., 1953, 1955.
- [48] Littlewood, J. E.: *A mathematicians miscellany*. Methuen, London, 1957.
- [49] Magnus, W.; Oberhettinger, F.: *Formulas and theorems for the special functions of mathematical physics*. Chelsea, New York, 1949.
- [50] Mihlin, S. G.: *Singular integral equations*. Amer. Math. Soc. Translations, Ser 1, Vol. 10, 1962, págs. 84–198.
- [51] Miles, E. P. Jr.: *Three dimensional harmonic functions generated by analytic functions of a hypervariable*. Amer. Math. Monthly **61** (1954), 694–697.
- [52] —: *The analytic Cauchy problem for the iterated wave equation*. Portugaliae Math. **18** (1959), 111–119.
- [53] Miles, E. P.; Williams, Ernest: *A basic set of homogeneous harmonic polynomials in  $k$  variables*. Proc. Amer. Math. Soc. **6** (1955), 191–194.
- [54] —: *A note on basic sets of homogeneous harmonic polynomials*. Proc. Amer. Math. Soc. **6** (1955), 769–770.
- [55] —: *The Cauchy problem for linear partial differential equations with restricted boundary conditions*. Canadian J. Math. **8** (1956), 426–431.
- [56] —: *A basic set of polynomial solutions for the Euler-Poisson-Darboux and Beltrami equations*. Amer. Math. Monthly **63** (1956), 401–404.
- [57] —: *Basic sets of polynomials for the iterated Laplace and wave equations*. Duke Math. J. **26** (1959), 35–40.
- [58] Miles, E. P.; Young, E. C.: *Basic sets of polynomials for generalized Beltrami and Euler-Poisson-Darboux equations and their iterates*. Proc. Amer. Math. Soc. **18** (1967), 981–986.
- [59] Okikiolu, George O.: *Special integral operators, Vol. II - Poisson operators, conjugate operators and related integrals*. Okikiolu Sci. and Industr. Org., London, 1981.
- [60] Ortiz F., Alejandro: *Operadores integrales singulares*. Universidad Nacional de Trujillo, Depto. de Matemática, Trujillo, Perú, 1972.
- [61] Ortner, Norbert: *Faltung hypersingulärer Integraloperatoren*. Math. Ann. **248** (1980), 19–46.
- [62] —: *Sur la convolution des distributions*. C.R. Acad. Sci. Paris, Sér A-B **290** (1980), 533–536.
- [63] —: *Convolution des distributions et des noyaux euclidiens*. G. Choquet, M. Rogalski, J. Saint-Raimond (Eds.), Séminaire initiation à l'analyse, 19e année, 1979/1980, exposé no. 12. Univ Paris VI, 1980, págs. 1–11.
- [64] —: *Analytic continuation and convolution of hypersingular higher Hilbert-Riesz kernels*. Alfred Haar memorial conference, Budapest, 1985, págs. 675–685.
- [65] —: *On some contributions of John Horváth to the theory of distributions*. J. Math. Anal. Appl. **297** (2004), 353–383.
- [66] Ortner, N.; Wagner, P.: *Convolution groups for quasi-hyperbolic systems of differential operators*. For aparecer.
- [67] Plessner, A.: *Zur Theorie der konjugierten trigonometrischen Reihen*. Mitteilungen Math. Seminar Gießen **10** (1923), 1–36.
- [68] Protter, M. H.: *Generalized spherical harmonics*. Trans. Amer. Math. Soc. **63** (1948), 314–341.
- [69] —: *On a class of harmonic polynomials*. Portugaliae Math. **10** (1951), 11–22.
- [70] Riesz, Frigyes: *Über die Randwerte einer analytischen Funktion*. Math. Zeitschrift **18** (1923), 117–124; Œuvres complètes, Budapest, 1960, D7, págs. 645–653.
- [71] Riesz, Marcel: *Sur la sommation des séries de Fourier*. Acta Sci. Math. Szeged **1** (1923), 104–113.
- [72] —: *Sur les fonctions conjuguées*. Math. Zeitschrift **27** (1927), 218–244.
- [73] —: *L'intégrale de Riemann-Liouville et le problème de Cauchy*. Acta Math. **81** (1949), 1–223.
- [74] —: *Collected papers*. Springer-Verlag, 1988.
- [75] Roeder, Bernhard: *Sur la convolution des distributions*. Bull. Sci. Math. **100** (1976), 193–199.
- [76] Rudin, Walter: *Fourier analysis on groups*. Wiley, 1962, 1990.

- [77] **Samko, S. G.**: *On the Fourier transform of the function  $\frac{Y_m(x/|x|)}{|x|^{n+\alpha}}$* . Izv. Vuzov. Matematika, no.7 (1978), 73–78; Soviet Math (Izv. VUZ).
- [78] —: *Hypersingular integrals and their applications*. Taylor and Francis, London, 2002.
- [79] **Schaad, Margrit**: *Über eine Klasse von rechtsregulären Funktionen mit  $2n$  reellen Variablen*. Disertación, Zurich, 1944.
- [80] **Schwartz, Laurent**: *Théorie des distributions*. Nouvelle édition. Hermann, Paris, 1966.
- [81] —: *Produits tensoriels topologiques d'espaces vectoriels topologiques. Espaces vectoriels topologiques nucléaires. Applications*. Séminaire, Institut Henri Poincaré, Paris, 1954.
- [82] —: *Distributions à valeurs vectorielles I*. Ann. Institut Fourier Grenoble **7** (1957), 1–141.
- [83] —: *Distributions à valeurs vectorielles II*. Ann. Institut Fourier Grenoble **8** (1959), 1–209.
- [84] **Seeley, R. T.**: *Elliptic singular integral equations*. Singular Integrals, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, Vol. 10, Amer. Math. Soc. 1967, págs. 308–315.
- [85] **Shiraishi, Risai**: *On the definition of convolutions for distributions*. J. Sci. Hiroshima University, Ser. A **23** (1959), 19–32.
- [86] **Simanca, S. R.**: *Pseudo-differential operators*. Pitman Research Notes in Math. Series 236. Longman Scientific and Technical, Harlow, Essex, UK, 1990.
- [87] **Staub, Alfred**: *Integralsätze hyperkomplexer, regulärer Funktionen von  $2n$  reellen Variablen*. Disertación, Zurich, 1946
- [88] **Stein, Elias M.**: *Singular integrals and differentiability properties of functions*. Princeton University Press, 1971.
- [89] —: *Harmonic analysis: real-variable methods, orthogonality and oscillatory integrals*. Princeton University Press, 1993.
- [90] **Stein, E. M.; Weiss, G.**: *On the theory of harmonic functions of several variables I, The theory of  $H^p$  spaces*. Acta Math. **103** (1960), 25–62.
- [91] —: *On the theory of harmonic functions of several variables II, Behavior near the boundary*. Acta Math. **106** (1961), 137–174.
- [92] —: *Introduction to Fourier analysis in Euclidean Spaces*. Princeton University Press, 1971.
- [93] **Taylor, Michael E.**: *Pseudodifferential operators*. Princeton University Press, 1981.
- [94] **Thorin, G. O.**: *An extension of a convexity theorem due to M. Riesz*. Kungl. Fysiografiska Sällskapet i Lund Förhandlingar **8** (1938), no. 14.
- [95] —: *Convexity theorems generalizing those of M. Riesz and Hadamard, with some applications*. Disertación Lund, Meddelanden från Lunds Universitets Matematiska Seminarium, Vol. 9 (1948).
- [96] **Titchmarsh, E. C.**: *Introduction to the theory of Fourier integrals*. Cambridge University Press, 1948.
- [97] **Treves, François**: *Introduction to pseudodifferential and Fourier integral operators. Vol. 1, Pseudodifferential operators*. Plenum, New York, 1980.
- [98] **Unterberger, A.; Bokobza, J.**: *Les opérateurs de Calderón-Zygmund précisés*. C.R. Acad. Sci. Paris **259** (1965), 1612–1614.
- [99] **Wagner, Peter**: *Zur Faltung von Distributionen*. Math. Ann. **276** (1987), 467–485.
- [100] —: *Bernstein-Sato-Polynome und Faltungsgruppen zu Differentialoperatoren*. Zeitschrift für Analysis und ihre Anwendungen **8** (1989), 407–423.
- [101] **Weiss, Guido**: *Análisis armónico en varias variables. Teoría de los espacios  $H^p$* . Cursos y seminarios matemáticos, fasc. 9, Universidad de Buenos Aires, 1960.
- [102] **Wight, M. C.**: *Recursion and interrelation for Miles-Williams biharmonics*. Amer. Math. Monthly **64** (1957), 463.
- [103] **Yoshinaga, Kyōichi; Ogata, Hayao**: *On convolutions*. J. of Science of the Hiroshima University, Ser A **22** (1968), 15–24.
- [104] **Zaidman, S.**: *Distributions and pseudo-differential operators*. Pitman Research Notes in Math. Series 248, Longman Scientific and Technical, Harlow, Essex, UK, 1991.
- [105] —: *Topics in pseudo-differential operators*. Pitman Research Notes in Math. Series 359, Longman, Harlow, Essex, UK, 1996.
- [106] **Zygmund, Antoni**: *Trigonometric series*, Second edition. Cambridge University Press, 1959.

Recibido el 5 de julio de 2004.

Aceptado para su publicación el 2 de mayo de 2005.



# EFFECTO DEL ETANOL Y DE LA CONCENTRACIÓN INICIAL DE PRECURSOR DE ALUMINIO EN LA OBTENCIÓN DE $\alpha$ - $\text{Al}_2\text{O}_3$ POR EL MÉTODO DE PRECIPITACIÓN CONTROLADA

por

J. Cobo<sup>1</sup>, J. E. Rodríguez-Páez<sup>1</sup>, C. Villaquirán R.<sup>1</sup> & Albero Scian<sup>2</sup>

## Resumen

**Cobo J., J. E. Rodríguez-Páez, C. Villaquirán R, & A. Scian:** Efecto del etanol y de la concentración inicial de precursor de aluminio en la obtención de  $\alpha$ - $\text{Al}_2\text{O}_3$  por el método de precipitación controlada. Rev Acad. Colomb. Cienc. **29** (113): 571-580. 2005 ISSN 0370-3908.

Uno de los compuestos más importantes que se utilizan en el campo de los cerámicos estructurales es la alúmina. Dadas las exigencias y requerimientos actuales, sobre las características de las materias primas, se ha desarrollado una variedad de métodos de síntesis principalmente por rutas químicas, con el fin de obtener el tamaño, distribución de tamaño y morfología de partícula requeridas. El método de precipitación controlada (MPC) permite alcanzar estas exigencias brindando, además, la posibilidad de controlar adecuadamente el proceso y garantizando una buena reproducibilidad del método. Aquí se indica concretamente el efecto de la concentración del precursor de aluminio y del solvente de lavado durante el proceso de obtención de la alúmina. Para la realización de este estudio se utilizó valoración potenciométrica y conductimétrica, para seguir el avance del proceso, difracción de rayos x (DRX), para determinar las fases cristalinas del sólido, microscopía electrónica de transmisión (MET) para determinar la morfología y el tamaño de partícula.

**Palabras clave:**  $\alpha$ - $\text{Al}_2\text{O}_3$ , precipitación, etanol, precursor.

## Abstract

One of the important compounds that was used in the structural ceramic is aluminum. During the last years, a variety of synthesis methods have been developed to obtain raw

<sup>1</sup> Grupo CYTEMAC. Departamento de Física. Universidad del Cauca, Popayán- Cauca-Colombia, Correo electrónico: htenay28@hotmail.com, jnpez@ucauca.edu.co, gure@ucauca.edu.co

<sup>2</sup> CETMIT, La Plata-Argentina.

materials with suitable characteristics in terms of the particle composition, size and shape. The controlled precipitation method (CPM) allows to reach these demands and with this method it is possible to control the synthesis one so as to guarantee characteristics of ceramic powder. One stage of the CPM is the formation of the intermediate complexes of cation whose oxide is necessary. In this work the effect of the concentration and the solvent of wash during this process are indicated. For this study we used potentiometric titration to follow the advancement of the process. We utilized XRD and TEM to characterize the solid phase present in the system.

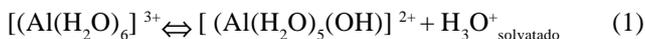
**Key words:**  $\alpha$ -Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>, precipitation, ethanol, precursor.

## 1. Introducción

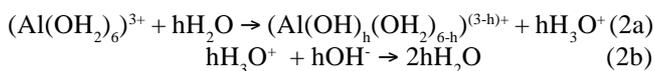
La Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> es un material cerámico que presenta diversidad de usos en el campo industrial. La alúmina fundida, de pureza ordinaria, se utiliza como material abrasivo y para preparar materiales refractarios. Las propiedades de la alúmina con aislante eléctrico permiten su uso en la fabricación de aisladores de bujía, aisladores de alta tensión y sustratos electrónicos. (Gitzen W. H. 1970).

La gran diversidad de aplicaciones que presenta la Alúmina ha incentivado el desarrollo de diversas técnicas de síntesis que permitan obtener el sólido con propiedades específicas para cada aplicación.

Uno de los métodos más utilizados en la síntesis de materias primas, es la conformación de una fase sólida en el seno de una disolución donde los procesos de hidrólisis y policondensación de las especies que existen en el sistema son las reacciones importantes (Pierre A. 1998). El ión aluminio en solución acuosa forma la especie acuosa  $[(Al(H_2O)_6)]^{3+}$  que presenta un ambiente coordinativo octaédrico con las moléculas de agua. El proceso de hidrólisis del catión acuoso se puede representar a través de la siguiente reacción (Jolivet J. 2000).



La cual ocurre de manera rápida ( $K \approx 10^5 \text{ s}^{-1}$ ) (Baes C.F & Mesmer R.E. 1976). La hidrólisis espontánea de la especie  $[(Al(H_2O)_6)]^{3+}$  continúa extensivamente de acuerdo con la siguiente reacción (Brinker C.J & Scherer G.W. 1990):



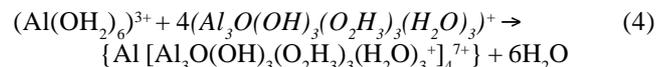
donde "h" indica la razón molar de hidrólisis, cantidad que es equivalente a la razón OH: Al de acuerdo a las últimas reacciones.

Al modificar el pH, por la adición del NH<sub>4</sub>OH también se favorece el proceso de hidrólisis a través de la reacción:

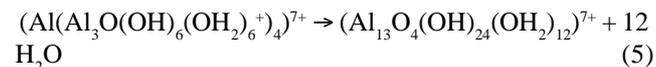


Las especies mononucleares más estables corresponden a la serie h=0 hasta h=4, donde las especies h=2 y h=3 están presentes de manera significativa en soluciones muy diluidas (Baes C.F & Mesmer R.E. 1976). Algunos de los policondensationes que se pueden formar a través de las reacciones de policondensación, olación y/o oxolación, son el dímero  $(Al_2(OH)_2(OH_2)_8)^{4+}$ , que en forma desprotonada estaría representado por  $(Al_2(OH)_3(OH_2)_7)^{3+}$ ; dado que en el sistema existe amoníaco podría formarse el dímero  $(Al_2(OH)_2(OH_2)_2(NH_3)_6)^{4+}$ . El trímero es el policondensatione más evidente en el sistema  $(Al_3(OH)_4(OH_2)_9)^{5+}$  (Brown P. L., et al. 1985) y si está presente el anión sulfato es posible que se forme un dímero con este anión. (Johansson G., 1962). Si el trímero se forma, así sea temporalmente, dada su geometría se podrían minimizar las repulsiones electrostáticas, por lo que puede actuar como una especie intermedia para la condensación. La reacción del trímero con agua lleva a la conformación del policondensatione (Evans H. T, 1966)  $(Al_3(OH)_3(OH_2)_9)^{4+}$  y por la presencia de OH<sup>-</sup> en el sistema, este último policondensatione se transforma en la especie  $[Al_3O(OH)_3(O_2H_3)_3(OH_2)_9]^{4+}$  (Gitzen W. H., 1970).

El puente m<sub>3</sub>-OH del trímero puede llegar a actuar como agente nucleófilo del monómero, pero debido a su gran tamaño el elemento central no podría alcanzar una coordinación de 6 por efectos estéricos, el complejo que se formaría es el siguiente:



Además, los cuatro (4) trímeros que coordinan con el átomo central de aluminio pueden experimentar posteriormente condensación intramolecular, por olación, con eliminación de agua:



Conformándose el ion “Al<sub>13</sub>” (Keggin) y asegurándose la estabilidad del catión. El ion Al<sub>13</sub>, ha sido identificado utilizando SAXS (dispersión de rayos X a bajo ángulo) (Schaefer D.W, et. al 1986) y por un pico pequeño de resonancia del <sup>27</sup>Al NMR a 63.5 ppm (con relación al [Al(H<sub>2</sub>O)<sub>6</sub>]<sup>3+</sup>) (Brinker C.J & Scherer G.W, 1990, Thompson A.R, et al. 1986).

En este trabajo se utilizó el método de precipitación controlada para sintetizar alúmina. Se aplicaron las curvas de valoración potenciométrica para monitorear la evolución del sistema durante la adición de NH<sub>4</sub>OH a una solución de Al<sub>2</sub>(SO<sub>4</sub>)<sub>3</sub> · 18H<sub>2</sub>O con concentraciones 0.1M y 0.3M. Con base en ellas se determinaron las diferentes etapas del proceso y se analizaron los diferentes procesos físico-químicos que pueden ocurrir en el sistema. El polvo cerámico obtenido del sólido precipitado en la solución se caracterizó utilizando difracción de rayos X (DRX), para conocer las bases presentes y su evolución durante los diferentes tratamientos a que fueron sometidas las muestras sólidas y microscopía electrónica de transmisión (MET) para determinar la morfología y el tamaño de la partícula.

## 2. Aspectos experimentales

### 2.1. Valoración Potenciométrica

Se utilizaron cantidades específicas de sulfato de aluminio (precursor), Al<sub>2</sub>(SO<sub>4</sub>)<sub>3</sub> · 18H<sub>2</sub>O marca *Carlo Erba Reagenti*, las cuales se disolvieron en agua destilada para obtener soluciones con concentración 0.1 M y 0.3 M. Manteniendo la solución en constante agitación se adicionó NH<sub>4</sub>OH 28-30% marca *Mallinckrodt*, a una velocidad de 0.03 cm<sup>3</sup> por segundo, hasta llevar la solución a un pH básico. Se tomaron los datos del volumen adicionado de NH<sub>4</sub>OH y la variación del valor de pH, para representar gráficamente el PH de la solución en función del volumen en cm<sup>3</sup>, obteniéndose así las curvas potenciométricas. El pH se midió utilizando un potenciómetro Metrohm 744.

### 2.2. Lavados y redispersión en etanol

Un proceso de lavado y redispersión en etanol absoluto anhidro, marca *Mallinckrodt*, se realizó al precipitado obtenido en el sistema para determinar el efecto del solvente sobre la naturaleza de los compuestos presentes en el polvo cerámico y sobre la morfología y el tamaño de las partículas.

La suspensión coloidal obtenida del proceso de precipitación controlada, se filtró utilizando una bomba de vacío *Buchi B-169*, el sólido húmedo resultante se

redispersó usando un agitador *Rw 20 Janke y Kunkel Kira-labotechik* a una velocidad de 100 r.p.m en un volumen definido de alcohol; se formó nuevamente un gel, el cual se dejó envejecer durante 24 horas para luego volver a repetir el proceso indicado. Este proceso se repitió tres veces. El sólido húmedo, producto del filtrado de la solución obtenida de la tercera redispersión, se secó en una estufa a 70°C durante un tiempo de 24 horas. Luego se molió para obtener un polvo que posteriormente se sometió a diferentes tratamientos en un horno programable durante dos (2) horas.

## 2.3. Caracterización

### 2.3.1. Difracción de rayos x (DRX)

Los difractogramas se tomaron utilizando el difractor marca RIGAKU modelo RING 2200 con geometría Braga-Bietano y Software de operación DMAX. Las condiciones de medición fueron 40 KV y 19 KA, utilizando radiación Cu Kα<sub>1</sub> (λ= 1.54056 Å), con una velocidad de goniómetro de 5-2° /min, empezando en 2° y terminando en 70°.

Las muestras sólidas que se caracterizaron, fueron las que resultaron del filtrado de la suspensión coloidal obtenida a las condiciones indicadas anteriormente y secadas posteriormente a una temperatura de 70°C en una estufa durante 24 horas; también se estudió la evolución de las fases cristalinas presentes en las muestras cuando se sometieron a diferentes tratamientos térmicos.

### 2.3.2. Microscopía electrónica de transmisión (MET)

Para determinar el tamaño y la morfología de las partículas principalmente γ y α-Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>, se tomaron muestras del polvo cerámico y se depositaron en rejillas de níquel 300 MESH, utilizando los métodos normales de precipitación de muestras para microscopía: el porta muestra se colocó en la cámara del microscopio de transmisión JEOL-EX 1200 para observar los polvos cerámicos depositados en ellas.

## 3. Resultados y discusión

### 3.1. Valoración potenciométrica

La curva de valoración potenciométrica de la figura 1a, cuyo comportamiento es el normal de una titulación ácido-base, presenta tres regiones muy bien definidas: dos pasos (AB y CD) y un salto (BC). Este proceso se describe en un artículo anterior (Rodríguez-Páez J.E, et al. 2001). La primera región AB corresponde a una zona prácticamente plana, con poca variación de pH y alto consumo de

OH<sup>-</sup> por parte del sistema. La segunda región, BC, muestra una marcada variación de pH y la última, CD, correspondería a la región de saturación y ocurre a un valor de pH aproximadamente de 10.

La figura 1 también muestra cómo se modifican las curvas de valoración potenciométrica al variar la concentración inicial de Al<sub>2</sub>(SO<sub>4</sub>)<sub>3</sub> en ellas son evidentes las tres regiones mencionadas anteriormente. La extensión de la región AB se incrementa en la medida en que aumenta la concentración inicial del precursor y dado que en esta región ocurren las reacciones de hidrólisis y policondensación que conducen a la formación de los núcleos de la fase sólida, siendo por tanto la nucleación el proceso más importante en la región, es de esperar que la cantidad de núcleos que se formen sea mayor para el sistema con mayor concentración de Al<sub>2</sub>(SO<sub>4</sub>)<sub>3</sub>. El valor de pH correspondiente al punto A es aproximadamente 3.2 y el salto de pH en la región BC es de aproximadamente 5.0 unidades independientes de la concentración inicial del precursor de aluminio. A un valor de pH aproximadamente igual a 8.8, cerca al punto C, el sistema se torna completamente lechoso. De este gráfico se determinó el valor de pH correspondiente al punto de equivalencia, cuyo valor es de aproximadamente 5.5.

### 3.2. Análisis de las curvas de valoración

A bajos valores de pH la especie [(Al(H<sub>2</sub>O)<sub>6</sub>]<sup>3+</sup> debe coexistir con los cationes básicos [(Al(H<sub>2</sub>O)<sub>5</sub>(OH)]<sup>2+</sup> y [(Al(H<sub>2</sub>O)<sub>4</sub>(OH)<sub>2</sub>]<sup>+</sup> (Baes C.F. & Mesmer R.E. 1976, Burriel F, *et al.* 1994, Kubota H. 1956, Matijevic E, *et*

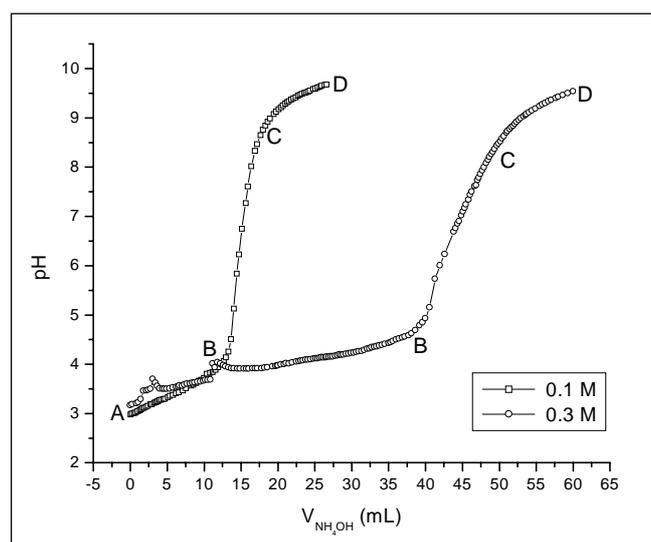


Figura 1. Curvas de valoración potenciométrica para diferentes concentraciones de Al<sub>2</sub>(SO<sub>4</sub>)<sub>3</sub>.

*al.* 1961) productos de la reacción de hidrólisis por lo que se deben precipitar sales básicas de aluminio. En las condiciones de síntesis, los sulfatos básicos de aluminio son menos solubles que el hidróxido de aluminio o el sulfato de aluminio sólo (Sing S.S, & Can. J. 1969). Según la literatura (Kubota H., 1956, Matijevic E., *et al.* 1961) los complejos mononucleares deben existir en mayor cantidad en el sistema que contiene una concentración menor de Al<sub>2</sub>(SO<sub>4</sub>)<sub>3</sub> y la especie [(Al(H<sub>2</sub>O)<sub>5</sub>(OH)]<sup>2+</sup> se debe formar rápida y reversiblemente para valores de pH superiores a 3 (Burriel F, *et al.* 1994). Los protones H<sup>+</sup> que se generan durante la formación de las especies mononucleares neutralizarían los OH<sup>-</sup> producidos por la disociación del NH<sub>4</sub>OH que se adiciona a la disolución. Esto justifica, en parte, el alto consumo de iones hidróxido en la región AB.

Al incrementar la concentración inicial de Al<sub>2</sub>(SO<sub>4</sub>)<sub>3</sub> la formación de los complejos hidroxopolinucleares es el proceso más importante (Baes C.F & Mesmer R.E. 1976, Matijevic E, *et al.* 1961, Vermeulen A.C, *et al.* 1975). Desafortunadamente no existe un consenso general sobre la identidad exacta y el número de tales especies poliméricas en disolución. Las especies polinucleares [Al<sub>2</sub>(OH)<sub>2</sub>(H<sub>2</sub>O)<sub>8</sub>]<sup>4+</sup>, [Al<sub>13</sub>O<sub>4</sub>(OH)<sub>24</sub>(H<sub>2</sub>O)<sub>12</sub>]<sup>7+</sup> y [Al<sub>3</sub>(OH)<sub>4</sub>(H<sub>2</sub>O)<sub>9</sub>]<sup>5+</sup> deben predominar entre valores de pH 3.5 y 4.5 la primera especie polinuclear garantiza la formación de sulfato básico de aluminio con fórmula [Al<sub>2</sub>(OH)<sub>2</sub>(H<sub>2</sub>O)<sub>8</sub>](SO<sub>4</sub>)<sub>3</sub> en el sistema (Baes C.F & Mesmer R.E. 1976) Esta sal básica de aluminio se conformaría en la región AB de las curvas de valoración y contribuiría a justificar el gran consumo de OH<sup>-</sup> que registra la curva de valoración. Por otro lado, la especie polinuclear puede conformar otros sulfatos básicos de aluminio que incorporen en su estructura amonio. (NH<sub>4</sub>)<sub>7</sub>[Al<sub>13</sub>O<sub>4</sub>(OH)<sub>24</sub>(H<sub>2</sub>O)<sub>12</sub>](SO<sub>4</sub>)<sub>7</sub>·χH<sub>2</sub>O (Johansson, G. 1960). Un esquema general de la conformación de una fase sólida en el seno de la solución de sulfato de aluminio se puede proponer considerando que durante la adición de NH<sub>4</sub>OH, a la disolución de Al<sub>2</sub>(SO<sub>4</sub>)<sub>3</sub>, los iones Al<sup>3+</sup> irán formando iones polinucleares complejos a través del proceso de olación (M-OH + M-OH<sub>2</sub> → M-OH-M + H<sub>2</sub>O) y oxolación (M-OH + M-OH → M-O-M + H<sub>2</sub>O) y que finalmente se conformarían, por interacción entre las especies de iones, complejos polinucleares de sulfatos básicos de aluminio; estos complejos polinucleares actuarían como precursores en la formación de los embriones (Tezak B. 1966, Brace R. & Matijevic E. 1973).

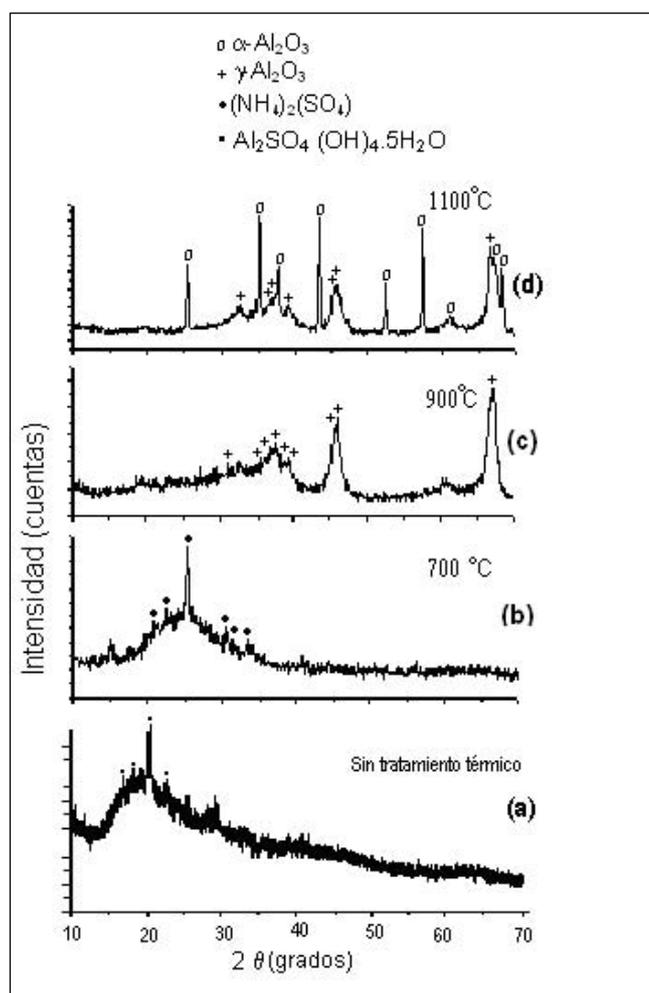
Ellos se irán formando a medida que se adiciona el NH<sub>4</sub>OH a la solución, principalmente en la zona AB de las curvas de valoración potenciométrica (figura 1). Por último, las especies conformarían los núcleos de la fase sólida por la condensación de los compuestos que continuamen-

te se van formando en la suspensión coloidal. Dado que la concentración de los complejos de aluminio no solubles, y ligeramente solubles, en la solución aumenta, esto permite que se alcance la condición de sobresaturación del sistema y que a través de esta fuerza conductora se conformen los núcleos. Debido al pequeño tamaño de los núcleos, unos pocos nanómetros, las fuerzas superficiales que actúan entre ellos adquirirán valores muy grandes que favorecerán la aglomeración de los mismos.

### 3.3. Caracterización de la fase sólida

#### 3.3.1 Difracción de rayos x (DRX)

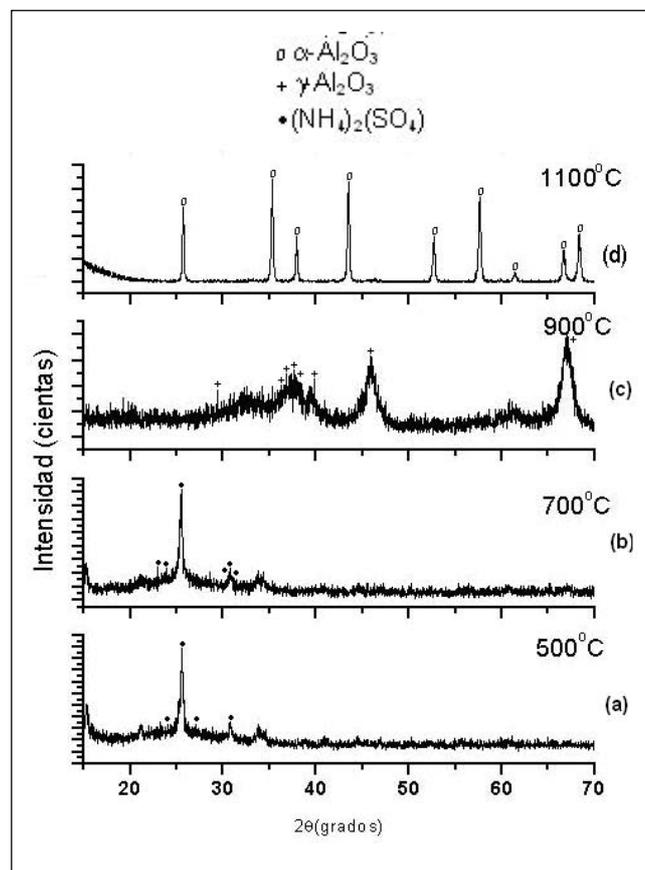
En las figuras 2 y 3 se muestran los difractogramas de rayos x de las muestras sólidas secas, y posteriormente tratadas térmicamente durante 2 horas, correspondientes



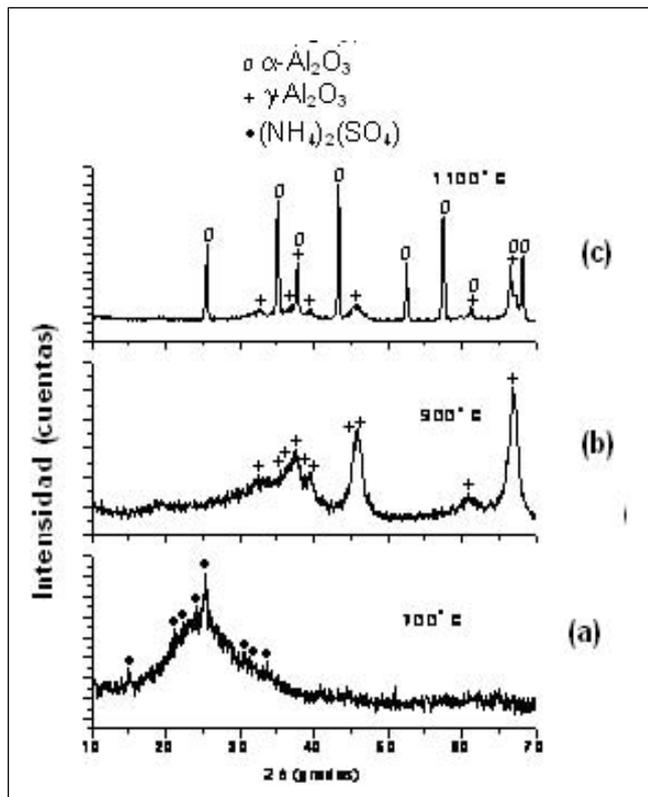
**Figura 2.** Difractogramas de rayos-x correspondientes a muestras sólidas del sistema  $\text{Al}_2(\text{SO}_4)_3$  0.1M, pH 5.55, tratadas a: (a) secada a 60°C, (b) 700°C, (c) 900°C y (d) 1100°C.

a sistemas con diferente concentración de precursor y a un pH dado de la suspensión de 5.5. La figura 2(a) muestra los DRX de los sólidos correspondientes al sistema con una concentración 0.1M de sulfato de aluminio a un valor de pH de 5.5 (corresponde al punto de equivalencia de la figura 1) El difractograma correspondiente a la muestra seca 2(a), indica que el sólido es amorfo con algunos picos incipientes de sulfato básico de aluminio **SBA**  $\text{Al}_2\text{SO}_4(\text{OH})_4 \cdot 5\text{H}_2\text{O}$  PDF 320027. Al tratar térmicamente la muestra a 700° C, figura 2(b), es evidente la presencia de un sulfato de amonio  $(\text{NH}_4)_2\text{SO}_4$  (PDF 46-1212). La muestra tratada a 900° C, figura 2(c), presenta como fase cristalina importante la  $\gamma\text{-Al}_2\text{O}_3$  (PDF 48-0367) y si se trata a 1100°C se obtiene una mezcla de las fases  $\gamma\text{-Al}_2\text{O}_3$  (PDF 48-0367) y  $\alpha\text{-Al}_2\text{O}_3$  (PDF 76-144), esta última en mayor cantidad (figura 2(d)).

La figura 3 muestra los DRX de los sólidos obtenidos del sistema con una concentración 0.3M de sulfato de aluminio y a un valor de pH de 5.5. La muestra tratada a



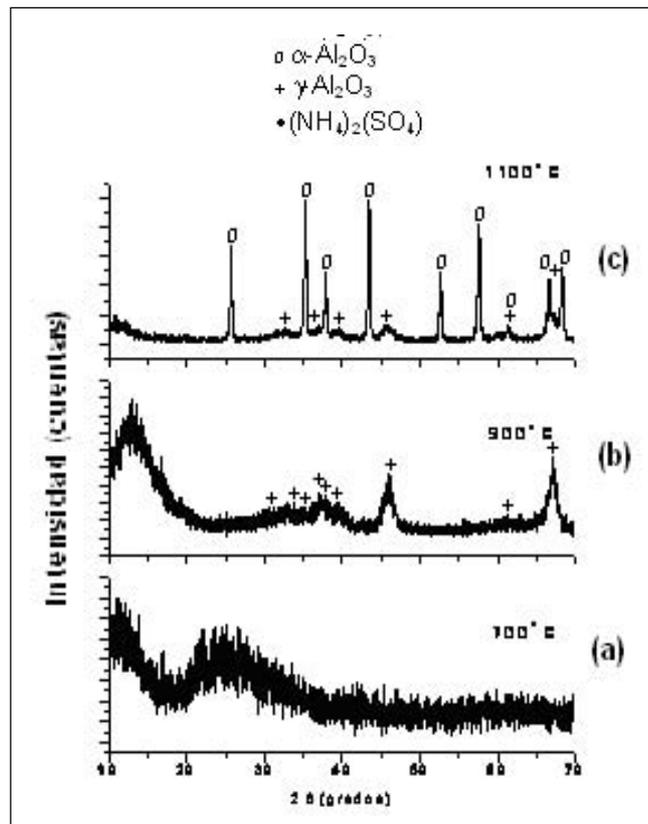
**Figura 3.** Difractogramas de rayos-x correspondientes a muestras sólidas del sistema  $\text{Al}_2(\text{SO}_4)_3$  0.3M, pH 5.55, tratadas a: (a) 500°C, (b) 700°C, (c) 900°C y (d) 1100°C.



**Figura 4.** Difractogramas de rayos-x correspondientes a muestras sólidas del sistema  $\text{Al}_2(\text{SO}_4)_3$  0.1M, pH 5.55, primer lavado en etanol con diferentes tratamientos (a) 700°C, (b) 900°C y (c) 1100°C.

500°C es esencialmente amorfa aunque es evidente la presencia de una fase cristalina como el  $(\text{NH}_4)_2\text{SO}_4$  (PDF 46-1212), ver figura 3(a). El DRX de la muestra tratada térmicamente a 700°C no cambia con relación a la muestra a 500°C y es evidente de nuevo la presencia del  $(\text{NH}_4)_2\text{SO}_4$  (PDF 46-1212), figura 3(b). Si se trata térmicamente la muestra a 900°C la principal fase cristalina es  $\gamma\text{-Al}_2\text{O}_3$  (PDF 48-0367), figura 3(c), y un tratamiento a 1100°C permite la formación de la  $\alpha\text{-Al}_2\text{O}_3$  (PDF 76-144), figura 3(d).

Para determinar el efecto del proceso de lavado y redispersión del precipitado en etanol sobre la morfología y el tamaño de partículas, y posibles transformaciones de fase, la suspensión coloidal fue sometida a varios procesos de filtrado-redispersión y envejecimiento, en dicho solvente. Las figuras 4 y 5 muestran los difractogramas correspondientes a la fase sólida del primer y tercer lavado en etanol de la suspensión 0.1M de sulfato de aluminio obtenido a pH 5.5 y los de muestras posteriormente tratadas térmicamente a 700°C, figura 4, si se somete a un trata-

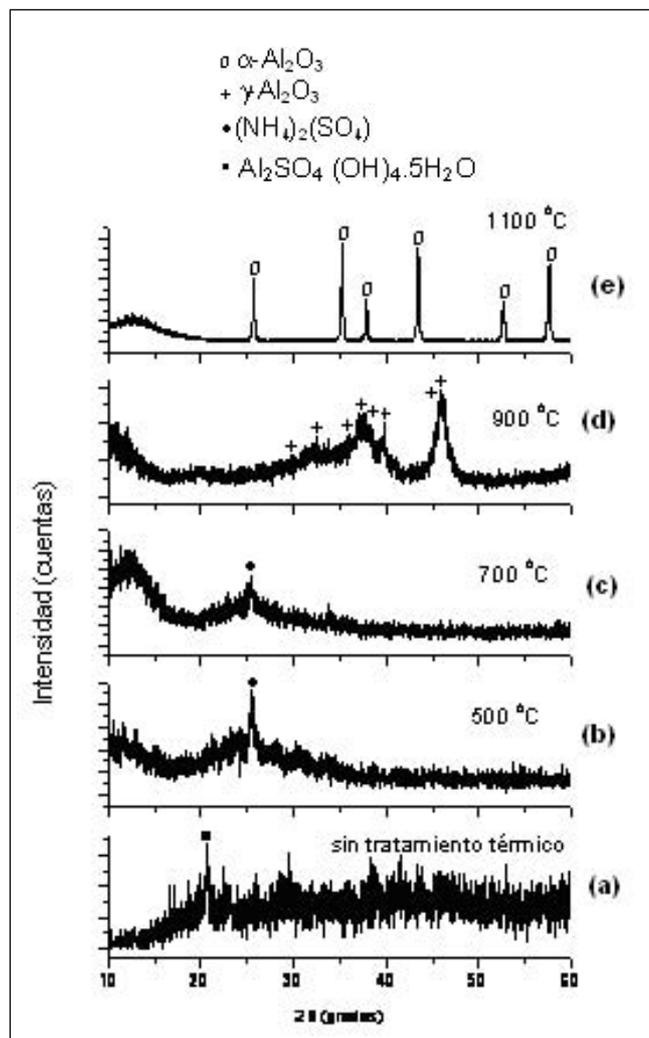


**Figura 5.** Difractogramas de rayos-x correspondientes a muestras sólidas del sistema  $\text{Al}_2(\text{SO}_4)_3$  0.1M, pH 5.55, tercer lavado en etanol con diferentes tratamientos (a) 700°C, (b) 900°C y (c) 1100°C.

miento a 900°C se forma la  $\gamma\text{-Al}_2\text{O}_3$  (PDF 48-0367), única fase cristalina presente en la muestra, figura 4(b). Aunque la muestra tratada a 1100°C presenta un alto porcentaje de  $\alpha\text{-Al}_2\text{O}_3$  (PDF 76-144), aún esta presente la  $\gamma\text{-Al}_2\text{O}_3$ , figura 4(c). En la figura 5 se observa que al lavar por tercera vez el precipitado con etanol no se observan cambios apreciables con relación a la muestra del primer lavado, lo que lleva a concluir que el lavado con etanol, del precipitado obtenido del sistema 0.1M de sulfato de aluminio no favorece la transformación de las fases cristalinas a  $\alpha\text{-Al}_2\text{O}_3$ ; aún tratando la muestra a 1100°C no se consigue la completa transformación  $\gamma\text{-}\alpha$  de la alúmina.

Las figuras 6 y 7 muestran los difractogramas de DRX correspondientes a la fase sólida del primer y tercer lavado en etanol, de la suspensión 0.3M de sulfato de aluminio obtenida a pH 5.45 de las muestras tratadas térmicamente a diferentes temperaturas.

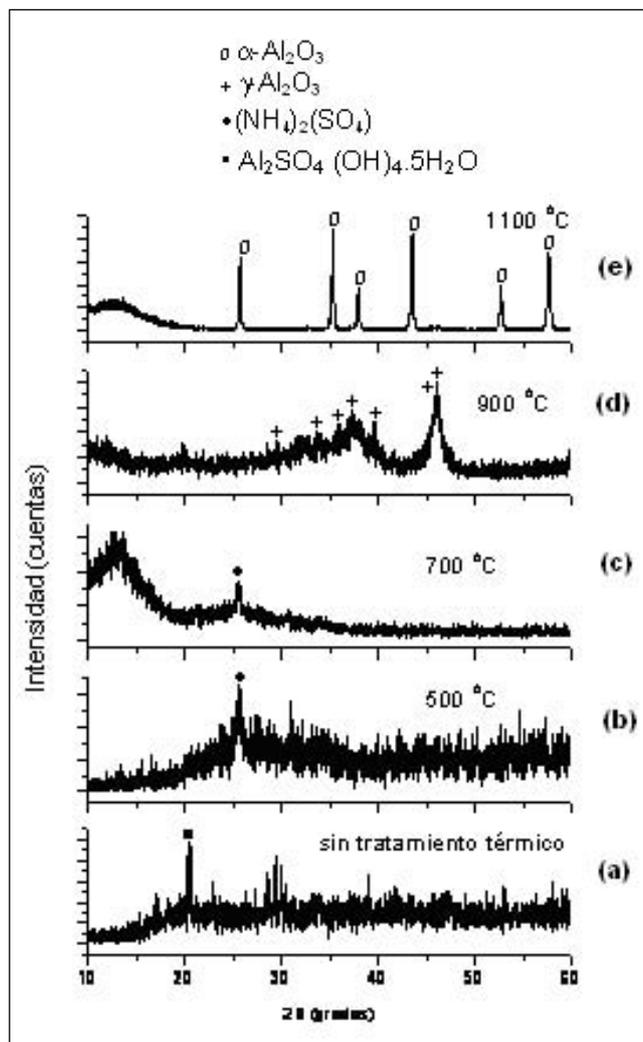
En las figuras 6(a) y 7(a), se puede ver que las muestras a las cuales no se les ha realizado tratamiento térmico muestran un alto grado de amortización pero presentan



**Figura 6.** Difractogramas de rayos-x correspondientes a muestras sólidas del sistema  $\text{Al}_2(\text{SO}_4)_3$  0.3M, pH 5.55, primer lavado en etanol sin tratamiento a diferentes tratamientos (a) Sin tratamiento, (b) 500°C, (c) 700°C, (d) 900°C y (e) 1100°C.

un pico con mayor intensidad característico de un sulfato básico de aluminio **SBA**  $\text{Al}_2\text{SO}_4(\text{OH})_4 \cdot 5\text{H}_2\text{O}$  PDF 320027, un tratamiento térmico a 500°C en la figura 6(b) y 7(b) muestran la transformación a un sulfato de amonio  $(\text{NH}_4)_2\text{SO}_4$  PDF 46-1212, y la presencia de este sigue presente en las muestras lavadas y tratadas térmicamente a 700°C, figura 6c y 7c independiente del número de lavados en etanol. Al tratar las muestras a 900°C, figuras 6(d) y 7(d), la única fase cristalina presente es la  $\gamma\text{-Al}_2\text{O}_3$  (PDF 48-0367) la cual se transforma totalmente en  $\alpha\text{-Al}_2\text{O}_3$  a los 1100°C, figuras 6e y 7e.

De acuerdo con los resultados de DRX, solo las muestras obtenidas del sistema con mayor concentración del

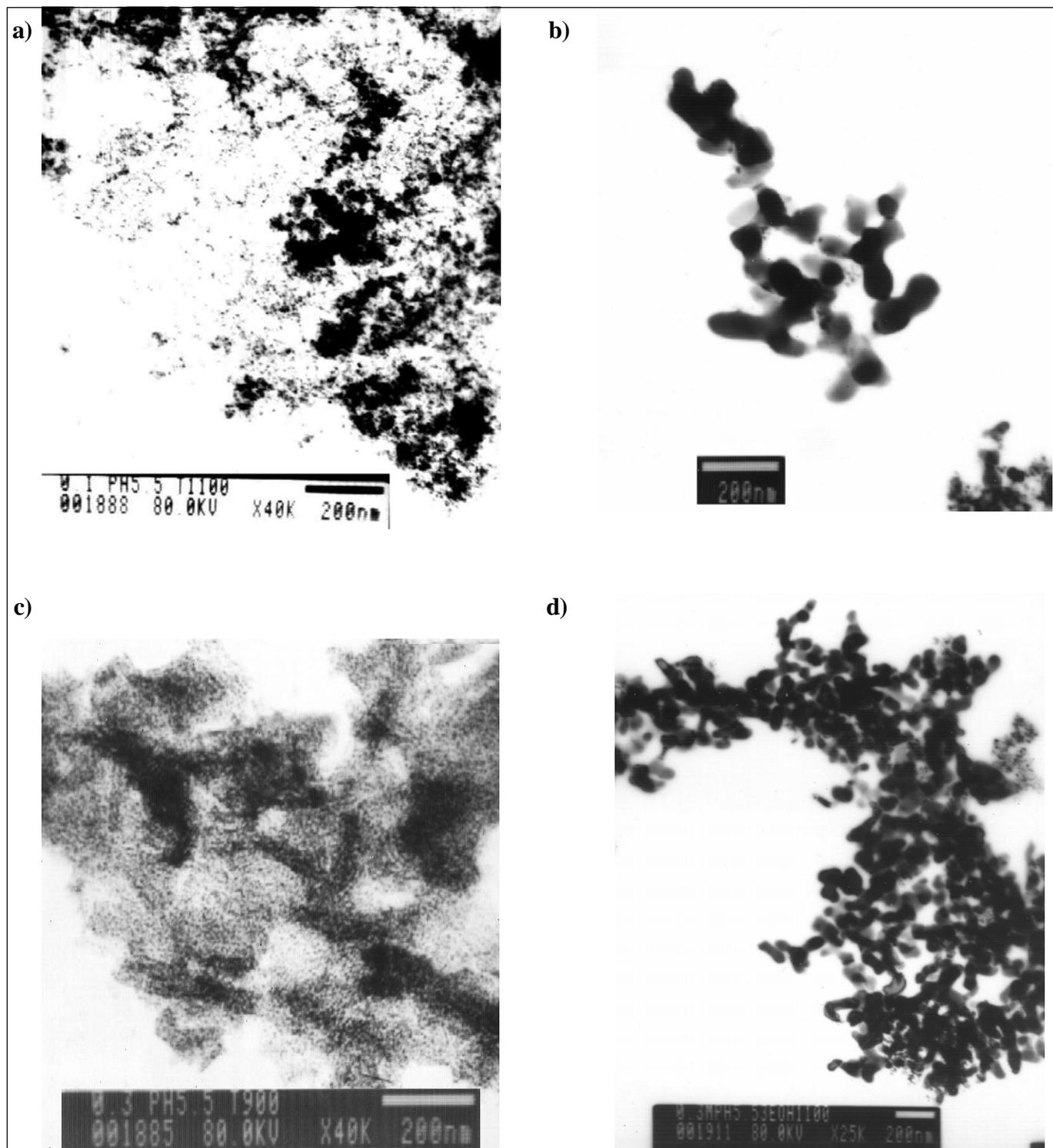


**Figura 7.** Difractogramas de rayos-x correspondientes a muestras sólidas del sistema  $\text{Al}_2(\text{SO}_4)_3$  0.3M, pH 5.55, tercer lavado en etanol a diferentes tratamientos (a) Sin tratamiento, (b) 500°C, (c) 700°C, (d) 900°C y (e) 1100°C .

precursor de aluminio presentan como única fase cristalina la  $\alpha\text{-Al}_2\text{O}_3$  cuando se tratan a 1100°C durante dos horas.

### 3.3.2. Microscopía electrónica de transmisión (MET)

La fotografía de la figura 8a corresponde a una muestra sólida obtenida del precursor  $\text{Al}_2(\text{SO}_4)_3$  con una concentración 0.1M, pH 5.5 y que fue posteriormente tratada a 1100°C la cual presenta la coexistencia de las fases  $\alpha\text{-Al}_2\text{O}_3$  y  $\gamma\text{-Al}_2\text{O}_3$ , figura 2(d). Se observa que el tamaño de las partículas es nanométrico aunque la morfología no es definida ni uniforme. En la figura 8(b) se muestran partículas nanométricas de  $\gamma\text{-Al}_2\text{O}_3$  obtenidas de una solución 0.3M de sulfato de Aluminio a un pH de 5.5, y a las que se



**Figura 8.** Fotografías obtenidas con MET de: (a)  $\alpha$ - $\text{Al}_2\text{O}_3$  y  $\gamma$ - $\text{Al}_2\text{O}_3$  obtenida del precursor  $\text{Al}_2(\text{SO}_4)_3$  0.1M, pH 5.55, con tratamiento térmico a  $1100^\circ\text{C}$ , (b)  $\gamma$ - $\text{Al}_2\text{O}_3$  obtenida del precursor  $\text{Al}_2(\text{SO}_4)_3$  0.3M, pH 5.55, con tratamiento térmico a  $900^\circ\text{C}$ , (c)  $\alpha$ - $\text{Al}_2\text{O}_3$  y  $\gamma$ - $\text{Al}_2\text{O}_3$  obtenida del precursor  $\text{Al}_2(\text{SO}_4)_3$  0.1M, pH 5.55, a las que se les realizó tres lavados con etanol y luego se sometieron a un tratamiento térmico a  $1100^\circ\text{C}$ , (d)  $\alpha$ - $\text{Al}_2\text{O}_3$  obtenida del precursor  $\text{Al}_2(\text{SO}_4)_3$  0.3M, pH 5.55, a la que se le realizó tres lavados con etanol y luego se sometió a un tratamiento térmico a  $1100^\circ\text{C}$ .

les realizó un tratamiento térmico a 900°C, figura 3(c). En ella es nuevamente evidente el tamaño nanométrico de las partículas.

En la figura 8(c), se observa la fotografía de la muestra obtenida de una solución 0.1M de  $\text{Al}_2(\text{SO}_4)_3$ , a un valor de pH de 5.5 y que posteriormente fue sometida a procesos de filtración y redispersión en etanol, secada a 70°C y tratada térmicamente a 1100°C; el DRX de esta muestra indica la coexistencia de las fases  $\gamma$  y  $\alpha$  de la Alúmina, figura 5(c). Las partículas presentan un tamaño aproximado de 200nm y una morfología irregular.

En la figura 8(d) se observan las partículas de  $\alpha\text{-Al}_2\text{O}_3$  obtenidas de una solución 0.3M de sulfato de aluminio, pH final de 5.53, sometida a lavado y redispersión en etanol y a un tratamiento térmico a 1100°C. Es evidente en la fotografía la naturaleza nanométrica de las partículas, un tamaño menor de 200 nm, y la morfología esferoidal de las mismas. La distribución de tamaño de partícula es muy homogénea como se puede ver en la figura.

#### 4. Conclusiones

Del estudio realizado en este trabajo se puede concluir lo siguiente:

- Las curvas de valoración potenciométrica obtenidas del sistema  $\text{Al}_2(\text{SO}_4)_3\text{-NH}_4\text{OH-H}_2\text{O}$  permitieron determinar tres regiones bien definidas durante el proceso de adición del  $\text{NH}_4\text{OH}$ . La región inicial, primer peldaño, presenta un alto consumo de OH- lo que puede representar la formación de especies mononucleares, como el  $\text{AlOH}_2^+$  y el  $\text{Al}(\text{OH})_2^+$  a bajas concentraciones del precursor de aluminio, y de especies polinucleares,  $\text{Al}_2(\text{OH})_{24}^+$  y  $\text{Al}_3(\text{OH})_{45}^+$ , y poliméricas  $\text{Al}_{13}(\text{OH})_{32}^{7+}$  o del  $\text{Al}_{14}(\text{OH})_{34}^{8+}$ , a altas concentraciones. Dado que el  $\text{SO}_4^{2-}$  es un ligando inorgánico, con alto poder aglutinante, puede bloquear uno o más sitios de coordinación del  $\text{Al}_3^+$  posibilitando que este anión actúe como un ligando puente; esto justifica parcialmente su incorporación y presencia en la fase sólida tal como lo muestran los datos de DRX.
- Los resultados de DRX obtenidos indican la presencia de sulfato de amonio en los valores de pH estudiados. A un valor de pH, 5.5, el sulfato de amonio prevalece hasta los 700°C reiterando la estabilidad térmica de los sulfatos de aluminio. La  $\gamma\text{-Al}_2\text{O}_3$  es la fase cristalina principal a la temperatura de 900°C independientemente de la concentración inicial del precursor de aluminio y del pro-

ceso de lavado con etanol. Para la concentración 0.1m de  $\text{Al}_2(\text{SO}_4)_3$ , es posible obtener como única fase cristalina la  $\alpha\text{-Al}_2\text{O}_3$  en muestras tratadas a 1100°C, mientras que a temperaturas inferiores el comportamiento es similar al que se observa en menores concentraciones. Si el objeto es obtener sólo  $\alpha\text{-Al}_2\text{O}_3$ , en el polvo cerámico lo recomendable es trabajar con altas concentraciones de  $\text{Al}_2(\text{SO}_4)_3$  en el proceso de precipitación controlada.

- Las condiciones utilizadas en el proceso de síntesis de alumina empleado favorecen la conformación de partículas de tamaño nanométrico. Concretamente, partiendo de una concentración 0.3M de sulfato de aluminio y cumpliendo todas las etapas del proceso, se obtuvo un polvo cerámico de  $\alpha\text{-Al}_2\text{O}_3$  nanométrico, menor a 200nm, con una morfología esferoidal y con una distribución de tamaño homogénea, tratando térmicamente el precipitado obtenido a 1100°C durante dos horas.

#### 5. Bibliografía

- Baes, C.F., Mesmer, R.E. 1976. "The hidrolisis of cations", Jonh Wiley & Sons, Ltd.
- Brace, R., Matijevic, E., 1973. "Aluminium hydroux oxide sol-I. Spherical Particles of narrow size distribution" Inorg. Nucl. Chem., v 35, 3691-3705.
- Brown, P.L., Sylva, R.N., Batley, G.E., Ellis, J. 1985. J. Chem. Dalton Trans., 1967.
- Brinker, C.J, Scherer, G.W. 1990. "Sol-gel Science; the physics and chemistry of sol-gel Processing", Academic Press, Inc.
- Burriel, F, Conde, F, Arribas, S., Hernández, J. 1994. "Química Analítica Cualitativa", Editorial Paraninfo S.A.
- Evans, H.T. 1966. Inorg. Chem v 5, 967.
- Gitzen, W.H. 1970. "Alumina as a Ceramic Material", The American Ceramic Society, 735 Ceramic Place, Westen Vile, Ohio.
- Johansson, G. 1960. "On the crystal structures of son basic Aluminium salt" Acta Chem. Scand., v 14(3), 771-773.
- Jolivet, J. 2000. "Metal oxide chemistry and syntesis", Jonh Wiley & Sons, Ltd.
- Kubota, H., 1956 "Propieties an Volumetric Determination of Aluminium Ion, dissertation", Univ. Of Wisconsin, Diss. Abstr. v.16, 864
- Matijevic, E., Mathai K.G., Ottewill R.H., Kerker M. 1961. "Detection of Metal-Hydrolysis by Coagulation (III) Aluminium", J. Phys. Chem. v 65, 826-830
- Pierre, A. 1998. "Introduction to sol-gel processing". Kluwer Academic Publisher. Junio.

**Rodríguez-Páez J.E., Villaquirán C., Cobo J.** 2001. "Estudio de la formación de los complejos intermedios durante la síntesis de Alúmina". *Materials Research* v **4**, (4), 255-264.

**Schaefer, D.W, Sheliman, R.A, Keefer, K.D, Martin, J.E.** 1986. *Physica*, 104 A, 105

**Singh, S.S., Can, J.** 1969. *Soil Sci.*, v 49, 383

**Tezak, B.** 1966. "Coulombic and Stereochemical Factors of Colloid Stability of precipitating Systems" *Disc. Faraday Soc.*, v **42**, 175-186.

**Thompson, A.R., Kunwar, A.C., Gutowsky, H.S., Oldfield, E.** 1987. *J. Chem. Soc. Dalton Trans* 23-17.

**Vermeulen, A.C., Geus, J.W., Stol, R:J., de Bruyn, P.L.** 1975. "Hydrolysis-Precipitation Studies of Aluminium (III) Solutions" *J. Colloid Interface Sci.*, v. **51**, (3), 449-458.

Recibido el 15 de abril de 2004.

Aceptado para su publicación el 7 de julio de 2005.

# DISCOVERY OF THE RICHEST FROG FAUNA IN THE WORLD—AN EXPLORATION OF THE FORESTS TO THE NORTH OF LETICIA

by

John D. Lynch\*

## Resumen

**Lynch, J. D.:** Discovery of the richest frog fauna in the World—an exploration of the forests to the north of Leticia. *Rev. Acad. Colomb. Cienc.* **29** (113): 581-588, 2005. ISSN 0370-3908.

A comienzos de 2003 se obtuvieron registros de 97 especies de ranas y sapos en un parche de bosque primario y bosque inundado ubicado aproximadamente 10 kms al norte de Leticia. Sin embargo, hay buenas razones para sospechar que la fauna local consiste en no menos que 123 especies de ranas y sapos, número que supera lo señalado en estudios anteriores realizados en la parte occidental de la cuenca Amazónica. Se sugiere que esta riqueza es más el reflejo del empleo de nuevas metodologías que de la existencia de un “hotspot” biológico.

**Palabras clave:** Amazónico, Diversidad, Metodología de inventario.

## Abstract

Vouchers of 97 species of frogs and toads were obtained in a small section of primary rainforest and flooded forest approximately 10 kms north of Leticia in early 2003. In addition to the 97 species captured, there is good reason to suspect that the actual local fauna consists of no fewer than 123 species of frogs and toads. This local fauna is much larger than previous reports for the western part of the Amazon Basin but probably its size reflects the new methodologies employed rather than a biological “hotspot.”

**Key words:** Amazonian, Diversity, Inventory methodology.

## Introduction

Leticia has always been a seldom-visited site perched in the central Amazon. By 2000, only 40 species of frogs

and toads (**Cochran & Goin**, 1970; **Duellman**, 1972, 1974, **Flores**, 1987, **Goin & Layne**, 1959, **Heyer**, 1994, **Lynch**, 1979, 1980, 1986, 2002, **Lynch & Lescure**, 1980, **Rivero**, 1991, **Rivero & Serna**, 1984, and **Silverstone**,

\* Instituto de Ciencias Naturales, Universidad Nacional de Colombia.

1975, 1976) had been reported from Leticia but I doubted that the fauna had been investigated adequately. Thus, in 2002, I applied for financial support from Conservación Internacional—Colombia to carry out a definitive study of the diversity of frogs and toads in these forests. My team consisted of four undergraduates with a minimum of experience and me. I decided that if we were going to execute this project, we needed a new methodology for an inventory. At the outset, I knew very little (having collected there only a few times in 20 years)—none-the-less, I was convinced that previous inventories had been managed badly—to allow all participants to carry out “free-searches” was inadequate. Hence, I selected my assistants with a proviso—each had to carry out a specific task and, then, if they wanted, they could join me in nocturnal forays. Long before leaving Bogotá, I had decided that I needed four specialists to back-up my unrestrained nocturnal searches—thus, I assigned to each undergraduate a specific task: (1) To Andrés Duarte, the monitoring of a system of pitfall traps (of 5 gallons, bordered by three drift fences two meters long)—he would need to check each trap three times a day (0600, 1200 and 1800 hrs) and record who had fallen in. This would enable me to sample the terrestrial fauna, a component I had long forgotten in my quest for centrolenids and eleutherodactylines. Years ago, I had recognized my failing of ignoring the ground-fauna. (2) To Jonh Jairo Mueses, another task for which I did not have the patience, to census a single forest pond, night after night, to see who was breeding and who was merely sitting there (with this task, I hoped to show that much of the frog fauna exhibited explosive breeding). (3) To David Sánchez fell the task of collecting tadpoles whenever and wherever he could (largely, daytime work). And, (4) To Adriana Téllez fell the task of sampling the canopy fauna (initially, we planned merely to sample adults and tadpoles in arboreal bromeliads but eventually, we used also felling of primary forest and occasional visits to a canopy platform).

Initially, I had constructed an expected fauna, using all published accounts and records for the Amazon basin (Acosta, 2000, Ardila R & Ruiz C, 1997, Duellman, 1973, Lutz & Kloss, 1952, Myers & Carvalho, 1945, and Ruiz C *et al.*, 1996) and my estimates of the distributional areas for Amazonian species. My initial construct was too ambitious—I imagined a fauna of more than 130 species of frogs and toads. Furthermore, I assigned each species to one of four habitat contingencies: (A) terrestrial, (B) aquatic, (C) canopy, and (D) inhabitant of the understory. In many cases, my assignments were based on my experiences collecting the frogs—in other cases, my failures to find them (a mixture of positive and negative evidence).

We set out to conduct a five-pronged inventory. Four prongs covered each of the assigned tasks and the fifth was my free search of microhabitats (aided by my students, each of whom decided that finding frogs was more enjoyable than sleep). Our fieldwork was carried out between Dec. 24, 2002, and March 31, 2003, essentially at three localities (Km 10 and Km 11, along the only road in the department, the Leticia—Tarapacá road, and along the northern shores of Lago Yahuaraca). We also explored other nearby localities but these three appear to cover the entire fauna—two in *tierra firme* forest (Km 10 and 11) and one in *varzea* (Lago Yahuaraca).

In retrospect, I erred in constructing the team—I should have included a specialist to care for amplexant pairs of frogs (and to recover the tadpoles produced by them). Likewise, I underestimated how complex was the canopy—I should have included one, or more, persons to conduct nightly searches, using climbing equipment. But, we all learn from our mistakes.

Before this project began, the storied locality for the Amazon Basin was the study reported by Duellman (1978) for Santa Cecilia, in eastern Ecuador—a locality that eventually yielded 86 species (Duellman, 1990). Looking at the general trend of diversity across the Amazon Basin (low to the east, but building to the west), one might imagine a fauna of 60 or 70 species for Leticia. In a bit over 90 days, I and my students managed to secure preserved vouchers for 96 species of frogs and toads—in the following year, I added species number 97 to the fauna and we now have 98 documented.

A frog fauna of 96 or 98 species is truly impressive but is not a testimony to our efficiency. Furthermore, when one reflects upon previous records from nearby sites (Benjamin Constant, in Brasil, or Puerto Nariño, in Colombia, or, Leticia, itself), the local frog fauna swells considerably—to 123 species—and this number, however impressionable, does not include species that live there but that no one has ever seen.

## Materials and Methods

All specimens preserved from this study reside in the collection of Amphibians in the Instituto de Ciencias Naturales. The methods employed were five: (1) **The free-search method**: nocturnal surveys inspecting the understory as well as being directed towards calling males; this technique varied nearly every night—some nights were confined to pond-free forest trails, others to lake edges, others to marshes and ponds within the forest and, only occasionally, with attention to terrestrial

individuals. (2) **Pit-fall traps:** these were five-gallon buckets buried in the forest soil and armed with three two-meter long drift fences (set at 120°) and revised three times per day for 15 days and then moved to another patch. (3) **Census of a single forest pond:** nightly visits with counts of individuals/ species and notes on their activities with daytime measures of depth and extent of the pond. (4) **Tadpole searches:** this was a daytime activity, searching any body of water for tadpoles within the areas being searched for adults. (5) **Canopy fauna:** three sub-methods were used—in order of use—(a) inspection of individual bromeliads, between six and 13 meters above the forest floor, enclosed within a gunny sack and lowered to ground-level, (b) harvesting the frogs sitting at night on trees felled during the day, and (c) visual inspection of frogs from a platform 34 meters above the forest floor (Km 11).

## Results

Although the distances between collecting sites were minor, we sampled two very distinctive assemblages within the Amazonian rainforests—(A) the *varzea* or seasonally flooded forest and (B) the *tierra firme* forests; accordingly, I will separate the results using this initial filter.

**Varzea:** During December 2002—March 2003, it was not possible to walk in these forests (between the Quebrada Yahuaraca and Lago Yahuaraca) because they were under two to six meters of water—in that time frame, we sampled the canopy fauna using boats and native climbers. In January, July, and September 2004 (and in July 2005), I sampled these forests during low water. I also had sampled these forests in July 2001. Some additional data for this class of forest comes from the relatively nearby Parque Nacional Natural de Amacayacu (sampled in September 1985 and April 2001).

If we restrict our inspection to the site near Leticia (Yahuaraca), the frog fauna consists of only 27 species (25 as vouchered specimens, neither *Bufo marinus* nor *Pipa pipa* was preserved). The preserved samples include two dendrobatids (*Epipedobates femoralis*, *E. hahneli*), 18 hylids (*Dendropsophus brevifrons*, *D. haraldschultzi*, *D. leucophyllatus*, *D. rossalleni*, *D. triangulum*, *D. sp.* [grupo *microcephala*], *Hypsiboas lanciformis*, *H. punctatus*, *H. raniceps*, *H. sp.*, *Scarthyra goinorum*, *Scinax garbei*, *S. ruber*, *S. sp.* [grupo *rostratus*], *Sphaenorhynchus carneus*, *S. dorisae*, *S. lacteus*, *Trachycephalus venulosus*), and five leptodactylids (*Adenomera hylaedactyla*, *Eleutherodactylus zimmermannae*, *Leptodactylus bolivianus*, *L. leptodactyloides*, *L. petersi*).

Collections made in the flooded forests in the Parque Nacional Natural Amacayacu add one toad (*Bufo roqueanus*), four hylids (*Dendropsophus koechlini*, *Hypsiboas fasciatus*, *H. geographicus*, *Osteocephalus yasuni*), one leptodactylid (*Hydrolaetatre schmidti*), and one microhylid (*Hamptophryne boliviana*).

Of the species we collected in these two sites in the *varzea*, most are common frogs, known for decades from this part of Colombia (and elsewhere). Only four species can be viewed as rare—*Dendropsophus koechlini*, a species not previously known for Colombia (this represents its northernmost locality), *D. rossalleni* is a species rarely collected and we only found a single individual (secured during a treefall—suggesting that it is a canopy species), *Hypsiboas raniceps*, a species not previously known from Colombia but very abundant in the *gramalote* (this represents its westernmost locality but the species is also widely distributed in southern Brasil and northern Argentina, **Cei**, 1980), and *Eleutherodactylus zimmermannae*, an uncommon frog living in arboreal bromeliads in Colombia (this represents its westernmost locality). Of the 33 species documented for the flooded forests, only seven are restricted to the flooded forests (that is, we failed to find them in our more extensive explorations of the *tierra firme* forests): *Dendropsophus koechlini*, *D. rossalleni*, *Hypsiboas raniceps*, *H. sp.* (at present known only from tadpoles), *Scarthyra goinorum*, *Scinax sp.* and *Leptodactylus bolivianus*. However, the rarity of the two *Dendropsophus* in our collections (single individuals of each) must be taken into account—neither may be confined to such forests.

**Tierra firme:** Most of our collections in these forests were made in the *resguardas* of the *Uitotos* at sites locally called Km 7, Km 10, and Km 11. Additionally, we sampled at Kms 13.5, 18.5, 21, and 23. The additional sites did not yield species not found in the small area beside the Río Tacana, seven to eleven kilometers north of Leticia (along the Leticia—Tarapacá road), aside from *Lithodytes lineatus* (only found at Km 23) and *Phyllomachus petersi* (only found at Km 18.5). In our collections, some species are known from only one of the sites within the *Uitoto resguardas* but most were found at each of the three sites (although we spent less time at Km 7, the *comunidad Jitoma*).

Species list using current family groups—BUFONIDAE: *Bufo castenoticus*, *B. ceratophrys*, *B. marinus*, *B. roqueanus*, *B. sp.*, *B. sp.*, (both *Bufo sp* appear to be undescribed and are under study by Claudia Vélez), *Dendrophryniscus minutus*. CENTROLENIDAE: *Cochranella ametarsia* (Fig. 2), *C. sp.*, *Hyalinobatrachium*

sp. DENDROBATIDAE: *Colostethus trilineatus*, *Dendrobates ventrimaculatus*, *Epipedobates femoralis*, *E. hahneli*, *E. trivittatus*. HYLIDAE (novel taxonomy follows **Faivovich et al.**, 2005): *Cruziohyala craspedopus*, *Dendropsophus bokermanni*, *D. brevifrons*, *D. haraldschultzi*, *D. leucophyllatus*, *D. marmoratus*, *D. minutus*, *D. parviceps*, *D. rhodopeplus*, *D. riveroi*, *D. sarayacuensis*, *D. triangulum*, *D. sp.* (*microcephalus* group), *Hemiphraactus proboscideus*, *H. scutatus*, *Hypsoboas* “*albo-punctulata*”, *H. boans*, *H. calcaratus*, *H. fasciatus*, *H. geographicus*, *H. granosus*, *H. hobbsi*, *H. lanciformis*, *H. microdermus*, *H. ornatissimus*, *H. punctatus*, *Nyctimantis rugiceps* (Fig. 3), *Osteocephalus cabrerai*, *O. deridens*, *O. heyeri*, *O. planiceps*, *O. taurinus*, *O. yasuni*, *Phyllomedusa bicolor*, *P. tarsiis*, *P. tomopterna*, *P. vaillanti*, *Scinax cruentommus*, *S. funereus*, *S. garbei*, *S. ruber*, *Sphaenorhynchus carneus*, *S. dorisae*, *S. lacteus*, *Trachycephalus coriaceus* (Fig. 6), *T. resinifictrix*, *T. venulosus*. LEPTODACTYLIDAE: *Adelophryne adiastrata* (Fig. 1), *Adenomera hylaedactyla*, *Ceratophrys cornuta*, *Edalorhina perezii*, *Eleutherodactylus acuminatus*, *E. altamazonicus*, *E. carvalhoi*, *E. croceinguinis*, *E. malkini*, *E. nigrovittatus*, *E. ockendeni*, *E. peruvianus*, *E. sulcatus*, *E. zimmermannae*, *Ischnocnema quixensis*, *Leptodactylus diedrus*, *L. knudseni*, *L. leptodactyloides*, *L. pentadactylus*, *L. petersi*, *L. rhodomystax*, *L. stenodema*, *Lithodytes lineatus*, *Physalaemus petersi*, *Phyllonastes myrmecoides* (Fig. 4). MICROHYLIDAE: *Chiasmocleis bassleri*, *C. ventrimaculata*, *C. sp.*, *Hamptophryne boliviana*, *Syncope carvalhoi* (Fig. 5). PIPIDAE: *Pipa pipa*.

Most of these species were not found in inventory work in the flooded forest, suggesting very strongly that within a few kilometers, one moves from one frog fauna to another. Against this argument are several species which are very abundant in the flooded forest but present (and rare) in the *tierra firme* forests.

Six named species are vouchered for Leticia (records published or not) but we did not collect them: *Hydrolaetare schmidti*, *Leptodactylus fuscus*, *L. mystaceus*, *Pseudopaludicola ceratophyes*, *Pipa snethlageae*, and *Rana palmipes*. Four others are vouchered (and published) for Benjamin Constant in Amazonas, Brasil and surely occur at Leticia: *Bufo dapsilis*, *Cochranella ritae*, *Hemiphraactus helioi*, and *Eleutherodactylus ventrimarmoratus*. For twelve other species, vouchers exist for nearby localities (Amacayacu, Calderón, Isla Santa Sofia, Loretoyacu, Puerto Nariño, or Tarapacá) and they too are expected for this local fauna: *Atelopus pulcher*, *Colostethus faciopunctulatus*, *Ctenophryne geayi*, *Eleutherodactylus aaptus*, *E. conspicillatus*, *E. lanthanites*, *E.*

*lythrodes*, *E. vilarsi*, *Hypsiboas hutchinsi*, *Leptodactylus discodactylus*, *L. riveroi*, and *Osteocephalus mutabor*. Lastly, I suspect that *Adenomera andreae*, *Dendropsophus miyatai*, and *Hypsiboas tuberculosus* occur in the local fauna as well although the nearest published (or known to me) records are more distant.

## Discussion

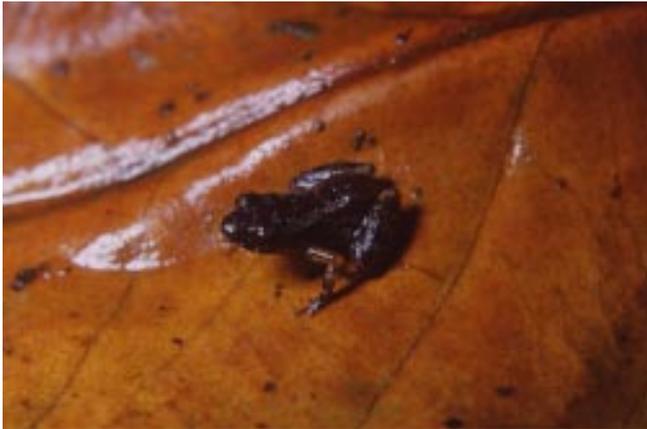
The documented frog fauna of this patch of forest centered on the *Uitoto* communities at Kms 10 and 11 consists of 27 species captured in seasonally flooded forests and 94 species captured in *tierra firme* forests with 23 shared species (Table 1) as well as six other species documented for “Leticia” or “forests near Leticia” by others (104 species in total). However, for an additional 19 species (Table 2), I am convinced that they too form part of this fauna because there are locality records nearby (within 50 km within forests that appear the same to me). Although every species must have a distributional limit somewhere, 50 kms strikes me as a trivial distance within the *hyalea* when our new records offer distributional extensions of as much as 800—1000 kms, especially for hylids, re-inforcing the criticism of **Heyer et al.** (1999) about generalizations drawn from the known distributions for frogs of that family. Thusly, I consider the fauna to contain no fewer than 123 species of frogs and toads of which we collected nearly 80% in three months of fieldwork.

And, What of my “New” methodology to do inventories? It contained two elements: (1) forced, permanent, attention towards four submethodologies and the liberal application of a general methodology and (2) assignment of every known or suspected species to one of four habitat contingencies (aquatic, canopy, terrestrial, or understory).

In terms of (1), we had excellent success as measured in terms of collecting efficiency. Of an enormous local frog fauna estimated at 123 species, we required fewer than 100

**Table 1.** The 98 species of frogs and toads vouchered (in the collections of the ICN) for the forests just to the north of Leticia.

Family	Varzea	Shared	Tierra firme
Bufo	1	1	7
Centrolenidae	0	0	3
Dendrobatidae	2	2	5
Hylidae	18	15	48
Leptodactylidae	5	4	25
Microhylidae	0	0	5
Pipidae	1	1	1
Totals	27	23	94



**Figura 1.** *Adelophryne adiaistola*. ICN 50253, Km 10, carr. Leticia—Tarapacá. A rare, miniature frog species.



**Figura 4.** *Phyllonastes myrmecoides*. ICN 46195, Km 13.8. First record for Colombia for this miniature species found in leaf-litter.



**Figura 2.** *Cochranella ametarsia*. ICN 50846, Km 10. A rare species found in the canopy.



**Figura 5.** *Syncope carvalhoi*. ICN 51769, Km 7.5, *Comunidad Jitoma*. The smallest species found in these forests—relatively common in leaf-litter.



**Figura 3.** *Nyctimantis rugiceps*. ICN 50660, Km 10. First record for Colombia for this canopy species.



**Figura 6.** *Trachycephalus coriaceus*. ICN 50664, Km 10. First record for Colombia for this canopy species.

**Table 2.** Species anticipated but not yet known (in the ICN collections) for Leticia and their estimated habitat contingency.

	Anticipated species lacking vouchers
<i>Adenomera andreae</i>	terrestrial
<i>Atelopus pulcher</i>	terrestrial
<i>Bufo dapsilis</i>	terrestrial
<i>Cochranella ritae</i>	canopy
<i>Colostethus faciopunctulatus</i>	terrestrial
<i>Dendropsophus miyatai</i>	canopy
<i>Eleutherodactylus aaptus</i>	underbrush
<i>Eleutherodactylus conspicillatus</i>	terrestrial or underbrush
<i>Eleutherodactylus lanthanites</i>	terrestrial or underbrush
<i>Eleutherodactylus lythodes</i>	underbrush
<i>Eleutherodactylus ventrimarmoratus</i>	canopy
<i>Eleutherodactylus vilarsi</i>	terrestrial or underbrush
<i>Hemiphractus helioi</i>	terrestrial
<i>Hypsiboas hutchinsi</i>	canopy with tadpoles in streams
<i>Hypsiboas tuberculatus</i>	canopy
<i>Leptodactylus discodactylus</i>	terrestrial
<i>Leptodactylus riveroi</i>	terrestrial
<i>Osteocephalus mutabor</i>	canopy
<i>Ctenophryne geayi</i>	terrestrial
	Species known for the site but which we failed to collect
<i>Hydrolaetare schmidti</i>	aquatic
<i>Leptodactylus fuscus</i>	terrestrial
<i>Leptodactylus mystaceus</i>	terrestrial
<i>Pipa snethlegae</i>	aquatic
<i>Pseudopaludicola ceratophyes</i>	terrestrial
<i>Rana palmipes</i>	terrestrial near streams

days to secure specimens of 98 of those. Cuzco Amazonico (Duellman, 2005) and Santa Cecilia (Duellman, 1978, 1990) represent lesser faunas requiring much more human investment (as measured in person months).

I do not think the data acquired are suggestive that Leticia is an extraordinarily rich “hotspot” in the western Amazon. It is possible to forge lists of species for which Leticia represents the northernmost locality, the easternmost locality, the westernmost locality, and the southernmost locality but this zoogeographic “analysis” presupposes the existence of discrete geographic communities of frogs and toads. My expectation is that other localities in the western part of the Amazon Basin are equally (or more rich) as rich as Leticia but were sampled with less effective methodologies.

In terms of (2), we lack a means of making a meaningful comparison. On the one hand, we do have my informed/uninformed guesses of the habitat contingency for the 134 species so classified. Now, armed with data collected, I claim not 134 but only 123 species and between 15 and 16% of those remain to be documented. My original classification

of species into contingencies received a good deal of revision (mostly removing species from the understory habitat [where I had found them previously] and re-assigning them to an unexplored habitat [the canopy]). The material basis for this reclassification was the unpublished undergraduate thesis of one of my students (Téllez, 2004) and she will report her results separately.

I have continued to do violence with my unsupported assignments evident in Table 2 (about species with which I have zero experience). Of these, I assign two to the aquatic contingency (now and originally, yet they elude me and my assistants). Of the remaining, I assign (now and originally), 12 to the terrestrial contingency and three others to a mixture of habitats (terrestrial and/ or understory). Once again, the few data I have are for certain species from as far away as 300 kilometers (not exactly close, even for the *hyalea*). The morphological data as well as the extrapolations based on reproductive biologies suggest to me that these species are classified correctly. Only two species are exclusive to the understory (the ecological contingency I’ve explored off and on for nearly 40 years). The expected canopy fauna now

includes six species in Table 2 (originally only three of them). Then, in the absence of relevant data, I had assumed that species of the *leucophyllatus* and *parviceps* groups of *Dendropsophus* were species of the understory—because I had caught many of them there (in the lowest three meters of this very deep forest). In December of 1999, esconced along the Río Puré immediately before it leaves Colombia bound for Brasil and the Río Japurá, I learned otherwise—*Dendropsophus parviceps* is an abundant canopy species (any day, there are 100s of individuals concealed there but descending, in mass, to breed explosively at ground level and, perhaps to be captured by a visiting herpetologist for one night or so). I have now generalized these observations (in large part due to our harvests of frogs of these groups from the crowns of trees cut down) and now view all species now assigned to the *D. leucophyllatus* (excepting *D. triangulum*) and the *D. parviceps* groups as canopy species, rarely visiting the zone frequented by herpetologists. In the Amazon, centrolenids are heard frequently, but very high, in the canopy. Given that they reproduce at ground level (so far as we know), we have a chance to catch them. *Cochranella ritae* has been caught (to my knowledge) only four times (1950 [the holotype], 1967 [the holotype of *Centrolenella resplendens*], 1971 [a juvenile from San Miguel de Sucumbios] and 1994 [another juvenile in Amazonas, Colombia])—and its rarity is because it normally occupies a stratum we don't visit. At Leticia, we did relatively well with centrolenids by cutting down palm trees up to 45 meters tall.

My original expectations fare even worse when we consider species now documented for these forests but that I had never imagined lived there (*Dendropsophus koechlini*, *Eleutherodactylus croceingunis*, *Hypsiboas raniceps*, *Nyctimantis rugiceps*, *Osteocephalus deridens*, *O. heyeri*, *O. planiceps*, *O. yasuni*, and *Trachycephalus coriaceus*—these are not necessarily rare species in our collections yet others, long known, have yet to be documented in our inventory (Table 2).

What do we make of this admission? In spite of all our efforts (1999-2005, but especially Dec. 2002—March 2003), certain species remain very rare at our collecting sites. All of our efforts have secured only single specimens of *Cruzihyla craspedopus* (plus a suspected egg mass), *Ceratophrys cornuta*, *Edalorhina perezii* (elsewhere in these forests in the Upper Amazon, much more commonly found), *Dendropsophus koechlini*, *D. minutus*, *D. rossalleni* (if my identification of tadpoles in the *tierra firme* forests is incorrect), *Phyllomedusa tarsius*, *Eleutherodactylus nigrovittatus*, and *Physalaemus petersi*—these nine species (9% of the total found or 7% of the anticipated + known fauna) are not a trivial component—a single “missed” night (for a *fiesta* of whatever

nature) could have changed the list of documented (and/or anticipated) species.

What conclusions might I draw from this “experiment”? The lowland faunas of wet forests are much more complex than I had ever imagined (Lynch, 1979) and, to dissect them, even more complicated. Lastly, I now am very skeptical of just how good is our database for lowland sites in general. Years ago, prior to dedicating myself to the Andean fauna (which I knew to be understudied), I had assumed that the lowland faunas were well studied. The fauna at Leticia calls all of these assumptions into question. Ignoring this lowland fauna, the richest lowland frog fauna (each sample site is in the biogeographic Chocó) for Colombia is that of the Naval Base at Malaga or that in the immediate environs of Quibdó (Lynch, 1998, Lynch & Suárez Mayorga, 2004)—perhaps 70 to 80 species—modest in comparison with Leticia (104 to 123 species). Ignoring these three sites, there is simply nothing comparable—many localities (Andean as well as lowland) with only 20 to 30 species vouchered (reinforcing my opinion, voiced above, that the lowlands have been poorly documented). This criticism cannot be extended to the Andean faunas because, for them, alpha diversity (species number) is notably lower than for lowland sites (Duellman, 1988) whereas beta diversity (geographic replacement of species) is very notable (in lowland sites, beta diversity is modest or non-existent). This last point is evident when we compare species lists for Leticia and Santa Cecilia (broad overlap in lists) but to see beta diversity we need to compare “equivalent” sites separated by trenchant barriers (such as the Andean cordilleras)—Leticia and Malaga share only two species of amphibians (both frogs) out of two lists that include about 200 species of frogs.

### Acknowledgments

Without the dedication and enthusiasm that Andrés Duarte, Jonh Jairo Mueses, Juan Manuel Renjifo, David Sánchez, and Adriana Téllez gave to this project, I would have been unable to execute it. Equally important were my Uitoto friends, especially Rodulfo Mesa and Walter Morales. Logistic support was freely given by Francisca and Héctor Castillo and Santiago Duque. The financial support of Conservación Internacional—Colombia is gratefully acknowledged.

### Literature cited

- Acosta, A. R. 2000. Ranas, salamandras y caeciliias (Tetrapoda: Amphibia) de Colombia. *Biota Colombiana* 1: 289-319.

- Ardila Robayo, M. C. & P. M. Ruiz Carranza.** 1997. Herpetología (Anfibios/ Reptiles), pp. 255-264, En Zonificación Ambiental para el Plan Modelo Colombo-Brasilero (Eje Apaporis—Tabatinga: PAT). Instituto Geográfico Agustín Codazzi.
- Cei, J. M.** 1980. Amphibians of Argentina. *Monitore zoologico italiano/ Italian Journal of Zoology*, new ser., Monogr. (2).
- Cochran, D. M. & C. J. Goin.** 1970. Frogs of Colombia. United States National Museum, Bulletin (288): 1-655.
- Duellman, W. E.** 1972. South American frogs of the *Hyla rostrata* group (Amphibia, Anura, Hylidae). *Zool. Mededel.* 47: 177-192.
- \_\_\_\_\_. 1973. Frogs of the *Hyla geographica* group. *Copeia* 1973: 515-533.
- \_\_\_\_\_. 1974. A reassessment of the taxonomic status of some Neotropical hylid frogs. *Occasional Papers Mus. Nat. Hist., Univ. Kansas* (27): 1-27.
- \_\_\_\_\_. 1978. The biology of an equatorial herpetofauna. University of Kansas/ Museum of Natural History/ Miscellaneous Publication (65): 1-352.
- \_\_\_\_\_. 1988. Patterns of species diversity in Neotropical anurans. *Annals of the Missouri Botanical Gardens* 75: 79-104.
- \_\_\_\_\_. 1990. Herpetofaunas in Neotropical rainforests: comparative composition, history, and resource use, pp. 455-505, In **A. H. Gentry** (ed.), *Four Neotropical Rainforests*. Yale University Press.
- \_\_\_\_\_. 2005. *Cusco Amazonico: The Lives of Amphibians and Reptiles in an Amazonian Rainforest*. Cornell University Press. 472 pp.
- Flores, G.** 1987. A new *Centrolenella* from Amazonian lowlands of Colombia. *Journal of Herpetology* 21: 185-190.
- Faivovich, J., C. F. B. Haddad, P. C. A. Garcia, D. R. Frost, J. A. Campbell & W. C. Wheeler.** 2005. Systematic review of the frog family Hylidae, with special reference to Hylinae: Phylogenetic analysis and taxonomic revision. *Bulletin of the American Museum of Natural History* (294): 1-240.
- Goin, C. J. & J. N. Layne.** 1958. Notes on a collection of frogs from Leticia, Colombia. *Publ. Research Div., Ross Allen's Reptile Institute* 1: 97-114.
- Heyer, W. R.** 1994. Variation within the *Leptodactylus podicipinus-wagneri* complex of frogs (Amphibia: Leptodactylidae). *Smithsonian Contributions to Zoology* (546): 1-124.
- Heyer, W. R., J. Coddington, W. J. Kress, P. Acevedo, D. Cole, T. L. Erwin, B. J. Meggers, M. G. Pogue, R. W. Thorington, R. P. Vari, M. J. Weitzman & S. H. Weitzman.** 1999. Amazonian biotic data and conservation decisions. *Ciencia e Cultura/ Journal of the Brazilian Association for the Advancement of Science* 51: 372-385.
- Lutz, B. & G. R. Kloss.** 1952. Anfibios anuros do Alto Solimoes e Rio Negro/ Apontamentos sobre algunas formas e suas vicariantes. *Memorias Instituto Oswaldo Cruz* 50: 625-678.
- Lynch, J. D.** 1979. The amphibians of the lowland tropical forests, pp. 189-215, In **Duellman, W. E.** (ed.), *The South American Herpetofauna: Its Origen, Evolution, and Dispersal*. Museum of Natural History, University of Kansas, Monographs (7).
- \_\_\_\_\_. 1980. A taxonomic and distributional synopsis of the Amazonian frogs of the genus *Eleutherodactylus*. *American Museum Novitates* (2696): 1-24.
- \_\_\_\_\_. 1986. New species of *Eleutherodactylus* of Colombia (Amphibia: Leptodactylidae) II: Four species from the cloud forests of the western cordilleras. *Caldasia* 15: 629-647.
- \_\_\_\_\_. 1998. La riqueza de la fauna anfibia de los Andes colombianos. *Innovación y Ciencia* 7: 46-51.
- \_\_\_\_\_. 2002. A new species of *Osteocephalus* (Hylidae: Anura) from the western Amazon. *Rev. Acad. Colomb. Cienc. Ex. Fís. Nat.* 26: 289-292.
- Lynch, J. D. & J. Lescure.** 1980. A collection of eleutherodactyline frogs from northeastern Amazonian Peru with the description of two new species (Amphibia, Salientia, Leptodactylidae). *Bull. Mus. Natn. Hist. Nat., Paris*, 4th ser. 2: 303-316.
- Lynch, J. D. & Á. M. Suárez Mayorga.** 2004. Anfibios en el Chocó biogeográfico/ Catálogo de anfibios en el Chocó biogeográfico. Pp. 633-667, In **Rangel Ch, J. O.** (ed.), *Colombia Diversidad Biótica IV/ El Chocó biogeográfico/ Costa Pacífica*. Instituto de Ciencias Naturales, Universidad Nacional de Colombia & Conservación Internacional, Bogotá.
- Myers, G. S. & A. L. Carvalho.** 1945. Notes on some new or little-known Brazilian amphibians, with an examination of the history of the Plata salamander *Ensatina platensis*. *Bol. Mus. Nac., new ser., Zool.* (35): 1-24.
- Rivero, J. A.** 1991. New *Colostethus* (Amphibia: Dendrobatidae) from South America. *Breviora* (493): 1-28.
- Rivero, J. A. & M. A. Serna.** 1984. Una nueva *Pseudopaludicola* (Amphibia: Leptodactylidae) cornuda del sureste de Colombia. *Caribbean Journal of Science* 20: 169-171.
- Ruiz Carranza, P. M., M. C. Ardila Robayo & J. D. Lynch.** 1996. Lista actualizada de la fauna Amphibia de Colombia. *Rev. Acad. Colomb. Cienc. Ex. Fís. Nat.* 20: 365-415.
- Silverstone, P. A.** 1975. A revision of the poison-arrow frogs of the genus *Dendrobates* Wagler. *Natural History Museum of Los Angeles County, Science Bulletin* (21): 1-55.
- \_\_\_\_\_. 1976. A revision of the poison-arrow frogs of the genus *Phyllobates* Bibron in Sagra (family Dendrobatidae). *Natural History Museum of Los Angeles County, Science Bulletin* (27): 1-53.

Recibido el 4 de octubre de 2005.

Aceptado para su publicación el 21 de noviembre de 2005.

# AN ALERT CONCERNING A POSSIBLE THREAT TO THE AMPHIBIAN FAUNA EAST OF THE ANDES: DISCOVERY OF THE AMERICAN BULLFROG IN EASTERN COLOMBIA

by

John D. Lynch\*

## Resumen

**Lynch, J. D.:** An alert concerning a possible threat to the amphibian fauna east of the Andes: discovery of the American Bullfrog in eastern Colombia. *Rev. Acad. Colomb. Cienc.* **29** (113): 589-590, 2005. ISSN 0370-3908.

Se encontraron en el oriente de Boyacá renacuajos de Rana Toro, *Rana catesbeiana*, una especie introducida. La introducción de esta especie extranjera en la cuenca amazónica puede causar cambios dramáticos en la fauna nativa de ranas.

**Palabras clave:** Amazonia, amenaza a la conservación, especie introducida.

## Abstract

Free-living tadpoles of the American Bullfrog, *Rana catesbeiana*, an introduced species, were found in eastern Boyacá. The introduction of this alien into the Amazon Basin could cause dramatic changes in the frog fauna there.

**Key words:** Amazonia, conservation threat, introduced species.

During routine fieldwork in eastern Boyacá in early October 2005, my students and I managed to collect two tadpoles (ICN 53002) of the American Bullfrog (*Rana catesbeiana*) in a small pond (20 X 80 meters) on the floodplain of the Río Guavio (Boyacá: Santa María, vereda Charco Largo, 450 m.s.n.m.; 4° 44 ' N, 73° 18 ' W). The

pond varied in depth from a few centimeters to about 1 meter—the bullfrog tadpoles were in the deepest part of the pond. Other tadpoles collected in the pond, usually in shallower water with abundant grasses, were the native hylids *Dendropsophus mathiassoni*, *D. minutus*, *Hypsi-boas punctatus*, *Scinax rostratus*, and *S. ruber*. *Rana*

\* Instituto de Ciencias Naturales, Universidad Nacional de Colombia.

*catesbeiana* was introduced into Colombia in the late 1980s by persons interested in promoting the farming of frogs to produce frog legs but the species was prohibited by INDERENA. The history of the introduction is documented by Rueda Almonacid (2000). In spite of being more or less under control, the species escaped into the environment along the Río Mediacanoa en Valle del Cauca early in 1994 and quickly assumed plague proportions over much of the Alto Río Cauca (**Daza Vaca & Castro Herrera, 2000, Rueda Almonacid, 2000**; Andrés Acosta and Fernando Castro, personal communications).

**Rueda Almonacid** (2000: 379) also documented the introduction of the species into the Valley of the Río Magdalena in western Cundinamarca and eastern Tolima. This latter introduction apparently arose as a result of interchange of frogs from Caldas for exploitation in the coffee zone. A decade after the liberation of this predator into natural ecosystems in the interandean valleys of Colombia, it remains a local problem. The native amphibian faunas of these interandean valleys are modest faunas but are threatened locally.

An additional possibility is that buying and selling of fingerling fishes for exploitation in ponds is a source of introductions because tadpoles can be included in such shipments of fishes (such was thought to be the source of

the spread of this species in the western part of the Great Plains in the United States). My suspicion is that the introduction into southeastern Boyacá came about via fisheries commercialization. If so, the threat of additional introductions is a severe one. The amphibian fauna east of the Andes is a much larger fauna and cautionary inventories of ponds used for fisheries commercialization along the western edge of Meta are urgently needed.

#### Acknowledgments

Laura Bohórquez, Eliana Bonilla, Paula Díaz, Andrés García, Andrés Malagón, Mario Murcia, Laura Pérez, Angie Triana, and Diana Urrego helped collect tadpoles.

#### Literature Cited

- Daza Vaca, J. D. & F. Castro Herrera.** 2000 ["1999"]. Hábitos alimenticios de la rana toro (*Rana catesbeiana*) Anura: Ranidae, en el Valle del Cauca, Colombia. *Rev. Acad. Colomb. Cienc.* **23** (Suplemento Especial): 265-274.
- Rueda Almonacid, J. V.** 2000 ["1999"]. Situación actual y problemática generada por la introducción de "Rana Toro" a Colombia. *Rev. Acad. Colomb. Cienc.* **23** (Suplemento Especial): 367-393.

Recibido el 18 de octubre de 2005.

Aceptado para su publicación el 1° de noviembre de 2005.

## **INFORME SOBRE LAS ACTIVIDADES DESARROLLADAS DURANTE EL AÑO ACADÉMICO 2004-2005\***

### **SESIONES**

#### **a. Junta Directiva**

La Junta Directiva tomó las decisiones de su competencia, necesarias para el funcionamiento de la Academia, en once reuniones ordinarias y una extraordinaria.

Se destaca la firma del convenio No. 146 con el Ministerio de Educación Nacional, correspondiente al año 2005, para el desarrollo de sus actividades como cuerpo consultivo del Gobierno Nacional.

A partir del 2002, cuando se recibieron \$349.968.650, se redujo hasta \$279.974.920 en el 2004. En el 2005 el convenio se firmó por \$298.770.372.00. Para poder continuar con el mismo ritmo de actividades la Academia ha tenido que recurrir a los ahorros que había logrado especialmente a través de contratos de prestación de servicios que firmó con la Universidad Nacional entre los años 1998 y 2002.

El 21 de octubre de 2004 se firmó el acta de liquidación del contrato No. 28 de 2002 suscrito con la Universidad Nacional.

Se renovaron los contratos de arrendamiento de servidor virtual corporativo en la Web y de mantenimiento de la red interna de computadores.

Se renovó el contrato con CableNet para acceso simultáneo de los equipos a Internet.

La Academia contrató a la abogada Dra. Fanny Martínez López para que la representara en la audiencia

de conciliación con el arquitecto Andrés Díaz. Como no se llegó a un acuerdo, se continuará el proceso ordinario.

Se contrató al abogado Francisco Javier Torres para atender la diligencia de inspección judicial, sobre obras adicionales en la sede de Palmira de la Universidad Nacional, relacionada con la demanda que cursa en el Juzgado Segundo Civil Municipal de Palmira Valle, colocada por el arquitecto Luis Eduardo Forero Aragón. Se dejó en claro que la participación de la Academia fue a través de una fiducia (contrato 028 de 2002 entre la Academia y la Universidad Nacional) y por tanto no tiene responsabilidad en la posible autorización de obras adicionales.

#### **b. Sesiones ordinarias**

La Academia en pleno se reunió en nueve sesiones ordinarias y seis sesiones solemnes. En cada una de estas sesiones se dictó una conferencia científica y se cumplieron otras actividades.

Septiembre 15: Don John D. Lynch, “Descubrimiento de la fauna de ranas más grande del mundo en los bosques al norte de Leticia”.

Octubre 20: Don Luis Alejandro Barrera, “La Academia frente a la globalización”.

Noviembre 17: Doña Carmenza Duque, “Primeras etapas en el estudio bioprospectivo del coral blando *Pseudopterogorgia elisabethae* del archipiélago de San Andrés y Providencia”

\* En este Informe solo se mencionarán de manera muy concisa algunas de las actividades desarrolladas por la Corporación, entre el 18 de agosto de 2004 y el 16 de agosto de 2005.

Febrero 16: Don Pedro Prieto, “Tendencias mundiales en ciencia y tecnología”.

Marzo 16: Don Moisés Wasserman, “Reforma Universitaria- Universidad Nacional de Colombia”.

Abril 20: Don Michel Hermelin, “Riesgo generado por impacto de meteoritos”.

Mayo 18: Don Gonzalo Andrade, “La serie de los libros rojos de las especies amenazadas de Colombia, perspectivas futuras y medidas de conservación”.

Junio 15: Don Jorge Reynolds, “La nanotecnología en los nuevos estimuladores cardiacos”.

Julio 27: Don Víctor Albis, “Pedro J. Sosa un gran ingeniero matemático”.

### c. Sesiones solemnes

Durante la sesión Solemne Estatutaria del 18 de agosto de 2004, se posesionó la Junta Directiva para el periodo 2004-2006, don José Luis Villaveces presentó el estudio de fondo titulado: “Ciencia en Colombia: Balance y Perspectivas” y se entregó el Premio Academia de Ciencias del Tercer Mundo (TWAS) a don Óscar Mario Perdomo, profesor de la Universidad del Valle.

En sesiones solemnes se posesionaron cuatro Académicos Correspondientes, quienes presentaron los respectivos trabajos científicos preparados especialmente para la ocasión:

Noviembre 10: Don Héctor Fabio Zuluaga Corrales: “Obtención de materiales elásticos por polimerización de dienos acíclicos vía metatesis”.



El doctor Jaime Posada, presidente del Colegio Máximo de Academias de Colombia hace entrega al Dr. Jorge Arias de Greiff del premio a la “Obra Integral de un Científico”. Agosto 17 de 2005.

Febrero 9: Don Felipe Guhl: “ADN Fósil: Arqueoparasitología en América”.

Febrero 23: Don Luis Quiroga Puello: “Coherencias y correlaciones cuánticas en materia condensada”.

Marzo 9: Doña Martha Rocha de Campos: “Crustáceos, decapados de Colombia: Diversidad y distribución”.

En la sesión solemne del 9 de marzo de 2005, fue exaltado a Miembro de Número don Pedro Prieto Pulido. Por primera vez, de acuerdo con los nuevos estatutos de la Academia, se posesionó como miembro de número un académico no residente en Bogotá.

#### **d. Sesiones especiales**

El 14 de octubre, en las instalaciones de la Academia, el Dr. Manuel Soriano, profesor de la UNAM, presidió un conversatorio sobre cristalografía de proteínas con investigadores colombianos.

Con motivo del Año Internacional de la Física, la Academia programó las siguientes conferencias, en el auditorio de la Hemeroteca Nacional:

Marzo 14: Don Bernardo Gómez: “1805: Año milagroso”.

Abril 19: Don Mario Andrés Llano: “La contribución de Albert Einstein al estudio del movimiento browniano”.

Mayo 5: Don Efraín Barbosa: “Aplicaciones tecnológicas, derivadas de las teorías de Einstein”.

Junio 13: Don Juan Manuel Tejeiro: “Aplicaciones cosmológicas de la relatividad de Einstein”.

Estas conferencias continuarán en el segundo semestre de 2005.

#### **Capítulo de Antioquia**

El capítulo de Antioquia se reúne mensualmente con la coordinación de doña Ángela Restrepo y la secretaría de don Michel Hermelin.

En sesión solemne realizada el 28 de noviembre celebró su primer año y felicitó públicamente al académico William Ponce por haber recibido, el premio Alejandro Angel Escobar, en ciencias exactas.

Para conmemorar el año internacional de la física programó cuatro conferencias en la ciudad de Medellín:

Abril 21: Don Gabriel Poveda Ramos: “Einstein, el hombre y el científico”.

Abril 28: Don Alonso Sepúlveda: “Quanta de luz y movimiento browniano”.

Mayo 5: Don Guillermo Pineda: “Albert Einstein, el último romántico”.

Mayo 12: Don William Ponce: “Historia de la física en Medellín”.

El 26 de mayo se realizó la sesión extraordinaria en la cual la Academia Colombiana de Ciencias fue la anfitriona del Colegio Máximo de Academias y don Santiago Díaz Piedrahita dictó la conferencia titulada: “La Academia Nacional de Ciencias Naturales en 1871”.

#### **PARTICIPACIÓN EN ACTIVIDADES NACIONALES E INTERNACIONALES**

La Academia Colombiana de Ciencias continuó su afiliación y participación en el Consejo Internacional para la Ciencia (ICSU), el Programa Internacional Geosfera-Biosfera (IGBP), La Evaluación Mundial de Ecosistemas del Millenium (M.A.) la Red de Derechos Humanos de las Academias de Ciencias y Sociedades Científicas, la Federación Latinoamericana de Academias de Ciencias (FELAC), el Comité sobre ciencia y tecnología en países en desarrollo y Red Internacional de Biociencias (COSTED-IBN), la Academia de Ciencias del Tercer Mundo (TWAS), la Comunidad Científica del Caribe (CCC), la Fundación Internacional para la Ciencia (IFS), la Unión Internacional para la Investigación del Cuaternario (INQUA), la Unión Internacional de Historia y Filosofía de la Ciencia.(IUHPS), el Consejo Internacional de Ciencia (ICS), el Panel Internacional de Academias de Ciencias (IAP) y la Red Interamericana de Academias de Ciencias (IANAS).

A nivel nacional es miembro del Colegio Máximo de Academias, de la Fundación Pro- Sierra Nevada de Santa Marta, miembro de la Junta Directiva de la Asociación Colombiana para el Avance de la Ciencia, es aliado estratégico del Observatorio Colombiano de Ciencia y Tecnología, miembro afiliado de la Asociación Colombiana de Facultades de Ciencias y preside el Comité Directivo de la Red Colombiana de Formación Ambiental.

La Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales cuenta con comités y grupos de trabajo internos, participa en comités y grupos externos a través del presidente o sus delegados. Estos y otros grupos permanentes u ocasionales propenden por el mejoramiento del nivel de la investigación y de la calidad de la enseñanza de las ciencias y participan en el cumplimiento de su función como órgano consultivo del gobierno nacional.

La Academia participó a través de su presidente, don Moisés Wasserman, o de los académicos delegados en su representación en numerosos eventos y reuniones (más de 50), de carácter nacional e internacional y se dictaron más de 40 conferencias.

El Ministerio de Educación hizo el lanzamiento, en el Palacio de Nariño, de **“2005, año de las competencias científicas”**. Don Moisés Wasserman hace parte del Comité asesor que se creó con el fin de propiciar una amplia reflexión sobre la enseñanza de la ciencia.

El presidente participó en dos reuniones para discutir la reorganización de COLCIENCIAS y de los Programas de Ciencia y Tecnología. Asistió en Londres, a la reunión de la “International Human Rights Network of Academies and Scholarly Societies”. La Red de Derechos Humanos continuará con la metodología de tratar caso por caso y apoyará a ICSU y al Inter-Academic Panel en cuestiones políticas generales.

El vicepresidente, don Jaime Rodríguez Lara, representó a la Academia en el “Encuentro Científico del Caribe” que reunió un conjunto de cinco actividades científicas llevadas a cabo en la isla de Tobago en mayo de 2005.

Tres reuniones de carácter internacional:

1. Reunión ejecutiva del Inter.-American Network of Science Academies (IANAS),
2. Reunión ejecutiva de la CCC (Comunidad Científica del Caribe) o CSU (Caribbean Scientific Union),
3. Taller sobre la capacidad de construcción de las Academias de Ciencias del Caribe amplio.

Y dos reuniones de carácter local (Trinidad-Tobago-Jamaica- Suriname y Barbados):

1. Lanzamiento del “Caribbean Science Education Focal Point Comité”
2. Foro sobre “Expectativas de la popularización de la ciencia en el Caribe”.

En estos eventos hubo participación de representantes del gobierno de Trinidad Tobago, en particular del Ministerio de Educación, de la UNESCO, de Cariscience.

Durante esta reunión la Comunidad Científica del Caribe eligió junta directiva para el período 2005-2007. La Secretaría le correspondió a la Academia Colombiana.

La Academia firmó el acta de creación de la Inter-American Network of Academies of Science (IANAS) en mayo de 2004 en Santiago de Chile y entró a participar en los proyectos de agua y educación a través de sus delegados o puntos focales académicos Gabriel Roldán y José A. Lozano.

La Academia entró en contacto con la Alianza Pequeños Científicos que respalda el programa del mismo nombre. El proyecto, Pequeños Científicos tiene como objetivo principal contribuir a la renovación del proceso de aprendizaje de las ciencias experimentales en niños y jóvenes colombianos.

En octubre, un equipo colombiano de cinco personas con representantes del Ministerio de Educación, Pequeños Científicos y la Academia, fue invitado por IANAS a Chile a participar en un taller de planeación estratégica sobre proyectos de educación en ciencias basados en indagación (ECBI). Allí también se ratificó como coordinador del proyecto al Profesor Allende de Chile y se nombró como vicecoordinador al delegado de nuestra Academia José A. Lozano. El periodo de cada uno será de dos años. Esto implica que en el año 2006 reemplazará como coordinador al Dr. Allende, quien pasará a actuar como anterior coordinador.

En mayo de 2005 IANAS, a través de la Academia, cofinanció el taller internacional de formación de formadores en la metodología ECBI realizado en Bogotá, en la Universidad de los Andes. En este mismo mes la Academia firmó la Alianza Estratégica “Pequeños Científicos”, con la Universidad de los Andes, el Liceo Francés, la Embajada de Francia, la Alianza Educativa y Maloka.

Del 13 al 15 de julio nuestro delegado presentó el programa “Pequeños Científicos” en el Tercer Encuentro entre Educadores y Científicos organizado por la Academia de Ciencias de América Latina y la Academia de Ciencias de Venezuela, en Caracas.

En el mismo mes, nuevamente un equipo colombiano de cinco personas fue invitado a participar en el “National Laser Science Education Strategic Planning Institute” del “National Science Resources Center - NSRC”, en Washington.

Se viene trabajando en un convenio con la Academia de Ciencias de Francia que permitirá el intercambio de personal y el uso del material producido en el programa “Main à la Pâte”.

También se espera firmar un convenio con la NSRC que permita a la Academia traducir y reproducir los módulos que la NSRC ha producido para enseñanza de las ciencias en nivel primario y secundario.



Sesión Solemne Estatutaria – Agosto 17 de 2005. Doctores: José A. Lozano –Secretario–, Jaime Rodríguez Lara –Vicepresidente–, Juan Armando Sánchez –Ganador del Premio Academia de Ciencias para el Mundo en Desarrollo (TWAS) para Científicos jóvenes de Colombia–, Moisés Wasserman –Presidente–, Jorge Arias de Greiff –Ganador del Premio a la Obra Integral de un Científico– e Inés Bernal, –Tesorera–.



El Viceministro de Educación Superior, doctor Javier Botero, hace entrega del premio “Academia de Ciencias para el Mundo en Desarrollo (TWAS)” para jóvenes científicos al Dr. Juan Armando Sánchez.

El sábado 12 y el domingo 13 de marzo, se celebró en Bogotá, en las instalaciones de la Academia Colombiana, la primera reunión de “puntos focales” nacionales del Proyecto de Agua del “InterAmerican Network of Academies of Sciences”. Durante dos días los representantes de nueve academias nacionales discutieron sobre proyectos de agua exitosos en las Américas, posibilidades de cooperación y financiación y la visión y perspectiva de las academias de ciencias sobre el programa IANAS. Entre varios distinguidos huéspedes nos acompañaron en esta reunión Yves Quéré, codirector del IAP, en representación de la Academia de Ciencias de Francia; y Hernán Chaimovich, co-director de IANAS y presidente de la Academia de Ciencias del Brasil así como la Viceministra de Ambiente, la Directora de Colciencias y el Gerente de Asuntos Ambientales del Acueducto de Bogotá.

Posteriormente el “punto focal” de nuestra academia, don Gabriel Roldán, en la reunión de las redes sudamericanas de eutrofización y de limnología, en San Carlos, Brasil, dictó dos conferencias y se comprometió a realizar un curso sobre bioindicación a nivel latinoamericano, con el apoyo de IANAS.

La Academia participó activamente en la fase inicial de las discusiones sobre competencias y la elaboración de los exámenes (ECAES) para programas de educación en ciencias, especialmente en geología y química. El contrato final con el ICFES lo desarrolló la Asociación de Facultades de Ciencias.

El vicepresidente participa en el grupo de entidades que trabajan en pro de la ciencia y la tecnología “GENCYT” coordinado por la ACAC, que tiene como objeto aunar esfuerzos entre las diversas entidades interesadas en la educación en ciencia y tecnología.

La Academia acogió la propuesta de publicar bolsilibros de carácter divulgativo a través del comité de educación, con el objeto de ofrecer a la juventud (13 años en adelante) una visión actualizada de un tema científico e interesarlos en el estudio de las ciencias como proyecto de vida.

A través de doña Inés Bernal, la Academia participa en las reuniones del comité de evaluación de la “Oferta Bibliográfica de FUNDALECTURA”. También participa en las reuniones, convocadas por el ICBF, del capítulo colombiano de “Latin Foods”.

Doña Ángela Camacho fue nombrada como delegada de la Academia ante el proyecto de mujeres científicas del International Academic Council (IAC).

Doña Clara Helena Sánchez, de la facultad de Ciencias de la Universidad Nacional, fue delegada por el presidente para que en representación de la Academia,

presente las actividades del capítulo colombiano ante la Asamblea General de la Unión Internacional de Historia y Filosofía de la Ciencia, en Beijing (China).

El académico don Armando Espinosa, dirige el proyecto: “Enciclopedia de Desastres Naturales Históricas de Colombia” dentro del convenio de cooperación suscrito con la Universidad del Quindío.

Se entregó el informe final del proyecto “Determinación de la localización y magnitud de cambio en la cobertura de bosques en Colombia en la década de los 1990 y comienzos del 2000”, dentro del contrato de cooperación con CONSERVACIÓN INTERNACIONAL – COLOMBIA.

Con la coordinación de don Julio Carrizosa y la colaboración de la Secretaría se organizó, un taller el 13 de agosto de 2004, en donde cada académico evaluó un capítulo del informe preliminar del programa “World Millenium Ecosystem Assesment”. Se recogieron y editaron los conceptos presentados por más de veinte académicos y en el mes de septiembre se enviaron a la Secretaría del Programa.

El 31 de enero en la sede de la Academia, se efectuó una reunión cuyo objetivo fue proponer la reestructuración del Comité Nacional de Cambio Global y su actividad futura. También se realizó la presentación del proyecto TROPICANDES. Asistieron los directores de institutos, investigadores y personalidades vinculados a la temática de cambio global. Don Moisés Wasserman presentó como representante de la Academia y nuevo coordinador del Comité de IGBP a don Germán Poveda quien coordinará y tratará de implementar el proyecto TROPICANDES. Con este programa se espera aglutinar un gran número de iniciativas institucionales e individuales dentro del marco de un proyecto nacional que hace parte del estudio regional de los Andes Tropicales. Este proyecto se enmarca dentro de la nueva filosofía adoptada por IGBP II, de enfocar problemas con una visión integral.

La propuesta del proyecto TROPICANDES fue presentada oficialmente por primera vez a la comunidad mundial en el Tercer Congreso Mundial IGBP, realizado en Banff, Canadá, en junio de 2003. Posteriormente, la Academia ha presentado la idea en diferentes escenarios. La solicitud de financiación, para realizar dos reuniones organizativas con representantes de instituciones colombianas y de cada uno de los países involucrados, fue presentada al ICSU con el respaldo del comité científico del IGBP, el primero de marzo de 2005. La solicitud será respondida a fines de agosto.

La Academia, con la coordinación de don Luis Alejandro Barrera, realizó cuatro reuniones preparatorias y luego, con participación de las academias de Medicina y Ciencias Económicas y el presidente del Colegio Máximo, un foro sobre el TLC, al que se invitó al jefe del equipo negociador del gobierno colombiano, Hernando José Gómez y a otros miembros de la delegación. Se produjo una carta firmada por los presidentes de las Academias que respondió el Dr. Gómez. Don Luis Alejandro Barrera en representación de la Academia participó en “el cuarto de al lado” en la reunión de Cartagena. La parte más importante del tratado es la implementación a través de la agenda interna. El éxito del tratado depende de la planeación a largo plazo y es aquí donde el sector académico debe jugar un papel importante.

### CONCEPTOS

Por solicitud del Ministerio de Ambiente, Vivienda y Desarrollo Territorial, la Academia emitió concepto sobre

- La ampliación del Santuario de Fauna y Flora de Malpelo.
- La creación del Parque Nacional Natural Selva de Florencia.
- La creación del Parque Nacional Serranía de Yarigües.

El comité encargado de estudiar el problema creado por los cultivos de uso ilícito en los parques nacionales, redactó una comunicación que fue enviada a cuatro ministros (Ministerio de Agricultura y Desarrollo Territorial, de Educación, del Interior y de Ambiente Vivienda y Desarrollo Territorial).

La Comisión de Asuntos Ambientales, realizó algunas observaciones sobre la versión aprobada por la Comisión V de la Cámara de representantes del proyecto de Ley 032 de 2003. “por medio del cual se dictan disposiciones para garantizar la conservación y usos sostenible de las áreas de páramo en Colombia”, las cuales fueron avaladas como Declaración de la Academia en pleno.

Don Moisés Wasserman envió al Ministro de protección social, Dr. Diego Palacio Betancourt, una comunicación firmada por los académicos Gabriel Toro y Luis Alejandro Barrera, sobre el tema de clonación de células con fines terapéuticos.

Se trabaja con el Colegio Máximo de Academias en una propuesta para impulsar la ciencia y tecnología en el

país con motivo de los 200 años de la independencia, el 20 de julio del 2010.

### DEFUNCIONES

La Academia lamenta el fallecimiento de los académicos de número don Polidoro Pinto (noviembre/2004), don Alfonso Tribín Piedrahita (noviembre/2004) y del académico honorario don Carlo Federici Casa (enero/2005).

Se apoyó la realización de los siguientes eventos:

- XIII Congreso Colombiano de Química.
- II Encuentro Colombiano sobre abejas silvestres, realizado entre el 24 y el 26 de noviembre, en Bogotá.
- VII Seminario internacional del medio ambiente y desarrollo sostenible, que se realizó entre el 28 y 30 de noviembre en Bucaramanga.
- XIII Seminario internacional sobre: Viticultura y enología tropicales en altitud, del 2 al 4 de diciembre.
- XXXII Congreso de la Sociedad Colombiana de Entomología, realizado del 27 al 29 de julio en la ciudad de Ibagué.
- XV Congreso Nacional de Matemáticas, realizado entre el 8 y el 12 de agosto, en Bogotá.
- Algunas de las reuniones del Consejo Profesional de Geología y de la Red Colombiana de Formación Ambiental se programan en las instalaciones de la Academia.

### BIBLIOTECA LUIS LÓPEZ DE MESA

La Academia mantiene su biblioteca “Luis López de Mesa”. Sus volúmenes se incrementan principalmente a través del canje que recibe por las publicaciones propias. Se pueden consultar en la página electrónica de la Academia 8.437 registros de libros, las referencias bibliográficas de los 1415 artículos publicados hasta ahora en la Revista de la Academia, y 2.138 títulos de publicaciones seriadas.

El Dr. Orlando Forero Esguerra, donó a la Biblioteca la colección completa de la Revista de la AAPG desde 1950 hasta el 2004. La colección está a disposición de todos los académicos y demás usuarios.

## PUBLICACIONES

Don Santiago Díaz es el Director de Publicaciones de la Academia. Se publicaron y distribuyeron los números 108, 109, 110 y 111 de la Revista de la Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. En la colección Jorge Álvarez Lleras, se publicó el libro "Fresh Water crabs from Colombia: a taxonomic and distributional study", de la Dra. Martha Rocha de Campos.

En formato electrónico se publicó el libro:

"Memorias del VII Encuentro Nacional de Óptica".

- Se cofinanció la publicación de la monografía de Albert Einstein "Genio entre genios".
- Se cofinanció la impresión de un número de la Revista de Educación en Ciencias.

Se actualizó la información sobre la Revista de la Academia, que fue reclasificada por parte de COLCIENCIAS en categoría B.

Actualmente la Revista esta indizada en el Índice Internacional "Actualidad Iberoamericana". La lista de canje y distribución cuenta con 468 instituciones así: 134 en Colombia, 180 en América y 154 en Europa y resto del mundo.

## Gaceta

Se publicaron ocho números sencillos y dos dobles del órgano divulgativo "Gaceta", editada por don Víctor Albis, quien además, supervisa la página electrónica de la Academia que contiene la información de la Biblioteca, seis libros en versión digital y otros datos y noticias de la Academia.

*José A. Lozano I.*  
Secretario

## PALABRAS DE LA VICEMINISTRA DE EDUCACIÓN, CON OCASIÓN DE FIRMA CONVENIO ACADEMIA DE CIENCIAS FRANCESA Y COLOMBIANA

Antes que nada quiero agradecer a la Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales y a la Alianza Pequeños Científicos por la invitación a participar en la firma del convenio de cooperación entre las Academias de Ciencias de Colombia y Francia.

La firma de este convenio es de la mayor importancia para ambos países. Facilitará, por un lado, el intercambio de información y experiencias en el área de las ciencias y, por el otro, el desarrollo de actividades conjuntas y complementarias en la misma área. Esto, sin lugar a dudas, fortalecerá los métodos de enseñanza de las ciencias en nuestros países y resultará en el mejoramiento de las competencias científicas en nuestros niños y jóvenes.

Por ello, con la firma de este convenio se corrobora una vez más el compromiso de la Academia Colombiana de Ciencias y de Pequeños Científicos con el desarrollo de la ciencia en nuestro país. Merecen, por lo tanto, nuestras felicitaciones por un trabajo serio y constante, siempre con un gran propósito: el de contribuir de forma estimulante a la renovación del proceso de aprendizaje de ciencias en los niños y jóvenes colombianos. Con la premisa de que el conocimiento y sus múltiples aplicaciones son elementos centrales para el desarrollo económico y social de las so-

ciudades contemporáneas, tanto la Academia como la Alianza Pequeños Científicos han desarrollado la gran mayoría de sus esfuerzos. Han entendido que la brecha entre las capacidades científicas y tecnológicas de los países industrializados y los países en desarrollo es una de las manifestaciones contemporáneas de la persistencia del subdesarrollo y también una de sus causas mayores. Asimismo, que el potencial humano de un país es fundamental en la implementación de esas nuevas afluencias de ciencia y tecnología. Con esto en mente, ha trabajado en pro de una mayor y mejor apropiación de la ciencia por parte del ciudadano colombiano.

El Ministerio de Educación Nacional comparte totalmente estas premisas de trabajo. Estamos convencidos de que el desarrollo económico y social de Colombia depende en gran medida de la incorporación de la ciencia y la tecnología. También entendemos que el elemento central para el vínculo entre la ciencia y tecnología y el desarrollo de un país lo constituye la formación del capital humano y que la solidez de este vínculo depende de la educación. Por ello, conscientes de la responsabilidad que tenemos en ese sentido, hemos proclamado este año como el Año de las Competencias Científicas.

El Año de las Competencias Científicas es una invitación nacional para que las academias de ciencias, las or-

ganizaciones de promoción y divulgación, los medios de comunicación y, por supuesto, las Instituciones Educativas, y los docentes, junto con el Ministerio de Educación, sumen voluntades, articulen esfuerzos y coordinen acciones hacia el mejoramiento de la formación en ciencias, naturales y sociales, de niños, niñas y jóvenes.

Con el apoyo activo de varias instituciones, dentro de las cuales se destacan la Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales y Pequeños Científicos, a lo largo de este año se han realizado y continuarán realizándose diversas actividades: Ferias de Ciencias, Concursos, Talleres, exhibiciones, programaciones de centros interactivos y museos, conferencias, publicaciones, programas de radio y televisión, encuentros de profesores, investigadores e innovadores en el aprendizaje de las ciencias, y los Foros Educativos Municipales, Distritales y Departamentales, el Foro Nacional de Competencias Científicas, el cual se está realizando en el marco de Expociencia y Expotecnología y el Foro Universitario que se realizará en noviembre en la ciudad en Medellín.

Para nosotros, formar en ciencias sociales y naturales en la Educación Básica, Media y Superior significa consolidar ciudadanos y ciudadanas capaces de comprender el mundo, desenvolverse en él y aportar a su transformación. Fortalecer la enseñanza y el aprendizaje de las competencias científicas desde una perspectiva abierta y crítica, y con un enfoque interdisciplinario, conlleva al desarrollo de los pueblos y a la formación de una conciencia ética sobre el papel de las ciencias naturales con relación al ambiente y a los compromisos personales y sociales.

Favorecer el desarrollo del pensamiento científico y aportar a la formación de hombres y mujeres miembros activos de una sociedad son los desafíos para éste año de las Competencias Científicas, así como desarrollar la capacidad de seguir aprendiendo y de valorar críticamente la ciencia. Es un reto para la formación en ciencias ofrecer a los estudiantes las herramientas conceptuales y metodológicas necesarias para asumir una postura crítica frente a los peligros que enfrenta la humanidad, contribuir en la mejora de la calidad de la vida de las personas, saberse parte de un todo y ser responsables de las propias actuaciones.

El estudio de las ciencias es un diálogo que permite la construcción de nuevos significados. Es una actividad que implica creatividad, innovación e investigación y en consecuencia fomenta la capacidad de pensar analítica y críticamente. Desarrollar el pensamiento científico per-

mite “desmitificar” las ciencias y llevarlas al lugar donde tienen su verdadero significado, llevarlas a la vida diaria, a explicar el mundo en el que vivimos. Desarrollar las competencias de los estudiantes, implica la conjugación de conceptos científicos, metodologías y maneras de proceder científicamente y sobretodo, un compromiso social y personal.

Por todo lo anterior, creemos que la actividad científica es ante todo una práctica social. Ciudadanos capaces de asombrarse, observar y analizar, formularse preguntas, buscar explicaciones y recoger información, establecer relaciones, compartir y debatir con otros sus inquietudes, buscar soluciones a problemas determinados y hacer uso ético de los conocimientos científicos, son ciudadanos competentes para aproximarse al carácter dinámico, plural y complejo de las sociedades humanas y asumir posturas críticas y éticas frente a situaciones de injusticia social como la pobreza, el irrespeto a los derechos humanos, la contaminación, la exclusión social, el abuso del poder.

Todas estas ideas y conceptos, que constituyen la base del trabajo de este año 2005, animan una visión de futuro: la popularización y apropiación de la ciencia para construir una sociedad que forma ciudadanos competentes en la comprensión de las ciencias y capaces de apoyarse en ella para resolver problemas y comprender el mundo, desenvolverse en él y aportar a su transformación.

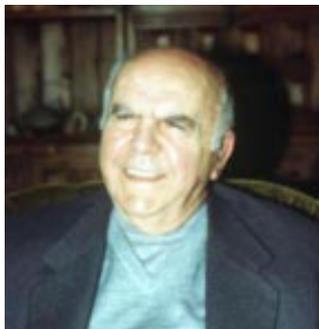
En este marco, quiere reiterar la importancia de un convenio de cooperación como el que hoy se firma. La cooperación técnica que hoy se materializa entre Colombia y Francia redundará, sin lugar a dudas, en el mejoramiento de las competencias científicas de los niños y jóvenes colombianos.

Quiero, para finalizar, agradecer a la Academia de Ciencias de Francia por su disposición para la firma de un convenio de estas características, felicitar nuevamente a la Academia Colombiana de Ciencias y a la Alianza Pequeños Científicos por sus constantes esfuerzos en beneficio de la enseñanza de la ciencia en el país y agradecerles por el apoyo que nos han brindado en la celebración del Año de las Competencias Científicas. Esperamos continuar trabajando juntos en conseguir comprensiones recíprocas sobre la formación en ciencias, así como también en generar acciones que promuevan las competencias científicas en todos los niños y jóvenes del país.

**Juana Inés Díaz**  
Viceministra de Educación

**IN MEMORIAM****CARLO FEDERICI CASA**

(Ventimiglia (Italia), 21 de julio de 1906, Bogotá, 14 de enero de 2004)



Carlo Federici Casa llegó a Bogotá el 8 de abril de 1948, víspera de un día aciago en Colombia, para ser protagonista de un cambio que marcó el rumbo de la matemática en Colombia en la segunda mitad del siglo XX. Recibió por ello un sentido homenaje en la celebración de los 50 años de la carrera de matemáticas, el pasado 5 de diciembre de 2001, en el cual estuvieron presentes varias generaciones de matemáticos colombianos. Cinco décadas atrás, apenas tres años después de su llegada al país, el 5 de diciembre de 1951, había creado en la Universidad Nacional la carrera de matemáticas con un grupo de sus alumnos de las facultades de ciencias, de ingeniería y de química. Fue el primer paso en la conformación de la actual comunidad matemática colombiana. Coincidentalmente ese mismo año en un informe de la UNESCO<sup>1</sup> sobre el estado de desarrollo de la matemática en Latinoamérica, Colombia ni siquiera se menciona, debido a que la producción matemática de los colombianos en la primera mitad del siglo XX es bastante escasa y de un nivel muy elemental.<sup>2</sup>

Federici había escogido como área de interés a la lógica matemática y llegó a la antigua Facultad de Ciencias de la Universidad Nacional de Colombia a enseñarla, pues había decidido dar un giro a su vida y creía que en Colombia podía desarrollar mejor sus inquietudes en esa área. Allí encontró un grupo de profesores y alumnos de ingeniería química que se interesaron por los novedosos te-

mas que exponía. Poco a poco, ese grupo, se fue dando cuenta que era necesario independizar el estudio y la enseñanza de las matemáticas de la Facultad de Matemáticas e Ingeniería, y aunque hubo bastante reticencia, por parte de sus profesores, en 1951 se graduó en la Facultad de Ciencias el primer licenciado en matemáticas superiores con un pènsun de tres años. Un año después la licenciatura se convirtió en una carrera profesional de matemáticas de cinco años para formar profesionales en esta área como investigadores y no únicamente como docentes de esta disciplina básica.

Los primeros matemáticos colombianos se formaron a su lado. Como eran tan pocos y Federici usaba el estilo peripatético, eran reconocidos y considerados en la Universidad Nacional como un grupo bastante extraño que hablaba un lenguaje todavía más extraño. Uno de ellos, Guillermo Restrepo, premio Nacional de Matemáticas 1992, cuenta cómo fue su paso de la carrera de ingeniería a la de matemáticas:

*Era 1956 o 1957. Visité por casualidad la Universidad Nacional y entré a lo que en ese entonces se llamaba Departamento de Matemáticas. Allí me encontré con unos personajes muy curiosos, personas que hablaban sobre cosas un poco raras. Encontré a personas como Carlo Federici, me acuerdo muy bien de su figura paseándose por los corredores de ese departamento; tenía una cierta*

1 Mathematics, Latin American Contribution to Scientific Progress. By Prof. Luis Santaló (Argentina) in collaboration with Prof. M. O. González (Cuba), Prof. Godofredo García (Perú), Prof. Rafael Laguarda (Uruguay). Unesco Science Cooperation Office for Latin America. Montevideo, 1951.

2 Las pocas publicaciones existentes se encuentran esencialmente en las revistas Anales de Ingeniería, Dyna y Revista de la Academia Colombiana de Ciencias.

*imponencia, una personalidad muy llamativa. [...] Vi que ese mundo era como para mí, un mundo distinto, el mundo que yo quería. [...] El hecho fue que dije adiós a la ingeniería, solicité admisión al Departamento de Matemáticas, conseguí una beca y me puse a estudiar matemáticas.*<sup>3</sup>

Estos matemáticos reconocen abiertamente la influencia que ese estilo tuvo en sus vidas, no solo en su parte profesional. Porque Federici, además de su interés por la matemática y la lógica en particular, tuvo siempre el especial interés de bajarlas de ese pedestal en que han sido puestas desde la antigüedad para colocarlas al nivel de todo aquel que deba o quiera estudiarlas. Por ello es reconocida más su labor como maestro que como investigador.

Psicólogos, médicos, pedagogos en distintas áreas, lingüistas, filósofos, epistemólogos, y físicos que han tenido la oportunidad de ser sus alumnos o colaboradores en diferentes tipos de proyectos o trabajos, reconocen en él su capacidad de mostrar el papel que juega la matemática en sus disciplinas y de haberlos motivado para profundizar en ella y aplicarla en sus propias actividades. Son múltiples los testimonios que podemos recoger que confirman esta afirmación.

Como rector que fue del Instituto Leonardo da Vinci, entre 1980 y 1994, pudo apreciar muy de cerca las dificultades que tienen los niños en el aprendizaje de los primeros conceptos matemáticos y las dificultades de sus maestros para transmitírselos correctamente. Muy especialmente las dificultades en la aprehensión y manejo de los diferentes tipos de números. Este es el testimonio de un estudiante de nueve años de tercer grado del Instituto Italiano Leonardo da Vinci.

- *¿Cómo es el profesor Federici como profesor?*
- *Mejor que Marina.*
- *¿Por qué?*
- *Porque no regaña, ni se pone bravo. Cuando uno no entiende repite la explicación hasta que uno entiende. Pero no tiene buena memoria porque no recuerda los nombres de los niños, pero si se acuerda de cincuenta mil números. Enseña a resolver problemas con diagramas. Como nosotros somos muy cansones la profesora llama al profesor Federici.*

- *¿Y con él no son cansones?*
- *No, porque él es el director del Colegio. Es viejo pero tiene voz de joven*
- *¿Tus compañeros que opinan de él?*
- *Lo mismo que yo.*
- *¿Te gustan las matemáticas?*
- *Si fuera con otra profesora.*<sup>4</sup>

Recordaba Federici que desde sus quince años cuando escuchó por primera vez la definición de número irracional como un hueco en los números racionales le pareció una barbaridad dar el nombre y calidad de número al vacío. Por ello, y tal vez desde esa época, ha intentado hacer accesible a un niño, y de la mejor manera, las diversas clases de números y su adecuada utilización. Números que, según él, no caen del cielo sine provienen de la física para medir distintos tipos de magnitudes. Su teoría está expuesta en su libro. *Aritmética de los Cardinales Relatores* publicado en 1993 Fundación Antonio Restrepo Barco.

Éste es uno de los pocos trabajos que publicó, pues lo obsesionó el rigor y en su análisis de un concepto podía invertir toda la vida. Federici prefirió comunicar verbalmente sus ideas, prefirió tener un grupo de interlocutores con los cuales discutir lo que pensaba sobre matemática, lógica, filosofía, epistemología, pedagogía, redes neuronales, lingüística o cualquier otra de sus áreas de interés.

Así se tenía acceso al hombre con sus cualidades y defectos y no solo a sus ideas, y de allí el impacto que causó entre todos aquellos que alguna vez lo tuvimos como maestro o interlocutor. Entre éstos se encuentran numerosos profesores de la Universidad Nacional, como Antanas Mockus, Hernando Pérez y Carlos Augusto Hernández quienes, desde los altos cargos administrativos que ocuparon en la Universidad, el 21 de septiembre de 1992 le otorgaron el título de Doctor Honoris Causa junto con otras distinguidas personalidades de nuestro país, los historiadores Jaime Jaramillo y Germán Arciniegas y el humanista Alfredo Vásquez Carrizosa. Recibió de sus alumnos, en la celebración de los 125 años de la Universidad, un homenaje por sus numerosos aportes en el mejoramiento de la educación matemática en Colombia, un homenaje a un hombre que supo enseñar a amar lo que el tanto ama-

<sup>3</sup> Clara H. Sánchez. *Entrevista a Guillermo Restrepo Sierra, Premio Nacional de Matemáticas 1992*. *Matemáticas Enseñanza Universitaria* 2(2) (1992), 3-16.

<sup>4</sup> Lucas Serrano. Testimonio dado en febrero de 1993.

ba. También es reconocida su labor en Ecuador en pro del desarrollo de la matemática moderna.

Carlo Federici nació en Ventimiglia, Italia, el 21 de julio de 1906. Su padre, Napoleone, era un funcionario del correo y su madre, Emilia Casa; aunque tenía el título de maestra se dedicó a cuidar a su familia de nueve hijos. Federici realizó su primaria en Génova-Sestri Ponente, el astillero más grande de Italia, que tenía una población de unos cuarenta mil habitantes, que dependían en su mayoría del trabajo en el astillero. La ciudad tenía una excelente Biblioteca Municipal donde Federici desde los 14 años comenzó a leer los clásicos como Dostowieski, Pirandello o Gogol.

Después de la primaria ingresó a una escuela técnica donde se preparaba a los estudiantes para seguir posteriormente una carrera en un instituto técnico. Federici se inclinó desde muy pronto por los estudios en física y matemáticas. Allá, además, se exigía el estudio de otra lengua, Federici escogió el alemán y luego el francés. En el Instituto Víctor Manuel II de Génova realizó sus estudios y conoció al profesor Moretti, profesor de matemáticas que le quitó el miedo que le había infundido a esta disciplina uno de sus maestros en la escuela técnica.

El clima social en su juventud era el clima de la primera guerra mundial. Italia era parte de la Triple Alianza y de golpe pasó a ser parte de los aliados en 1915. Recordaba muy bien cuando lo llevaron a un cine estando muy pequeño para ver una película sobre la formación de Italia. La película se titulaba “Romanticismo” y estaba basada en la novela del mismo nombre de Giacomo Robetta y en ella les mostraban los futuros enemigos que eran los austriacos. Fue tal la gritería de los niños en contra de los austriacos que algunos perdieron la voz. Fue una manera irracional de crearles enemigos, de meterles una ideología, decía Federici.

En 1928 obtuvo el título de Doctor en Física Pura en la Universidad de Génova con la tesis “Su un  $ds^2$  einsteiniano” y en 1930 obtuvo el título de Doctor en Matemáticas con la tesis “Sulle congruenze binomie”. Se especializó en lógica matemática entre 1935 y 1938 bajo la guía del profesor Alessandro Padoa, el famoso lógico italiano alumno de Peano. Trabajó como Profesor asistente en análisis algebraico en la Universidad de Génova (1932-1942) y luego como Profesor titular de lógica matemática en el Gimnasio Cristoforo Colombo (1942-1948) donde laboraba

cuando un buen día de febrero de 1945 dos agentes de las SS se lo llevaron a la cárcel por pertenecer al Partido Comunista. Él y su esposa Iole pertenecían a un grupo antifascista que tenía su propio periódico. Estuvo preso hasta el 24 de abril, fecha inolvidable en que llegaron los partisanos a Europa. Continuó trabajando en el Colegio hasta el día en que decidió venirse para Colombia.

Había aceptado una invitación del Cónsul de Colombia en Génova, Gustavo Uribe Arango, uno de los fundadores del Gimnasio Moderno, uno de los colegios más tradicionales de Bogotá, que implantó en los comienzos del siglo XX la “escuela nueva” en Colombia. Uribe Arango le ofreció venir a la Universidad Nacional a enseñar lógica a la recién fundada Facultad de Ciencias (la llamada Primera Facultad de Ciencias en la Universidad Nacional, creada en 1946). En 1991 afirmaba Federici

*Como estaba aburrido de lo que veía y sentía en Italia, pensé que en ese país podría ver surgir cosas nuevas. Me vine por dos años –llegué el 8 de abril de 1948– y me quedé. Me fascinó Colombia. Llevo 43 años<sup>5</sup>.*

Se quedó para, como dice Alberto Campos, uno de sus primeros alumnos,

*... cargar durante muchos años sobre sus robustas espaldas la parte mayor de la responsabilidad del núcleo de estudios que se estaba formando. Comenzó por dictar diversos cursos de una matemática que en Europa era ya adulta, y aquí completamente desconocida. Así formó a los primeros matemáticos de los estudiantes que habían dejado la ingeniería por la matemática pura<sup>6</sup>.*

Dirigía la Facultad de Ciencias, en aquella época, el ingeniero Julio Carrizosa, quien preocupado por el sensible retraso en ciencia en nuestro país fundó con el aval del rector Gerardo Molina, una Facultad con el objeto de estimular el estudio de las ciencias básicas. Otto de Greiff, también ingeniero y profesor de matemáticas, era el secretario de la Universidad. Después de un larguísimo viaje, de Génova a Roma en carro, y de Roma a Bogotá con escalas en las Azores, Nueva York, Miami y Barranquilla llegó hacia las cinco de la tarde y se alojó en el Hotel Astor en el centro de la ciudad. Era la víspera del 9 de abril de 1948. Entró en contacto con un amigo italiano, Félix Martignon, con quien cenó ese día y luego fueron al teatro Faenza a ver “Roma ciudad abierta”. Allí se encontraron con los ingenieros italianos, Nino Parma, Fausto

5 Marcela Giraldo. *Filósofo de las matemáticas*. El Espectador (Bogotá) 21/4/1991, pág. 4C.

6 Alberto Campos. *El Departamento de Matemáticas y Estadística*. En: *Catálogo de la Facultad de Ciencias. Universidad Nacional de Colombia*. Bogotá, 1984, 86-100.

Galante y Sivori, ex alumnos de la Universidad de Génova, quienes, establecidos en Bogotá, trabajaban en la firma de ingenieros Cuéllar, Serrano y Gómez. Martignon lo acompañó al día siguiente a la policía a registrarse y a sacar su cédula de extranjería. Hacia las 11 de la mañana les indicaron que regresaran a la tarde a recoger sus documentos. Pero esa tarde, ese edificio de la policía ardía en llamas. Había estallado una de las más graves revueltas que hayan ocurrido en Colombia, el famoso Bogotazo, ocasionado por el asesinato de Jorge Eliécer Gaitán. El boleto que le dieron para reclamar su documento lo conservó Otto de Greiff.

Estaba en el hotel cuando comenzaron los disturbios; desde su cuarto pudo ver el saqueo de los almacenes y para proteger sus pertenencias con un señor Londoño llevaron a esconder sus maletas en el techo del teatro Faenza, donde había estado el día anterior.

A pesar de haber vivido tan de cerca aquel trágico día decidió quedarse. Se trajo a su familia. Su esposa Iole y sus hijas Emilia y Simonetta llegaron el año siguiente. Tomaron en arriendo una casa cerca de la Universidad. Sus alumnos lo acompañaban a pie hasta su residencia, pues era una oportunidad para hablar de todo. Y aunque el cónsul le había advertido no hablar de política, era inevitable el tema en momentos tan difíciles de la historia colombiana. Estuvo cerca de los comunistas, participaba en tertulias, y alguno de sus alumnos avisaba cuando había peligro de ser descubiertos.

Como dijimos anteriormente, había venido Federici con un objetivo específico: trabajar en lógica. En esa época en Italia a la lógica no se le daba mucha importancia, decía, y pensó que en Colombia encontraría un ambiente favorable para desarrollar sus ideas. En la Universidad Nacional encontró un grupo de ingenieros matemáticos, los profesores Ignacio Soriano, Gustavo Perry, Leopoldo Guerra, además de los ya mencionados Julio Carrizosa y Otto de Greiff que le sirvieron como primeros interlocutores. Pero si la matemática moderna<sup>7</sup> era bastante desconocida para este grupo de ingenieros, creo no equivocarme al afirmar que la lógica matemática lo era aún más. Muy pronto,

después de su llegada al país, conquistó un grupo de estudiantes de ingeniería y de química: Pablo Casas, José Ignacio Nieto, Erwin von der Walde y Luciano Mora, entre otros, que serían sus primeros alumnos.

Federici quiso enseñar lógica moderna y lo hizo por medio de sus famosos “palitos” un lenguaje simbólico inventado por él para el cálculo proposicional que facilita la demostración de tautologías por un método mecánico en el cual se mueven los “palitos” con ciertas reglas. Federici enseñó con su método las primeras letras de la lógica matemática a numerosas generaciones de estudiantes colombianos en sus cursos de lógica y metodología, de los cuales quedan varias versiones como notas de clase: *Lógica matemática*<sup>8</sup>; *Fundamentos de lógica, de física y de matemática elementales. Parte primera: Lógica*<sup>9</sup>; *Elementos de Lógica y de Metodología*<sup>10</sup>. Sin embargo, apenas a comienzos de 1999 publicó formalmente su trabajo<sup>11</sup>, realizando por fin un sueño de más de cincuenta años, gracias al interés y afecto de un grupo de sus discípulos y contertulios psicólogos, y al apoyo financiero del Instituto Leonardo da Vinci y el Convenio Andrés Bello.

La primera Facultad de Ciencias no tuvo el éxito deseado, decayó rápidamente y lo único que subsistió fue la sección de matemáticas con Federici a la cabeza. Así que comenzó a gestarse la idea de la creación oficial de un departamento de matemáticas independiente de la Facultad de Ingeniería que por aquella época se llamaba Facultad de Matemáticas e Ingeniería, nombre que tenía desde finales del siglo XIX.

Los ingenieros estaban divididos, para algunos era absurdo crear un departamento de matemáticas independiente de la Facultad de Ingeniería, para otros era tiempo de que la matemática tuviera su espacio propio y se desarrollara en nuestro país como una disciplina autónoma. La lucha fue ardua, pero en 1956 se creó el Departamento de Matemáticas y Estadística y desapareció la antigua Facultad de Ciencias; razones de índole administrativa lo convirtieron en 1958 en Facultad de Matemáticas la que desapareció a su vez al crearse en 1965 la actual Facultad de Ciencias, con un Departamento de Matemáticas y Es-

7 Todo parece indicar que Francisco Vera, español exilado en Colombia, fue el primero en hablar públicamente sobre matemática moderna en Colombia. Lo hizo en la Universidad Nacional y la Sociedad Colombiana de Ingenieros en 1942.

8 Pontificia Universidad Javeriana, Bogotá, 83 páginas. Tamaño oficio.

9 *Fundamentos de lógica, de física y de matemática elementales. Parte primera: Lógica*. Instituto de Investigaciones Pedagógicas. Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, 1964.

10 *Elementos de Lógica y de Metodología*. Fondo especial de publicaciones. Facultad de Ciencias Humanas. Universidad Nacional, Bogotá, s.f.

11 *Arquitectura matemática de la lógica de las proposiciones categóricas*. 1998, Panamericana Formas e Impresos S.A., Bogotá, 39 páginas.

tadística. De esta manera Federici, con sus alumnos, entre ellos de manera destacada Pablo Casas, y unos pocos ingenieros que apoyaban sus ideas lograron la “emancipación” de la matemática de la Ingeniería en Colombia.

En este proceso hay que mencionar también al profesor Juan Horváth, matemático húngaro que llegó al país en 1951 a la recién fundada Universidad de los Andes; Horváth estuvo siempre muy ligado a la Universidad Nacional y al grupo de “revolucionarios” de los que estamos hablando. Federici y Horváth fueron los encargados de dictar los primeros cursos avanzados en matemática en la Universidad Nacional. Federici los cursos de lógica, geometría proyectiva y diferencial, y variable compleja, y Horváth los cursos de ecuaciones diferenciales y espacios de Hilbert.

Entre 1958 y 1960 trabajó Federici en la Facultad de Medicina en un proyecto sobre neurología con el doctor Fernando Rosas. Entre sus alumnos se contaba Rodolfo Llinás estudiante de la Universidad Javeriana a quien Rosas dirigía su trabajo de grado. Actualmente el doctor Llinás es un reconocido investigador del Departamento de Fisiología y Neurociencias de la Universidad de Nueva York y reconoce en Federici además de “la bondad y el sentido del humor que mostraba cuando las cosas se ponían demasiado complicadas para el trabajo de un día”, su influencia en su formación.

A continuación de este curso, procedí a escribir mi tesis doctoral bajo su mirada vigilante. Mi tesis se relacionaba sobre el sistema visual, y en particular con la manera como los circuitos de la retina, el tálamo y el área 17 del córtex podían simularse a través de circuitos lógicos en los que se involucraban diagramas de Venn basados en una notación para la lógica que Federici había desarrollado para el tratamiento de las funciones lógicas<sup>12</sup>.

La labor de Federici no se limitó a la Universidad Nacional. También viajó, en los primeros años de estadía en Colombia, los fines de semana a la Universidad Pedagógica Nacional en Tunja a dictar cursos y seminarios. Varios de esos asistentes se convirtieron en matemáticos y serían profesores del Departamento de Matemáticas de la Universidad Nacional de Colombia hasta su jubilación. He aquí el testimonio de Carlos Ruiz, Premio Nacional de Matemáticas 1993:

*Estudiaba en la Universidad Industrial ingeniería y vine a pasar vacaciones en Tunja, me enteré de un cursillo de matemáticas en el que estaban el doctor Carlo Federici, Santiago Gamba y Guillermo Restrepo. Yo fui y me entretuve en el cursillo. Ahí me enteré de que existía una Facultad de Matemáticas y le pregunté al doctor Federici sobre la posibilidad de estudiar en ella y me respondió que sí. Era el año de 1959. [...] Cuando se habla de Federici se le paran los pelos a las tres cuartas partes de la gente, porque Federici es parte de nuestra historia. Federici tuvo una actividad dentro de la vida social colombiana, se fue con su bastón de peregrino, sembrando esa semilla [la de las matemáticas] por todas partes. Cuando empecé a estudiar en Lille, un día almorzaba con Dedecker, en un café sobre el mantel de la mesa escribió unas ideas sobre mi tesis. Cuando terminamos me llevé el mantel, me fui a un salón y comencé a trabajar. Me acordé de Federici, porque sentí lo mismo que había sentido cuando inicié mi trabajo final del curso de Federici, que fue la primera investigación que yo hice solo.<sup>13</sup>*

En 1972 Federici obtuvo su pensión como profesor pero continuó vinculado como profesor especial por unos años más. Perteneció también a la Facultad de Ciencias Humanas, donde ocupó el cargo de director de los Departamentos de Ciencias de la Educación y de Pedagogía. En este último cargo convocó a un grupo de profesores de las distintas facultades a un seminario sobre teoría del conocimiento y con ellos se conformó el Grupo Federici el cual participó activamente en el “Movimiento Pedagógico” de los años ochenta, movimiento que se preocupó por las reformas curriculares para la escuela básica y media y elaboró un proyecto sobre la formación de una actitud científica en el niño a través de la enseñanza de las ciencias naturales y la matemática<sup>14</sup>.

Federici fue asesor en nuestro país de numerosos programas de diversas instituciones para el mejoramiento de la enseñanza de la matemática en sus diferentes niveles. Fue, por ejemplo, Director para la actualización de la enseñanza de la matemática y la física en la primaria y el bachillerato, y Director del programa de televisión Matemática Elemental, ambos programas del Ministerio de Educación Nacional entre 1958 y 1964. Este trabajo se hizo en colaboración con el equipo del Instituto de Investigaciones Pedagógicas del Departamento de Matemática y Física de la Universidad Pedagógica Nacional. El insti-

<sup>12</sup> Testimonio de Rodolfo Llinás, dado en 1994 por solicitud de la autora de este escrito.

<sup>13</sup> Clara Helena Sánchez. *Una conversación con Carlos Ruiz, Premio Nacional de Matemáticas 1993*. Matemáticas Enseñanza Universitaria 3(2) (1994), 5-12.

tuto comenzó a funcionar en 1963 bajo la dirección del profesor Hernando Alfonso y era un grupo de investigadores conformado por las profesoras Julia Contreras de Delgado, Gilma Rodríguez de Villamarín y Beatriz Farias, con la asesoría del profesor Federici. El equipo se dedicó a estudiar el problema de la enseñanza de las matemáticas en primaria y concluyó que el problema principal estaba en la deficiente preparación de los maestros. Así que se dedicaron a dictar cursos de capacitación para los maestros de las escuelas de Bogotá, con repercusión por correspondencia en otras regiones del país. De ese trabajo quedaron varias cartillas para profesores de primaria y secundaria. El punto central de Federici era que la matemática es una construcción humana, y que los procesos de clasificación, abstracción, y generalización que siguieron los creadores de la matemática pueden ser desarrollados en los niños. El instituto existió aproximadamente seis años, tuvo como objetivo central llevar a la práctica las ideas de Federici sobre pedagogía y se acabó al fundarse el Instituto Colombiano de Pedagogía (ICOLPE).<sup>15</sup>

Federici fue socio fundador de la Sociedad Colombiana de Matemáticas (1955), de la Sociedad Colombiana de Física (1956) y de la Sociedad Colombiana de Epistemología (1979). Fue miembro correspondiente de la Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales desde 1954 y luego miembro honorario.

Entre las numerosas distinciones recibidas destacamos el haber sido Presidente de la Comisión Permanente de Matemática de la Asociación Colombiana de Universida-

des entre 1961 y 1962. Presidente honorario de la Sociedad Ecuatoriana de Matemáticas, Profesor Emérito y Honorario de la Universidad Nacional. Recibió la Orden de la Ciudad de Bogotá, en grado de Comendador como Maestro del año, en 1982 y en el grado de Gran Cruz en 1996. Tanto la Universidad Nacional, en 1992, como la Universidad Javeriana, en 2000, le confirieron el Doctorado Honoris Causa. El Gobierno Italiano le otorgó en dos ocasiones la Orden al Mérito, en 1958 en el grado de Caballero y en 1995 en el grado de Oficial. En 2003 el Presidente de la República de Colombia le dio la ciudadanía colombiana como un reconocimiento más a sus 54 años de labor ininterrumpida por el mejoramiento de la enseñanza de la matemática y la física en el país.

Federici murió a los 98 años preocupado por la educación en nuestro país. Su agenda hasta la víspera de su muerte el pasado 15 de enero estuvo llena con los varios grupos de estudiantes o profesionales que deseaban intercambiar ideas con él.

Sus exequias se realizaron en la Iglesia de Santa Clara a donde una nutrida concurrencia de varias generaciones de colombianos de muchas disciplinas de ciencias básicas y ciencias humanas le dio el adiós al maestro de maestros por excelencia.

**Clara Helena Sánchez B.**

Departamento de Matemáticas  
Universidad Nacional de Colombia

14 José Granés & Luz Marina Caicedo (Editores). *Escritos del profesor Carlo Federici Casa sobre ciencia, matemática y docencia*. Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, 2002, pág. VII.

15 Comunicación personal de Gilma Rodríguez de Villamarín.



## REVISTA DE LA ACADEMIA COLOMBIANA DE CIENCIAS EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES

## ÍNDICE GENERAL DEL VOLUMEN XXIX, AÑO 2005

Número 110, páginas	1 – 160 (Marzo)
Número 111, páginas	161 – 314 (Junio)
Número 112, páginas	315 – 462 (Septiembre)
Número 113, páginas	463 – 616 (Diciembre)

**Vida Académica**

Informe sobre las actividades desarrolladas durante el año académico 2004 – 2005	591
Palabras de la Viceministra de Educación con ocasión de la firma del convenio suscrito con la Academia de Ciencias de Francia	598
In memoriam Carlo Federici Casa	600
Necesidad del conocimiento para el logro del desarrollo sostenible	167
Editorial	165

**Biología Molecular**

ADN fósil: Arqueoparasitología en América	229
Presencia y distribución de algunas proteínas citoesqueléticas en el Meroplasmodio de un grupo nuevo de algas ameboides marinas del Océano Atlántico	219

**Biotecnología**

Transformación genética de plantas para resistencia a virus	5
---	---

**Botánica**

Estudios en las Apocynaceae neotropicales XXI	43
Estudio palino-botánico de algunas especies de Pteridophyta de Colombia	183
Estudios en Labiatae de Colombia V. Nuevo nombre para <i>Scutellaria leptosiphon</i> Epling, planta redescubierta en la Cordillera Oriental de Colombia	319
Redescubrimiento de <i>Chalybea</i> Naudin e implicaciones en la delimitación genérica de <i>Huilaea</i> Wurdack (Melastomataceae)	171
Revisión taxonómica del género <i>Galactia</i> P. Br. (Leguminosae, Papilionoideae) en Cuba	467
Una nueva e interesante especie de <i>Sloanea</i> (Elaeocarpaceae) del Pacífico Colombiano	179
The options of plant organisms for the development of new types or typogenesis in plants	25

**Ciencias de la Tierra**

Ambientes atmosféricos de sistemas convectivos de mesoescala sobre Colombia durante 1998 según la misión TRMM y el re-análisis NCEP/NCAR	495
Efectos naturales y antrópicos en la producción de sedimentos de la cuenca del río Magdalena	239
El diatrema de Cerro Negro	49

Los mamíferos fósiles y las edades de las sedimentitas continentales del Neógeno de la Costa Caribe Colombiana	345
Subdivisión de las metamorfitas básicas de los alrededores de Medellín, Cordillera Central de Colombia	325

### Ecología

Cambios en la vegetación de sabana ocasionados por la plantación de <i>Pinus caribaea</i> en Vichada, Colombia	69
El papel del control biológico en el manejo integrado de la broca del café, <i>Hypothenemus hampei</i> (Ferrari) (Coleoptera: Curculionidae: Scolytinae)	55
Esquemas espaciales de zonación ecológica y morfología de las lagunas de los atolones y complejos arrecifales de un archipiélago oceánico del Caribe: San Andrés y Providencia (Colombia)	357
Investigación científica para la gestión ambiental integrada de espacios acuáticos compartidos, el desafío es pasar de las palabras a los hechos: El caso del Río de La Plata y su frente marítimo (RPFM)	255
La redistribución de la radiación solar y la lluvia dentro de plantaciones de café ( <i>Coffea arabica</i> L.)	371
Primera evaluación de la respiración de <i>Lytechinus variegatus</i> (Echinodermata: Echinoidea) en la Bahía de Chenge, Parque Nacional Tayrona, Caribe colombiano	85
Variación morfométrica en poblaciones naturalizadas y domesticadas de la tilapia del Nilo <i>Oreochromis niloticus</i> (Teleostei: Cichlidae) en el norte de Colombia	383

### Física

Coherencias y correlaciones cuánticas en materia condensada	411
Dinámica de dos nodos de Ranvier acoplados	515
Efecto del método de síntesis sobre la sinterabilidad de los polvos cerámicos de (Sn,Ti)O <sub>2</sub>	271
Superredes Magnéticas	395

### Historia de la Ciencia

Breve historia de la taxonomía de Lepidoptera en México durante el siglo XX	101
Desarrollos científicos de Cenicafe en la última década	89
¿En qué sentido puede hablarse de diálogo de las ciencias? Acerca de las nuevas ciencias de la complejidad	417
Pedro J. Sosa, un gran ingeniero matemático	525

### Inmunología

La Malaria: Estrategias actuales para el desarrollo de una vacuna efectiva	535
--	-----

### Matemáticas y Estadísticas

Modelos dinámicos de guerra: El conflicto colombiano	133
Nonembeddability of the Klein Bottle in $RP^3$ and Lawson's conjecture	149
Viejos y nuevos resultados sobre integrales singulares e hipersingulares	547

### Química

Efecto de la posición del ácido aspártico en la solubilidad y en la adsorción sobre hidróxido de aluminio de una serie de péptidos análogos	283
---	-----

Efecto del etanol y la concentración inicial de precursor de aluminio en la obtención de $\alpha$ -Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub> por el método de precipitación controlada	571
Producción de materiales elásticos por polimerización de $\alpha,\omega$ -dienos acíclicos vía metátesis	289
Utilidad del método extendido de Hildebrand en el estudio de la solubilidad del acetaminofén en mezclas agua-propilenoglicol	429

### Zoología

Crítica a la asignación de la categoría de amenaza de <i>Gastrotheca ruizii</i> (Amphibia: Anura: Hylidae)	303
Discovery of the richest frog fauna in the World. An exploration of the forests to the North of Leticia	581
Gastrópodos de la región subxerofítica de La Herrera, Mosquera, Cundinamarca, Colombia	439
<i>Procambarus (Scapulicambarus) clarkii</i> (Girard, 1852), (Crustacea: Decapoda: Cambaridae). Una langostilla no nativa en Colombia	295

### Notas

An alert concerning a possible threat to the Amphibian Fauna East of the Andes: Discovery of the American Bullfrog in Eastern Colombia	589
--	-----

<b>Constitución de la Academia</b>	155, 309, 457, 611
------------------------------------	--------------------

<b>Publicaciones de la Academia</b>	157, 311, 459, 613
-------------------------------------	--------------------

<b>Lista de Evaluadores (Volumen XXIX)</b>	610
--	-----

### ÍNDICE DE AUTORES

Acero P., Arturo	383	Criales, Maria Isabel	85
Álbis G., Víctor Samuel	525	Díaz Merlano, Juan Manuel	357
Ararat, C.	271	Díaz, Juana Inés	597
Arboleda Goenaga, Guillermo	49	Díaz Piedrahita, Santiago	165
Beyra Matos, Ángela	467	Dueñas Gómez, Hilda	69
Blanco Racedo, Jacobo	383	Duque Palacios, Leonardo	179
Bustillo Pardey, Alex Enrique	55	Fayad, Ramón	515
Cadena Gómez, Gabriel	89	Fernández Alonso, José Luis	179, 319
Calvo, Julio C.	283	Fliegner, Ana Sofía	219
Camargo, Deisi Y.	525	Galvis Vergara, Jaime	49
Campos Romero, Diógenes	133, 515	García, Camilo B.	85
Cantera Kintz, Jaime Ricardo	255	González Garavito, Favio	171
Cardozo Gutiérrez, Hernán	69	Guhl, Felipe	229
Castro, Diana Jimena	101	Guzmán, Fanny	283
Clavijo, Jairo	345	Hagemann, Wolfgang	25
Cobo, J.	571	Hernández Valdés, Laura	467
Correa M., Ana María	325	Herrera Oliver, Pedro	467
Cortés Pérez, Francisco	69	Herrera Valencia, Sócrates	535

Hodson de Jaramillo, Elizabeth	5	Oviedo, Luis A.	283
Horvath, John	547	Palacios Duque, Leonardo	179
Isaza D., José Fernando	133	Perdomo, Oscar	149
Jaramillo Robledo, Álvaro	371	Poveda, Germán	495
Linares, Edgar	439	Prieto, Pedro	395
Llorente Bousquets, Jorge	101	Quiroga, Luis	411
Lynch, John D.	581, 589	Restrepo A., Jorge Julián	325
Lozano, José A.	591	Restrepo, Juan C.	239
Maldonado, Carlos Eduardo	417	Restrepo, Juan D.	239
Martens, Uwe	325	Reyes Artiles, Grisel	467
Martínez, Armando Luís	101	Rocha de Campos, Martha	295
Martínez, Fleming	429	Rodríguez Páez, J. E.	271, 571
Martins Pimentel, Marcio	325	Ruiz, Jorge Enrique	515
Matloka, Piotr	289	Sánchez B., Clara Helena	600
Mejía, John Freddy	495	Sian, Alberto	571
Michán, Layla	101	Solé de Porta, Nuria	183
Mora, Luis Eduardo	167	Trujillo, Mary	283
Morales, J. Francisco	43	Varela, J. A.	271
Morales, María Eugenia	171	Vera Ardila, Mónica Lucía	439
Mueses Cisneros, Jonh Jairo	303	Villaquirán R., C.	571
Murillo Pulido, María Teresa	183	Villarroel Carlos A.	345
Narváez B., Juan Carlos	383	Wagener, Keneth B.	289
Ordóñez Carmona, Oswaldo	325	Zuluaga, Fabio	289

**DURANTE LA EDICIÓN DEL VOLUMEN XXIX  
COLABORARON EN LA EVALUACIÓN DE ARTÍCULOS**

Víctor Albis  
 Carlos A. Andrade  
 Inés Bernal  
 Jorge Brieva  
 Martha Lucía Bueno  
 Diógenes Campos  
 Elizabeth Castañeda  
 Clara Chamorro  
 Santiago Díaz Piedrahíta  
 Carmenza Duque Beltrán  
 Jesús Eslava Ramírez  
 Armando Espinosa Baquero  
 Germán Galvis Vergara  
 Favio González Garavito  
 Michel Hermelín  
 José A. Lozano Iriarte

John Douglas Lynch  
 Dimas Malagón Castro  
 Jairo Mojica Corzo  
 Guillermo Páramo Rocha  
 Daniel Pabón  
 Luisa Fernanda Ponce de León  
 Germán Poveda  
 Orlando Rangel Churio  
 José María Rincón  
 Augusto Rivera  
 Martha Rocha de Campos  
 Jaime Rodríguez Lara  
 Luis Guillermo Ujueta  
 José Luis Villaveces Cardoso  
 Moisés Wasserman Lerner

# CONSTITUCIÓN DE LA ACADEMIA

## JUNTA DIRECTIVA

Período 2004 - 2006

Presidente	: Moisés Wasserman Lerner	Tesorero	: Inés Bernal de Ramírez
Vicepresidente	: Jaime Rodríguez Lara	Bibliotecario	: Diógenes Campos Romero
Secretario	: José A. Lozano-Iriarte	Vocal	: Jorge Arias de Greiff

Director de la Revista : Santiago Díaz-Piedrahita

## MIEMBROS HONORARIOS

Hernando Groot Liévano                      Thomas van der Hammen  
Mohamed H. Hassan                              Rodolfo R. Llinás

## MIEMBROS DE NÚMERO

Sucesión de las sillas. Se distingue con asteriscos (\*) a los miembros fundadores y con un círculo (○) a los académicos que han pasado a la situación de extranumerarios.

- † Jorge Acosta Villaveces - 1936\*.  
† Leopoldo Guerra Portocarrero - 1954.  
† Eduardo Acevedo Latorre - 1970.  
*Eduardo Calderón Gómez* - 1984.
- † Jorge Álvarez Lleras - 1936\*  
† Alfonso Tribín Piedrahita - 1967.  
*Xavier Caicedo Ferrer* - 2001
- † Antonio María Barriga Villalba - 1936\*.  
† Kalman C. Mezey - 1957.  
*Lorenzo Panizzo Durán* - 1984.
- † Alberto Borda Tanco - 1936\*.  
† Hernando Franco Sánchez - 1960.  
*Manuel del Llano Buenaventura* - 1986.
- † Julio Carrizosa Valenzuela - 1936\*.  
† Eduardo Caro Caycedo - 1976.  
*Jairo Mojica Corzo* - 1997.
- † Víctor E. Caro - 1936\*.  
*Jorge Arias de Greiff* - 1966.
- † Luis Cuervo Márquez - 1936\*.  
† Daniel Mesa Bernal - 1960.  
*Jesús A. Eslava Ramírez* - 1995.
- † Federico Lleras Acosta - 1936\*  
† Andrés Soriano Lleras - 1957.  
*Gabriel Toro González* - 1976.
- † Ricardo Lleras Codazzi - 1936\*  
† Luis Duque Gómez - 1960  
*Guillermo Páramo Rocha* - 2001
- † Rafael Torres Mariño - 1936\*.  
Hernando Groot Liévano - 1966 (H).  
*José María Rincón* - 2001
- † César Uribe Piedrahita - 1936\*.  
† Clemente Garavito Baraya - 1970.  
*Jaime Lesmes Camacho* - 2002
- † Darío Roza Martínez - 1936\*.  
† Luis Guillermo Durán Solano - 1970.  
† Jairo Charris Castañeda - 2002  
*Pedro Prieto* - 2005
- † Calixto Torres Umaña - 1936\*.  
† José María Garavito Baraya - 1970.  
*Humberto Rodríguez Murcia* - 1993.
- † Luis María Murillo Quinche - 1936\*  
† Hno. Daniel González Patiño - 1976.  
*Víctor Samuil Albis González* - 1992.
- † Enrique Pérez Arbeláez - 1936\*.  
† Gerardo Reichel Dolmatoff - 1973.  
*Alicia Dussan de Reichel* - 1994.
- † Luis López de Mesa - 1937.  
† Luis Eduardo Mora Osejo - 1970.  
*Angela Restrepo Moreno* (e)
- † Luis Patiño Camargo - 1937.  
† Guillermo Castillo Torres - 1983.  
*Diógenes Campos Romero* - 2001.
- † Daniel Ortega Ricaurte - 1938.  
*Alberto Morales Alarcón* - 1970.
- † Julio Garzón Nieto - 1939.  
† Gustavo Perry Zubieta - 1970.  
*Hernando Dueñas Jiménez* - 1989.
- † Ernesto Osorno Mesa - 1939.  
*Luis E. Gaviria Salazar* - 1981.
- † Armando Dugand Gneco - 1941.  
† Álvaro Fernández Pérez - 1973.  
*Enrique Forero González* - 1997
- † Alfonso Esguerra Gómez - 1944.  
† Carlos Páez Pérez - 1970.  
*Santiago Díaz-Piedrahita* - 1988.
- † Jesús Emilio Ramírez - 1944.  
*Julio Carrizosa Umaña* - 1983.
- † Luis H. Osorio - 1944.  
† Antonio Olivares - 1966.  
† José Rafael Arboleda C. - 1982.  
*Carlos Corredor Pereira* - 1996.
- † Fabio González Tavera - 1945.  
† Eduardo Rico Pulido - 1970.  
† Carlos E. Acosta Arteaga - 1973.  
*Dimas Malagón Castro* - 2002.
- † Eduardo Lleras Codazzi - 1945.  
† Sven Zethelius Peñalosa - 1966.  
*Augusto Rivera Umaña* - 1996.
- † Marcelino de Castellví - 1945.  
† Francisco Lleras Lleras - 1970.  
† Álvaro Torres Barreto - 1990.  
*Margarita Perea Dallos* - 1996.
- † Manuel José Casas Manrique - 1945.  
*María Teresa Murillo Pulido* - 1975.
- † Belisario Ruiz Wilches - 1946.  
*Moisés Wasserman Lerner* - 1992.
- † Guillermo Muñoz Rivas - 1950.  
*Paulina Muñoz Vila* - 1994.
- † Jorge Ancízar Sordo 1951.  
*Eduardo Posada* - 1993.
- † Alfredo Bateman 1951  
*Carlos E. Vasco Uribe* - 1992.
- † Jorge Bejarano - 1951.  
† Gabriel Sanín Villa - 1970.  
○ Jaime Ayala Ramírez - 1973.  
† Polidoro Pinto Escobar - 2001.  
*Vacante*
- † Vicente Pizano Restrepo - 1952.  
*José A. Lozano Iriarte* - 1992.
- † Luis Augusto Cuervo - 1952.  
† Santiago Triana C. - 1970.  
*Gonzalo Correal Urrego* - 1984.
- † José Ignacio Ruiz - 1952.  
*Gerardo Pérez Gómez* - 1995.
- † Lorenzo Uribe Uribe - 1952.  
*Inés Bernal de Ramírez* - 1986.
- † Carlos Ortiz Restrepo - 1956.  
*Eduardo Brieva Bustillo* - 1980.
- † Augusto Gast Galvis - 1957.  
*José Luis Villaveces Cardoso* - 1988.
- Hernando J. Ordóñez - 1957.  
*Jaime Rodríguez Lara* - 2003.

## MIEMBROS CORRESPONDIENTES ACTIVOS

*Andrade Amaya, Carlos Alberto* – Cartagena  
*Andrade M., Gonzalo* – Bogotá  
*Arboleda, Luis Carlos* – Cali  
*Ardila Robayo, María Cristina* – Bogotá  
*Ariza Calderón, Hernando* – Armenia  
*Barrera, Luis Alejandro* – Bogotá  
*Buriticá Céspedes, Pablo* – Medellín  
*Bustillo Pardey, Alex Enrique* - Chinchiná, Caldas  
*Cadena García, Alberto* – Bogotá  
*Cadena Gómez, Gabriel* – Chinchiná, Caldas  
*Cala Cala, Plutarco* - Bogotá  
*Camacho Beltrán, Ángela* – Bogotá  
*Cantera Kintz, Jaime Ricardo* – Cali  
*Caraballo, Luis* – Cartagena  
*Castañeda del Gordo, Elizabeth* – Bogotá  
*Castaño Zapata, Jairo* – Manizales  
*Castillo Córdoba, Rodolfo A.* – Barranquilla  
*Castro, Alfonso* – Texas, USA  
*Chacón de Ulloa, Patricia* – Cali  
*Chamorro Bello, Clara* – Bogotá  
*Cossio Betancur, Jorge Iván* – Medellín  
*Díaz Merlano, Juan Manuel* – Santa Marta  
*Duque Beltrán, Carmenza* – Bogotá  
*Echeverri López, Luis Fernando* – Medellín  
*Egea Bermejo, Eduardo* – Barranquilla  
*Espinosa, Armando* – Armenia  
*Fernández Alonso, José Luis* – Bogotá  
*Gaviria, Santiago* – Viena  
*Gómez Moreno, Bernardo* – Bogotá  
*Groot de Mahecha, Ana María* – Bogotá  
*Guhl Nannetti, Felipe* – Bogotá  
*Guzmán Hernández, Ángela María* –  
*Hermelín, Michel* – Medellín  
*Herrera Valencia, Sócrates* – Cali

*Hodson de Jaramillo, Elizabeth* – Bogotá  
*Jaramillo Gómez, Luz Marina* – Cali  
*Jaramillo Robledo, Álvaro* – Manizales  
*López Reina, Alfonso* – Armenia  
*Lynch, John D.* – Bogotá  
*Lleras Pérez, Eduardo* – Brasilia  
*Martínez Collantes, Jorge* – Bogotá  
*Martínez Martínez, Roberto* – Bogotá  
*Martínez Valderrama, Juan C.* – Bogotá  
*Morales Aramburo, Álvaro* - Medellín  
*Moreno Ruiz, Luis Germán* – Bogotá  
*Moreno, Carlos Julio* – New York  
*Moreno, Luis Enrique* – México  
*Nieto, José Ignacio* – Montreal  
*Olivero Verbel, Jesús* – Cartagena  
*Páez Mozo, Edgar Albert* – Bucaramanga  
*Pérez Alcázar, Germán Antonio* – Cali  
*Ponce Gutiérrez, William A.* – Medellín  
*Poveda Jaramillo, Germán* – Medellín  
*Poveda Ramos, Gabriel* – Medellín  
*Prieto, Pedro Antonio* – Cali  
*Puerta Llerena, Leonardo* – Cartagena  
*Quijano Rico, Marco* – Nobsa, Boyacá  
*Quiroga Puello, Luis* – Bogotá  
*Rangel Churio, Orlando* – Bogotá  
*Reynolds Pombo, Jorge* – Bogotá  
*Rocha de Campos, Martha H.* – Bogotá  
*Roldán Pérez, Gabriel* – Medellín  
*Sánchez de Gómez, Myriam* – Bogotá  
*Stashenko, Elena E.* – Bucaramanga  
*Vargas Zapata, Rubén Antonio* – Cali  
*Zea, Sven E.* – Santa Marta  
*Zuluaga Corrales, Héctor Fabio* – Cali

## MIEMBROS CORRESPONDIENTES EXTRANJEROS

### ARGENTINA

*Sahade, Jorge* - Buenos Aires

### ALEMANIA

*Schnetter, Marie-Luise* - Giessen  
*Schnetter, Reinhard* - Giessen  
*Weber, Hans* - Mainz  
*Sturm, Helmut* - Hildesheim  
*Hagemann, Wolfgang* - Haldelberg

### AUSTRIA

*Flamm, Dieter* - Institut für Theoretische Physic, Viena.  
*Sheidegger Adrian* - Institut für Theoretische Geodäsie und Geophysik - Viena

### ESPAÑA

*Bermejo Barrera, Jaime* - Tenerife  
*De Porta Vernet, Jaime* - Barcelona

### ESTADOS UNIDOS

*Horvath, John* 1301 Mathematics Building College Park, Maryland 20742-4015.  
*Pipoly, John James* - Fairchild Tropical Garden Coral Gables. Florida  
*Krikorian, Abraham D.*-The New York State University, N.Y.

### HOLANDA

*Cleef, Antoine M.* - Amsterdam

### MÉXICO

*Guzmán Huerta, Gastón* - Instituto de Ecología, Depto. de Hongos, Xalapá, Veracruz.  
*Joseph-Nathan, Pedro* - Centro de Estudios Avanzados. Depto. de Química. Instituto Politécnico - México

### SUECIA

*Wassén, Henry S.* - Gotemburgo

# PUBLICACIONES DE LA ACADEMIA COLOMBIANA DE CIENCIAS EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES

## COLECCIÓN JORGE ÁLVAREZ LLERAS

- Volumen 1 - **Mora-Osejo, L.E.** 1987. Estudios morfológicos, autoecológicos y sistemáticos en Angiospermas. 1/16. 196 pp, 75 figs.
- Volumen 2 - **Murillo, M.T. & M.A. Harker.** 1990. Helechos y plantas afines de Colombia. 1/16. 326 pp, 145 figs.
- Volumen 3 - **Lozano-Contreras, G.** 1994. Las Magnoliaceae del Neotrópico 1/16, 148 pp, 46 figs.
- Volumen 4 - **Eslava Ramírez, J.A.** 1994. Aspectos relacionados con la erupción del volcán Nevado del Ruiz. 1/16, 174 pp, 46 figs.
- Volumen 5 - **Rocha de Campos, M.** 1994. Diversidad en Colombia de los cangrejos del género *Neostrengeria*. 1/16 iv + 144 pp, 47 figs.
- Volumen 6 - **Mora-Osejo, L. E. & H. Sturm.** 1994. Estudios ecológicos del páramo y del bosque altoandino, cordillera Oriental de Colombia. Tomos 1 y 2, 1/16, 716 pp, 190 figs.
- Volumen 7 - **Díaz, J.M., J. Garzón-Ferreira & S. Zea.** 1995. Los arrecifes coralinos de la isla de San Andrés, Colombia, estado actual y perspectivas para su conservación. 1/16, 152 pp, 15 figs, 14 tablas, 9 fotografías.
- Volumen 8 - **Eslava Ramírez, J.A.** 1995. Régimen de la presión atmosférica en Colombia. 1/16, 152 pp, 94 figs, 59 tablas.
- Volumen 9 - **Donato, J.Ch., L. E. González & C. L. Rodríguez.** 1996. Ecología de dos sistemas acuáticos de páramo. 1/16, 168 pp, 53 figs, 14 tablas, 9 fotografías.
- Volumen 10 - **Andrade-C. M., G. Amat & F. Fernández.** (eds.) 1996. Insectos de Colombia - Estudios escogidos. 1/16, 544 pp, 145 figs, tablas y mapas.
- Volumen 11 - **González, F.** 1998. Inventario preliminar de gases de efecto invernadero en Colombia, 1990, Fuentes y sumideros. 1/16, xiv + 174 pp, 108 figs, tablas y gráficas.
- Volumen 12 - **Díaz-Piedrahita, S. & J. Cuatrecasas.** 1999. Asteráceas de la flora de Colombia, Senecioneae I, géneros *Dendrophorbium* y *Pentacalia*. 1/16, 392 pp, 110 figs, 24 mapas.
- Volumen 13 - **Amat, G., M. C. Andrade, M. G. & F. Fernández** (eds.) 1999. Insectos de Colombia. 1/16, 438 pp. + tablas, figuras y mapas.
- Volumen 14 - **Rodríguez, H. & F. González.** Opciones para la reducción de emisiones de gases de efecto invernadero (GEI) en Colombia. 1/16, 262 pp.
- Volumen 15 - **Rodríguez, H. & González, F.** 2000. Portafolio colombiano de proyectos para el MDL –sector en energía–. 1/16, 164 pp.
- Volumen 16 - **Espinosa, Baquero A.** 2000. Erupciones históricas de los volcanes colombianos, 1/16, 292 pp.
- Volumen 17 - **Mora Osejo, L. E.** 2001. Contribuciones al estudio comparativo de la conductancia y de la transpiración foliar de especies de plantas del páramo. 1/16. xii + 282.
- Volumen 18 - **Roldán, G., J. A. Posada & J. C. Gutiérrez.** 2001. Estudio Limnológico de los Recursos Hídricos del Parque de Piedras Blancas. 1/16. x + 146.
- Volumen 19 - **Donato-Rondón, J. Ch.** 2001. Fitoplancton de los Lagos Andinos del Norte de Sudamérica (Colombia). 1/16, xii+222.
- Volumen 20 - **Aristizábal García, H.** 2002. Los hemípteros de la película superficial del agua en Colombia. 1/16. xv+242, 331 figs.
- Volumen 21 - **Pinto, M.** 2002. Estudio sistémico del género *Cavia*. 1/16. 216 pp. 38 figs. 31 láminas, 59 tablas.
- Volumen 22 - **Orozco Pardo, C. I.** 2003. Evolutionary biology of *Brunellia* Ruiz & Pavón (Brunelliaceae, Oxalidales). 1/16, 198 pp. + tablas, figuras y mapas.
- Volumen 23 - **Vargas Jiménez, C.A.** 2004. Propagación de ondas sísmicas y atenuación de ondas de Coda en el territorio colombiano. 1/16, 240 pp. + anexos. Tablas, figuras y mapas.
- Volumen 24 - **Campos, M.R.** 2005. Fresh water crabs from Colombia: a taxonomic and distributional study. 1/16, 364 pp. + tablas, figuras.
- Volumen 25 - **Forero, E. & Romero C.** 2005. Estudio en leguminosas colombianas, 1/16, 414 pp. + anexos, tablas y figuras.

## COLECCIÓN ENRIQUE PÉREZ ARBELÁEZ

- Volumen 1 - Memorias del seminario en conmemoración del centenario de Erwin Schrödinger. 1987, 1/16, 221 pp.
- Volumen 2 - **Díaz-Piedrahita, S. & A. Lourteig.** 1989. Génesis de una flora. 1/16, vii. + 362 pp, 35 figs.
- Volumen 3 - **Cubillos, G., F.M. Poveda & J.L. Villaveces.** 1989. Historia epistemológica de la Química. 1/16, 128 pp.
- Volumen 4 - **Hernández de Alba, G. & A. Espinosa.** 1991. Tratados de minería y estudios geológicos de la época colonial, 1616-1803, 1/16 xii + 92 pp, 1 fig.
- Volumen 5 - **Díaz-Piedrahita, S.** (ed.) 1991. José Triana, su vida, su obra y su época. 1/16, viii + 188 pp, 73 figs.
- Volumen 6 - **Díaz-Piedrahita, S.** 1991. La Botánica en Colombia, hechos notables en su desarrollo. 1/16, x + 126 pp. 30 figs, (reimpreso 1997).
- Volumen 7 - **Mantilla, L.C. & S. Díaz-Piedrahita.** 1992. Fray Diego García, su vida y su obra científica en la Expedición Botánica. 1/16, xv + 284, 14 figs. (reimpreso 1995).

- Volumen 8 - **Arias de Greiff, J.** 1993. Historia de la Astronomía en Colombia. 1/16, 200 pp, 32 figs.
- Volumen 9 - **Lértora Mendoza, C.** 1995. Fuentes para el estudio de las ciencias exactas en Colombia. 1/16, 316 pp.
- Volumen 10 - **Gauss, C. F.** 1995. Disquisitiones Arithmeticae. Traductores: H. Barrantes, M. Josephy & A. Ruiz Zúñiga. 1/16, 540 pp.
- Volumen 11 - **Murillo Quinche, L.M.** 1997. Obra selecta. 1/16, x + 188 pp, 29 figs, 4 mapas.
- Volumen 12 - **Romero Beltrán, A.** 1997. La investigación de las dolencias infecciosas en la historia. 1/16, xiv + 540 pp.
- Volumen 13 - **Barrantes, H. & A. Ruiz.** 1998. La historia del Comité Interamericano de Educación Matemática. 1/16, x + 198 pp. (español e inglés). Edición electrónica paralela.
- Volumen 14 - **Díaz-Piedrahita, S.** 2000. Matís y los dos Mutis, 1/16, x 346 pp, 41 figs.

#### **COLECCIÓN JULIO CARRIZOSA VALENZUELA**

- Volumen 1 - **Castillo, G.** 1992. Física Cuántica, teoría y aplicaciones. Tomo I, 1/16, xxxii + 410, 77 figs.
- Volumen 2 - **Bernal de Ramírez, I.** 1993. Análisis de alimentos. 1/16, xviii + 314 pp, 28 figs. (reimpreso 1998).
- Volumen 3 - **Castillo, G.** 1994. Física Cuántica, teoría y aplicaciones. Tomo II. 1/16, xx + 406 pp., 49 figs.
- Volumen 4 - **Cáceres, D.** (ed.). 1995. Creando ciencia crean docencia. 1/16, 140 pp, 38 figs.
- Volumen 5 - **Romero, C.M. & L.H. Blanco.** 1996. Tópicos de Química Básica. 1/16, 240 pp, 56 figs.
- Volumen 6 - **Peña, G. & M. Pinto.** 1996. Mamíferos más comunes en sitios precerámicos de la sabana de Bogotá. 1/16, 98 pp, 1 mapa, 6 dibujos a color, 18 láminas y 48 gráficos.
- Volumen 7 - **López, C.** 1998. Mecánica Newtoniana. 1/16, 280 pp, 69 figs.
- Volumen 8 - **Charris, C. J., De Castro K. & J. Varela B.** 2000. Fundamentos del análisis complejo de una variable. 1/16, 384 pp.
- Volumen 9 - **Varela, J. de D.** 2000. Principios de Cristalografía. 1/16, xx + 250 pp., 141 figs.
- Volumen 10 - **Kairuz de Civetta, A.** 2002. Introducción al estudio de la composición de los alimentos. 1/16. xx + 166 pp. 16 figs., 30 tablas.
- Volumen 11 - **Muñoz Quevedo, José M.** 2003. Topología Básica. 1/16, VIII +236 pp.
- Volumen 12 - **Romero de Pérez, G.** 2003. Microscopía electrónica. 1/16, XX + 290 pp. 105 figs.
- Volumen 13 - **Charris, C. J., Aldana Gómez B. & P. B. Acosta H.** 2005. Álgebra I. Fundamentos y teoría de los grupos. 1/16, + 270 pp.

#### **COLECCIÓN MEMORIAS**

- Volumen 1 - (1994) Memorias del Seminario Nacional “El quehacer teórico y las perspectivas holista y reduccionista. 1/16, viii + 184 pp.
- Volumen 2 - (1994) Memorias del Seminario Konrad Lorenz sobre Etología. 1/16, iv + 38 pp.
- Volumen 3 - (1995) Memorias del Seminario-taller sobre Alta Montaña Colombiana. 1/16, 116 pp.
- Volumen 4 - (1996) Memorias del Primer Congreso Nacional de Neurocomputación. 1/16, xiv + 184 pp.
- Volumen 5 - (1996) Memorias del Primer Congreso Nacional de sobre Cambio Climático. 1/16, 138 pp, 9 figs.
- Volumen 6 - (1996) Memorias del Coloquio “Ciencia, tecnología y cultura”. 1/16, xii + 198 pp.
- Volumen 7 - (1996) Memorias de la III Escuela de verano en Geometría Diferencial, ecuaciones diferenciales parciales y análisis numérico. 1/16, xiv + 174 pp.
- Volumen 8 - (1996) Memorias del Seminario de Ciencia Teórica. 1/16, xv + 170 pp.
- Volumen 9 - (1997) Memorias del Seminario en conmemoración de los 440 años del nacimiento de René Descartes. 1/16, xii + 174 pp.
- Volumen 10 - (2001) Memorias del Simposio Pueblos y Ambientes del pasado precolombino 1/16, viii + 312 pp.
- Volumen 11 - (2001) Reflexiones sobre la ciencia y la tecnología: Colombia al iniciarse el siglo XXI, 1/16, x+166 pp.

#### **COLECCIÓN LUIS DUQUE GÓMEZ**

- Volumen 1 - **Bueno Hernández, A. & J. Llorente Bousquets.** 2003. El pensamiento biogeográfico en Alfred Russel Wallace. 14x21, 196 pp, 29 figs.

#### **EDICIONES ESPECIALES**

- Francisco José de Caldas, su vida, su personalidad, su obra y el descubrimiento de la hipsometría. 1958. 1/16 refilado. 94 pp.
- Alexander von Humboldt en Colombia. Extractos de sus diarios. 1982. Arias de Greiff, J. (ed.). 1/8 refilado. 286 pp., 20 figs.
- Status and problems of Science in Latin America and the Caribbean. 1990. Guardiola, M.L., J.L. Villaveces & G. Violini (eds.). 1/16, 542 pp.
- Science in Latin America and the Caribbean and its role in regional development. 1992. Hamende, A., M.H. Hassan, J.L. Villaveces & G. Violini (eds.) 1/16, 2 vols. 824 pp.

- El cambio global, ciencia para entender el mañana. 1998. Lozano, J. (ed.), carta, 322 pp. Figs., mapas y gráficos.
- Tradición Académica. Diccionario Biográfico y Bibliográfico de la Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, 1/16, x + 434 pp.
- **Díaz Piedrahita, S. & L.C. Mantilla R.** 2001. La terapéutica en el Nuevo Reino de Granada. Un recetario franciscano del siglo XVIII. Publicación especial No. 7 208 pp. 502 figs.

## EDICIONES ELECTRÓNICAS

- Memorias del VII Encuentro Nacional de Óptica. (Edición en CD-ROM). 2004
- Historia Sísmica de Colombia (1550-1830). (Edición en CD-ROM). 2004

### 1997

- V. S. Albis, J. Charum, C. H. Sánchez & G. Serrano (Eds.). *Memorias del Seminario en conmemoración de los 400 años del nacimiento de René Descartes*. 1/16, xii + 222 págs., 5 figs., 1 fotografía, 1997. ISBN: 958-9205-26-7; 958-9205-21-6 (Obra completa). US\$ 40.

### 1998

- Fabio González et al.. *Inventario de gases de efecto invernadero. Fuentes y sumideros: Colombia 1990 / GHG Preliminary Inventory* xiv + 171 págs. Santafé de Bogotá, 1998. ISBN 958-9205-33-X.
- Hugo Barrantes & Ángel Ruiz. *Historia del Comité Interamericano de Educación Matemática / History of the Inter American Committee in Mathematical Education* 1998.

### 2000

- John D. Lynch, *Enciclopedia de las ranas de Colombia / Encyclopedia of Colombian Frogs*.
- Clóvis Pereira da Silva. *A matemática no Brasil. Uma História de seu Desenvolvimento*. Segunda Edição.
- Lina Rocío Medina Muñoz. *Tradición académica. Diccionario biográfico y bibliográfico de la Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales*. x + 434 págs. Santafé de Bogotá, 2000. ISBN 958- 9205-34-8.
- Humberto Rodríguez & Fabio González. *Portafolio colombiano de proyectos para el MDL. / Colombian Project Portfolio in the Energy Sector under CDM*. 162 págs. Santafé de Bogotá, 2000. ISBN 958-9205-38-0.
- Humberto Rodríguez & Fabio González. *Opciones para la reducción de emisiones de gases de efecto invernadero en Colombia / Options for Reducing GHG Emissions 1998-2010* . 258 págs. Santafé de Bogotá, 2000. ISBN 958-9205-37-2.

### 2002

- Luis E. Mora-Osejo & Orlando Fals-Borda. *La superación del eurocentrismo. Enriquecimiento del saber sistémico y endógeno sobre nuestro contexto tropical*. 2002. 16 págs. Acceso libre en la red:
- Armando Espinosa Baquero. *Historia sísmica de Colombia. 1580-1830*. CD-ROM. Se puede acceder a información sobre sismos históricos en Colombia contenida en dos fondos: 1. Banco de datos de la historia sísmica de Colombia BHSC, de 1550 hasta 1830. 2. Estudios y documentos: a. Aspectos generales y metodológicos. b. Estudios generales. c. Estudios específicos. Los interesados en obtener el CD-ROM (Col \$ 25.000 + portes.) deben contactar a: revista@acefyn.org.co

### 2004

- Joaquín Acosta. *Lecciones de geología*. 1850 (2004). 30 págs. Reproducción facsimilar del libro publicado en 1850, por el Coronel Joaquín Acosta, considerado como el primer tratado de geología elemental publicado en Colombia. Acceso libre en la red.
- *Memorias del VII Encuentro Nacional de Óptica (2000)*. 2004. El evento se realizó en la Universidad del Quindío (Armenia) del 25 al 29 de septiembre de 2000. CD-ROM. Contiene los resúmenes de las conferencias y contribuciones hechas en el evento, además de los textos completos de algunas de ellas. Acceso libre en la red. Los interesados en obtener el CD-ROM (Col \$ 25.000 + portes.) deben contactar a: revista@acefyn.org.co

Las publicaciones de la Academia pueden ser solicitadas directamente al Apartado 44763, Bogotá, D.C., Fax (571) 2443186 Tel. (571) 3414805 Trans. 27 No. 39A - 63/67 – Correo electrónico: acefyn@org.co Se ofrecen en venta o mediante intercambio por publicaciones similares. Mayor información a través de Internet: URL: <http://www.acefyn.org.co>

## REVISTA DE LA ACADEMIA COLOMBIANA DE CIENCIAS EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES

Precios de suscripción

Subscription rates

Cuatro entregas por año  
En Colombia

Four issues per year  
Other Countries

Un año	\$100.000.00	One year	US \$100.00
Dos años	\$150.000.00	Two years	US \$180.00
Tres años	\$200.000.00	Three years	US \$200.00

El valor de la suscripción incluye el envío por correo ordinario o de superficie.

Payment in U.S. dollars includes shipment by surface mail.

Checks in U.S. dollars only, made out to "Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales".

Apartado Aéreo 44763 Bogotá, 1 D.C. COLOMBIA

<http://www.accefyn.org.co>

ADPOSTAL