

REVISTA DE LA ACADEMIA COLOMBIANA de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales

LA ACADEMIA ES ÓRGANO CONSULTIVO DEL GOBIERNO NACIONAL

VOLUMEN XXVII

SEPTIEMBRE DE 2003

NÚMERO 104

DIRECTOR DE LA REVISTA: SANTIAGO DÍAZ-PIEDRAHITA



CONTENIDO - CONTENTS

	Pág.		Pág.
Ciencias de la Tierra (Earth Sciences)		Química (Chemistry)	
-Ensayo sobre tipología de suelos colombianos – Énfasis en génesis y aspectos ambientales [Essay on the typology of Colombian soils – with emphasis in origins and environmental aspects]		-Química de productos naturales como fuente de moléculas bioactivas. [Chemistry of natural products as a source of biologically active molecules]	
<i>Dimas Malagón Castro</i>	319	<i>Luis Fernando Echeverry López</i>	423
Ecología (Ecology)		Zoología (Zoology)	
-Caracterización ecológica de las islas Múcura y Tintipán, Archipiélago de San Bernardo, Colombia. [Ecological characterization of Múcura and Tintipán islands, San Bernardo archipelago, Colombia]		-Biología reproductiva de <i>Wasmannia auropunctata</i> (R.) (Hymenoptera: Formicidae). [Reproductive Biology of <i>Wasmannia auropunctata</i> (R.) (Hymenoptera: Formicidae)]	
<i>Carlos A. Flórez & Andrés Etter</i>	343	<i>Patricia Chacón de Ulloa</i>	441
Física (Physics)		-New species of frogs (<i>Eleutherodactylus</i> : Leptodactylidae) from the Cordillera Oriental of Norte de Santander and Santander, Colombia [Nuevas especies de ranas (<i>Eleutherodactylus</i> : Leptodactylidae) de la Cordillera Oriental de Norte de Santander, Colombia]	
-Fabricación y caracterización óptica de materiales semiconductores para aplicaciones en optoelectrónica. [Manufacture and optical characterization of semiconductor materials for use in optoelectronics]		<i>John D. Lynch</i>	449
<i>Hernando Ariza Calderón</i>	357	-Una nueva especie de anfibio (Anura: Leptodactylidae) de los alrededores de la Sabana de Bogotá, Colombia [A new species of amphibian (Anura: Leptodactylidae) from edge, Sabana de Bogotá, Colombia]	
-Fases y transiciones de fase en materia condensada. [Phases and phase transitions in condensed matter].		<i>José Vicente Rueda-Almonacid, John D. Lynch & Pedro A. Galvis</i>	461
<i>Rubén A. Vargas</i>	369	Constitución de la Academia (Members of the Academy)	467
Matemáticas (Mathematics)			
-Sobre las relaciones de recurrencia, las fracciones continuas y la determinación de las propiedades espectrales de los sistemas ortogonales de polinomios. [On the recurrence relations, the continued fractions and the determination of the spectral properties of orthogonal polynomials]			
<i>Jairo A. Charris, Bernarda H. Aldana & Germán Preciado</i>	381		

ENSAYO SOBRE TIPOLOGÍA DE SUELOS COLOMBIANOS - ÉNFASIS EN GÉNESIS Y ASPECTOS AMBIENTALES -

por

Dimas Malagón Castro*

Resumen

Malagón Castro, D.: Ensayo sobre tipología de suelos colombianos -Énfasis en génesis y aspectos ambientales- Rev. Acad. Colomb. Cienc. **27**(104): 319-341. 2003. ISSN 0370-3908.

Colombia presenta una muy amplia diversidad de suelos. Aquí se tipifican aquellos que, por su grado de evolución, representan las condiciones ecológicas dominantes de las regiones naturales continentales del país. No se comenta la génesis de los Entisoles e Inceptisoles, ubicuos en todo el territorio nacional.

Inicialmente se discute el marco conceptual para el entendimiento integral de los suelos del país, en función de los factores ambientales y de los procesos evolutivos resultantes de su acción; posteriormente se tipifican por regiones y, en la parte final, se analizan, mediante índices de evolución para establecer sus relaciones ambientales en las diferentes regiones naturales de Colombia.

Palabras clave: suelos colombianos, génesis de suelos, tipología, regiones naturales, clasificación de los suelos

Abstract

Colombia has ample soil diversity related to its varied and contrasting Natural Regions and environmental conditions. The article typifies those soils with the highest evolutive development that tend to reflect pedological climax state in each Natural Colombian Region. Entisols and Inceptisols genesis was not considered due, both, to their ubiquitous presence in the country and low evolution development.

The article initially analyzes the integral Colombian soil knowledge derived from the interaction of it's soil factors and processes, and concludes with its environmental relationships between Natural Colombian Regions.

Key words: Colombian Soils, Soil Genesis, Tipology, Natural Regions, Soil Classification

* Subdirector. Instituto Geográfico Agustín Codazzi. Carrera 30 No. 48-51. Bogotá. Profesor Titular. Universidad Nacional de Colombia, Bogotá.

Introducción

En el título se hace referencia a dos palabras: ensayo y tipología; vale la pena darles la acepción adecuada. La primera, género literario de carácter didáctico, busca en este caso, presentar los suelos del país en un marco teórico, deductivo- inductivo, histórico; la segunda hace referencia al método ejemplar ideal que reúne, en alto grado, los rasgos y caracteres esenciales o peculiares de las clases de suelos, en este caso los de mayor evolución, que tienden al clímax pedológico en las regiones naturales de Colombia.

El modelo seguido es de naturaleza conceptual (estructural), cuya función es descriptiva-interpretativa y cuyo diseño es idealizado. Parte importante del modelo es la relación causa-efecto (factores ambientales - procesos - suelos), mediante un razonamiento deductivo (monogénesis) bajo condiciones actuales, o inductivo (poligénesis), generalmente asociado con medios preholocénicos (pleistocénicos y plioleistocénicos, como los más frecuentes).

En un artículo previo, publicado en esta revista (Malagón, 1998), se expusieron los planteamientos básicos que sustentan la génesis - evolución de los suelos y sus características; sobre estos principios se tipificarán algunos de los que componen las principales regiones naturales del país, con énfasis en los de mayor grado de evolución.

El desarrollo del tema se inicia con una síntesis del marco conceptual sobre el medio de alteración en el país y sus procesos derivados, prosigue con la tipificación de los suelos resultantes derivados de él y finaliza con un análisis de sus relaciones ambientales, establecidas mediante índices de evolución en las diferentes regiones naturales de Colombia.

Marco conceptual sobre el medio de alteración en Colombia

Los suelos están inscritos en la zona de contacto de la atmósfera y la superficie de la corteza terrestre; en consecuencia, se derivan de las interacciones entre ellas en el tiempo y en el espacio.

La configuración actual de la atmósfera (N, O₂, CO₂, vapor de agua), a partir de su composición inicial: H, He, N, CH₄, NH₄, establece *reacciones específicas de alteración* al obrar sobre la superficie de la corteza terrestre, integrada fundamentalmente por silicatos y aluminosilicatos, productos de evolución mediante diferenciaciones geoquímicas y térmicas. Los organismos y su evolución complementan este escenario de la vida, cuya síntesis integral constituye el suelo.

Como resultado de lo expresado, la acepción del concepto suelo como cuerpo natural, está referida a su *composición* (sólidos, líquidos, gases), localización *espacial* (superficie de la corteza terrestre), *procesos* que lo diferencian de los materiales que lo originan (adiciones, pérdidas, translocaciones y transformaciones), o por la posibilidad de soportar plantas superiores en su ambiente natural (Soil Survey Staff, 1999). La formación, evolución y dinámica del suelo está regida por leyes naturales asociadas a él (intercambio de energía, reacciones químicas y bioquímicas, intercambio iónico, flujos gravitacionales, retención capilar, etc.).

Al constituir el suelo un sistema integral, dinámico y abierto, responde a *causas* (factores ambientales) que, en el tiempo y en el espacio, generan *efectos* diferenciables de los materiales a partir de los cuales se forma; estos (horizontes) definen los suelos (figura 1). Es obvio que al cambiar los factores en el tiempo, cambian los suelos; ello es común, por ejemplo, durante los cambios climáticos en el Cuaternario, los cuales no sólo se asocian con el clima sino con los organismos correlacionados (Figura 1, parte inferior).

En la figura 2 se presentan ejemplos de corazas petroféricas, típicas de climas con estacionalidad marcada (Birkeland, 1999), producto probable de condiciones más húmedas que las actuales (posiblemente del Pleniglacial medio), seguidas por la exposición al aire y favorecidas por procesos erosivos en la altillanura de los Llanos Orientales (Malagón, 1987, Pulido et al, 1990) y de suelos policíclicos (*Durustalfts*) en la formación Mondoñedo, en cercanías de Mosquera (Cundinamarca). Estos últimos correspondientes al Pleniglacial, los cuales fosilizan

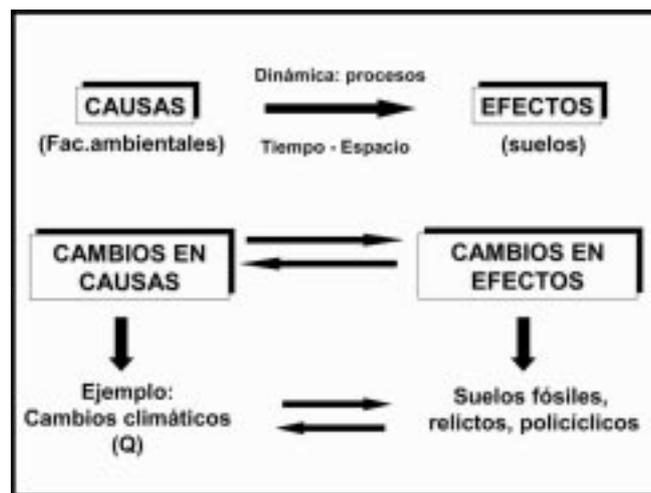


Figura 1. El suelo como sistema integral, dinámico y abierto. Relaciones causa- efecto: monogénesis - poligénesis.

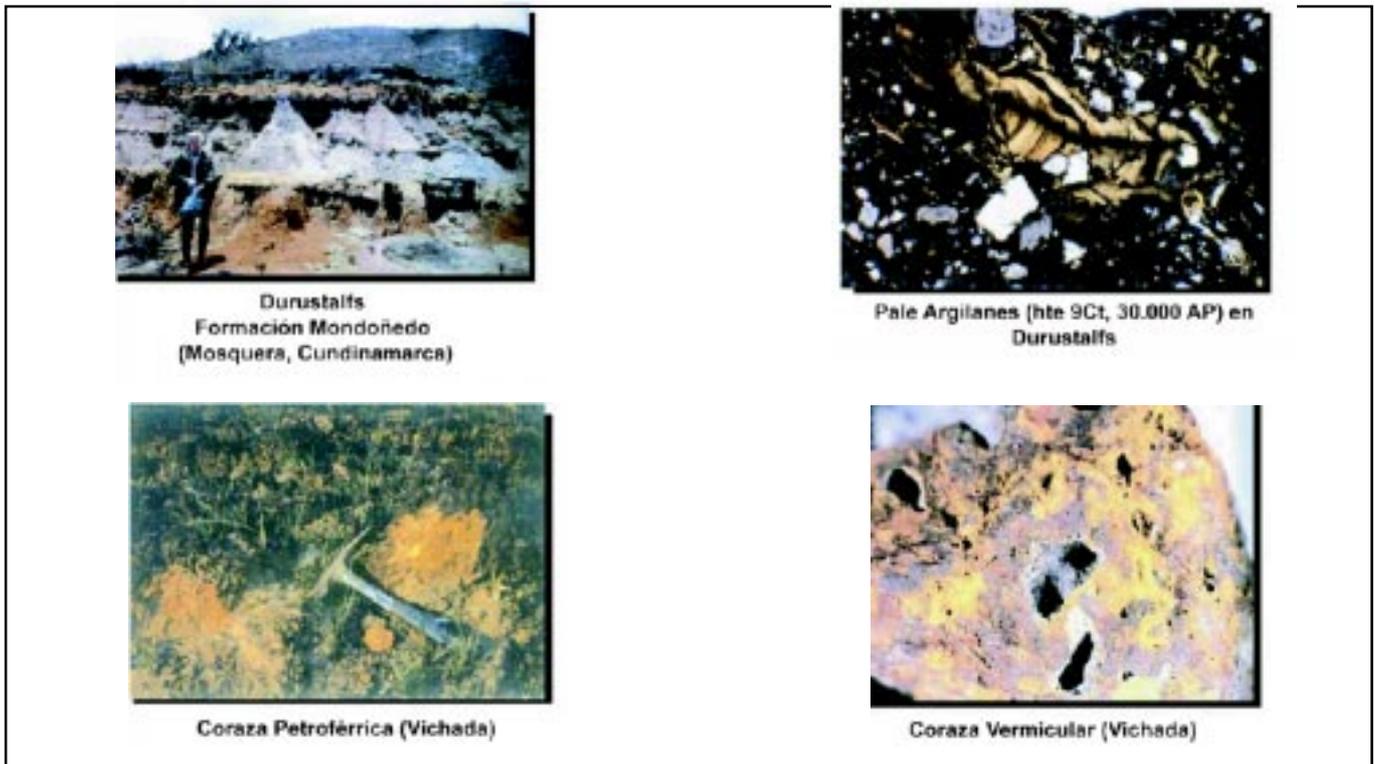


Figura 2. Paleosuelos y fenómenos relacionados: ejemplos de paleargilanes en Ustalfs y corazas petroféricas en suelos del Vichada, Colombia.

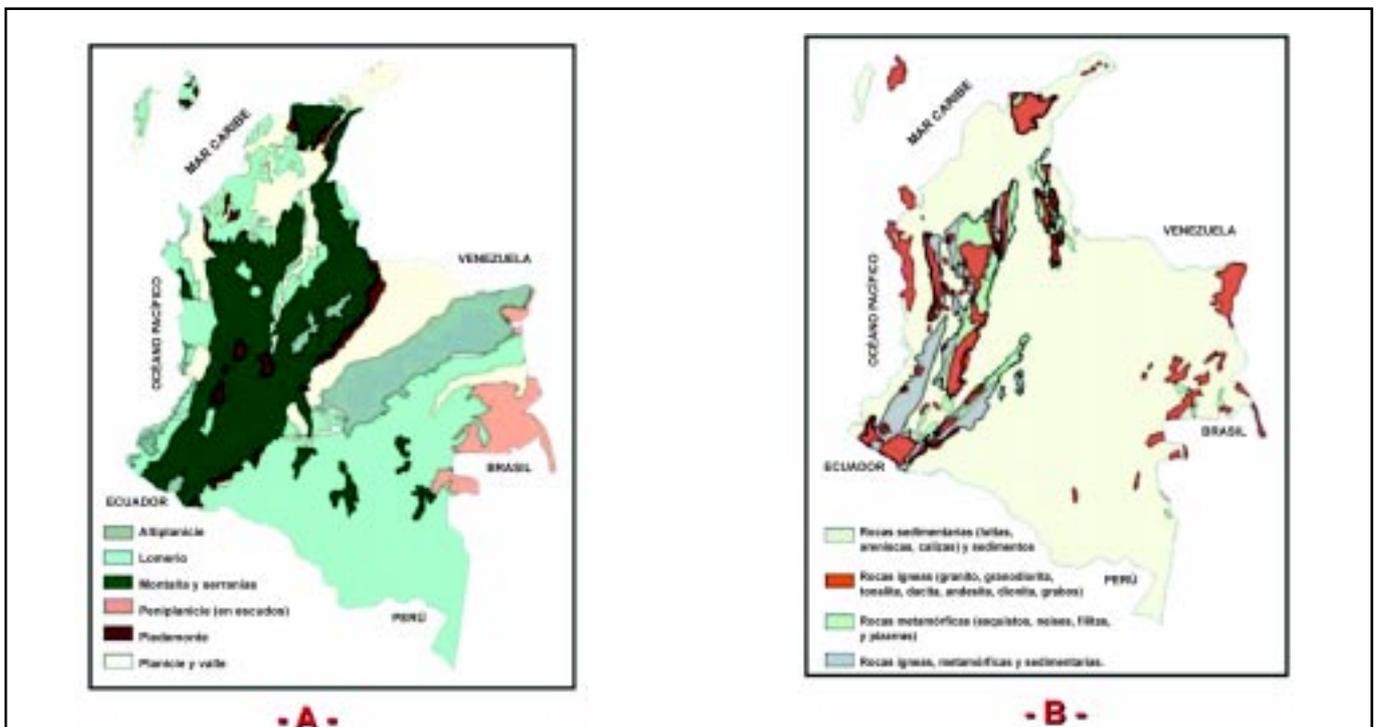


Figura 4. En la Figura 4 A se presentan los principales tipos de paisajes geomorfológicos de Colombia. En la 4 B se realiza una aproximación a las formaciones superficiales del país, como explicación de los materiales de origen de los suelos; en ellas no se delimitan los depósitos de piroclastos, por razones de escala.

Alfisolos - Ultisolos del glacial temprano, interglacial o aún más antiguas (Malagón, 1992).

El estudio de la génesis de los suelos implica identificar y caracterizar el material que los ha originado, en un contexto geomorfológico; posteriormente, establecer las características y propiedades de los componentes del suelo y sus variaciones en profundidad, a medida que avanza su evolución. Ambas hacen parte del *perfil de alteración*, como resultado de las reacciones producidas por las *condiciones bioclimáticas* al actuar sobre las *formaciones superficiales* y sobre sus *geoformas* asociadas.

El perfil geo-bioquímico de alteración

El suelo, considerado en sentido amplio (cobertura pedológica), constituye la parte superior del perfil de alteración. Éste está integrado por zonas con grados variables de meteorización; su estudio comprende la tipificación de las rocas basales y de los productos resultantes de su transformación: frente de meteorización, saprolita, suelo (Thomas, 1994, Birkelan, 1994).

La figura 3 sintetiza los procesos de alteración tanto *geoquímicos* como *bioquímicos*. Los primeros hacen referencia a la *transformación de minerales* en las fracciones arenosa, limosa y arcillosa, de acuerdo con las secuencias establecidas por Goldich (1938) y Jackson (1969), y a la *síntesis* o neoformación de arcillas, oxihidróxidos y materiales amorfos, acorde con el *medio de alteración* y sus características fundamentales de pH y concentración de elementos, definidos estos por su dinámica propia.

En la figura 4 (A) se presentan los principales *tipos de paisajes* (Zinck, 1974 e IGAC, 1995) en Colombia y los *materiales* que los constituyen, con referencia específica a su zona *superficial*, materiales parentales, asociada con el origen de los suelos.

Los paisajes dominantes del país son los de lomerío (35%), montaña (25.5%), valles y planicies (20%); ellos corresponden al 80.5% del territorio; el 19.5% restante está representado por piedemontes, altiplanicies y superficies de aplanamiento. La morfología y génesis –evolución de estos paisajes– influye en las de los suelos debido a la estrecha correlación suelo-paisaje, en la cual la *estabilidad* de las geoformas (pedogénesis progresiva o regresiva) y sus *materiales* constituyentes, coadyuvan a la evolución de los suelos.

En la figura 4 (B) se establecen los principales tipos de materiales que originan los suelos. Resalta el hecho vinculado con las *rocas sedimentarias, sedimentos* y

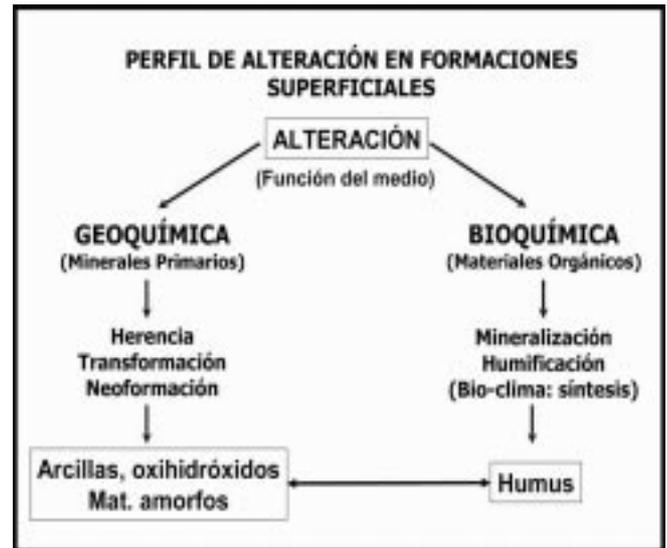


Figura 3. El proceso de alteración sobre las formaciones superficiales, aspectos geoquímicos y bioquímicos.

piroclastos, los cuales constituyen más del 80% de los materiales formadores de los suelos colombianos (IGAC, CORPOICA, 2002); el porcentaje restante incluye rocas ígneas, metamórficas y asociaciones de ellas.

Los materiales comentados establecen diferencias de meteorización química y producen un contraste evidente, por ejemplo, entre los sedimentos cuarzosos, caoliníticos y sesquioxídicos de la altillanura (Llanos Orientales) y las rocas volcánicas fácilmente alterables de las cordilleras (Wirthmann, 2000).

La alteración geoquímica conduce, en síntesis, a definir la composición mineralógica de los suelos y de sus materiales de origen.

La dinámica *bioquímica* establece la relación entre los organismos vegetales y animales y la parte orgánica del suelo, a través de los compuestos húmicos y no húmicos que la caracterizan y, en muchos casos, explican tanto su fertilidad como su dinámica evolutiva.

En esta dinámica sobresalen por su importancia, los *compuestos húmicos* (Duchaufour, 1998) integrados por ácidos fúlvicos, húmicos y huminas, resultado del tipo de alteración (hidrólisis neutra, acidólisis, complejólisis) y de la síntesis bioquímica (humificación), en función de las características bioclimáticas de cada región (vegetación, composición florística, aporte de biomasa, fauna edáfica, microorganismos y condiciones del medio físico: pH, bases de cambio, etc.).

Los productos resultantes se resumen en el *tipo de humus* predominante, el cual produce diferentes acciones en los suelos, vinculadas tanto con su génesis - evolución (mull ándico de los Andisoles, mor en los Espodosoles, mull vértico en los Vertisoles, etc.), como en los tipos, clases y grados estructurales de los suelos y con su fertilidad.

Ello es especialmente aplicable a los suelos referidos como de “ciclo corto” (Duchaufour, 1998) (holocénicos) de las cordilleras colombianas, mucho menos válido para la altillanura de los Llanos Orientales y de gran importancia, más para la fertilidad de “ciclo cerrado” que, para la evolución de los suelos en las regiones de lomerío amazónico y en algunas zonas del Andén Pacífico.

Los productos resultantes de la alteración geoquímica y bioquímica generan, a su vez, interacciones, reacciones y definen en gran parte, la tipología de los suelos.

Los aspectos tratados en los párrafos previos no pueden desvincularse del *clima* y de sus efectos sobre la *vegetación* y sobre los *organismos asociados* (biomas, zonas de vida, formaciones vegetales, ecosistemas), ni de sus cambios en el tiempo (presentados magistralmente para Colombia por Van der Hammen, 1974, 1981, 1992).

Aspectos bioclimáticos

Los aspectos *bioclimáticos*, comentados a continuación, hacen referencia al *clima* general actual del país y a

la vegetación y sus *organismos* asociados. Ellos han sido calificados como los agentes dinamizadores más *activos* en la pedogénesis (IGAC, 1995), en contraste con aquellos que reciben su acción (perfil de alteración), cuya dinámica temporal es mucho menor. El conjunto integrado por los aspectos que definen el bioclima y los inherentes a las formaciones superficiales y sus perfiles de alteración, establecen el *marco natural*, no antrópico (por la complejidad que su intervención genera) para el estudio de la tipología de los suelos del país.

La figura 5 representa, de manera general, la distribución de las provincias de humedad en Colombia (relaciones de promedios anuales de evapotranspiración potencial y precipitación total, IGAC, CORPOICA, 2002). En la Tabla 1 se resumen las principales variables climáticas del país, a partir de las cuales se estiman los *regímenes de humedad y temperatura* actuales que caracterizan los suelos colombianos.

Las conclusiones por resaltar sobre el tema son las siguientes:

- El 80% de Colombia se encuentra en las provincias húmedas (53%), muy húmedas (21.2%) y pluviales (26%). La provincia húmeda, la mayor del país, se halla (91%) en el piso cálido. Éste, a su vez, representa el 80% del país.

Tabla 1. Distribución de las Provincias de Humedad por pisos térmicos y porcentaje de estos en el país continental.

Piso térmico (msnm) y porcentaje	Provincias de humedad	Superficie	
		(ha)	%
Cálido (0-1000): 80	Árida y semiárida	964.903	0.9
	Muy seca	174.335	0.2
	Seca	18.474.043	16.2
	Húmeda	55.401.050	48.6
	Muy húmeda	14.036.686	12.3
	Pluvial	2.062.662	1.8
	Subtotal	91.113.679	80.0
Medio (1000-2000): 8.9	Seca	320.904	0.3
	Húmeda	2.811.351	2.5
	Muy húmeda	5.108.258	4.4
	Pluvial	1.911.402	1.7
	Subtotal	10.151.915	8.9
Frío (2000-3000): 6.6	Seca	624.941	0.6
	Húmeda	1.403.831	1.2
	Muy húmeda	4.221.600	3.7
	Pluvial	1.295.497	1.1
	Subtotal	7.545.869	6.6
Muy frío (3000-3600) y extremadamente frío (3000 - 4700): 2.5	Húmeda y muy húmeda	1.689.756	1.5
	Pluvial	1.111.780	1.0
	Subtotal	2.801.536	2.5
Subnival y Nival > 4700: 0.2	Muy húmeda y pluvial	227.578	0.2
Otras áreas *		2.116.773	1.8
	TOTAL (estudio) **	113.957.350	100.0

* Corresponde a cuerpos de agua, ríos y zonas urbanas. Fuente: IGAC, CORPOICA, 2002

** Área total del país: 114.174.800 ha. Error del estudio: 0.002

- Las provincias secas a áridas integran el 18.2% de Colombia. Entre ellas sobresale la seca con 17.1% del territorio.
- El clima ambiental, sintetizado previamente, influye considerablemente tanto en los regímenes de humedad y temperatura de los suelos, como en algunas de sus características, por ejemplo en su pH, así:
 - * El régimen *isohipertérmico* es el dominante en Colombia pudiéndose estimar alrededor del 80-85%; siguen a continuación el *isotérmico* (11-12%), *isoméxico* (\approx 6%) y los más fríos, *isofrígido* y *crítico* (1-1.5%).
 - * El régimen predominante de *humedad* es el údico (incluyendo el perúdico), estimado, no determinado, en cerca del 65 - 70% del país; le sigue el *ústico* (con sus transiciones tanto hacia el údico como hacia el arídico) (rango 15 - 20%) y, presentándose en porcentajes bajos (entre 1 y 2%) el *arídico*. Las condiciones ácuicas (presentes en zonas depresionales y en vecindades de cuerpos de agua) se distribuyen en todo el país; se estiman con datos del IGAC, 2003, en cerca de 8.626.700 ha (7.6% del territorio).
 - * Como consecuencia de lo expuesto, en el país predominan *suelos ácidos* y *extremadamente ácidos*, (pH menor de 5.5) sobre los moderadamente ácidos y neutros (pH 5.5 - 7.5), los básicos y alcalinos.

Las condiciones climáticas comentadas se asocian con los *biomas* más representativos del país y, en consecuencia, con su aporte de *biomasa*; ésta de acuerdo con su cantidad-composición y mediante procesos de mineralización-humificación, con la intervención de la edafofauna, explica el contenido de los *materiales orgánicos* de los suelos. Ello es especialmente válido para condiciones donde la actividad humana no ha causado intervención significativa (48.8% del país, IGAC, CORPOICA, 2002). Ambos temas se presentan en la figura 6 (A) y (B).

Tipología de suelos en las regiones naturales de Colombia

Región de la Orinoquia

Su evolución y desarrollo están ligados con el origen de la megacuenca sedimentaria localizada entre el Escudo de la Guayana y el flanco este de la Cordillera Oriental. Predominan los depósitos cuaternarios de origen fluvial, las rocas sedimentarias del Terciario (areniscas, lodolitas y calizas) que reposan sobre sedimentitas del Cretáceo, Paleozoico y rocas cristalinas félsicas del Precámbrico (Geotec, s. f.).

Sobre dichos materiales se desarrollan paisajes de piedemonte, extensas altiplanicies pliopleistocénicas, con disección variable (figura 7), planicies aluviales y eólicas parcialmente disectadas y cortadas por largos y estrechos valles aluviales recientes y actuales, asociados a los grandes ríos (Mendivelso, 2003).

Los fallamientos sobre los cuales discurre el río Meta establecen 2 subregiones claramente diferenciadas: la altillanura (altiplanicie) y la denominada Orinoquia inundable. A ellas se hace referencia específica en este aparte del estudio.

Sobre ambas subregiones domina el bioma de *sabanas tropicales* (figura 7), con gramíneas naturales de los géneros *Trachypogon*, *Andropogon*, *Axonopus*, *Paspalum* y *Leptocoryphium*; su predominio depende de la humedad del suelo y Chaparro (*Curatela americana*), y Peralejo (*Byrsonima crassifolia*) como especies arbustivas dominantes en las zonas no hidromórficas. El aporte de *biomasa* es escaso (2.2 a 3.8 ton/ha/año, en sabanas herbáceas (Rao et al, 2000); pero puede incrementarse a 28 o más ton/ha/año, bajo otras coberturas en función del régimen de lluvias, longitud de la estación seca y los nutrientes disponibles (Lamotte, 1987). Dicho aporte explica, de manera general, un horizonte ócrico en la superficie de los suelos, el cual aumenta su contenido en materiales orgánicos a medida que se establece la transición a las zonas con mayor precipitación o a aquellas bajas y a los esteros; lugares, estos últimos, donde la formación vegetal asociada al “bosque de galería” aporta mayor biomasa, se incrementan radicalmente los contenidos de humedad y los suelos presentan horizontes úmbricos o hísticos. En la *altillanura* el tipo de humus es el mull ácido tropical, con composiciones promedias de ácidos fúlvicos a ácidos húmicos superiores a 1.2; su contenido en humina es inferior a 50%, salvo en zonas con recubrimientos eólicos donde supera el 60% (De Becerra, 1986); la humificación supera el 80% en la altillanura poco disectada (Andreux & De Becerra, 1975) y 40-60% en la disectada (De Becerra, 1986).

El clima dominante en la zona abarca los Awi y los Ami (Köppen, 1954), vale decir tropical (26 - 28°C) con estacionalidad marcada y de tipo monomodal (figura 7), sus promedios de precipitación incrementan de Oriente a Occidente y de Norte a Sur desde 2772 mm en cercanías al piedemonte (estación La Libertad), 3048 (occidente del departamento de Casanare) y disminuyen hasta 1700 (Puerto Carreño, IGAC, 1983a), 1532 (Arauca), para aumentar en El Tapón a 2871 mm, al extremo sur oriental. El clima define, en consecuencia, épocas lluviosas que influyen en la pérdida de los pocos elementos solubles o intercambiables de los suelos, generando alta acidez (ran-

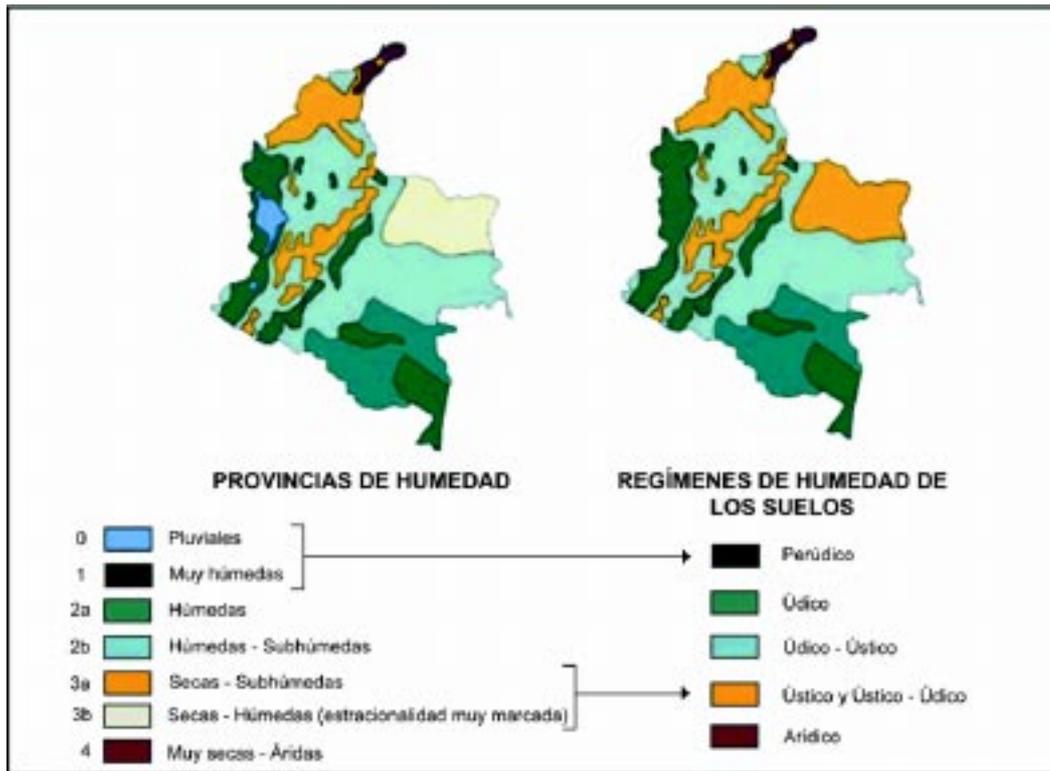


Figura 5. Aproximación a las provincias y regímenes de humedad de los suelos colombianos. No se presentan condiciones ni regímenes ácuicos. Tomado parcialmente de Vélez, et al (2000).

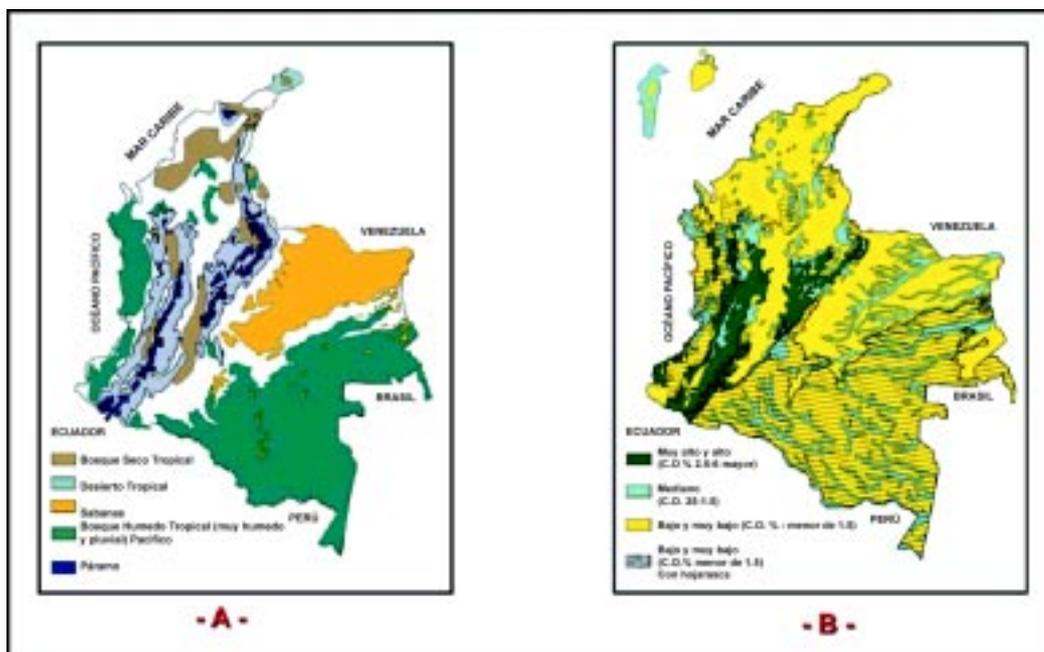


Figura 6. 6 A. Biomas de bosque húmedo tropical, bosque seco tropical, andinos, desierto tropical y ecosistemas de páramo en Colombia (Etter, 1997 a y b, Van der Hammen, 1997, Espinal & Montenegro, 1977, Inst. Von Humboldt, 1997). 6 B. La materia orgánica (C. O.) de los suelos colombianos (IGAC, 1988). En la Amazonia y en el Andén Pacífico (achurados) el bajo contenido de C. O. (horizonte A), se compensa por la capa de hojarasca (horizonte O).

gos dominantes de pH inferiores a 5, pudiendo llegar, en profundidad, hasta 5.5) y épocas secas que favorecen tanto la polimerización de sustancias húmicas como el endurecimiento de horizontes y la cementación (materiales petroféricos) a partir de la deshidratación de compuestos de hierro. Los cambios climáticos durante el Cuaternario también han ocasionado la formación de horizontes petroféricos, algunos de ellos, (zona del Alto Menegua, por ejemplo), evidencian la inversión del relieve y protegen lomas resultantes de dichos procesos. En otros casos, recubrimientos arenosos en la Orinoquia se asocian con los climas más secos del pleniglacial (21.000 a 14.000 años A. P. **Van der Hammen**, 1992) que antecedieron al Holoceno y causaron la acción eólica.

La alteración en la altillanura plana o disectada no afectada por hidromorfismo, presenta **grado** avanzado, manifestado en la composición mineralógica de arenas y limos (prácticamente cuarzo con trazas de fitolitos en la fracción ligera y en la fracción pesada de circón, turmalina, anatasa y materiales opacos de Fe (figura 7). (**IGAC**, 1991). En la fracción arcillosa predominan caolinita, oxihidróxidos de Fe y Al, intergradados 2:1:1, con aluminio interlamilar, pirofilita y gibsita (**IGAC**, 2000b). Ello corresponde fundamentalmente a procesos dominantes de **ferralización** (formación de Oxisoles: *Haplustox* (19.6%), *Hapludox* (14.5%), como prototipos, y algunos *Haplaquox* y *Haploperox*), mediante procesos de alta transformación y pérdida de elementos: Ca, Mg, K, Na y Si, entre otros y, en mucha menor extensión, **ferruginación** (proceso responsable de la formación de Ultisoles: *Kandiudults*, 1.7%, *Hapludults*, 0.9%, *Endoaquults*, 0.8% y *Paleudults*, 0.6%, relacionado con translocación de arcillas, alteración avanzada y alta acidez, que han obrado desde el Plio-Pleistoceno, bajo la acción de cambios climáticos. Al interior de este proceso se manifiestan, en algunas zonas depresionales, subprocesos de óxido-reducción y plintización. La **Podzolización** (queluviación de Al y Fe en medios muy ácidos, arenosos y su posterior iluviación), conduce a la formación de algunos Espodosoles, en especial Aquods en cerca del 1% de los suelos. Los Inceptisoles distróficos (*Dystrudepts* y *Dystrustepts*), transicionales a los Oxisoles, son muy frecuentes.

Indicadores de estos procesos además de los mineralógicos, son los asociados a la muy baja capacidad de intercambio de cationes, CIC: valores inferiores a 4 me/100 g. s. de la capacidad efectiva (CICE) y 9.6 de la determinada a pH 7 (CICA), en horizontes subsuperficiales (**IGAC**, 1980, 1983a, 1991).

El efecto de la marcada estacionalidad climática, su relación con la vegetación de sabana tropical y el esta-

blecimiento del mull ácido como tipo de humus, ha generado, en unión con la alteración avanzada, características de muy baja fertilidad, tanto actual como potencial, lo cual conlleva prácticas agronómicas específicas fundamentadas en establecer, mantener o mejorar, variedades de plantas adaptadas a estas condiciones (**Cortés**, 1982).

La **Orinoquia inundable**, por otra parte, caracterizada por sus planicies aluviales y eólicas, desarrolla suelos directamente influidos, ya sea por sus condiciones climáticas estacionales (1800 a 2500 mm y 27°C en Casanare y 1532 mm en Arauca) o por su inundabilidad, especialmente referida a zonas depresionales mal drenadas y con mayores porcentajes de carbono orgánico (1 - 2%, exceptuando los *Psamments*) si se comparan con los suelos de la altillanura (0.5 - 1%). Los fenómenos de reducción y óxido-reducción, establecen los procesos fundamentales y las características de sus suelos (*Endoaquepts*, *Endoaquults*) (**IGAC**, 1986, 1993). Las zonas con recubrimientos eólicos presentan suelos de muy poca evolución (diferentes *Psamments*); los *Dystrudepts* abundan en toda la subregión.

La figura 8 muestra aspectos de los principales paisajes y de los suelos bajo condiciones hidromórficas.

Para establecer la tipología de los suelos de mayor evolución y definir indicadores de la misma, se analizaron sus componentes mineralógicos y la CIC. Los primeros ponen en evidencia contenidos muy altos en cuarzo ($\approx 90\%$), pero con dos diferencias fundamentales en relación con la altillanura: valores cercanos al 5% de feldespatos (indicadores de menor grado evolutivo), en las arenas de Arauca y cantidades trazas en Casanare (**IGAC**, 1986, 1993) y dominancia ($\approx 50\%$) de caolinita, rangos cercanos al 15% en muscovita para las arcillas de Arauca y sólo contenidos trazas de montmorillonita y vermiculita en algunos suelos de Casanare (**IGAC**, 1993).

La CIC de los horizontes subsuperficiales es muy baja en los Entisoles e Inceptisoles de Arauca (CICA: 7.2 me/100 g y CICE: 2.7 me/100 g) si se compara con la de los Ultisoles y Alfisoles (CICA: 15.3 y CICE: 5.5 me/100 g); la CICE está dominada por Al de cambio. En el departamento de Casanare el 62% de los suelos presenta valores menores de 10 me/100 g para CICA y el 68% menos de 4 me/100 g para CICE (**IGAC**, 1993).

En **síntesis**, los suelos de la **altillanura** orinocense representan los de **mayor grado evolutivo** en el país y están dominados por la tipología de los diferentes Oxisoles (*Haplustox*, 19.6% y *Hapludox*, 14.5%) y, en mucha menor proporción, de los Ultisoles (*Kandiudults*, 1.7%, *Hapludults*, 0.9%, *Endoaquults*, 0.8% y *Paleudults*, 0.6%). La

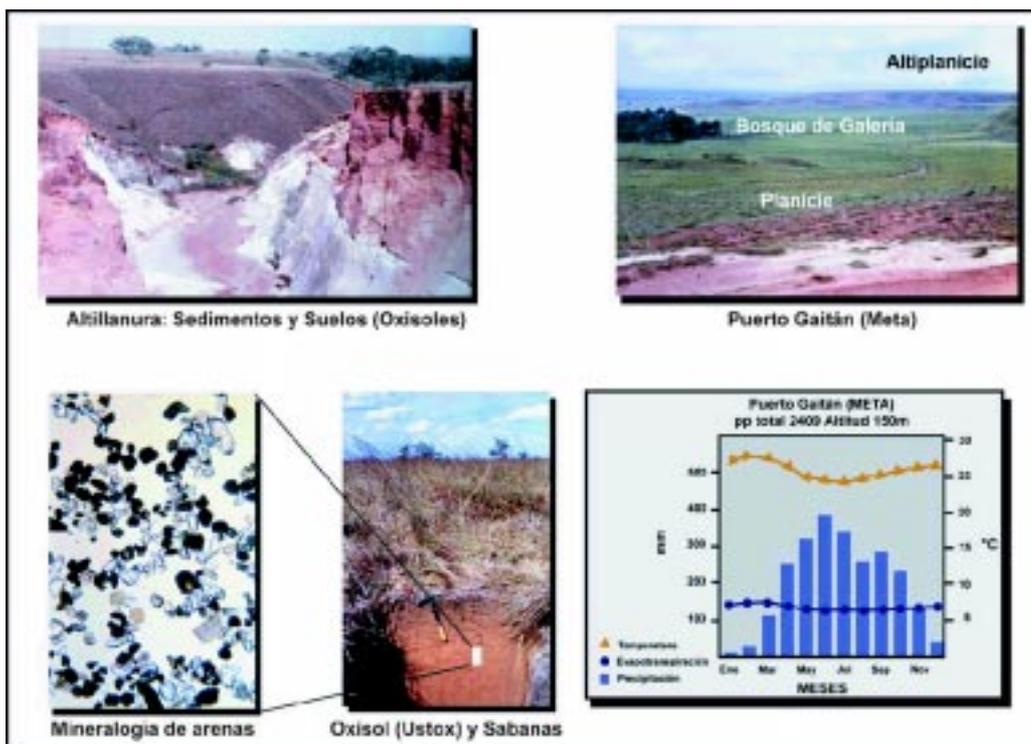


Figura 7. Oxisoles en la altillanura de los Llanos Orientales en la zona de Puerto Gaitán: geformas, clima, vegetación (sabanas) y mineralogía de la fracción arenosa pesada (circón, turmalina, opacos).

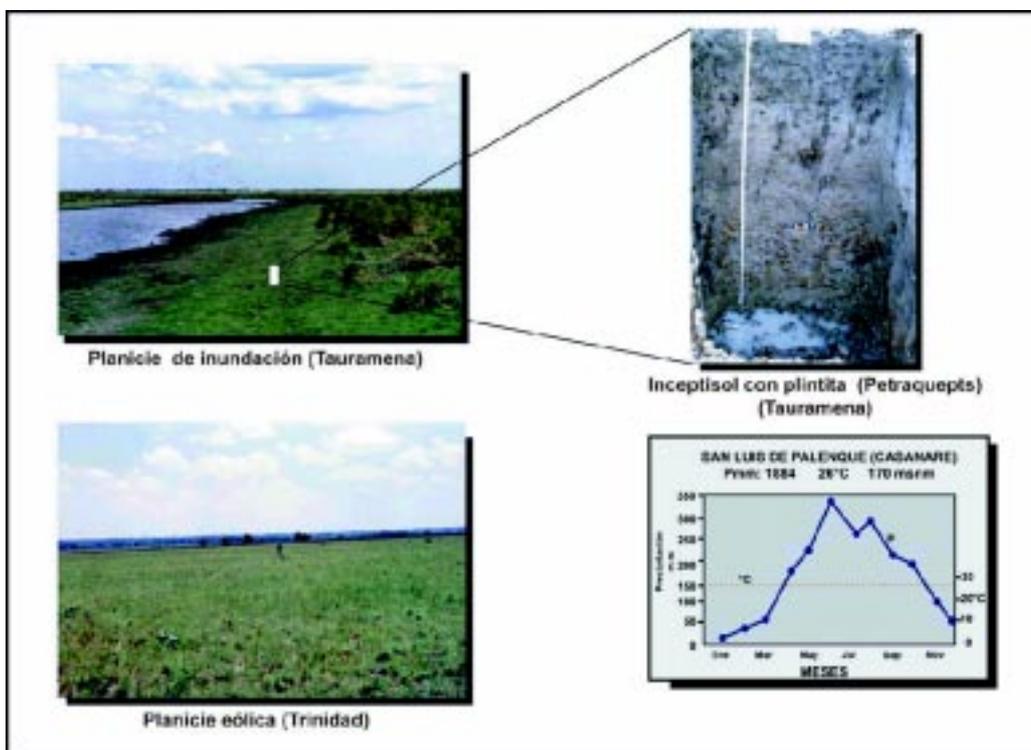


Figura 8. Geformas y suelos de la Región de la Orinoquia inundable (departamento de Casanare), resaltan aspectos hidromórficos.

Orinoquia inundable manifiesta grados avanzados de alteración (cuarcos, caolinita, intergradados, micas) relacionados con sus productos de depósito más que con la génesis de los suelos, pero tipos de suelos de mucha menor evolución (Entisoles e Inceptisoles), con Ultisoles y algunos, muy pocos, Alfisoles en Arauca, como resultantes de procesos evolutivos específicos. El prototipo de máxima evolución lo constituyen los *Endoaquults* (15.8%), con *Haplaquox* (3.4%) y muy escasos *Endoaqualfs*.

Las condiciones hidromórficas y los recubrimientos eólicos explican esta tipología opuesta a la de la altillanura, donde los sedimentos antiguos, el tiempo de evolución y la estacionalidad climática son responsables de su tipología.

Región Amazónica

La Región Amazónica hace parte de la extensa **megacuena sedimentaria** desarrollada entre el Escudo de la Guayana y el flanco este de la Cordillera Oriental. Presenta una espesa cobertura de rocas y depósitos sedimentarios, de origen marino y lacustrino (Terciario marino) y continental (Terciario continental) en la parte central de la región, al sur en el basín del Amazonas y al Sudoccidente en el del Putumayo, sobre rocas del Paleozoico y Precámbrico (zonas orientales), compuestas por migmatitas y un complejo ígneo-metamórfico (**Ingetec**, s. f.).

Los **materiales** anotados configuran expresiones geomorfológicas que integran los paisajes de interés: lomerío fluviogravitacional, altiplanicie estructural-erosional, superficie de aplanamiento residual y, de menor interés para el objetivo de estudio, las planicies y los valles aluviales.

El **clima** dominante en la región es el Afi (**Köppen**, 1954), cálido húmedo-muy húmedo, sin estaciones secas marcadas y con precipitaciones promedio anuales, excluyendo el piedemonte, de 2876 mm (16 estaciones, **IGAC et al**, 1979) para la región, variando en los paisajes estudiados según su localización. Hacia la zona oriental (Mitú) y sur (Trapezio amazónico), los promedios son de 3254 y 3318 mm, respectivamente (**Pulido et al**, 1996, **Malagón** 2001). La precipitación decrece (2598 mm) a medida que se transita hacia la Orinoquia.

El promedio de la temperatura anual es de 25.7%, isotermal, pero con grandes variaciones diarias, la humedad relativa presenta valores entre 84 - 88% y los valores de evapotranspiración potencial más comunes varían entre 1400 y 1500 mm. Las características climáticas co-

mentadas, establecen regímenes údicos- perúdicos e isohiptérmicos en los suelos dominantes y condiciones ácuicas (**Soil Survey Staff**, 1999) en las zonas mal drenadas (de interés en Espodosoles hidromórficos, al oriente de la región). En síntesis, la región tipifica el clima dominante (cercano al 80%) del país: cálido y húmedo-muy húmedo.

Como consecuencia de lo previamente comentado, la **selva neotropical** (bosque húmedo-muy húmedo tropical) constituye su clímax vegetacional, especialmente en ecosistemas de "tierra firme", con inclusiones de otros ecosistemas (caatinga, várzea) en áreas bajas y con mayor hidromorfismo.

El aporte de **biomasa** es fundamental en la dinámica ecológica de la región debido a sus condiciones distróficas. En ecosistemas de tierra firme el aporte de biomasa en bosques ligeramente intervenidos, se encuentra entre 292 y 391 ton/ha/año (**Saldarriaga**, 1988, **Ballesteros**, 1993, 1996 y 1998). Estos valores disminuyen con la intervención (236 ton/ha/año, **Ballesteros**, 1993) y en la caatinga baja (128 ton/ha/año), e incrementan en la várzea (419 ton/ha, **Ballesteros**, 1998). Ellos se vinculan con la capa de hojarasca (horizontes O), la cual, de acuerdo con los criterios establecidos por **Duchaufour**, 1998, evoluciona para establecer diferentes tipos de humus.

En los paisajes y suelos de interés, el tipo de humus está relacionado con el perfil orgánico de la hojarasca, éste se caracteriza por presentar, en condiciones naturales, una capa (3 - 4 cm) de hojas y ramas, bajo la cual se encuentra una zona de raicillas entreveradas (6 cm) e inferior a ella la zona de humificación (2 - 3 cm) transicional al horizonte A.

Los compuestos húmicos se caracterizan por relaciones ácidos fúlvicos (AF) a ácidos húmicos (AH) en el rango 1.3 - 2.3, bajo bosque, y disminuyen (< 1 - 2.3) al incrementarse los compuestos alifáticos en presencia de vegetación escleromorfa (**Correa**, 2000). Los valores mayores (3.5 - 3.8) se presentan en el piedemonte del Putumayo (**Correa**, 2002).

La humina insoluble presenta valores altos cercanos al 70% (**Bendeck**, 1993), en el piedemonte y lomerío caqueteños.

La tipología de los suelos a que se hace referencia se circunscribe al lomerío amazónico, las altiplanicies estructurales erosionales y a las superficies de aplanamiento residuales.

En el **lomerío**, la distribución de los suelos tiende a un predominio de Ultisoles (*Kandiudults*, figura 9, más que *Paleudults* y *Hapludults*) y Oxisoles (con abundancia de *Hapludox*, *Haploperox*, Figura 9, y escasos

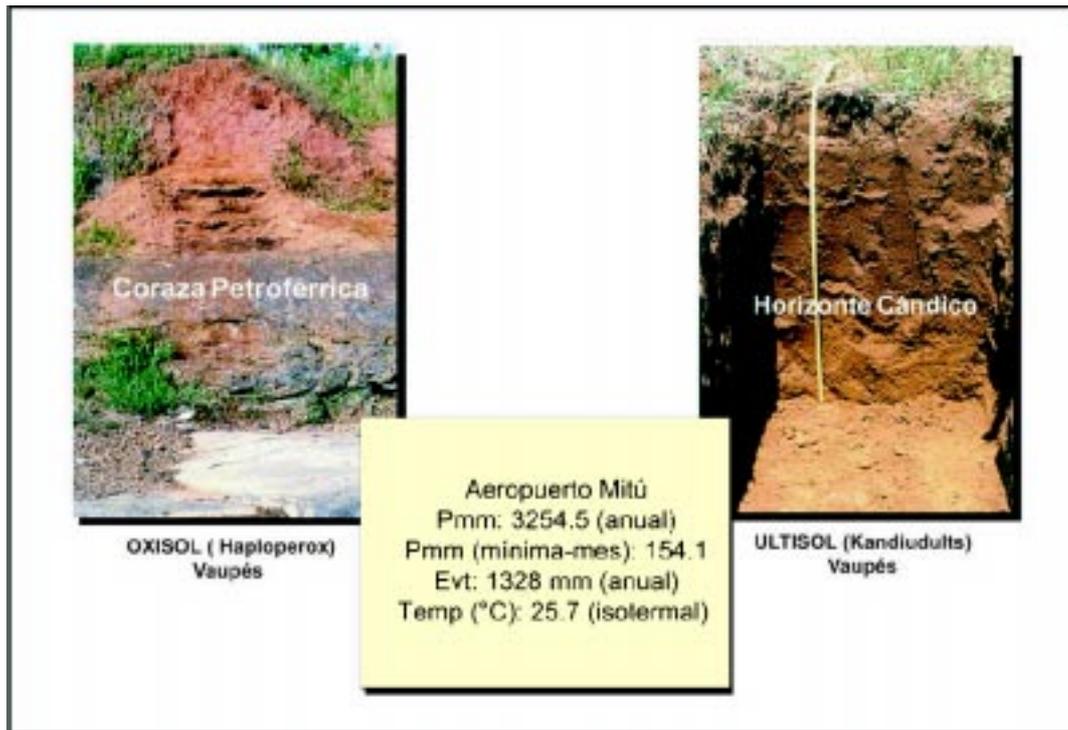


Figura 9. Ultisoles y Oxisoles de la región de la Amazonia en el departamento de Vaupés: corazas petroféricas y horizonte cándico.



Figura 10. Espodosoles de la región de la Amazonia oriental: morfología y micromorfología de suelos, montes relictos (inselberg), arenas blancas y vegetación de caatinga.

Haplaquox), mientras que en las **altiplanicies** y **superficies de aplanamiento** los Oxisoles (*Hapludox* y *Haploperox*) predominan sobre los Ultisoles (*Udults*). En ambos casos son comunes los *Dystrudepts* (17% de la región), que frecuentemente intergradan hacia ellos (IGAC, 2000a) y diferentes *Psamments* asociados a cerros residuales, los cuales en algunos casos de la superficie de aplanamiento muestran evidencias de podzolización (*Epiquods*, figura 10). Estos Espodosoles se complementan con los presentes (*Alaquods*) en zonas aluviales (planicies y valles) asociados a los *Quartzipsamments*. Todos los suelos se hallan en medios cálidos, húmedos o muy húmedos.

En las **zonas aluviales** (planicies y valles), no sujetas por sus características a este análisis, dominan los Entisoles (*Fluvaquents*, *Udfluvents*, *Psamments*) e Inceptisoles (*Dystrudepts*, *Endoaquepts*) (Cortés, 1982). Se exceptúan las terrazas más antiguas donde son frecuentes los *Hapludox*, *Hapludults*, *Kandiudults* y *Haploperox*.

De los comentarios previos se deduce que los prototipos de suelos evolucionados (51% de la región), se caracterizan por procesos de **Ferralización** y **Ferruginación** en medios húmedos o muy húmedos, extremadamente ácidos, desaturados, con abundante Al de cambio y, en algunas zonas orientales, por la **Podzolización** (*Epi* y *Alaquods*, 2%), en condiciones hidromórficas a partir de materiales arenosos provenientes del Escudo Guayanés. El tipo de evolución anotado (de ciclo largo) se complementa con el grado avanzado de la misma (cuarzo en la fracción arenosa y caolinita, intergradados Al-vermiculita, oxihidróxidos de Fe y gibsita; la muscovita se concentra en las zonas de mayor influencia aluvial).

Los horizontes argílicos de los Ultisoles presentan valores (me/100 g) de CICA entre 16 y 18; CICE cercanos a 10 (Pulido & Malagón, 1993 y Pulido et al, 1996), mientras que los horizontes óxicos los manifiestan mucho menores: 6.4 y 2.6, respectivamente. Los procesos mencionados tienen estrecha relación con la evolución de las geoformas y con su edad (lomerío menos antiguo que las superficies de aplanamiento), a partir de las rocas sedimentarias del basín amazónico del Terciario, al Sur y al centro de los depósitos fluviales y lacustrinos del Plio-pleistoceno y del Terciario marino y continental. Las principales geoformas (lomerío, altiplanicie y superficie de aplanamiento) se relacionan con procesos erosivos geológicos (asociados a fuerte alteración y pérdida de materiales), bajo climas cálidos y húmedos-muy húmedos que han cambiado en el Pleistoceno, pero cuya acción ha sido más notable, en cuanto a explicar los suelos en su componente superior (Pleniglacial superior tardío, Van der Hammen, 1992). La

eliminación paulatina de arcillas de la superficie del suelo se ha propuesto (Pulido & Malagón, p. 369, 1996) como fenómeno erosivo generalizado, vinculado a la dinámica del agua, para explicar gran parte de las características granulométricas de los horizontes A de los Ultisoles. Ello, en adición al componente fino de los materiales de origen, conforma gran parte de su morfología.

Como consecuencia de lo expresado, adquiere gran importancia la **capa de hojarasca** como fuente de reciclaje de elementos con la vegetación y como aportante de sustancias húmicas, las cuales en los Espodosoles se asocian con su proceso formativo. Esta capa (horizonte O), tiene una tasa de renovación muy alta (cerca a 3 años), especialmente para las fracciones superiores a 50 mm, razón por la cual si se busca incrementar la retención permanente (mayor a 1000 años) de CO₂, debe fomentarse la síntesis de sustancias húmicas mediante la intervención de la fauna edáfica, en especial de lombrices de tierra (Camini Seneviratne, 2001). Ello debe evaluarse en el país, dado que investigadores como Laurance et al (2002), estiman en 600 kg/ha/año la acumulación anual de carbón en los bosques amazónicos y, en consecuencia, deducen altas cantidades de retención del elemento.

En síntesis, en la tipología estudiada sobresalen los suelos de **alta evolución**, representados por los Oxisoles (*Hapludox*, *Haploperox* y *Haplaquox*) en el 31% de la región (IGAC, 2003) y por los Ultisoles (*Kandiudults*, *Paleudults* y *Hapludults*) en el 20%. Después de la altillanura, en la Orinoquia colombiana, esta región representa los suelos más evolucionados del país; se diferencia de la primera por el mayor componente de Ultisoles (relación Oxisoles a Ultisoles: 1.6) y por una proporción de 1.5 entre los suelos de mayor evolución (Oxisoles - Ultisoles) a los de menor (Entisoles - Inceptisoles).

Región del Pacífico

Esta región conocida como Andén del Pacífico, comprende una franja alargada y estrecha, entre el flanco occidental de la Cordillera Occidental hasta la línea de costa, desde la frontera con Ecuador, en el sur, hasta la frontera con Panamá, en el norte.

La región, desde el punto de vista geológico, está conformada por rocas ígneas plutónicas y volcánicas del Cretácico que afloran a manera de núcleos, en las serranías de Baudó y Darién, sobre las cuales se encuentran rocas del Terciario, especialmente sedimentarias clásticas del geosinclinal de Bolívar, sobre las cuales se acumularon potentes y extensos depósitos cuaternarios de origen marino, fluvio-marino y fluvial que modelan las

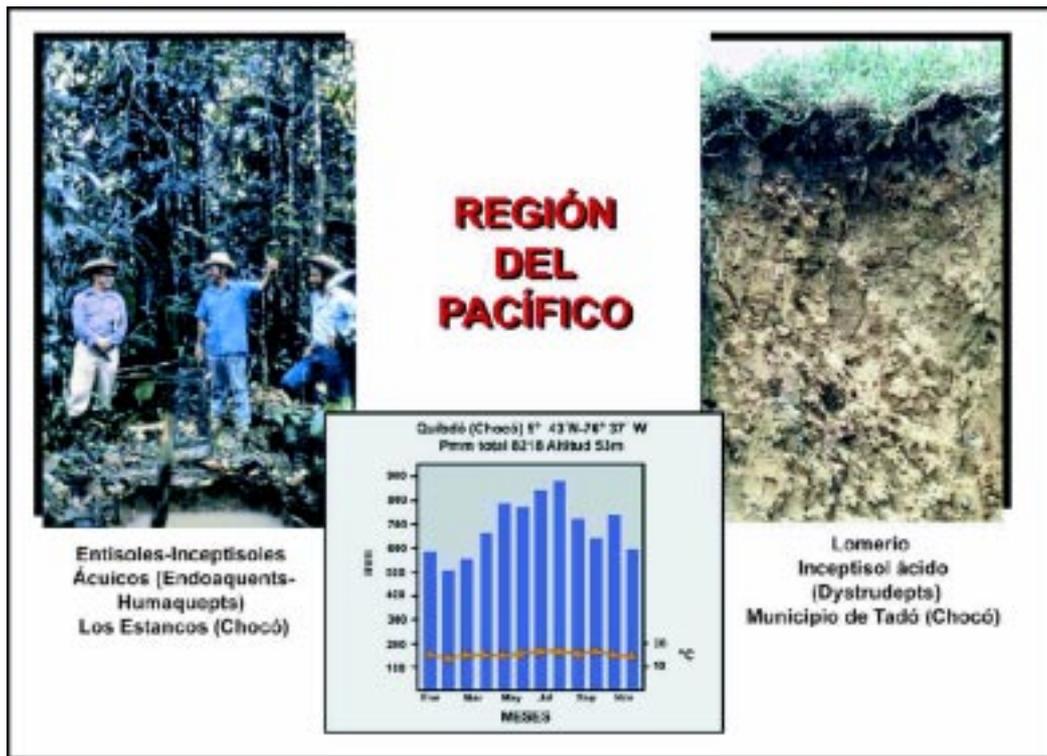


Figura 11. Región del Pacífico: aspectos climáticos, vegetación de bosque pluvial y suelos de bajo grado evolutivo (Dystrudepts), en el departamento de Chocó.

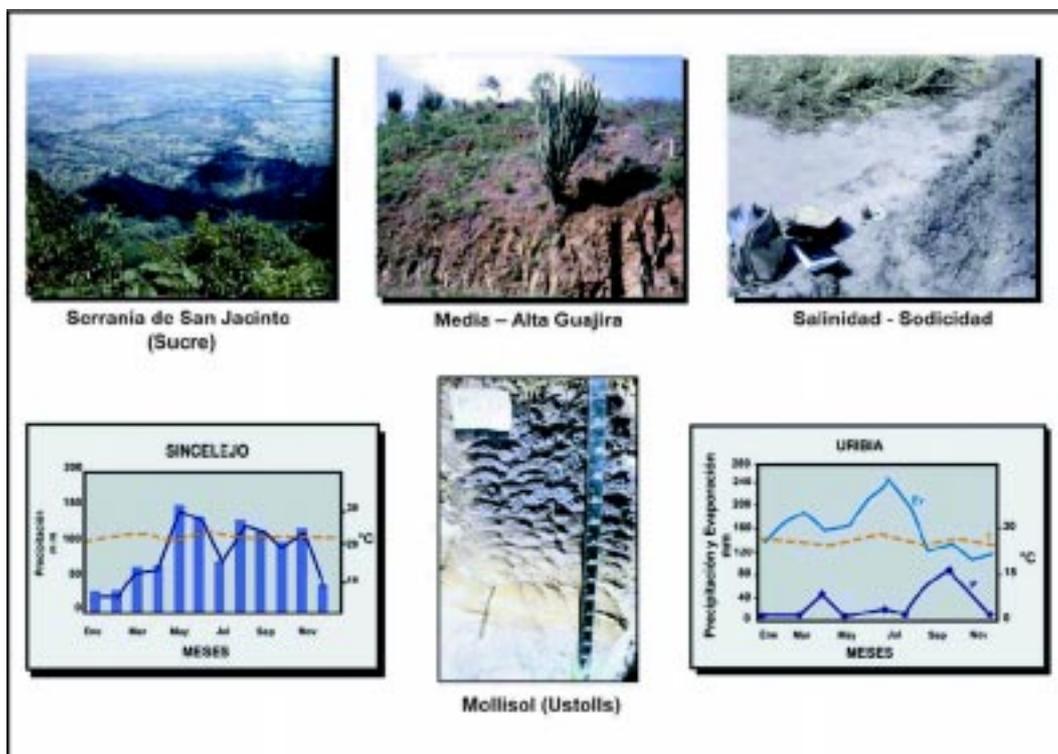


Figura 12. Mollisoles y Aridisoles de la Región Caribe: aspectos climáticos, morfológicos y de salinidad.

planicies actuales. Lo anterior pone de manifiesto un aspecto importante, desde el punto de vista de los suelos: aporte relativo mayor de rocas de composición máfica dominante (basaltos, diabasas, cuerpos ultramáficos, **Geotec**, s. f.) en comparación con otras regiones del país, a la vez que la presencia de calizas, especialmente del Terciario.

Geomorfológicamente se presentan paisajes de montaña, piedemonte, lomerío, valles y planicies aluviales; estas últimas asociadas con sedimentos fluvio-marinos y fluviales que actualmente dominan la mayor parte del Andén Pacífico, asociados especialmente a las cuencas de los ríos Atrato, Baudó, Patía y Mira (**Mendivelso**, 2003).

Los paisajes de interés para el presente estudio se circunscriben al piedemonte, lomerío denudacional (paisaje más extenso que el lomerío estructural, en el Chocó) y algunas terrazas de los valles, en alturas que no sobrepasan los 500 m.s.n.m.

En todos ellos el clima dominante se caracteriza por temperaturas altas e isotermales (promedio de 26.4°C en 11 estaciones seleccionadas, **IGAC** 2002), las precipitaciones abundantes de tipo bimodal, que se incrementan de Norte a Sur con concentraciones muy altas en el centro del departamento de Chocó (6.000 a 8.500 mm, rango en estaciones con registros entre 10 y 25 años, figura 11). Las condiciones muy húmedas y pluviales (4.000 - 7.000 mm) se mantienen hasta los límites con la República del Ecuador, en una franja intermedia entre el litoral Pacífico y la Cordillera Occidental. En algunas zonas del litoral (Tumaco) y en el Urabá chocono (Estaciones de Unguía, Acandí, el Mira), las precipitaciones disminuyen (2000 - 3000 mm), presentándose déficit de humedad en los primeros meses del año.

Las condiciones previas, aunadas a las altas humedades relativas (88.3%, promedio de 13 estaciones, **IGAC**, 2002), evapotranspiraciones cercanas a 1.500 mm, definen como climas dominantes los superhúmedos de selva (Afi, **Köppen**, 1954), con lluvias durante todo el año y zonas de vida (**IGAC**, 1977) de bosque pluvial (premontano y tropical), bosque muy húmedo (tropical y premontano) y bosque húmedo tropical. Concordante con lo expresado, los regímenes climáticos dominantes del suelo son el isohipertérmico y los perúdicos y údicos, con abundantes áreas en condiciones ácuicas marcadas (subórdenes ácuicos), ellos han restringido la alteración y la generación de suelos altamente evolucionados (**Wirthmann**, 2000).

La vegetación del Andén Pacífico es una de las más diversas y complejas del país en cuanto a estructura y nú-

mero de especies, explicada por el medio donde se encuentra: muy altas precipitaciones y temperaturas, tipo y composición de rocas, sedimentos y suelos. La biomasa que aporta varía de acuerdo con estos factores y con el grado de intervención. En ecosistemas de bosque pluvial tropical de colinas bajas y poca intervención, **Rodríguez** (1988) presenta valores de 331 ton/ha/año. Al cambiar a ecosistemas de bosque inundable de caaitival (*Prioria copaifera*) aumenta a 1.200 ton/ha/año (**Mendoza et al**, 2000).

El humus del suelo en los paisajes de interés, está vinculado con el aporte de biomasa anotado, texturas finas, regímenes perúdicos, údicos e isohipertérmicos, saturaciones de Al mayores del 60% en el 80% de los suelos y baja a muy baja saturación de bases de intercambio (**IGAC**, 2002), asociados con alta acidez (pH en el rango 4.5 - 5.5).

La **tipología de los suelos** en los paisajes bajo estudio, dado que en los demás (planicie y montaña) predominan suelos no sujetos a análisis, excepto Andisoles (1% de *Hapludands* y estos más que *Melanudands*) en montaña y algunos suelos evolucionados en las terrazas más antiguas, está caracterizada por Ultisoles (*Hapludults*, 7%) y Oxisoles (*Hapludox* y *Perox*, 8%), en porcentajes que no alcanzan la tercera parte de los presentes en la región amazónica. Su distribución se concentra en la parte central de la región, disminuyendo en sus extremos, especialmente hacia el Sur (Nariño), **IGAC**, 1999.

Los grandes grupos *Hapludults* y *Hapludox*, por otra parte, indican grados evolutivos menores que, por ejemplo, los de los *Paleudults* y *Kandiudults* amazónicos.

En la Región del Pacífico los Inceptisoles y Entisoles constituyen los suelos más frecuentes (73%) (**Cortés**, 1982). Los primeros (49%) están representados por los *Dystrudepts* (34%), *Eutrudepts* (10%) y por los *Epi* y *Endoaquepts*. Entre los Entisoles (24%) se destacan los *Udorhents*, *Udifluvents* y *Fluviaquents*, los cuales y en conjunto se acercan al 20%; en menor proporción están los *Hidraquents* (3%). Resalta el hecho de presentarse suelos relativamente saturados (*Eutrudepts*) en el 10% de la región, a pesar de las extremas condiciones de precipitación, vinculados a la litología máfica de los materiales que los forman.

Los suelos orgánicos (Histosoles), *Sulfi* y *Haplohemists*, constituyen el 3%, mientras que los Andisoles se concentran en montaña y los muy escasos Vertisoles (*Hapluderts*, 1%), sólo en la zona menos húmeda del norte de la región.

La síntesis tipológica descrita, indica que los procesos de **Ferralización** (Oxisoles) y **Ferruginización** (Ulti-

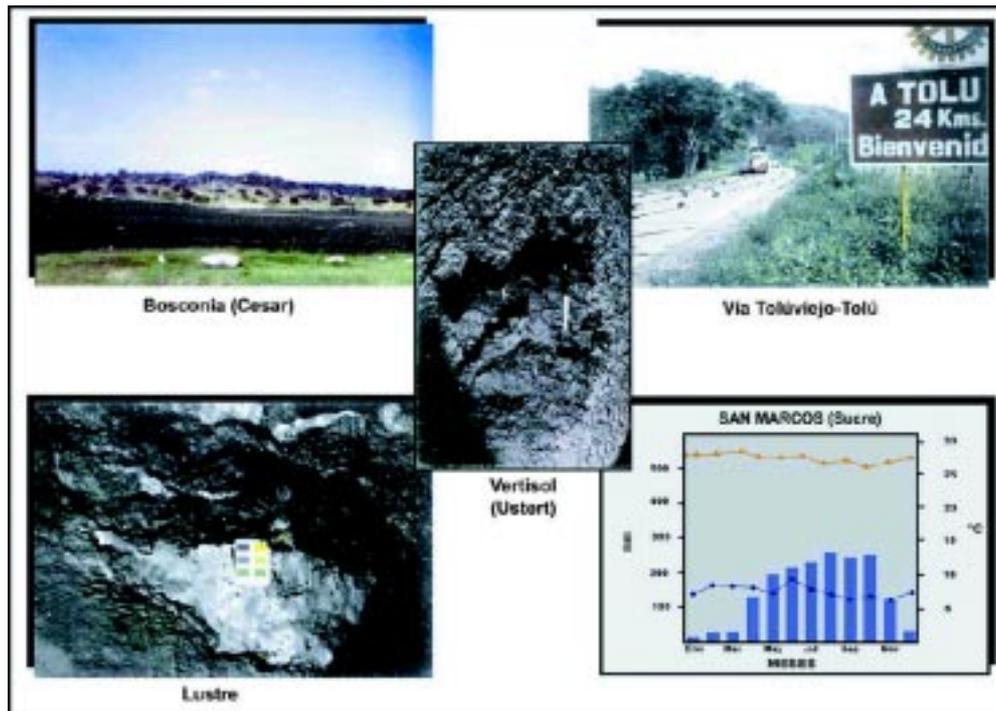


Figura 13. Características diferenciales de los Vertisoles de la Región Caribe: color, lustre, rotación de estructuras y efectos de los procesos de expansión - contracción en las vías.

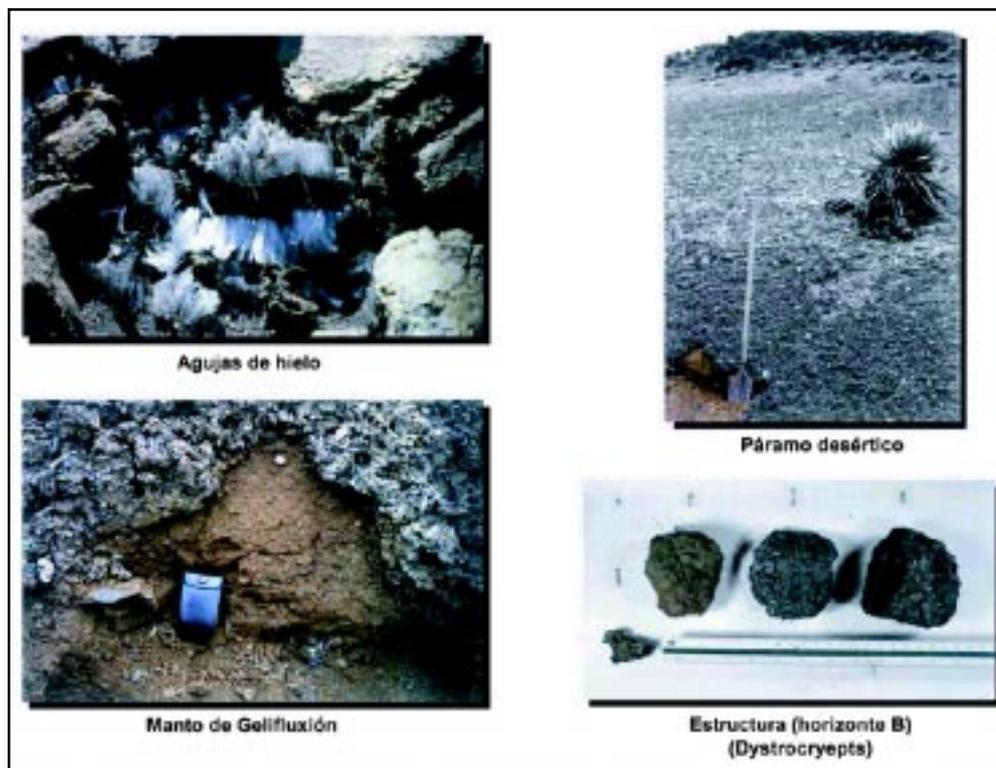


Figura 14. Dinámica periglaciár (gelifluxión, agujas de hielo), paisaje y suelos resultantes (*Dystrocryepts*).

soles) *tropicales*, son menos frecuentes que en la Amazonia y, como ya se ha comentado, que en la altillanura de la región de la Orinoquia. Si se toma como ejemplo el Departamento más extenso (Chocó), la relación Ultisoles a Oxisoles es aproximadamente de 3.7 a 1 y la de estos a los de los suelos de menor evolución (Entisoles e Inceptisoles), de 0.2 (IGAC, 1998).

El grado alcanzado de evolución, fundamentado en la mineralogía de los suelos y en las características de la capacidad de intercambio, define dos zonas; la primera corresponde al Departamento de Chocó y la segunda al Valle del Cauca y Nariño.

En la primera predominan cuarzo, minerales alterados que no alcanzan el grado de opacos y feldespatos, en la fracción arenosa y, en la arcillosa, caolinita, cuarzo con micas e integrados en cercanías a la costa o en Urabá.

La segunda zona se caracteriza por un mayor contenido en minerales alterables en la fracción arenosa; en general están presentes: feldespatos, cuarzo, anfíboles, vidrio volcánico, piroxenos y minerales alterados. La fracción arcillosa en los suelos de interés, es similar a la previamente comentada, pero difiere por el predominio de alofanos en las áreas montañosas.

Las capacidades de intercambio en ambas zonas son explicadas por el clima, los materiales que originan los suelos, la composición de las arcillas, los contenidos en materiales orgánicos y por las clases de suelos. Al tomar como ejemplo el paisaje de lomerío en el departamento de Chocó se constata lo expresado: en el clima muy húmedo y pluvial, donde sólo el 3% de los suelos son moderadamente ácidos y el resto varía entre extremada y fuertemente ácidos, la CICA en el 70% del área se presenta en rangos medios y altos, explicada por características de carga variable; en cambio la CICE presenta valores muy bajos (< 4 me/100 g.s.). En el mismo paisaje pero en clima húmedo, la CICA se encuentra en rangos medios (26%) y altos (7%), IGAC, 1998.

Región del Caribe colombiano

La región Caribe de Colombia está comprendida entre el Golfo de Urabá, en el Sudoccidente hasta la Península de la Guajira en el Nororiente. Geológicamente incluye el bloque tectónico de la Sierra Nevada de Santa Marta (predominio de rocas plutónicas intermedias del Triásico, Jurásico y sedimentarias), la Depresión Momposina y la parte baja de las cuencas y valles aluviales de los ríos Magdalena, Sinú y San Jorge, donde se encuentran espesos y extensos depósitos cuaternarios, que cubren gran parte de las rocas sedimentarias

del Terciario (lodolitas, areniscas, calizas). Hacia la Guajira se encuentran núcleos de rocas ígneas y metamórficas del Cretácico y Terciario (esquistos, cuarcita, mármol, metadiabasas, anfibolitas y el complejo polimetamórfico y sedimentario del Cretácico, Geotec, s. f.) y delgadas secuencias de materiales clásticos de origen coluvial, eólico, fluvial, lacustre y marino, de edades holocénicas y pleistocénicas.

En la geomorfología de la región sobresalen los paisajes de lomerío (46.391 km²), planicie (29.150 km²), piedemonte (17.004 km²), montaña (11.455 km²) y superficie de aplanamiento (4.669 km²), (IGAC, 1997). Los paisajes de lomerío y planicie conforman el 60.6% de la región.

El clima se caracteriza por un incremento de la precipitación del noreste al sudoeste, con valores inferiores a 500 mm en la alta Guajira y cercanos a 3000 mm al sur de Córdoba; en la Sierra Nevada la orografía determina un comportamiento diferente (IGAC, 1997). Para las zonas de interés, las isoyetas predominantes se presentan en el rango 500 - 1.500 mm, con distribución bimodal al oriente y monomodal al occidente; el régimen más extenso de humedad del suelo es el ústico y, en algunos casos, arídico o transicionales entre el ústico y el údico. En estas mismas zonas (semisecas, semihúmedas, semiáridas), las temperaturas promedio se aproximan a los 27.6°C, generando un régimen isohipertérmico en el 91.4% de los suelos. La evapotranspiración potencial varía inversamente con la precipitación (1.300 mm en Urabá a 2.100 mm en la Guajira), (IDEAM, 1996, citado por IGAC, 1997).

Como consecuencia de las condiciones anotadas, las zonas de vida donde se ubica la tipología de los suelos estudiados, corresponde al bosque seco o muy seco tropical y, en algunas zonas, al monte espinoso o matorral desértico subtropical.

Los aspectos ambientales asociados a las zonas de vida, generan limitados aportes de biomasa que repercuten en el contenido de materia orgánica de los suelos; en éste predominan los valores bajos (45% de los suelos con C.O.% entre 0.5 y 1.2), medianos (30% de los suelos entre 1.3 - 2.5 de C.O.%), muy bajos (< 0.5 de C.O.% en el 20% de los suelos). Los suelos con porcentajes altos de carbón orgánico (> 2.5) sólo incluyen el 5% de la región.

A pesar del bajo contenido de materia orgánica (65% de los suelos), el humus evoluciona en condiciones de alternancia estacional de precipitación y temperaturas altas (los regímenes ústico y arídico abarcan el 65%), pH superiores a 5.6 (73% de los suelos), adecuadas bases de

intercambio, condiciones bajas de saturación de Al (86.8% de los suelos con saturaciones inferiores al 30%) y predominancia de arcillas 2:1 (esmectitas, vermiculita y micas) en el 70 - 75% de los suelos, en especial en la parte central de la región y en la Guajira. Lo anterior repercute en formas evolucionadas (polimerizadas) de humus que influyen notablemente en la dinámica, morfología y propiedades de los suelos de interés (vgr. Mollisoles y Vertisoles, Figuras 12 y 13).

Los suelos analizados en la presente tipología incluyen los Alfisoles (*Natrustalfs* y *Haplustalfs*, 3%), Vertisoles (*Haplusterts*, 4%, *Hapluderts*, 1%), Mollisoles (*Haplustolls*, 4%, *Hapludolls*, 1%), Aridisoles (*Haplocalcids* y *Haplocambids*, 4%). Los Oxisoles (*Hapludox*) sólo están presentes en aproximadamente el 1% de la Región (zonas de sabanas de Ayapel y San Benito Abad, **IGAC**, 1983), igual porcentaje lo alcanzan los Ultisoles (*Hapludults*). Los suelos de menor evolución (Entisoles e Inceptisoles) representan el 62% de ella.

En los suelos de interés resaltan los procesos de **lexiviación** (translocación arcillosa con o sin concentración de sodio) característico de los Alfisoles, la **haploidización** en los Vertisoles ústicos con arcillas expandibles, lustre y estructuras inclinadas (figura 13), la **melanización** y altos contenidos en bases, propia de los Mollisoles y el desarrollo de horizontes cálcicos o cámbicos bajo régimen árido asociada a los Aridisoles.

Importantes también en la región son los procesos de **salinización**, **sodización** y **calcificación** que abarcan cerca del 28% de la región (**IGAC**, 1997, **Cortés**, 1982), figura 12, que se concentran en la alta y media Guajira, parte baja de los ríos Cesar, Magdalena y Sinú, al igual que en la planicie marina de los departamentos de Magdalena, Bolívar y Sucre.

A pesar de las claras diferencias geológicas (litología y aporte de piroclastos), geomorfológicas, climáticas (regímenes de humedad údicos, 47%, ústicos, 26%) y de la naturaleza y origen de los materiales parentales de algunos suelos (Aridisoles), la región de los valles, depresiones y planicies interandinas, en especial la parte del río Magdalena comprendida entre Gigante y el norte de Mariquita y la zona entre El Tambo y Viterbo en el río Cauca, presentan cierta similitud con los suelos de la región Caribe. En ella también están presentes los Mollisoles (~ 3%), Alfisoles (~ 1%) y Vertisoles (menos del 1%). Los Entisoles e Inceptisoles representan, además, un alto porcentaje (~ 74%).

En síntesis, en la tipología de los suelos de la región del Caribe colombiano sobresalen (17%) aquellos

(Vertisoles, Mollisoles, Aridisoles y Alfisoles) predominantemente relacionados con etapas evolutivas moderadas, especialmente asociadas a los materiales de origen y a las condiciones climáticas prevalentes. Los Oxisoles y Ultisoles, como indicadores de comparación, sólo representan el 2% de la región.

Región Andina

La región surge como consecuencia de la colisión de la Placa de Nazca por debajo de la Placa de Sudamérica, lo cual dio origen a la Trifurcación Orogénica Andina, representada por las tres cordilleras colombianas: la Central, la más antigua, conformada por núcleos de rocas polimetamórficas, instruidas por rocas ígneas, representadas por plutones, batolitos y grandes volúmenes de rocas volcánicas de diferentes edades y provenientes de los diferentes volcanes-nevados. La Cordillera Occidental se desprende desde el Nudo de los Pastos en dirección Sur-Norte, pasa por la Hoz de Minamá en la cuenca del Patía y se prolonga hacia el norte hasta perderse en las planicies de la región Caribe. Esta cordillera está conformada por rocas ígneas plutónicas y volcánicas, parcialmente cubiertas por rocas sedimentarias clásticas de grano fino, grueso y calcáreas que, a su vez, están cubiertas por espesos y extensos depósitos cuaternarios de origen volcánico, fluvio-volcánicos, fluvial y coluvial. La Cordillera Oriental se inicia en el Macizo Colombiano y se prolonga hacia el norte hasta la Serranía de Perijá, está comprendida entre el Valle del Magdalena por el Occidente y los Llanos Orientales por el Oriente. Su litología está conformada en los Macizos de Garzón, Quetame y Bucaramanga por núcleos de rocas ígneas y metamórficas, cubiertas por potentes secuencias sedimentarias plegadas y falladas del Paleozoico, Cretácico y Terciario, que a su vez están cubiertas por depósitos cuaternarios de origen glaciario, fluvio-glaciario, fluvio-coluvial y fluvial que rellenan valles intramontanos de origen lacustre. Geomorfológicamente la región está constituida por paisajes de montaña, lomerío, piedemonte, altiplanicie y valle, que han evolucionado por la acción de distintos procesos en diferentes épocas y en variables condiciones climáticas extremas, desde secas a extremadamente húmedas y frías como en los páramos y zonas nivales (**Mendivelso**, 2003, **Cortés**, 1982).

Las condiciones climáticas de la región andina son muy variadas y difíciles de ser sintetizadas, caso opuesto a las demás regiones comentadas. Los efectos orográficos, las vertientes, el relieve, etc., condicionan grandes cambios en espacios reducidos.

Desde el punto de vista de sus relaciones pedológicas, varios aspectos son importantes. El primero de ellos radica

en el efecto significativo de los cambios climáticos del Cuaternario (**Van der Hammen**, 1981, 1992) ya que muchos suelos presentan poligénesis, se han enterrado o fosilizado. El segundo hace referencia a las grandes tendencias que se presentan: zonas de muy alta precipitación en las vertientes oriental y occidental de las cordilleras respectivas, enclaves secos y semiáridos al interior de los valles interandinos, muy amplia gama de precipitaciones, temperaturas y de evapotranspiración potencial asociadas con el relieve y con su influencia en la vegetación.

En síntesis, la región incluye prácticamente todas las condiciones del territorio colombiano; no obstante, con la finalidad de enmarcar las referentes a los suelos de interés, pueden generalizarse tres grandes zonas:

- Las vertientes extremas de las Cordilleras Oriental y Occidental, con precipitaciones de 3.000 a 5.000 mm.
- El "cuerpo" de las cordilleras y valles interandinos: 1.000 - 2.000 mm y regímenes de humedad con prevalencia údica; no obstante, se presentan algunos enclaves secos y regímenes ústicos.
- Las zonas húmedas de los páramos, las periglaciares con procesos de geliflucción, agujas de hielo, escasa vegetación y suelos incipientes (figura 14).

Las zonas de vida en la región se vinculan con los comentarios previos; en consecuencia son muy variadas y con aportes de biomasa obviamente diferentes. Algunos ejemplos lo evidencian: 129 ton/ha/año en bosques intervenidos, alto andinos (Cota, Cundinamarca), según **Rodríguez & Ballesteros** (1998) y, en ecosistemas de bosque húmedo tropical del Magdalena Medio (Carare - Opón) 185 ton/ha en terrazas interandinas y 326 ton/ha en colinas de la región andina, (**Foelster et al.**, 1976).

Las características asociadas con la dinámica de la materia orgánica y productos húmicos resultantes, están influidas fundamentalmente por las condiciones climáticas, los diferentes tipos de materiales que originan los suelos (**Andreux**, 1983, **Andreux et al**, 1978, **Ballesteros et al**, 2001, 2003) y por el tiempo de evolución (ciclos cortos). Destacan fundamentalmente las relacionadas con los Andisoles (suelos derivados de cenizas volcánicas con horizontes A espesos y oscuros y con horizontes B con abundantes alófanos) y su proceso específico de formación (Andolización: complejo de adsorción dominado por Al-humus o por alófanos-humus), en ellos sobresalen, tomando como prototipo los presentes en la zona cafetera central del país, (**Ballesteros et al** 2001, 2003) altos porcentajes de humificación (> 50%), alto contenido de humina de insolubilización, predominio de ácidos

húmicos tipo A, es decir, formas evolucionadas de ellos (**Kumada**, 1987), policondensadas y con tamaños moleculares altos; no obstante, se infieren diferencias pequeñas entre los ácidos fúlvicos y los húmicos. Además, en los horizontes A el Al es el principal catión de enlace, responsable de la insolubilización de los complejos órgano minerales o complejos sales (menos estables que los complejos verdaderos, dominantes en los horizontes Bw).

Los Andisoles colombianos en su mayoría, corresponden a suelos bajo regímenes údicos, crícos, isomésicos o isotérmicos, de ciclo corto (Holoceno). En ellos son comunes los horizontes enterrados como consecuencia de la actividad volcánica (Cordillera Central); no obstante, frecuentemente se hacen evidentes procesos evolutivos vinculados con la fosilización de horizontes y secuencias policíclicas. En la figura 15 se sintetizan los comentarios previos; en ella también se presentan aspectos relacionados con la microestructura de los horizontes A no intervenidos por el hombre y algunos termogramas de alófanos representativas.

Los Andisoles a que se ha hecho referencia constituyen los suelos más representativos desde el punto de vista de la tipología, ya que integran el 16% (*Hapludands*, 11% y *Melanudands*, 5%). Los demás, Mollisoles y Alfisoles, sólo abarcan el 3% de la región. Los suelos de menor evolución (*Inceptisoles* y *Entisoles*) conforman el 67%, destacándose los *Dystrudepts* (55%), (**IGAC**, 2003). En estos suelos los procesos de pérdida por erosión y lixiviación, se compensan parcialmente por los de ganancia de materiales orgánicos por efecto del clima (la mayoría presenta contenidos medianos y altos de C. O.: 1.5 a 6% o mayores), ello conlleva la aparición de horizontes A (Úmbricos) sobre, generalmente, horizontes B (Cámbicos). En medios desaturados, predominan suelos extremada y fuertemente ácidos y bajos en P.

Como referencia comparativa con las demás regiones naturales, los Oxisoles y Ultisoles sólo integran el 0.34% del territorio regional.

Síntesis y conclusiones

El ensayo sobre la tipología de los suelos colombianos, se fundamenta en la interacción de las diferentes expresiones del medio biofísico con los procesos prevalentes de formación de suelos, en las diferentes Regiones Naturales de Colombia. Se hace énfasis en la integralidad del medio natural y en la importancia de los suelos en la aproximación a su estudio.

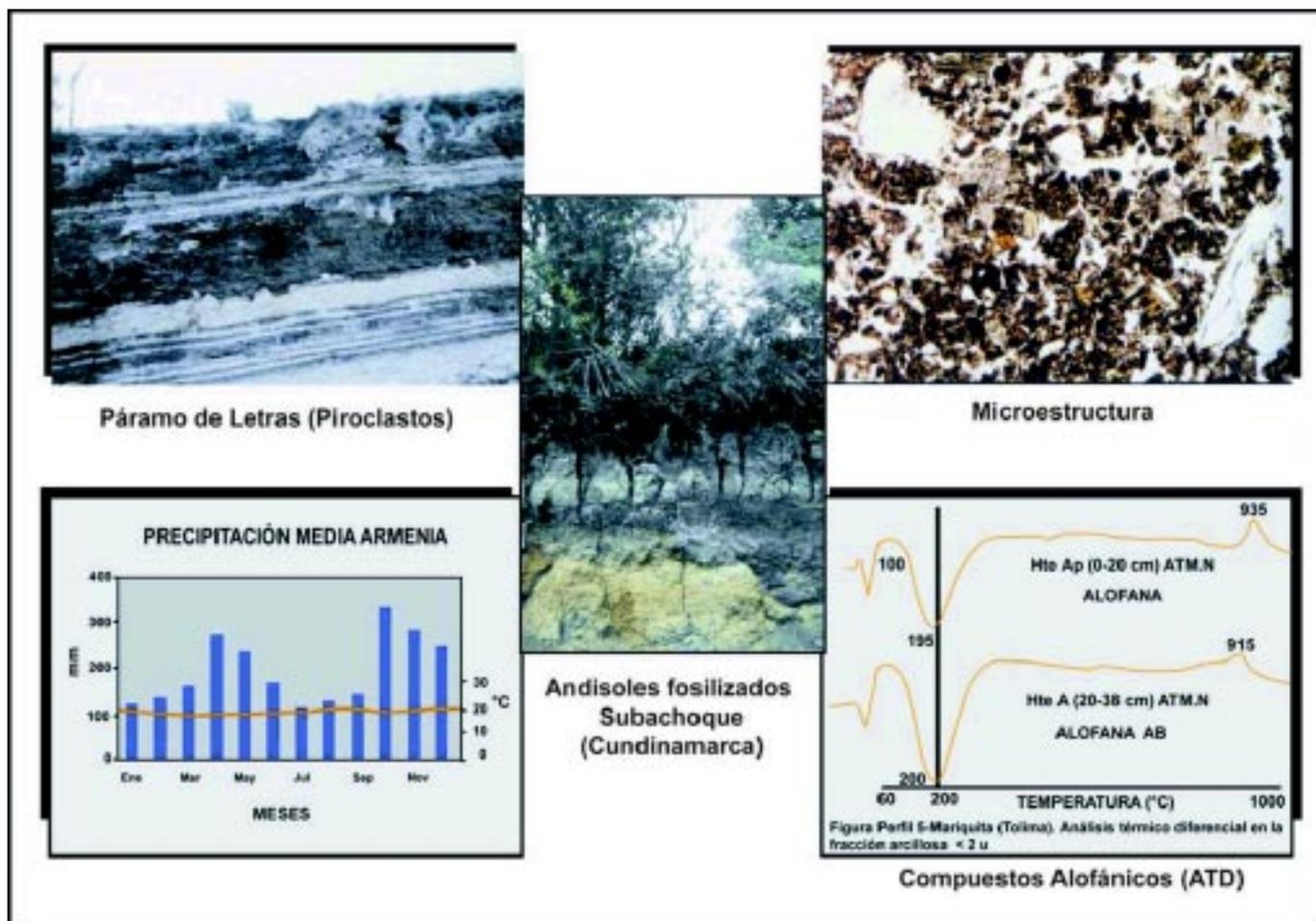


Figura 15. Andisoles de la Región Andina. En la zona central del país se destacan aspectos climáticos, morfológicos y mineralógicos.

Si bien los estudios de la cobertura pedológica define a los Inceptisoles - Entisoles como los suelos más extensos en el país ($\approx 52\%$), el ensayo se centró en la tipología de aquellos con mayor grado evolutivo: Oxisoles, Ultisoles, Alfisoles, Andisoles, Vertisoles, Mollisoles y Aridisoles. Ellos tipifican el *tipo* y *grado evolutivo* alcanzado en las diferentes regiones naturales de Colombia (figura 16). El *tipo* hace referencia a los procesos específicos responsables de definir la evolución de los suelos, expresados en su morfología y taxonomía; el *grado*, por otra parte, indica la etapa de transformación alcanzada por sus constituyentes, tanto minerales como orgánicos, en función de los procesos formativos o de la dinámica a que se hayan sometido previamente a su constitución como materiales parentales. Tres indicadores se tomaron para su caracterización: la mineralogía de las fracciones arena y arcilla, la capacidad de intercambio catiónica (a

pH 7 y la efectiva) y la composición húmica (ácidos fúlvicos, húmicos y huminas).

La evolución geológico - ambiental de cada región natural del país deja evidencias parciales en sus suelos. Ello permitió, mediante la tipología de los más evolucionados, establecer la siguiente secuencia referida a su localización en el paisaje (figura 16): suelos de la altillanura (Llanos Orientales) de las altiplanicies y superficies de aplanamiento amazónicas más evolucionados que en el lomerío; la evolución en todos ellos, es alta a muy alta. Continúan los suelos de las regiones costeras del Caribe y el Pacífico, disímiles en lo ambiental y pedológico pero con etapas evolutivas moderadas, ambas asociadas a paisajes de lomerío y, adicionalmente, de piedemonte (Pacífico) y planicie (Caribe). Los paisajes de montaña y altiplanicie en la Región Andina y de planicie en la Región de la Orinoquia inundable, conforman



Figura 16. Tipos y grados de evolución comparativa de suelos en las regiones naturales de Colombia.

el marco ambiental donde se presentan los suelos de evolución moderada - baja en Colombia.

La síntesis regional de la tipología de suelos se comenta a continuación. Se hace énfasis en los índices finales de evolución que la sustentan: porcentaje de suelos de mayor evolución (Oxisoles y Ultisoles) y relación de estos a aquellos de menor evolución (Entisoles e Inceptisoles). Obviamente, la tipología de cada región es característica, independiente de los índices anotados; ello permite, además, llegar a las conclusiones sintetizadas en la figura 16.

En las regiones de la *Orinoquia* (altillanura) y *Amazonia*, los tipos dominantes de suelos evolucionados son los Oxisoles, Ultisoles y Espodosoles con sus diferentes intergrados, en especial los Inceptisoles óxicos. Las diferencias marcadas en el clima y en el aporte de biomasa (sabanos o selvas) definen tipologías variadas en ambas regiones pero supeditadas a ciclos largos de evolución, en materiales sedimentarios del Plio-pleistoceno (altillanura) y del Ter-

ciario, marino y continental (Amazonia). Los procesos determinantes de estos suelos son los de *ferralización*, *ferruginación* y *podzolización*; su grado evolutivo es muy alto (altillanura, superficie de aplanamiento y altiplanicies, estas últimas en la Amazonia) y alto (lomerío amazónico).

En la altillanura predominan ampliamente los Oxisoles sobre los Ultisoles (x 10) y la relación de estos a los de baja evolución es de 1.1. En la Amazonia el 51% de los suelos corresponde a los de alta evolución (Oxisoles 31% y Ultisoles 20%, IGAC, 2003) y su relación con los de baja evolución (Entisoles e Inceptisoles) es de 1.5.

En el *Andén Pacífico* las condiciones extremas del clima sólo han llevado al 15% de los suelos hasta las clases de Ultisoles (7%) y Oxisoles (15%). Los suelos de menor evolución, representados por Entisoles e Inceptisoles, están presentes en el 73% de la región (IGAC, 2003). En consecuencia la relación entre los primeros y los segundos es de 0.2.

La evolución general de los suelos de la región se considera moderada y mucho menor que en la altillanura de los Llanos Orientales y en las altiplanicies y superficies de aplanamiento de la Región Amazónica.

En la *Región del Caribe* colombiano y con referencia a paisajes no montañosos, los sedimentos aluviales y las formaciones sedimentarias del Terciario, han generado Vertisoles (5%), Mollisoles (5%), Aridisoles (4%) y Alfisoles (3%), bajo la acción severa de la estacionalidad climática y sus relaciones biológicas. Resaltan procesos de *haploidización*, *melanización*, *calcificación*, *salinización* y *sodización*, correspondientes a grados medios de evolución.

Dado que los Oxisoles y Ultisoles sólo representan el 2% de la región y que los Entisoles e Inceptisoles abarcan el 62%, su relación es de 0.03. Ello permite concluir que los suelos de evolución moderada, ya anotados, caracterizan su tipología.

En la *Región Andina* la tipología gira alrededor de los Andisoles (16.4%) y de sus intergrados y extragrados; ellos representan las zonas de influencia de cenizas volcánicas bajo condiciones climáticas de tendencia húmeda y temperaturas medias a frías. La mayoría de los demás suelos (Mollisoles, 2% y Vertisoles, 0.1%), con excepción de algunos Alfisoles (0.8%), se asocian a ciclos cortos de evolución generalmente holocénicos y a procesos de ablación. Los procesos dominantes son la *andolización*, *melanización*, *pérdidas por erosión* y, en algunas zonas subhúmedas, *lexiviación*. Los suelos de la región manifiestan evolución moderada a baja, dado que los que se han tomado como indicadores de evolución alta (Oxisoles y

Ultisoles) sólo están presentes en el 0.34% de la región, los Entisoles e Inceptisoles se manifiestan en el 67% (Dystrudepts 55%), los Mollisoles y Alfisoles integran el 3% y solamente los Andisoles (*Hapludands*, 11%, *Melanudands*, 5% y, el conjunto de los *Melanocryands*, *Placudands*, *Fulvudands* y *Haplustands*, 0.5%), tipifican la mayor extensión de suelos con procesos específicos de evolución.

Los valles interandinos, en especial en su parte media, no obstante presentar características ambientales muy diferentes a la Región Andina (geoformas, clima, materiales parentales), tienen cierta similitud en su composición pedológica con los de la Región del Caribe; destacan la presencia de Alfisoles (1%), Mollisoles (3%), Vertisoles (0.1%) y algunos Andisoles (1%). Los Entisoles e Inceptisoles constituyen el 74% y los Oxisoles y Ultisoles son muy escasos (0.01%).

Bibliografía

- Andreux, F.** 1983. Evolución de la materia orgánica en Andosoles. En materia orgánica del suelo. Suelos Ecuatoriales. Vol. XIII. No. 1.
- & **De Becerra S. P.** 1975. Fraccionamiento y caracterización del material húmico en algunos suelos de la sabana de la Orinoquia colombiana. En investigaciones especiales en algunos suelos del Centro de Desarrollo Integrado "Las Gaviotas", Comisaría de Vichada. IGAC. Vol XI. No. 7. pp. 63 a 84.
- , **Luna, Z. C. & P. Faivre.** 1978. Un método de fraccionamiento del humus como criterio genético complementario en la caracterización de suelos ándicos en Colombia. Suelos Ecuatoriales. Bogotá. p. 1-8.
- Baize, D.** 1986. Couvertures pédologiques, cartographie et taxonomie. Science du Sol. No. 1986 - 3. Vol. 24. p. 227-243.
- Ballesteros, M.** 1996. Funcionamiento de los ecosistemas de caatinga baja amazónica y tierra firme. IGAC. Aspectos ambientales para el ordenamiento territorial del municipio de Mitú, departamento de Vaupés. Cap. 4. Sección 3. Pág. 651-715.
- Ballesteros, J. & J. Bernal.** 2001. Caracterización semicuantitativa de las sustancias húmicas de un Acrudoxic *Melanudands*, medial, amórfico, isotérmico del municipio de Chinchiná, Caldas. Trabajo de Grado (Licenciatura en Química). Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Facultad de Ciencias y Educación.
- , **A., Correa & W., F. Castrillón.** 2003. Fraccionamiento de las sustancias húmicas de un Acrudoxic *Melanudands*, medial, amórfico, isotérmico del municipio de Chinchiná, Caldas. Suelos Ecuatoriales. (En prensa).
- Ballesteros, M.** 1993. Análisis de la biomasa y el inventario de nutrientes en ecosistemas naturales intervenidos y poco intervenidos. IGAC. Aspectos ambientales para el ordenamiento territorial del occidente del departamento de Caquetá. Cap. 3. Sección 3. 479-527 p.
- . 1998. Funcionamiento de los ecosistemas de tierra firme e inundables. Aspectos ambientales para el ordenamiento territorial del Trapecio Amazónico. IGAC. Bogotá. (sin publicar).
- Bendeck, L. M. S.** 1993. Naturaleza y composición del humus. En aspectos ambientales para el ordenamiento territorial del occidente de Caquetá. Inst. Geogr. Agustín Codazzi. p. 565-630.
- Birkeland, W. P.** 1999. Soils and Geomorphology. Third Ed. Oxford Univ. Press. 430 p.
- Camini Seneviratne.** 2001. Manipulating terrestrial carbon sinks. Globan Change News Letter. Letter to the Editor. Issue No. 47.
- Correa, S. A.** 2002. Comunicación personal.
- . 2000. Evolución de la materia orgánica en suelos de lomerío, terraza y planicie aluvial bajo bosque. En Aspectos ambientales para el ordenamiento territorial del municipio de Mitú, departamento de Vaupés. IGAC, Subd. Agról. Bogotá (sin publicar).
- . 1996. Evolución de la materia orgánica en ecosistemas naturales y agroecosistemas. En Aspectos ambientales para el ordenamiento territorial del municipio de Mitú. IGAC, Subd. Agról. Bogotá. 755-796.
- Cortés, L. A.** 1982. Geografía de los Suelos de Colombia. Univ. Jorge Tadeo Lozano. Colombiana de Impresos Ltda. Bogotá. 161 p.
- De Becerra, S. P.** 1986. Comportamiento de la materia orgánica en suelos de la Orinoquia. Diagnóstico geográfico nororiente de Vichada. Inst. Geogr. Agustín Codazzi. Vol 5.2. p. 1-33.
- Duchaufour, Ph.** 1998. Handbook of Pedology: Soils - Vegetation - Environment. Transl. V. A. K. Sarma. A. A. Balkema, Rotterdam, Brookfield. 264 p.
- Espinal, L. S. & E. Montenegro.** 1977. Formaciones vegetales de Colombia. IGAC. Bogotá.
- Etter, A.** 1997a. Ecosistemas terrestres: Sabanas. En Chaves, M. A.; V. N. Arango Eds. p. 77.
- . 1997b. Bosque húmedo tropical. En Chaves, M. A.; V. N. Arango Eds. p. 110.
- Foelster, H., De las Salas, G. & P. Khanna.** 1976. A Tropical evergreen forest site with perched water table, Magdalena Valley, Colombia. Biomass and bioelement inventory of primary and secondary vegetation. Oecologia Plantarum **11** (4): 297- 320.
- Geotec, Ltda. (s. f.).** Mapa Geológico de Colombia. Escala 1:1.200.000. Cediél, F. & C. Cáceres.
- Goldich, S. S.** 1938. A study in rock weathering. Journal Geology **46**. p. 17-58.
- Instituto de Investigación de Recursos Biológicos Alexander von Humboldt.** 1997. Informe Nacional sobre el estado de la biodiversidad. Tomo I. Diversidad Biológica. Chaves, M. A.; V. N. Arango Eds. 535 p.
- Instituto Geográfico Agustín Codazzi.** 2003. Mapa de Suelos de Colombia (escala 1:500.000). Subd. de Agrología. 26 planchas y CD. Bogotá. (en prensa).
- . 2002. Suelos del Andén Pacífico. Subd. de Agrología (en prensa).

- _____. 2000a. Estudio general de suelos y zonificación de tierras. Departamento del Amazonas. Subd. de Agrología. 2 Tomos y Mapas. Bogotá. 543 p.
- _____. 2000b. Estudio general de suelos y zonificación de tierras del Departamento de Meta. Subd. de Agrología. Tomo I. Bogotá, 531 p.
- _____. 1999. Estudio general de suelos y zonificación de tierras. Departamento de Nariño. 2 Tomos y Mapas. Bogotá. (en prensa).
- _____. 1998. Levantamiento general de suelos y zonificación de tierras. Departamento de Chocó. Subd. de Agrología. Anexos y Mapas. Bogotá, 185 p. (en prensa).
- _____. 1997. Estudio general de suelos y zonificación de tierras de la Región Caribe. Subd. de Agrología. Texto y Mapas. Bogotá. 121 p.
- _____. 1995. Suelos de Colombia - Origen, evolución, clasificación y uso - Subd. de Agrología. Ed. Canal Ramírez Antares. Bogotá. 632 p.
- _____. 1993. Suelos. Departamento de Casanare. Subd. Agrológica. Tomo y Mapas. Bogotá. 424 p.
- _____. 1991. Estudio semidetallado de suelos, sector Carimagua - Gaviotas. (Departamentos Meta y Vichada). Subd. Agrología. Bogotá, 336 p.
- _____. 1988. Suelos y Bosques de Colombia. Subd. Agrológica. Bogotá. 135 p.
- Instituto Geográfico Agustín Codazzi.** 1986. Estudio general de suelos de la Intendencia de Arauca. Subd. Agrológica. Litografía IGAC. 2 Tomos y Mapas. Bogotá. 268 p.
- _____. 1983a. Estudio general de suelos de la Comisaría del Vichada. Subd. Agrológica. Bogotá, 473 p.
- _____. 1983b. Suelos de sabanas del Norte de Colombia. Subd. Agrológica. Bogotá. 237 p.
- _____. 1980. Génesis de los suelos del Vichada y determinación de vermiculita y montmorillonita en suelos de la Amazonia colombiana. Subd. Agrológica. Bogotá. 181 p.
- _____. CORPOICA. 2002. Zonificación de los conflictos de uso de las tierras en Colombia. Documento en CD. Bogotá, Colombia.
- _____, **CIAF, Ingeominas, Ministerio de Defensa Nacional.** 1979. Proyecto radargramétrico del Amazonas: La Amazonia colombiana y sus recursos. Italgraph S. A. Bogotá. 5 Tomos y Mapas. 590 p.
- Jackson, M. L.** 1969. Weathering of primary and secondary minerals in soils. 9th Int. Congr. of Soil Sci. Transactions. Vol. IV. paper 30. p. 281-292.
- Khobzi, J.** 1981. Los campos de dunas del norte de Colombia y de los llanos de la Orinoquia. Colombia y Venezuela. Rev. CIAF. Vol. 6 (1-3). Bogotá. p. 257-292.
- Köppen, G. E. R.** 1954. Klima der Erde. Vustus Perthes. Darnstadt. Germany.
- Kumada, K.** 1987. Chemistry of soil organic matter. Elsevier. Sc. Publ. 241 p.
- Lamote, M.** 1987. El destino de la materia vegetal en los ecosistemas herbáceos tropicales. En La capacidad bioproductiva de sabanas. IVIC. Centro Internacional de Ecología Tropical. Caracas, Venezuela. p. 1-77.
- Laurance, F. W., Laurance, G. S., Delamonica, P., D'Angelo, S. & S. B. Williamson.** 2002. The dynamics of plant communities in fragmented and continuous Amazonian forest. <http://www.inpa.gov.br/~pdbff/iprojer>.
- Malagón, C. D.** 1998. El recurso suelo en Colombia - Inventario y problemática. Revista de la Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Vol. XXII. No. 82. p. 13-52. Santafé de Bogotá.
- _____. 1995. Génesis - Taxonomía de Espodosoles, Ultisoles y Oxisoles y su relación con el manejo de las tierras en el departamento del Vaupés, Colombia. Trabajo de ascenso a la categoría Profesor Titular de la Universidad Nacional de Colombia. Bogotá (sin publicar).
- _____. 1992. Génesis y caracterización de formaciones volcánicas endurecidas en paleosuelos de la sabana de Bogotá, Colombia. En suelos volcánicos endurecidos. Terra. Vol. 10. México. p. 100-106.
- _____. 1987. Aspectos genéticos y taxonómicos de algunos suelos del Terecay, Vichada, Colombia. En La capacidad bioproductiva de sabanas. Editado por J. J. San José - R. Montes. Instituto de Investigaciones Científicas I. V. I. C. Caracas, Venezuela.
- _____; **C. E. Pulido.** 1996. Estudio genético y taxonómico de Espodosoles, Ultisoles y Oxisoles y su relación con el manejo de las tierras. En Aspectos ambientales para el ordenamiento territorial del municipio de Mitú, departamento de Vaupés. Proyecto INPA II. IGAC. Subd. Agrol. Sección 5. Edit. Linotipia Bolívar. Bogotá. p. 307-399.
- Mendivelso, L. D.** 2003. Comunicación personal.
- Mendoza, C., Sierra, C., Gamboa, E. & A. Lozano.** 2000. Monitoreo ecológico y socioeconómico del ecosistema de catival (*Prioria copaifera*. Griseb) bajo aprovechamiento forestal industrial en la cuenca baja del río Atrato, municipio de Riosucio, Chocó. Colombia.
- Pulido, R. C., Malagón, C. D. & R. R. Llinás.** 1996. Estudio genético y taxonómico de suelos y su relación con el manejo de las tierras. IGAC. Aspectos ambientales para el ordenamiento territorial del municipio de Mitú, departamento de Vaupés. Tomo I. Capítulo III, Sección 5. p. 307-399.
- _____. 1990. Paleosuelos del piso alto andino en la región montañosa circundante a Bogotá. Rev. Investigaciones. IGAC. Subd. Agrológica. Vol. 2. No. 2. Bogotá. 198 p.
- Pulido, R. C. & C.D. Malagón.** 1993. Génesis, propiedades y características diagnósticas de los Ultisoles y su relación con el manejo de las tierras. IGAC. Aspectos ambientales para el ordenamiento territorial del occidente del departamento de Caquetá. Tomo I. Capítulo 2. p. 171-268.
- _____, **C. D. Malagón.** 1998. Estudio genético y taxonómico de suelos y su relación con el manejo de las tierras. Aspectos ambientales para el ordenamiento territorial del Trapecio Amazónico. IGAC. Bogotá. (sin publicar).

- Rao, I., Rippstein, G., Escobar, G. & Ricaurte, J.** 2001. Agroecología y biodiversidad de las sabanas en los Llanos Orientales de Colombia. Ed. Ripptein, Georges, Escobar Germán, Motta Francisco. CIAT.
- Rodríguez, J. & Ballesteros, M.** 1998. Funcionamiento del bosque alto andino, Cundinamarca. *Calidad ambiental*. Vol. III. No. 8. México. Pág. 8-14.
- Rodríguez, L.** 1988. Consideraciones sobre la biomasa, composición química y dinámica del bosque pluvial tropical de colinas bajas. Bajo Calima, Buenaventura. Serie Documentación No. 16, CONIF. 36 p.
- Saldarriaga, G. et al.** 1988. Long - term chronosequence of forest succession in the upper río Negro of Colombia and Venezuela. *Journal of Ecology* 76: 938-958.
- Soil Survey Staff.** 1999. Soil taxonomy. A basic system of soil classification for making and interpreting soil surveys. 2nd Ed. USDA-NRCS. Agriculture Handbook. No. 436. 869 p.
- Thomas, F. M.** 1994. *Geomorphology in the tropics*. Wiley. 460 p.
- Van der Hammen, T.** 1997. Ecosistemas terrestres: Páramos. En Chaves, M. A.; V. N. Arango Eds. p. 22.
- _____. 1992. Historia, ecología y vegetación. Corp. Col. para la Amazonia, Araracuara (COA). Santafé de Bogotá.
- _____. 1981. Glaciares y glaciaciones en el Cuaternario de Colombia: Paleoeología y Estratigrafía. *Rev. CIAF*. Vol. 6 (1-3). Bogotá. p. 635-638.
- _____. 1974. The Pleistocene changes of vegetation and climate in tropical South America. *J. of biogeography*: 1: 3-26.
- Vélez, Y. J., Poveda, G. & O. Mesa.** 2000. Balances hidrológicos de Colombia. Univ. Nacional, Sede Medellín. Fac. Minas. Postgrado en Aprov. de Rec. Hidráulicos. Todográficas Ltda. 150 p. y CD.
- Wirthmann, A.** 2000. *Geomorphology of the tropics*. Transl. D. Busche. Springer. Berlín. 314 p.
- Zinck, J. A.** 1974. Definición del ambiente geomorfológico con fines de descripción de suelos. MOP (1974). CIDIAT (1981). Venezuela. IGAC (1987). Documento interno. Bogotá, Colombia. 114 p.

CARACTERIZACIÓN ECOLÓGICA DE LAS ISLAS MÚCURA Y TINTIPÁN, ARCHIPIÉLAGO DE SAN BERNARDO, COLOMBIA

por

Carlos A. Flórez* & Andrés Etter**

Resumen

Flórez C. & A. Etter: Caracterización ecológica de las Islas Múcura y Tintipán, Archipiélago de San Bernardo, Colombia. Rev. Acad. Colomb. Cienc. **27**(104): 343-356. 2003. ISSN 0370-3908.

Se presenta una caracterización ecológica del paisaje terrestre de las islas Múcura y Tintipán del Archipiélago de San Bernardo (Depto. de Bolívar). Mediante fotointerpretación, caracterización de campo e implementación de SIG, se elaboró un mapa en el que se diferencian 11 Unidades de Paisaje (UP). La Isla Tintipán presenta la mayor diversidad de UP (11) entre las que dominan las unidades de manglar (253 ha, 64 %); las unidades restantes corresponden a cimas de terrazas coralinas con vegetación secundaria de Bosque Seco Tropical (BST) y cultivos de coco que muestran diferentes niveles de transformación antrópica. La Isla Múcura, presenta 6 UP dominadas por vegetación secundaria de BST y cultivos de coco sobre suelos de origen calcáreo (31 ha, 82 %). Ambas islas han sido impactadas por la extracción de madera desde hace muchas décadas. Actualmente las actividades humanas incluyen la extracción de leña, agricultura extensiva, asentamientos permanentes e incremento en la presión turística.

Palabras clave: Islas tropicales, Ecología del paisaje, SIG, Vegetación y transformación antrópica.

Abstract

An ecological characterization of the terrestrial landscape of the Múcura and Tintipán Islands of the San Bernardo Archipelago appears (Depto. de Bolívar). By means of photo-interpretation, field characterization and the use of GIS, a map was elaborated with 11 different Landscape Units (LU). The Tintipán Island presents the greater diversity of UP (11), dominated by mangrove units (253 ha, 64 %); the remaining units correspond to tops of coralline terraces with secondary vegetation of Tropical Dry Forest (TDF) and cultures of Coconuts, that show different levels of human

* Pontificia Universidad Javeriana. Correo electrónico: carlos32@lycos.com

** Facultad de Estudios Ambientales y Rurales, Pontificia Universidad Javeriana, Depto. de Ecología y Territorio. Correo electrónico: andres.etter@uq.edu.au

transformation. The Múcura Island, presents 6 UP dominated by secondary vegetation of TDF and cultures of Coconuts on grounds of calcareous origin (31 ha, 82 %). Both islands have been hit by the extraction of wood and firewood for many decades. Currently, the human activities include the extraction of firewood, extensive agriculture, permanent settlement and an increase in the tourist pressure.

Key words: Tropical islands, Landscape ecology, GIS, vegetation and human activities.

Introducción

Las áreas costeras y los sistemas de islas, debido a sus características estratégicas para acceder a recursos naturales y puentes de comunicación, son paisajes que en general han estado sujetos a variadas formas de presión humana (IRF, 1996). Esta presión y sus efectos pueden variar sustancialmente dependiendo de las características fisiográficas del área y el fácil acceso al uso de sus recursos. En el Caribe colombiano esta situación se hace evidente en las Islas del Rosario donde el deterioro ambiental ha alcanzado niveles dramáticos (Sarmiento et al., 1989) y en las Islas de San Bernardo donde se observan signos de degradación progresiva (Ramírez, 1994).

El Archipiélago de San Bernardo se encuentra al noroeste del Golfo de Morrosquillo y está compuesto por 10 islas, de las cuales Múcura y Tintipán por su topografía posibilitaron el desarrollo de vegetación de Bosque Seco Tropical (BST) y manglares, diferenciándose de las demás islas en sus procesos de ocupación e impacto de las actividades humanas.

Son escasos los trabajos realizados sobre ecología regional en islas del Caribe. Para las islas subtropicales de EE.UU existen caracterizaciones ecológicas (USGS, 1999) y descripciones de la vegetación (NOAA, 1999); en islas tropicales de las Bahamas se han realizado descripciones ecológicas (Ford, 1995) y estudios de cambios en la vegetación (Byrne, 1972).

Para Colombia se destacan, el trabajo de ecología regional de las Islas de Providencia y Santa Catalina (Márquez, 1987), las caracterizaciones ecológicas de la Isla de San Andrés (Barriga et al., 1985, Etter & Rojas, 1988), la flora ilustrada y listado taxonómico del Archipiélago de San Andrés y Providencia (González et al., 1995, Lowy, 2000), el estudio ecológico del Golfo de Morrosquillo (Patiño & Flórez, 1993) y el libro de áreas coralinas de Colombia (Díaz J. M. et al., 2000).

Esta investigación realiza una caracterización del paisaje terrestre, un análisis florístico y estructural de la ve-

getación, y una descripción de las actividades humanas de las islas Múcura y Tintipán, como base para diseñar y poner en marcha, un programa de manejo integrado del Archipiélago de San Bernardo.

Área de estudio

El Archipiélago de San Bernardo está localizado entre los 9° 40" y 9° 50" de latitud norte y los 75° 43" y 75° 56" de longitud oeste en el Departamento de Bolívar; lo conforman las islas Boquerón, Palma, Panda, Mangle, Ceycén, Cabruna, Tintipán, Maravilla y Mucura, y un islote artificial (Santa Cruz del Islote), dispersas en un área de 213.3 km² (Díaz J. M. et al., 2000) al norte del Golfo de Morrosquillo (Figura 1). Desde 1996, la mayor parte del Archipiélago de San Bernardo se anexó al Parque Nacional Natural Corales del Rosario (MMA, 1996).

Geomorfología

Las Islas de San Bernardo se elevan por encima de un fondo sedimentario formado por un antiguo valle aluvial, frente a las costas del departamento de Sucre (Díaz, 2000). Según Vernet (1985), los archipiélagos del Rosario y San Bernardo, son estructuras de altorelieve levantadas por deformación de la plataforma, debido al efecto del diapirismo (volcanes de lodo) durante la actividad orogénica que se inicia hacia el mioceno (más de 5 millones de años) y que continúa hoy en día. Vernet (com. per., 2000), afirma que cuando la plataforma se acercó a la zona fótica se desarrollaron arrecifes coralinos en las cimas de la plataforma, especialmente durante el período de máximo nivel del mar (4000 a 5000 años). Posteriormente, ocurrió un ligero descenso del nivel medio del mar hasta el nivel actual, lo que provocó la emersión de las terrazas coralinas.

Componente edáfico

No existen caracterizaciones de los suelos para el Archipiélago de San Bernardo, pero dado el mismo origen geomorfológico que el del Archipiélago del Rosario, se pueden comparar sus características edáficas. Según

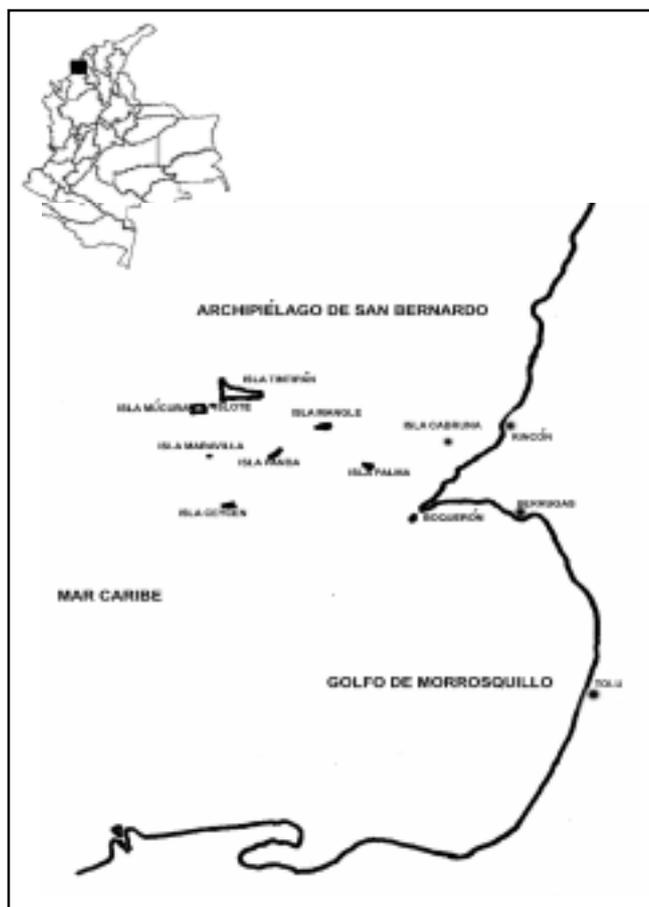


Figura 1. Localización del área de estudio. Islas Múcura y Tintipán, Caribe colombiano.

Garavito (1977), los suelos de las partes altas de las Islas del Rosario son de carácter calcáreo sobre los que se ha desarrollado un suelo delgado (10-30 cm) de textura franco arenosa gravilosa, alcalinos (pH 8.0), con disponibilidad alta de calcio, mediana de potasio y baja de magnesio. Las partes bajas de las islas presentan suelos pobremente drenados, originados por sedimentación autóctona en forma de turba, derivada de la materia orgánica proveniente de los manglares. El pH varía entre 5 y 8, con profundidades hasta de 1 m

Aspectos climáticos

El clima está determinado por el régimen estacional de los vientos alisios del NE; es de tipo unimodal con un período seco de 5 meses (diciembre a abril) y uno lluvioso de 7 meses (mayo a noviembre) y una temperatura media anual de 27°C (Figura 2).

Aspectos oceanográficos

En el área de estudio se presentan las corrientes superficiales del Caribe y la contracorriente del Darién. La primera corre frente a la plataforma continental de Colombia de Este a Oeste, más marcada durante la estación seca por incidencia de los vientos alisios, causando la erosión del litoral en las zonas de barlovento de las Islas de San Bernardo (**Castellanos & Chávez, 1982**). Durante la estación húmeda, los alisios cambian por vientos de poca fuerza en diferentes direcciones, con predominio de vientos del sudoeste y se presenta “la contracorriente del Darién”, que entra por Panamá y bordea de Oeste a Este las costas

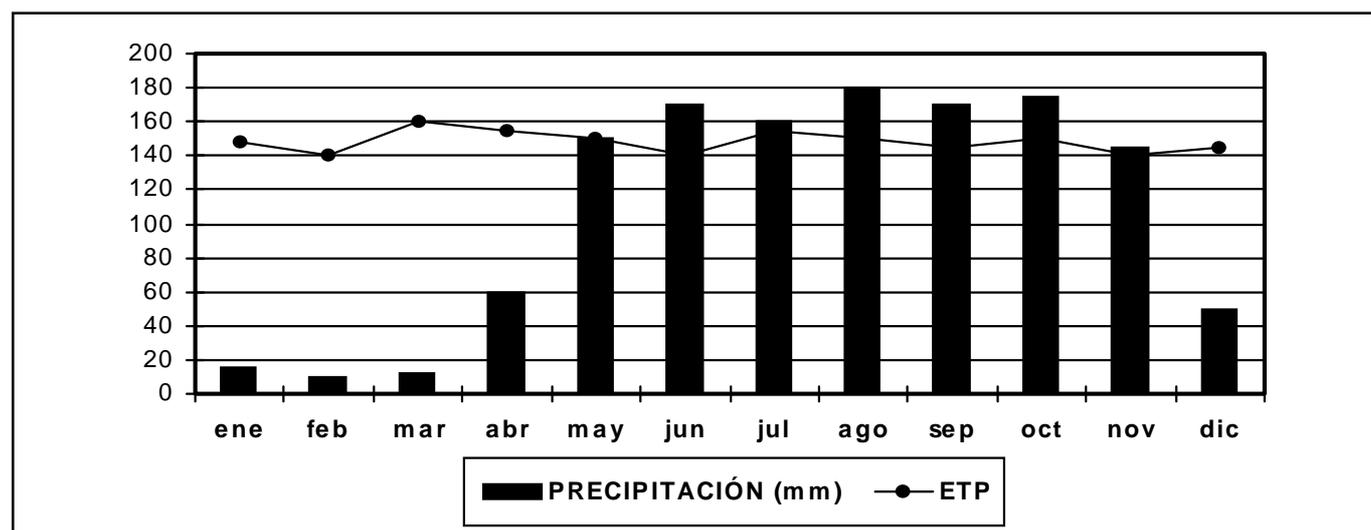


Figura 2. Valores de precipitación de la estación de Tolu y de evapotranspiración potencial (ETP) de San Bernardo del Viento (IDEAM 1958-1998). (Ppt. Anual = 1389 mm).

colombianas. La fluctuación de la marea, al igual que para todo el Caribe, no supera los 30 cm (IDEAM, 1999).

Materiales y métodos

El trabajo se enmarca dentro del área de Ecología del Paisaje (Zonneveld, 1995, Farina, 1998), que busca establecer la distribución, extensión y caracterización biofísica y antrópica de los ecosistemas. Se abordó la caracterización mediante la jerarquización de la geoforma y la cobertura, enfatizando aspectos del relieve, hidrología, suelos, vegetación y usos.

El trabajo se desarrolló de la siguiente manera:

- a. Elaboración de un mapa preliminar de UP con base en la ampliación a escala 1:5000 de una fotografía en blanco y negro de escala 1:43360 (IGAC, 1987) y una cartografía base a escala 1:50000 (IGAC, 1958).
- b. Caracterización de campo en octubre y noviembre de 1998, mediante 107 perfiles de banda de 20x5 m. (Matteuci & Colma, 1982), en los que se tomó información sobre la vegetación (altura, DAP, biotipo y cobertura) de acuerdo con Küchler & Zonneveld (1988), fisiografía, material parental, drenaje y usos antrópicos de cada UP. Se recolectó y determinó el material vegetal. Las actividades antrópicas se analizaron con base en encuestas no formales y observaciones de campo.
- c. Elaboración de un mapa de unidades de paisaje mediante Arcview (SIG) a escala 1:15000 y leyenda explicativa.
- d. Análisis de riqueza y diversidad (Ludwing et. al., 1988), (las UP C6, MH1 y P1, se excluyeron del análisis por tener un área poco representativa).
- e. Diferenciación de los tipos de vegetación mediante el programa TWINSPAN (Hill 1979), con base en una tabulación fitosociológica.
- f. Análisis de dominancia (Índice de Valor de importancia IVI) con base en la metodología propuesta por Gentry (1982).

Resultados

El área de estudio presenta en su mayor parte un relieve ondulado con una altura máxima de 2 msnm. Las islas se componen de 4 unidades geomorfológicas (UG) que corresponden a: Canales de marea (M), Pendientes de disección (L), Cimas de la terraza coralina (C) y Playas

coralinas (P) (Figura 3). Estas (UG) agrupan 11 unidades de paisaje (UP) similares desde el punto de vista de su geogénesis con condiciones uniformes de relieve, material parental y suelos, pero difieren en cuanto a cobertura y usos antrópicos (Figura 4, Tabla 1).

Los canales de marea son la (UG) de mayor extensión en las islas y corresponde al 70% del área de estudio con suelos orgánicos, lodosos y diferentes niveles de drenaje. Dentro de esta unidad se diferencian 2 UP (MB1, MB2) con suelos lodosos, orgánicos y vegetación de manglar. La UP MB1 presenta una cobertura de manglar dominada por rodales densos de *Rhizophora mangle* con alturas de 15 m y 25 cm de DAP que predomina hacia los frentes de marea en suelos mal drenados con influencia de las mareas y representa el 34.5% del área de estudio. La UP MB2 presenta rodales densos de *R. mangle*, *Laguncularia racemosa* y *Conocarpus erecta* que no sobrepasan los 5 m de altura y 15 cm de DAP. Ocupa áreas interiores de las islas, especialmente los bordes de las ciénagas y es la UP de mayor extensión (35% del área de estudio). Estas UP presentan valores bajos de riqueza de especies debido a que en las islas sólo se encuentran 4 especies de mangle (Figura 3, Tabla 2).

Las pendientes de disección son la transición entre los canales de marea y las cimas de la terraza coralina, presenta la UP LR1 con suelos arenosos fangosos y vegetación achaparrada dominada por *C. erecta* con una altura no mayor de 5 m y representa tan sólo el 0.5% del área de estudio. Estas UP muestran valores bajos de riqueza de especies por estar dominadas por 4 especies de manglares (Tabla 2). Las cimas coralinas incluyen las UP C1 – C6 con suelos de carácter calcáreo, presenta una cobertura vegetal de cultivos de coco y vegetación secundaria de BST. La Isla Múcura presenta una cima continua que abarca el 8.5% del área de estudio, mientras que la Isla Tintipán presenta un conjunto de cimas pequeñas, con disposición N-S que sumadas representan el 19 % del área. Estas UP presentan diferencias en cobertura vegetal, siendo las unidades C1, C2 y C3 las que presentan una mayor riqueza de especies de BST, mientras que las UP C4 y C5 presentan dominancia de cultivos de coco con vegetación rasante (Tabla 1).

La dinámica costera establece diferencias en la geomorfología costera insular. En el área de estudio se encontraron 5 tipos de litoral (Figura 4):

Playa arenosa coralina: se localiza en el costado NO y SE de la Isla Tintipán y sobre el costado SE de la Isla Múcura con una amplitud de 0-10 m, suelo arenoso y pendiente de 2°.

Tabla 1. Leyenda de las Unidades de Paisaje de las Islas Múcura y Tintipán.

RELIEVE/ GEOFORMA	MATERIAL PARENTAL	DRENAJE	CARACT. SUELOS	VEGETACIÓN	USOS	UP	ÁREA (ha)	
Playas Coralinas (P)	Arena	Bueno	Arena suelta	Árboles de <i>Conocarpus erecta</i> y <i>Rhizophora mangle</i> muy dispersos y vegetación herbácea.	Actividad turística, restaurantes y extracción de arena para relleno.	PI	4.6 Tintipán	
	Canales de marea (M)	Pobre	Suelo de turbera con profundidad de 60 cm	Bosques densos en rodales altos de (B1) <i>R. mangle</i> , <i>Avicennia germinans</i> y <i>Laguncularia racemosa</i> .	Extracción de madera para construcción y establecimiento de lotes.	MB1	0.3 Múcura. 125 Tintipán 2 Múcura.	
Terrazas coralinas	Pendientes de disección (L)	Moderado	Suelo de turbera con profundidad de 30 cm	Bosques densos en rodales enanos de (B2) <i>R. mangle</i> , <i>C. erecta</i> y <i>L. racemosa</i> .	Adecuación de lotes y extracción de madera para cocinar y estacados.	MB2	127.8 Tintipán 3.4 Múcura.	
		Moderado	Suelo arenoso	Helchal denso (<i>Acrostichum aureum</i>)	Extracción artesanal de langostinos para el consumo.	MH1	1.3 Tintipán.	
	Cimas C	Lodo Arena	Moderado	Suelo arenoso	Rodal denso de (R) <i>C. erecta</i>	Extracción de madera para cocinar y estacados.	LRI	1.9 Tintipán
		(<i>Porites porites</i> y <i>Millepora sp.</i>)	Bueno	Suelo lítico, proveniente de material coralino, con una capa delgada de 10 a 20 cm. de textura franco – arenosa gravillosa; debajo de esta capa se encuentra el material coralino.	Vegetación arbórea y arbustiva densa con palmas de coco dispersas. <i>Cocos nucifera</i> , <i>Cordia sebestena</i> , <i>Morinda roioi</i> , <i>Fimbristylis cymosa</i> , <i>Spondias mombin</i> , <i>Pithecellobium dulce</i> , <i>Pseudobombax septenatum</i> , <i>Ficus pallida</i> , <i>Ficus cf. trigonata</i> , <i>Glyricidia sepium</i> ,	Cultivos de coco y recolección de frutos (icaco, nispero, etc.).	CI	5.1 Tintipán.
				El tipo de suelo corresponde al orden de Entisoles.	Vegetación arbórea y arbustiva abierta con palmas de coco dispersas. <i>C. nucifera</i> , <i>Bursera sinaruba</i> , <i>F. pallida</i> , <i>G. sepium</i> , <i>G. ulmifolia</i> , <i>C. rhacoma</i> , <i>Scleria cf. pterota</i> , <i>Tocoyena cousarea</i> , <i>Chrysobalanus icaco</i> , <i>P. dulce</i> , <i>Sema sp.</i> , <i>Aristolochia odoratissima</i>	Cultivos de coco y recolección de frutos (icaco, nispero, etc.).	C2.	23.2 Tintipán
					Vegetación arbórea y arbustiva abierta. <i>Terminalia catappa</i> , <i>B. sinaruba</i> , <i>G. sepium</i> , <i>Lantana camara</i> y <i>Chiococca alba</i> , <i>Cissus sicyoides</i> , <i>Capraria biflora</i> , <i>Citrus limon</i> .	Establecimiento de lotes y recolección de frutos.	C3.	7.9 Tintipán
Vegetación arbustiva y herbácea abierta con palmas de coco. <i>C. nucifera</i> , <i>Rustia occidentales</i> , <i>C. alba</i> , <i>Sageretia sp.</i> , <i>S. cf. pterota</i> , <i>A. bicornis</i> , <i>M. rotoc.</i>					Cultivos de coco y escasos cultivos de pancoger (plátano, yuca, ñame).	C4	6.5 Tintipán 7.6 Múcura.	
Cultivos de coco con vegetación rasante. <i>C. nucifera</i> , <i>S. cf. pterota</i> , <i>F. cymosa</i> , <i>A. bicornis</i> y <i>Passiflora cf. foetida</i> , <i>Corchorus sp.</i>					Cultivos de coco y escasos cultivos de pancoger (plátano, yuca, ñame).	C5	22 Tintipán 23.4 Múcura.	
			Alfombramiento de coral.	Vegetación herbácea <i>S. cf. pterota</i> , <i>F. cymosa</i> , <i>A. bicornis</i> y <i>P. cf. foetida</i> , <i>Corchorus sp.</i> , <i>Andropogon bicornis</i> , <i>Paspalum gardenianum</i> .		C6	6 en Tintipán.	

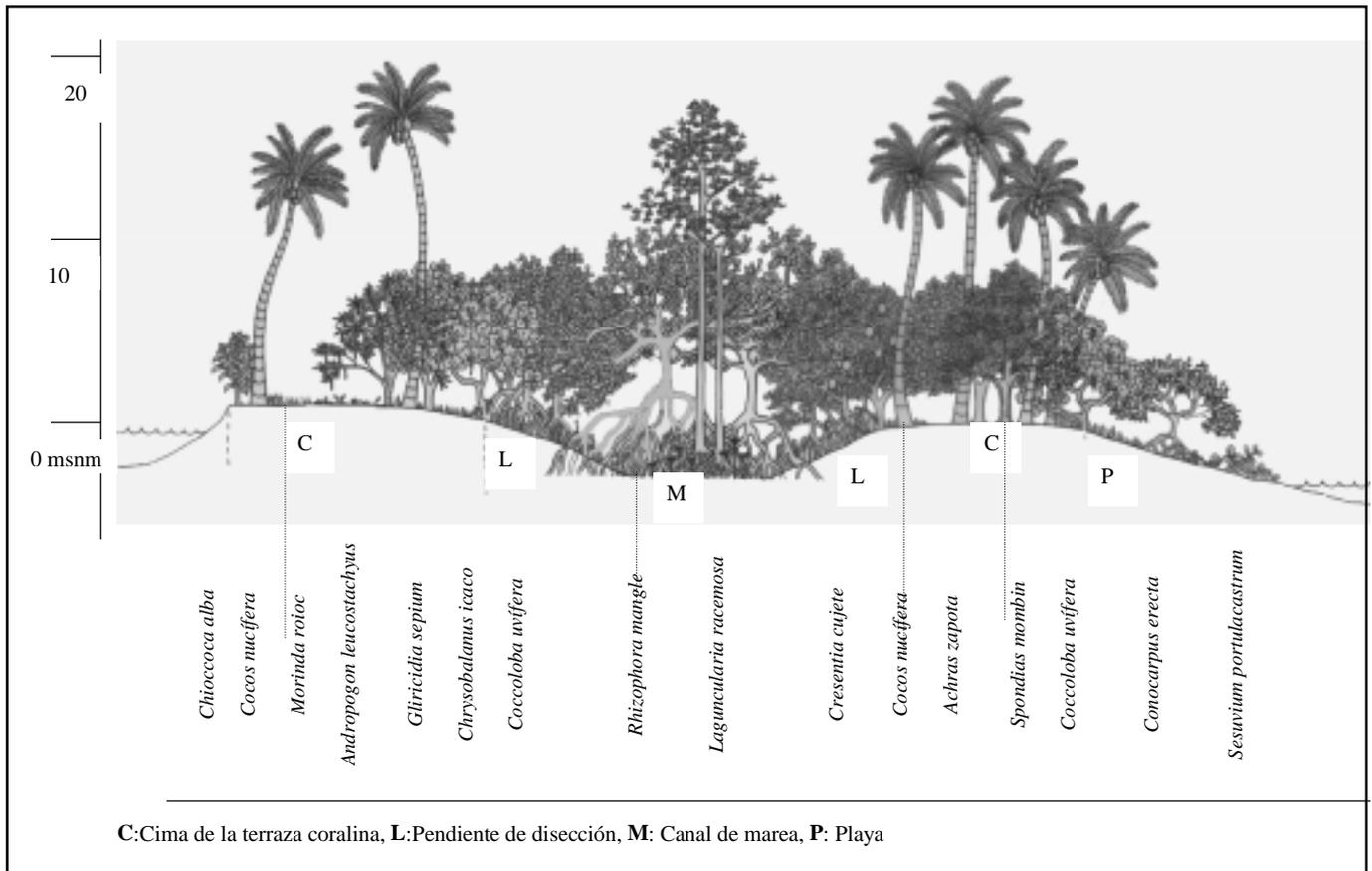


Figura 3. Perfil topográfico y de vegetación de la Isla Tintipán. AF (Accidente fisiográfico), C (Cima), P (Pendiente de disección), M (Canal de marea), P (Playa).

Playa de conchas y cantos rodados coralinos: localizada en la costa N de la Isla Tintipán con una amplitud de 0-2 m, 0-70 cm de altura y pendiente de 20°.

Playa arenosa estrecha: Playa de escasa amplitud 0-1 m, con vegetación de manglar a veces en contacto directo con praderas de fanerógamas marinas que predominan por el costado S de la Isla Tintipán y en el costado E y SE de la Isla Múcura.

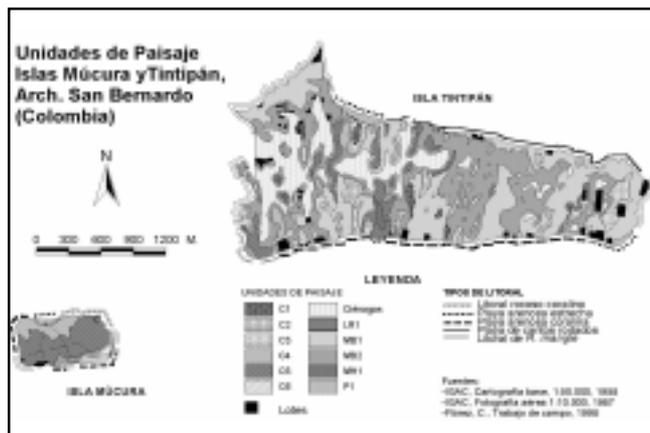


Figura 4. Mapa de Unidades de Paisaje de las Islas Múcura y Tintipán.

Tabla 2. Índices de diversidad y riqueza de especies de las Unidades de Paisaje.

UP	Margalef	Simpson	Shannon
C1	5.10	15.45	23.62
C2	4.67	14.40	11.95
C3	4.94	15.62	19.52
C4	4.29	12.61	17.10
C5	2.81	6.73	9.42
MB1	1.22	2.39	1.91
LR1	0.88	1.70	1.33
MB2	0.54	1.98	1.62

Litoral de R. mangle: Manglar en contacto directo con el mar hacia los extremos O y E de la Isla Tintipán. En la Isla Múcura este litoral se localiza en el costado E.

Litoral rocoso coralino: localizado en el costado NO de la Isla Múcura, donde se observa un acantilado de 0-2 m de altura erosionado por efecto de corrientes y mareas.

Se encontraron algunos accidentes fisiográficos (AF) formados por acantilados hasta de 2 msnm con un perfil vertical de tipo arenoso-coralino, erosionado por el efecto de corrientes y mareas, localizados al SO de las islas Tintipán y Múcura.

Caracterización de la vegetación

Se identificaron en total 73 especies vegetales que se agrupan en 63 géneros y 43 familias. Las familias más diversificadas en cuanto al número de especies son Fabaceae (6 spp.) y Rubiaceae (6 spp.), seguidas de Euphorbiaceae (4 spp.).

La Isla Tintipán, con un área de 331.5 ha dominadas en su mayoría por manglares (258.2 ha) presenta 43 especies vegetales. La Isla Múcura con un área total de 36.7 ha, presenta una terraza coralina continua (23.4 ha) dominada por cultivos de coco con vegetación rasante (32 especies) y un parche de manglar de 13.3 ha con 4 especies vegetales (Anexo).

La ordenación de los datos permitió diferenciar 9 tipos de vegetación:

Comunidad de L. racemosa-Avicennia germinans y R. mangle: bosque de porte medio con alturas entre los 8 y 10 m y 25 cm de DAP con dosel denso y un estrato irregular en densidad y altura, se encuentra en canales de marea.

Tipo Rhizophora: se caracteriza por la dominancia de *R. mangle* en canales de marea. Presenta dos estratos: el primero con rodales entre 2 y 6 m, y el segundo entre 8 y 14 m de altura y 30 cm de DAP.

Comunidad R. mangle y L. racemosa: presenta dominancia de la especie *R. mangle* asociada con *L. racemosa* en bajas densidades, se encuentra sobre canales de marea. Presenta dos estratos: el primero entre 4 y 7 m de altura y el segundo entre 10 y 15 m de altura con un DAP entre 25 y 30 cm. Se observaron individuos asociados de la familia Apocynaceae (indet.) sobre las raíces fúlcreas de *R. mangle*.

Comunidad de manglares bajos R. mangle y C. erecta: a partir del canal sobre suelos fangosos, la vegetación de la pendiente ascendente se caracteriza por la asociación de *C.*

erecta y *R. mangle*, con algunos individuos dispersos de *L. racemosa* y *A. germinans*. Es un bosque bajo denso con un sólo estrato que varía en altura entre 3 y 6 m y de 10 a 20 cm de DAP. Se encontraron algunos individuos de *Coccoloba uvifera* y *Citharexylum caudatum* asociados.

Comunidad de manglares bajos Laguncularia – Conocarpus: en la pendiente media ascendente, el tipo de vegetación corresponde a un bosque bajo de manglar que no supera 4 m de altura y de 10 a 20 cm de DAP, dominado por *C. erecta* asociado con *L. racemosa*.

Tipo Conocarpus: el final de la pendiente ascendente sobre suelos arenosos con parches de roca coralina expuesta, presenta un bosque bajo denso con un estrato de 4 a 6 m de altura y entre 10 y 20 cm de DAP dominado por *C. erecta*.

Se observaron algunas especies asociadas de *C. uvifera*, *Randia cf. armata* y *Cordia sebestena*.

Tipo de vegetación arbórea con arbustales: se encuentra en las cimas coralinas en suelos de carácter calcáreo y se caracteriza por presentar un bosque cerrado con dos estratos arbóreos con alturas entre 10 a 15 m y DAP entre 10 y 20 cm y otro estrato entre 5 y 10 m y un estrato arbustivo de 5 m de altura. Las especies características asociadas en este tipo de vegetación son: *C. uvifera*, *Morinda roioc*, *Gliricidia sepium*, *Ficus pallida*, *Bursera simaruba*, *Rustia occidentalis*, *Achras zapota*, *Pseudobombax septenatum*, *Terminalia catappa* y *C. caudatum*. No se observaron especies dominantes.

Comunidad de cultivo de coco con vegetación arbustiva y herbácea: se caracteriza por la dominancia del cultivo de coco (*Cocos nucifera*) asociado a vegetación arbustiva y herbácea. Presenta un estrato arbóreo (palmas de coco) y un arbustivo de 4 m de altura. Las especies características asociadas son: *Crossopetalum rhacoma*, *Chrysobalanus icaco*, *Eugenia sp.*, *Passiflora foetida*, *M. roioc*, *Fimbristylis cymosa*, *C. caudatum*, *T. catappa* y *Scleria cf. pterota*.

Comunidad de cultivo de coco con vegetación rasante: se caracteriza por una alta densidad de palmas de coco con especies de vegetación rasante como *Adropogon bicornis*, *Corchorus sp.*, *Smilax sp.*, *F. cymosa*, *Aristolochia odoratissima* y *S. cf. pterota* y algunos árboles dispersos de *Crescentia cujete*, *Spondias mombin*, *B. simaruba*, *G. sepium* y *F. pallida*.

Especies dominantes y variación del IVI

En la Isla Múcura, *C. nucifera* es dominante seguida de *G. sepium* y manglares en menor proporción. En la Isla Tintipán, la especie dominante es *R. mangle* seguida de *C. nucifera* y *C. uvifera* (Tabla 3).

Anexo

**FLORA TERRESTRE DE LAS ISLAS MÚCURA Y TINTIPÁN,
ARCHIPIÉLAGO DE SAN BERNARDO, COLOMBIA.**

LISTA TAXONÓMICA

Taxón	Isla	Referencia	Taxón	Isla	Referencia
PTERIDOPHITA			BURSERACEAE		
POLYPODIACEAE			<i>Bursera simaruba</i> (L.) Sarg.		
<i>Acrostichum aureum</i> L.	Tintipán	Flórez C., 1998		Múcura	Flórez C., 1998
SCHIZAEACEAE				Tintipán	Flórez C., 1998
<i>Lygodium venustum</i> Sw.	Tintipán	Flórez C., 1998	<i>Tetragastris murcunata</i> (Rusby)	Múcura	Flórez C., 1998
ANGIOSPERMAS					
AIZOACEAE					
<i>Sesuvium portulacastrum</i> L.	Tintipán	Flórez C., 1998			
ANACARDIACEAE			CAPPARIDIACEAE		
<i>Spondias mombin</i> L.	Tintipán	Flórez C., 1998	Indet.	Tintipán	Flórez C., 1998
APOCYNACEAE			CELASTRACEAE		
<i>Mandevilla</i> sp.	Tintipán	Flórez C., 1998	<i>Crossopetalum rhacoma</i> (L.)	Tintipán	Flórez C., 1998
ARECACEAE					
<i>Cocos nucifera</i> L.	Tintipán	Flórez C., 1998			
	Múcura	Flórez C., 1998	<i>Carntz</i>		
<i>Bactris major</i> Jacq.	Múcura	Flórez C., 1998	CHRYSOBALANACEAE		
ARISTOLOCHIACEAE			<i>Chrysobalanus icaco</i> L.	Tintipán	Flórez C., 1998
<i>Aristolochia odoratissima</i> L.	Múcura	Flórez C., 1998	COMBRETACEAE		
ASTERACEAE			<i>Conocarpus erecta</i> L.	Múcura	Flórez C., 1998
<i>Eleutheranthera ruderalis</i> (Sw.)	Múcura	Flórez C., 1998		Tintipán	Flórez C., 1998
Sch.bip			<i>Laguncularia racemosa</i> L.	Múcura	Flórez C., 1998
AVICENNIACEAE				Tintipán	Flórez C., 1998
<i>Avicennia germinans</i> L.	Tintipán	Flórez C., 1998	<i>Terminalia catappa</i> L.	Múcura	Flórez C., 1998
BIGNONIACEAE				Tintipán	Flórez C., 1998
<i>Crescentia cujete</i> L.	Múcura	Flórez C., 1998	CYPERACEAE		
<i>Macfadyena cf. uncata</i> (Andr.)	Múcura	Flórez C., 1998	<i>Fimbristylis cymosa</i> Br.	Tintipán	Flórez C., 1998
Spr. & Sandw				Múcura	Flórez C., 1998
BOMBACACEAE			<i>Scleria cf. pterota</i> Presl.	Tintipán	Flórez C., 1998
<i>Pseudobombax septenatum</i> Jacq.	Múcura	Flórez C., 1998	EUPHORBIACEAE		
BORAGINACEAE			<i>Cnidiosculus tubulosos</i> (M. Arg.)	Múcura	Flórez C., 1998
<i>Cordia sebestena</i> L.	Múcura	Flórez C., 1998	<i>Euphorbia glomerifera</i> (Millsp)	Tintipán	Flórez C., 1998
	Tintipán	Flórez C., 1998	<i>Euphorbia mesembryanthemifolia</i>	Tintipán	Flórez C., 1998
<i>Cordia</i> sp.	Tintipán	Flórez C., 1998	<i>Hippomane mancinella</i> L.	Tintipán	Flórez C., 1998
			<i>Phyllanthus acidus</i> (L.) Skeels	Múcura	Flórez C., 1998
			<i>Pedilanthus tithymaloides</i> L. Poit.	Múcura	Flórez C., 1998
			FABACEAE		
			<i>Crotalaria retusa</i> L.	Múcura	Flórez C., 1998
			<i>Gliricidia sepium</i> Jacq.	Múcura	Flórez C., 1998
			<i>Indigofera cf. suffruticosa</i> Mill.	Tintipán	Flórez C., 1998
			<i>Macrobium</i> sp.	Tintipán	Flórez C., 1998
			<i>Meliococca bijuga</i> L.	Múcura	Flórez C., 1998
			<i>Serna alata</i> (L.) Roxb.	Múcura	Flórez C., 1998

Continuación Anexo

Taxón	Isla	Referencia
FLACOURTIACEAE		
<i>Xylosma sp.</i>	Tintipán	Flórez C., 1998
LAURACEAE		
Indet.	Tintipán	Flórez C., 1998
MALVACEAE		
<i>Sida aff. acuta</i> Burm f.	Tintipán	Flórez C., 1998
MIMOSACEAE		
<i>Pithecellobium dulce</i> (Roxb.) Benth.	Múcura Tintipán	Flórez C., 1998 Flórez C., 1998
MORACEAE		
<i>Ficus pallida</i> Vahl.	Tintipán	Flórez C., 1998
<i>Ficus cf. trigonata</i> L.	Tintipán	Flórez C., 1998
	Múcura	Flórez C., 1998
<i>Ficus sp.</i>	Múcura	Flórez C., 1998
MYRTACEAE		
<i>Eugenia sp.</i>	Tintipán	Flórez C., 1998
ORCHIDACEAE		
<i>Brassavola nodosa</i> (L.) Lindl.	Tintipán	Flórez C., 1998
PASSIFLORACEAE		
<i>Passiflora foetida</i> L.	Múcura	Flórez C., 1998
<i>Passiflora suberosa</i> L.	Tintipán	Flórez C., 1998
POACEAE		
<i>Andropogon bicornis</i> L.	Tintipán	Flórez C., 1998
<i>Paspalum garderianum</i> Nees	Tintipán	Flórez C., 1998
POLYGONACEAE		
<i>Coccoloba uvifera</i> (L.) Jacq.	Tintipán	Flórez C., 1998
	Múcura	Flórez C., 1998
<i>Coccoloba sp.</i>	Tintipán	Flórez C., 1998
	Múcura	Flórez C., 1998
RHAMNACEAE		
<i>Sageretia sp.</i>	Tintipán	Flórez C., 1998
RHIZOPHORACEAE		
<i>Rhizophora mangle</i> L.	Múcura	Flórez C., 1998

Taxón	Isla	Referencia
RUBIACEAE		
<i>Chiococca alba</i> (L.) Hitch	Múcura	Flórez C., 1998
	Tintipán	Flórez C., 1998
<i>Morinda roioc</i> L.	Tintipán	Flórez C., 1998
	Múcura	Flórez C., 1998
<i>Randia cf. armata</i> (Sw.) DC.	Tintipán	Flórez C., 1998
<i>Rustia occidentalis</i> (Benth.)	Tintipán	Flórez C., 1998
<i>Tocoyena cousarea</i>	Tintipán	Flórez C., 1998
<i>Tocoyena posoqueria</i>	Tintipán	Flórez C., 1998
RUTACEAE		
<i>Citrus limon</i> (L.) Burm f.	Tintipán	Flórez C., 1998
SAPINDACEAE		
Indet.	Múcura	Flórez C., 1998
SAPOTACEAE		
<i>Achras zapota</i>	Tintipán	Flórez C., 1998
SCROPHULARIACEAE		
<i>Scoparia dulcis</i> L.	Tintipán	Flórez C., 1998
<i>Capraria biflora</i> L.	Múcura	Flórez C., 1998
	Tintipán	Flórez C., 1998
SMILACACEAE		
<i>Smilax cf. spinosa</i> Mill.	Múcura	Flórez C., 1998
SOLANACEAE		
<i>Cestrum cf. costanense</i>	Múcura	Flórez C., 1998
STERCULIACEAE		
<i>Guazuma ulmifolia</i> Lam.	Múcura	Flórez C., 1998
<i>Melochia cf. pyramidata</i> L.	Tintipán	Flórez C., 1998
TILIACEAE		
<i>Corchorus siliquosus</i> L.	Múcura	Flórez C., 1998
VERBENACEAE		
<i>Citharexylum caudatum</i> L.	Tintipán	Flórez C., 1998
<i>Lantana camara</i> L.	Múcura	Flórez C., 1998
VITACEAE		
<i>Cissus sicyoides</i> L.	Múcura	Flórez C., 1998

Actividades humanas

Uno de los factores más importantes en el incremento de los procesos de cambio en las islas estudiadas, es el rápido crecimiento demográfico y la concentración de la población.

La Isla Múcura presenta 30 viviendas de las cuales 25 están agrupadas en un caserío con una población permanente de 200 personas dedicadas principalmente a la pesca y que viven en condiciones de pobreza. La Isla Tintipán presenta 21 casas vacacionales dispersas por el litoral de la isla.

Entre las dos islas se encuentra Santa Cruz del Islote; un islote artificial en el que habitan 800 personas (MMA, 1998) dedicadas principalmente a la pesca, cultivo de coco y venta de lotes en la Isla Tintipán, donde existen 40 lotes en diferentes procesos de establecimiento, con un área total de 12 ha (Figura 4). Los lotes son establecidos por nativos que tienen su posesión mediante la tumba, roza y quema, seguido de relleno de cantos rodados, caracoles (*Strombus gigas L.*), corales, empalizada y arena. Esta actividad afecta principalmente los frentes de litoral y los rodales de *R. mangle*.

En la Isla Tintipán los isleños encuentran un beneficio económico mediante la explotación del bosque de mangle, con extracción y venta de "horcones" de 8 a 10 m, "varazón" de 4 m y "estacados" de 2 m. La madera se utiliza para la construcción de casas, muelles, espolones, mesas, sillas y como energía para cocinar.

Según Flórez (com. per.), hacia 1980 existía una población de 18 personas en las islas Múcura y Tintipán. En la actualidad habitan 240 personas permanentemente y se encuentra una población flotante hasta de 470 personas (Tabla 4). El aumento poblacional de las islas tiene relación directa con el aumento de la actividad turística en el archipiélago. El desarrollo de "tours" diarios desde

Tabla 3. Comparación de los Índices de Valor de Importancia (IVI).

Localidad	Familia	Especie	Valor de IVI
Isla Múcura	Areca	<i>Cocos nucifera</i>	1.53
	Papil	<i>Gliricidia sepium</i>	0.78
	Combre	<i>Conocarpus erecta</i>	0.73
	Rhizo	<i>Rhizophora mangle</i>	0.51
	Burse	<i>Bursera simaruba</i>	0.34
Isla Tintipán	Rhizo	<i>R. mangle</i>	1.65
	Areca	<i>C. nucifera</i>	0.50
	Polyg	<i>Coccoloba uvifera</i>	0.34
	Burse	<i>B. simaruba</i>	0.34
	Combre	<i>C. erecta</i>	0.34
Tierra Bomba	Anac	<i>Astronium graveolans</i>	0.45
	Cappa	<i>Capparis baduca</i>	0.20
	Fabaceae	Indet.	0.18
	Fabac	<i>Machaerium sp.</i>	0.15
	Cappa	<i>Capparis odoratisima</i>	0.14
Neguanje	Eupho	<i>Hura crepitans</i>	0.35
	Morac	<i>Brosimum alicastrum</i>	0.29
	Fabac	<i>Machaerium sp.</i>	0.19
	Anaca	<i>Astronium graveolens</i>	0.13
	Sapot	<i>Cryosophyllum sp.</i>	0.10

el Golfo de Morrosquillo hacia las islas y la construcción de casas vacacionales hacen de las islas un atractivo económico que ocasiona migración poblacional al archipiélago en busca de mejores oportunidades laborales.

Los botes de turismo y las motos marinas realizan recorridos alrededor de la Isla Múcura y en el sistema lagunar de la Isla Tintipán y generan fuertes disturbios tanto en los fondos como en el litoral, mediante la alteración del oleaje por altas velocidades de las lanchas. Esta actividad deja residuos de gasolina y aceite, ocasiona erosión del litoral, remoción de sedimentos y alteración de

Tabla 4. Incremento poblacional en las Islas Múcura y Tintipán.

Año	Isla	Población permanente	Densidad Hab/ha	Temporada vacacional	Densidad Hab./ha	Total	Densidad Hab/ha
1980	Múcura	10	0.26	s.d.	s.d.	10	0.26
	Tintipán	8	0.02	s.d.	s.d.	8	0.02
1999	Múcura	150	3.94	270	7.1	420	11.05
	Tintipán	90	0.27	200	0.61	290	0.89

s.d.: Sin dato

la calidad del agua. En una playa de la Isla Múcura, en época vacacional llegan aproximadamente 30 lanchas y un promedio de 500 personas diarias en temporada alta y 50 en temporada baja. Esta actividad afecta los sistemas de manglar adyacentes por tala, anclaje, atracadero de lanchas, contaminación por gasolina y aceite, depósito de basuras y relleno de ciénagas cercanas.

Discusión

Las áreas insulares comprenden por lo general una serie de biotopos y hábitats asociados, usualmente distribuidos en forma de mosaico que se distinguen entre sí por la naturaleza física del sustrato y por poseer elementos característicos de fauna y flora. Cada uno de estos hábitats constituye una unidad discreta del paisaje del archipiélago, cuya presencia y distribución es la respuesta de una serie de procesos geomorfológicos, hidrográficos y biológicos que actúan en el corto, mediano y largo plazo.

El rasgo geomorfológico característico de las islas estudiadas es la presencia de una terraza coralina con fisiografía ondulada de 0 a 2 msnm. Esta característica se ve reflejada en las diferentes UP y ha incidido en los procesos de ocupación y uso antrópico. La Isla Tintipán presenta una extensa área de canales de marea con un amplio ecosistema de manglar con respecto a las cimas de la terraza coralina. La Isla Múcura presenta una terraza coralina continua y una pequeña cobertura de manglares de bajo porte en alto grado de deterioro.

La Isla Tintipán presenta una extensa red de manglares donde se diferencian las UP MB1 y MB2. Según **Páez et al.** (1998), los archipiélagos de San Bernardo y del Rosario presentan bosques de manglar xerofíticos de apariencia fisonómica simple. En estos bosques, aunque las alturas predominantes son inferiores a 5 m, pueden verse individuos próximos a los 10 m con DAP inferiores a 15 cm. La unidad MB1 se observa hacia los frentes de marea donde recibe un constante intercambio de marea, asegurando su buen desarrollo, ya que ésta constituye el mecanismo para que las aguas saladas penetren los suelos y permitan que el sustrato obtenga una buena aireación y disminuya o elimine la posibilidad de acumulación de sales o de gases como el H_2S (**Páez et al.**, 1998). **Sánchez et al.** (1997), describe los manglares de la Isla Tintipán como un ecosistema en alto grado de intervención antrópica con una franja externa dominada por *R. mangle* y hacia el interior bosques mixtos con presencia de *L. racemosa*, *C. erecta* y *A. germinans*. La UP de manglares bajos (MB2 y LR1), ubicadas hacia el interior de las islas, reciben un intercambio de agua intersticial de marea reducido sobre suelos que posible-

mente presentan bajas concentraciones de nutrientes y altas de sal que limitan su normal desarrollo. **Díaz** (1998) y **Cintrón & Schaeffer** (1983), mencionan que los bosques bajos de mangle no sobrepasan los 4 m de altura, se desarrollan sobre sustratos poco favorables como plataformas de rocas sedimentarias y coralinas y en regiones con condiciones ambientales extremas.

En las cimas de la terraza coralina (UP C1 a C6), la vegetación presenta los mayores niveles de intervención antrópica. En estas unidades se taló la vegetación nativa y se introdujo el cultivo de coco; por lo tanto, el paisaje predominante en estas UP es un monocultivo de coco con algunos árboles relictuales de BST (*Ficus sp.*, *P. septenatum* (bonga), *T. catappa* (almendro) y *A. zapota* (níspero) y vegetación secundaria de BST citadas en numerosos trabajos como **Garavito** (1977) en las Islas del Rosario, **Barriga et al.** (1985) y **González et al.** (1995) en la Isla de San Andrés y en la región Caribe por **Dugand** (1941) y **Mendoza** (1999).

Las diferencias geomorfológicas y de vegetación entre las islas, sugieren que la Isla Múcura presentó un bosque más desarrollado que la Isla Tintipán ya que posee una cima coralina continua, árboles relictuales de porte alto y se encuentra protegida del efecto de los vientos alisios por la Isla Tintipán.

En cuanto a la riqueza de especies en las UP, los mayores valores se registraron en las UP: C1, C2 y C3, debido a que son unidades en un estado sucesional intermedio que no alcanzaron niveles altos de intervención antrópica y presentan numerosas especies vegetales secundarias de BST. En las UP C4 y C5, predomina el monocultivo de coco y se reduce el número de especies, así como en las UP MB1, LR1 y MB2, que corresponden a bosques de manglar compuestos de 4 especies (Tabla 2).

La geomorfología del litoral de las islas depende de las características biofísicas como altura, material parental y dinámica de corrientes y mareas, que mediante transferencia y deposición de sedimentos configuran diferencias en la morfología costera (costados N y S de las islas). Los costados O y E de las islas presentan las mejores condiciones para el avance del manglar sobre el litoral, como aguas tranquilas y sustrato lodoso para la implantación de semillas de *R. mangle*. Lo anterior demuestra el carácter dinámico de las islas, las cuales presentan playas arenosas móviles, litorales en procesos erosivos, acumulación de cantos rodados o con avance de manglar, con períodos de erosión costera alternados con períodos de reconstrucción con aportes de sedimentos (**Briggs P. & Smithson P.**, 1997).

Los resultados del análisis fitosociológico presentan 9 tipos de vegetación que responden a las características de geomorfología, fisiografía y uso antrópico. Para los bosques de manglar de las islas estudiadas, se diferenciaron 6 tipos de vegetación de los cuales *Rhizophora* (*R. mangle*) es el más abundante y se ubica preferiblemente hacia el litoral de las islas. Hacia el interior de las islas se encuentran bosques mixtos de manglar que presentan una descripción de bosques mixtos con presencia de *R. mangle*, *L. racemosa* y *C. erecta* y en escasas ocasiones con *A. germinans*. Estos resultados se encuentran en concordancia con el estudio de **Sánchez et al.**, (1997) de la Isla Tintipán, en el que describe el mismo patrón de distribución del bosque; sin embargo, aclara que no se detectó una zonación característica la cual pudiera indicar la ubicación de las especies dentro del bosque.

En las cimas de la terraza coralina se diferenciaron 3 tipos de vegetación, en los que predomina el monocultivo de coco asociado con vegetación secundaria de BST y se diferencian por el nivel de intervención antrópica. Debido a esta característica, es muy difícil comparar estos tipos de vegetación con las comunidades vegetales del Caribe colombiano (**Dugand**, 1940, **Bastidas & Corredor**, 1977, **Rancel**, 1987).

En cuanto a dominancia de especies, *R. mangle* es la especie dominante en la Isla Tintipán, debido a que la isla presenta un extenso bosque de manglar que favorece la implantación de esta especie. **Sánchez et al.**, (1997), describe la especie *R. mangle* como la especie dominante en el bosque de mangle de la Isla Tintipán con un IVI total de 287.3 y comenta que fue la única especie que tuvo representatividad en todos los estados sucesionales del bosque. Las cimas de la terraza coralina se encuentran dominadas por el monocultivo de coco asociado principalmente con especies subxerofíticas como *B. simaruba* y *C. uvifera*. **Mendoza** (1999), presenta los valores de IVI para diferentes bosques del Caribe colombiano; sin embargo, las especies dominantes encontradas en este trabajo son diferentes debido a diferencias en las condiciones geomorfológicas y en los niveles de intervención antrópica. En la Isla Múcura la especie dominante es *C. nucifera*, ya que la isla presenta una amplia cima coralina dominada por el cultivo de coco asociado con vegetación secundaria de BST. El sector noreste de la isla presenta un manglar en un alto estado de deterioro dominado por *C. erecta* y *R. mangle*.

Debido a la gran cantidad de recursos naturales que ofrecen las islas, estas han sido utilizadas por el hombre para diversas actividades como pesca, cultivos, aprovechamiento forestal y turismo. Con el incremento de la

población, estas actividades han aumentado ocasionando el deterioro de los ecosistemas del área. La población permanente de las islas ha aumentado rápidamente tanto por la inmigración de pescadores de las poblaciones continentales en búsqueda de mejores jornadas de pesca, como por el aumento de la actividad turística con el respectivo establecimiento de la construcción de casas vacacionales (Tabla 4).

El Ministerio del Medio Ambiente y la Organización Internacional de Maderas Tropicales (OIMT), estimaron que para el Caribe colombiano existen aprox. 86.310 ha de manglares distribuidas a lo largo del litoral continental e insular (**Zambrano & Pubiano**, 1997). En las islas Múcura y Tintipán los bosques de manglar se han talado y rellenado, se han construido caminos, drenajes, canales dentro de los manglares y se han alterado e incluso secado ciénagas con fines de relleno. **Díaz & Zelwer** (1985), sugieren que la construcción de caminos entre el manglar y el aumento de deposición de desechos sólidos afecta el crecimiento y la producción de los manglares.

Ellison & Farnsworth (1996), comentan que una reducción en la cobertura vegetal de los manglares resulta en una disminución en la pesca y un aumento del esfuerzo pesquero. Los mismos autores plantean que las pesquerías artesanales a pequeña escala y a nivel comercial, generan un impacto sobre las redes alimentarias asociadas con los manglares, lo cual hace necesario el desarrollo de pesquerías controladas que conduzcan a un equilibrio entre la oferta y la demanda, con aplicaciones de técnicas de pesca que protejan el ecosistema.

En el Caribe colombiano, los aprovechamientos forestales fueron suspendidos en 1978; no obstante, el aprovechamiento de la madera de mangle para construcción y fuente de energía a nivel de subsistencia por los nativos continúa (**Álvarez**, 1993). Igual situación ocurre en el Archipiélago de San Bernardo, donde esta actividad extractiva bloquea el normal desarrollo del manglar y su avance sobre el mar. Aunque son conocidas las altas tasas de regeneración de los manglares, es claro que *R. mangle* no retoña (**Wadsworth**, 1959, **Roth**, 1992) y que el corte de manglares en pequeña escala, resulta en una acumulación de sulfidos en el suelo (**Hamilton & Snedaker**, 1984) que limita la regeneración de semillas y afecta incluso operaciones silviculturales (**Alarcón & Conde**, 1993).

La creciente actividad turística desarrollada sin conciencia ambiental ni enmarcada dentro de programas de ordenamiento turístico en un área de Parque Nacional, ocasiona un aumento en la presión sobre los ecosistemas como respuesta a la mayor demanda y resulta en la degra-

dación de los mismos. Aunque se cuenta con pocas herramientas científicas para determinar cambios y establecer capacidades de carga turística en los ecosistemas, los efectos de la degradación ambiental se pueden reducir con el desarrollo de mapas temáticos como base para la implementación de programas de manejo integrado de zonas costeras (IRF, 1996).

Conclusiones

Las islas Múcura y Tintipán son islas bajas de origen coralino, con fisiografía ondulada y alta diversidad ecosistémica representada en 11 UP y 9 tipos de vegetación. La Isla Tintipán presenta un extenso bosque de manglar con rodales de *R. mangle* hacia el litoral y hacia el interior, bosques mixtos de *R. mangle* asociados con *L. racemosa* y *C. erecta* y en escasas ocasiones con *A. germinans*. En las cimas de la terraza coralina presenta diferentes niveles de intervención antrópica con la tala e introducción del cultivo de coco. Las UP con mayor riqueza de especies se encuentran hacia el interior de la isla y presentan bajos niveles de intervención antrópica, posiblemente por su difícil acceso. La Isla Múcura, es dominada por una terraza coralina con un cultivo de coco asociado con vegetación secundaria de bosque tropical y un bosque de manglar en alto grado de deterioro.

Durante los últimos años, las actividades humanas han producido un acelerado impacto sobre las islas sin que exista ningún control del Estado; se hace necesaria la implementación de un programa de manejo integrado de zonas costeras que garantice el desarrollo sostenible y conservación de los recursos naturales del Archipiélago de San Bernardo.

Agradecimientos

Este trabajo fue posible gracias a la Pontificia Universidad Javeriana – Facultad de Estudios Ambientales y Rurales (FEAR). Agradecemos a Juan M. Díaz (INVEMAR) por facilitar las fotografías aéreas de las islas. Un especial agradecimiento a Fabio Flórez por su apoyo y comentarios. Agradecemos los comentarios de dos evaluadores de la Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales.

Bibliografía

Alarcón, C. & J.E. Conde 1993. Mangroves of Venezuela. In L. D. Lacerda (Ed.). Conservation and sustainable utilization of mangrove forests in Latin America and Africa regions. Part I Latin America. International Society for Mangrove Ecosystems (ISME). Okinawa, Japón.

Álvarez, L. R. 1993. Ecosistemas de manglar de Colombia. In L.D. Lacerda (Ed.). Conservation and sustainable utilization of mangrove forests in Latin America and Africa regions. Part I Latin America. International Society for Mangrove Ecosystems (ISME). Okinawa, Japón.

Barriga E., Camacho J., Jaramillo I., Mora L., Pinto P. & P. Ruiz 1985. La Isla de San Andrés. Contribuciones al conocimiento de su ecología, flora, fauna y pesca. Universidad Nacional de Colombia.

Bastidas, N. & H. Corredor. 1977. Contribución al estudio fitosociológico del Parque Nacional Natural Tayrona (Ensenadas de Chengue y parte este de Neganje). Tesis Universidad Nacional de Colombia.

Briggs, P. & P. Smithson. 1997. Fundamentals of the physical environment. Second edition. Routelge. London.

Byrne, R. 1972. Man and the variable vulnerability of island life: A study of recent vegetation change in Bahamas. URL: <http://dpls.dacc.wisc.edu/bahama/index.html>.

Castellanos, A. & H. Chávez 1982. Inventarios y descripción de algunos gastrópodos de una zona de la costa Norte de Colombia. Tesis de Grado. Universidad Jorge Tadeo Lozano. Bogotá, Colombia.

Cintrón, G. & Y. Schaeffer 1983. Introducción a la ecología del manglar. UNESCO. Montevideo, Argentina.

Díaz, H. & M. Zelwer. 1985. ¿Ignorancia, inconciencia o indolencia? Réquiem para una laguna. Acta Científica Venezolana **36**: 203-206.

Díaz, J.M. 2000. Áreas coralinas de Colombia. Instituto de Investigaciones Marinas y Costeras “José Benito Vives de Andreis”. INVEMAR. Santa Marta, Colombia.

Dugand, A. 1941. Estudios geobotánicos colombianos. Descripción de una sinecia típica en la subxerofitia del litoral Caribe. Rev. Acad. Colomb. Cienc. Exactas, Físicas y Naturales, **4**: (14).

Ellison, A.M. & E.J. Farnsworth 1996. Antropogenic disturbance of caribbean mangrove ecosystems: Pasta impacts, present trends and predictions. Biotrópica, **28** (4): 549-565.

Etter, A. & M. Rojas. 1988. Levantamiento ecológico de la Isla de San Andrés, Colombia (Mapas 1:25.000). Centro de Planificación y Urbanismo. Universidad de los Andes. Bogotá, Colombia. (Informe Inédito)

Farina, A. 1998. Principles and methods in landscape ecology. Cambridge University Press. London.

Ford, K.H. 1995. A Description of the ecology of north Andros Island. Bahamas. URL: <http://209.237.111.62/kyecology.html>.

Garavito, N. 1977. Islas del Rosario. Monografía. Instituto Geográfico “Agustín Codazzi”. Bogotá D.C.

Gentry, A. H. 1982. Patterns of neotropical plant diversity. Evolutionary Biology **15**: 1-84.

González F, Díaz J. N. & P. Lowy. 1995. Flora ilustrada de San Andrés y Providencia. Convenio SENA – Universidad Nacional de Colombia, Instituto de Ciencias Naturales.

Hamilton, L. S. & S.C. Snedaker. 1984. Handbook for mangrove area management. UNEP, Gland.

- Hill, M.O.** 1979. TWINSPLAN – a FORTRAN program for arranging multivariate data in an ordered two-way table by classification of the individuals and attributes. Ithaca, New York. Cornell University.
- Sánchez, H. & R. Álvarez** 1997. Diagnóstico y zonificación preliminar de los manglares del Caribe de Colombia. Ministerio del Medio Ambiente. Organización Internacional de Maderas Tropicales. Bogotá, Colombia.
- IGAC.** 1958. Cartografía base, escala 1:50000.
- IGAC.** 1987. Fotografía blanco y negro, escala 1:5000.
- IDEAM.** 1999. Dinámica del Caribe colombiano. URL: <http://www.Ideam.gov>.
- Island Resources Foundation (IRF).** 1996. Tourism and coastal resources degradation in the wider Caribbean. St. Thomas, Virgin Islands. URL: www.irf.org/irtourdg.html.
- Küchler, A. W. & Y.S. Zonneveld.** 1988. Handbook of vegetation science. Vegetation mapping. Vol. 10. Kluwer Academic Publishers. Boston, London.
- Lowy, P. D.** 2000. Flora vascular terrestre del Archipiélago de San Andrés y Providencia, Colombia. *Biota Colombiana* **1** (1): 109-124.
- Ludwing, J & J. Reynolds.** 1988. Statistical Ecology: A primer on methods and computing. Wiley – Interscience publications, New York.
- Márquez G.** 1987. Las islas de Providencia y Santa Catalina. Ecología Regional. Fondo “FEN” de Colombia – Universidad Nacional de Colombia, Bogotá.
- Matteuci, S. & Coloma A.** 1982. Metodologías para el estudio de la vegetación. OEA.
- Mendoza, H. C.** 1999. Estructura y riqueza florística del bosque seco tropical en la región Caribe y el valle del río Magdalena, Colombia. *Caladasia* **21** (1): 70-94.
- Ministerio del Medio Ambiente (MMA).** 1996. Resolución No. 1425. “Por la cual se realindera el Parque Nacional Natural Los Corales del Rosario y se modifica su denominación”.
- Ministerio del Medio Ambiente (MMA).** 1998. Parque Nacional Natural Los Corales del Rosario y San Bernardo. Informe resumen censo Archipiélago de San Bernardo.
- NOAA.** 1999. An analysis of vegetation assemblages on Parramore Island using remote sensing and ground-based techniques. URL: <http://www.csc.noaa.gov/otter/htmls/ecosys/ecology/ottereco.htm>.
- Páez H. S., Giovanni, A. & Álvarez R.L.** 1998. Conservación y uso sostenible de los manglares del Caribe colombiano. Ministerio del Medio Ambiente, Asociación Colombiana de Reforestadores (Acofore) y Organización Internacional de Maderas Tropicales (OIMT).
- Patiño, F. & Flórez F.** 1993. Estudio ecológico del Golfo de Morrosquillo. Universidad Nacional de Colombia - Fondo “FEN” de Colombia.
- Ramírez, A., Miranda D. Viña G.** 1994. Estructura arrecifal del Archipiélago de San Bernardo, Caribe colombiano, estudio de línea base. *Trianea*, 5: 189-219.
- Rangel, O. J.** 1987. Colombia, diversidad biótica I. Instituto de Ciencias Naturales. Universidad Nacional de Colombia.
- Roth, L. C.** 1992. Hurricanes and mangrove regeneration: effects of hurricane Joan, October 1988, on the vegetation of Isla del Venado, Bluefields, Nicaragua. *Biotropica* **24** (2): 275-284.
- Sarmiento, D., Flechas, A. & Alvis, G.** 1989. Evaluación cuantitativa del estado actual de las especies coralinas del Parque Nacional Natural Corales del Rosario (PNNCR), Cartagena (Colombia). Tesis de Grado Biología Marina, Univ. Jorge Tadeo Lozano, Bogotá, 144 pp.
- USGS.** 1999. Assateague Island National Seashore Vegetation Descriptions. URL: <http://www.ttc.nbs.gov/npsveg/ASIS/descriptxt.html>.
- Wadsworth, F.H.** 1959. Growth and regeneration of white mangrove in Puerto Rico. *Carib For.* **20**: 59-71.
- Vernette, G.** 1985. La plate-forme continentale caraibe de Colombie importance du diapirisme argileux sur la morphologie et la sedimentation. Tesis de Doctorado en Ciencias. Universidad de Burdeos, 385 p.
- Zambrano, E. & Rubiano E.** 1997. Mapas del bosque de manglar de la Costa Caribe colombiana. Proy PD. 171/91 Rev. 2. Informe Técnico. Ministerio del Medio Ambiente. Organización Internacional de Maderas Tropicales. Bogotá D.C., Colombia.
- Zonneveld, I.S.** 1995. Land Ecology. SPB. Academic Publishing, Amsterdam.

FABRICACIÓN Y CARACTERIZACIÓN ÓPTICA DE MATERIALES SEMICONDUCTORES PARA APLICACIONES EN OPTOELECTRÓNICA

por

Hernando Ariza Calderón¹

Resumen

Ariza H.: Fabricación y caracterización óptica de materiales semiconductores para aplicaciones en optoelectrónica. Rev. Acad. Colomb. Cienc. **27**(104): 357-368. 2003. ISSN 0370-3908.

En este trabajo se describen las técnicas de caracterización óptica de fotoluminiscencia y fotorreflectancia, así como la técnica de crecimiento por epitaxia en fase líquida, que han permitido fabricar y realizar estudios de las propiedades físicas más relevantes de películas delgadas semiconductoras ternarias y cuaternarias. Se analizan muestras epitaxiales tipo **p** y **n** de GaAs y $\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}$ dopadas con Ge y Sn desde 10 a 300K, con diferentes variaciones de potencia del láser modulador. Se presenta un estudio de las características morfológicas del cuaternario GaInAsSb y se determinan los valores óptimos de parámetros de crecimiento que han permitido el crecimiento de capas epitaxiales de alta calidad cristalina.

Palabras clave: Semiconductores, fotoluminiscencia, crecimiento epitaxial, fotorreflectancia.

Abstract

In this work we describe two optical characterization techniques, photoluminescence and photoreflectance, and the growth technique liquid phase epitaxy. By means of these techniques we fulfill the growth and the study of the main physical properties of semiconductor thin films formed by ternary and quaternary alloys. Epitaxial films type **p** and type **n** of GaAs and $\text{Ga}_{1-x}\text{Al}_x\text{As}$, Ge and Sn doped, had been analyzed at different temperatures, from 10 to 300 K, and different modulator laser power. We also present a morphology study of the GaInAsSb quaternary material, and the process to determine the optimal growth parameters for the epitaxial layers with good crystalline quality.

Key words: Semiconductors, photoluminescence, epitaxial growth, photoreflectance.

¹ Laboratorio de Optoelectrónica, Universidad del Quindío, A.A. 460, Armenia – Quindío, E-mail: heariza@uniquindio.edu.co

1. Introducción

Dentro del panorama general del campo de los materiales, el desarrollo de nuevos semiconductores continúa siendo un área de gran actividad y rápido crecimiento. Gracias al perfeccionamiento de sofisticados sistemas de fabricación de dispositivos, es posible crecer mezclas de semiconductores ternarios y cuaternarios. Con ellas, mediante un control en la composición estequiométrica, se pueden obtener materiales con un valor de la energía de banda prohibida de acuerdo con el dispositivo que se quiere desarrollar con base en películas semiconductoras o en estructuras de multicapas semiconductoras (Cohen & Chelikowsky, 1989; Peters *et al.*, 1988; Bouhafs *et al.*, 1997). Todo este desarrollo de nuevos semiconductores conlleva una intensa labor de caracterización para la determinación de sus propiedades estructurales, ópticas y eléctricas, así como para la optimización de los parámetros de crecimiento de dichos materiales semiconductores. La posibilidad de calcular la estructura de bandas de mezclas de semiconductores es prerrequisito importante para analizar los fenómenos relacionados con su comportamiento y el de los dispositivos fabricados. Las mezclas producen cambios en el parámetro de red y en la distribución de carga electrónica de los sólidos, y esto produce cambios significativos en la estructura electrónica de bandas que se manifiesta en las propiedades ópticas y eléctricas.

Partiendo de un mismo compuesto binario es posible obtener un amplio espectro de propiedades al introducir un elemento diferente, propiedades que dependen de factores tales como la forma en que este nuevo elemento entre a formar parte del material, de la proporción estequiométrica, de las nuevas interacciones generadas, de las modificaciones que se producen en las estructuras de los compuestos binarios, entre otros. Las aleaciones ternarias pertenecientes a los grupos II-VI, y principalmente a partir del compuesto binario CdTe han sido un campo de estudio de gran interés pero relativamente reciente si se compara con el trabajo desarrollado alrededor de los compuestos III-V, al cual pertenece el GaAs. Como parte del estudio de los semiconductores del grupo II-VI están los ternarios pertenecientes al subsistema Cd-A-Te, siendo A (Mn, Zn) un elemento determinante en las propiedades de las aleaciones. Es así como se pueden obtener, por ejemplo, semiconductores magnéticos diluidos en los que el elemento A es un ión magnético.

Otro compuesto de gran interés es el GaAs, el segundo material más usado en la industria de los semiconductores. Su brecha de energía directa y la alta movilidad de los electrones lleva a muchas aplicaciones diferentes donde están involucradas tanto la velocidad de los electrones

como la luz. Su bajo costo con respecto a la tecnología del Si lo hace el semiconductor del futuro. La aleación $\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}$ ha recibido considerable atención en los últimos años debido a las grandes aplicaciones en dispositivos tales como láseres de pozos cuánticos, transistores de heterouniones y diodos túnel, entre otros (Schuppler *et al.*, 1995; Suesawa, M., 1998).

En vista de la enorme aplicabilidad del Arsenuro de Galio, se ha llegado a conocer en profundidad su estructura electrónica, y los parámetros físicos, ópticos y eléctricos están bien estudiados. Existe una amplia literatura al respecto, incluyendo compendios y textos tanto para el GaAs como para el $\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}$. Pero la alta impurificación produce en el GaAs dos problemas aún no entendidos: la desactivación electrónica o disminución de los portadores libres con el aumento de la concentración y la dispersión en los procesos de generación-recombinación de portadores. Igualmente, no se ha podido entender la formación de defectos, y la literatura es abundante, porque todavía no se tiene un modelo de cómo entran las impurezas en el material. Por lo tanto, es de gran interés hacer un estudio amplio de la impurificación del GaAs y AlGaAs, en particular en capas epitaxiales de buena calidad, en el rango de leve hasta fuerte dopaje. Dos técnicas muy poderosas como son la fotoluminiscencia y la fotorreflectancia nos permiten hacer este tipo de estudio (Godoy *et al.*, 1997; Schuppler *et al.*, 1995).

Otras aleaciones semiconductoras formadas por más de dos elementos de los grupos III y V de la tabla periódica, son ampliamente utilizadas en los dispositivos optoelectrónicos, dado que los valores de los parámetros determinantes en la operación de estos, tales como la brecha de energía prohibida E_0 y el parámetro de red a , se pueden fijar de acuerdo con los requerimientos propios de cada aplicación. Pero en muchos casos se debe poder controlar por separado el valor de la brecha de energía prohibida y del parámetro de red, situación que no es permitida en los compuestos binarios y ternarios por la correlación directa existente entre estos dos parámetros. Por el contrario, cuando se tiene una aleación formada por cuatro elementos, conocida como material cuaternario, se puede tener un control independiente de estos parámetros variando su estequiometría (Shim *et al.*, 2000).

Las películas semiconductoras de GaInAsSb pueden ser fabricadas por diversas técnicas, tales como epitaxia por haces moleculares (MBE), epitaxia en fase de vapor por gases metalorgánicos (OMVPE) y epitaxia en fase líquida (EFL) entre otras. Lo que hace interesante fabricar este material por EFL, es que esta técnica es la más utilizada en la industria para fabricar dispositivos en masa,

dado que ofrece la mejor relación entre calidad cristalina de la película fabricada y precio de fabricación de la misma (Zheng *et al.*, 1974; Wang *et al.*, 1998).

2. Teoría

2.1. Técnicas de caracterización óptica

Explicar y predecir las propiedades de los sólidos a partir de los átomos constituyentes, es uno de los principales objetivos de la física de la materia condensada. La utilización de mediciones ópticas ha sido una de las formas tradicionales para lograr un entendimiento de las propiedades de los átomos, y posteriormente se ha convertido en una de las herramientas más poderosas para obtener las propiedades ópticas y electrónicas de los semiconductores. A diferencia de los espectros de los átomos (gases) cuyos espectros son líneas angostas que llevan a una interpretación directa en términos de transiciones electrónicas, los sólidos presentan espectros más anchos que implican experimentos y teorías más sofisticadas para su interpretación.

Entre los estudios ópticos están las mediciones de absorción y transmisión, que presentan dificultades debido a la poca longitud de penetración de la radiación óptica en los semiconductores, razón por la cual se requiere de películas delgadas sobre sustratos transparentes; las mediciones de emisión de radiación entre las que está la técnica de fotoluminiscencia, y las mediciones de reflectividad que no exigen espesores determinados y son relativamente fáciles de realizar, pues en principio se necesitaría solamente una fuente de luz, un monocromador y un detector. Esta última es una técnica en que la respuesta no es sensible a las perturbaciones intrínsecas de la superficie, pues éstas son del orden de decenas de \AA mientras que la longitud de onda de la radiación es del orden de 10^3\AA , por lo que la respuesta es del bloque. Pero los espectros de reflectividad no son ricos en estructura; su forma de línea es ancha y continua, con las estructuras debidas a los puntos críticos traslapadas, por lo que no se obtienen los valores absolutos de las energías de los niveles en estudio sino que obtenemos las diferencias relativas en energía. Para poder definir la posición energética de los puntos críticos y su ubicación en la zona de Brillouin, se han desarrollado las técnicas de reflectividad modulada. Para la caracterización óptica hemos utilizado, además de estas técnicas, la técnica de fotoluminiscencia, las cuales se describen a continuación.

2.2. Fotoluminiscencia (FL)

La emisión de radiación es un proceso inverso a la absorción, en donde los electrones que están ocupando

estados de energía mayor al que ocuparían en condiciones de equilibrio, realizan una transición siendo la diferencia de energía de los dos estados emitida como radiación electromagnética. Es decir, para la emisión se requiere que el sistema esté en condición de no equilibrio, contrario al proceso de absorción. Una característica importante de los espectros de emisión, particularmente de fotoluminiscencia, es que se trata de espectros con bandas de emisión estrechas, a diferencia de los espectros de absorción en los que está involucrada una alta densidad de estados con energías mayores y menores que la energía del nivel de Fermi. Para el caso de la emisión, sólo interviene bandas estrechas de estados ocupados que contienen electrones en estados de mayor energía, y bandas de estados desocupados de menor energía que contienen huecos. Por lo tanto, la generación de fotones por unidad de volumen está determinada por la densidad de los estados ocupados de mayor energía y los estados desocupados de menor energía, y por la probabilidad de que un electrón por unidad de volumen, en un estado ocupado, realice la transición a un hueco por unidad de volumen, de menor energía. Para lograr el estado de no equilibrio se hace necesario excitar el material en estudio; la fuente de excitación en fotoluminiscencia es radiación láser (Pankove *et al.*, 1971).

Mediante la posición en energía de la banda de emisión, se obtiene información sobre la diferencia de energía entre los estados ocupados y desocupados, energía que corresponde a transiciones radiactivas debidas a recombinaciones excitónicas, a recombinaciones entre estados libres y ligados o entre estados libres, y a recombinaciones entre estados dentro de la brecha prohibida. Entre estas transiciones están las que se conocen como transiciones fundamentales que ocurren cerca de los bordes de banda. También podemos obtener información cualitativa acerca de la calidad cristalina de la muestra, teniendo en consideración factores como el ancho de los picos a la altura media y la intensidad relativa de las bandas asociadas a estados dentro de la brecha prohibida (Perkowitz, 1993; Pavesi & Guzzi, 1994).

2.3. Fotorreflectancia (FR)

La fotorreflectancia es una técnica modulada que, así como la fotoluminiscencia, es muy poderosa para determinar la microestructura de los semiconductores. La fotorreflectancia en particular, es la técnica más importante para obtener información precisa acerca de las energías de los puntos críticos y los campos eléctricos internos de semiconductores de brecha directa. Estas cantidades son claves para determinar otros parámetros del material tales como la brecha de energía, niveles de dopamiento,

densidad de estados superficiales y la dirección de la curvatura de la banda, los cuales son importantes para el desempeño de cualquier dispositivo electrónico que se fabrique con el material (Yu & Cardona, 1996).

La fuente de luz de bombeo modula el campo eléctrico superficial de la muestra a través de la creación de pares electrón hueco fotoexcitados. Esta espectroscopía de modulación da características espectrales precisas que revelan la estructura electrónica del semiconductor dentro del rango de energía de la luz de prueba. Características finas que podrían no ser detectadas en la reflectividad absoluta se resaltan en esta técnica, así como los valores de energías y de parámetros de ensanchamiento de transiciones interbandas. La FR es extremadamente útil porque es una técnica sin contactos eléctricos y no requiere montajes ni tratamientos especiales de la muestra. Ella puede ser realizada a bajas o a altas temperaturas y ha sido usada *in situ* como técnica de caracterización de crecimiento de materiales. La FR es una técnica que también permite obtener información sobre el campo eléctrico asociado a la superficie o a la interfaz de un semiconductor, y con ella determinar la densidad de impurezas eléctricamente activas en el semiconductor (Lastras-Martínez *et al.*, 1999).

3. Montajes de las técnicas de caracterización y de fabricación de materiales semiconductores

3.1 Montaje de fotoluminiscencia

La fuente de excitación utilizada es un haz de 488 nm de longitud de onda (2.54 eV) proveniente de un láser de Ar⁺. Con el fin de hacer incidir sobre la muestra un haz monocromático y evitar la incidencia de longitudes de onda provenientes del plasma del láser, se coloca un filtro de interferencia correspondiente a esta longitud de onda. La muestra se coloca en el dedo frío de un crióstato, con circuito cerrado de helio líquido, y con un controlador de temperatura que utiliza dos sensores de Si y un calefactor de 50 W para variar la temperatura de la muestra desde 11 K hasta 300 K, con una precisión de 1K. A la entrada del espectrómetro se utiliza un filtro que impide pasar radiaciones cuya longitud de onda esté por debajo de 540 nm para evitar el apantallamiento de la respuesta de la muestra con la línea del láser.

La emisión producida por la muestra excitada se focaliza mediante un sistema óptico formado por un juego de lentes, orientado hacia la entrada del espectrómetro. En las mediciones aquí presentadas se utilizó un monocromador de 50 cm de distancia focal, con una rejilla de 1.200 ranuras/mm y un máximo de difracción en 500 nm. La resolución del sistema es de 0.2 Å para una

apertura de las rendijas de 6 mm. A la salida del espectrómetro se tiene un fotomultiplicador polarizado a alto voltaje, cuya respuesta se lleva a un amplificador de cuadratura lock-in, previa amplificación y conversión de la señal de corriente a voltaje. Para lograr realizar la lectura de la señal mediante el lock-in, el haz de la luz láser se corta mecánicamente con un chopper, a cuya frecuencia se sintoniza el lock-in. Las respuestas obtenidas del fotomultiplicador son del orden de los nanoamperios, razón por la cual se requiere además de un detector de alta sensibilidad, un dispositivo de pre-amplificación. Todos los espectros, para efectos de comparación, se toman utilizando 900 V de polarización del fotomultiplicador, para así garantizar que la amplitud relativa de la señal en los diferentes espectros no está siendo modificada por el detector. La frecuencia de corte de la luz de excitación es de 83 Hz, y también se mantiene en este mismo valor en todas las mediciones.

3.2 Montaje de fotorreflectancia

La fotorreflectancia es una técnica en la que el parámetro de modulación es el campo eléctrico superficial de la muestra. Para lograr la modulación de este campo eléctrico, se hace incidir sobre la muestra un haz de radiación láser generando una modificación en las bandas. Se ha utilizado la línea 488 nm de un láser de Ar⁺, el cual permite un control de la potencia de salida. La potencia utilizada es del orden de 20 mW, y el haz tiene una región de máxima intensidad de 2 mm² aproximadamente, lo que corresponde a una intensidad de incidencia alrededor de 1 Watt/cm². La respuesta no depende sensiblemente de la intensidad de la luz incidente siempre y cuando se trabaje dentro del régimen de campo bajo. Antes de incidir sobre la muestra, el haz del láser se hace pasar a través de un cortador mecánico de luz, con el fin de que la luz incidente no sea continua, lo que permite la modulación o variación periódica del campo eléctrico. Se utilizó una frecuencia de incidencia de la luz de 211 Hz.

Sobre la muestra se hace incidir un haz monocromático que se obtiene a partir de una lámpara cuya emisión se hace pasar por un monocromador de una resolución de 0.094 nm para una abertura de las rendijas de entrada y salida de 13 mm. Se varía la longitud de onda de la luz incidente sobre la muestra y se registra la respuesta del detector de estado sólido. Para evitar que las reflexiones del láser interfieran en la medida, se coloca a la entrada del detector un filtro que permite sólo la incidencia de longitudes de onda mayores o iguales a 540 nm. La respuesta del detector debe llevarse a un amplificador de cuadratura, sensible a la fase y a la frecuencia, con el fin de separar de la señal de fondo la respuesta de la muestra que presenta una frecuencia coincidente con la frecuen-

cia de modulación. Esto se logra sintonizando el amplificador lock-in a la frecuencia y fase del chopper. Se hace incidir sobre la muestra la radiación del monocromador, registrando la longitud de onda y las lecturas correspondientes del amplificador lock-in DR y del milivoltímetro R , obteniéndose así el espectro ($I, DR/R$).

3.3. Técnica de crecimiento de epitaxia en fase líquida

La técnica de epitaxia en fase líquida se utiliza para la fabricación de películas semiconductoras sobre sustratos monocristalinos, a partir de soluciones líquidas sobresaturadas a altas temperaturas. El término epitaxial se define como la deposición de una capa monocristalina sobre un sustrato monocristalino, de tal modo que la estructura cristalina de la película sea una continuación de la estructura del sustrato (Nelson, 1963).

Los procesos epitaxiales se pueden clasificar en dos grandes grupos: homoepitaxial y heteroepitaxial. La homoepitaxia se refiere al proceso epitaxial en el cual el material de la película depositada es el mismo material que el del sustrato sobre el cual se deposita. Por el contrario, la heteroepitaxia se refiere al caso en el cual la capa depositada es de un material distinto al del sustrato. Ambos procesos son comunes, pero el más utilizado en la actualidad es el de heteroepitaxia, ya que normalmente lo que se busca es fabricar un nuevo material sobre sustratos comerciales, los cuales presentan condiciones cristalinas óptimas, requisito indispensable para un buen crecimiento epitaxial. Esta técnica se basa en que la solubilidad de un constituyente diluido en un solvente líquido, decrece cuando disminuye la temperatura; es por esto que el enfriamiento de una solución saturada conlleva a la aparición de la fase sólida en ésta. La técnica de EFL aprovecha ese fenómeno para colocar en contacto en ese momento la solución con el sustrato, y generar así una deposición del material en fase sólida sobre él. La fase sólida se adhiere al sustrato de manera ordenada, conservando las características cristalinas del mismo.

Para la fabricación de películas semiconductoras por la técnica de epitaxia en fase líquida, se hizo necesario implementar un sistema con características que permitan tener reproducibilidad de las condiciones del proceso, y que brinde la posibilidad de controlar a voluntad los parámetros de crecimiento. El sistema consta de un horno para elevar la temperatura y de un reactor de cuarzo dentro del cual está el bote de grafito donde fluye hidrógeno a través de él durante el crecimiento. Para tener un flujo de hidrógeno constante y controlado, se requiere un controlador de flujo de gases. Para garantizar un alto grado de pure-

za en el hidrógeno, se necesita un purificador con celda difusora hecha de paladio y plata. Por seguridad, es necesario monitorear las concentraciones de oxígeno en el hidrógeno, y evitar así que se tengan niveles peligrosos de O_2 por lo que se requiere un analizador de partes por millón de oxígeno en los gases utilizados. Para un correcto control de la temperatura, el horno cuenta con tres zonas de calentamiento independientes, es decir, tres resistencias para obtener un control exacto de la temperatura y un perfil de esta constante a lo largo del horno. Se hace necesario también un sistema de vacío para limpiar el sistema cuando se requiera, como en el caso en el cual se abre el reactor al medio ambiente. Se utiliza también un posicionador para colocar en contacto el sustrato con la solución a una velocidad constante y con una alta precisión.

4. Discusión y análisis de los resultados experimentales

4.1. Mediciones de fotoluminiscencia del CdTe monocristalino

Como punto de partida experimental para la caracterización de las películas de $Cd_{1-x}Zn_xTe$ mediante la técnica de fotoluminiscencia, se hizo un estudio de monocristales de CdTe no dopado. Considerando que se trata de uno de los componentes binarios de las películas estudiadas, el análisis del espectro del monocristal nos permite, por comparación, identificar algunas de las estructuras de los espectros de las películas pertenecientes al sistema Cd-A-Te, donde A es Zn o Mn. La identificación de defectos intrínsecos y sustitucionales es de gran importancia debido a las múltiples aplicaciones del CdTe en dispositivos optoelectrónicos, cuya eficiencia depende fuertemente de la calidad cristalina, siendo los defectos centros ópticamente activos. Así mismo, se requiere la identificación de las diferentes impurezas puesto que las propiedades ópticas y eléctricas son sensibles a ellas.

El monocristal de CdTe utilizado es una muestra comercial, en el cual la presencia de impurezas se debe a los materiales precursores y al proceso de crecimiento. Se tomaron espectros a diferentes temperaturas y con diferentes potencias de excitación en el rango electromagnético comprendido entre 1.5 y 1.7 eV, con el fin de identificar en las estructuras espectrales el tipo de transición asociada, utilizando el sistema descrito en 3.1.

En la figura 1 se muestran las diferentes regiones espectrales obtenidas a 12, 20 y 30 K. El pico señalado por la letra A corresponde a transiciones en las que intervienen excitones libres, excitones ligados a impurezas donadoras y excitones ligados a impurezas aceptoras; es decir, corresponde a la banda excitónica. Para bajas tem-

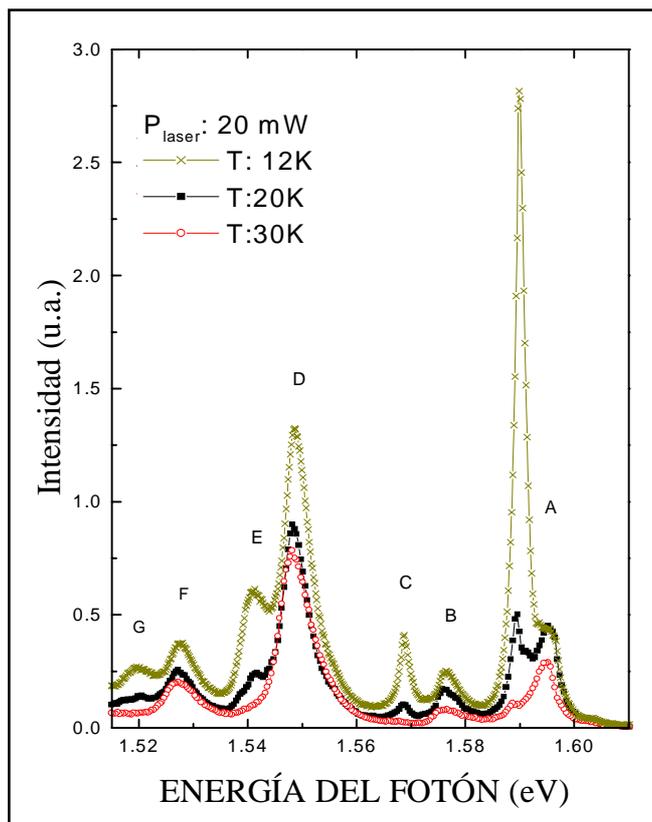


Figura 1. Espectros de fotoluminiscencia de una muestra monocristalina de CdTe tomados a tres temperaturas diferentes y a una potencia de excitación de 20 mW.

peraturas se sabe que los picos ubicados en el rango de energía de 1.591 – 1.595 eV se deben a transiciones de excitones ligados a donadores. Los picos marcados por las letras C, F y G son réplicas fonónicas de las transiciones (A_1° , X), (e, A) y (D, A) respectivamente y los picos B, D y E corresponden a las transiciones (h, D), (e, A) y (D, A). La forma de los picos B y D y su corrimiento con la temperatura, sugieren que estos picos son transiciones de portador libre a ligado. Debido a que el pico excitónico presenta un ancho a la altura media (FWHM) de tan sólo 2 meV a 12 K, se puede asegurar que la muestra estudiada tiene una alta calidad cristalina, presentando impurezas no intencionales que se evidencian en los picos asociados con transiciones ligadas (Feng *et al.*, 1988; Lee *et al.*, 1995; Soltani *et al.*, 1995).

4.2. Mediciones de fotoluminiscencia en películas delgadas de $Cd_{1-x}Zn_xTe$

Para las muestras de $Cd_{1-x}Zn_xTe$ se realizaron mediciones de fotoluminiscencia a diferentes potencias de excitación y diferentes temperaturas de medición. En la figura

2 se presentan los espectros de fotoluminiscencia para tres muestras con concentraciones de Zn de 0.13, 0.18 y 0.19 a 11K. Se observa que se trata de espectros muy anchos en los cuales no es posible hacer una clara identificación de los procesos de recombinación asociados con la emisión. Es importante anotar que en estas muestras, de acuerdo con los difractogramas de rayos X, se manifiesta una fuerte componente amorfa. Podemos atribuirle a la morfología de estas películas su emisión radiactiva, aunque no es posible relacionar esta emisión con energías de transición claramente identificables, ni nos permite proponer una dependencia de energías de transición con la composición del material ternario (Tirado, 1999; Chen, *et al.*, 1997; Seraphin *et al.*, 1996).

4.3. Mediciones de fotoluminiscencia en monocristales de $Cd_{1-x}Mn_xTe$

En la figura 3 se presenta los espectros de fotoluminiscencia de cristales de $Cd_{1-x}Mn_xTe$ obtenidos a 13 K. Por comparación con el espectro de CdTe monocristalino, en el cual se han identificado claramente los picos de emisión, es posible identificar la banda excitónica y la banda de defectos conocida en el CdTe como la banda 1.4. En los espectros de FL del compuesto ternario, aunque se observan definidas las bandas, éstas presentan menos estructura, significando que el pico de emisión debido a la recombinación del excitón libre está solapado a la emisión de excitón ligado a impurezas. El ensanchamiento de las bandas de emisión se atribuye al

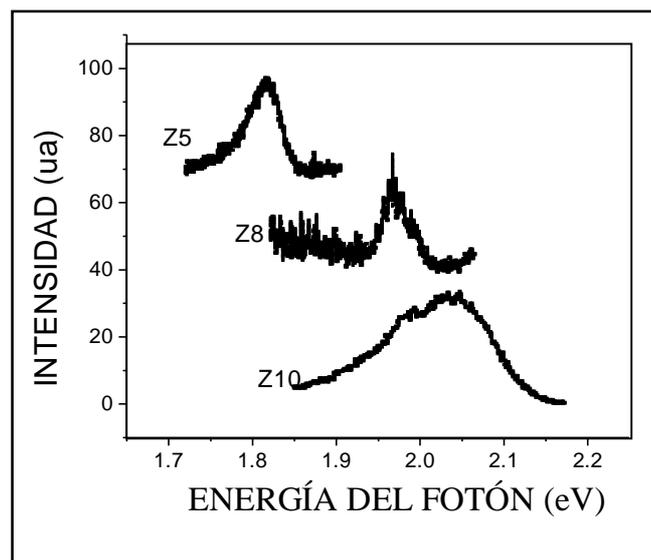


Figura 2. Espectros de fotoluminiscencia medidos a 11K, en muestras de $Cd_{1-x}Zn_xTe$ fabricadas a partir de blancos diferentes (serie 2).

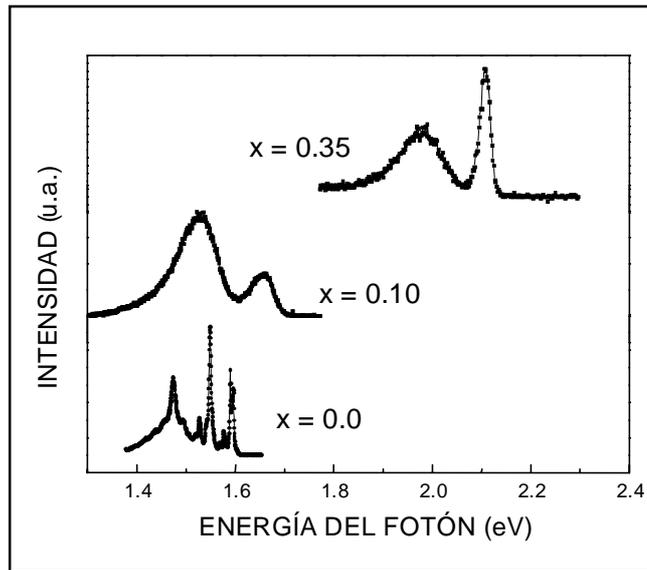


Figura 3. Espectros de fotoluminiscencia a 13 K de cristales de $\text{Cd}_{1-x}\text{Mn}_x\text{Te}$, para concentraciones nominales de Mn de 0.0, 0.10 y 0.35.

desorden debido a la incorporación del Mn al ocupar los sitios del Cd. Se observa también, que la posición de la banda excitónica aumenta en energía al aumentar la concentración de Mn y se puede asociar a la expresión propuesta por **André *et al.***, en 1997, acerca de la variación de la energía de la brecha con la concentración de Mn según la expresión: $E_g(x) = 1.606 + 1.592x$.

Es decir, en el espectro de la muestra con concentración nominal de 0.35 de fracción molar se observa un pico excitónico muy pronunciado y definido, y su posición corresponde a una emisión de 2.16 eV, valor muy cercano al calculado según la ecuación anterior para esa concentración. Cualitativamente podemos decir que son muestras de buena calidad cristalina, pues la emisión de la banda excitónica tiene una muy alta intensidad relativa, siendo esto un indicativo de una baja densidad de defectos.

Comparando estos resultados experimentales con los espectros obtenidos para $\text{Cd}_{1-x}\text{Zn}_x\text{Te}$, vemos que la diferencia en la forma de línea de los espectros corrobora lo observado en los difractogramas de rayos (**Soltani *et al.***, 1995), permitiendo afirmar de esta manera que la componente amorfa es la que domina la estructura de estas películas. Este hecho impide utilizar la técnica de fotoluminiscencia para determinar la energía de la banda prohibida, como sí es posible en los espectros de $\text{Cd}_{1-x}\text{Mn}_x\text{Te}$ por su buena calidad cristalina y alta definición de los picos de emisión. Como se observa en la figura 3, a medida que aumenta la concentración de

Mn, el pico de emisión excitónica se hace más ancho, siendo esto indicativo de la disminución de la calidad cristalina por un aumento en las impurezas o defectos, posiblemente debidos a la deformación del cristal por la presencia del Mn.

4.4. Mediciones de fotorreflectancia en películas delgadas de $\text{Cd}_{1-x}\text{Zn}_x\text{Te}$

En la figura 4 se presentan los espectros de fotorreflectancia para muestras con concentraciones molares de Zn entre 0 y 0.3. Se puede observar un corrimiento de la oscilación principal hacia más altas energías conforme aumenta la concentración de zinc. Para concentraciones pequeñas de x ($x < 0.12$), observamos que la forma de línea de los espectros está muy bien definida, y con un valor del parámetro fenomenológico de ensanchamiento bajo, lo que no ocurre para los espectros cuando las concentraciones de Zn son considerables ($x > 0.2$). Podemos decir, por comparación, que los procesos de dispersión aumentan con el aumento de la concentración de zinc. Realizando los ajustes de los espectros mediante un modelo (**Sánchez-Almazan *et al.***, 1996) para un punto tridimensional, en el régimen de campo bajo, se determi-

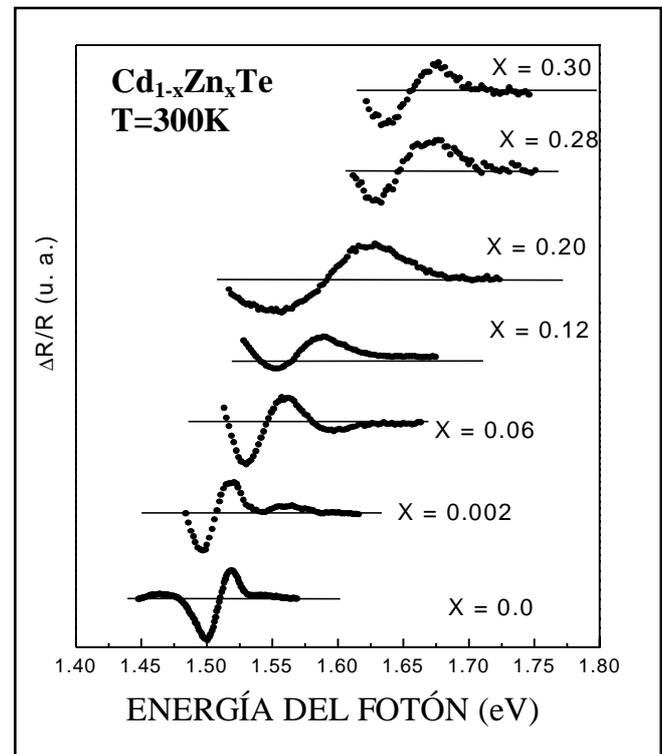


Figura 4. Espectros de fotorreflectancia en películas delgadas de $\text{Cd}_{1-x}\text{Zn}_x\text{Te}$.

naron las energías de transición. Mediante el ajuste al espectro del CdTe, se calculó el valor de la energía de la brecha obteniendo un resultado similar con el logrado por la técnica de fotoluminiscencia. En la figura 5 se presenta el ajuste realizado en una de las muestras de $Cd_{1-x}Zn_xTe$, mientras que en la tabla 1 se presentan los resultados de todos los ajustes realizados a los espectros de la figura 4.

4.5. Mediciones de fotoluminiscencia de GaAs dopadas con Ge ó Sn

En la figura 6 se presentan los espectros de fotoluminiscencia a diferentes temperaturas para el GaAs: Ge tipo p con una concentración de impureza de $1 \times 10^{16} \text{ cm}^{-3}$. A bajas temperaturas se puede notar un pico de más alta energía ubicado en 1.51 eV y correspondiente a las transiciones excitónicas y otro aproximadamente en 1.48 eV correspondiente a una transición banda de conducción a nivel aceptor (e, A). Estos dos picos están completamente

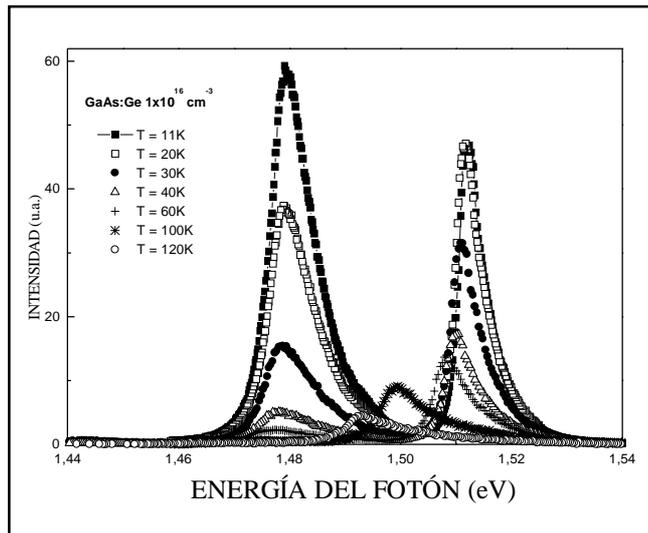


Figura 6. Espectro de fotoluminiscencia para al GaAs: Ge para una concentración de impureza y distintas temperaturas de la red.

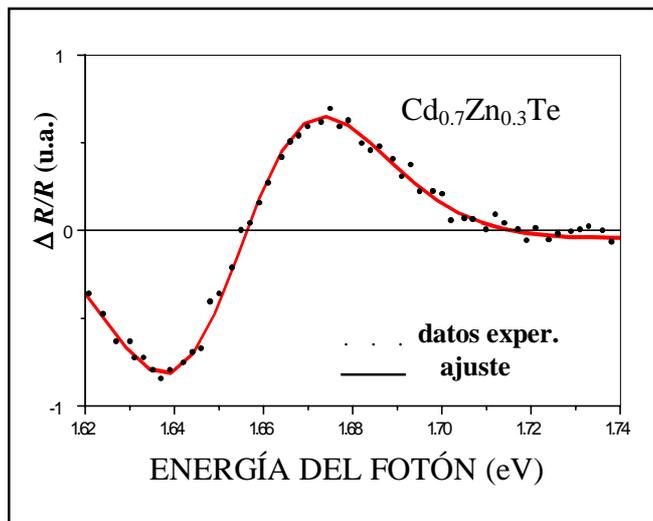


Figura 5. Ajuste al espectro obtenido por fotorreflectancia a temperatura ambiente para una película delgada de $Cd_{0.7}Zn_{0.3}Te$.

Tabla 1. Valores de la energía de la brecha fundamental obtenidos a partir de los ajustes de los espectros de fotorreflectancia para $Cd_{1-x}Zn_xTe$

Muestra	x	$E_g \pm 0.002$ (eV)
5T408	0.002	1.516
10T240	0.06	1.550
20T160	0.12	1.576
30T230	0.20	1.617
40T180	0.25	1.662
40T234	0.30	1.663

determinados en la literatura (Pavessi & Guzzi, 1994). El ancho del pico excitónico es menor de 10 meV indicando la calidad cristalina de la muestra. La ausencia de bandas comparables con los picos anteriores en la región menor de 1.44 eV corrobora la afirmación acerca de la calidad de la muestra. A medida que aumenta la temperatura de la red, ambos picos se desplazan hacia valores de menor energía como consecuencia de la disminución de la brecha fundamental.

La potencia del láser también influye sobre el tipo de transiciones. En la figura 7 se presentan los espectros de fotoluminiscencia para una muestra de GaAs: Sn tipo n a distintas potencias del láser y para una temperatura de 11 K. Como la muestra es tipo n, la transición de un electrón de un estado libre a uno ligado, que corresponde a la transición nivel donador a banda de valencia (D,h), se superpone con el pico excitónico y lo ensancha. Esto es debido a la energía de ionización del donador Sn que es de apenas 6 meV. Aparece también una banda aproximadamente en 1.49 eV la cual corresponde a dos transiciones solapadas: una (e,A) y otra (D,A). La existencia de la transición (e,A) es debida a que el Sn es anfotérico y por lo tanto también contribuye con aceptores. La (D,A) se presenta en la región de más baja energía de la banda. El incremento en la intensidad del láser produce un crecimiento en amplitud del pico de más alta energía pero sin cambiar posición. Por su parte, la banda crece muy poco en amplitud y sólo en la región de la transición (D,A) se presenta un ligero incremento. Esto también está determinado cla-

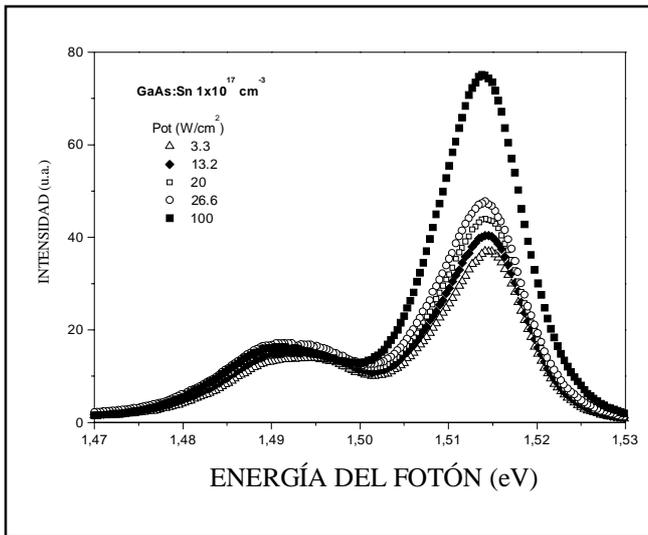


Figura 7. Espectros de fotoluminiscencia para una muestra de GaAs: Sn a distintas potencias de la excitación del láser y temperatura de 11 K.

ramente porque la población excitónica depende del producto np , mientras que las otras transiciones dependen de n o de p (Wicks *et al.*, 1981). Hasta aquí todas las características descritas para los espectros son plenamente conocidas. Pero se encontró que los espectros no eran los mismos cuando se tomaban en distintas regiones de las muestras. En las figuras 8, 9, se presentan las variaciones espaciales de los espectros, normalizadas al pico principal y tomados en 11 K, para las dos muestras mencionadas anteriormente.

Esta variación en los espectros podría ser asignada a una distribución inhomogénea de impurezas producto del proceso de crecimiento y debido a la diferencia en la longitud de difusión de las impurezas. El sistema de crecimiento por EFL de las películas, garantiza la homogeneidad de la distribución de las impurezas, lo cual fue corroborado por las publicaciones que se hicieron en la época recién crecidas las muestras y en las cuales no reportaron diferencia zonal de los espectros de FL (Torres-Delgado *et al.*, 1995; Torres-Delgado *et al.*, 1997).

Al hacerse un mapa de las muestras corriendo el punto del láser (0.5 mm^2) en un rectángulo central y dejando 1mm en cada lado para evitar los efectos de borde, se encontró que la inhomogeneidad no se debe a una distribución proveniente de la difusión de la impureza. Realizando un análisis de estos espectros normalizados (Fonthal, 2001) se puede concluir entonces que, debido a que la variación se presenta en las regiones de energías

afectadas por las impurezas, éstas se han agrupado en ciertas zonas provocando mayor concentración que en otros sitios, especialmente para el Ge.

4.6. Películas de GaInAsSb fabricadas por epitaxia en fase líquida

Se fabricaron películas a partir de tres soluciones líquidas con distinta concentración, rotuladas como M, AM y AS. La concentración de cada elemento en las distintas soluciones de crecimiento se muestra en la tabla 2.

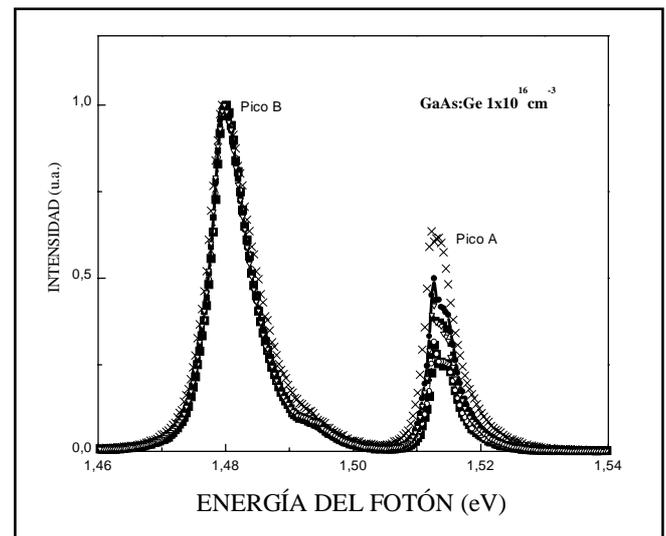


Figura 8. Espectros de fotoluminiscencia tomados en distintas regiones de la muestra para GaAs: Ge con concentración de $1 \times 10^{16} \text{ cm}^{-3}$ a 11K.

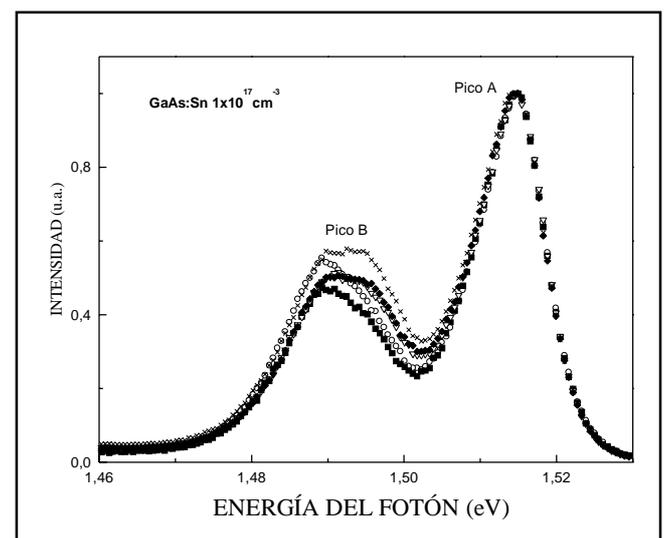


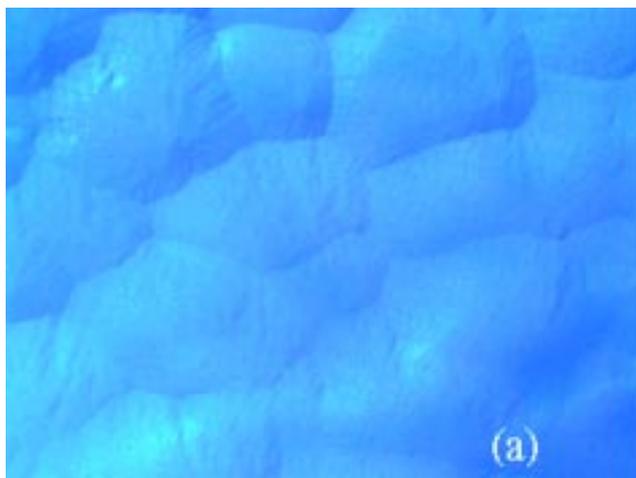
Figura 9. Espectros de fotoluminiscencia tomados en distintas regiones de las muestras GaAs: Sn con concentración de $1 \times 10^{17} \text{ cm}^{-3}$ a 11K.

Tabla 2. Composición de las tres soluciones de crecimiento utilizadas

Composición de la solución líquida (% molar)				
Solución	Ga	In	As	Sb
M	18.53	57.83	0.143	23.49
AM	18.53	57.83	0.154	23.48
AS	18.53	57.83	0.164	23.47

Las películas fabricadas presentan una buena morfología superficial, tal y como se aprecia en la figura 10. La buena morfología superficial de las películas es producto de parámetros apropiados de crecimiento, tales como el tratamiento químico de limpieza del sustrato, una correcta temperatura de contacto sustrato-solución y de una rampa de enfriamiento controlada con un valor determinado. La buena calidad morfológica de la película es muy importante, pues posibilita la fabricación de una nueva capa epitaxial sobre la existente, con el fin de crear heteroestructuras que puedan ser usadas en aplicaciones optoelectrónicas.

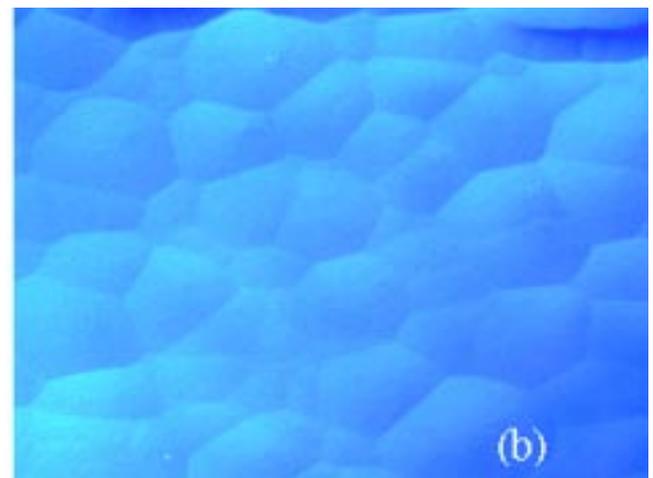
Los difractogramas de rayos X hechos a las películas, algunos de los cuales se muestran en la figura 11, revelan que las películas presentan coincidencia de red al GaSb, lo que era de esperarse pues el crecimiento de las películas corresponde a un proceso epitaxial. Los difractogramas muestran también que las películas tienen una buena calidad cristalina, lo que se deduce al medir el ancho del pico a la altura media. (FWHM) y observar que es muy estrecho, del orden de $2q = 0.07^\circ$, lo que garantiza una buena calidad cristalina.

**Tabla 3.** Estequiometría de algunas películas determinadas por EDS

Composición en el sólido (% molar)					
Muestra	Ga	In	As	Sb	Técnica
M51	39.89	8.05	9.35	42.72	EDS
M45	41.67	8.07	8.05	42.18	EDS
AM4	43.37	8.27	5.41	42.92	EDS
AS1	40.83	8.09	7.13	43.96	EDS
AS2	45.20	6.50	8.50	39.80	XPS
M46	45.00	7.00	7.30	41.00	XPS

La estequiometría de la película depende de los parámetros de crecimiento utilizados, esencialmente la concentración de la solución de crecimiento y la temperatura de contacto sustrato-solución. La estequiometría de algunas películas fue determinada mediante las técnicas de EDS (*Energy Dispersive Spectroscopy*) y XPS (*X-ray Photoelectron Spectroscopy*) (Segura, 2003). Los resultados obtenidos muestran que las películas corresponden al material cuaternario GaInAsSb, y los valores se ajustan a los esperados para los parámetros de crecimiento utilizados de acuerdo con la literatura. La tabla 3 resume los valores hallados para las distintas muestras analizadas.

Podemos concluir que con la realización de este trabajo, se han logrado implementar unas técnicas de caracterización óptica de materiales semiconductores que permiten determinar las propiedades físicas más importantes de este tipo de materiales, así como el montaje de una técnica de crecimiento para la fabricación de capas epitaxiales. En particular, se han llevado a cabo estudios

**Figura 10.** Microfotografías de la superficie de las muestras (a) M51 y (b) AS7 indicando una superficie homogénea.

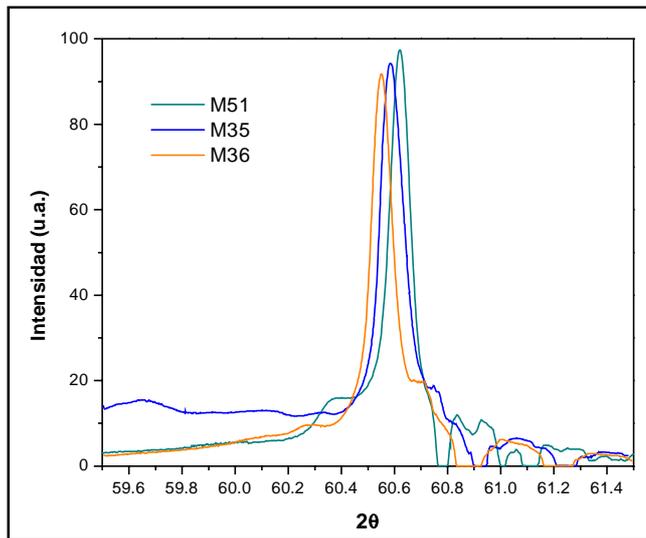


Figura 11. Región del difractograma de rayos X indicando la variación en la posición del plano [200] para las muestras M51, M35 y M36.

comparativos de películas ternarias del tipo $Cd_{1-x}A_xTe$ que han permitido determinar la calidad cristalina y encontrar una expresión teórica que describe en forma correcta la variación de la energía de la brecha prohibida en función de la temperatura (Tirado, 1999). Igualmente, del trabajo realizado con el GaAs para diferentes dopajes con Ge o Sn, se ha logrado obtener nueva información de estas películas cuando son sometidas a largos tiempos de almacenamiento (Fonthal, 2001). Y un aspecto muy importante, el haber logrado poner a tono un sistema de crecimiento de películas epitaxiales con una gran potencialidad en las aplicaciones optoelectrónicas de tipo comercial.

Agradecimientos

Quiero agradecer a todo el equipo de trabajo del Laboratorio de Optoelectrónica de la Universidad del Quindío por su valiosa colaboración y a Colciencias por el apoyo financiero a través de varios proyectos de Investigación que han permitido la creación de un gran Centro en el campo de la optoelectrónica en Colombia.

Bibliografía

- André, R. & Le Si Dang. 1997. Low-temperature refractive indices of $Cd_{1-x}Mn_xTe$ and $Cd_{1-y}Mg_yTe$, *J. Appl. Phys.* **82**: 5086.
- Bouhafs, B., Aorag, H., Ferhat, M., Zaoui, A., Certier, M. 1997. Theoretical analysis of disorder effects on electronic and optical properties in InGaAsP quaternary alloy, *J. Appl. Phys.* **82**: 4923.

- Chen, W., Wang, Z., Lin Z. & Lin, L. 1997. Thermoluminescence of ZnS nanoparticles, *Appl. Phys. Lett.* **70**: 1465.
- Cohen, M.L. & Chelikowsky, J.R. 1989. *Electronic Structure and Optical Properties of semiconductors*, edited by M. Ca, Springer Series in Solid-State Sciences **75** New York.
- Feng, Z.C., Burke, M.G. & Choyke, W.J. 1988. *Appl. Phys. Lett.* **53**: 128.
- Fonthal, G. 2001. Estudio de la Impurificación de Capas Epitaxiales de GaAs y AlGaAs en el rango de leve hasta fuerte dopaje, por medio de fotoluminiscencia y fotorreflectancia. Tesis Doctoral, Universidades del Quindío y del Valle.
- Godoy, A., Jiménez-Tejada, J.A., Palma, A. & Cartujo, P. 1997. Influence of the doping profile and deep level trap characteristics on generation-recombination noise, *J. Appl. Phys.* **82** (7): 3351.
- J. J. Hsieh. 1974. Thickness and surface morphology of GaAs LPE layers grown by supercooling, stepcooling, equilibrium-cooling and two-phase solution techniques, *J. Cryst. Growth*, **27**: 49-61.
- Lastras-Martínez, A., Balderas-Navarro, R.E., Lastras-Martínez, L.F. & Cantú Alejandro, P. 1999. Photoreflectance spectroscopy of CdTe(001) around E_1 and $E_1 + D_1$: Linear electro-optic spectrum, *J. Appl. Phys.* **86**: 2062.
- Lee, J., Giles, N.C., Rajavel, D. & Summers, C.J. 1995. Donor-acceptor pair luminescence involving the iodine A center in CdTe, *J. Appl. Phys.* **78**: 5669.
- M. Soltani, M. Certier, R. Evrard & E. Kartheuser. 1995. Photoluminescence of CdTe doped with arsenic and antimony acceptors, *J. Appl. Phys.* **78**: 5626.
- Nelson, H. 1963. Epitaxial growth from the liquid state and its application to the fabrication of tunnel and laser diodes, *RCA Rev.* **603**: 24.
- Pankove, J.I., 1971. *Optical processes in Semiconductors*, Prentice-Hall, Inc. New Jersey.
- Pavesi, L. & Guzzi, M. 1994. Photoluminescence of $Al_xGa_{1-x}As$ alloys, *J. Appl. Phys.* **75**: 4779.
- Perkowitz, S. 1993. *Optical Characterization of Semiconductors: Infrared, Raman and Photoluminescence Spectroscopy*, Academic Press London.
- Peters, M.G., Fahrenbruch, A.L. & Bube, R.H. 1988. Deposition and properties of zinc cadmium telluride films, *J. Vac. Sci. Technol. A* **6**: 3098.
- Sánchez-Almazan, F.G., Navarro-Contreras, H., Ramírez-Flores, G., Vidal, M.A., Zelaya-Ángel, O., Rodríguez, M.E. & Baquero, R. 1996. Temperature dependence of the band gap of $Cd_{1-x}Zn_xTe$ alloys of low zinc concentrations, *J. Appl. Phys.* **79**: 7713.
- Schuppler, S., Adler, D.L., Pfeiffer, L.N., West, K.W., Chaban, E.E. & Citrin, P.H. 1995. Identifying and quantifying point defects in semiconductors using x-ray-absorption spectroscopy: Silydoped GaAs, *Phys. Rev. B* **51** (16): 10527.
- Segura, J.A. 2003. Fabricación del material semiconductor $Ga_{1-x}In_xAs_ySb_{1-y}$ por la técnica de epitaxia en fase líquida. Trabajo de grado Ingeniería Electrónica. Universidad del Quindío.

- Seraphin, A.A., Ngiam S.T. & Kolenbrander, K.D.** 1996. Surface control of luminescence in silicon nanoparticles, *J. Appl. Phys.* **80**: 6429.
- Shim, K., Rabitz, H. & Dutta.** 2000. Band gap and lattice constant of $\text{Ga}_x\text{In}_{1-x}\text{As}_y\text{Sb}_{1-y}$, *P.*, *J. Appl. Phys.*, **88**: 7157.
- Suesawa, M., Kasuya, A., Nishina, Y. & Sumino, K.** 1991. Optical studies of heat-treated Si-doped GaAs bulk crystals, *J. Appl. Phys.* **69** (12): 1618.
- Tirado, L.** 1999. Fabricación y caracterización de películas delgadas semiconductoras de Cd_{1-x}Ax-Te. Tesis Doctoral. Universidades del Quindío y del Valle.
- Torres-Delgado, G., Castanedo-Pérez, R., Díaz-Arenciba, P., Mendoza-Álvarez, J.G., Orozco-Vilchis, J. L., Murillo-Lara, M & Serra-Jones.** 1995. Low temperature photoluminescence study in $\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}$ alloys in the indirect band gap region ($x \approx 0.4$), *A.*, *J. Appl. Phys.* **78**: 5090.
- Torres-Delgado, G., Mendoza-Álvarez, J.G, López-Vásquez, C. & Alejo-Armenta, C.,** 1997. Photoluminescence and photorefectance studies of defects in GaAs epitaxial layers grown by liquid phase epitaxy at different supercooling temperatures, *J. Vac. Sci. Technol.* **A15**: 971-975.
- Wang, C.A., Choi, H. K., Oakley, D.C. & Charache, G.W.** 1998. Recent progress in GaInAsSb thermophotovoltaics grown by organometallic vapor-phase epitaxy, *J. Cryst. Growth* **195**: 346.
- Wicks, G., Wang, W.I., Wood, C. E. C., Eatsman, L. F. & Rathbum, L.** 1981. Photoluminescence of $\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}$ grown by molecular beam epitaxy, *J. Appl. Phys.* **52**: 5792.
- Yu, P. & Cardona, M.** 1996. *Fundamentals of Semiconductors*, editorial Springer-Verlag, p. 311 Berlín.

FASES Y TRANSICIONES DE FASE EN MATERIA CONDENSADA

por

Rubén A. Vargas¹

Resumen

Vargas, R.A.: Fases y transiciones de fase en materia condensada. Rev. Acad. Colomb. Cienc. 27(104): 369-380, 2003. ISSN 0370-3908.

En este trabajo se presenta el enfoque de las transiciones de fase y fenómenos críticos para examinar la rica variedad de los procesos físicos que observamos en la materia condensada. Se muestra cómo el progreso logrado en las últimas décadas en estos aspectos, ha permitido establecer una ruta para comenzar a pensar sobre los tópicos básicos en la física de materiales. Junto con el interés por entender las transiciones de fase, enfatizo estos fenómenos en los electrolitos sólidos y las técnicas que he usado para estudiarlos. Presento resultados de mis medidas en conductividad σ y calor específico C_p de monocristales de $\text{NH}_4\text{Ag}_4\text{I}_3$ cerca de su transición de orden-desorden en 198.7 K. C_p diverge como $|T-T_c|^{-0.15}$ por ambos lados de T_c , lo que concuerda aproximadamente con las predicciones del modelo Ising. También encuentro que $d(\ln\sigma)/dT$ es proporcional a C_p lo que muestra que el orden de corto alcance determina ambas cantidades.

Palabras claves: Transiciones de fase, fenómenos críticos, conductores iónicos.

Abstract

I discuss in this paper the approach of phase transitions and critical phenomena to examine the rich variety of physical behavior observed in condensed matter. I show how it is only because of the last two decades' significant progress on these phenomena that it is known a route to start thinking about some of the basic aspects in materials physics. With my interest in understanding phase transitions, I emphasize here these phenomena in solid electrolytes physics and the tools I have used to studying them. I am presenting conductivity σ and specific heat C_p data of single-crystal $\text{NH}_4\text{Ag}_4\text{I}_4$ close to its order-disorder transition at 198.7 K. C_p diverges as $|T-T_c|^{-0.15}$ on both sides of T_c , which is close to that predicted by the Ising model. I also found that $d(\ln\sigma)/dT$ is proportional to C_p which shows that the short-range order determines both quantities.

Key words: Phase transitions, critical phenomena, solid ionic conductors.

1. Introducción

El estado de equilibrio de un cuerpo homogéneo se determina especificando dos de sus variables termodinámicas, por ejemplo el volumen V y la energía E . No hay, sin embargo, razón alguna para suponer que para toda pareja de valores dados (V, E), el estado del cuerpo en equilibrio térmico sea homogéneo. Puede suceder que, para determinados valores del volumen y la energía en equilibrio térmico, el cuerpo no sea homogéneo, sino que se separe en dos partes igualmente homogéneas que están en diferentes estados pero en contacto mutuo. Estados de la materia tales que puedan existir simultáneamente en equilibrio, pero separados en dos partes homogéneas y en contacto, se describen como diferentes fases.

Si la presión (P) y la temperatura (T) de una sustancia como el agua se grafican como coordenadas cartesianas, los puntos en los cuales es posible el equilibrio de dos fases, como líquido y vapor se ubican en una curva (la curva de equilibrio de fase o de presión de vapor del agua), y los puntos que se ubican a cualquier lado de la curva representarán estados homogéneos del agua, líquido o vapor. Análogamente, se obtiene para el agua la curva de equilibrio del hielo (sólido) y del líquido en el plano (P, T), conocida como la curva de fusión (ver Figura 1). Cuando el estado de una sustancia varía a lo largo de una línea que intercepta la curva de equilibrio, las fases se separan en el punto de intersección y la sustancia cambia entonces a otra fase (transición de fase). Desde el punto de vista termodinámico una transición de fase ocurre cuando hay una singularidad en la energía libre (E) o en una de sus derivadas. Lo que es con frecuencia visible en estos fenómenos es un cambio repentino en las propiedades de la sustancia. Los estados en los que están simultáneamente presentes tres fases (llamados puntos triples) en el diagrama (P, T) están representados por puntos aislados que son los puntos de intersección de las curvas de equilibrio de cada par de fases. En la figura 1, PT corresponde al punto triple del agua ($P_{tr} = 1.0$ At, $T_{tr} = 273.16$ K) donde las fases sólidas (hielo), líquida (agua) y vapor coexisten. El equilibrio de más de tres fases en la misma sustancia es obviamente imposible.

La curva de equilibrio de fase (en el plano (P, T)), puede terminar en cierto punto (ver figura 1 para la curva de coexistencia agua/vapor), llamado el punto crítico; la correspondiente temperatura y presión son la temperatura crítica (T_c) y presión crítica (P_c), que para el caso del agua es $P_c = 217$ atmósferas (At) y $T_c = 647$ grados Kelvin (K). En este punto la distinción de las dos fases que existen para $P < P_c$ y $T < T_c$, desaparece, o sea entre líquido y gas en el caso del agua, y podemos decir que en un punto crítico las dos

fases llegan a ser idénticas. A más altas presiones, $P > P_c$, hay una sola e indiferenciada fase fluida y no se puede evaporar por mucho que se aumente la temperatura por encima de T_c .

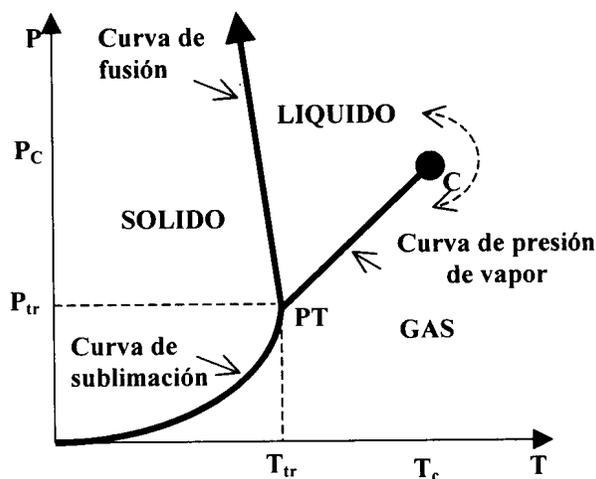


Figura 1. Diagrama de fase de un sustancia pura, P es la presión y T la temperatura. El punto PT es el punto triple y el punto C es el punto crítico. La curva de equilibrio Líquido-Gas termina en C mientras que la del Sólido-Líquido se extiende indefinidamente a altas presiones (según los límites actuales de presión). Todas las transiciones de fase son de primer orden excepto en C. Más allá de C es posible moverse continuamente (trayectoria punteada) del líquido al gas sin que ocurra ninguna transición.

Cuando hay un punto crítico, se puede efectuar una transición continua entre dos estados de la sustancia sin que llegue a separarse entre dos fases. Para lograr esto, el estado debe variarse a lo largo de una curva que pase alrededor del punto crítico y que en ninguna parte intercepte la curva de equilibrio. En este sentido, cuando hay un punto crítico, el concepto de fases diferentes es intrínsecamente arbitrario, y no es posible decir en algún caso qué estados tienen una fase y cuáles tienen dos. Estrictamente hablando, se puede decir que es un estado de dos fases solo cuando éstas existen simultáneamente y en contacto (esto es, en puntos que se ubican en la curva de equilibrio). Es claro que el punto crítico puede existir solamente para fases cuya diferencia es puramente cuantitativa, por ejemplo un líquido y un gas que se diferencian solamente en el grado de interacción entre las moléculas.

Cerca de un punto crítico de un fluido como el agua se presentan fluctuaciones en la densidad a todas las posibles escalas: las fluctuaciones toman la forma de gotas de líquido totalmente intercaladas en burbujas de gas, y hay tantas gotas como burbujas de todos los tamaños, desde moléculas individuales hasta cubrir el volumen del espécimen. Precisamente, en el punto crítico la escala de las

mas grandes fluctuaciones llega a ser infinita, pero las fluctuaciones mas pequeñas bajo ninguna forma desaparecen. Este comportamiento crítico no se observa solamente en fluidos. También lo presenta un material ferromagnético como el hierro (Fe) a la temperatura donde la magnetización espontánea se establece (1044 K), o una mezcla de dos líquidos a la temperatura donde llegan a mezclarse completamente, o una aleación metálica como Cobre/Zinc (50% Cu – 50% Zn) a la temperatura donde las dos clases de átomos metálicos adquieren una distribución ordenada (739 K). Otras transiciones de fases que presentan características similares son la transición de un metal al estado superconductor (en ausencia de campo magnético) y la del líquido helio al estado superfluido, la conformación de polímeros y el enlace entre las partículas elementales llamadas “quarks”. Una singular hipótesis que parece ser confirmada por el método del grupo de renormalización desarrollado por Kenneth G. Wilson [Wilson, 1979] en la década del 70 es que algunos de estos fenómenos, que aparentemente parecen ser distintos, a un nivel más profundo, son idénticos. Las técnicas del grupo de normalización han permitido cálculos del comportamiento de fases condensadas que fluctúan fuertemente. Por ejemplo, el comportamiento crítico de los fluidos, ferromagnetos, mezcla de líquidos y aleaciones metálicas pueden describirse todos por una sola teoría.

Los fenómenos observados cerca de un punto crítico son referidos en la literatura como fenómenos críticos. Una variable mecánica, que representa qué tanto difiere la configuración de los átomos en la fase menos simétrica de la que es mas simétrica como la magnetización M en el caso ferromagnético se asocia con el parámetro de orden porque es diferente de cero solamente en la fase ordenada. Casos interesantes son los parámetros de orden asociados con el punto crítico superfluido (el punto λ) del helio líquido y el de la superconductividad de muchos metales y aleaciones, así como de las cerámicas superconductoras en los que se toman como tales la amplitud cuántica de los átomos de helio y de los pares electrónicos (conocidos como pares de Cooper), respectivamente. En estos dos últimos casos el parámetro de orden es un número complejo. Mas ejemplos los presento en la tabla 1. Una característica fundamental del parámetro de orden es que, por debajo de la temperatura crítica (T_c), es una función decreciente de T y se anula en T_c . Para T muy cerca de T_c , los estudios experimentales muestran un comportamiento como la ley de potencia $(T_c - T)^\beta$ donde β es llamado exponente crítico, y típicamente tiene un valor en el rango 0.3 – 0.5 para fluidos y ferromagnetos. En años recientes el estudio de fenómenos críticos se ha centrado cada vez mas en los valores de un conjunto de índices llamados los exponentes del punto

crítico, que describen el comportamiento de varias cantidades termodinámicas de interés en un sistema material cerca del punto crítico. El exponente β definido arriba, para describir la variación del parámetro de orden con la temperatura cerca de la temperatura crítica (T_c), es un ejemplo típico. Así mismo, en la figura 2 se muestra el calor específico del Argón (Ar) medido a lo largo de la isócara crítica, $\rho = \rho_c$ ($\delta V = V_c$) [Yeomans, 1992].

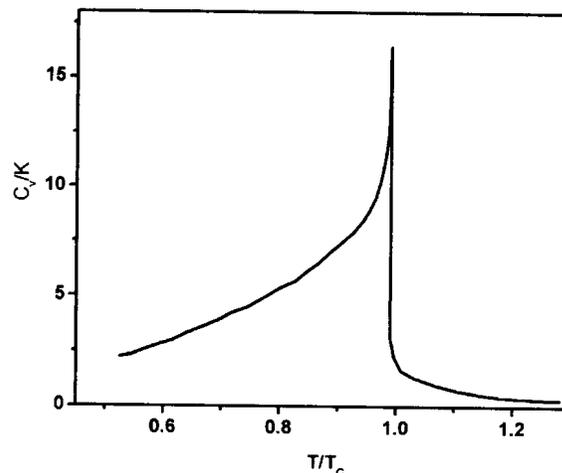


Figura 2. Calor específico a volumen constante del Ar medido sobre la isócara crítica $\rho = \rho_c$.

Se observa aquí una fuerte señal de criticalidad: el calor específico diverge en T_c . Esta singularidad en el calor específico es caracterizada por el exponente α , o sea que $C_V \sim |T - T_c|^{-\alpha}$. En sistemas magnéticos también se observan estos comportamientos singulares [Ortiz, Jurado & Vargas 1996].

Tabla 1: Ejemplos de puntos críticos y sus parámetros de orden

Punto Crítico	Parámetro de Orden	Ejemplo	T_c
Líquido-Gas	Densidad, $\rho_L - \rho_G$	H ₂ O	647.05
Ferromán	Magnetización, M	Fe	1044.0
Antiferromán	Magnetización de subred	FeF ₂	78.26
Aleación Binaria (Orden-Desorden)	Concentración atómica en subred	CuZn	739
Ferroeléctrico	Polarización	LiTaO ₃	938
Mezcla de dos fluidos	Concentración de un fluido	CCl ₄ -C ₇ F ₁₄	301.78
Superfluido (línea λ)	Amplitud del condensado $\psi/ s $	Líquido ⁴ He	1.8 – 2.1
Superconductividad	Amplitud del par electrónico $\psi/ s $	Pb	7.19

Resulta muy importante para la teoría de los fenómenos críticos entender a un nivel más fundamental la forma de las divergencias y el comportamiento singular de otras cantidades termodinámicas, diferentes a las señaladas arriba, cerca de un punto crítico. En este entendimiento han jugado un papel muy importante los exponentes críticos, los cuales se definen como sigue: sea

$$\varepsilon = \frac{T - T_c}{T_c} = \frac{T}{T_c} - 1 \quad (1)$$

una variable sin dimensión para medir la desviación en temperatura con respecto a la temperatura crítica T_c . Entonces, el exponente crítico asociado con una función $F(\varepsilon)$ es:

$$\lambda = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln|F(\varepsilon)|}{\ln|\varepsilon|} \quad (2)$$

Tabla 2. Definiciones de los exponentes críticos más usados para un sistema magnético.

Calor específico a campo cero	$CH \sim \varepsilon ^{-\alpha}$
Magnetización a campo cero	$M \sim (-\varepsilon)^\beta$
Susceptibilidad Isotérmica a campo cero	$\chi T \sim \varepsilon ^{-\gamma}$
Isoterma crítica ($\varepsilon = 0$)	$H \sim M ^\delta \text{sgn}(M)$
Longitud de correlación	$\xi \sim \varepsilon ^{-\nu}$
Función de correlación par en T_c	$G(r) \approx \frac{1}{r^{d-2+\eta}}$

Tabla 3. Definiciones de los exponentes críticos más usados para un sistema de fluidos

Calor específico a volumen constante V_c	$C_V \sim \varepsilon ^{-\alpha}$
Diferencia de densidad líquido - gas	$\rho_L - \rho_G \sim (-\varepsilon)^\beta$
Compresibilidad isotérmica	$K_T \sim \varepsilon ^{-\gamma}$
Isoterma crítica ($\varepsilon = 0$)	$P - P_c \sim (\rho_L - \rho_G)^\delta \text{sgn}(\rho_L - \rho_G)$
Longitud de correlación	$\xi \sim \varepsilon ^{-\nu}$
Longitud de correlación par en T_c	$G(r) \approx \frac{1}{r^{d-2+\eta}}$

Uno podría, con suficiente razón, preguntarse por qué ponerle tanto énfasis a un parámetro como el exponente crítico ya que contiene menos información que una forma funcional completa de la cantidad termodinámica en cuestión. La respuesta parece estar en el hecho experimental

o, como es más usualmente escrito,

$$F(\varepsilon) \approx |\varepsilon|^\lambda \quad (3)$$

El signo \approx solo indica el comportamiento asintótico de la forma $F(\varepsilon)$ cuando ε tiende a cero.

Las definiciones de exponentes críticos usadas más frecuentemente en la literatura para los sistemas de fluidos y magnéticos los presento en las tabla 2 y 3, respectivamente. En esta relación he supuesto que los exponentes críticos asociados con una determinada variable termodinámica son idénticos si el límite $T \rightarrow T_c$ se hace por encima o por debajo de T_c . Trabajos iniciales basados en métodos numéricos o por series sugieren que esto es así, pero fue solo con el advenimiento del grupo de re normalización que se demostró de una forma muy convincente esta hipótesis de escala.

de que suficientemente cerca punto crítico el comportamiento de los términos que más fuertemente varían en su vecindad son los que predominan y merecen por lo tanto evaluarse. Por consiguiente, los datos experimentales correspondientes a las parejas F versus ε se

grafican en la configuración Log-Log, porque estos gráficos muestran comportamientos lineales suficientemente cerca del punto crítico. En consecuencia, el exponente crítico de la cantidad termodinámica correspondiente es fácilmente determinado por la pendiente de la recta que ajusta a las parejas de datos. Además, los exponentes críticos han ganado mucha importancia porque muestran de una forma simple las características de universalidad observadas en los diferentes sistemas materiales como las que considero a continuación.

2. Universalidad

Los valores de los exponentes críticos han llegado a ser mucho más relevantes que la misma temperatura crítica (T_c) que se asocia con los fenómenos de criticalidad en un sistema material en particular. Resulta que, mientras T_c depende sensiblemente de los detalles con que ocurren las interacciones entre los constituyentes atómicos de un sistema, los exponentes críticos son en alto grado universales puesto que dependen solo de unos pocos parámetros fundamentales. Para modelos con interacciones de corto alcance, estos parámetros son la dimensión del espacio (d) donde ocurren las interacciones y la dimensión del parámetro de orden (n). Todos los sistemas que tengan los mismos valores para d y n exhiben el mismo comportamiento crítico y tienen los mismos valores de sus exponentes críticos. Una evidencia sorprendente para esta característica la suministra el gráfico construido ya hace algún tiempo por Guggenheim [Yeomans, 1962] mostrado en la figura 3. Aquí se grafica en unidades reducidas T/T_c versus ρ/ρ_c , para 8 diferentes fluidos, la curva de coexistencia líquido-gas. Cerca del punto crítico (y en realidad, por una inesperada coincidencia, también lejos de él) todos los datos caen sobre la misma curva que puede describirse con el mismo exponente β , que en el caso de la línea continua señalada en el gráfico corresponde a $\beta = 1/3$.

La dimensión del espacio d es alguna veces difícil de determinar, pero la dimensión del parámetro de orden n requiere consideraciones más cuidadosas. En sistemas magnéticos, donde el parámetro de orden es la magnetización, n es el número de componentes necesarios para definir el vector momento magnético. El vector de un momento de Ising puede orientarse solamente en un solo eje, y por lo tanto tiene un componente, $n=1$. Un vector de momento magnético que puede apuntar en cualquier dirección en un plano tiene 2 componentes, $n=2$, y si puede apuntar en cualquier dirección del espacio tiene 3 componentes, $n=3$.

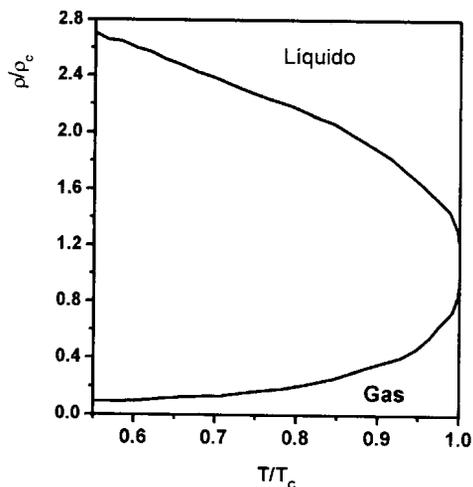


Figura 3. Curva de coexistencia líquido-gas en el plano pT en términos de las variables reducidas ρ/ρ_c vs. T/T_c . La curva sólida corresponde al ajuste a una ecuación cúbica de los datos correspondientes a 8 diferentes fluidos (Ne, Ar, Kr, Xe, N₂, O₂, CO, CH₄). En consecuencia, corresponde a un exponente crítico para el parámetro de orden $\beta = 1/3$

El modelo Ising ha ido desarrollado para sistemas físicos tridimensionales y parámetros de orden cuya simetría puede especificarse por un solo componente ($d=3$, $n=1$). Los fluidos ordinarios también pertenecen a la misma clase universal: el espacio donde los fluidos existen tienen obviamente 3 dimensiones y el parámetro de orden (la diferencia en densidad entre la fase líquida y vapor) es una cantidad que tiene solo una magnitud, o sea $n=1$. Una evidencia experimental de universalidad resulta al comparar el anterior valor de $\beta = 1/3$ suministrados por los fluidos considerados en la figura 3 con los obtenidos por las transiciones de fase en sistemas magnéticos con anisotropía uniaxial ($n=1$) en el espacio de los momentos magnéticos ($d=3$). Un ejemplo típico es la aleación MnF₂ [Heller & Benedeck, 1962] cuyo $\beta = 0.335$ (5), donde el número entre paréntesis indica la incertidumbre en la medida en la cifra decimal final.

Algunos otros sistemas físicos son miembros de esta clase, $d=3$, $n=1$. Una mezcla de 2 líquidos como el aceite y el agua exhiben comportamientos críticos cerca de la temperatura donde los líquidos componentes llegan a mezclarse completamente entre sí, lo cual ocurre a una temperatura llamada el punto consoluta. A temperaturas por debajo de este punto la mezcla se separa en dos fases, y el parámetro de orden se define como la diferencia en concentración entre la 2 fases, lo cual es otra cantidad que puede expresarse como un solo número ($n = 1$). Aleaciones tales como el latón (50%Cu-50% Zn) tienen una transición entre una fase ordenada, donde los átomos de los 2 metales ocupan alternativamente sitios en una red regular y una fase

desordenada, donde la distribución es menos uniforme. El parámetro de orden en este sistema es nuevamente la diferencia de concentración, de tal forma que $n=1$. Así, por ejemplo, para la separación de fases en la mezcla de los fluidos $\text{CCl}_4 + \text{C}_7\text{F}_{14}$, el resultado experimental [Thompson & Rice, 1964] es $\beta = 0.33(2)$.y para el latón el resultado reportado en la referencia [Als-Nielsen, 1976] es $\beta = 0.305(5)$.

Otras clases de universalidad tienen valores de d y n cuya interpretación es menos obvia. El caso $d = 4$ es de interés en la física de las partículas elementales, donde una de las dimensiones espaciales corresponde al eje del

tiempo. Otro caso discutido en la literatura es el de una red teórica de momentos magnéticos llamado el modelo esférico, donde un momento individual puede tener cualquier magnitud y solamente el total de todos los momentos magnéticos está restringido con lo cual n es efectivamente infinito.

En la tabla 4 relaciono algunas clases de universalidad con los respectivos modelos que lo describen, así como una explícita descripción de la simetría del parámetro de orden y los correspondientes ejemplos físicos. En la tabla 5 relaciono algunos valores de los exponentes críticos suministrados por los modelos correspondientes.

Tabla 4: Hipótesis de universalidad. Establece que diversos sistemas físicos se comportan idénticamente cerca de sus puntos críticos. En la mayor parte de los casos los únicos factores que determinan las propiedades físicas son la dimensionalidad del espacio, d , y la dimensionalidad del parámetro de orden, n . La mayor parte de los sistemas con los mismos valores de d y n son miembros de la misma clase de universalidad y comparten los mismos exponentes críticos.

Clase de Universalidad		Modelo Teórico	Sistema Físico
d=2	n = 1	Modelo Ising en 2 dimensiones	Películas absorbidas Ej. H en Fe
	n = 2	Modelo XY en 2 dimensiones	Películas de He-4
	n = 3	Modelo Heisenberg en 2 dimensiones	
d > 2	n = ∞	Modelo esférico	Ninguno
d = 3	n = 1	Modelo Ising en 3 dimensiones	<ul style="list-style-type: none"> • Ferromagneto uniaxial fluido cerca de un punto crítico. • Mezcla de 2 líquidos cerca del punto solución. • Aleación cerca de la transición orden – desorden.
	n = 2	Modelo XY en 3 dimensiones	Ferromagneto planar Helio-4 cerca de la transición superfluida
	n = 3	Modelo Heisenberg en 3 dimensiones	Ferromagneto isotrópico
d = 4	n = 32	Cromodinámica Cuántica	“quarks” empaquetados en protones, neutrones, etc.

Tabla 5: Valores de los exponentes críticos suministrados por varios de los modelos relacionados el la Tabla 4.

Clase de Universalidad	α	β	γ	δ	ν	η
2 - d Ising (n = 1)	0 (log)	1/8	7/4	15	1	1/4
3 - d Ising (n = 1)	0.10	0.33	1.24	4.8	0.63	0.04
3 - d XY (n = 2)	0.10	0.34	1.3	4.8	0.66	0.04
3 - d Heisenberg (n = 3)	-0.12	0.36	1.39	4.8	0.71	0.04
Campo medio	0 (disc)	1/2	1.0	3	1/2	0

Los modelos clásico de campo promedio, en los que la interacción de un constituyente molecular del sistema con el resto se promedia y se considera de igual intensidad, y en los que se usan parámetros de orden escalares en un espacio de tres dimensiones ($d=3$) predicen, por ejemplo, valores para $\beta = 1/2$. Sin embargo, modelos más realistas, como el modelo de Ising en $d = 3$, que considera solo interacciones entre los constituyentes moleculares vecinos mas próximos, que aunque no ha sido resuelto exactamente, valores numéricos estimados de los exponentes críticos son muy precisos y suministran una prueba contundente de universalidad. Así, por ejemplo, para las redes cristalinas con celdas unitarias de cúbica simple (sc), cúbica centrada en el cuerpo (bcc) y cúbica centrada en las caras (fcc) en las que el parámetro $K_c = k_B T_c / J = 0.2216, 0.1574$ y 0.1021 , respectivamente (aquí J es la magnitud de la energía de interacción de intercambio entre una pareja de constituyente moleculares vecinos mas próximos y k_B es la constante de Boltzmann), el valor de β es el mismo, o sea 0.327 , con algunos argumentos acerca del valor de la última cifra decimal [Lin & Fisher, 1989]. (Este modelo lo discutiré con algún detalle mas adelante). Estos resultados ilustran con suficiente claridad el poder que tiene el uso de modelos simples para describir los fenómenos de criticalidad observados en muchos sistemas materiales. Si uno se asegura que está trabajando en la dimensión espacial correcta y que la simetría del parámetro de orden está correctamente representado por un modelo, entonces puede usarse ese modelo para obtener los exponentes críticos para todos los sistemas dentro de su clase universal definida por estas dos características fundamentales. Al respecto, tengo que resaltar, que es mucho más práctico estudiar el modelo de Ising que el complicado Hamiltoniano que describe todas las interacciones de un fluido o de un magneto.

Las ideas de universalidad en los fenómenos críticos han arrojado mucha luz en la elaboración de las teorías que explican sus propiedades. Es usual que para modelar un sistema físico se tome la ruta de incluir todas la complicadas interacciones entre sus constituyentes

atómicos y tratar de obtener una predicción cuantitativa de su comportamiento resolviendo numéricamente la ecuación de Schödinger. Una ruta alterna, es escribir el modelo mas simple posible que incluya también la física esencial del problema y que prometa una solución analítica o numérica precisa. El propósito central de este último enfoque es estudiar el comportamiento universal o ganar un entendimiento cualitativo de la física que gobierna toda una clase dada de materiales. En este último enfoque la formulación de los modelos para estudiar los fenómenos críticos se hace mediante la Mecánica Estadística. A pesar de la aparente simplicidad de los modelos, ellos muestran una rica estructura matemática y son en general difíciles, y con frecuencia, imposibles de remover exactamente. Aún mas, y quizás sorpresivamente a primera vista, suministran válidas y útiles representaciones de los resultados experimentales.

Un ejemplo típico de un modelo microscópico aplicable a cualquier sistema de muchos constituyentes que interactúan entre sí pero con 2 estados accesibles por cada uno de ellos, es el denominado modelo de Ising que mencioné arriba. En este modelo, en cada sitio de red i uno asocia una variable mecánica que puede tomar dos valores diferentes, $S_i = +1$ ó -1 . El Hamiltoniano de interacción del sistema es

$$H = -J \sum_{\langle ij \rangle} S_i S_j - H \sum_i S_i \quad (4)$$

donde $\langle ij \rangle$ denota una suma sobre los valores de las variables de dos sitios vecinos mas próximos, J es la energía de intercambio entre ellos que se asume constante para todas las parejas: valores positivos de J favorecen iguales valores $(+1,+1)$ o $(-1,-1)$ par cada pareja, mientras que J negativos favorecen valore opuestos $(+1,-1)$ o $(-1,+1)$. El último término de la Ec. (4) corresponde a la interacción con un campo externo H . Par el caso de un sistema magnético cuyo momento magnético localizado en cada sito de red i es $1/2$, su variable clásica de momento magnético S_i

toma los valores ± 1 y el último término de la Ec. (4) corresponde a la interacción de cada momento con el campo magnético externo.

El modelo Ising en dos dimensiones ($d=2$) en campo cero ($H=0$) fue resuelto exactamente por Onsager en 1944, prediciendo un transición de fase con una temperatura T_c . Extensiones posteriores a este trabajo pionero han conducido a que actualmente se conozcan todos los exponentes críticos para $d = 2$ (ver tabla 5). El modelo Ising para $d = 2$ y $H \neq 0$ y el modelo para $d = 3$, inclusive para $H = 0$, permanecen actualmente sin resolver exactamente, aunque sus propiedades son conocidas con suficiente precisión a través de trabajos numéricos (ver tabla 5).

El modelo Ising es ampliamente aplicable a otros sistemas como en las transiciones de orden-desorden en sistemas binarios y en el modelo de red de gas. El caso típico de un sistema binario es el latón (50% Cu-50%Zn) que contiene igual número de átomos de cobre y de zinc que se ubican en los sitios de una red cúbica centrada en el cuerpo (bcc). A altas temperaturas cada sitio de red ocupado al azar por un átomo de cobre o de zinc, exhibiéndose una estructura desordenada como de muestra en la primera figura 4. Enfatizo que el desorden es sustitucional (los átomos ocupan sus sitios de red al azar) y no topológico (o sea que la red cristalina permanece, contrario al caso de un líquido). Cuando la temperatura se baja, se presenta en el material una transición de fase en $T_c = 739$ K la cual es continua a un estado ordenado donde cada átomo prefiere ocupar una de las dos subredes cúbicas simples (sc) que forman la red bcc (ver segunda figura 4). En este caso el Hamiltoniano (Ec. 4) podemos asignarles las variables:

$S_i = 1$ si el sitio (i) es ocupado por un átomo de Cu

$S_i = -1$ si el sitio (i) es ocupado por un átomo de Zn

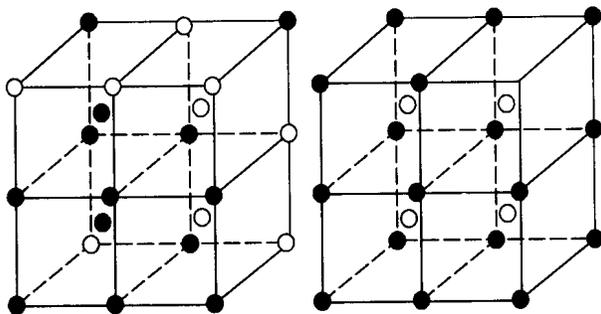


Figura 4. Cambio posicional del los átomos de Cu (●) y de Zn (○) a través de la transición de fase en el Latón a $T_c = 739$ K.

Definiendo J_{Cu-Cu} , J_{Zn-Zn} y J_{Cu-Zn} como la interacción entre las correspondientes parejas de átomos el Hamiltoniano llega a ser

$$H = -J \sum_{\langle ij \rangle} S_i S_j + C \quad (5)$$

donde $J = \frac{1}{4} (J_{Cu-Cu} + J_{Zn-Zn} - 2 J_{Cu-Zn})$ y C es un término independiente de S , llegándose por lo tanto a un Hamiltoniano de Ising de spin $\frac{1}{2}$ y próximos vecinos con una red bcc a campo cero. Los valores experimentales para los exponentes críticos $\beta = 0.305 + 0.005$ y $\gamma = 1.24 + 0.015$ [Als-Nielsen, 1976] que debe compararse con los mejores estimados que hasta el presente se han hecho del modelo Ising en 3-dimensiones que arrojan $\beta = 0.33$ y $\gamma \cong 1.24$. (ver tabla 5). La discrepancia en β se piensa que resulta de la expansión térmica de la red que afecta la dependencia en la temperatura del parámetro de orden.

En los modelos de red de gas cada sitio (i) puede o bien ser ocupado por un átomo o estar vacío. Una variable $t_i = 1.0$ se usa para representar un sitio ocupado o desocupado, respectivamente: el Hamiltoniano es

$$H = -J_L \sum_{\langle ij \rangle} t_i t_j - \mu_L \sum_i t_i \quad (6)$$

donde J_L es la interacción entre próximos vecinos que favorece el que estos sitios estén ocupados, μ_L es un potencial químico que controla el número de átomos. Como t_i es una variable de dos estados debe ser posible transformarla a una variable de espín, $S_i = \pm 1$ usando

$$t_i = \frac{1 - S_i}{2} \quad (7)$$

Sustituyendo la ecuación (7) en (6) se restituye el usual Hamiltoniano de Ising para espín $\frac{1}{2}$ con el campo relacionado al potencial químico.

Un sistema que es bien modelado por una red de gas y que también ilustra la posibilidad de realizar ejemplos experimentales del modelo de Ising en dos dimensiones es del hidrogeno absorbido en la superficie del hierro en la dirección cristalográfica [110]. [Yeomans 1992.]

Es importante que resalte que los valores de los exponentes críticos convergen hacia los valores previstos por los modelos clásicos de campo medio a medida que la dimensión d del espacio aumenta. En estos últimos modelos (como el de van der Waals para fluidos, el de Weiss para sistemas magnéticos uniaxiales o el de Landau para sistemas físicos con $d = 3$ y $n = 1$) la interacción de una partícula con el resto se promedia y se considera de igual

intensidad. En otras palabras, en estos modelos clásicos la suposición fundamental es que la fuerza en cada sitio de red es influenciada por las condiciones en muchos otros sitios. Ahora bien como el número de vecinos más próximos a un sitio determinado de una red aumenta con la dimensión del espacio, se espera que al crecer d la situación física se acerque cada vez más a la hipótesis que está implícita en la teoría de campo medio. Permanece, sin embargo en el misterio, porque en todos los modelos no clásicos la dimensión espacial $d = 4$ marca el límite al partir del cual los valores de los exponentes obtenidos son los mismos a los suministrados por las teorías de campo medio.

3. Electrolitos sólidos o conductores superiónicos

Electrolitos sólidos o conductores superiónicos son sólidos iónicos que exhiben una fase de alta conductividad eléctrica por debajo de sus puntos de fusión y en los cuales, para algunos casos, la conductividad iónica es comparable a la de los electrolitos líquidos ($\sim 1.0 \text{ } (\Omega \text{ cm})^{-1}$). Los electrolitos sólidos han recibido considerable atención de los físicos de la materia condensada por presentar nuevos procesos de difusión iónica en estado sólido y por su aplicación avanzada en electroquímica, principalmente en procesos de conversión entre energía química y eléctrica en dispositivos como baterías, sensores, condensadores y celdas de combustible [Agrawal & Grupta, 1999]. El éxito de estas aplicaciones tecnológicas dependerá de la disponibilidad de materiales con las propiedades físicas y químicas apropiadas, las cuales se han vislumbrado en los últimos años en algunos materiales iónicos sólidos. Además de los sistemas iónicos basados en combinaciones de sales inorgánicas de metales alcalinos, principalmente en sales de litio, muchos investigadores del estado sólido iónico han dirigido su atención en desarrollar una nueva generación de electrolitos con alta conductividad iónica (mejores que $10^{-4} \text{ } (\Omega \text{ cm})^{-1}$ para aplicaciones tecnológicas) en un amplio rango de temperatura incluyendo la del ambiente (25°C), basados en materiales poliméricos amorfos capaces de formar complejos con sales inorgánicas y promover la movilidad de una o varias especies iónicas en la matriz polimérica [Vargas, et al, 2000-2001].

Mis investigaciones en estos materiales apuntan a identificar mecanismos básicos de movilidad iónica en nuevos electrolitos sólidos que permitan la formación de membranas con alta conductancia (mejor que $10^{-1} \text{ S por cm}^2$ de electrodo, donde S se refiere a siemens la cual es igual a 1 ohm^{-1}), y como tal serán no sólo de valor fundamental sino también de valor práctico en vista de potenciales aplicaciones de estos materiales.

Una relación general para la conductividad eléctrica en cualquier medio es

$$\sigma = \sum_i n_i z_i e_o \mu_i \quad (8)$$

donde n_i , indica el número de transportadores por unidad de volumen, μ_i la movilidad, z_i , es la valencia de los transportadores de carga y e_o es la carga elemental; la sumatoria abarca todos los transportadores de carga i . Esto es, el sistema físico deberá promover un alto grado de iones desde sus sitios de red de tal forma que el número de portadores de carga sea grande y al mismo tiempo facilitar el transporte de ellos. (alta movilidad). La naturaleza exacta de las especies conductoras, su nivel de ionización, su interacción con el resto de estructura atómica, permanecen como preguntas que retan a los investigadores de estos materiales.

Experimentalmente se observan comportamientos más bien simples de la conductividad como función de la temperatura en electrolitos homogéneos y conteniendo iones univalentes, cuando los datos de conductividad se grafican como $\log \sigma$ vs. $1/T$, llamado gráfico de Arrhenius. En este caso, se obtienen comportamientos que pueden ajustarse a la teoría clásica de Arrhenius que predice el siguiente comportamiento para la conductividad

$$\sigma(T) = \sigma_0 \exp \left[- \frac{E_A}{K_B T} \right] \quad (9)$$

donde E_A es la energía de activación usual de los procesos de conducción, K_B es la constante de Boltzmann, σ_0 depende de T como A/T y es proporcional a la concentración de portadores.

Al analizar los datos experimentales disponibles sobre las propiedades termodinámicas y de transporte de estos materiales, principalmente al comparar sus calores específicos y conductividades como función de la temperatura, se ha encontrado que la aparición de fases sólidas de alta conductividad iónica están precedidas de transiciones de fase bien marcadas que generalmente tienen comportamientos similares a los que exhiben otros materiales cerca de sus regiones críticas que discutí anteriormente. En estas transiciones la conductividad varía suavemente, aunque la energía de activación para la conducción iónica parece cambiar. El calor específico muestra una divergencia como una ley de potencia característica de las transiciones en un punto crítico. Estas transiciones resultan principalmente del desorden en los iones conductores, y en algunos casos, como en el RbAg_4I_5 , se observa un ligero cambio en la estructura cristalina de la

subred complementaria no conductora desde una baja a una alta simetría cristalina.

Trabajos iniciales en el RbAg_4I_5 [Lederman et al, 1976] demostraron que su transición de fase en 209 K es del tipo orden-desorden cuyo calor específico y parámetro de orden tienen valores en sus respectivos exponentes críticos iguales a

$$\alpha = 0.14 \text{ (2) y } \beta = 0.36 \text{ (3),}$$

los cuales son muy cercanos a los previstos por el modelo de Ising ($d = 3, n = 1$) (ver tabla 4). El exponente crítico del parámetro de orden fue calculado de un modelo que incluye el acoplamiento del sitio ocupado por el ión móvil Ag^+ y la distorsión del de la red cristalina que lo rodea, con el propósito de explicar el aumento de la birrefringencia del material a medida que la temperatura se reduce a través de T_c . Este modelo predice una dependencia lineal de la birrefringencia con el parámetro de orden.

Mis investigaciones en estos sistemas iónicos han tenido que ver con el papel que juega el desorden de los iones móviles en la conducción de varios materiales basados en el AgI a través del estudio de sus propiedades termodinámicas y de transporte. Mediante medidas de alta resolución hechas simultáneamente del calor específico y de la derivada con respecto a la temperatura de la conductividad de estos materiales cerca de sus transiciones de fase he establecido relaciones cuantitativas entre estas cantidades que reflejan la naturaleza de la movilidad iónica cerca de una transición de fase que muestra comportamientos críticos.

4. Métodos experimentales

Calorimetría de temperatura modulada. Esta técnica ha ido desarrollada en nuestro laboratorio dentro de un programa de investigación que adelantamos en la Universidad del Valle [Vargas & Sánchez 1985; Jurado, Ortiz & Vargas 1997]. Hemos usado el resultado termodinámico de que bajo condiciones físicas apropiadas cuando una muestra absorbe cierta cantidad de calor periódicamente a una temperatura dada, se induce una oscilación en la temperatura cuya amplitud está relacionada inversamente con el calor específico. El sistema experimental, con todos los detalles técnicos de preparación de la muestra, su montaje, así como de adquisición y procesamiento de datos los describo en la referencia anterior.

La misma técnica de temperatura modulada la he usado para medir simultáneamente otras cantidades físicas como la derivada con respecto a la temperatura de la resistencia, la conductividad térmica y la potencia termoeléctrica. Para

medir la derivada de la resistencia a una temperatura dada T_0 apliqué a la muestra una corriente sinusoidal de amplitud constante pero de frecuencia mucho más alta que la de la modulación en temperatura inducida por el calentamiento periódico. Luego por técnicas de detección de señales sensibles a fase y a frecuencia se midieron las amplitudes de la modulación en el voltaje lo cual es proporcional a la derivada de la resistencia, dR/dT , a la temperatura T_0 . Una descripción más detallada sobre el desarrollo de esta técnica en nuestro laboratorio se hace en la referencia Trujillo Ocampo, 2003.

Los cristales de $\text{NH}_4\text{Ag}_4\text{I}_5$ fueron crecidos en nuestro laboratorio usando una técnica de solución con reactivos de AgI y NH_4I de alta pureza (Aldrich) [Trujillo Ocampo, 2003].

5. Resultados y discusión

Los datos que a continuación presento corresponden las medidas simultáneas de calor específico y de resistencia eléctrica que he realizado en el conductor superiónico $\text{NH}_4\text{Ag}_4\text{I}_5$. Los datos que obtuve para las amplitudes de las oscilaciones en temperatura, ΔT , y en la modulación inducida en el voltaje a través de la muestra, ΔV como función de la temperatura media de la muestra, T_0 , los convertí datos para el calor específico a presión constante, $C_p(T)$, y en los de la derivada, dR/dT , utilizando las ecuaciones básicas de la técnica de temperatura modulada:

$$C_p(T) = \frac{K}{\Delta T(T)}; \quad \frac{dR}{dT} = \frac{1}{I_0} \frac{\Delta V(T)}{\Delta T(T)} \quad (7)$$

Los datos de C_p los normalicé al valor del calor específico de $\text{NH}_4\text{Ag}_4\text{I}_5$ medido a temperatura ambiente usando un calorímetro adiabático (modelo Perkin-Elmer DSC-7) obteniendo el valor $C_p(300 \text{ K}) = 80.64 \text{ (3) cal/(mol K)}$. La figura 5 muestra los datos de $C_p(T)$ ceca de la transición de fase del $\text{NH}_4\text{Ag}_4\text{I}_5$ monocristalino en $T_c = 198.7 \text{ K}$. Se observa un comportamiento tipo λ cerca de T_c , similar al observado en la región crítica de muchos sistemas físicos como los discutidos arriba. Este comportamiento a ambos lados de T_c lo comparé con las siguientes funciones de potencia

$$C_p^+(\epsilon) = A^+ |\epsilon|^{-\alpha} + B^+ \quad (T > T_c)$$

$$C_p^-(\epsilon) = A^- |\epsilon|^{-\alpha'} + B^- \quad (T < T_c)$$

Los datos de $C_p^+(\epsilon)$ y $C_p^-(\epsilon)$ fueron interpolados para valores iguales de ϵ . Ajustando T_c obtuve una relación lineal entre $C_p^+(\epsilon)$ y $C_p^-(\epsilon)$ como muestro en la figura 6.

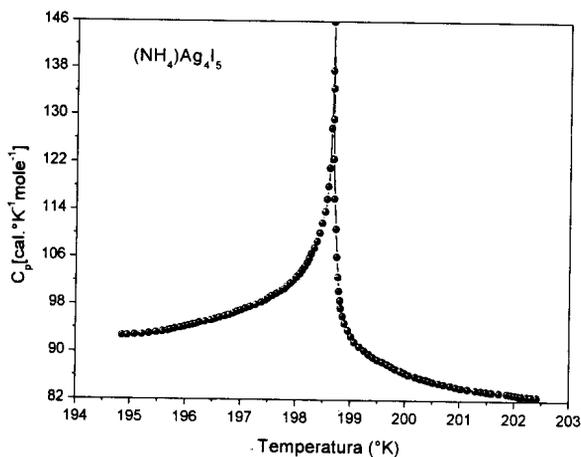


Figura 5. Calor específico a presión constante, C_p , como función de la temperatura, T , cerca de la transición de fase del $\text{NH}_4\text{Ag}_4\text{I}_5$ en $T_c = 198.7$ K.

Este resultado demuestra contundentemente que los exponentes críticos del calor específico por ambos lados de T_c son iguales, verificándose así la hipótesis de escala de la teoría moderna de los fenómenos críticos [Wilson K.G., 1979]. Los parámetros de ajuste son $T_c = 198.68$ K y $\alpha = \alpha' = 0.15$ (1).

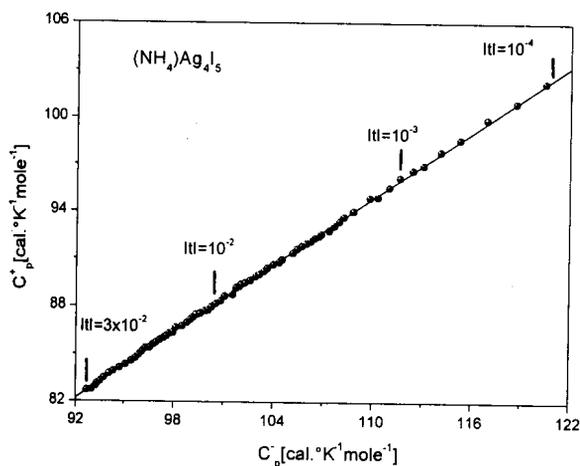


Figura 6. Calor específico para $T > T_c$ (C_p^+) versus calor específico para $T < T_c$ (C_p^-), usando la temperatura como un parámetro implícito.

La resistencia, $R(T)$, fue obtenida por integración de dR/dT a través de la región crítica. Los valores obtenidos por esta forma concuerdan muy bien con la medida directa de R usando la técnica de impedancia (usando el impedancímetro Hewlett Packard 4274 A). La figura 7 muestra la resistencia $R(T)$ de un monocristal de $\text{NH}_4\text{Ag}_4\text{I}_5$ obtenida por integración. De dR/dT y R obtuve

$(1/R)(dR/dT)$ lo que es igual a la derivada logarítmica de la conductividad, $d(\ln\sigma)/dT$, cuyos datos muestran en la figura 8. Este gráfico exhibe un comportamiento crítico similar al observado en el calor específico (ver figura 5). Los datos experimentales de $d\ln\sigma/dT$ los presento en la figura 9, en función del calor específico molar C_p/RTc donde R es la constante de los gases, usando la temperatura como un parámetro implícito.

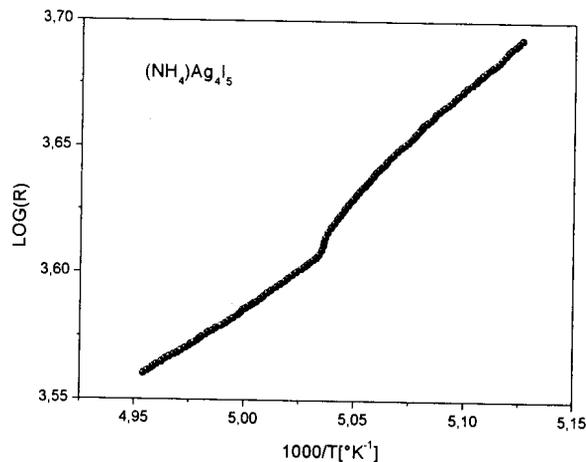


Figura 7. Resistencia de un monocristal de $\text{NH}_4\text{Ag}_4\text{I}_5$ obtenida por integración directa de los datos obtenidos para dR/dT .

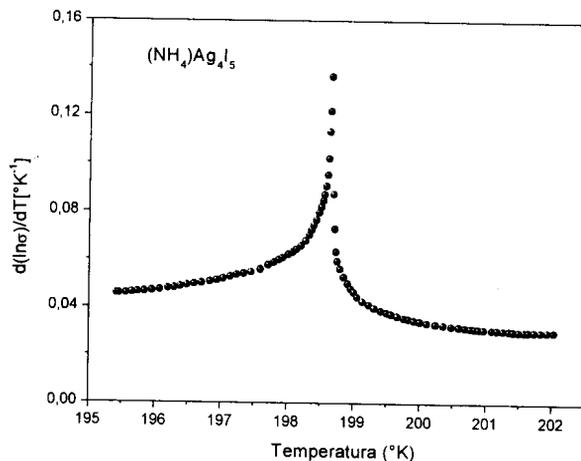


Figura 8. Derivada con respecto a la temperatura del logaritmo de la conductividad, $d(\ln\sigma)/dT$ en función de la temperatura.

Se observa en la figura 9 una correlación muy estrecha entre estas dos magnitudes. En efecto, la línea sólida mostrada en la figura es el ajuste lineal a los datos tanto para $T > T_c$ como $T < T_c$, dando:

$$\frac{d(\ln \sigma)}{dT} = \frac{0.682}{RT_c} (C_p - 33.6R) \quad (11)$$

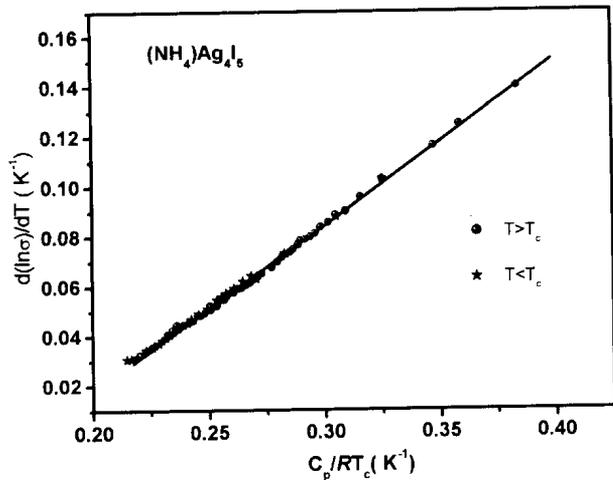


Figura 9. Gráfico de $d\ln\sigma/dT$ versus C_p/RT_c

Esta observación demuestra que las fluctuaciones en el orden local, el cual es responsable del comportamiento crítico del calor específico, también afecta la movilidad de los portadores de carga (iones de Ag^+). Este comportamiento observado en la movilidad de los iones en un electrolito sólido va mucho más allá de la modelación clásica de los defectos cristalinos para explicar la difusión de los iones en estado sólido, basado todos estos modelos en teorías de campo medio. La explicación del comportamiento crítico observado requiere de consideraciones teóricas basadas en modelos cooperativos entre los constituyentes atómicos del sistema que incluyan los efectos de corto alcance en el transporte de carga.

6. Conclusión

En este trabajo presento evidencias experimentales que apoyan la idea de que los fenómenos críticos observados en los mas diversos sistemas materiales que relaciono en el texto también se presentan en los denominados electrolitos sólidos o conductores superiónicos. Este comportamiento además de observarlo en el calor específico, el cual puede modelarlo con el modelo Ising ($d=3, n=1$), también lo observo en un parámetro de transporte (conductividad). La correlación observada entre el calor específico C_p y la derivada con respecto a la temperatura del logaritmo de la conductividad $d(\ln\sigma/dT)$, indican a que el orden de corto alcance que se presenta en la subred de los portadores de carga (Ag^+) también afecta su movilidad, cuya explicación teórica es aun requerida.

Agradecimientos

A todos los integrantes del grupo de investigación Transiciones de Fase en Sistemas no Metálicos del Departamento de Física de la Universidad del Valle. En especial, a los colegas Manuel Chacón, J. Evelio Diosa y Esperanza Torijano por sus oportunos comentarios y sugerencias en el curso de este trabajo.

Referencias.

- Agrawal R.C. and Gupta R.K.** 1999. Superionic Solids: Composite electrolyte phase-an overview. *Journal of Materials Science* **34**: 1131-1162.
- Als-Nielsen, J.** 1976. In *Neutron Scattering and Spatial Correlation near the Critical Point. Phase Transitions and critical Phenomena Vol 5a.* (Domb, C. And Green M.M, Eds). Academic Press. London p. 87.
- Heitler, P and Benedeh, G.B.** 1962. *Physical Review letters* **8**: 428-432.
- Jurado, J.F., Ortiz, E. And Vargas, R. A.** 1997. An ac calorimeter probe for a closed-cycle cryogenic station. *Meas. Sci. Technol.* **8**:1151-1155.
- Lederman F.L., Salamon M.B. and Peisel.** 1996. *Solid State Commun* **19**: 147.
- Lin, A. J. And Fisher, M.E.** 1989. *Physics A* **156**: 35.
- Ortiz E., Jurado J.F. and Vargas R.A.** 1996. Specific heat of alumel and chromel alloys near this magnetic transitions. *J. Alloys and Compounds* **243**: 82-84.
- Thomson, D.R. and Rice, O. K.** 1964. *Journal of the American Chemical Society* **86**: 3547.
- Trujillo Ocampo J.A.** 2003. Efecto de otros iones en el transporte de Ag^+ en cristales de AgI. Tesis Doctoral. Universidad de Valle.
- Vargas R. A, Zapata V. H., Matallana E., Vargas M. A.** (2001) More Termal Studies on the PVOH/H3PO2/H2O Solid Proton Conductor gels, *Electrochimica Acta* **46**: 1699-1702.
- Vargas R.A. and Sánchez A.J.** 1985. High Revolution ac calorimeter for solid electrolytes. *Rev. Mexicana de Física.* **31**: 663-74.
- Vargas, M. A, Vargas R.A. and Mellander B.- E.**(2000). More studies on PVAL + H3PO2 + H2O proton conductor gels. *Electrochimica Acta* **45**:1399-1403.
- Wang Y, Huang L, He H and Li M.** 2003. Ionic Conductivity of nano-scale α - AgI. *Physica B* **325**: 357-361.
- Wilson, K.G,** 1979. Problems in Physics with Many Scales of Length, *Scientific American* **241**: 140-159.
- Yeomans, J.M.** 1992 *Statistical Mechanics and Phase Transitions.* Oxford university Press, New York.

SOBRE LAS RELACIONES DE RECURRENCIA, LAS FRACCIONES CONTINUAS Y LA DETERMINACIÓN DE LAS PROPIEDADES ESPECTRALES DE LOS SISTEMAS ORTOGONALES DE POLINOMIOS

por

Jairo A. Charris¹, Bernarda H. Aldana² & Germán Preciado³

Resumen

Charris, J. B. Aldana & G. Preciado-López: Sobre las relaciones de recurrencia, las fracciones continuas y la determinación de las propiedades espectrales de los sistemas ortogonales de polinomios, *Rev. Acad. Colomb. Cienc.* **27** (104): 381–421, 2003. ISSN 0370-3908.

El objeto de este artículo, semi investigativo, semi divulgativo, es el de explorar las propiedades espectrales de los sistemas de polinomios ortogonales a partir de su relación de recurrencia o, más precisamente, de su fracción continua. Estos aspectos de la teoría han sido un tema recurrente de las investigaciones de los autores (y de muchas otras personas) pero el artículo explora esta vez, en mucho detalle, los fundamentos de la teoría.

Palabras Clave. Polinomios ortogonales, espectro y propiedades espectrales de los polinomios ortogonales relaciones de recurrencia y fracciones continuas.

Abstract

This half research half expository paper addresses the problem of determining the spectrum & spectral properties of systems of orthogonal polynomials that can be derived from their recurrence relation or, more precisely, from the continued fraction of the polynomials. The content has been the subject of recent research of the authors (& of many others as well) but this time the paper explores widely the foundational basis of the subject.

Key Words and Phrases. Orthogonal polynomials, spectrum & spectral properties of systems of orthogonal polynomials, recurrence relations, continued fractions.

¹Universidad Sergio Arboleda y Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Bogotá D.C.

²Escuela Colombiana de Ingeniería

³Universidad Nacional de Colombia y Universidad de los Andes, Bogotá, D.C.

AMS Subject Classification: Primary 33A65. Secondary 33A40.

Introducción

El presente documento contiene la intervención de los autores en un seminario avanzado sobre tópicos de análisis que tuvo lugar en la Universidad Sergio Arboleda de Bogotá durante el segundo semestre de 2001, promovido por el Dr. Reinaldo Nuñez, director de la Escuela de Matemáticas.

En el seminario se trataron básicamente dos temas. El primero, la teoría de los sistemas dinámicos. El segundo, al que está dedicado el presente texto, tuvo que ver con la teoría de los sistemas ortogonales de polinomios y fué orientado por los profesores Jairo A. Charris, Bernarda H. Aldana y Germán Preciado L. Naturalmente, sólo aspectos limitados de una teoría tan extensa, diversa y compleja como la de los polinomios ortogonales pueden ser objeto de un seminario. En nuestro caso, éste se centró en la relación de recurrencia de tres términos que tales sistemas deben satisfacer, y en explorar las posibilidades de determinar, a partir de esta misma relación, las propiedades espectrales de los polinomios: medidas de ortogonalidad y descripción de sus soportes (espectros). La descripción de las técnicas a nuestro alcance para tal fin fue escogida como el tópico de las intervenciones, pues en una forma u otra ha constituido un objetivo común de algunas de nuestras investigaciones más recientes, y porque dichas técnicas han tenido éxito en el tratamiento de sistemas relativamente complejos: polinomios cribados, sistemas ortogonales resultantes de la teoría de las aplicaciones polinómicas y, aún, otros de la teoría general de bloques de relaciones de recurrencia, incluyendo primeros asociados de estos sistemas, un tópico generalmente considerado difícil. De hecho, los ejemplos incluidos en la Sección 7 son primeros asociados de polinomios cribados de Jacobi, y su investigación constituyó el material de la tesis de maestría de Germán Preciado. Todo esto requiere fuertes dosis de esfuerzo manipulativo, pero según pensamos no muchas más ideas esenciales que las discutidas en las exposiciones del seminario. Esperamos que el documento contenga la mayor parte de estas ideas y proporcione así un panorama claro del estado del asunto.

En la redacción de las notas hemos usado libremente material de diversas fuentes. Aunque citado en las referencias al final, algunas veces este material ha sido transcrito casi literalmente, aún en el caso de artículos originales de investigación. Esperamos que esto no implique plagio ni, mucho menos, canibalismo. Al representar también un compromiso entre un documento de

investigación y uno expositivo, esperamos que haya quedado razonablemente libre de la esterilidad que como híbridos, tales documentos suelen presentar.

Lamentamos que una sección introductoria, planeada como motivación para algunos de los temas y en el cual se intentaría una descripción de las ideas de diversos autores (Board, Bank e Ismail, Heller, Yamani, Reinhardt y otros) sobre las conexiones de la teoría de los polinomios ortogonales con la teoría de los operadores en los espacios de Hilbert, la teoría de Hamilton–Jacobi y la mecánica cuántica, aunque discutidos en sesiones de la Academia, en Coloquios Distritales y en diversos encuentros sobre topología y geometría, hubo de quedarse dentro del tintero, debido a circunstancias extenuantes. El tercer autor agradece a Guillermo Rodríguez Blanco, profesor de la Universidad Nacional de Colombia, el haberle dirigido su tesis de maestría. Los autores agradecen a los profesores de la Universidad Sergio Arboleda la asistencia masiva y permanente a las sesiones del seminario. Esperamos que este documento constituya una modesta recompensa a su interés por el tema.

1. Sistemas ortogonales y funcionales de momento

Definición 1.1. *Un funcional de momentos (FM) (Ahkieser [1], Charris & Gómez [10], Chihara [19], Krall [23]) es una aplicación \mathbb{C} -lineal*

$$\mathcal{L} : \mathbb{C}[x] \rightarrow \mathbb{C}, \quad \mathcal{L}(1) = 1,$$

donde $\mathbb{C}[x]$ es el sistema de los polinomios en x con coeficientes complejos.

Se tiene entonces que

$$\mathcal{L}(ap(x) + bq(x)) = a\mathcal{L}(p(x)) + b\mathcal{L}(q(x)), \quad (1.0)$$

$$a, b \in \mathbb{C}; \quad p(x), q(x) \in \mathbb{C}[x].$$

Definición 1.2. *Un sistema mónico ortogonal de polinomios (SMOP) (Chihara [19]) es un sistema $\{P_n(x) \mid n \geq 0\}$ de polinomios mónicos complejos (es decir, de polinomios de la forma*

$$P_n(x) = x^n + a_{n,n-1}x^{n-1} + \dots + a_{n,0}, \quad P_0(x) = 1$$

donde $a_{n,0}, \dots, a_{n,n-1} \in \mathbb{C}$, $n \geq 0$) para el cual existe un FM tal que

$$\mathcal{L}(P_m(x)P_n(x)) = \lambda_n \delta_{mn}, \quad m, n \geq 0, \quad \lambda_n \neq 0. \quad (1.1)$$

Entonces, $\mathcal{L}(P_m(x)P_n(x)) = 0$ si $m \neq n$, $\mathcal{L}(P_n^2(x)) = \lambda_n \neq 0$, $n \geq 0$. Nótese que $\mathcal{L}(P_0^2(x)) = \mathcal{L}(1) = \lambda_0 = 1$. Diremos también que $\{P_n(x)\}$ es un SMOP para \mathcal{L} .

Teorema 1.1. Si $\{P_n(x)\}$ es un SMOP para \mathcal{L} , $\{P_n(x)\}$ es una base algebraica de $\mathbb{C}[x]$. Si $P(x) \in \mathbb{C}[x]$ tiene grado $m \geq 0$ entonces

$$P(x) = \sum_{k=0}^m a_k P_k(x), \quad a_k \in \mathbb{C}, \quad (1.2)$$

donde

$$a_k = \frac{\mathcal{L}(P(x)P_k(x))}{\lambda_k}, \quad 0 \leq k \leq m. \quad (1.3)$$

Además, $P(x) = A_m x^m + \dots + A_0$ con $A_m = a_m$.

Demostración. La primera afirmación es cierta de todo sistema $\{P_n(x)\}$, $P_n(x) \in \mathbb{C}[x]$, tal que $\text{grado}(P_n(x)) = n$, $n \geq 0$, pues si $\mathbb{C}_m[x]$ es el espacio de los polinomios de grado $\leq m$, $m \geq 0$, $\{P_0(x), \dots, P_m(x)\}$ es un sistema linealmente independiente de $\mathbb{C}_m[x]$ (si $\sum_{k=0}^m a_k P_k(x) = 0$, necesariamente $a_k = 0$, $0 \leq k \leq m$).

Este es un resultado bien conocido de la teoría de polinomios sobre \mathbb{C} , consecuencia del hecho de que un tal polinomio $P(x)$ se anula en todo punto de \mathbb{C} o, de hecho, en más de $n = \text{grad}(P(x))$ puntos, si y sólo si sus coeficientes son idénticamente nulos, y como $\{1, x, x^2, \dots, x^m\}$ es una base sobre \mathbb{C} de $\mathbb{C}_m[x]$, así que $\text{Dim}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}_m[x]) = m + 1$, también $\{P_0(x), \dots, P_m(x)\}$ es una base de $\mathbb{C}_m[x]$. Obsérvese también que si $\text{grado}(P(x)) = m$ y

$$P(x) = \sum_{k=0}^n a_k P_k(x),$$

entonces $n \geq m$ y $a_k = 0$, $m < k \leq n$. Ahora, si $\{P_k(x)\}$ es un SMOP para \mathcal{L} , entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(P(x)P_n(x)) &= \sum_{k=0}^m a_k \mathcal{L}(P_k(x)P_n(x)) \\ &= \sum_{k=0}^m a_k \lambda_k \delta_{nk} = \lambda_n a_n \end{aligned}$$

para todo $0 \leq n \leq m$. Nótese finalmente que al ser $P_m(x)$ mónico, necesariamente $A_m = a_m$. \square

Corolario 1.1. Si $\{P_n(x)\}$ es un SMOP para \mathcal{L} y $P(x) = A_m x^m + \dots + A_0$, entonces

$$\mathcal{L}(P(x)P_n(x)) = 0, \quad n > m, \quad (1.4)$$

y

$$\mathcal{L}(P(x)P_m(x)) = A_m \lambda_m. \quad (1.5)$$

En particular,

$$\mathcal{L}(x^m P_n(x)) = 0, \quad n > m; \quad \mathcal{L}(x^m P_m(x)) = \lambda_m. \quad (1.6)$$

Demostración. Claramente $P(x) = \sum_{k=0}^m a_k P_k(x)$, así que para $n > m$,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(P(x)P_n(x)) &= \sum_{k=0}^m a_k \mathcal{L}(P_k(x)P_n(x)) \\ &= \sum_{k=0}^m a_k \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

Por otra parte, de lo anterior, $\mathcal{L}(x^n P_m(x)) = 0$ si $n < m$, de lo cual

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(P(x)P_m(x)) &= \mathcal{L}(A_m x^m P_m(x)) \\ &= A_m \mathcal{L}(x^m P_m(x)) \\ &= A_m \mathcal{L}(P_m^2(x)) = A_m \lambda_m. \end{aligned}$$

Esto demuestra el corolario. \square

Teorema 1.2. Si $\{P_n(x)\}$ es un SMOP para \mathcal{L} , para todo $n \geq 0$ existen $B_n, C_n \in \mathbb{C}$ tales que

$$xP_n(x) = P_{n+1}(x) + B_n P_n(x) + C_n P_{n-1}(x), \quad (1.7)$$

$$n \geq 0,$$

donde $P_{-1}(x) = 0$ y C_0 es arbitrario. Además B_0 y $B_n, C_n, n \geq 1$, están unívocamente determinados por $\{P_n(x)\}$, $C_n \neq 0$ para $n \geq 1$,

$$B_n = \frac{\mathcal{L}(xP_n^2(x))}{\lambda_n}, \quad n \geq 0; \quad (1.8)$$

$$C_n = \frac{\lambda_n}{\lambda_{n-1}}, \quad \lambda_n = C_1 \cdots C_n, \quad n \geq 1,$$

y $\{P_n(x)\}$ está también unívocamente determinado por (1.7).

Demostración Claramente

$$\begin{aligned} xP_n(x) &= \sum_{k=0}^{n+1} a_{nk} P_k(x), \\ a_{nk} &\in \mathbb{C}, \quad k = 0, 1, \dots, n+1, \quad n \geq 0. \end{aligned}$$

Además

$$\begin{aligned} a_{nk} &= \mathcal{L}(xP_n(x)P_k(x)) \\ &= \mathcal{L}(xP_k(x)P_n(x)), \quad 0 \leq k \leq n+1. \end{aligned}$$

Del corolario anterior se deduce que $a_{nk} = 0$ si $k+1 < n$, o sea, si $k < n-1$. Es claro además que $a_{nn+1} = 1$. Sean entonces $B_n = a_{nn}$, $n \geq 0$, $C_n = a_{nn-1}$, $n \geq 1$. La unicidad de $B_n, n \geq 0$, y $C_n, n \geq 1$, es consecuencia de la independencia lineal de $\{P_n(x)\}$ y, como $P_{-1}(x) = 0$, la arbitrariedad de C_0 es también clara. Por otra parte $\mathcal{L}(xP_n(x)P_n(x)) = B_n \mathcal{L}(P_n^2(x)) = B_n \lambda_n$, $n \geq 0$, y $\mathcal{L}(xP_n(x)P_{n-1}(x)) = \mathcal{L}(xP_{n-1}(x)P_n(x)) = \mathcal{L}(x^n P_n(x)) = \mathcal{L}(P_n^2(x)) = \lambda_n = C_n \mathcal{L}(P_{n-1}^2(x)) = C_n \lambda_{n-1}$, $n \geq 1$. Esto implica en particular que $C_n \neq 0$ y

$\lambda_n = C_1 \cdots C_n$ para $n \geq 1$. Ahora, si también $x\tilde{P}_n(x) = \tilde{P}_{n+1}(x) + B_n\tilde{P}_n(x) + C_n\tilde{P}_{n-1}(x)$, $n \geq 0$, y $\tilde{P}_{-1}(x) = 0$, $\tilde{P}_0(x) = 1$, entonces $\tilde{P}_n(x)$ es mónico de grado n para $n \geq 1$, y al suponer que $\tilde{P}_n(x) = P_n(x)$ para $n \leq m$, de $xP_m(x) = \tilde{P}_{m+1}(x) + B_mP_m(x) + C_mP_{m-1}(x)$ se deduce que también $\tilde{P}_{m+1}(x) = P_{m+1}(x)$. \square

Nota 1.1. Puede suceder que $B_n = 0$ para algún $n \geq 0$ o, aún, para todos los $n \geq 0$. En este último caso $P_n(-x) = (-1)^n P_n(x)$ para todo $n \geq 0$, como se deduce inmediatamente de (1.7). Se dice entonces que $\{P_n(x)\}$ es un *SMOP simétrico*.

Nota 1.2. Si $\{P_n(x)\}$ es un *SMOP* para \mathcal{L} entonces

$$\mathcal{L}(P_0(x)) = \mathcal{L}(1) = 1; \mathcal{L}(P_n(x)) = 0, n \geq 1. \quad (1.9)$$

Esto resulta de observar que $P_n(x)P_0(x) = P_n(x)$, $n \geq 0$.

El siguiente teorema, recíproco del anterior, es fundamental. Chihara [19] lo atribuye a J. Favard, pero parece ser más antiguo.

Teorema 1.3. [Favard] Sea $\{P_n(x), n \geq 0\}$ un sistema de polinomios mónicos tales que $\text{grado}(P_n(x)) = n$, $n \geq 0$, y supóngase que existen números complejos $B_n, C_n, n \geq 0$, tales que

$$xP_n(x) = P_{n+1}(x) + B_nP_n(x) + C_nP_{n-1}(x), \quad (1.10)$$

$$n \geq 0; P_{-1}(x) = 0.$$

Supóngase además que $C_n \neq 0$ para todo $n \geq 1$, y sea $\mathcal{L}: \mathbb{C}[x] \rightarrow \mathbb{C}$ definido por

$$\mathcal{L}(P_0(x)) = 1; \mathcal{L}(P_n(x)) = 0, n \geq 1, \quad (1.11)$$

y extensión lineal (es decir, $\mathcal{L}\left(\sum_{k=0}^m a_k P_k(x)\right) = a_0$ para todo $m \geq 0$). Entonces $\{P_n(x)\}$ es un *SMOP* para \mathcal{L} . Además,

$$\lambda_n := \mathcal{L}(P_n^2(x)) = C_1 C_2 \cdots C_n, n \geq 1. \quad (1.12)$$

Demostración. Es suficiente demostrar que para todo $m \geq 1$,

$$\mathcal{L}(x^m P_n(x)) = 0, n > m; \mathcal{L}(x^m P_m(x)) = C_1 C_2 \cdots C_m.$$

Obsérvese que $\mathcal{L}(x^0 P_n(x)) = \mathcal{L}(P_n(x)) = 0$ si $n > 0$. Ahora, $\mathcal{L}(xP_n(x)) = \mathcal{L}(P_{n+1}(x)) + B_n \mathcal{L}(P_n(x)) + C_n \mathcal{L}(P_{n-1}(x)) = 0$ si $n > 1$, mientras que $\mathcal{L}(P_1(x)) = C_1 \mathcal{L}(P_0(x)) = C_1$. Supongamos entonces que la afirmación es válida para m . Se tiene que $\mathcal{L}(x^{m+1} P_n(x)) = \mathcal{L}(x^m P_{n+1}(x)) + B_n \mathcal{L}(x^m P_n(x)) + C_n \mathcal{L}(x^m P_{n-1}(x))$. Por lo tanto, si $n \geq m+1$, en cuyo caso $n > m$, $n+1 > m$ y $n-1 \geq m$, entonces $\mathcal{L}(x^{m+1} P_n(x)) = C_n \mathcal{L}(x^m P_{n-1}(x))$. Si $n > m+1$ entonces $n-1 >$

m y $\mathcal{L}(x^{m+1} P_n(x)) = 0$. Si $n = m+1$ entonces $\mathcal{L}(x^{m+1} P_{m+1}(x)) = C_{m+1} \mathcal{L}(x^m P_m(x))$, y la hipótesis de inducción asegura que $\mathcal{L}(x^m P_m(x)) = C_1 C_2 \cdots C_m$. Entonces $\mathcal{L}(x^{m+1} P_n(x)) = 0$ si $n \geq m+1$ y $\mathcal{L}(x^{m+1} P_{m+1}(x)) = C_1 C_2 \cdots C_{m+1}$. \square

Nota 1.3. Si \mathcal{L} para $\{P_n(x)\}$ está dado por (1.11), se dice que \mathcal{L} es un *FM* para $\{P_n(x)\}$. Claramente \mathcal{L} está unívocamente determinado por $\{P_n(x)\}$.

Nota 1.4. Sea $\{Q_n(x) | n \geq 0\}$ un sistema de polinomios en $\mathbb{C}[x]$, y supóngase que existen $A_n, B_n, C_n, n \geq 0$, en \mathbb{C} , tales que $A_{n-1} C_n \neq 0, n \geq 1$, y que

$$xQ_n(x) = A_n Q_{n+1}(x) + B_n Q_n(x) + C_n Q_{n-1}(x), n \geq 0, \quad (1.13)$$

donde $Q_{-1}(x) = 0$ y $\text{grado}(Q_0(x)) = 0$. Se dice que $\{Q_n(x)\}$ es un *sistema ortogonal de polinomios (SOP)* (Chihara [19]). La razón es la siguiente. Evidentemente $\text{grado}(Q_n(x)) = n, n \geq 0$, y si k_n es el coeficiente de x^n en $Q_n(x)$ entonces $P_n(x) = k_n^{-1} Q_n(x)$ es un polinomio mónico. De (1.13), con $Q_n(x) = k_n P_n(x)$, se deduce inmediatamente que $k_n = k_{n+1} A_n, n \geq 0$, lo cual implica que

$$k_n = \frac{k_0}{A_0 \cdots A_{n-1}}, n \geq 1, \quad (1.14)$$

y, con A_{-1} arbitrario, que

$$xP_n(x) = P_{n+1}(x) + B_n P_n(x) + A_{n-1} C_n P_{n-1}(x), n \geq 0. \quad (1.15)$$

Entonces $\{P_n(x)\}$ es un *SMOP* para el funcional definido por $\mathcal{L}(1) = 1, \mathcal{L}(P_n(x)) = 0$ para $n \geq 1$, así que

$$\mathcal{L}(Q_n(x) Q_m(x)) = k_n k_m \delta_{mn} \lambda_n, n \geq 0, \quad (1.16)$$

donde $\lambda_n = \mathcal{L}(P_n^2(x)), n \geq 0$. O sea, $\mathcal{L}(Q_0^2(x)) = k_0^2, \mathcal{L}(Q_n(x) Q_m(x)) = 0$ si $m \neq n$, y

$$\mathcal{L}(Q_n^2(x)) = k_0^2 \frac{C_1 \cdots C_n}{A_0 \cdots A_{n-1}}, n \geq 1. \quad (1.17)$$

Generalmente se toma $Q_0(x) = 1$ (o sea $k_0 = 1$). Si $A_m \neq 1$ para algún m , los $Q_n(x)$ pueden no ser mónicos, aun si $k_0 = 1$. Esto resulta de (1.13).

Nota 1.5. En (1.7) o en (1.13) podríamos tomar $C_0 = 0$. Por razones prácticas es mejor dejarlo arbitrario y tomarlo convenientemente en cada caso particular. Lo mismo es cierto de A_{-1} en la nota anterior.

Nota 1.6. Supóngase ahora que $\{R_n(x) | n \geq 0\}$ satisface una relación de recurrencia

$$R_{n+1}(x) = (A_n x - B_n) R_n(x) - C_n R_{n-1}(x), \quad (1.18)$$

$$n \geq 0, R_{-1}(x) = 0,$$

donde $A_n, C_{n+1} \in \mathbb{C}$, $n \geq 0$, son no nulos y donde $\text{grado}(R_0(x)) = 0$. Como se verifica inmediatamente, $\text{grado}(R_n(x)) = n$ para todo $n \geq 0$, y si k_n es el coeficiente de x^n en $R_n(x)$ y $P_n(x) = k_n^{-1}R_n(x)$, entonces $A_n k_n = k_{n+1}$, $n \geq 0$, así que

$$k_n = k_0 A_0 \dots A_{n-1}, \quad n \geq 1, \quad (1.19)$$

y $\{P_n(x)\}$ es un sistema mónico tal que

$$xP_n(x) = P_{n+1}(x) + \frac{B_n}{A_n}P_n(x) + \frac{C_n}{A_{n-1}A_n}P_{n-1}(x), \quad n \geq 0, \quad (1.20)$$

con $P_{-1}(x) = 0$. Entonces, si $\mathcal{L} : C[x] \rightarrow \mathbb{C}$ está dado por $\mathcal{L}(1) = 1$, $\mathcal{L}(P_n(x)) = 0$, $n \geq 1$, y extensión lineal, necesariamente

$$\mathcal{L}(R_m(x)R_n(x)) = k_m k_n \lambda_n \delta_{mn} \lambda_n, \quad m, n \geq 0, \quad (1.21)$$

donde $\lambda_n = \mathcal{L}(P_n^2(x))$, $n \geq 0$, así que $\mathcal{L}(R_0^2(x)) = k_0^2$ y

$$\mathcal{L}(R_n^2(x)) = k_0^2 \frac{A_0}{A_n} C_1 \dots C_n, \quad n \geq 1. \quad (1.22)$$

En virtud de (1.21), se dice también que $\{R_n(x)\}$ es un sistema ortogonal de polinomios (SOP). Generalmente se toma $k_0 = 1$, o sea, $R_0(x) = 1$. Si $A_m \neq 1$ para algún m , los $R_n(x)$ pueden no ser mónicos, aun si $R_0(x) = 1$.

Un funcional de momentos \mathcal{L} es positivo (Chihara [19]) si $\mathcal{L}(P(x)) > 0$ para todo polinomio $P(x) \neq 0$ tal que $P(t) \geq 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$ (así que $P(x) \in \mathbb{R}[x]$). Esto implica que $\langle P(x), Q(x) \rangle := \mathcal{L}(P(x)Q(x))$ es un producto escalar en $\mathbb{R}[x]$ (Nota 1.7, abajo) y si $\{p_n(x)\}$ se obtiene de $\{1, x, x^2, \dots\}$ por medio del proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt (Nota 1.10, abajo), entonces $p_0(x) = 1$, $\text{grado}(p_n(x)) = n$, $p_n(x) \in \mathbb{R}[x]$ y

$$\mathcal{L}(p_m(x)p_n(x)) = \delta_{mn}, \quad m, n \geq 0, \quad (1.23)$$

así que $\{p_n(x)\}$ es un SOP para \mathcal{L} y existirán $a_n, b_n, c_n \in \mathbb{C}$ tales que

$$xp_n(x) = a_n p_{n+1}(x) + b_n p_n(x) + c_n p_{n-1}(x), \quad n \geq 0, \quad p_{-1}(x) = 0, \quad (1.24)$$

donde a_n, b_n, c_n son de hecho reales (Nota 1.8 abajo). Además $c_n = a_{n-1}$, $n \geq 1$ (y c_0 puede tomarse arbitrariamente).

Nota 1.7. Para establecer que $\langle P(x), Q(x) \rangle$ es un producto escalar en $\mathbb{R}[x]$, obsérvese en primer lugar que $\mathcal{L}(P^2(x)) = \langle P(x), P(x) \rangle > 0$ para $P(x) \in \mathbb{R}[x]$, $P(x) \neq 0$. Por otra parte, $\mathcal{L}(P(x)) \in \mathbb{R}$ para todo $P(x) \in \mathbb{R}[x]$. Esto es claro si $a \in \mathbb{R}$, pues

$\mathcal{L}(a) = a\mathcal{L}(1) = a$, y como $(t^n + 1)^2 \geq 0$, $1 + t^{2n} \geq 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$ y $x^n = \frac{1}{2}(x^n + 1)^2 - \frac{1}{2}(1 + x^{2n})$, también $\mathcal{L}(x^n) \in \mathbb{R}$ para todo $n \geq 0$.

Nota 1.8. Lo establecido en la nota anterior asegura que a_n, b_n, c_n en (1.24) son números reales, ya que, de hecho,

$$a_n = \mathcal{L}(xp_n(x)p_{n+1}(x)), \quad b_n = \mathcal{L}(xp_n(x)p_n(x)), \\ c_n = \mathcal{L}(xp_n(x)p_{n-1}(x)),$$

$n \geq 0$, y éstos son todos números reales, pues $\{p_n(x)\} \subseteq \mathbb{R}[x]$. Nótese que, en efecto, $c_n = a_{n-1}$, $n \geq 1$. (Más aún, de (1.24) y (1.27), abajo, se deduce que $a_n = \frac{k_{nn}}{k_{n+1, n+1}}$, $k_{nn} = \frac{1}{\|q_n(x)\|}$, así que $a_n > 0$ para $n \geq 1$).

Es claro que si $\{p_n(x)\}$ para \mathcal{L} está dado por (1.24) y definimos $P_0(x) = p_0(x) = 1$; $P_n(x) = a_0 \dots a_{n-1} p_n(x)$, $n \geq 1$, entonces $\{P_n(x)\}$ es un SMOP para \mathcal{L} con

$$\lambda_0 = 1; \quad \lambda_n = \mathcal{L}(P_n^2(x)) = (a_0 \dots a_{n-1})^2 > 0, \quad n \geq 1. \quad (1.25)$$

Esto resulta de las relaciones (1.11) y (1.24), teniendo en cuenta (Nota 1.4) que $k_0 = 1$ y que $\{P_n(x)\}$ satisface (1.7) con $B_n = b_n \in \mathbb{R}$, $n \geq 0$, $C_n = a_{n-1}^2 > 0$, $n \geq 1$.

Supóngase recíprocamente que $\{P_n(x)\}$ es un sistema mónico dado por (1.7) con $B_n \in \mathbb{R}$ para todo $n \geq 0$ y $C_n > 0$ para todo $n \geq 1$. Sea $\mathcal{L} : C[x] \rightarrow \mathbb{C}$ dado por $\mathcal{L}(1) = 1$, $\mathcal{L}(P_n(x)) = 0$, $n \geq 1$, y extensión lineal, el FM para \mathcal{L} .

Teorema 1.4. Bajo las anteriores hipótesis, \mathcal{L} es positivo, y si $\lambda_n = C_1 C_2 \dots C_n$ y $p_n(x) = \frac{P_n(x)}{\sqrt{\lambda_n}}$ entonces

$$\mathcal{L}(p_m(x)p_n(x)) = \delta_{mn}, \quad m, n \geq 0, \quad (1.26)$$

y $\{p_n(x)\}$ satisface (1.24) con $a_0 = 1$; $c_n = a_{n-1} = \sqrt{C_n}$, $n \geq 1$; $b_n = B_n$, $n \geq 0$.

Demostración. Como $P_0(x) = 1$ y $B_n, C_n \in \mathbb{R}$, es claro que $P_n(x) \in \mathbb{R}[x]$, $n \geq 0$. Si $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ y $P(x) = \sum_{k=0}^m \alpha_k P_k(x)$ entonces $\alpha_k \in \mathbb{R}$, $k = 0, 1, 2, \dots, m$, y

$$\mathcal{L}(P^2(x)) = \sum_{k=0}^m \alpha_k^2 \lambda_k,$$

así que si $P(x) \neq 0$ entonces $\mathcal{L}(P^2(x)) > 0$. Ahora, si $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ es tal que $P(t) \geq 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$, necesariamente $P(x) = \sum_{k=0}^n Q_k^2(x)$, $n \geq 1$,

donde $Q_k(x) \in \mathbb{R}[x]$. En efecto, como toda raíz real t^* de $P(x)$ debe ser de multiplicidad par (si no, $P(t)$ cambiaría de signo en la vecindad de t^*), entonces $P(x) = S^2(x)T(x)$ donde $S(x), T(x) \in \mathbb{R}[x]$ y $T(x)$ es una constante (necesariamente positiva) o un polinomio (necesariamente de grado par ≥ 2) cuyas raíces son todas complejas no reales (y se presentan entonces por pares conjugados). Entonces $T(x) = \sum_{k=0}^n R_k^2(x)$, $n \geq 1$, donde $R_k(x) \in \mathbb{R}[x]$. Esto último es obvio si $\text{grado}(T(x)) = 2$, y resulta de aquí por inducción. Entonces, si $P(x) \neq 0$, $Q_k(x) \neq 0$ para algún $1 \leq k \leq n$, y $\mathcal{L}(P(x)) = \sum_{k=1}^n \mathcal{L}(Q_k^2(x)) > 0$. Las demás afirmaciones se verifican en forma rutinaria. \square

Corolario 1.2. Si $\{P_n(x)\}$ es un SMOP que satisface (1.7) con $B_n \in \mathbb{R}$ para todo $n \geq 0$ y $C_n > 0$ para $n \geq 1$, todo $P_n(x)$ es un polinomio real, y si $n \geq 1$, sus raíces son todas reales y simples (de orden o multiplicidad 1).

Demostración. Que $P_n(x)$ es real para todo n es claro. Sea \mathcal{L} el FM para $\{P_n(x)\}$, el cual es positivo. Como $\mathcal{L}(P_n(x)) = 0$ para $n \geq 1$, necesariamente $P_n(x)$ tiene al menos una raíz real de orden (multiplicidad) impar (si no, $\mathcal{L}(P_n(x)) > 0$). Sean $t_1 < t_2 < \dots < t_m$, $m \leq n$, las raíces reales de $P_n(x)$ de orden impar, y sea $P(x) = (x - t_1)(x - t_2) \dots (x - t_m)$. Si $m < n$, $\mathcal{L}(P(x)P_n(x)) = 0$ (Corolario 1.1, Relación (1.4)). Pero esto es absurdo, pues toda raíz real de $P(x)P_n(x)$ es de orden par, de lo cual $P(t)P_n(t) > 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$, así que $\mathcal{L}(P(x)P_n(x)) > 0$. Entonces $m = n$, y el corolario queda demostrado. \square

Nota 1.9. Es claro que $\{Q_n(x)\}$, dado por (1.13), es un SOP para un FM positivo si y sólo si $B_n, n \geq 0$, es real, y $A_{n-1}C_n > 0$ para todo $n \geq 1$. A su vez, $\{R_n(x)\}$, dado por (1.18), es ortogonal para un FM positivo si y sólo si $\frac{B_n}{A_n}$ es real y $\frac{C_{n+1}}{A_n A_{n+1}} > 0$ para todo $n \geq 0$.

Nota 1.10. Si \mathcal{L} es un FM positivo y $\langle P(x), Q(x) \rangle := \mathcal{L}(P(x)Q(x))$, entonces $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es un producto interno en $\mathbb{R}[x]$ (el cual es un espacio vectorial sobre \mathbb{R}). Definiendo, para $P(x) \in \mathbb{R}[x]$, $\|P(x)\| := \sqrt{\langle P(x), P(x) \rangle} = \sqrt{\mathcal{L}(P^2(x))}$, el procedimiento de ortogonalización de Gram-Schmidt (Yosida [32]) permite construir, a partir de la base $\{1, x, x^2, \dots\}$ de $\mathbb{R}[x]$, una base ortogonal $\{p_n(x) \mid n \geq 0\}$ de $\mathbb{R}[x]$ con respecto

a $\langle \cdot, \cdot \rangle$, por

$$p_0(x) = 1, \quad p_{n+1}(x) = \frac{q_{n+1}(x)}{\|q_{n+1}(x)\|}, \quad (1.27)$$

$$q_{n+1}(x) = x^{n+1} - \sum_{k=0}^n \langle x^{n+1}, p_k(x) \rangle p_k(x),$$

para $n \geq 0$. En efecto, como $\langle x^{n+1}, p_k(x) \rangle = \mathcal{L}(x^{n+1}p_k(x)) \in \mathbb{R}$ si $p_k(x) \in \mathbb{R}[x]$, $k \leq n$ (Nota 1.7), un argumento inductivo establece sin más que $p_n(x) \in \mathbb{R}[x]$ para todo $n \geq 0$. Como obviamente $\text{grado}(p_n(x)) = n$, $n \geq 0$, $\{p_n(x)\}$ es también una base de $\mathbb{R}[x]$, para la cual $\langle p_n(x), p_n(x) \rangle = \frac{\langle q_n(x), q_n(x) \rangle}{\|q_n(x)\|^2} = 1$ y

$$\langle p_n(x), p_m(x) \rangle = \frac{1}{\|q_n(x)\|} [\mathcal{L}(x^n p_m(x)) - \langle x^n, p_m(x) \rangle \mathcal{L}(p_m^2(x))] = 0,$$

$m < n$, $n \geq 0$. Se dice usualmente que $\{p_n(x)\}$ es una base ortonormal de $\mathbb{R}[x]$ para $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Definición 1.3. Una función de distribución (FD) es una aplicación $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

- 1) φ es creciente: $\varphi(t) \leq \varphi(t')$ si $t < t'$.
- 2) φ es acotada. Es decir, existe $M > 0$ tal que $-M \leq \varphi(t) \leq M$ para todo $t \in \mathbb{R}$.
- 3) φ es continua por la derecha:

$$\varphi(a) = \lim_{\substack{t \rightarrow a \\ t > a}} \varphi(t) =: \varphi(a+)$$

para todo $a \in \mathbb{R}$.

Como φ es creciente y acotada, $\varphi(a-) := \lim_{t \rightarrow a} \varphi(t)$ existe para todo $a \in \mathbb{R}$. También existen $\varphi(-\infty+) := \lim_{t \rightarrow -\infty} \varphi(t)$ y $\varphi(\infty-) := \lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t)$. Como es claro,

$$-M \leq \varphi(-\infty+) \leq \varphi(t) \leq \varphi(\infty-) \leq M$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. Si $\varphi(\infty-) - \varphi(-\infty+) = 1$, se dice que φ está normalizada o que es una función de distribución normalizada (FDN).

Si φ es una función de distribución, $-\infty < a < b < \infty$ y f es continua en $[a, b]$ y toma valores reales, $\int_a^b f d\varphi$ denotará la integral de Riemann-Stieltjes de f (Apostol [3], Chap. 7), la cual existe según las hipótesis. Como es claro, $\int_a^b d\varphi = \varphi(b) - \varphi(a)$. Si f es continua de $[a, \infty)$ en \mathbb{R} , definimos

$$\int_a^\infty f d\varphi := \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f d\varphi \quad (1.28)$$

cuando el límite existe y es un número real. Se dice entonces que $\int_a^\infty f d\varphi$ converge o que es convergente. Si $f(t) \geq 0$ para todo $t \in [a, \infty)$, el límite en (1.28) siempre existe, finito ó infinito. Por lo tanto, $\int_a^\infty f d\varphi$ es convergente si y sólo si $\int_a^\infty f d\varphi < \infty$, lo cual ocurre si y sólo si existe $C > 0$ tal que $\int_a^b f d\varphi \leq C$ para todo $b \in \mathbb{R}$, $b > a$. En tal caso

$$\int_a^\infty f d\varphi = \sup \left\{ \int_a^b f d\varphi \mid b \in \mathbb{R}, b > a \right\} \leq C. \quad (1.29)$$

De manera análoga se define

$$\int_{-\infty}^a f d\varphi := \lim_{b \rightarrow -\infty} \int_b^a f d\varphi \quad (1.30)$$

cuando f es continua en $(-\infty, a]$ y el límite existe en \mathbb{R} . Se dice también que $\int_{-\infty}^a f d\varphi$ converge o es convergente. Si $f : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ es continua y $\int_a^\infty |f| d\varphi < \infty$, también $\int_a^\infty f d\varphi$ es convergente. Esto resulta de $0 \leq f(t) + |f(t)| \leq 2|f(t)|$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Un resultado análogo vale para $f : (-\infty, a] \rightarrow \mathbb{R}$. Si f es continua de \mathbb{R} en \mathbb{R} y $\int_a^\infty f d\varphi$, $\int_{-\infty}^a f d\varphi$ son ambas convergentes para algún $a \in \mathbb{R}$, se define también

$$\int_{-\infty}^\infty f d\varphi = \int_{-\infty}^a f d\varphi + \int_a^\infty f d\varphi, \quad (1.31)$$

y se dice que $\int_{-\infty}^\infty f d\varphi$ es convergente. Como es claro, si

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es continua, $\int_{-\infty}^a f d\varphi$ y $\int_a^\infty f d\varphi$ convergen para todo $a \in \mathbb{R}$ si y sólo si esto ocurre cuando $a = 0$, así que es suficiente tomar $a = 0$ en (1.31). Es claro también que si $\int_{-\infty}^\infty f d\varphi$ converge entonces

$$\int_{-\infty}^\infty f d\varphi = \lim_{\substack{a \rightarrow -\infty \\ b \rightarrow \infty}} \int_a^b f d\varphi. \quad (1.32)$$

Recíprocamente, si el límite de la derecha en (1.32) existe, $\int_{-\infty}^\infty f d\varphi$ converge.

Sea $C_\varphi(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ el espacio de las funciones continuas $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tales que $\int_{-\infty}^\infty |f| d\varphi < \infty$. Nótese que si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es continua y acotada ($|f(t)| \leq M$ para algún $M > 0$ y todo $t \in \mathbb{R}$) entonces $f \in C_\varphi(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, pues $\int_a^b |f| d\varphi \leq M(\varphi(\infty-) - \varphi(-\infty+))$ cualesquiera que sean $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$. Obsérvese que $C_\varphi(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = C_\psi(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ si φ y ψ son funciones de distribución y $\psi - \varphi$ es constante. De hecho, es suficiente que exista $C \in \mathbb{R}$ tal que $\psi(t) - \varphi(t) = C$ en todo punto común de continuidad t de ψ y φ .

Denotaremos con $C_\varphi(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ al conjunto de las aplicaciones continuas f de \mathbb{R} en \mathbb{C} tales que $|f| \in C_\varphi(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Si $u = \text{Re}(f)$, $v = \text{Im}(f)$, $f \in C_\varphi(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ si y sólo si $u, v \in C_\varphi(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, y entonces

$$\int_{-\infty}^\infty f d\varphi = \int_{-\infty}^\infty u d\varphi + i \int_{-\infty}^\infty v d\varphi. \quad (1.33)$$

Además,

$$\left| \int_{-\infty}^\infty f d\varphi \right| \leq \int_{-\infty}^\infty |f| d\varphi. \quad (1.34)$$

Definición 1.4. Se dice que una función de distribución φ es una *distribución de momentos (FDM)* si está normalizada y $\mathbb{C}[x] \subseteq C_\varphi(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

Nota 1.11. Para asegurar que $\mathbb{C}[x] \subseteq C_\varphi(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ es suficiente demostrar que $\int_{-\infty}^\infty P(t) d\varphi(t)$ converge para todo polinomio $P(x) \in \mathbb{C}[x]$, para lo cual basta demostrar evidentemente que esto es cierto de todo polinomio x^n , $n \geq 0$. Ahora, esto es cierto de $P(x)$ si $P(t) \geq 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$ (y, en particular, de x^{2n} , $n \geq 0$), pues

$$\int_{-\infty}^\infty |P(t)| d\varphi(t) = \int_{-\infty}^\infty P(t) d\varphi(t)$$

y, como $x^n = \frac{1}{2}(x^n + 1)^2 - \frac{1}{2}x^{2n} - \frac{1}{2}$, entonces

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^\infty |t^n| d\varphi(t) &\leq \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty (t^n + 1)^2 d\varphi(t) \\ &+ \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty t^{2n} d\varphi(t) + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty d\varphi(t), \end{aligned}$$

lo cual demuestra la afirmación. Pueden existir, sin embargo, funciones continuas f tales que $\int_{-\infty}^{\infty} f(t) d\varphi(t)$ converge pero que $f \notin C_{\varphi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, es decir, que $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| d\varphi(t) = \infty$. Por ejemplo, si $\varphi(t) = \int_{-\infty}^t e^{-s^2} ds$ es la llamada *función de distribución normal de Gauss* entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) d\varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-t^2} dt,$$

y es fácil ver que si $f(t) = e^{t^2} \frac{\text{sent}}{t}$ ($f(0) = 1$) entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) d\varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{sent}}{t} dt = \pi.$$

Sin embargo, $|f| \notin C_{\varphi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. (Véase Apostol [3] Chap X).

Si φ es una función de distribución, denotaremos con $\mathcal{G}(\varphi)$ el conjunto de los *puntos de crecimiento de φ* , es decir, el conjunto

$$\mathcal{G}(\varphi) = \{x \in \mathbb{R} \mid \varphi(x + \delta) - \varphi(x - \delta) > 0, \forall \delta > 0\}. \tag{1.35}$$

Se dice que $\mathcal{G}(\varphi)$ es el *espectro* de φ .

Sea φ una distribución de momentos, así que $\int_{-\infty}^{\infty} d\varphi(t) = 1$, y sea

$$\mathcal{L}(P(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} P(t) d\varphi(t). \tag{1.36}$$

Supóngase que $\mathcal{G}(\varphi)$ es infinito. Entonces, \mathcal{L} es positivo. En efecto, si $P(x) \in \mathbb{R}[x]$, $P(x) \neq 0$, es tal que $P(t) \geq 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$, y $a < b$ en \mathbb{R} son tales que $\mathcal{G}(\varphi) \cap [a, b] \neq \emptyset$ y que ninguna raíz de $P(x)$ esté en $[a, b]$, entonces $\text{Inf}_{t \in [a, b]} P(t) = c > 0$ y $\varphi(b) > \varphi(a)$, así que

$$\mathcal{L}(P(x)) \geq c \int_a^b d\varphi(t) = c(\varphi(b) - \varphi(a)) > 0.$$

Se dice \mathcal{L} es el *funcional de momentos definido por φ* .

Nota 1.12. Si $\mathcal{G}(\varphi)$ es finito y $P(x)$ es un polinomio, puede no ser posible encontrar un intervalo $[a, b]$ libre de raíces de $P(x)$ y tal que $[a, b] \cap \mathcal{G}(\varphi) \neq \emptyset$. Véase la Nota 1.15.

Teorema 1.5. Si φ es una distribución de momentos con $\mathcal{G}(\varphi)$ infinito, si \mathcal{L} es el FM definido por φ , si $\mathcal{G}(\varphi) \subseteq [a, b]$ donde $a < b$, y si $\{P_n(x)\}$ es el SMOP para \mathcal{L} , entonces $\{P_n(x)\}$ está acotado y las raíces de todos los $P_n(x)$ están en (a, b) .

Demostración. Supóngase que $\{P_n(x)\}$ está dado por (1.7). Como \mathcal{L} es positivo, B_n y C_{n+1} son reales con $C_{n+1} > 0$, $n \geq 0$. Sea $C = \max\{1, a^2, b^2\}$. Obsérvese que como φ es constante en $(-\infty, a)$ entonces

$$\int_a^b f(t) d\varphi(t) = (\varphi(a-) - \varphi(a)) f(a) + \int_{-\infty}^{\infty} f(t) d\varphi(t)$$

para toda función continua en $C_{\varphi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, así que si $a \notin \mathcal{G}(\varphi)$ (lo cual ocurre si $a < \inf(\mathcal{G}(\varphi))$), entonces

$$\int_a^b f(t) d\varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) d\varphi(t),$$

pues, de hecho, φ es constante en $(-\infty, a]$, de lo cual $\varphi(a-) = \varphi(a)$. En tal caso

$$\begin{aligned} \int_a^b t^2 P_n^2(t) d\varphi(t) &\leq C \int_a^b P_n^2(t) d\varphi(t) = C\lambda_n, \\ \lambda_n &= \int_{-\infty}^{\infty} P_n^2(t) d\varphi(t). \end{aligned}$$

Pero

$$\begin{aligned} \int_a^b t^2 P_n^2(t) d\varphi(t) &= \lambda_{n+1} + B_n^2 \lambda_n + C_n^2 \lambda_{n-1} \\ &= \lambda_n (C_{n+1} + B_n^2 + C_n) \end{aligned}$$

para todo $n \geq 0$. Esto se deduce de (1.1), (1.7) y (1.8), e implica que $C_{n+1} + B_n^2 + C_n \leq C$ para todo $n \geq 0$, lo cual asegura la acotación de $\{P_n(x)\}$.

Supongamos ahora $n \geq 1$ y que $a \notin \mathcal{G}(\varphi)$ o $P_n(a) = 0$. En tal caso

$$\int_a^b P_n(t) d\varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} P_n(t) d\varphi(t) = \mathcal{L}(P_n(x)) = 0.$$

así que $P_n(t)$ debe cambiar de signo en (a, b) ; es decir, debe existir $t \in (a, b)$ tal que $P_n(t) = 0$. Sean $a < x_1 < x_2 < \dots < x_m < b$ las raíces de $P_n(x)$ en (a, b) y sea $P(x) = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_m)$. Claramente $m \leq n$ y todas las raíces de $P(x) P_n(x)$ en

(a, b) son de orden par, así que $P(t)P_n(t)$ no cambia de signo en $[a, b]$. Esto implica que

$$\int_a^b P(t)P_n(t) d\varphi(t) = \mathcal{L}(P(t)P_n(t)) \neq 0,$$

lo cual es absurdo si $m < n$. Entonces $m = n$, y todas las raíces de $P_n(x)$ están en (a, b) . Ahora, si $P_n(a) \neq 0$, las raíces de $P_n(x)$ están en (a', b) para todo $a' < a$, de lo cual en $[a, b)$, y entonces en (a, b) . \square

Nota 1.13. Obsérvese que $\mathcal{G}(\varphi)$ es cerrado en \mathbb{R} . En efecto, si $a \notin \mathcal{G}(\varphi)$, existe $\delta > 0$ tal que $\varphi(a - \delta) = \varphi(a + \delta)$, lo cual implica, puesto que φ es creciente, que $\varphi(t) = \varphi(t')$ si $a - \delta < t < t' < a + \delta$, así que $(a - \delta, a + \delta) \cap \mathcal{G}(\varphi) = \emptyset$. Obsérvese también que de la demostración del teorema anterior se deduce que ni $a = \text{Inf} \mathcal{G}(\varphi)$ ni $b = \text{sup} \mathcal{G}(\varphi)$, los cuales están en $\mathcal{G}(\varphi)$, pueden ser raíces de alguno de los $P_n(x)$.

Nota 1.14. En la Sección 3 demostraremos que todo funcional positivo acotado \mathcal{L} admite una representación de la forma

$$\mathcal{L}(P(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} P(t) d\varphi(t), \quad P(x) \in \mathbb{C}[x],$$

para alguna distribución de momentos φ con $\mathcal{G}(\varphi)$ infinito.

Nota 1.15. Si φ es una distribución de momentos con $\mathcal{G}(\varphi)$ finito, digamos $\mathcal{G}(\varphi) = \{t_k \mid 1 \leq k \leq n\}$, \mathcal{L} definido por (1.36), no es positivo. En efecto, es claro que si $P(x) \in \mathbb{C}[x]$,

$$\mathcal{L}(P(x)) = \sum_{k=1}^n P(t_k) (\varphi(t_k) - \varphi(t_k-))$$

y si $P(x) = (x - t_1)^2(x - t_2)^2 \cdots (x - t_n)^2$ entonces $P(x) \neq 0$ y $P(t) \geq 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$; sin embargo, $\mathcal{L}(P(x)) = 0$. Nótese además que $\mathcal{G}(\varphi) = \{t_1 < t_2 < \cdots < t_n\}$, $n \geq 1$, si y sólo si φ es una función escalonada creciente, constante ($=\varphi(t_k)$) en $[t_k, t_{k-1})$, $k = 1, 2, \dots, n-1$, en $(-\infty, t_1)$ ($=\varphi(-\infty+)$) y en $[t_n, \infty)$ ($=\varphi(\infty-)$). Naturalmente, $\mathcal{G}(\varphi) = \emptyset$ si y sólo si φ es constante en \mathbb{R} .

Nota 1.16. Sea φ una función de distribución. Se definen

$$\begin{aligned} \mu((a, b]) &= \varphi(b) - \varphi(a+), \\ -\infty &< a \leq b < \infty, \\ \mu((a, b)) &= \varphi(b-) - \varphi(a+), \\ -\infty &< a < b \leq \infty. \end{aligned} \quad (1.37)$$

Teniendo en cuenta que $[a, b) = (-\infty, b) \setminus (-\infty, a)$ y $[a, b] = (-\infty, b] \setminus (-\infty, a)$, las anteriores definiciones fuerzan las dos siguientes:

$$\begin{aligned} \mu([a, b)) &= \varphi(b-) - \varphi(a-), \\ -\infty &< a \leq b \leq \infty, \\ \mu([a, b]) &= \varphi(b) - \varphi(a-), \\ -\infty &< a \leq b < \infty. \end{aligned} \quad (1.38)$$

En particular $\mu((a, b)) = \varphi(b) - \varphi(a)$ si $-\infty < a \leq b < \infty$, $\mu((-\infty, b]) = \varphi(b) - \varphi(-\infty+)$ si $-\infty < b < \infty$, $\mu(\mathbb{R}) = \mu((-\infty, \infty)) = \varphi(\infty-) - \varphi(-\infty+)$, $\mu([a, \infty)) = \varphi(\infty-) - \varphi(a-)$ si $-\infty < a < \infty$. Obsérvese que

$$\mu(\{a\}) = \varphi(a) - \varphi(a-), \quad a \in \mathbb{R}. \quad (1.39)$$

Sea $A = \bigcup_{k=1}^n I_k$, $n \geq 1$, donde los I_k son intervalos de la forma $(a, b]$, $-\infty \leq a \leq b < +\infty$. Entonces A es también reunión disyunta de finitos intervalos de esta forma. Esto es claro si $n = 1$. También es cierto si $n = 2$, pues $I_1 \cup I_2 = (I_1 \setminus I_2) \cup I_2$ e $I_1 \setminus I_2$ es evidentemente un tal intervalo o la unión disyunta de dos de tales intervalos. La afirmación resulta entonces de un argumento por inducción, observando que $\bigcup_{k=1}^n I_k = \left(\bigcup_{k=1}^{n-1} I_k \right) \cup I_n$ y que si los I_k , $1 \leq k \leq n-1$, son ya disyuntos, entonces $I = \bigcup_{k=1}^{n-1} (I_k \setminus I_n)$ es reunión de intervalos disyuntos de la forma exigida e $I \cap I_n = \emptyset$. Suponiendo entonces que los I_k son disyuntos, definimos

$$\mu(A) = \sum_{k=1}^n \mu(I_k). \quad (1.40)$$

Con esta definición es fácil ver que si A está dado como arriba y también $A = \bigcup_{k=1}^n I'_k$ con los I'_k disyuntos (y de la forma $(a_k, b_k]$) entonces (Bartle [8], Chap. IX)

$$\mu(A) = \sum_{k=1}^n \mu(I'_k), \quad (1.41)$$

para lo cual basta evidentemente establecer la anterior igualdad cuando A es de hecho un intervalo $(a, b]$, y muestra en particular que $\mu(A)$ dada por (1.40) es independiente de la representación de A como reunión de intervalos disyuntos.

Ahora, el conjunto \mathcal{A} de las reuniones finitas de intervalos de la forma $(a, b]$, $-\infty \leq a \leq b < +\infty$, es un álgebra de conjuntos (R. Bartle [8], Chap. IX), es decir,

si $A, B \in \mathcal{A}$ entonces $A \cup B \in \mathcal{A}$ y $A \setminus B \in \mathcal{A}$. Además, μ es una *medida positiva sobre \mathcal{A}* , es decir,

$$\mu \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k), \quad (1.42)$$

siempre y cuando $A_k \in \mathcal{A}$ para todo k , $A_k \cap A_j = \emptyset$ si $k \neq j$ y $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{A}$. Esto resulta fácilmente de las anteriores consideraciones. Si $[\mathcal{A}]$ denota entonces la σ -álgebra generada por \mathcal{A} (Bartle [8], Chap. II), $[\mathcal{A}]$ contiene la σ -álgebra \mathcal{B} generada por los subconjuntos abiertos de \mathbb{R} (la σ -álgebra de Borel de \mathbb{R}), y μ se extiende a una medida positiva μ^* sobre $[\mathcal{A}]$ (la *medida exterior definida* por μ . Bartle [8], Chap. IX). Escribiremos aún $\mu^* = \mu$. Si $f \in C_\varphi(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, se tiene que f es μ -integrable; o sea, $C_\varphi(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \subseteq L_1(\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mu)$. Además,

$$\int f d\mu = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) d\varphi(t), \quad f \in C_\varphi(\mathbb{R}, \mathbb{C}). \quad (1.43)$$

Nótese que $\mathcal{G}(\varphi) = \text{Supp } \mu$ el *soporte de la medida μ* , es decir, el menor subconjunto cerrado F de \mathbb{R} tal que $\mu(\mathbb{R} \setminus F) = 0$. En efecto, $\mathbb{R} \setminus \mathcal{G}(\varphi)$ es reunión enumerable de intervalos abiertos disjuntos, y si (a, b) con $a < b$ es uno de tales intervalos, $\mu((a, b)) = \varphi(b-) - \varphi(a+) = 0$, pues $\varphi(t) = \varphi(t')$ si $a < t \leq t' < b$. Por otra parte, si F es cerrado y $\mu(\mathbb{R} \setminus F) = 0$ entonces $\mu((a, b)) = 0$ para todo intervalo abierto tal que $(a, b) \cap F = \emptyset$, lo cual implica que $(a, b) \cap \mathcal{G}(\varphi) = \emptyset$. Entonces, $\mathcal{G}(\varphi) \subseteq F$. En particular,

$$\mu(\mathcal{G}(\varphi)) = \mu(\mathbb{R}). \quad (1.44)$$

Si además

$$\psi(x) = \mu((-\infty, x]), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (1.45)$$

entonces ψ es creciente, continua por la derecha y $0 \leq \psi(x) \leq \mu(\mathbb{R}) < \infty$, siendo entonces una función de distribución tal que

$$\varphi(x) = \psi(x) + \varphi(-\infty+) \quad (1.46)$$

y $\psi(-\infty+) = 0$.

Nota 1.17. Si \mathcal{M} es una σ -álgebra de subconjuntos de un conjunto X (Bartle [8], Chap II), $\mu : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ es tal que $\sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$ converge si $(A_k) \subseteq \mathcal{M}$, $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{M}$ y $A_k \cap A_j = \emptyset$ cuando $k \neq j$, y si además

$$\mu \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k), \quad (1.47)$$

se dice aún que μ es una *medida sobre X para la σ -álgebra \mathcal{M}* , aunque no necesariamente una medida positiva (una carga, para [8]). Es aún posible permitir que μ tome valores complejos ($\mu : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{C}$), en cuyo caso se dice que μ es una *medida compleja* (Rudin [26]). Las cargas y medidas complejas sobre la σ -álgebra de Borel de \mathbb{R} no dejan de tener interés e importancia en la teoría de los polinomios ortogonales sobre la recta.

2. La fracción continua

Sea $\{P_n(x)\}$ un *SMOP*, el cual satisface la relación de recurrencia

$$xP_n(x) = P_{n+1}(x) + B_n P_n(x) + C_n P_{n-1}(x), \quad (2.1) \\ n \geq 0, \quad P_{-1}(x) = 0,$$

Evidentemente $\{P_n(x)\}$ queda unívocamente determinado por la relación (2.1) anterior para $n \geq 1$ y por las condiciones iniciales

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x - B_0. \quad (2.2)$$

Las condiciones (2.2) aseguran que $P_n(x)$ es mónico y de grado n para todo $n \geq 0$ (naturalmente, $C_n \neq 0$ para $n \geq 1$ y C_0 es arbitrario).

Definición 2.1. Se dice que un sistema

$$\{Q_n(x) \mid n \geq 0\}$$

de polinomios en $\mathbb{C}[x]$ es *correcursivo* con $\{P_n(x)\}$ (Chihara [18]) si

$$xQ_n(x) = Q_{n+1}(x) + B_n Q_n(x) + C_n Q_{n-1}(x), \quad (2.3) \\ n \geq 1.$$

No se imponen condiciones sobre *grado*($Q_n(x)$), pero de (2.3) se deduce que

$$\text{grado}(Q_{n+1}(x)) = \text{grado}(Q_n(x)) + 1$$

para todo $n \geq 0$. Es claro además que si $\{Q_n(x)\}$ satisface (2.3) para $n \geq 0$ y $Q_{-1}(x) = 0$, necesariamente $Q_n(x) = Q_0(x) P_n(x)$, $n \geq 0$, así que si $Q_0(x) \neq 0$, $\text{grado}(Q_n(x)) = n + \text{grado}(Q_0(x))$, $n \geq 0$. Como es claro, $\{Q(x) P_n(x)\}$ es correcursivo con $\{P_n(x)\}$ cualquiera que sea el polinomio $Q(x)$.

Si $\{Q_n(x)\}$ satisface (2.3) para $n \geq 1$, es decir, si es correcursivo con $\{P_n(x)\}$, no es posible, en general, expresar $Q_n(x)$ en términos únicamente de $P_n(x)$. Esto siempre es posible, sin embargo, en términos de $\{P_n(x)\}$ y de sus *primeros polinomios asociados*.

Definición 2.2. Si $\{P_n(x)\}$ está dado por (2.1) e $i = 0, 1, 2, \dots$, el sistema $\{P_n^{(i)}(x)\}$ de los i -ésimos asociados de $\{P_n(x)\}$ está dado por

$$xP_n^{(i)}(x) = P_{n+1}^{(i)}(x) + B_{n+i}P_n^{(i)}(x) + C_{n+i}P_{n-1}^{(i)}(x), \quad n \geq 0, P_{-1}^{(i)}(x) = 0. \quad (2.4)$$

Se supone, naturalmente, que $P_0^{(i)}(x) = 1$. Claramente $\{P_n^{(i)}(x)\}$ es un SMOP para el funcional de momentos $\mathcal{L}^{(i)}$ dado por

$$\mathcal{L}^{(i)}\left(\sum_{n=0}^m a_n P_n^{(i)}(x)\right) = a_0, \quad m \geq 0, \quad (2.5)$$

donde $a_n \in \mathbb{C}, n \geq 0$. Obviamente $\{P_n^{(i)}(x)\}$ está también dado por (2.4) para $n \geq 1$ y por las condiciones iniciales

$$P_0^{(i)}(x) = 1, P_{-1}^{(i)}(x) = x - B_i. \quad (2.6)$$

El sistema $\{P_n^{(1)}(x)\}$ es el sistema de los primeros asociados de $\{P_n(x)\}$. La relación (2.4) se escribe también en la forma, a veces conveniente,

$$xP_n^{(i)}(x) = P_{n+1}^{(i)}(x) + B_n^{(i)}P_n^{(i)}(x) + C_n^{(i)}P_{n-1}^{(i)}(x), \quad n \geq 0, P_{-1}^{(i)}(x) = 0, \quad (2.7)$$

donde $B_n^{(i)} = B_{n+i}, C_n^{(i)} = C_{n+i}, n \geq 0$. Obviamente $P_n(x) = P_n^{(0)}(x), n \geq 0$.

Evidentemente $Q_n(x) = Q(x)P_{n-1}^{(1)}(x), n \geq 1$, donde $Q(x) \in \mathbb{C}[x]$ es arbitrario, es correcurso con $\{P_n(x)\}$. Es también claro que si $\{Q_n(x)\}$ es correcurso con $\{P_n(x)\}$, es el único sistema $\{q_n(x)\}$ correcurso con $\{P_n(x)\}$ tal que $q_0(x) = Q_0(x), q_1(x) = Q_1(x)$. Es decir, $Q_0(x), Q_1(x)$ determinan unívocamente a $\{Q_n(x)\}$.

Teorema 2.1. Si $\{Q_n(x)\}$ es correcurso con $\{P_n(x)\}$ entonces

$$Q_n(x) = Q_0(x)P_n(x) + (Q_1(x) - (x - B_0)Q_0(x))P_{n-1}^{(1)}(x), \quad n \geq 0. \quad (2.8)$$

Demostación. Si $q_n(x)$ denota el término de la derecha en (2.8), es claro de lo dicho anteriormente que $\{q_n(x)\}$ es correcurso con $\{P_n(x)\}$. Como además $q_0(x) = Q_0(x)$ y $q_1(x) = Q_1(x)$, necesariamente $q_n(x) = Q_n(x), n \geq 0$. \square

Corolario 2.1. Si $\{P_n(x)\}$ está dado por (2.1) entonces

$$P_n(x) = (x - B_0)P_{n-1}^{(1)}(x) - C_1P_{n-2}^{(2)}(x), \quad n \geq 1. \quad (2.9)$$

Demostación. Si $Q_n(x) = P_{n+1}(x), n \geq 0$, es claro que $\{Q_n(x)\}$ es correcurso con $\{P_n^{(1)}(x)\}$ y $Q_0(x) = P_1(x) = x - B_0, Q_1(x) = P_2(x) = (x - B_1)P_1(x) - C_1$, así que $Q_1(x) - (x - B_1)Q_0(x) = -C_1$. Entonces, según el teorema, $Q_n(x) = (x - B_0)P_n^{(1)}(x) - C_1P_{n-1}^{(2)}(x), n \geq 0$, de lo cual (2.9) resulta inmediatamente. \square

Nota 2.1. Si $\{Q_n(x)\}$ es correcurso con $\{P_n(x)\}$ y $Q_0(x) = 0$, no necesariamente $Q_n(x) = 0$ para todo $n \geq 0$. Por ejemplo, $Q_n(x) = P_{n-1}^{(1)}(x), n \geq 0$, es correcurso con $\{P_n(x)\}$ y $Q_0(x) = 0$. Nótese que (2.8) es aún válida en este caso. El siguiente resultado, debido a Abel, es frecuentemente útil, y será fundamental en lo que sigue.

Teorema 2.2. [Abel] Si $\{P_n(x)\}$ está dado por (2.1), entonces

$$P_n^{(1)}(x)P_n(x) - P_{n-1}^{(1)}(x)P_{n+1}(x) = \lambda_n, \quad n \geq 0, \quad (2.10)$$

donde, siendo \mathcal{L} el FM de $\{P_n(x)\}$, $\lambda_n = \mathcal{L}(P_n^2(x)), n \geq 0$.

Demostación. Obsérvese que $\lambda_n = C_1 \dots C_n$ para $n \geq 1$. La afirmación es clara si $n = 0$, pues $\lambda_0 = 1$. Supongámosla entonces válida para $n - 1, n \geq 1$, y demostrémosla para n . Se tiene, en efecto, que

$$\begin{aligned} &P_{n-1}^{(1)}(x)P_{n+1}(x) \\ &= P_{n-1}^{(1)}(x)[(x - B_n)P_n(x) - C_nP_{n-1}(x)] \\ &= (x - B_n)P_{n-1}^{(1)}(x)P_n(x) - C_nP_{n-1}^{(1)}(x)P_{n-1}(x) \\ &= [P_n^{(1)}(x) + C_nP_{n-2}^{(1)}(x)]P_n(x) \\ &\quad - C_nP_{n-1}^{(1)}(x)P_{n-1}(x) \\ &= P_n^{(1)}(x)P_n(x) \\ &\quad - C_n[P_{n-1}^{(1)}(x)P_{n-1}(x) - P_{n-2}^{(1)}(x)P_n(x)] \end{aligned}$$

y la afirmación para n resulta inmediatamente de esto. \square

Si $\{P_n(x)\}$ está dado por (2.1), la fracción continua

$$\frac{1}{|x - B_0|} - \frac{C_1}{|x - B_1|} - \frac{C_2}{|x - B_2|} - \dots, \quad (2.11)$$

es decir,

$$\frac{1}{x - B_0 - \frac{C_1}{x - B_1 - \frac{C_2}{x - B_2 - \dots}}},$$

se denomina la *fracción continua de Stieltjes* de $\{P_n(x)\}$;

$$X_n(x) := \frac{1}{|x - B_0|} - \frac{C_1}{|x - B_1|} - \dots - \frac{C_{n-1}}{|x - B_{n-1}|}, \tag{2.12}$$

para $n \geq 2$, se denomina el *n-convergente* de dicha fracción (Chihara [19], Wall [30]). Es usual convenir en que $X_1(x) = \frac{1}{x - B_0}$. Si $z \in \mathbb{C}$, $X_n(z)$ está definido para todo $n \geq 1$ suficientemente grande y $\lim_{n \rightarrow \infty} X_n(z)$ existe en \mathbb{C} , se dice que la *fracción continua* (2.11) *converge en z*. Si $X(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} X_n(z)$, es corriente escribir

$$X(z) = \frac{1}{|z - B_0|} - \frac{C_1}{|z - B_1|} - \frac{C_2}{|z - B_2|} - \dots. \tag{2.13}$$

La función $X(z)$, definida en todos los puntos donde (2.11) converge, se denomina aún la *fracción continua* de $\{P_n(x)\}$.

Teorema 2.3. *Si $X_n(x)$ es el n-convergente de la fracción continua de $\{P_n(x)\}$, entonces*

$$X_n(x) = \frac{P_{n-1}^{(1)}(x)}{P_n^{(1)}(x)}, \quad n \geq 1. \tag{2.14}$$

Demostración. La afirmación es clara para $n = 1$, pues $P_0^{(1)}(x) = 1$ y $P_1(x) = x - B_0$. Supongámosla para n y demostrémosla para $n + 1$. Entonces, por hipótesis,

$$\begin{aligned} X_n^{(1)}(x) &:= \frac{1}{|x - B_0^{(1)}|} - \frac{C_1^{(1)}}{|x - B_1^{(1)}|} - \dots - \frac{C_{n-1}^{(1)}}{|x - B_{n-1}^{(1)}|} \\ &= \frac{P_{n-1}^{(2)}(x)}{P_n^{(1)}(x)}, \end{aligned} \tag{2.15}$$

y como

$$\begin{aligned} X_{n+1}(x) &= \frac{1}{x - B_0 - C_1 \left[\frac{1}{|x - B_1|} - \frac{C_2}{|x - B_2|} - \dots - \frac{C_n}{|x - B_n|} \right]} \\ &= \frac{P_n^{(1)}(x)}{(x - B_0) P_n^{(1)}(x) - C_1 P_{n-1}^{(2)}(x)}, \end{aligned}$$

la afirmación para $n + 1$ resulta de (2.8). \square

Nota 2.2. Definiendo $X_n^{(i)}(x)$, $i = 0, 1, 2, \dots$, de la manera obvia, se tendrá que

$$X_n^{(i)}(x) = \frac{P_{n-1}^{(i+1)}(x)}{P_n^{(i)}(x)}, \quad n \geq 1. \tag{2.16}$$

Nota 2.3. Se deduce que si $z \in \mathbb{C}$ y no es raíz de ninguno de los $P_n(x)$, $X_n(z)$ está definido para todo $n \geq 1$. En particular, si el FM de $\{P_n(x)\}$ es positivo o, lo que es lo mismo, si B_n y C_n son reales para $n \geq 0$ y $C_n > 0$ para $n \geq 1$, $X_n(z)$ está definido para todo $n \geq 0$ si $z \notin \mathbb{R}$.

Si para todo $n \geq 1$, $e_k^n = (\delta_{0k}, \delta_{1k}, \dots, \delta_{n-1k})$, $0 \leq k \leq n - 1$, es la base canónica de \mathbb{C}^n (la cual es un sistema ortonormal con respecto al producto interno $\left\langle \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k e_k^n, \sum_{k=0}^{n-1} \beta_k e_k^n \right\rangle = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k \overline{\beta_k}$), un FM, cuyo SMOP $\{P_n(x)\}$ satisface (2.1), define para $i = 0, 1, 2, \dots$ un operador lineal $L_n^{(i)} : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$, $n \geq 1$, por (recordamos que $B_k^{(i)} = B_{k+i}$, $C_k^{(i)} = C_{k+i}$):

$$L_n^{(i)} e_k^n = e_{k+1}^n + B_k^{(i)} e_k^n + C_k^{(i)} e_{k-1}^n, \quad 0 \leq k < n, \tag{1.17}$$

$$L_n^{(i)} (e_{n-1}^n) = B_{n-1}^{(i)} e_{n-1}^n + C_{n-1}^{(i)} e_{n-2}^n,$$

donde suponemos que $e_{-1}^n = (0, 0, \dots, 0) \in \mathbb{C}^n$. Nótese que la matriz de $L_n^{(i)}$ con respecto a la base $\{e_k^n\}$, la cual denotamos aún con $L_n^{(i)}$, es

$$L_n^{(i)} = \begin{pmatrix} B_0^{(i)} & C_1^{(i)} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & B_1^{(i)} & C_2^{(i)} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & B_2^{(i)} & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & B_{n-2}^{(i)} & C_{n-1}^{(i)} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & B_{n-1}^{(i)} \end{pmatrix}, \tag{2.18}$$

para $n \geq 1$.

Si I_n es la matriz idéntica de orden n , es evidente que

$$P_1^{(i)}(x) = x - B_0^{(i)} = \text{Det}(xI_1 - L_1^{(i)}) \quad (2.19)$$

y desarrollando el determinante $\text{Det}(xI_{n+1} - L_{n+1}^{(i)})$ con respecto a la última columna, se obtiene que

$$\begin{aligned} \text{Det}(xI_{n+1} - L_{n+1}^{(i)}) &= (x - B_n^{(i)}) \text{Det}(xI_n - L_n^{(i)}) \\ &\quad - C_n^{(i)} \text{Det}(xI_{n-1} - L_{n-1}^{(i)}), \end{aligned}$$

donde convenimos en que $\text{Det}(xI_0 - L_0^{(i)}) = 1$. Entonces,

$$P_n^{(i)}(x) = \text{Det}(xI_n - L_n^{(i)}), \quad n \geq 0. \quad (2.20)$$

Por otra parte, la regla de Cramer muestra que

$$(xI_n - L_n^{(i)})^{-1} = \frac{1}{P_n^{(i)}(x)} A_n^{(i)}, \quad n \geq 1, \quad (2.21)$$

donde $A_n^{(i)} = [a_{hk}^{(i)}]_{n \times n}$ es una matriz tal que

$$a_{11}^{(i)} = \text{Det}(xI_{n-1} - L_{n-1}^{(i)}), \quad n \geq 1, \quad (2.22)$$

así que

$$\left\langle (xI_n - L_n^{(i)})^{-1} e_0^n, e_0^n \right\rangle = \frac{P_{n-1}^{(i+1)}(x)}{P_n^{(i)}(x)}, \quad n \geq 0. \quad (2.23)$$

En particular, con $L_n = L_n^{(0)}$,

$$\left\langle (xI_n - L_n)^{-1} e_0^n, e_0^n \right\rangle = X_n(x) = \frac{P_{n-1}^{(1)}(x)}{P_n(x)}, \quad n \geq 1. \quad (2.24)$$

Teorema 2.4. Si $n \geq 1$,

$$M_n = \sup \{1 + |B_k| + |C_k|, 0 \leq k \leq n-1\}$$

y

$$\|L_n\| = \sup \{|L_n(u)| \mid u \in \mathbb{C}^n, \|u\| \leq 1\}, \quad (2.25)$$

entonces $\|L_n\| \leq 3M_n$, y los valores propios de L_n son las raíces de $P_n(x)$, las cuales quedan todas contenidas en el disco $\overline{D}(0, 3M_n) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 3M_n\}$.

Demostración. Supongamos que $u = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k e_k^n$, así que

$$\|u\|^2 = \sum_{k=0}^{n-1} |\alpha_k|^2. \quad \text{Nótese que}$$

$$L_n(u) = \sum_{k=0}^{n-2} \alpha_k e_{k+1}^n + \sum_{k=0}^{n-1} B_k \alpha_k e_k^n + \sum_{k=0}^{n-1} C_k \alpha_k e_{k-1}^n,$$

de lo cual se deduce sin más que si $\|u\| \leq 1$ entonces

$$\|L_n(u)\| \leq (1 + 2M_n) \|u\| \leq 3M_n, \quad \|L_n\| \leq 3M_n,$$

y si λ es un valor propio de L_n , es decir, una raíz de $\text{Det}(xI_n - L_n) = P_n(x)$, y v es un vector propio de L_n para λ , entonces

$$|\lambda| = \frac{\|L_n(v)\|}{\|v\|} \leq \|L_n\| \leq 3M_n.$$

Esto demuestra el teorema. \square

Definición 2.3. Si $\{P_n(x)\}$ está dado por (2.1) y existe $M > 0$ tal que

$$\sup \{1 + |B_k| + |C_k|, k \geq 0\} \leq \frac{M}{3}, \quad (2.26)$$

se dice que $\{P_n(x)\}$ está acotado por M .

Si M_n para $\{P_n(x)\}$ es como en el Teorema 2.4 y $\{P_n(x)\}$ está acotado por M entonces $M_n \leq \frac{M}{3}$ para todo $n \geq 1$, así que las raíces de $P_n(x)$ están contenidas en $\overline{D}(0, M)$ para todo $n \geq 1$, y en $[-M, M]$ si B_n, C_n son reales y $C_n > 0$ para $n \geq 1$. Es decir, si el funcional de momentos de $\{P_n(x)\}$ es positivo y acotado por M , las raíces de $P_n(x)$ están en $[-M, M]$ para todo $n \geq 1$.

Teorema 2.5. Si $\{P_n(x)\}$ está acotado por M , la fracción continua de $\{P_n(x)\}$ converge en $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| > M\}$ hacia una función analítica $X(z)$ en este dominio. De hecho, la convergencia es uniforme en $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \geq M'\}$ para todo M

Demostración. Si para todo $n \geq 1$, $L_n = L_n^{(0)}$ está definido por (2.17) (con $i = 0$), es claro que $\|L_n\| \leq M$ y $\|L_n^k\| \leq M^k$ para todo $k \geq 0$. En efecto,

$$\left\| I_n - (zI_n - L_n) \sum_{k=0}^m \frac{L_n^k}{z^{k+1}} \right\| = \left\| \frac{L_n^{m+1}}{z^{m+1}} \right\| \leq \frac{M^{m+1}}{|z|^{m+1}},$$

lo cual implica que

$$\left\| (zI_n - L_n)^{-1} - \sum_{k=0}^m \frac{L_n^k}{z^{k+1}} \right\| \leq \left\| (zI_n - L_n)^{-1} \right\| \frac{M^{m+1}}{|z|^{m+1}},$$

así que si $|z| > M$, con lo cual $\left(\frac{M}{|z|}\right)^{m+1} \rightarrow 0$ cuando $m \rightarrow \infty$, entonces

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left\| (zI_n - L_n)^{-1} - \sum_{k=0}^m \frac{L_n^k}{z^{k+1}} \right\| = 0.$$

Como además

$$\begin{aligned} &\left| \left\langle (zI_n - L_n)^{-1} e_0^n, e_0^n \right\rangle - \sum_{k=0}^m \frac{\langle L_n^k e_0^n, e_0^n \rangle}{z^{k+1}} \right| \\ &\leq \left\| (zI_n - L_n)^{-1} - \sum_{k=0}^m \frac{L_n^k}{z^{k+1}} \right\| \end{aligned}$$

se concluye, con $\mu_{nk} = \langle L_n^k e_0^n, e_0^n \rangle$, que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left| \frac{P_{n-1}^{(1)}(z)}{P_n(z)} - \sum_{k=0}^m \frac{\mu_{nk}}{z^{k+1}} \right| = 0, \quad |z| > M.$$

Esto implica, en particular, que $\sum_{k=0}^m \frac{\mu_{nk}}{z^{k+1}}$ es la serie de

Laurent de $\frac{P_{n-1}^{(1)}(z)}{P_n(z)}$ en $|z| > M$. Es importante observar que

$$|\mu_{nk}| \leq \|L_n\|^k \leq M^k, \quad n \geq 1, \quad k \geq 0.$$

Obsérvese además que

$$\frac{P_n^{(1)}(z)}{P_{n+1}(z)} - \frac{P_{n-1}^{(1)}(z)}{P_n(z)} = \frac{\lambda_n}{P_{n+1}(z)P_n(z)}, \quad (2.27)$$

$$n \geq 1, \quad |z| > M,$$

como resulta de (2.10). Esto implica, en vista de que es obviamente así (por división larga, por ejemplo) para el término de la derecha, que el desarrollo de Laurent en $|z| > M$ del término de la izquierda sólo contiene potencias de z^{-k} con $k \geq 2n + 1$, y esto también será cierto del desarrollo de Laurent de $\frac{P_m^{(1)}(z)}{P_{m+1}(z)} - \frac{P_{n-1}^{(1)}(z)}{P_n(z)}$

para $m \geq n$, el cual es necesariamente $\sum_{k=2n}^{\infty} \frac{\mu_{mk} - \mu_{nk}}{z^{k+1}}$.

Entonces, para $|z| \geq M' > M$,

$$\left| \frac{P_m^{(1)}(z)}{P_{m+1}(z)} - \frac{P_{n-1}^{(1)}(z)}{P_n(z)} \right| \leq \frac{2}{M'} \sum_{k=2n}^{\infty} \left(\frac{M}{M'} \right)^k, \quad n \geq 1,$$

lo cual asegura que $\left\{ \frac{P_{n-1}^{(1)}(z)}{P_n(z)} \right\}$ es uniformemente de

Cauchy en $|z| \geq M'$ para todo $M' > M$. Por lo tanto

$$X(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} X_n(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_{n-1}^{(1)}(z)}{P_n(z)}$$

existe para $|z| > M$ y es uniforme en $|z| \geq M'$ para todo $M' > M$, de lo cual, en todo subconjunto compacto de $\{z \mid |z| > M\}$. Como $X_n(z)$ es analítica en $|z| > M$, también lo será entonces $X(z)$. \square

Nota 2.3. Es claro que si f es analítica en un subconjunto abierto Ω de \mathbb{C} tal que $\Omega' = \Omega \cap \{z \mid |z| > M\} \neq \emptyset$ y $f(z) = X(z)$ para todo $z \in \Omega'$, entonces $f(z)$ y $X(z)$ pueden prolongarse analíticamente a $\Omega'' = \{z \mid |z| > M\} \cup \Omega$, y las prolongaciones coinciden en este conjunto. Por ejemplo, si $\Omega \supseteq \{z \mid |z| > M\}$, $X(z)$ puede automáticamente considerarse analítica en Ω .

El siguiente teorema, último de la presente sección, tiene importantes implicaciones, como veremos. Suponemos aún que $1 + |B_n| + |C_n| \leq \frac{M}{3}$ para todo $n = 0, 1, 2, \dots$

Teorema 2.6. *El desarrollo de Laurent de $X(z)$ en $|z| > M$ es de la forma*

$$X(z) = \frac{1}{z} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{b_{-k}}{z^k}. \quad (2.28)$$

En particular,

$$\lim_{z \rightarrow \infty} zX(z) = 1. \quad (2.29)$$

Demostración. Supongamos

$$X(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} b_k z^k, \quad |z| > M,$$

y sea C un contorno positivamente orientado de $|z| > M$ que contiene a $\overline{D}(0, M)$ en su interior. Como

$$X_n(z) = \frac{P_{n-1}^{(1)}(z)}{P_n(z)} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} b_{nk} z^k, \quad |z| > M,$$

donde $b_{nk} = 0$, $k \geq 0$, $b_{n,-1} = 1$, $b_{n,-k} = \mu_{n,k-1}$, $k \geq 2$, y $X_n(z)$ converge uniformemente a $X(z)$ sobre C cuando $n \rightarrow \infty$, se tiene que

$$\begin{aligned} b_{nk} &= \frac{1}{2\pi i} \int_C X_n(z) z^{-k-1} dz \rightarrow \frac{1}{2\pi i} \int_C X(z) z^{-k-1} dz \\ &= b_k \end{aligned}$$

para todo $k \in \mathbb{Z}$, así que $b_k = 0$, $k \geq 0$, y $b_{-1} = 1$. Esto demuestra el teorema. \square

3. Representación de los funcionales de momentos

Establecemos en esta sección dos teoremas de representación de funcionales de momentos. El primero, válido para funcionales no necesariamente positivos pero cuyo *SMOP* está acotado, involucra la fracción continua de éstos y se expresa mediante integrales de contorno (véanse [6], [14], [15] y [21]). El segundo, válido para funcionales positivos, acotados o no, recurre a funciones de distribución de momentos sobre la recta y, por lo tanto, a medidas de Borel positivas. Sólo demostraremos este último en el caso acotado, pues éste es el único que usaremos, refiriendo al lector a Chihara [19] para la demostración en el caso no acotado (y también para otra demostración del caso acotado).

Teorema 3.1. Sea \mathcal{L} un funcional de momentos cuyo SMOP $\{P_n(x)\}$ está acotado por M . Sean $X(z)$ la fracción continua de $\{P_n(x)\}$ y C un contorno positivamente orientado de $|z| > M$ el cual contiene a $\overline{D}(0, M)$ en su interior. Entonces, \mathcal{L} admite la representación

$$\mathcal{L}(P(x)) = \frac{1}{2\pi i} \int_C X(z) P(z) dz, \quad (3.1)$$

válida para todo polinomio $P(x) \in \mathbb{C}[x]$.

Demostración. Como

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C X(z) dz = 1, \quad \frac{1}{2\pi i} \int_C P_{n-1}^{(1)}(z) dz = 0, n \geq 1, \quad (3.2)$$

y, recurriendo a (2.10),

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{P_{n+m-1}^{(1)}(z)}{P_{n+m}(z)} P_n(z) dz &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^m \int_C \left[\frac{P_{n+k-1}^{(1)}(z)}{P_{n+k}(z)} - \frac{P_{n+k-2}^{(1)}(z)}{P_{n+k-1}(z)} \right] P_n(z) dz + \frac{1}{2\pi i} \int_C P_{n-1}^{(1)}(z) dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^m \int_C \frac{\lambda_{n+k-1} P_n(z)}{P_{n+k}(z) P_{n+k-1}(z)} dz = 0, m, n \geq 1, \end{aligned}$$

se deduce, haciendo $m \rightarrow \infty$, que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C X(z) P_n(z) dz = 0, n \geq 1. \quad (3.3)$$

Como $\mathcal{L}'(P(x))$ definido por el término de la derecha en (3.1) es obviamente \mathbb{C} -lineal, (3.2) y (3.3) garantizan, en virtud de (1.9) o (1.11), que $\mathcal{L}' = \mathcal{L}$. \square

El siguiente teorema simple (véanse [14], [15], [16]) tiene, sin embargo, consecuencias útiles.

Teorema 3.2. Supóngase que el funcional \mathcal{L} de $\{P_n(x)\}$, acotado por M , admite también la representación

$$\mathcal{L}(P(x)) = \frac{1}{2\pi i} \int_C F(z) P(z) dz \quad (3.4)$$

donde C es como en el Teorema 3.1 y donde $F(z)$ es analítica en $|z| > M$ con $\lim_{z \rightarrow \infty} F(z) = 0$. Entonces, $F(z) = X(z)$, $|z| > M$.

Demostración. Supóngase que

$$X(z) - F(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^n,$$

$|z| > M$. Como en virtud de (3.1) y (3.4),

$$a_{-n} = \frac{1}{2\pi i} \int_C (X(z) - F(z)) z^{n-1} dz = 0, n \geq 1,$$

se deduce que $X(z) - F(z)$ admite una prolongación analítica a todo \mathbb{C} . Como además $\lim_{z \rightarrow \infty} (X(z) - F(z)) = 0$ entonces $a_n = 0$ para todo $n \geq 0$ (Apostol, Teorema

116.21), así que $X(z) = F(z)$, $|z| > M$. \square

Nota 3.1. De hecho, si $\lim_{z \rightarrow \infty} F(z)$ existe, finito o infinito, $X(z) - F(z)$ es un polinomio (obsérvese que si $P(x)$ es un polinomio y $F(z) = X(z) + P(z)$, $|z| > M$, (3.4) es aún válida).

El siguiente teorema puede ser útil para determinar las fracciones continuas (Ejemplo 5.2 más adelante) y para muchos otros propósitos

Teorema 3.3. [Markov] Si \mathcal{L} está representado por una distribución de momentos φ con $\mathcal{G}(\varphi)$ infinito y $\mathcal{G}(\varphi) \subseteq (a, b)$, $-\infty < a < b < \infty$, y si $X(z)$ es la fracción continua del SMOP de \mathcal{L} , entonces

$$X(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\varphi(t)}{z-t} = \int_a^b \frac{d\varphi(t)}{z-t} \quad (3.6)$$

y es analítica en $\mathbb{C} \setminus [a, b]$.

Demostración. La segunda igualdad en (3.6) resulta del hecho de que φ es constante en $\mathbb{R} \setminus [a, b]$ y del hecho de que $a, b \notin \mathcal{G}(\varphi)$. Sea $M > \max\{|a|, |b|\}$ tal que si $\{P_n(x)\}$, dado por (1.7), es el SMOP de \mathcal{L} , entonces $1 + |B_n| + C_n \leq \frac{M}{3}$ para todo $n \geq 0$. La existencia de M resulta del Teorema 1.5. Demostraremos que si $F(z)$ está dada por los términos de la derecha en (3.6)

entonces F es analítica en $\mathbb{C} \setminus [a, b]$, $\lim_{z \rightarrow \infty} zF(z) = 1$ y

$$\mathcal{L}(P(x)) = \frac{1}{2\pi i} \int_C F(z) P(z) dz, P(x) \in \mathbb{C}[x],$$

donde C es cualquier contorno positivamente orientado de $\mathbb{C} \setminus \overline{D}(0, M)$ con $\overline{D}(0, M)$ en su interior. Obsérvese que $[a, b] \subseteq [-M, M]$.

Ahora, si $c \notin [a, b]$ y $\varepsilon > 0$ es tal que $D(c, \varepsilon) \cap [a, b] = \emptyset$, entonces

$$\frac{1}{z-t} = \frac{1}{[(z-c) - (t-c)]} = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-c)^n}{(t-c)^{n+1}}$$

en tanto que $z \in D(c, \varepsilon)$ y $t \in [a, b]$. Como $\varepsilon \leq \text{dist}([a, b], c)$, así que

$$\frac{|z-c|}{|t-c|} \leq r < 1, r = \frac{|z-c|}{\varepsilon},$$

para todo $t \in [a, b]$, la convergencia de la serie es uniforme en $[a, b]$, y podemos integrarla término a término con respecto a $d\varphi(t)$ sobre $[a, b]$, para obtener que

$$\int_a^b \frac{d\varphi(t)}{z-t} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[- \int_a^b \frac{d\varphi(t)}{(t-c)^{n+1}} \right] (z-c)^n, z \in D(c, \varepsilon).$$

Esto demuestra la analiticidad de F en $\mathbb{C} \setminus [a, b]$. Por otra parte,

$$zF(z) = \int_a^b \frac{d\varphi(t)}{1-t/z} \rightarrow \int_a^b d\varphi(t) = 1$$

cuando $z \rightarrow \infty$. Finalmente, $[a, b]$ está contenido en el interior de C y

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_C F(z) P(z) dz &= \frac{1}{2\pi i} \int_C \left[\int_a^b \frac{d\varphi(t)}{z-t} \right] P(z) dz \\ &= \int_a^b \left[\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{P(z)}{z-t} dz \right] d\varphi(t) \\ &= \int_a^b P(t) d\varphi(t) \\ &= \mathcal{L}(P(x)), \end{aligned}$$

como resulta de intercambiar el orden de integración y de la fórmula de Cauchy. Esto demuestra, en virtud del Teorema 3.2, que $F(z) = X(z)$, $|z| > M$, o sea, que $X(z)$ puede prolongarse analíticamente a $\mathbb{C} \setminus [a, b]$ y está dada por (3.6). \square

Nota 3.2. Bajo las hipótesis del teorema anterior, $X(z)$ es analítica en $\mathbb{C} \setminus [a, b]$. El teorema integral de Cauchy asegura entonces que si C es un contorno cerrado y positivamente orientado de $\mathbb{C} \setminus [a, b]$ con $[a, b]$ en su interior, (3.1) es aún válida para C .

Nota 3.3. Si μ es la medida de Borel asociada con la distribución de momentos φ del Teorema 3.3 (véase Sección 1), entonces

$$X(z) = \int_{\mathcal{G}(\varphi)} \frac{d\mu(t)}{z-t}, z \notin \mathcal{G}(\varphi), \quad (3.7)$$

y, teniendo en cuenta que $\mathcal{G}(\varphi)$ es, bajo las hipótesis de tal teorema, un subconjunto compacto de \mathbb{R} , se verifica, tal como en la demostración arriba, que $X(z)$ es, de hecho, analítica en $\mathbb{C} \setminus \mathcal{G}(\varphi)$.

Nota 3.4. Si μ es como en la Nota 3.3 y a es un punto aislado de $\mathcal{G}(\varphi) = \text{Supp } \mu$, y si $r > 0$ es tal que $D(a, r) \cap \mathcal{G}(\varphi) = \{a\}$, entonces lo dicho en la Nota 3.3 asegura que $X(z)$ es analítica en $D^*(a, r) = \{\zeta \in \mathbb{C} \mid 0 < |\zeta - a| < r\}$, y si $\mathcal{G}_a(\varphi) = \mathcal{G}(\varphi) - \{a\}$, entonces

$$X(z) = \frac{\mu(\{a\})}{z-a} + \int_{\mathcal{G}_a(\varphi)} \frac{d\mu(t)}{z-t}, z \in D^*(a, r), \quad (3.8)$$

así que

$$\lim_{z \rightarrow a} (z-a) X(z) = \mu(\{a\}). \quad (3.9)$$

Es decir,

$$\text{Res}(X(z), a) = \mu(\{a\}). \quad (3.10)$$

Nota 3.5. Obsérvese además que si $\mathcal{G}(\varphi) \subseteq [a, b]$, $-\infty < a < b < \infty$, es decir, si $\mathcal{G}(\varphi)$ es compacto, entonces $C_\varphi(\mathbb{R}, \mathbb{C}) = C(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ el espacio de todas las funciones continuas de \mathbb{R} en \mathbb{C} . Mas aún, si $C([a, b], \mathbb{C})$ es el espacio de las funciones continuas en $[a, b]$ y $f \in C([a, b], \mathbb{C})$ se identifica con la función

$$\hat{f}(x) = \begin{cases} f(a), & x < a \\ f(x), & a \leq x \leq b \\ f(b), & x > b \end{cases}, \quad (3.11)$$

entonces

$$\int_a^b f(t) d\varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(t) d\varphi(t) = \int \hat{f} d\mu = \int f d\mu' \quad (3.12)$$

donde μ es como en la Nota 3.3 y μ' es la restricción de μ a $[a, b]$.

Demostraremos ahora nuestro segundo teorema de representación, válido para funcionales positivos. Como lo hemos mencionado, nos restringiremos al caso acotado, el único que usaremos. Esto nos permitirá recurrir a un conocido teorema de F. Riesz, en lugar de a resultados sobre selección por compacidad del tipo de Helly tal como Chihara [19], lo cual, además, requiere menos consideraciones sobre cuadraturas de Gauss. De todas maneras la demostración en [19], Chap. II, que cubre aún el caso no acotado, es fácil de asimilar y difícil de mejorar.

El resultado de Riesz que necesitaremos es el siguiente:

Lema 3.1. [Teorema de Representación de Riesz] Sean $-\infty < a < b < \infty$ números reales y considérese el espacio $C([a, b])$ de las funciones reales continuas definidas en $[a, b]$. Sea $\mathcal{L} : C([a, b]) \rightarrow \mathbb{R}$ una aplicación \mathbb{R} -lineal tal que

$$|\mathcal{L}(f)| \leq \|f\| := \sup_{t \in [a, b]} |f(t)|, \quad (3.13)$$

Entonces, existe una medida de Borel μ sobre \mathbb{R} tal que

$$\mathcal{L}(f) = \int f d\mu, \quad f \in C([a, b]), \quad (3.14)$$

la cual es positiva si $\mathcal{L}(P(x)) \geq 0$ para todo polinomio $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ tal que $P(t) \geq 0$ para todo $t \in [a, b]$. En este último caso

$$\mathcal{L}(1) = \mu(\mathbb{R}) \quad (3.15)$$

y μ tiene soporte compacto contenido en $[a, b]$.

La demostración de la anterior forma del Lema 3.1 puede deducirse fácilmente a partir de Rudin [26], Teorema 6.19, p. 139, si se tiene en cuenta lo observado en la Nota 3.5, y no la daremos. Estableceremos, sin embargo, la positividad de μ . Pero si $f \in C([a, b])$, $f \geq 0$, teniendo en cuenta que según el Teorema de Aproximación de Weierstrass ([27], p. 154) es posible escoger una sucesión $p_n(x) \in \mathbb{R}[x]$ tal que $\|p_n - f\| < \frac{1}{n}$, y si $q_n(x) = p_n(x) + \frac{1}{n}$ entonces $q_n(t) \geq f(t) \geq 0$ para todo $t \in [a, b]$ y $\|q_n - f\| < \frac{2}{n}$, la afirmación resuelta de esto, pues entonces $\mathcal{L}(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{L}(q_n(x)) \geq 0$.

Necesitaremos además el siguiente lema.

Lema 3.2. Si \mathcal{L} es positivo y acotado por $M > 0$, y si $P(x) \neq 0$ es un polinomio que no toma valores negativos en $[-M, M]$, entonces

$$\mathcal{L}(P(x)) > 0. \quad (3.16)$$

Demostración. Sea $\{P_n(x)\}$ el sistema mónico ortogonal de \mathcal{L} y sea n tal que el grado de $P(x)$ sea menor que n . Para cualquier polinomio $Q(x)$ de grado menor que $2n$ se tiene que

$$\frac{Q(x)}{P_n(x)} = \frac{a_1}{x-x_1} + \frac{a_2}{x-x_2} + \dots + \frac{a_n}{x-x_n} + R_n(x) \quad (3.17)$$

donde x_1, \dots, x_n son las raíces de $P_n(x)$, las cuales están todas en $[-M, M]$,

$$a_i = \frac{Q(x_i)}{P_n'(x_i)}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (3.18)$$

y $R_n(x)$ es un polinomio de grado menor que n . Como, de (1.4), $\mathcal{L}(R_n(x)P_n(x)) = 0$, se concluye, de (3.17) y (3.18), que

$$\mathcal{L}(Q(x)) = \sum_{i=1}^n a_i \mathcal{L}(P_n(x)), \quad (3.19)$$

donde

$$A_i = \mathcal{L}\left(\frac{P_n(x)}{(x-x_i)P_n'(x_i)}\right), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.20)$$

Como el grado de $\left(\frac{P_n(x)}{(x-x_j)P_n'(x_j)}\right)^2$ es menor de $2n$, se tiene entonces que

$$\mathcal{L}\left(\left(\frac{P_n(x)}{(x-x_j)P_n'(x_j)}\right)^2\right) = \quad (3.21)$$

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{P_n(x_i)}{(x_i-x_j)P_n'(x_j)}\right)^2 A_i = A_j,$$

de donde se deduce que $A_j > 0$, $j = 1, 2, \dots, n$. Ahora bien, como $P(x_i) \geq 0$, $i = 1, 2, \dots, n$, y $P(x_j) > 0$ para algún $j = 1, 2, \dots, n$ (pues $P(x)$ tiene grado menor que n), de (3.19), con $P(x)$ en vez de $Q(x)$, se concluye que $\mathcal{L}(P(x)) > 0$. Esto demuestra el lema. \square

Corolario 3.1. Bajo las hipótesis del lema anterior, si $P(x)$, $Q(x)$ son polinomios reales y $P(t) \leq Q(t)$ para todo t en $[-M, M]$, entonces $\mathcal{L}(P(x)) \leq \mathcal{L}(Q(x))$.

Nota 3.6. Las propiedades (3.19) y (3.21) de los funcionales positivos son frecuentemente útiles.

Corolario 3.2. Bajo la hipótesis del corolario anterior, \mathcal{L} es un funcional continuo sobre el espacio $\mathbb{R}[x]$ de los polinomios reales para la topología de la norma

$$\|P\| = \sup_{t \in [-M, M]} |P(t)|. \quad (3.22)$$

Demostración En efecto, como $-\|P\| \leq P(t) \leq \|P\|$ para todo $t \in [-M, M]$, entonces, en virtud del Corolario 3.1,

$$|\mathcal{L}(P(x))| \leq \|P\|. \quad \square \quad (3.23)$$

Ahora podemos demostrar que

Teorema 3.4. *Si \mathcal{L} es positivo y acotado por $M > 0$, existe una medida de Borel positiva μ , con soporte compacto contenido en $[-M, M]$, tal que*

$$\mathcal{L}(P(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} P(t) d\mu(t), \quad P(x) \in \mathbb{C}[x]. \quad (3.24)$$

Demostración. En virtud del Teorema de Aproximación de Weierstrass [28], p. 154), $\mathbb{R}[x]$ es denso en $C([-M, M])$, el espacio de las funciones reales continuas en $[-M, M]$, cuando se da a este espacio la topología de la norma

$$\|f\| = \sup_{t \in [-M, M]} |f(t)|. \quad (3.25)$$

Como \mathcal{L} es lineal y continuo sobre $\mathbb{R}[x]$ para la topología de esta norma, \mathcal{L} admite una extensión continua $\widehat{\mathcal{L}}$ a $C([-M, M])$, y en virtud del Teorema de Representación de Riesz, Lema 3.1, existe una medida μ con soporte en $[-M, M]$ tal que

$$\widehat{\mathcal{L}}(f) = \int_{-M}^M f(t) d\mu(t), \quad f \in C([-M, M]). \quad (3.26)$$

Como $\mathcal{L}(P(x)) \geq 0$ si $P(t) \geq 0$ para $t \in [-M, M]$, también $\widehat{\mathcal{L}}(f) \geq 0$ para $f \geq 0$ en $C([-M, M])$. Entonces μ es una medida positiva, y es claro que

$$\mathcal{L}(P(x)) = \widehat{\mathcal{L}}(P(x)) = \int_{-M}^M P(t) d\mu(t) = \int_{-\infty}^{\infty} P(t) d\mu(t) \quad (3.27)$$

para cualquier polinomio $P(x) \in \mathbb{R}[x]$. \square

Nota 3.7. De lo dicho en la Nota 1.15 se deduce que $\text{Supp } \mu$ en el teorema anterior es infinito.

Nota 3.8. Si \mathcal{L} es positivo y acotado por μ y \mathcal{L} está representado por dos medidas positivas con soporte compacto μ, ν , no hay pérdida de generalidad al suponer que M es lo suficiente grande para que $\text{Supp } \mu \cup \text{Supp } \nu \subseteq [-M, M]$, y el Teorema de Aproximación de Weierstrass, la densidad uniforme de $\mathbb{R}[x]$ en $C([-M, M])$, asegura entonces que $\mu = \nu$. Es decir, si \mathcal{L} es positivo y acotado, \mathcal{L} sólo puede ser representado por una única medida positiva con soporte compacto. Más aún, si un funcional \mathcal{L} está definido por una medida positiva con soporte compacto infinito, ésta es la única medida que representa a \mathcal{L} . Para ver esto, supóngase por el contrario que

\mathcal{L} puede representarse en la forma (3.24) mediante dos medidas positivas μ, ν , μ con soporte compacto. Sea $\varphi \geq 0$, continua y con soporte compacto, y sea $\psi = \sqrt{\varphi}$. Sea $\{p_n(x)\}$ una sucesión de polinomios reales que aproximen uniformemente a ψ en $[-M, M]$, donde $M > 0$ es tal que $\text{Supp } \mu \cup \text{Supp } \varphi \subseteq [-M, M]$. La existencia de $\{p_n(x)\}$ está garantizada por el Teorema de Aproximación de Weierstrass ([24], p.154). Evidentemente $\{p_n^2(x)\}$ converge uniformemente a φ en $[-M, M]$, así que

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi d\mu &= \int_{-M}^M \varphi d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-M}^M p_n^2(t) d\mu \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} p_n^2(t) d\mu \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} p_n^2(t) d\nu \\ &\geq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-M}^M p_n^2(t) d\nu \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi d\nu. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Esto implica que si $\varphi = 0$ en $\text{Supp } \mu$ entonces $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi d\nu = 0$, así que $\text{Supp } \nu \subseteq \text{Supp } \mu$. Esto último implica a su vez que, para $\varphi \geq 0$, la desigualdad en (3.28) es realmente una igualdad. Entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} f d\mu = \int_{-\infty}^{\infty} f d\nu \quad (3.29)$$

para toda función continua f con soporte compacto, así que $\mu = \nu$, y la afirmación está demostrada.

Nota 3.9. Como lo hemos mencionado, es posible demostrar (véase [10], [19], [27]) que si \mathcal{L} es positivo aunque no acotado, \mathcal{L} admite aún una representación de la forma (3.28) con μ positiva. En tal caso μ no tendrá soporte compacto (Nota 3.8), y tal representación no será necesariamente única: pueden existir infinitas medidas distintas μ para las cuales (3.24) se verifique (véase [14], p.73). Cuando este último es el caso, se dice que el *problema de momentos para \mathcal{L} es indeterminado*. Cuando el problema de momentos para \mathcal{L} está determinado, es decir, cuando aun si no tiene soporte compacto la medida que representa a \mathcal{L} es única, se dice que tal medida es una *medida espectral* para \mathcal{L} . Este es el caso si \mathcal{L} es positivo y acotado.

Si \mathcal{L} es positivo, acotado por $M > 0$ y está representado por la medida positiva μ con soporte compacto

en $[-M, M]$, y si $X(z)$ es la fracción continua de su SMOP $\{P_n(x)\}$, entonces

$$X(z) = \int_{-M}^M \frac{d\mu(s)}{z-s}, \quad z \notin [-M, M] \quad (3.30)$$

como se deduce del Teorema de Markov (Teorema 3.3). La integral con respecto a μ es sobre $[-M, M]$.

En vista de que $\{P_n(x)\}$ y $\{P_n^{(1)}(x)\}$ son polinomios reales se tiene, para $\text{Im } z \neq 0$, que

$$\overline{X(z)} = X(\bar{z}) \quad (3.31)$$

Esto implica que, para $0 < \varepsilon < 1, t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \text{Re}(X(t-i\varepsilon)) &= \int_{-M}^M \frac{(t-s)d\mu(s)}{(t-s)^2 + \varepsilon^2}, \\ \text{Im}(X(t-i\varepsilon)) &= \frac{\varepsilon d\mu(s)}{(t-s)^2 + \varepsilon^2}. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Nótese que $\text{Im}(X(t-i\varepsilon)) \geq 0$ en tanto $\varepsilon > 0$. Se tiene así el siguiente teorema adicional de representación para los funcionales positivos acotados, el cual puede ser útil en ciertas circunstancias.

Corolario 3.3. Si \mathcal{L} es positivo y acotado por $M > 0$ y si $X(z)$ es la fracción continua de su SMOP, entonces

$$\mathcal{L}(P(x)) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \text{Im } X(t-i\varepsilon) P(t) dt \quad (3.33)$$

para todo $a \in \mathbb{R}, a > M$.

Demostración. Para demostrar (3.33) es suficiente establecer su validez para $P(x) = x^n, n \geq 0$. Obviamente $(t-i\varepsilon)^n = t^n + \varepsilon p_n(t, \varepsilon) + i\varepsilon q_n(t, \varepsilon)$, donde $p_n(t, \varepsilon)$ y $q_n(t, \varepsilon)$ son polinomios en t y ε con coeficientes reales. Por lo tanto, si $M < a < \infty$, existe una constante $C > 0$, dependiente únicamente de a y n , tal que $|p_n(t, \varepsilon)| \leq C, |q_n(t, \varepsilon)| \leq C$ para $|t| \leq a$ y $0 \leq \varepsilon \leq 1$. Se deduce que si Γ_a, ε es el borde positivamente orientado del rectángulo de vértices $(-a, -\varepsilon), (a, -\varepsilon), (a, \varepsilon), (-a, \varepsilon)$ se tiene, a partir de (3.1), que

$$\mathcal{L}(x^n) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_a, \varepsilon} z^n X(z) dz, \quad (3.34)$$

y, puesto que las integrales sobre los segmentos verticales de Γ_a, ε se anulan cuando $\varepsilon \rightarrow 0$ (debido a la continuidad de $X(z)$ sobre estos segmentos), entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x^n) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \left\{ \int_{-a}^a \text{Im}(X(t-i\varepsilon)(t-i\varepsilon)^n) dt \right\} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \left\{ \int_{-a}^a \text{Im } X(t-i\varepsilon) t^n dt \right. \\ &\quad \left. + \varepsilon \int_{-a}^a \text{Re } X(t-i\varepsilon) q_n(t, \varepsilon) dt \right. \\ &\quad \left. + \varepsilon \int_{-a}^a \text{Im } X(t-i\varepsilon) p_n(t-i\varepsilon) dt \right\} \end{aligned} \quad (3.35)$$

Pero como resultado de (3.32),

$$\begin{aligned} &\left| \int_{-a}^a \text{Re } X(t-i\varepsilon) q_n(t, \varepsilon) dt \right| \\ &\leq C \int_{-M}^M \left\{ \int_{-a}^a \frac{|t-s|}{(t-s)^2 + \varepsilon^2} dt \right\} d\mu(s) \\ &\leq \frac{C}{2} \int_{-M}^M \log \left[\left((a-s)^2 + \varepsilon^2 \right) \left((a+s)^2 + \varepsilon^2 \right) \right] d\mu(s) \\ &\quad - 2C\mu([-M, M]) \log \varepsilon \\ &\leq C' \log \int_{-M}^M |(a^2 - s^2)| d\mu(s) - 2C \log \varepsilon \end{aligned} \quad (3.36)$$

para todo $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño y $C' > C$, pues $\log \left[\left((a-s)^2 + \varepsilon^2 \right) \left((a+s)^2 + \varepsilon^2 \right) \right]$ tiende a $2 \log(a^2 - s^2)$ uniformemente en $[-M, M]$ cuando $\varepsilon \rightarrow 0$. También,

$$\begin{aligned} &\left| \int_{-a}^a \text{Im } X(t-i\varepsilon) p_n(t, \varepsilon) dt \right| \\ &\leq C \int_{-M}^M \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{u^2 + 1} \right\} d\mu(s) \leq C\pi. \end{aligned} \quad (3.37)$$

Entonces, $\mathcal{L}(x^n)$ es como se desea. \square

Nota 3.10. Obsérvese ahora que si $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es continua en $[-a, a]$, $\{p_n(x)\}$ es una sucesión de polinomios uniformemente convergente a φ en $[-a, a]$, $L = \pi \int \varphi d\mu$ y $\| \cdot \|$ denota la norma de la convergencia uniforme en $[-a, a]$, (3.33) implica que

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \left| \int_{-a}^a \text{Im } X(t-i\varepsilon) \varphi(t) dt - L \right| \leq 2\pi \|\varphi - p_n\| \quad (3.38)$$

para todo $n \geq 0$ y, por lo tanto,

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \left| \int_{-a}^a \text{Im}(X(t-i\varepsilon)) \varphi(t) dt - L \right| = 0. \quad (3.39)$$

Entonces,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \operatorname{Im} X(t - i\varepsilon) \varphi(t) dt = \int \varphi d\mu. \quad (3.40)$$

La fórmula (3.40) se conoce como la *Fórmula de Inversión de Stieltjes* (véase Askey & Ismail [6]; Chihara [19], Chap. III). Según tal fórmula, la medida μ está dada para las funciones continuas sobre \mathbb{R} por el lado izquierdo de la identidad (3.40). De hecho, la identidad será válida para cualquier función μ integrable.

Nota 3.11. Puesto que (3.33) y (3.40) son válidas en tanto $a > M$, es usual escribir tales fórmulas con $-\infty, \infty$ en lugar de $-a, a$. En nuestra opinión, esto puede ser causa de confusión. Al implicar un intercambio de límite e integral, las fórmulas (3.33) y (3.40) son difíciles de aplicar. Sin embargo, en la práctica es usual calcular la función

$$\omega(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} X(t - i\varepsilon) \quad (3.41)$$

en los puntos donde exista y sea finita (obsérvese que $\omega(t) = 0$ para $t \notin [-M, M]$). Si esto ocurre excepto tal vez en un número finito o enumerable de puntos ξ_j , $j = 1, 2, \dots$, y la función $\omega(t)$ resultante es no negativa e integrable en \mathbb{R} , es razonable suponer que $\omega(t) dt$ es la parte absolutamente continua de la medida y luego investigar si los puntos ξ_j son puntos de masa de la misma. Esto último se hace generalmente recurriendo al Teorema 3.5 siguiente. Sin embargo, dar al procedimiento una base sólida es en general difícil, salvo en circunstancias muy especiales (como las que consideramos en la Sección 4).

Teorema 3.5. Sean $\{P_n(x)\}$ un SMOP positivo y acotado por M , μ la medida espectral de $\{P_n(x)\}$. Sean $L_2(\mathbb{R}, d\mu)$ el espacio de las funciones complejas Lebesgue medibles y de cuadrado integrable dotado de la norma $\|f\|_{L_2(\mathbb{R}, d\mu)} = \sqrt{\int |f|^2 d\mu}$. y

$$L : L_2(\mathbb{R}, d\mu) \rightarrow L_2(\mathbb{R}, d\mu)$$

el operador definido por

$$L(f)(t) = tf(t), t \in \mathbb{R}. \quad (3.42)$$

Entonces $\{P_n(x)\}$ es una base ortogonal de $L_2(\mathbb{R}, d\mu)$ y L es un operador autoadjunto acotado. Las afirmaciones siguientes son además equivalentes para $\lambda \in \mathbb{R}$.

1. λ es un valor propio de L .
2. La medida μ porta una masa en $x = \lambda$, así que

$$\mu(\{\lambda\}) \neq 0. \quad (3.43)$$

3. $\sum_{n=0}^{\infty} P_n^2(\lambda) / \lambda_n < \infty$, donde $\lambda_n = L(P_n^2(x))$, $n \geq 0$. Además,

$$\mu(\{\lambda\}) = \frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty} P_n^2(\lambda) / \lambda_n} \quad (3.44)$$

Demostración. Que $L : L_2(\mathbb{R}, d\mu) \rightarrow L_2(\mathbb{R}, d\mu)$ definido por (3.42) es acotado, es claro, pues siendo $\{P_n(x)\}$ acotado por M entonces $\operatorname{Supp} \mu \subseteq [-M, M]$, así que

$$\|Lf\|_{L_2(\mathbb{R}, d\mu)}^2 = \|xf(x)\|_{L_2(\mathbb{R}, d\mu)}^2 \leq M^2 \|f\|_{L_2(\mathbb{R}, d\mu)}^2 \quad (3.45)$$

para toda $f \in L_2(\mathbb{R}, d\mu)$. Como además

$$\int L(f) \overline{g} d\mu = \int f \overline{(Lg)} d\mu, f, g \in L_2(\mathbb{R}, d\mu), \quad (3.46)$$

L es un operador simétrico acotado y, por lo tanto, autoadjunto. Como es evidente, $\{P_n(x)\} \subseteq L_2(\mathbb{R}, d\mu)$, y de la densidad uniforme (Teorema de Aproximación de Weierstrass) de los polinomios en $C([-M, M])$, el espacio de las funciones continuas en $[-M, M]$, se deduce, por medio de argumentos completamente estándar (véase Rainville, [25], p.155) que el sistema $\{P_n(x) / \sqrt{\lambda_n}\}$ es una base ortonormal de $L_2(\mathbb{R}, d\mu)$. Se deduce así que $\{P_n(x)\}$ es una base ortogonal de $L_2(\mathbb{R}, d\mu)$ (en la mencionada demostración de Rainville, $\omega(x) dx$ debe sustituirse por $d\mu(x)$).

Demostraremos ahora que (1) \implies (2). Sea φ una función propia de L para λ . Puesto que $(\lambda - x)\varphi(x) = 0$ para todo $x \neq \lambda$, si $\mu(\{\lambda\}) = 0$ entonces $\varphi = 0$ en $L_2(\mathbb{R}, d\mu)$, lo cual es absurdo. Para demostrar que (2) \implies (3), sea φ la función característica de $\{\lambda\}$. Entonces $\varphi \in L_2(\mathbb{R}, d\mu)$ y $\varphi \neq 0$. Por otra parte

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n P_n(\mu),$$

$$\alpha_n = \frac{1}{\lambda_n} \int \varphi(t) P_n(t) d\mu(t) = \frac{1}{\lambda_n} P_n(\lambda) \mu(\{\lambda\}), n \geq 0. \quad (3.47)$$

Esto resulta del hecho de que $\{P_n(x)\}$ es una base ortogonal de $L_2(\mathbb{R}, d\mu)$. Entonces

$$1 = \varphi(\lambda) = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} P_n^2(\lambda) / \lambda_n \right\} \mu(\{\lambda\}), \quad (3.48)$$

de tal manera que $\sum_{n=0}^{\infty} P_n^2(\lambda) / \lambda_n < +\infty$. Para demostrar que (3) \implies (1), obsérvese que (3) asegura que

$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n^{-1} P_n(\lambda) P_n(x)$, $x \in \mathbb{R}$, está en $L_2(\mathbb{R}, d\mu)$,

y que $\varphi \neq 0$, pues $P_0(\lambda) = P_0(x) = \lambda_0 = 1$. Puesto que $x\varphi(x) = \lambda\varphi(x)$, como se deduce de la relación de recurrencia de $\{P_n(x)\}$, entonces $x\varphi(x)$ está en $L_2(\mathbb{R}, d\mu)$, y λ es un valor propio de L . Como la relación (3.44) es consecuencia de la (3.48), el teorema queda demostrado.

Nota 3.10. Para circunstancias más generales de autoadjunción del operador L en el caso no acotado, el lector podrá consultar [Charris & Mora [16], Apéndices [C] y [D]].

4. Un teorema útil

La fórmula (3.33) suministra la motivación para los intentos de representar los funcionales de momentos de *SMOPS* positivos y acotados en términos de medidas derivadas a partir de la fracción continua del *SMOP* y, por lo tanto, en términos, más o menos directos, a partir de los coeficientes de la relación de recurrencia. La única nota discordante radica en que (3.33) no es una verdadera representación integral hasta que no se intercambien límite e integral, lo cual puede ser difícil de justificar, además de que sólo da la parte singular de la medida mediante un proceso adicional (basado en el Teorema 3.5), también difícil de implementar (véase Sec. 5, Ejemplo 5.1).

En lo que sigue estableceremos un resultado simple (el Teorema 4.1, siguiente) que en cierta forma justifica el proceso de intercambio de límite e integral en circunstancias especiales, las cuales parecen darse, sin embargo, de manera natural en ciertos contextos, y con mayor frecuencia de lo que sería normal esperar. El teorema aparece por primera vez en Aldana *et al.* [2] y parece ser, por otra parte, de fácil aplicación práctica, aún en la determinación de la parte singular de la medida, al menos si se dispone de los conocimientos básicos de la teoría de las funciones especiales que permitan efectuar cómodamente los cálculos en situaciones concretas. Como prototipos de la aplicabilidad de tal teorema están varios de los ejemplos en [2] y [16].

Consideraremos en la Sección 5 siguiente dos ejemplos mucho más sencillos que aquellos en [2] y [16] y cuyo propósito es ante todo poner en claro la esencia del método que el Teorema 4.1 propone, y el cual compararemos (con aparente ventaja para éste) con la manera de obtener los mismos resultados por aplicación directa del Corolario 3.3 y del Teorema 3.5. Luego, en las Secciones

6 y 7, nos ocuparemos de aplicaciones más delicadas de tal Teorema.

Sólo ofrecemos en estas notas una versión sencilla del Teorema 4.1, quizá la más sencilla posible. Esta es, sin embargo, aparentemente susceptible de mejoras considerables en diversas circunstancias (véase, por ejemplo, Charris & Mora [16]).

Teorema 4.1. Sean $\{P_n(x)\}$ un *SMOP* positivo y acotado por M , $X(z)$, $z \notin [-M, M]$, su fracción continua. Supóngase que:

1. El límite $\lim_{\substack{\text{Im } z < 0 \\ z \rightarrow x}} X(z)$ existe para todo $x \in \mathbb{R}$, excepto posiblemente para x en un subconjunto finito S de \mathbb{R} .
2. La función

$$\tilde{X}(z) = \begin{cases} X(z), & \text{Im } z < 0, \\ \lim_{\substack{\text{Im } \zeta < 0 \\ \zeta \rightarrow z}} X(\zeta), & z \in \mathbb{R}, z \notin S, \end{cases} \quad (4.1)$$

es continua sobre el conjunto $\{z \mid \text{Im } z \geq 0\} \setminus S$.

3. Para todo $x \in \mathbb{R}$, el límite $\lim_{\substack{\text{Im } z < 0 \\ z \rightarrow x}} (z-x)X(z)$ existe (en particular, existe para todo $x \in S$) y la función

$$X_x(z) = \begin{cases} \lim_{\substack{\text{Im } \zeta < 0 \\ \zeta \rightarrow z}} (\zeta - z)X(\zeta), & z = x, \\ (z-x)X(z), & z \neq x, \end{cases} \quad (4.2)$$

es continua en $(\mathbb{R} \setminus S) \cup \{x\}$. Sean

$$\omega(t) = \frac{1}{\pi} \text{Im } \tilde{X}(t), \quad t \in \mathbb{R} \setminus S, \quad (4.3)$$

y

$$\Lambda_\xi = \lim_{\substack{\text{Im } z < 0 \\ z \rightarrow \xi}} \text{Re} \left\{ (z - \xi) \tilde{X}(z) \right\}, \quad \xi \in S \quad (4.4)$$

entonces $\omega(t)$ es integrable sobre \mathbb{R} ,

$$\mathcal{L}(P(t)) = \sum_{\xi \in S} \Lambda_\xi P(\xi) + \int_{-\infty}^{\infty} P(t) \omega(t) dt, \quad (4.5)$$

$$P(x) \in \mathbb{C}[x],$$

y si μ es la medida espectral de $\{P_n(x)\}$, entonces

$$\Lambda_\xi = \mu(\{\xi\}), \quad \xi \in S. \quad (4.6)$$

Demostración. Supóngase, como es posible hacerlo, que M es lo suficientemente grande como para que $-M, M$ sean puntos de continuidad de $X(z)$, que $S = \{\xi_1, \dots, \xi_m\}$, donde $\xi_1 < \dots < \xi_m$, y que $s > 0$

es tal que si $a_k = \xi_k - s$, $b_k = \xi_k + s$ entonces $-M < a_1 < b_1 < \dots < a_m < b_m < M$.

Sean $\delta > 0$ y $\Gamma^{s,\delta}$ el contorno positivamente orientado que se muestra en la Figura 4.1

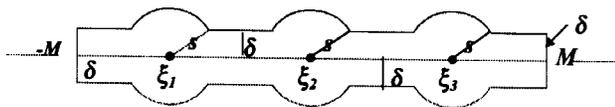


Figura 4.1

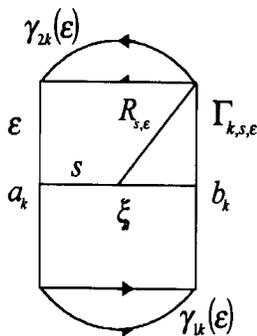


Figura 4.2

En la figura 4.1 hemos tomado $m = 3$. Obsérvese en primer lugar que si $I = [a, b]$ es un subintervalo de $[-M, M]$ en la cual $\tilde{X}(z)$ es continua, $\tilde{X}(z)$ es también continua en $I \times [-1, 0]$, y por lo tanto, uniformemente continua en este conjunto. Se deduce que $\text{Im } \tilde{X}(t - i\delta)$ tiende uniformemente a $\pi\omega(t)$ en I cuando $\delta \rightarrow 0$ y, por lo tanto, teniendo en cuenta que las integrales sobre los segmentos verticales $[a - i\delta, a + i\delta]$, $[b - i\delta, b + i\delta]$ se anulan cuando $\delta \rightarrow 0$ (debido a la continuidad de $\text{Im } \tilde{X}(t - i\delta)$ sobre estos segmentos cuando $t = a$ y $t = b$), se demuestra, tal como en el Corolario

3.3, que

$$\begin{aligned} & \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \left\{ \int_a^b X(t - i\delta) P(t - i\delta) dt - \int_a^b X(t + i\delta) P(t + i\delta) dt \right\} \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \int_a^b \text{Im } \tilde{X}(t - i\delta) P(t) dt \\ &= \int_a^b \omega(t) P(t) dt, \quad P(x) \in \mathbb{C}[x]. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Supóngase ahora que $\xi = \xi_k$ para algún $k = 1, 2, \dots, n$. Si γ_k es el círculo positivamente orientado de centro en ξ_k y radio s entonces

$$\begin{aligned} & \int_{\gamma_k} X(z) P(z) dz \\ &= 2i \int_{-\pi}^0 \text{Re} \left(s e^{i\theta} \tilde{X}(\xi_k + s e^{i\theta}) P(\xi_k + s e^{i\theta}) \right) d\theta \end{aligned} \tag{4.8}$$

y, de (4.4) y la continuidad de $X_{\xi_k}(z)$,

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_k} X(z) P(z) dz = \Lambda_{\xi_k} P(\xi_k) \tag{4.9}$$

Sustitúyase ahora la integral $\int_{\gamma_k} X(z) P(z) dz$ sobre el círculo de centro ξ_k y radio s por la integral sobre el borde positivamente orientado del rectángulo $\Gamma_{k,s,\epsilon}$ en la Figura 4.2, donde $\epsilon > 0$. Se tiene nuevamente, como en la demostración del Corolario 3.3,

$$\begin{aligned} & \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{k,s,\epsilon}} X(z) P(z) dz \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \left\{ \int_{a_k}^{b_k} X(t - i\epsilon) P(t - i\epsilon) dt - \int_{a_k}^{b_k} X(t + i\epsilon) P(t + i\epsilon) dt \right\} \end{aligned} \tag{4.10}$$

donde $a_k = \xi_k - s$, $b_k = \xi_k + s$. Sean $\gamma_{1k}(\epsilon)$ y $\gamma_{2k}(\epsilon)$ los arcos de círculo de centro ξ_k y radio $R_{\epsilon,s} = \sqrt{\epsilon^2 + s^2}$

en la Figura 4.2. Entonces

$$\begin{aligned} \int_{a_k}^{b_k} X(t - i\epsilon) P(t - i\epsilon) dt &= \int_{\gamma_{1k}} (\epsilon) X(z) P(z) dz \\ \int_{a_k}^{b_k} X(t + i\epsilon) P(t + i\epsilon) dt &= \int_{\gamma_{2k}(\epsilon)} X(z) P(z) dz \end{aligned} \quad (4.11)$$

Se deduce que

$$\begin{aligned} &\lim_{s, \epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{k, s, \epsilon}} X(z) P(z) dz * \\ &\lim_{s, \epsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\gamma_{1k}(\epsilon)} X(z) P(z) dz + \int_{\gamma_{2k}(\epsilon)} X(z) P(z) dz \right\} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 \operatorname{Re} \left(s e^{i\theta} \tilde{X}(\xi_k + s e^{i\theta}) P(\xi_k + s e^{i\theta}) \right) d\theta \\ &= \Lambda_{\xi_k} P(\xi_k) \end{aligned} \quad (4.12)$$

y de (4.10) se obtiene, tal como en el Corolario 3.3, que

$$\begin{aligned} &\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{k, s, \epsilon}} X(z) P(z) dz \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \int_{a_k}^{b_k} \operatorname{Im} X(t - i\epsilon) P(t) dt \\ &= \int \lambda_k(t) P(t) d\mu(t) \end{aligned} \quad (4.13)$$

donde λ_k es la función característica de $[a_k, b_k]$, y el límite cuando $s \rightarrow 0$ del lado derecho es $\mu(\{\xi_k\}) P(\xi_k)$, lo cual muestra que $\Lambda_{\xi_k} = \mu(\{\xi_k\})$ para todo $\xi \in S$. Por otra parte, de (3.32) se deduce que $\omega(t) \geq 0$ para $t \in \mathbb{R} \setminus S$. Sean λ_s la función característica de $[-M, M] \setminus \cup_{k=1}^m [a_k, b_k]$, $s > 0$. El anterior argumento muestra que

$$\begin{aligned} 1 = \mathcal{L}(1) &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma^{s, \delta}} X(z) dz \\ &= \sum_{k=1}^m \mu([a_k, b_k]) + \int_{-\infty}^{\infty} \omega_s(t) dt \end{aligned} \quad (4.14)$$

donde $\omega_s = \omega \lambda_s$, la cual es obviamente integrable en \mathbb{R} . Entonces

$$\begin{aligned} 1 = \mathcal{L}(1) &= \lim_{s, \delta \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma^{s, \delta}} X(z) dz \\ &= \sum_{\xi \in S} \Lambda_{\xi} + \int_{-\infty}^{\infty} \omega(t) dt \end{aligned} \quad (4.15)$$

y, por lo tanto ω , siendo límite monótono de las ω_s cuando $s \rightarrow 0$ (monótonamente), es también integrable en \mathbb{R} (recuérdese que $\omega(t) = 0$ para $|t| > M$). Teniendo en cuenta que ω es integrable, la validez de (4.5) para $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ arbitrario se verifica fácilmente. Esto demuestra el teorema. \square

Nota 4.1. Se deduce que $\omega(t)$ es la parte absolutamente continua de la medida espectral μ de $\{P_n(x)\}$ y que su parte singular se reduce a la medida de saltos $\sum_{\xi \in S} \Lambda_{\xi} \delta_{\xi}$, donde δ_{ξ} es la medida de Dirac en ξ . En otros términos

$$d\mu(t) = \sum_{\xi \in S} \Lambda_{\xi} \delta(t - \xi) + \omega(t) dt \quad (4.16)$$

donde $\delta = \delta_0$ es la medida de Dirac en $\xi = 0$.

Nota 4.2. La versión que hemos dado del Teorema 4.1 es quizá, como lo hemos mencionado, la más sencilla posible. En realidad puede establecerse (bajo hipótesis adicionales apropiadas) que (4.5) es aún válido si S es infinito, siempre y cuando tenga sólo finitos puntos de acumulación, un resultado que puede ser necesario para manejar sistemas relacionados con polinomios del tipo de Pollaczek (véase Bank & Ismail [7], Charris & Ismail [11], [12], Charris & Mora [16]), u otros sistemas con espectro puntual infinito (infinitos puntos de masa).

5. Dos ejemplos simples

Comenzaremos por dar dos ejemplos muy simples que ilustran la aplicabilidad del Teorema 4.1. Recurriremos a algunos resultados relacionados con los polinomios de Chebyshev de primera y segunda clases. En Charris & Preciado [17] se da un tratamiento completo de estos últimos sistemas de polinomios según los resultados de la Sección 4 del presente documento. Creemos que esto es ilustrativo de la técnica propuesta en tal sección. El primer ejemplo que daremos ha sido tomado también de [17], pero consideraremos con respecto a él algunos aspectos que no se presentan en [17]. Posteriormente consideraremos ejemplos menos triviales.

El sistema de los *polinomios mónicos de Chebyshev de segunda clase* $(\tilde{U}_n(x))$ es el *SMOP* determinado por la relación de recurrencia

$$x\tilde{U}_n(x) = \tilde{U}_{n+1}(x) + \frac{1}{4}\tilde{U}_{n-1}(x), \quad n \geq 0, \quad (5.1)$$

y las condiciones iniciales

$$\tilde{U}_{-1}(x) = 0, \quad \tilde{U}_0(x) = 1. \quad (5.2)$$

En este caso $B_n = 0$ y $C_n = \frac{1}{4}$ para $n \geq 0$. Claramente $(\tilde{U}_n(x))$ está acotado por $M = 3$, pues

$$0 \leq |B_n| \leq \frac{3}{3} \text{ y } |C_{n+1}| = \frac{1}{4} \leq 1 = \frac{3}{3}. \quad (5.3)$$

La fracción continua del sistema $(\tilde{U}_n(x))$ es obviamente

$$X(x) = \frac{1}{x - \frac{1}{4} \frac{1}{x - \frac{1}{4} \dots}}. \quad (5.4)$$

Por lo tanto,

$$X(z) = \frac{1}{z - \frac{1}{4}X(z)}, \quad |z| \geq 3, \quad (5.5)$$

o, lo que es equivalente,

$$X^2(z) - 4zX(z) + 4 = 0, \quad |z| \geq 3. \quad (5.6)$$

Consideraciones descritas en detalle en [17] permiten establecer que

$$X(z) = 2 \left(z - (z^2 - 1)^{1/2} \right), \quad (5.7)$$

$$(z^2 - 1)^{1/2} = ze^{\frac{1}{2} \text{Log} \left(1 - \frac{1}{z^2} \right)}, \quad z \notin [-1, 1],$$

donde *Log* es la rama del logaritmo en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ con parte imaginaria (argumento) en $(-\pi, \pi]$, la cual es analítica en $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ (la rama principal).

La medida espectral μ de $(\tilde{U}_n(x))$, que es *absolutamente continua*, está dada por

$$d\mu(t) = \frac{2}{\pi} \sqrt{1 - t^2} \chi(t) dt, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (5.8)$$

siendo χ la función característica de $(-1, 1)$.

Que μ dada por (5.8) es la medida espectral del sistema $(\tilde{U}_n(x))$ es bien conocido y puede establecerse de muchas maneras, incluyendo argumentos trigonométricos completamente elementales. Para muchos propósitos es más conveniente considerar como el sistema de Chebyshev de segunda clase, el dado por

$U_n(x) = 2^n \tilde{U}_n(x)$, $n \geq 0$, el cual queda determinado por la relación de recurrencia

$$2xU_n(x) = U_{n+1}(x) + U_{n-1}(x), \quad n \geq 0, \quad (5.9)$$

y las condiciones iniciales

$$U_{-1}(x) = 0, \quad U_0(x) = 1. \quad (5.10)$$

El sistema $(U_n(x))$ no es mónico, pero es aún un sistema ortogonal de polinomios para μ dada por (5.8).

El sistema de los *polinomios mónicos de Chebyshev de primera clase* $(\tilde{T}_n(x))$ es el *SMOP* positivo cuya relación de recurrencia es

$$x\tilde{T}_n(x) = \tilde{T}_{n+1}(x) + C_n \tilde{T}_{n-1}(x), \quad n \geq 0, \quad (5.11)$$

con las condiciones iniciales

$$\tilde{T}_{-1}(x) = 0, \quad \tilde{T}_0(x) = 1. \quad (5.12)$$

En este caso $B_n = 0$, C_0 es arbitrario, $C_1 = \frac{1}{2}$, $C_n = \frac{1}{4}$ para $n \geq 2$. Claramente podemos tomar $M = 3$, pues $0 = |B_n| \leq 1$ y $C_{n+1} \leq 1$, $n \geq 0$. La fracción continua del sistema $(\tilde{T}_n(x))$ es

$$X_1(z) = \frac{1}{z - \frac{1}{2} \frac{1}{z - \frac{1}{4} \dots}}. \quad z \notin [-3, 3]. \quad (5.13)$$

Por lo tanto

$$X_1(z) = \frac{1}{z - \frac{1}{2}X(z)} = \frac{1}{(z^2 - 1)^{1/2}}, \quad z \notin [-3, 3], \quad (5.14)$$

siendo $X(z) = 2 \left(z - (z^2 - 1)^{1/2} \right)$ la fracción continua de $(\tilde{U}_n(x))$. En este caso $(z^2 - 1)^{1/2}$ es como en (5.7).

La medida espectral μ de $\{\tilde{T}_n(x)\}$ es

$$d\mu(t) = \frac{1}{\pi \sqrt{1 - t^2}} \chi(t) dt, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (5.15)$$

como es también conocido (véase [17]) y es también una medida absolutamente continua. Más que el sistema $(\tilde{T}_n(x))$ se utiliza el $(T_n(x))$ dado por $T_0(x) = 1$, $T_1(x) = x$, $T_n(x) = 2^{n-1} \tilde{T}_n(x)$, $n \geq 2$, o, lo que es lo mismo por la relación de recurrencia

$$2xT_n(x) = T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x), \quad n \geq 1, \quad (5.16)$$

y las condiciones iniciales

$$T_0(x) = 1, T_1(x) = x, \quad (5.17)$$

el cual es un sistema ortogonal para μ dada por (5.15).

Los polinomios $\{\tilde{T}_n(x)\}$ juegan papeles fundamentales en la teoría de la aproximación. También, lo que es más cercano a nuestros objetivos, en la teoría de los polinomios cribados y en la de bloques de relaciones de recurrencia (véase [2], [11], [12], [16], [17], etc.). Para mayor información sobre los polinomios de Chebyshev, el lector podrá consultar [19] y el apéndice al final del artículo. Por el momento, es importante observar que

$$\begin{aligned} \tilde{T}_n^{(1)}(x) &= \tilde{U}_n^{(1)}(x) = \tilde{U}_n(x), \\ T_n^{(1)}(x) &= U_n^{(1)}(x) = U_n(x), \quad n \geq 0, \end{aligned} \quad (5.18)$$

Ejemplo 5.1. El siguiente ejemplo, ya mencionado antes muestra la manera de aplicar el Teorema 4.1. Este sistema, $(p_n(x))$, tomado, como lo hemos dicho de [17], está dado por

$$\begin{aligned} xp_{2n}(x) &= p_{2n+1}(x) + \frac{n+2}{4(n+1)}p_{2n-1}(x) \\ xp_{2n+1}(x) &= p_{2n+2}(x) + \frac{n+1}{4(n+2)}p_{2n}(x), \quad (5.19) \\ n &\geq 0, \end{aligned}$$

y las condiciones iniciales

$$p_{-1}(x) = 0, p_0(x) = 1, \quad (5.20)$$

Evidentemente $(p_n(x))$ está acotado por $M = 3$, y se tiene que

$$\begin{aligned} x^2p_{2n+1}(x) &= xp_{2n+2}(x) + \frac{n+1}{4(n+2)}xp_{2n}(x) \\ &= p_{2n+3}(x) + \left(\frac{n+3}{4(n+2)} + \frac{n+1}{4(n+2)}\right)p_{2n+1}(x) \\ &\quad + \frac{1}{16}p_{2n-1}(x), \quad n \geq 0, \end{aligned}$$

de lo cual

$$\left(x^2 - \frac{1}{2}\right)p_{2n+1}(x) = p_{2n+3}(x) + \frac{1}{16}p_{2n-1}(x), \quad n \geq 0.$$

Haciendo entonces

$$p_{2n+1}(x) = \frac{1}{2^n}P_n(x), \quad n \geq 0, \quad (5.21)$$

se obtiene que

$$(2x^2 - 1)P_n(x) = P_{n+1}(x) + \frac{1}{4}P_{n-1}(x), \quad n \geq 1, \quad (5.22)$$

con $P_0(x) = x$, $P_1(x) = 2p_3(x) = 2x^3 - x$. Sea

$$w = w(x) = 2x^2 - 1. \quad (5.23)$$

De (5.22) se deduce entonces que

$$P_n(x) = x\tilde{U}_n(w), \quad n \geq 0, \quad (5.24)$$

(pues $P_0(x) = x$, $P_1(x) = xw$, de lo cual $x^{-1}P_n(x) = \tilde{U}_n(w)$, $n \geq 0$). Por otra parte, el sistema $(p_n^{(1)}(x))$ de los primeros asociados de $(p_n(x))$ satisface

$$\begin{aligned} xp_{2n}^{(1)}(x) &= p_{2n+1}^{(1)}(x) + \frac{n+1}{4(n+2)}p_{2n-1}^{(1)}(x) \\ xp_{2n+1}^{(1)}(x) &= p_{2n+2}^{(1)}(x) + \frac{n+3}{4(n+2)}p_{2n}^{(1)}(x), \quad (5.25) \\ n &\geq 0, \end{aligned}$$

y las condiciones iniciales

$$p_{-1}^{(1)}(x) = 0, p_0^{(1)}(x) = 1. \quad (5.26)$$

Entonces

$$\begin{aligned} x^2p_{2n}^{(1)}(x) &= p_{2n+2}^{(1)}(x) + \left(\frac{n+3}{4(n+2)} + \frac{n+1}{4(n+2)}\right)p_{2n}^{(1)}(x) \\ &\quad + \left(\frac{n+1}{4(n+2)}\frac{n+2}{4(n+1)}\right)p_{2n-2}^{(1)}(x), \quad n \geq 1, \end{aligned}$$

de lo cual, haciendo

$$p_{2n}^{(1)}(x) = \frac{1}{2^n}Q_n(x), \quad n \geq 0, \quad (5.27)$$

se obtiene que

$$(2x^2 - 1)Q_n(x) = Q_{n+1}(x) + Q_{n-1}(x), \quad n \geq 1. \quad (5.28)$$

Además

$$Q_0(x) = p_0^{(1)}(x) = 1, \quad Q_1(x) = 2p_2^{(1)}(x) = 2x^2 - \frac{3}{4}.$$

Se deduce entonces, haciendo $w = w(x)$ como en (5.23), que $Q_0(x) = 1$, $Q_1(x) = w + \frac{1}{4}$, de lo cual se concluye que

$$Q_n(x) = \tilde{U}_n(w) + \frac{1}{4}\tilde{U}_{n-1}(w). \quad (5.29)$$

Esto implica, de (5.21), (5.22), (5.28) y (5.29) que

$$\frac{p_{2n}^{(1)}(x)}{p_{2n+1}^{(1)}(x)} = \frac{1}{x} \left[1 + \frac{\tilde{U}_{n-1}(w)}{4\tilde{U}_n(w)} \right]. \quad (5.30)$$

Pero $\tilde{U}_n^{(1)}(w) = \tilde{U}_n(w)$ para todo $n \geq 0$. Por lo tanto, si $X(z)$ denota la fracción continua de $(p_n(x))$, se tendrá que

$$X(z) = \frac{1}{z} \left[1 + \frac{1}{2} \left(w - (w^2 - 1)^{1/2} \right) \right], \quad z \notin [-1, 1], \quad (5.31)$$

con $w = 2z^2 - 1$. Esto resulta de (5.7) con w en el lugar de z . Nótese que $w \in [-1, 1]$ si y sólo si $z \in [-1, 1]$, lo cual implica que

$$X(z) = \frac{1}{2z} + z - (z^2 - 1)^{1/2}, \quad z \notin [-1, 1]. \quad (5.32)$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \tilde{X}(z) &= \lim_{\substack{\zeta \rightarrow z \\ \text{Im } \zeta < 0}} X(\zeta) \\ &= \begin{cases} \frac{1}{2z} + z - (z^2 - 1)^{1/2} & , \text{Im } z < 0, \\ \frac{1}{2z} + z + i\sqrt{1 - z^2} & , z \in (-1, 0) \cup (0, 1), \\ \frac{1}{2z} + z + \sqrt{z^2 - 1} & , z \in \mathbb{R}, z < -1, \\ \frac{1}{2z} + z - \sqrt{z^2 - 1} & , z \in \mathbb{R}, z > 1, \end{cases} \end{aligned} \quad (5.33)$$

donde, para $z > 0$, $\sqrt{z} = e^{1/2 \text{Log } z}$ (siendo, como antes, Log la rama principal de logaritmo) es la raíz cuadrada usual de un número positivo. Debe observarse, como es fácil hacerlo, que

$$\begin{aligned} (z^2 - 1)^{1/2} &= \sqrt{z^2 - 1}, \quad z \geq 1; \\ (z^2 - 1)^{1/2} &= -\sqrt{z^2 - 1}, \quad z \leq -1, \end{aligned} \quad (5.34)$$

mientras que

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{\text{Im } z > 0 \\ z \rightarrow x}} (z^2 - 1)^{1/2} &= i\sqrt{1 - x^2}; \\ \lim_{\substack{\text{Im } z < 0 \\ z \rightarrow x}} (z^2 - 1)^{1/2} &= -i\sqrt{1 - x^2}, \quad -1 < x < 1. \end{aligned} \quad (5.35)$$

Nótese que es natural haber escogido $S = \{-1, 0, 1\}$. Como obviamente

$$\lim_{\substack{\text{Im } z < 0 \\ z \rightarrow \pm 1}} (z \mp 1) \tilde{X}(z) = 0, \quad (5.36)$$

mientras que

$$\lim_{\substack{\text{Im } z < 0 \\ z \rightarrow 0}} z \tilde{X}(z) = \frac{1}{2} \quad (5.37)$$

y, por otra parte,

$$w(t) = \frac{1}{\pi} \sqrt{1 - t^2} \chi(t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (5.38)$$

donde χ es la función característica de $(-1, 0) \cup (0, 1)$, se deduce que el funcional de momentos \mathcal{L} de $(p_n(x))$ es

$$\mathcal{L}(P(x)) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} P(t) \sqrt{1 - t^2} dt + \frac{1}{2} P(0), \quad (5.39)$$

o sea, que la medida espectral está dada por

$$d\mu(t) = \frac{1}{\pi} \sqrt{1 - t^2} \chi(t) dt + \frac{1}{2} \delta(t) dt \quad (5.40)$$

donde $\delta(t)$ es la medida de Dirac en $\xi = 0$. Nótese que $\text{Supp } \mu = [-1, 1]$. Obsérvese entonces que $\xi = 0$ es un *punto de masa interior al soporte de la medida* μ (un valor propio de μ sumergido en el espectro continuo $[-1, 0) \cup (0, 1]$).

Nota 5.1. Como lo hemos mencionado en la Sección 3, algunos problemas espectrales pueden manejarse razonablemente mediante la fórmula de inversión de Stieltjes (Fórmula 3.33) y el Teorema 3.5. Por ejemplo, para el caso del Ejemplo 5.1 es fácil establecer la validez de

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{\pi} \text{Im } X(t - i\varepsilon) = \frac{1}{\pi} \sqrt{1 - t^2} \chi(t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (5.41)$$

siendo $\chi(t)$ la función característica de $(-1, 0) \cup (0, 1)$, con dudas acerca de lo que pueda suceder sobre el conjunto $S = \{-1, 0, 1\}$. Si el comportamiento sobre S es determinable (via el Teorema 3.5, por ejemplo), es razonable suponer que la parte absolutamente continua de la medida espectral $d\mu$ es $\frac{1}{\pi} \sqrt{1 - t^2} \chi(t) dt$ y que la parte de saltos de $d\mu$ está soportada por S .

Ahora, de (5.19) se deduce fácilmente que

$$p_{2n}(0) = \frac{(-1)^n n!}{(2)_n 4^n}, \quad p_{2n+1}(0) = 0. \quad (5.42)$$

Aquí $(a)_n$, definido para $a \in \mathbb{C}$ por

$$(a)_n = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ a, & n = 1 \\ a(a+1) \cdots (a+n-1), & n > 1, \end{cases} \quad (5.43)$$

es el denominado símbolo de Pochhammer (véase Rainville [25], Chap. 4). Obsérvese que $(1)_n = n!$, $n = 0, 1, 2, \dots$. De (5.19) y (1.8) se deduce también que

$$\frac{p_{2n}^2(0)}{\lambda_{2n}} = \frac{n!}{(3)_n}, \quad n \geq 0, \quad (5.44)$$

de lo cual

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{p_{2n}^2(0)}{\lambda} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{(3)_n} = F \left(\begin{matrix} 1, & 1 \\ & 3 \end{matrix} \middle| 1 \right) \quad (5.45)$$

donde

$$F \left(\begin{matrix} a, & b \\ & c \end{matrix} \middle| z \right)$$

denota la función hipergeométrica (Rainville [25], Chap. 4). Según la *fórmula de Gauss* (Rainville [25], Chap. 4, Theorem 18.) se tiene entonces que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{p_n^2(0)}{\lambda_n} = \frac{\Gamma(3)\Gamma(1)}{\Gamma(2)\Gamma(2)} = 2, \quad (5.46)$$

donde $\Gamma(z)$ denota la función gamma. Por lo tanto

$$\mu(\{0\}) = \frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{p_n^2(0)}{\lambda_n}} = \frac{1}{2}, \quad (5.47)$$

como lo establecimos en (5.37). Por otra parte, es fácil verificar directamente, a partir de (5.19), que

$$\frac{p_{2n}^{(1)}(\pm 1)}{\sqrt{\lambda_n}} = 2\sqrt{\frac{(3)_n}{n!}} - 2n\sqrt{\frac{n!}{(3)_n}}. \quad (5.48)$$

En el análisis de la convergencia de series relacionadas con sistemas ortogonales, la fórmula asintótica (Askey & Ismail [6])

$$\frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(b+n)} \sim n^{a-b}, \quad n \rightarrow \infty, \quad (5.49)$$

es decir, la

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{b-a} \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(b+n)} = 1, \quad (5.50)$$

es frecuentemente útil. Una consecuencia de la fórmula de Stirling ([25], Chap. 2), (5.50) puede establecerse también por métodos mucho más elementales. Nótese que, como

$$(a)_n = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)} \quad (5.51)$$

siempre y cuando $a \neq 0, -1, -2, \dots$, se tendrá también que

$$\frac{(a)_n}{(b)_n} \sim \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)} n^{a-b}, \quad a, b \neq 0. \quad (5.52)$$

Por lo tanto, (5.48) implica que

$$\frac{(p_{2n}^{(1)}(\pm 1))^2}{\lambda_n} \sim 2n^2, \quad n \rightarrow \infty, \quad (5.53)$$

lo cual asegura la divergencia de la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(p_{2n}^{(1)}(\pm 1))^2}{\lambda_n}, \quad (5.54)$$

así que $\mu(\{-1\}) = \mu(\{1\}) = 0$, como lo habíamos establecido en (5.36). Así se recupera, de otra manera, la fórmula (5.40).

Ejemplo 5.2. En este ejemplo denotaremos con $(q_n(x))$ el *SMOP* determinado por la relación de recurrencia

$$xq_{2n}(x) = q_{2n+1}(x) + \frac{n+1}{2(2n+1)}q_{2n-1}(x) \quad (5.55)$$

$$xq_{2n+1}(x) = q_{2n+2}(x) + \frac{n+1}{2(2n+3)}q_{2n}(x), \quad n \geq 0,$$

y las condiciones iniciales

$$q_{-1}(x) = 0, \quad q_0(x) = 1. \quad (5.56)$$

Tal como en el Ejemplo 5.1 se obtiene que

$$\begin{aligned} x^2q_{2n+1}(x) &= xq_{2n+3}(x) + \left(\frac{n+2}{2(2n+3)} + \frac{n+1}{2(2n+3)} \right) q_{2n+1}(x) \\ &\quad + \frac{(n+1)^2}{4(2n+1)(2n+3)}q_{2n-1}(x), \quad n \geq 0, \end{aligned} \quad (5.57)$$

de lo cual

$$\begin{aligned} \left(x^2 - \frac{1}{2} \right) q_{2n+1}(x) &= \\ q_{2n+3}(x) + \frac{1}{4} \frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+3)} q_{2n-1}(x), \quad n \geq 0, \end{aligned} \quad (5.58)$$

y haciendo entonces

$$q_{2n+1}(x) = \frac{1}{2n}Q_n(x), \quad n \geq 0, \quad (5.59)$$

se llega a que

$$\begin{aligned} (2x^2 - 1)Q_n(x) &= \\ = Q_{n+1}(x) + \frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+3)}Q_{n-1}(x), \quad n \geq 1, \end{aligned} \quad (5.60)$$

con $Q_0(x) = q_1(x) = x$, $Q_1(x) = 2q_3(x) = 2x^3 - x$. Sea $w = w(x)$ como en (5.23). El *SMOP* $(L_n(x))$ dado por

$$xL_n(x) = L_{n+1}(x) + \frac{n^2}{(2n+1)(2n-1)}L_{n-1}(x), \quad n \geq 0, \quad (5.61)$$

y las condiciones iniciales

$$L_{-1}(x) = 0, \quad L_0(x) = 1, \quad (5.62)$$

es clásico. Se conoce como el *sistema mónico de los polinomios de Legendre* (véase Rainville [25], Chap. 10. También G. Szegő [29]) y de (5.60) se deduce que

$$Q_n(x) = xL_n^{(1)}(w), \quad n \geq 0, \quad (5.63)$$

donde $(L_n^{(1)}(x))$ es el sistema de los primeros asociados de $(L_n(x))$. La relación (5.63) se obtiene en efecto de observar que $Q_0(x) = x$ y $Q_1(x) = xw = xL_1^{(1)}(w)$, y de lo establecido sobre correcurividad en la Sección 2. Por otra parte, el sistema $(q_n^{(1)}(x))$ de los primeros asociados de $(q_n(x))$ satisface

$$xq_{2n}^{(1)}(x) = q_{2n+1}^{(1)}(x) + \frac{n+1}{2(2n+3)}q_{2n-1}^{(1)}(x) \quad (5.64)$$

$$xq_{2n+1}^{(1)}(x) = q_{2n+2}^{(1)}(x) + \frac{n+2}{2(2n+3)}q_{2n}^{(1)}(x), \quad n \geq 0,$$

y las condiciones iniciales

$$q_{-1}^{(1)}(x) = 0, \quad q_0^{(1)}(x) = 1. \quad (5.65)$$

Entonces

$$\begin{aligned} & x^2q_{2n}^{(1)}(x) \\ &= q_{2n+2}^{(1)}(x) + \left(\frac{n+1}{2(2n+3)} + \frac{n+2}{2(2n+3)} \right) q_{2n}^{(1)}(x) \\ & \quad + \frac{n+1}{2(2n+3)} \frac{n+1}{2(2n+1)} q_{2n-2}^{(1)}(x), \quad n \geq 0, \end{aligned}$$

y haciendo

$$q_{2n}^{(1)}(x) = \frac{1}{2^n} R_n(x), \quad n \geq 0, \quad (5.66)$$

se obtiene que

$$\begin{aligned} & (2x^2 - 1) R_n(x) \\ &= R_{n+1}(x) + \frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+3)} R_{n-1}(x), \quad n \geq 1. \end{aligned} \quad (5.67)$$

que es la misma relación (5.60). Sin embargo, ahora $R_0(x) = q_0^{(1)}(x) = 1$, $R_1(x) = 2q_2^{(1)}(x) = 2x^2 - \frac{2}{3} = w + \frac{1}{3}$, con $w = 2x^2 - 1$ como en (5.23), así que

$$R_n(x) = L_n^{(1)}(w) + \frac{1}{3} L_{n-1}^{(2)}(w), \quad (5.68)$$

lo cual implica, de (5.59), (5.63), (5.56) y (5.68) que la FC de $(q_n(x))$ está dada por los n convergentes

$$X_{2n}(x) = \frac{q_{2n}^{(1)}(x)}{q_{2n+1}^{(1)}(x)} = \frac{1}{x} \left[1 + \frac{1}{3} \frac{L_{n-1}^{(2)}(w)}{L_n^{(1)}(w)} \right], \quad (5.69)$$

estando así relacionada con la fracción continua $L^{(1)}(w)$, $w = 2x^2 - 1$, de los primeros asociados de los polinomios de Legendre. Nos queda por determinar esta última.

Ahora, el sistema $\{L_n(x)\}$ de los polinomios de Legendre es ortogonal (Rainville [25], Chap. 10) con respecto a la medida espectral

$$d\mu(t) = \frac{1}{2} \chi(t) dt \quad (5.70)$$

donde $\chi(t)$ es la función característica del conjunto $(-1, 1)$. Del Teorema de Markov (Teorema 3.3) se deduce entonces que la fracción continua $L(z)$ de $\{L_n(x)\}$ es

$$L(z) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{dz}{z-t} = \frac{1}{2} \text{Log} \left(\frac{z-1}{z+1} \right), \quad z \notin [-1, 1], \quad (5.71)$$

donde Log es la rama principal del logaritmo (argumento en $(-\pi, \pi]$), así que $L(z)$ es analítica fuera de $[-1, 1]$. Por otra parte, de la relación de recurrencia de $\{L_n^{(1)}(x)\}$ se deduce que su fracción continua $L^{(1)}(z)$ está relacionada con la $L(z)$ por

$$L(z) = \frac{1}{z - \frac{1}{3}L^{(1)}(z)}, \quad (5.72)$$

así que

$$L^{(1)}(z) = 3 \left(z - \frac{1}{L(z)} \right), \quad (5.73)$$

y de (5.69) se deduce entonces que

$$X(z) = \frac{1}{z} \left[1 - w + \frac{1}{L(w)} \right] \quad (5.74)$$

donde $w = 2z^2 - 1$ es como en (5.23). La relación (5.74) se simplifica en

$$X(z) = \frac{2}{z} \left[1 - z^2 + \frac{1}{\text{Log} \left(1 - \frac{1}{z^2} \right)} \right], \quad z \notin [-1, 1],$$

que es analítica fuera de $[-1, 1]$ (y no sólo fuera de un intervalo $[-M, M]$ alrededor de $[-1, 1]$). Por lo tanto, si

$$\tilde{X}(z) = \lim_{\substack{\text{Im } \zeta < 0 \\ \zeta \rightarrow z}} X(\zeta), \quad (5.75)$$

entonces

$$\tilde{X}(z) = \begin{cases} \frac{2}{z} \left[1 - z^2 + \frac{1}{\operatorname{Log} \left(1 - \frac{1}{z^2} \right)} \right] & \operatorname{Im} z < 0, \\ \frac{2}{z} \left[1 - z^2 + \frac{1}{\log \left(\frac{1}{z^2} - 1 \right) + i\pi} \right], & z \in (-1, 0), \\ \frac{2}{z} \left[1 - z^2 + \frac{1}{\log \left(\frac{1}{z^2} - 1 \right) - i\pi} \right], & z \in (0, 1), \\ \frac{2}{z} \left[1 - z^2 + \frac{1}{\log \left(1 - \frac{1}{z^2} \right)} \right], & |z| > 1, z \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (5.76)$$

En este caso $S = \{-1, 0, 1\}$, y observamos que

$$\lim_{\substack{\operatorname{Im} z < 0 \\ z \rightarrow \pm 1}} (z \mp 1) \tilde{X}(z) = \lim_{\substack{\operatorname{Im} z < 0 \\ z \rightarrow 0}} z \tilde{X}(z) = 0, \quad (5.77)$$

lo cual da origen a la medida espectral absolutamente continua

$$d\mu(t) = \frac{1}{\pi i} \operatorname{Im} \tilde{X}(z) = \frac{2\chi(t) dt}{|t| \left[\operatorname{Log}^2 \left(\frac{1}{t^2} - 1 \right) + \pi^2 \right]} \quad (5.78)$$

donde $\chi(t)$ es la función característica del conjunto $(-1, 0) \cup (0, 1)$.

Para ejemplos menos triviales de la aplicación del Teorema 4.1, véanse Aldana, Charris & Mora [2], así como Charris & Mora [16]. De hecho, estos artículos consideran en detalle las aplicaciones de dicho teorema a los sistemas cribados [4], [5], [11], [12], a los definidos por aplicaciones polinómicas (Geronimo y Van Assche [20]) y, aún, a la teoría general de los sistemas definidos por bloques de relaciones de recurrencia ([2], [16]).

En las siguientes secciones revisaremos la teoría de bloques de relaciones de recurrencia y aplicaremos el Teorema 4.1 para la determinación de las medidas espectrales de sistemas que son primeros asociados de sistemas definidos por bloques. Como esto no requiere adaptaciones especiales del método, creemos que esto se puede interpretar como una garantía de su versatilidad.

6. Bloques de relaciones de recurrencia

Si $k \geq 2$ es un entero, las relaciones de recurrencia dadas para cada $n \geq 0$ en la forma de bloques de k ecuaciones cada uno,

$$(x - b_n^{(j)}) p_{nk+j}(x) = p_{nk+j+1}(x) + a_n^{(j)} p_{nk+j-1}(x), \quad (6.1)$$

donde $0 \leq j \leq k-1$, surgen en diversos contextos, algunos de sumo interés (véanse [2], [16]).

La aplicabilidad del Teorema 4.1 a sistemas definidos por tal tipo de relaciones, que incluyen una gran variedad de clases distintas de polinomios ortogonales, ha demostrado ser especialmente efectiva. Por esta razón incluimos en esta sección, en forma más o menos esquemática, una descripción de tal teoría de bloques. Descripciones más detalladas del mismo material pueden encontrarse en [2], [11], [12], [16] y [17].

El sistema (6.1) puede escribirse matricialmente en la forma

$$A_n \begin{bmatrix} p_{nk+1}(x) \\ p_{nk+2}(x) \\ p_{nk+3}(x) \\ \vdots \\ p_{nk+k-1}(x) \\ p_{nk-1}(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (x - b_n^{(0)}) p_{nk}(x) \\ a_n^{(1)} p_{nk}(x) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ p_{nk+k}(x) \end{bmatrix} \quad (6.2)$$

donde $A_n = [a_{n,i,j}]$ es la matriz $k \times k$ dada por

$$a_{n,1,j} = \delta_{1,j} + a_n^{(0)} \delta_{1,j-k+1}, \\ a_{n,k,j} = -a_n^{(k-1)} \delta_{i,j+2} + (x - b_n^{(k-1)}) \delta_{k,j+1}, \\ 1 \leq j \leq k$$

y por

$$a_{n,i,j} = -a_n^{(i-1)} \delta_{i,j+2} + (x - b_n^{(i-1)}) \delta_{i,j+1} - \delta_{i,j}, \\ 1 \leq j \leq k$$

para $i = 2, 3, \dots, k-1$.

Si definimos

$$\Delta_n(i, j) = \begin{cases} 0 & \text{si } j < i - 2 \\ 1 & \text{si } j = i - 2 \\ \left| \begin{array}{cccccc} x - b_n^{(i-1)} & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -a_n^{(i)} & x - b_n^{(i)} & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -a_n^{(j)} & x - b_n^{(j)} \end{array} \right| & \text{si } j \geq i - 1 \end{cases} \quad (6.3)$$

la regla de Cramer permite resolver (6.2) para $p_{nk+j}(x)$, $1 \leq j \leq k$, en términos de $p_{nk}(x)$ y $p_{nk+k}(x)$. Puesto que $p_{nk-1}(x) = p_{(n-1)k+k-1}(x)$, se obtienen dos representaciones de $p_{nk-1}(x)$ de manera natural. Eliminándolas por igualación, haciendo $P_n(x) := p_{nk}(x)$ y suponiendo que

$$\Delta_n(2, k - 1) = \Delta_0(2, k - 1), \quad n \geq 0, \quad (6.4)$$

es decir, que $\Delta_n(2, k - 1)$ es independiente de n , una hipótesis que será básica en todo lo que sigue, se obtiene la relación de recurrencia:

$$\left((x - b_n^{(0)}) \Delta_n(2, k - 1) - a_n^{(1)} \Delta_n(3, k - 1) - a_n^{(0)} \Delta_{n-1}(2, k - 2) \right) P_n(x) = P_{n+1}(x) + a_n^{(0)} a_{n-1}^{(1)} \dots a_{n-1}^{(k-1)} P_{n-1}(x), \quad n \geq 0 \quad (6.5)$$

donde $P_{-1}(x) = \Delta_{-1}(2, k - 2) = 0$. La deducción completa de esta última relación puede encontrarse en [11] y [12]. Los polinomios $P_n(x)$ se denominan los *polinomios de encadenamiento de los bloques* (6.2).

Para $l \geq 0$ un entero, los polinomios l -asociados $\{P_n^{(l)}(x)\}$ de $\{P_n(x)\}$ se definen mediante

$$\left((x - b_{n+l}^{(0)}) \Delta_n(2, k - 1) - a_{n+l}^{(1)} \Delta_{n+l}(3, k - 1) - a_{n+l}^{(0)} \Delta_{n-1+l}(2, k - 2) \right) P_n^{(l)}(x) = P_{n+1}^{(l)}(x) + a_{n+l}^{(0)} a_{n-1+l}^{(1)} \dots a_{n-1+l}^{(k-1)} P_{n-1}^{(l)}(x), \quad n \geq 0 \quad (6.6)$$

y las condiciones iniciales

$$P_{-1}^{(l)}(x) = 0, \quad P_0^{(l)}(x) = 1.$$

Observamos que si un sistema de polinomios $\{Q_n(x)\}_{n \geq 0}$ satisface la relación de recurrencia anterior para $n \geq 1$, entonces

$$Q_n(x) = Q_0(x) P_n^{(l)}(x) + (Q_1(x) - Q_0(x) P_1^{(l)}(x)) P_{n-1}^{(l+1)}(x), \quad n \geq 0.$$

Esto implica que

$$p_{(n+1)k-1}^{(1)}(x) = \Delta_0(2, k - 1) P_n^{(1)}(x) \quad (6.7)$$

y que

$$p_{(n+1)k-2}^{(2)}(x) = \Delta_0(3, k - 1) P_n^{(1)}(x) + a_1^{(0)} a_0^{(2)} \dots a_0^{(k-1)} P_{n-1}^{(2)}(x) \quad (6.8)$$

para todo $n \geq 0$ (haciendo $a_0^{(2)} \dots a_0^{(k-1)} = 1$ si $k = 2$). Así, si $\{p_n(x)\}$ es acotado por M , entonces el límite de su fracción continua viene dado por

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_{n-1}^{(1)}(z)}{p_n(z)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_{nk-1}^{(1)}(z)}{p_{nk}(z)} = \Delta_0(2, k - 1) Y(z) \quad (6.9)$$

para $|z| > M$, donde

$$Y(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_{n-1}^{(1)}(z)}{P_n(z)}. \quad (6.10)$$

Análogamente, para $\{P_n^{(1)}(x)\}$ tenemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_{n-1}^{(2)}(z)}{p_n^{(1)}(z)} = \frac{1}{\Delta_0(2, k-1)} (\Delta_0(3, k-1) + a_1^{(0)} a_0^{(2)} \dots a_0^{(k-1)} Y^{(1)}(z)) \quad (6.11)$$

donde

$$Y^{(1)}(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_{n-1}^{(2)}(z)}{P_n^{(1)}(z)}, \quad |z| > M. \quad (6.12)$$

Nota 6.1. Si $X^{(1)}(z)$ es la fracción continua de los primeros asociados de $\{p_n(x)\}$ entonces

$$X^{(1)}(z) = \frac{1}{C_1} \left\{ z - B_0 - \frac{1}{X(z)} \right\}, \quad (6.13)$$

donde $X(z)$ es la fracción continua del sistema $\{p_n(x)\}$. Esto es obvio de (2.15)

Nota 6.2. Un sistema $\{p_n(x)\}$ de polinomios dado por una relación de recurrencia en bloques como (6.1) se denomina un *sistema de polinomios cribados de primera clase* si

$$\begin{cases} b_n^{(j)} = 0 & \text{para } j = 1, 2, \dots, k-1, \text{ si } k \geq 2, \\ a_n^{(j)} = \frac{1}{4} & \text{para } j = 2, 3, \dots, k-1, \text{ si } k > 2, \end{cases} \quad (6.14)$$

de tal manera que sólo $b_n^{(0)}$, $a_n^{(0)}$ y $a_n^{(1)}$ pueden depender de n . En tal caso

$$\Delta_n(i, j) = \begin{cases} 0 & \text{si } j < i-2 \\ \tilde{U}_{j-i+2} & \text{si } j \geq i-2, \quad i \geq 2, \end{cases} \quad (6.15)$$

donde $\tilde{U}_n(x)$ es el n -ésimo polinomio mónico de Chebyshev de segunda clase (véase el Apéndice). Suponiendo que $\{p_n(x)\}$ está acotado por M , (6.9) se transforma en

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_{n-1}^{(1)}(z)}{p_n(z)} = \tilde{U}_{k-1}(z) Y(z), \quad |z| > M, \quad (6.16)$$

donde $Y(z)$ es como en (6.10).

Nota 6.3. Si $\{p_n(x)\}$ es un sistema de polinomios cribados de primera clase, $\{p_n^{(1)}(x)\}$ se denomina un sistema de polinomios cribados de *segunda clase*. Por consiguiente, el sistema $\{q_n(x)\}$ ($q_n(x) := p_n^{(1)}(x)$) de

los polinomios cribados de segunda clase está definido por los bloques de relaciones de recurrencia

$$\begin{aligned} (x - d_n^{(j)}) q_{nk+j}(x) &= q_{nk+j+1}(x) + c_n^{(j)} q_{nk+j-i}(x), \\ j &= 0, \dots, k-1, \quad n \geq 0, \end{aligned} \quad (6.17)$$

donde $k \geq 2$ y

$$\begin{cases} d_n^{(j)} = 0 & \text{para } j = 0, 1, \dots, k-2, \text{ si } k \geq 2, \\ c_n^{(j)} = \frac{1}{4} & \text{para } j = 2, 3, \dots, k-2, \text{ si } k \geq 2, \end{cases} \quad (6.18)$$

así que sólo $d_n^{(k-1)}$, $c_n^{(0)}$ y $c_n^{(k-1)}$ pueden depender de n . Si $\{P_n(x)\}$ es el sistema de polinomios de encadenamiento de $\{p_n(x)\}$, (6.7) y (6.8) se transforman en

$$q_{(n+1)k-1}(x) = \tilde{U}_{k-1}(x) P_n^{(1)}(x) \quad (6.19)$$

$$\begin{aligned} q_{(n+1)k-2}^{(1)}(x) &= \\ \tilde{U}_{k-2}(x) P_n^{(1)}(x) &+ \frac{1}{4^{(k-2)}} C_0^{(k-1)} P_{n-1}^{(2)}(x) \end{aligned} \quad (6.20)$$

para todo $n \geq 0$. Por lo tanto, si $\{q_n(x)\}$ está acotado por M ,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{q_{n-1}^{(1)}(z)}{q_n(z)} &= \\ \frac{1}{\tilde{U}_{k-1}(x)} &\left(\tilde{U}_{k-2}(x) + \frac{1}{4^{(k-2)}} C_0^{(k-1)} Y^{(1)}(z) \right), \end{aligned} \quad (6.21)$$

$|z| > M$, donde $Y^{(1)}(z)$ es como en (6.12).

Si $\{p_n(x)\}$ es un sistema de polinomios cribados de la primera clase, $\{p_n^{(i)}(x)\}$, $i \geq 0$, se denomina un sistema de polinomios cribados de la $i+1$ -ésima clase.

El lector podrá encontrar demostraciones detalladas de los resultados de esta sección en [2], [11], [12] y [16].

7. Dos ejemplos de sistemas definidos por bloques generales de relaciones de recurrencia

Los sistemas que usaremos ahora como ejemplos tienen características especiales, y son particularmente complejos. Constituyeron el material de la tesis de Maestría de G. Preciado. Son además de cierta importancia, al ser primeros asociados de otros sistemas, un tipo de polinomios poco tratado en la literatura, y usualmente considerado difícil de manejar. Esto muestra posiblemente las cualidades de nuestro método.

En esta sección, estudiaremos en primer lugar el sistema $\{q_n^{(1)}(x)\}$ de los primeros asociados del sistema $\{q_n(x)\}$, donde los $q_n(x)$ vienen dados para todo $n \geq 0$ por las $2k$ -relaciones de recurrencia

$$xq_{2nk+j}(x) = q_{2nk+j+1}(x) + a_n^{(j)}q_{2nk+j-1}(x), \quad n \geq 0, \quad (7.1)$$

donde $0 \leq j \leq 2k-1$, $q_{-1}(x) = 0$, $q_0(x) = 1$, y

$$\begin{aligned} a_n^{(0)} &= \frac{n}{2(2n + \alpha + \beta + 1)}, & a_n^{(1)} &= \frac{n + \alpha + \beta + 1}{2(2n + \alpha + \beta + 1)} \\ a_n^{(k)} &= \frac{n + \beta + 1}{2(2n + \alpha + \beta + 2)}, & a_n^{(k+1)} &= \frac{n + \alpha + 1}{2(2n + \alpha + \beta + 2)}. \end{aligned} \quad (7.2)$$

Si $k > 2$, suponemos que

$$a_n^{(j)} = \frac{1}{4}, \quad 2 \leq j \leq 2k-1, \quad j \neq k, k+1. \quad (7.3)$$

A lo largo de toda la sección supondremos que $k \geq 2$ y que $\{q_n(x)\}$ satisface la condición de positividad $\alpha > -1$, $\beta > -1$, $\alpha + \beta > -1$, $\alpha \neq 0$. Como es claro, el sistema $\{q_n^{(1)}(x)\}$ es acotado y positivo, pues $\{q_n(x)\}$ lo es.

Lema 6.1. *La fracción continua del sistema $\{q_n^{(1)}(x)\}$ es*

$$X^{(1)}(z) = \frac{2}{U_{2k-1}(z)} \left\{ zU_{2k-1}(z) - \frac{1}{X_{\alpha,\beta}(T_{2k}(z))} \right\}, \quad (7.4)$$

para $z \in \mathbb{C} \setminus [-1, 1]$ donde $X_{\alpha,\beta}(z)$ es la fracción continua de los polinomios de Jacobi (véase (8.23)).

Demostración. En efecto, los polinomios de encadenamiento $Q_n(x) := q_{2nk}^{(1)}(x)$, satisfacen la relación de recurrencia, $n \geq 0$,

$$\left[x\Delta_{n+1}(2, 2k-1) - a_{n+1}^{(1)}\Delta_{n+1}(3, 2k-1) - a_{n+1}^{(0)}(2, 2k-2) \right] Q_n(x) = Q_{n+1}(x) + 4^{2(2-k)} a_{n+1}^{(0)} a_n^{(1)} a_n^{(k-1)} a_n^{(k)} Q_{n-1}(x), \quad (7.5)$$

donde

$$\Delta_n(2, 2k-1) = \tilde{U}_{2k-1}(x), \quad (7.6)$$

$$\Delta_n(2, 2k-2) = x\tilde{U}_{k-1}(x)\tilde{U}_{k-2}(x) - a_n^{(k+1)}\tilde{U}_{k-1}(x)\tilde{U}_{k-3}(x) - a_n^{(k)}\tilde{U}_{k-2}^2(x), \quad (7.7)$$

y

$$\Delta_{n+1}(3, 2k-1) = x\tilde{U}_{k-1}(x)\tilde{U}_{k-2}(x) - a_{n+1}^{(k)}\tilde{U}_{k-1}(x)\tilde{U}_{k-3}(x) - a_{n+1}^{(k+1)}\tilde{U}_{k-2}^2(x) \quad (7.8)$$

para todo $n \geq 0$, como resulta de cálculos directos, y de las condiciones iniciales

$$Q_{-1}(x) = 0, \quad Q_0(x) = 1. \quad (7.9)$$

Haciendo $\tilde{Q}_n(x) = 2^{(2k-1)n}Q_n(x)$, usando (7.6), (7.7), (7.8) (7.9) y el hecho de que

$$a_{n+1}^{(1)}a_n^{(k)} + a_{n+1}^{(0)}a_n^{(k+1)} + a_{n+1}^{(1)}a_{n+1}^{(k)} + a_{n+1}^{(0)}a_n^{(k)} = \frac{1}{4}, \quad n \geq 0, \quad (7.10)$$

(7.5) se transforma en

$$\left[T_{2k}(x) - \frac{\beta^2 - \alpha^2}{(2(n+1) + \alpha + \beta)(2(n+1) + \alpha + \beta + 2)} \right] = \tilde{Q}_{n+1}(x) + C_n\tilde{Q}_{n-1}(x), \quad (7.11)$$

para todo $n \geq 0$ donde

$$C_n = \frac{4(n+1)(n+\alpha+1)(n+\beta+1)(n+\alpha+\beta)}{(2(n+1) + \alpha + \beta - 1)(2(n+1) + \alpha + \beta)^2(2(n+1) + \alpha + \beta + 1)}.$$

Ya que el sistema $\left\{ \left(P_n^{(\alpha, \beta)} \right)^{(1)} (T_{2k}(x)) \right\}$ satisface esta última relación de recurrencia, y dado que

$$\begin{aligned} \left(P_0^{(\alpha, \beta)} \right)^{(1)} (T_{2k}(x)) &= \tilde{Q}_0(x) \text{ y} \\ \left(P_1^{(\alpha, \beta)} \right)^{(1)} (T_{2k}(x)) &= \tilde{Q}_1(x), \end{aligned}$$

se tiene entonces que

$$Q_n(x) = 2^{(1-2k)n} \left(P_n^{(\alpha, \beta)} \right)^{(1)} (T_{2k}(x)) \quad (7.12)$$

para todo $n \geq 0$, donde $\left\{ \left(P_n^{(\alpha, \beta)} \right)^{(1)} (x) \right\}$ es el sistema de los primeros asociados de los polinomios $\left\{ P_n^{(\alpha, \beta)} (x) \right\}$ de Jacobi (véase el Apéndice). Similarmente, para el sistema $\left\{ Q_n^{(1)} (x) \right\}$ de los primeros asociados de $\left\{ Q_n(x) \right\}$ se obtiene que

$$Q_n^{(1)}(x) = 2^{(1-2k)n} \left(P_n^{(\alpha, \beta)} \right)^{(2)} (T_{2k}(x)), \quad n \geq 0. \quad (7.13)$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} Y^{(1)}(z) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Q_{n-1}^{(1)}(x)}{Q_n^{(2)}(x)} = 2^{2k-1} X_{\alpha, \beta}^{(1)}(T_{2k}(z)) \\ &= 2^{2k-3} * \frac{(\alpha + \beta + 2)^2 (\alpha + \beta + 3)}{(\alpha + 1)(\beta + 1)} \left[(T_{2k}(z)) - \frac{\beta - \alpha}{\alpha + \beta + 2} - \frac{1}{X_{\alpha, \beta}(T_{2k}(z))} \right], \end{aligned} \quad (7.14)$$

donde $X_{\alpha, \beta}^{(1)}(T_{2k}(z))$ es la fracción continua de los primeros asociados de los polinomios de Jacobi calculada en $T_{2k}(z)$.

Así, de (6.11), la fracción continua $X^{(1)}(z)$ de $\left\{ q_n^{(1)}(x) \right\}$ es

$$X^{(1)}(z) = \frac{1}{U_{2k-1}(z)} \left\{ \Delta_0(3, 2k-1) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} \right)^{2k-3} \frac{(\alpha + 1)(\beta + 1)}{(\alpha + \beta + 2)^2 (\alpha + \beta + 3)} 2^{2k-1} X_{\alpha, \beta}^{(1)}(T_{2k}(z)) \right\}. \quad (7.15)$$

Por otra parte de (7.7), (7.8) y (A.5, Apéndice) se tiene que

$$\Delta_0(3, 2k-1) = 4 \left[U_{k-1}(z) T_{k-1}(z) - 2a_0^{(k-1)} \right] = 4 \left[U_{k-1}(z) T_{k-1}(z) - \frac{(\alpha + 1)}{\alpha + \beta + 2} \right] \quad (7.16)$$

y sustituyendo en (7.15) obtenemos que

$$\begin{aligned} X^{(1)}(z) &= \frac{1}{U_{2k-1}(z)} \left\{ 4 \left(U_{k-1}(z) T_{k-1}(z) - \frac{\alpha + 1}{\alpha + \beta + 2} \right) + \left(\frac{1}{4} \right)^{k-2} \frac{(\alpha + 1)(\beta + 1)}{(\alpha + \beta + 2)^2 (\alpha + \beta + 3)} X_{\alpha, \beta}^{(1)}(T_{2k}(z)) \right\} \\ &= \{ 2U_{k-1}(z) T_{k-1}(z) + T_{2k}(z) \} - \frac{2}{U_{2k-1}(z)} \left\{ 1 - \frac{1}{X_{\alpha, \beta}(T_{2k}(z))} \right\} \\ &= \frac{2}{U_{2k-1}(z)} \left\{ zU_{k-1}(z) - \frac{1}{X_{\alpha, \beta}(T_{2k}(z))} \right\} \end{aligned} \quad (7.17)$$

como se quería demostrar, pues como se verifica fácilmente,

$$zU_{2k-1}(z) = 2U_{k-1}(z) T_{k-1}(z) + T_{2k}(z) - 1.$$

Ya que $T_{2k}(z) \notin [-1, 1]$ y $U_{2k-1}(z) \notin [-1, 1]$ cuando $z \notin [-1, 1]$ y dado que

$$X_{\alpha, \beta}(T_{2k}(x)) = \frac{1}{1 + T_{2k}(x)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\beta + 1)_n}{(\alpha + \beta + 1)_n} \left(\frac{2}{1 + T_{2k}(x)} \right)^n > 0 \quad (7.18)$$

cuando $x \in \mathbb{R} - [-1, 1]$, (7.17) vale para $\mathbb{C} - [-1, 1]$.

Estudiaremos ahora el comportamiento de $X^{(1)}(z)$ en $[-1, 1]$. Obsérvese que $X^{(1)}(z)$ puede extenderse continuamente a todo z , con $\text{Im } z \leq 0$, excepto posiblemente a los puntos del conjunto

$$S = \{x \in [-1, 1] \mid T_{2k}(x) = \pm 1\} \cup \{x \in [-1, 1] \mid U_{2k-1}(x) X_{\alpha, \beta}(T_{2k}(x)) = 0\} \quad (7.19)$$

Nótese además que $\text{Im } X_{\alpha, \beta}(T_{2k}(x)) \neq 0$, así que $X_{\alpha, \beta}(T_{2k}(x)) \neq 0$, para $x \in (-1, 1) \setminus S$. Esto resulta de ((A.24), Apéndice). Por lo tanto

$$U_{2k-1}(x) X_{\alpha, \beta}(T_{2k}(x)) \neq 0$$

en esos puntos.

Las identidades (A.5) y (A.6) en el Apéndice implican que

$$S = \{1, -1, \xi_1, \dots, \xi_{2k-1}\}, \quad (7.20)$$

donde ξ_1, \dots, ξ_{k-1} son las raíces de $U_{k-1}(x)$ y ξ_k, \dots, ξ_{2k-1} son las de $T_k(x)$. Así debemos examinar 3 casos: 1) ξ es una raíz de $U_{k-1}(x)$; 2) ξ es una raíz de $T_k(x)$; 3) $\xi = \pm 1$. Examinaremos caso por caso:

1. ξ es una raíz de $U_{k-1}(x)$

Si $\alpha > 0$ y $\beta > -1$, de (A.23) se tiene que

$$\lim_{\substack{\text{Im } z < 0 \\ z \rightarrow \xi_j}} X_{\alpha, \beta}(T_{2k}(z)) = \lim_{\substack{\text{Im } z < 0 \\ z \rightarrow \xi_j}} \frac{1}{T_{2k}(z) + 1} F\left(1, \beta + 1 \mid \frac{2}{T_{2k}(z) + 1}\right) = \frac{\Gamma(\alpha + \beta + 2) \Gamma(\alpha)}{2\Gamma(\alpha + \beta + 1) \Gamma(\alpha + 1)} = \quad (7.21)$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{\text{Im } z < 0 \\ z \rightarrow \xi_j}} (z - \xi_j) X^{(1)}(z) &= \lim_{\substack{\text{Im } z < 0 \\ z \rightarrow \xi_j}} \frac{2(z - \xi_j)}{U_{2k-1}(z)} \left\{ z U_{2k-1}(z) - \frac{1}{X_{\alpha, \beta}(T_{2k}(z))} \right\} \\ &= -\frac{\alpha}{U'_{2k-1}(\xi_j)(\alpha + \beta + 1)} = \frac{2(1 - \xi_j)\alpha}{k(\alpha + \beta + 1)} \end{aligned} \quad (7.22)$$

pues $U'_{2k-1}(\xi) = \frac{-2kT_{2k}(\xi)}{1 - \xi^2}$ para $\xi = \xi_1, \dots, \xi_{2k-1}$. Se deduce que la medida de ortogonalidad de $\{q_n^{(1)}(x)\}$ tiene masas en estos puntos. Ahora, si $-1 < \alpha < 0$ y $\beta > -1$, (1.57), (1.58), la fórmula binomial de Newton y la fórmula ((A.18), Apéndice) implican que

$$\begin{aligned} X_{\alpha, \beta}(T_{2k}(z)) &= \frac{\alpha + \beta + 1}{\alpha} \frac{1}{T_{2k}(z) + 1} F\left(1, \beta + 1 \mid \frac{T_{2k}(z) - 1}{T_{2k}(z) + 1}\right) \\ &\quad + \frac{\Gamma(\alpha + \beta + 2) \Gamma(-\alpha)}{2\Gamma(\beta + 1)} \left(\frac{T_{2k}(z) - 1}{T_{2k}(z) + 1}\right)^\alpha \left(\frac{2}{T_{2k}(z) + 1}\right)^{-\alpha - \beta} \end{aligned} \quad (7.23)$$

Entonces

$$\lim_{\substack{\text{Im } z < 0 \\ z \rightarrow \xi_j}} X_{\alpha, \beta}(T_{2k}(z)) = \infty \quad \text{y} \quad \lim_{\substack{\text{Im } z < 0 \\ z \rightarrow \xi_j}} (z - \xi_j) X^{(1)}(z) = 0. \quad (7.24)$$

y la medida de ortogonalidad de $\{q_n^{(1)}(x)\}$ no porta masas en los puntos $\xi = \xi_1, \dots, \xi_{2k-1}$.

2. ξ es una raíz de $T_k(x)$

Observemos primero que en este caso ξ es una raíz de $T_{2k}(x) + 1$. Aplicando (A.18) y (A.23) del Apéndice obtenemos que

$$X_{\alpha,\beta}(T_{2k}(z)) = \frac{\alpha + \beta + 1}{\beta} \frac{1}{T_{2k}(z) - 1} F \left(1, \beta + 1 \left| \frac{T_{2k}(z) + 1}{T_{2k}(z) - 1} \right. \right) + \frac{\Gamma(\alpha + \beta + 2)\Gamma(-\beta)}{2\Gamma(\alpha + 1)} \left(\frac{T_{2k}(z) + 1}{T_{2k}(z) - 1} \right)^\beta \left(\frac{2}{1 - T_{2k}(z)} \right)^{-\alpha - \beta}. \quad (7.25)$$

Entonces

$$\lim_{\substack{\text{Im } z < 0 \\ z \rightarrow \xi_j}} X_{\alpha,\beta}(z) = \infty \quad \text{y} \quad \lim_{\substack{\text{Im } z < 0 \\ z \rightarrow \xi_j}} (z - \xi_j) X^{(1)}(z) = 0. \quad (7.26)$$

siempre que $-1 < \beta < 0$ y $\alpha \neq 0$, así que, en este caso, la medida de ortogonalidad no porta masas en los puntos $\xi = \xi_k, \dots, \xi_{2k-1}$, las raíces de $T_k(x)$.

Ahora si $\alpha \neq 0, \beta > 0$ tenemos

$$\lim_{\substack{\text{Im } z < 0 \\ z \rightarrow \xi_j}} X_{\alpha,\beta}(T_{2k}(z)) = \lim_{\substack{\text{Im } z < 0 \\ z \rightarrow \xi_j}} \frac{1}{T_{2k}(z) - 1} F \left(1, \alpha + 1 \left| \frac{2}{1 - T_{2k}(z)} \right. \right) = -\frac{\Gamma(\alpha + \beta + 2)\Gamma(\beta)}{2\Gamma(\alpha + \beta + 1)\Gamma(\beta + 1)} = -\frac{\alpha + \beta + 1}{2\beta} \quad (7.27)$$

Luego,

$$\lim_{\substack{\text{Im } z < 0 \\ z \rightarrow \xi_j}} (z - \xi_j) X^{(1)}(z) = \frac{2\beta(1 - \xi_j^2)}{k(\alpha + \beta + 1)}. \quad (7.28)$$

lo que implica en este caso que la medida porta masas en las raíces ξ_j de $T_k(x)$ con el valor dado por (7.28).

Queda por considerar el caso $\beta = 0$. Aplicando la transformación de Kummer (A.18) al primer término de (7.25), y haciendo $\beta \rightarrow 0$ se obtiene, siempre y cuando $|T_{2k}(z) + 1| < |T_{2k}(z) - 1|$, que

$$X_{\alpha,0}(T_{2k}(z)) = -\frac{\alpha + 1}{2} \left(\frac{2}{1 - T_{2k}(z)} \right)^\alpha \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-\alpha)_n}{n \cdot n!} \left(\frac{T_{2k}(z) + 1}{T_{2k}(z) - 1} \right)^n - \log \left(\frac{T_{2k}(z) + 1}{T_{2k}(z) - 1} \right) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha}{(n + \alpha + 1)(n + 1)} \right\} \quad (7.29)$$

Luego

$$\lim_{\substack{\text{Im } z < 0 \\ z \rightarrow \xi_j}} X_{\alpha,0}(T_{2k}(z)) = \infty \quad \text{y} \quad \lim_{\substack{\text{Im } z < 0 \\ z \rightarrow \xi_j}} (z - \xi_j) X(z) = 0, \quad (7.30)$$

y por lo tanto la medida de ortogonalidad no porta masas en las raíces de $T_{2k}(x)$, en este caso.

3. $\xi = \pm 1$

Para $-1 < \alpha < 0$ y β arbitrario, (7.25) implica que

$$\lim_{\substack{\text{Im } z < 0 \\ z \rightarrow \xi_j}} X_{\alpha,\beta}(z) = \infty. \quad (7.31)$$

Entonces

$$\lim_{\substack{\text{Im } z < 0 \\ z \rightarrow \xi_j}} (z - \xi_j) X(z) = 0. \quad (7.32)$$

A su vez, si $\alpha > 0$ entonces

$$\lim_{\substack{\text{Im } z < 0 \\ z \rightarrow 1}} X_{\alpha,\beta}(z) = \frac{\alpha + \beta + 1}{2\alpha}. \quad (7.33)$$

Luego, en cualquier circunstancia,

$$\lim_{\substack{\text{Im } z < 0 \\ z \rightarrow \xi_j}} (z - \xi_j) X(z) = 0. \tag{7.34}$$

Por lo tanto, la medida de ortogonalidad no porta masas en los puntos extremos $z = \pm 1$.

Calcularemos ahora explícitamente la medida μ asociada al sistema $\{q_n^{(1)}(x)\}$. Obsérvese que la función de peso $\omega(x)$ de la parte absolutamente continua de μ viene dada por:

$$\begin{aligned} \omega(x) &= \frac{1}{\pi} \text{Im } \tilde{X}(x) = \frac{1}{\pi} \text{Im} \left(\frac{-2}{U_{2k-1}(x) \tilde{X}_{\alpha,\beta}(T_{2k}(x))} \right) = \frac{2}{\pi} \left(\frac{\text{Im} \left(U_{2k-1}(x) \tilde{X}_{\alpha,\beta}(T_{2k}(x)) \right)}{\left| U_{2k-1}(x) \tilde{X}_{\alpha,\beta}(T_{2k}(x)) \right|^2} \right) \\ &= \frac{2\Gamma(\alpha + \beta + 2) (1 - x^2)^\alpha |T_k(x)|^{2\beta+1} |U_{k-1}(x)|^{2\alpha+1}}{\Gamma(\alpha + 1) \Gamma(\beta + 1) \left| U_{2k-1}(x) \tilde{X}_{\alpha,\beta}(T_{2k}(x)) \right|^2} \chi(x) \\ &= \frac{\Gamma(\alpha + \beta + 2) (1 - x^2)^\alpha |T_k(x)|^{2\beta-1} |U_{k-1}(x)|^{2\alpha-1}}{2\Gamma(\alpha + 1) \Gamma(\beta + 1) \left| \tilde{X}_{\alpha,\beta}(T_{2k}(x)) \right|^2} \chi(x) \end{aligned} \tag{7.35}$$

donde $\chi(x)$ denota la función caracterísitca de $(-1, 1) \setminus S$.

El análisis anterior se puede resumir en el siguiente teorema:

Teorema 7.1. Sean μ la medida de ortogonalidad del sistema $\{q_n^{(1)}(x)\}$, $\{\xi_1, \dots, \xi_{k-1}\}$ las raíces de $U_{k-1}(x)$, $\{\xi_k, \dots, \xi_{2k-1}\}$ las raíces de $T_k(x)$, y $\omega(x)$ como en (7.35). Entonces:

1. Si $\alpha > 0$ y $-1 < \beta \leq 0$,

$$d\mu(x) = \omega(x) dx + \frac{2\alpha}{\alpha + \beta + 1} \sum_{j=1}^{k-1} \frac{1 - \xi_j^2}{k} \delta(x - \xi_j) dx \tag{7.36}$$

2. Si $\alpha > 0$ y $\beta > 0$,

$$d\mu(x) = \omega(x) dx + \frac{2\alpha}{\alpha + \beta + 1} \sum_{j=1}^{k-1} \frac{1 - \xi_j^2}{k} \delta(x - \xi_j) + \frac{2\beta}{\alpha + \beta + 1} \sum_{j=k}^{2k-1} \frac{1 - \xi_j^2}{k} \delta(x - \xi_j) \tag{7.37}$$

3. Si $-1 < \alpha < 0$ y $\beta > 0$,

$$d\mu(x) = \omega(x) dx + \frac{2\beta}{\alpha + \beta + 1} \sum_{j=k}^{2k-1} \frac{1 - \xi_j^2}{k} \delta(x - \xi_j) dx. \tag{7.38}$$

4. Si $-1 < \alpha < 0$ y $-1 < \beta < 0$,

$$d\mu(x) = \omega(x) dx \tag{7.39}$$

Los polinomios anteriores fueron descubiertos por R. Askey en [5] y denominados por él polinomio cribados de Jacobi de la primera clase. Su medida de ortogonalidad, la cual es absolutamente continua, fué establecida en [5] y, por otros procedimientos en [2] y [16]. El hecho de que los $\{q_n(x)\}$ puedan obtenerse por un proceso de cribación ([2], [5]) no parece ayudar mucho en la determinación de las medidas espectrales del sistema

$\{q_n^{(1)}(x)\}$ de sus cribados, el cual resulta ser mucho más complejo. De más ayuda puede ser tal vez el que dichos sistemas pueden obtenerse por medio de aplicaciones polinómicas (20), aunque ésto no parece del todo evidente. Creemos, de todas maneras, que nuestro procedimiento es más eficiente y fácil de aplicar.

De hecho, el procedimiento es aplicable aún a sistemas que, estando definidos por bloques de relaciones de recurrencia, no son sistemas cribados ni pueden obtenerse por medio de aplicaciones polinómicas. Tal es el caso del sistema $\{p_n^{(1)}(x)\}$ de los primeros asociados de los polinomios $\{p_n(x)\}$ dados por los bloques

$$\begin{aligned} xp_{2nk+j}(x) &= p_{2nk+j+1}(x) + a_n^{(j)} p_{2nk+j-1}(x) \\ j &= 0, \dots, 2k-1, \quad n \geq 0 \end{aligned} \quad (7.40)$$

donde

$$\begin{aligned} a_n^{(0)} &= \frac{n+\alpha}{2(2n+\alpha+\beta+1)} \\ a_n^{(1)} &= \frac{n+\beta+1}{2(2n+\alpha+\beta+1)} \\ a_n^{(k)} &= \frac{n+\alpha+\beta+1}{2(2n+\alpha+\beta+2)} \\ a_n^{(k+1)} &= \frac{n+1}{2(2n+\alpha+\beta+2)}. \end{aligned} \quad (7.41)$$

para $n \geq 0$ y $k \geq 2$. Si $k > 2$, suponemos que

$$a_n^{(j)} = \frac{1}{4}, \quad j = 2, 3, \dots, 2k-1, \quad j \neq k, k+1, \quad n \geq 0. \quad (7.42)$$

Este sistema está evidentemente relacionado con los polinomios cribados de *Jacobi-Askey* de primera clase mencionados anteriormente (veáanse [2] y [16]). Suponemos que $\alpha > -1$, $\beta > -1$, $\alpha + \beta > -1$ y $\alpha \neq 0$, lo cual determina las condiciones de positividad de $\{p_n(x)\}$. Obsérvese que, en estas circunstancias $\{p_n(x)\}$ es también acotado. La fracción continua de este sistema fué establecida en [16] y está dada por

$$X(z) = \frac{U_{2k-1}(z) X_{\alpha, \beta}(T_{2k}(z))}{1 + \frac{2\alpha}{\alpha + \beta + 1} T_k(z) U_{k-2}(z) X_{\alpha, \beta}(T_{2k}(z))} \quad (7.43)$$

donde $X_{\alpha, \beta}(z)$ es la fracción continua de los polinomios de Jacobi ((A.23), Apéndice) lo cual permite concluir que $\{p_n(x)\}$ no puede obtenerse a partir de los polinomios de Jacobi mediante cribación directa o mediante aplicaciones polinómicas. La relación (A.18) permite concluir que la fracción continua $Y^{(1)}(z)$ del sistema $\{p_n^{(1)}(x)\}$ de los primeros asociados de $\{p_n(x)\}$ está dada por

$$\begin{aligned} Y^{(1)}(z) &= \frac{2(\alpha + \beta + 3)}{(1 + \alpha) U_{2k-1}(z)} \left\{ z U_{2k-1}(z) - \frac{2\alpha}{\alpha + \beta + 1} T_k(z) U_{k-2}(z) \right\} - \frac{2(\alpha + \beta + 3)}{(1 + \alpha) U_{2k-1}(z)} \frac{1}{X_{\alpha, \beta}(T_{2k}(z))} \\ &= \frac{\alpha + \beta + 3}{(1 + \alpha)} \left\{ X^{(1)}(z) - \frac{2\alpha U_{k-2}(z)}{(\alpha + \beta + 1) U_{k-1}(z)} \right\} \end{aligned} \quad (7.44)$$

para $z \in \mathbb{C} - [-1, 1]$, donde $X^{(1)}(z)$ es como en (7.4).

Teorema 7.2. Sean ν la medida de ortogonalidad de $\{p_n^{(1)}(x)\}$, $\{\xi_1, \dots, \xi_{k-1}\}$ las raíces de $U_{k-1}(x)$, $\{\xi_k, \dots, \xi_{2k-1}\}$ las raíces de $T_k(x)$ y $u(x) = \frac{\alpha + \beta + 3}{1 + \alpha} \omega(x)$, donde ω es como en (7.35). Entonces:

1. Si $\alpha > 1$ y $-1 < \beta \leq 0$,

$$d\nu(x) = u(x) dx \quad (7.45)$$

2. Si $\alpha > 0$ y $\beta > 0$,

$$d\nu(x) = u(x) dx + \frac{2\beta(\alpha + \beta + 3)}{(1 + \alpha)(\alpha + \beta + 1)} \sum_{j=k}^{2k-1} \frac{1 - \xi_j^2}{k} \delta(x - \xi_j) dx. \quad (7.46)$$

3. Si $-1 < \alpha < 0$ y $\beta > 0$,

$$dv(x) = u(x) dx - \frac{(\alpha + \beta + 3)}{(1 + \alpha)} \frac{2\alpha}{\alpha + \beta + 1} \sum_{j=1}^{k-1} \frac{1 - \xi_j^2}{k} \delta(x - \xi_j) dx + \frac{(\alpha + \beta + 3)}{(1 + \alpha)} \frac{2\beta}{\alpha + \beta + 1} \sum_{j=k}^{2k-1} \frac{1 - \xi_j^2}{k} \delta(x - \xi_j) dx, \quad (7.47)$$

4. Si $-1 < \alpha < 0$ y $-1 < \beta < 0$

$$dv(x) = u(x) dx - \frac{2\alpha(\alpha + \beta + 3)}{(1 + \alpha)(\alpha + \beta + 1)} \sum_{j=1}^{k-1} \frac{1 - \xi_j^2}{k} \delta(x - \xi_j) dx. \quad (7.48)$$

Demostración. La ecuación (7.44) permite establecer el comportamiento de la fracción continua $Y^{(1)}(z)$ en términos del de $X^{(1)}(z)$. El cálculo de la parte absolutamente continua de la medida y el análisis del comportamiento de $Y^{(1)}(z)$ en los puntos ξ_k, \dots, ξ_{2k-1} (las raíces de $T_k(x)$) y en ± 1 es el mismo que el hecho para $X^{(1)}(z)$ en la sección anterior. Resta por examinar el caso en que ξ es raíz de $U_{k-1}(x)$. Para ésto supongamos primero que $\alpha > 0$ y $\beta > -1$ y aplicando (7.44) obtenemos

$$\lim_{\substack{\text{Im } z < 0 \\ z \rightarrow \xi_j}} (z - \xi_j) Y^{(1)}(z) = \frac{-2(\alpha + \beta + 3)}{(1 + \alpha) U'_{2k-1}(\xi_j)} \left\{ \frac{2\alpha}{\alpha + \beta + 1} T_k(\xi_j) U_{k-2}(\xi_j) + \frac{2\alpha}{\alpha + \beta + 1} \right\}.$$

Teniendo en cuenta que $T_k(\xi_j) U_{k-2}(\xi_j) = -1$ para $j = 1, \dots, k-1$, vemos que

$$\lim_{\substack{\text{Im } z < 0 \\ z \rightarrow \xi_j}} (z - \xi_j) Y^{(1)}(z) = 0. \quad (7.49)$$

Por lo tanto, v no porta masas en estos puntos.

Ahora, si $-1 < \alpha < 0$ y $\beta > -1$, utilizamos (6.44) obtenemos que

$$\lim_{\substack{\text{Im } z < 0 \\ z \rightarrow \xi_j}} (z - \xi_j) Y^{(1)}(z) = \frac{-2\alpha(\alpha + \beta + 3)(1 + \xi_j^2)}{(1 + \alpha)(\alpha + \beta + 1)k}. \quad (7.50)$$

Esto implica que v si porta en tal caso masas en las raíces de $U_{k-1}(x)$ con amplitudes dadas precisamente por (7.50).

□

Apéndice

Polinomios de Chebyshev y Jacobi.

Función Gamma y función hipergeométrica

1. Polinomios de Chebyshev

Los polinomios de Chebyshev de primera y segunda clases $\{T_n(x)\}$ y $\{U_n(x)\}$ están definidos ([25], [29]) por la relación de recurrencia

$$2xy_n(x) = y_{n+1}(x) + y_{n-1}(x), \quad n \geq 1 \quad (A.1)$$

y las condiciones iniciales

$$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x \quad \text{y} \quad U_0(x) = 1, \quad U_1(x) = 2x. \quad (A.2)$$

Por razones prácticas, se harán evidentes posteriormente, convendremos en que $T_{-1}(x) = U_{-1}(x) = 0$. Si $x = \cos \theta$, entonces

$$T_n(x) = \cos n\theta, \quad U_n(x) = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin \theta}, \quad n \geq 0 \quad (A.3)$$

para $0 < \theta < \pi$ como resulta de las identidades trigonométricas elementales.

Las relaciones

$$2T_n(x) = U_n(x) - U_{n-2}(x), \quad (A.4)$$

$$U_{n-1}^2(x) - U_n(x)U_{n-2}(x) = 1, \quad n \geq 1$$

$$1 - T_n^2(x) = (1 - x^2) U_{n-2}^2(x), \quad (A.5)$$

$$1 - T_{2n}(x) = 2(1 - x^2) U_{n-1}^2(x), \quad n \geq 0$$

$$U_{2n-1}(x) = 2U_{n-1}(x)T_n(x), \quad (A.6)$$

$$1 + T_{2n}(x) = 2T_n^2(x), \quad n \geq 0$$

$$T_n(T_m(x)) = T_{nm}(x), \quad (A.7)$$

$$U_{m-1}(x)U_n(T_m(x)) = U_{m(n+1)-1}(x), \quad n, m \geq 1$$

son útiles en este documento y se obtienen también a partir de identidades trigonométricas elementales basadas en (A.3) y prolongación analítica.

Los polinomios mónicos de Chebyshev están dados por las relaciones

$$\begin{aligned} \tilde{T}_n(x) &= 2^{-n+1}T_n(x), \\ \tilde{U}_n(x) &= 2^{-n}U_n(x), \quad n \geq 1, \end{aligned} \tag{A.8}$$

con

$$\tilde{T}_{-1}(x) = 0 = \tilde{U}_{-1}(x), \quad \tilde{T}_0(x), \tilde{U}_0(x) = 1. \tag{A.9}$$

Ambos sistemas satisfacen relaciones de recurrencia de la forma

$$xy_n(x) = y_{n+1}(x) + C_n y_{n-1}(x), \quad n \geq 1 \tag{A.10}$$

con $C_n = \frac{1}{4}$ para $n \geq 2$, $C_1 = \frac{1}{2}$ para $\{\tilde{T}_n(x)\}$, $C_1 = \frac{1}{2}$ para $\{\tilde{U}_n(x)\}$.

Nota A.1. Para la determinación de la fracción continua de los polinomios de Chebyshev, véase [17]. En ese mismo documento, las medidas espectrales de tales polinomios se determinaron estrictamente por aplicación del Teorema 4.1, según los procedimientos que estamos tratando de explicar y aplicar a sistemas más complejos.

2. La función Gamma.

La función Gamma ([25]) se define:

$$\Gamma(z) := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1)!n^z}{(z)_n}, \quad z \neq 0, -1, -2, \dots \tag{A.11}$$

donde $(z)_n$ es el símbolo de Pochhammer, el cual está dado por $(z)_0 = 1$; $(z)_1 = z$; $(z)_n = z(z+1) \cdots (z+n-1)$, $n \geq 2$. Nótese que $(1)_n = n!$.

De (A.11) se deduce que

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+n)}{(z)_n}, \quad n \geq 0, \quad z \neq 0, -1, -2, \dots \tag{A.12}$$

Si $\text{Re}(z) > 0$, entonces

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt \tag{A.13}$$

y $\Gamma(z)$ es obviamente analítica para $\text{Re}(z) > 0$. Esto y (A.12) aseguran que Γ es analítica sobre \mathbb{C} excepto

por singularidades en $z = 0, -1, -2, \dots$, las cuales son obviamente polos simples.

3. La función hipergeométrica.

La prolongación analítica a $\mathbb{C} \setminus [1, \infty)$ ([25]) de la serie hipergeométrica

$$\sum_{n=0}^\infty \frac{(a)_n (b)_n}{n! (c)_n} z^n, \quad |z| < 1, \quad c \neq 0, -1, -2, \dots \tag{A.14}$$

se denota con $F(a, b; c; z)$ y se conoce como la función hipergeométrica. Es necesario suponer que $c \neq 0$ y no es un entero negativo. Si $a \in \mathbb{C}$ y $(1-t)^a := e^{a \log(1-t)}$, $t \neq 1$, donde $\log(z)$ es la rama principal del logaritmo en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ (parte imaginaria o argumento en $(-\pi, \pi)$), entonces, siempre y cuando $\text{Re}(c) > \text{Re}(b) > 0$, se tiene que

$$\begin{aligned} F(a, b; c; z) &= \\ &= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 t^{b-1} (1-t)^{c-b-1} (1-tz)^{-a} dt, \end{aligned} \tag{A.15}$$

para todo $z \notin [1, \infty)$ (véase [25]). La fórmula (A.15) se debe a Euler y representa la prolongación analítica de (A.14) a $\mathbb{C} \setminus [1, \infty)$ más frecuentemente usada en las aplicaciones. Suponiendo además que $c-a$ no sea cero o un entero negativo, y que $\text{Re}(c-a-b) > 0$, (A.15) garantiza que $F(a, b; c; z)$ es continua en $z = 1$ con

$$F(a, b; c; 1) = \lim_{z \rightarrow 1} F(a, b; c; z) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}, \tag{A.16}$$

fórmula debida a Gauss. La fórmula $(1-z)^{-a} = F(a, 1; 1; z)$, $z \notin [1, \infty)$, que es también útil, se conoce como la *fórmula binomial de Newton*. La transformación de Euler (véase [25])

$$F(a, b; c; z) = (1-z)^{c-a-b} F(c-a, c-b; c; z), \tag{A.17}$$

es fácilmente verificable para $|z| < 1$, y por prolongación analítica es válida para todo $z \in \mathbb{C} \setminus [1, \infty)$. La notación $F\left(\begin{matrix} a, & b \\ & c \end{matrix} \middle| z\right)$ es frecuentemente preferible a la $F(a, b; c; z)$. La transformación de Kummer (véase [25])

$$F\left(\begin{matrix} a, & b \\ & c \end{matrix} \middle| z\right) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} F\left(\begin{matrix} a, & b \\ & a+b+1-c \end{matrix} \middle| 1-z\right) + \frac{\Gamma(c)\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} (1-z)^{c-a-b} F\left(\begin{matrix} c-a, & c-b \\ & c-a-b+1 \end{matrix} \middle| 1-z\right) \quad (\text{A.18})$$

es válida para $z \in \mathbb{C} \setminus ((-\infty, 0] \cup [1, \infty))$, siempre y cuando las expresiones donde estén involucrados a , b y c tengan todas sentido.

4. Los polinomios de Jacobi.

Los polinomios de Jacobi ([25], [29]) $\{P_n^{(\alpha, \beta)}(x)\}$ están dados por la relación de recurrencia

$$\left(x - \frac{\beta^2 - \alpha^2}{(2n + \alpha + \beta)(2n + \alpha + \beta + 2)}\right) P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = P_{n+1}^{(\alpha, \beta)}(x) + \frac{4n(n + \alpha)(n + \beta)(n + \alpha + \beta) P_{n-1}^{(\alpha, \beta)}(x)}{(2n + \alpha + \beta)^2(2n + \alpha + \beta - 1)(2n + \alpha + \beta + 1)}, n \geq 0 \quad (\text{A.19})$$

y las condiciones iniciales

$$P_{-1}^{(\alpha, \beta)}(x) = 0, \quad P_0^{(\alpha, \beta)}(x) = 1. \quad (\text{A.20})$$

Se supone que el coeficiente de $P_0^{(\alpha, \beta)}(x)$ es $(x - \beta)$ si $\alpha = -\beta$. Es necesario suponer que $\alpha > -1$, $\beta > -1$ para que $\{P_n^{(\alpha, \beta)}(x)\}$ sea un sistema positivo. En tal caso el funcional de momentos $\mathcal{L}_{\alpha, \beta}$ (véase [25]) está representado por la medida positiva, absolutamente continua

$$d\mu_{\alpha, \beta}(x) = \omega_{\alpha, \beta}(x) dx, \quad (\text{A.21})$$

donde

$$\omega_{\alpha, \beta}(x) = \frac{\Gamma(\alpha + \beta + 2)}{2^{\alpha + \beta + 1} \Gamma(\alpha + 1) \Gamma(\beta + 1)} (1-x)^\alpha (1+x)^\beta \chi(x), \quad (\text{A.22})$$

siendo $\chi(x)$ la función característica de $(-1, 1)$. el soporte de $\mu_{\alpha, \beta}$ es $[-1, 1]$.

Si $\alpha > -1$, $\beta > -1$, la fracción continua de $\{P_n^{(\alpha, \beta)}(x)\}$ es

$$X_{\alpha, \beta}(z) = \frac{1}{z-1} F\left(\begin{matrix} 1, & \alpha+1 \\ & \alpha+\beta+2 \end{matrix} \middle| \frac{2}{1-z}\right) = \frac{1}{z+1} F\left(\begin{matrix} 1, & \beta+1 \\ & \alpha+\beta+2 \end{matrix} \middle| \frac{2}{1+z}\right) \quad (\text{A.23})$$

para $z \in \mathbb{C} \setminus [-1, 1]$. Esto se deduce inmediatamente del teorema de Markov con $\mu = \mu_{\alpha, \beta}$. En este caso se tiene también el siguiente lema, que tiene importancia fundamental.

Lema A.1. *Si $\alpha > -1$, $\beta > -1$, la fracción continua $X_{\alpha, \beta}(z)$ puede ser extendida continuamente desde $\text{Im}(z) < 0$ a $\text{Im}(z) \leq 0$, $z \neq \pm 1$. En este caso se tiene también que*

$$\omega_{\alpha, \beta}(x) = \frac{1}{\pi} \text{Im} X_{\alpha, \beta}(x), \quad z \neq \pm 1. \quad (\text{A.24})$$

Para una demostración, véase [16].

Epílogo

Aunque las ideas consideradas en las notas de este seminario son simples y de carácter limitado, no dejan de tener aspectos técnicos delicados. Esperamos, por una

parte, haberlas colocado en un contexto lo suficientemente apropiado para hacerlas aparecer naturales o, al menos, rápidamente comprensibles, y por otra, haber logrado comunicar el hecho de que pueden ser de utilidad,

tanto teórica como práctica, en la solución de ciertos problemas. De ser así, nos damos por satisfechos.

Referencias

- [1] **I. N. Ahkiezer**, *The Classical Moment Problem*. Hafner, New York, 1965.
- [2] **B. H. Aldana, J. A. Charris & O. Mora-Valbuena**, *On block recursions, Askey's sieved Jacobi polynomials, & two related systems*. Colloquium Mathematicum **78** (1998), 57–91.
- [3] **T. M. Apostol**, *Mathematical Analysis*. 12nd Edition, Addison Wesley, Reading, Mass., 1974.
- [4] **W. Al-Salam, W. Allaway & R. Askey**, *Sieved ultraspherical polynomials*. Trans. Amer. Math. Soc. **234** (1984), 39–55.
- [5] **R. Askey**, *Orthogonal polynomials old & new & some combinatorial connections*. In: *Enumeration & Design*, D. M. Jackson & S. A. Vanstone (eds.), Academic Press, Toronto, 1984, 67–84.
- [6] **R. Askey, & M. E. H. Ismail**, *Recurrence relations, continued fractions & orthogonal polynomials*. Mem. Amer. Math. Soc. **300** (1984), 1–102.
- [7] **E. Banck & M. E. H. Ismail**, *The attractive Coulomb potential polynomials*. Constructive Approximation **1** (1985), 103.
- [8] **R. Bartle**, *The Elements of Integration & Lebesgue Measure*. Wiley, New York, 1995.
- [9] **T. J. T. Broad**, *Gauss quadrature generated by diagonalization of H in infinite L^2 basis*. Phys Rev. **A-18**, 1012–1027.
- [10] **J. A. Charris & L. A. Gómez**, *Functional analysis, orthogonal polynomials & a theorem of Markov*. Revista Colombiana Mat. **22** (1988), 79–128.
- [11] **J. A. Charris & M. E. H. Ismail**, *Sieved orthogonal polynomials VII: Generalized polynomial mappings*. Trans. Amer. Math. Soc., **340** (1993), 71–93.
- [12] **J. A. Charris, M. E. H. Ismail, & S. Monsalve**, *Sieved orthogonal polynomials X: General blocks of recurrence relations*. Pac. J. Math. **163** (1994), 1294–1308.
- [13] **J. A. Charris & G. Rodríguez-Blanco**, *On systems of orthogonal polynomials with inner & end point masses*. Revista Colombiana Mat. **24** (1990), 153–177.
- [14] **J. A. Charris & F. H. Soriano**, *Complex & distributional weights por sieved ultraspherical polynomials*. Internat. J. Math. & Math. Sci. **19** (1996), 229 - 242.
- [15] **J. A. Charris & F. H. Soriano**, *On the distributional orthogonality of the general Pollaczek polynomials*. Internat. J. Math. & Math. Sci. **19** (1996), 417–426. Gordon and Breach, New York, 1978.
- [16] **J. A. Charris & O. Mora-Valbuena**, *On block recursions & the determination of spectral measures from continued fractions*. Int. J. Appl. Math. **1** (1999), 635–688.
- [17] **J. A. Charris & G. Preciado-López**, *Sobre los polinomios ortogonales, las fracciones continuas y las medidas espectrales*. Rev. Acad. Col. Cienc. Exactas Físicas y Naturales **26** (2002), 403–410.
- [18] **T. S. Chihara**, *On co-recursive orthogonal polynomials*. Proc. Amer. Math. Soc. **8**(1957), 899–905.
- [19] **T. S. Chihara**, *An Introduction to Orthogonal Polynomials*. Gordon and Breach, New York, 1978.
- [20] **J. Gerónimo & W. van Assche**, *Orthogonal polynomials on several intervals via a polynomial mapping*. Trans Amer. Math. Soc. **308** (1988), 559–581.
- [21] **E. J. Heller, W. P. Reinhard & H. A. Yamani**, *On quadrature calculations of matrix elements using L_2 -expansion techniques*. J. Comp. Phys. **13** (1973), 535–549.
- [22] **M. E. H. Ismail, D. Masson & M. Rahman**, *Complex weight functions for classical orthogonal polynomials*. Canadian J. Mathematics **43** (1991), 1294–1308.
- [23] **A. Krall**, *Orthogonal polynomials through moment functionals*. SIAM J. Math. Anal. **9** (1978), 600–603.
- [24] **F. W. Olver**, *Asymptotics & Special Functions*. Academic Press, New York, 1974.
- [25] **E. D. Rainville**, *Special Functions*. Macmillan, New York, 1960.
- [26] **W. Rudin**, *Real & Complex Analysis*. 2nd Edition, Mc Graw-Hill, New York, 1974.
- [27] **J. Shohat & J. P. Tamarkin**, *The problem of Moments*. Math. Surveys Vol. 1, Amer. Math. Soc, Providence, R.I., 1950.
- [28] **G. B. Simmons**, *Introduction to Topology & Modern Analysis*. Mc Graw-Hill, New York, 1963.
- [29] **G. Szegő**, *Orthogonal Polynomials*. 4th Ed., Colloquium Publications, Vol. 23, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1975.
- [30] **H. S. Wall**, *Analytic Theory of Continued Fractions*. Van Nostrand, New York, 1948.
- [31] **H. A. Yamani & W. P. Reinhardt**, *L^2 discretization of the continuum, radial kinetic energy & Coulomb hamiltonians*. Phys. Rev., **A-11**, 1144–1155.
- [32] **K. Yosida**, *Functional Analysis*. 5th Edition, Springer, Berlín, 1979.

QUÍMICA DE PRODUCTOS NATURALES COMO FUENTE DE MOLÉCULAS BIOACTIVAS

por

Luis Fernando Echeverri López*

Resumen

Echeverri López, L. F.: Química de productos naturales como fuente de moléculas bioactivas. Rev. Acad. Colomb. Cienc. 27(104): 423-439, 2003. ISSN 0370-3908.

Los productos naturales son fuente de moléculas con aplicaciones en diferentes campos de la vida humana. En este artículo se describe el aislamiento, la identificación y la actividad de varios metabolitos secundarios obtenidos de plantas colombianas. Estos incluyen sustancias con aplicación en agronomía y en farmacología humana y animal. También se mencionan algunos aspectos relacionados con la bioprospección y la utilización de esos metabolitos.

Palabras clave: Productos naturales, Agronomía, Farmacología, estructura, bioensayo, bioprospección.

Abstract

The natural products are source of molecules with applications in different fields of the human life. In this article the isolation, identification and activity of several secondary metabolites obtained from Colombian plants is described. These include substances with application in agronomy and in human and animal pharmacology. Finally, some aspects related with bioprospection and the use of those compounds are also reported.

Key words: Natural products, Agronomy, Pharmacology, structure, bioassay, bioprospection.

Introducción

Los productos naturales en forma bruta o refinada siempre han hecho parte fundamental de la vida humana: curan el cuerpo, alivian el alma, eliminan el dolor, embellecen, saborizan, perfuman, o causan éxtasis y además controlan pestes. Las moléculas aportadas son de muy diversas estructuras y actividades: captopril, epibatidina, alcaloides de

vinca, curare, quina, morfina, opio, penicilina, taxol, piretrinas, esencias, ciclosporina, eugenol, mentol, rifampicina, prostanoïdes, esteviosido, hormonas del crecimiento de plantas y feromonas (Newman, *et al.* 2000; Hadacek, 2002; Pietra, 2002). Actualmente los productos naturales se exploran más como una fuente de nuevas plantillas farmacológicamente activas que como materia prima empleada para fabricar y producir medicamentos directamente.

* Universidad de Antioquia. Grupo de Química Orgánica de Productos Naturales. E-mail: echeveri@carios.udea.edu.co; feche@epm.net.co. Apartado Aéreo 1226, Medellín-Colombia

conidias y ascósporas (Figura 3) (Luis, *et al.* 2000; Quiñones *et al.* 2000; Escobar *et al.* 2002). Esta última forma es especialmente resistente contra factores ambientales adversos, como la temperatura y la humedad.

Como se discute más adelante, se ha encontrado una íntima relación entre la resistencia a microorganismos patógenos y la presencia de varias de estas fitoalexinas; adicionalmente, han sido aislados la casi totalidad de los intermedios biosintéticos, incluyendo algunos dímeros y productos de degradación metabólica.

1.1.4. Fitoalexinas en papaya

La papaya (*Carica papaya*) es una fruta muy susceptible a enfermedades de origen fúngico, especialmente a *Colletotrichum gloeosporoides*. Tanto cuando se tratan rodajas de esta fruta con cloruro de cobre como cuando se exponen a esporas de este hongo, se generan pequeñas concentraciones de dos sustancias químicamente muy emparentadas; una de ellas se identificó posteriormente por resonancia magnética nuclear y fue confirmada posteriormente por difracción de Rayos X como la hidroxacetosiringona (Echeverri *et al.*, 1996b). Este compuesto además es un reconocido activador de eventos bioquímicos relacionados con la patogénesis de *Agrobacterium tumefaciens* (Tzfira & Citovsky, 2002); su síntesis fue realizada mediante una sencilla secuencia de reacciones (Echeverri *et al.*, 2000) (Figura 4).

1.1.5. Resistencia y de la susceptibilidad a microorganismos patógenos

Como resultado de las investigaciones netamente químicas con fitoalexinas, se ha emprendido una evaluación

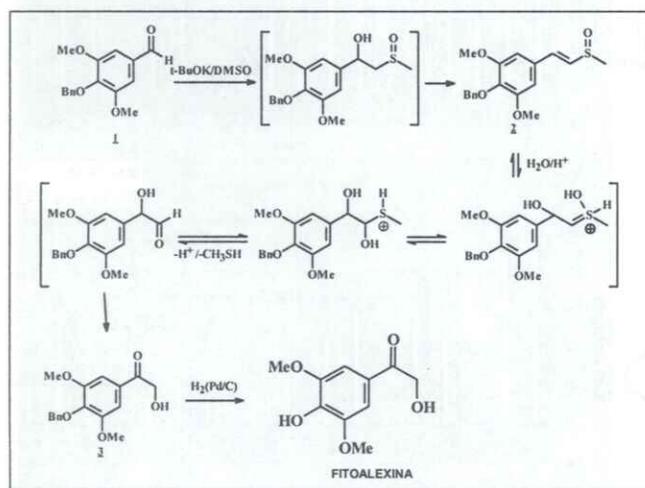


Figura 4. Estructura y síntesis de la fitoalexina de papaya

de las sustancias presentes/ausentes en variedades de plantas resistentes y susceptibles a microorganismos, especialmente hongos. Desde un punto de vista simplista, podríamos asumir que la resistencia de una planta contra un microorganismo patógeno se debe a la producción en el momento y en las cantidades precisas de fitoalexinas o sustancias estructuralmente análogas a ellas (van Etten *et al.*, 2001).

Algunos hechos altamente correlacionables con esta hipótesis de presencia/ausencia de metabolitos han sido encontrados recientemente. Así por ejemplo, se comparó la química de variedades fríjol susceptibles a la antracnosis (ICA Calima, Cargamanto Rojo, Cargamanto Mocho, Cargamanto Corriente, Uribe Rosado) con las variedades resistentes (ICA Citará, Quimbaya y muy especialmente LAS 106 y LAS 220). Las primeras tienen limitada capacidad para producir fitoalexinas mientras que las del segundo grupo, además de tener buenos niveles de fitoalexinas preformadas, poseen una alta capacidad para producirlas en altas concentraciones y rápidamente (Figura 5); el principal compuesto responsable de la resistencia parece ser el pterocarpano phaseollina (Durango *et al.*, 2002).

Un análisis del esquema biosintético de los flavonoides (Druka *et al.*, 2003; Akashi *et al.*, 1999) y su correlación con las fitoalexinas de fríjol estudiadas en este trabajo, indican que la susceptibilidad puede originarse por fallas en la regulación metabólica (Figura 6):

a. A diferencia de lo que han encontrado otros autores (Blount *et al.*, 2000; Winkel-Shirley, 2001) no parece ser PAL la enzima limitante del proceso biosintético, pues en todas se observan buenas cantidades de una mezcla de isoflavonoides.

b. Ninguna de las variedades colombianas produce cantidades detectables de kievitona, una de las principales fitoalexinas en materiales norteamericanos y europeos, aunque en ambas se generan igualmente sus precursores, la genisteina y dalbergioidina. (Liu *et al.*, 1995; Hargreaves & Selby, 1978).

c. A pesar de producir niveles similares de daidzeina, solamente las resistentes tienen una alta capacidad para convertirla eficientemente a phaseollina.

d. La diferencia más importante radica en que tanto para la producción de kievitona como para la de phaseollina se requiere la acción de dos prenilasas, enzimas que introducen un residuo de isopreno en el núcleo de isoflavonoide; al parecer la ciclación del precursor para generar un pterocarpano no es la limitante del proceso biosintético. (López-Meyer & Paiva, 2002; Dewick & Steele, 1982).

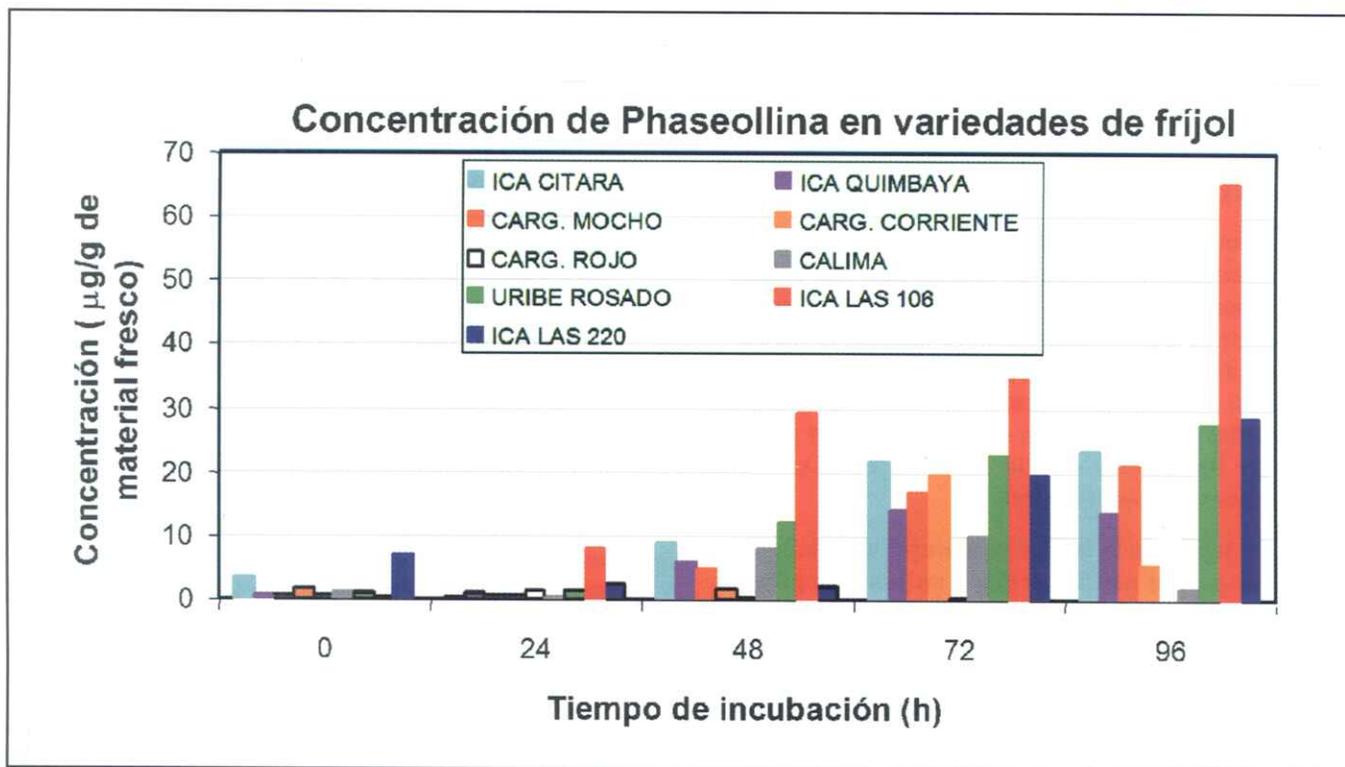


Figura 5. Producción de Phaseollina por algunas variedades de frijol

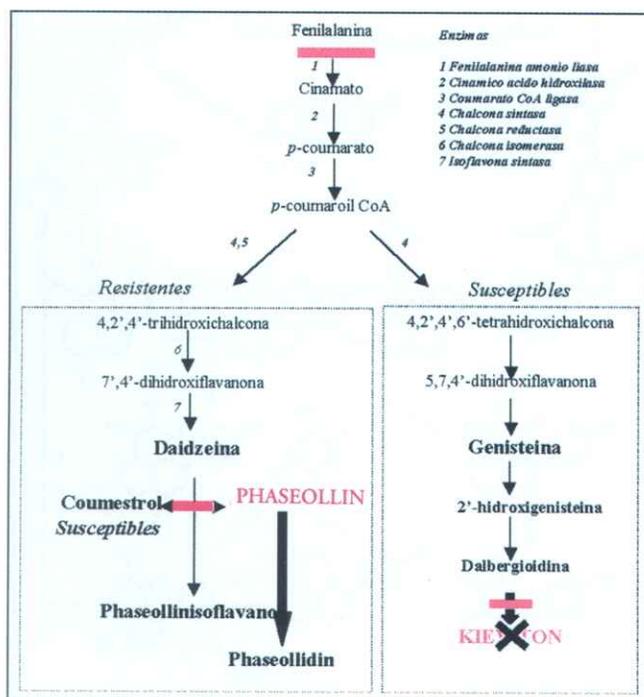


Figura 6. Biosíntesis de isoflavonoides en frijol

e. De otro lado, la variedad Uribe Rojo tiene un perfil similar al de las variedades resistentes, lo que coincide con la observación de que no es completamente susceptible a antracnosis.

En banana y plátano también se halló una alta correlación entre la presencia de determinados compuestos y la resistencia a sigatoka negra (Otalvaro *et al.*, 2002a). Existe una respuesta muy diferente en la producción de fitoalexinas fenilfenalenónicas; en la variedad de plátano Pelipita, hay una respuesta química más rápida y compleja al ataque por sigatoka negra, generando altos niveles de varias fitoalexinas fenilfenalenónicas, principalmente anigorufona, irenolona y la 4'-metoxiirenolona. En la variedad de banana susceptible Cavendish, la respuesta química es menos diversificada y más pobre en cuanto a la concentración de nuevas sustancias de defensa (Figura 7).

Es importante resaltar que las musanolonas son sustancias que se producen casi exclusivamente bajo factores de stress, pero aún no hay luces concretas con respecto a su biosíntesis. Aunque se han aislado casi todos los productos biosintéticos de la ruta de las fenilfenalenonas en *Musa*, (Otalvaro *et al.*, 2002b; Otalvaro *et al.*, 2002c)

(Figura 8), no existe ningún reporte respecto a la bioquímica enzimática. De manera similar al caso anteriormente descrito para el fríjol, este hecho es muy importante para establecer los puntos en los cuales está regulada la ruta para las especies resistentes y susceptibles no sólo a la sigatoka negra sino también al “Mal de Panamá”.

Así como la presencia de un metabolito es correlacionable con la resistencia a un microorganismo patógeno, también es posible que se presente el caso contrario, es decir, que la presencia de alguna o algunas sustancias sea la responsable de la susceptibilidad de las plantas a determinados microorganismos e insectos. Por ejemplo, los resultados de la inducción de fitoalexinas en papaya no siempre fueron muy correlacionables con la producción y la actividad antifúngica.

Esto ha replanteado la hipótesis acerca de si la hidroxiacetosiringona es una fitoalexina o un factor de patogenicidad, como han señalado algunos autores *tumefasciens* (Tzfira & Citovsky, 2002). Esto se comprobó de varias maneras: en la variedad Hawaiana (susceptible) la concentración de esta sustancia se incrementa a medida que

la fruta madura; dicho evento bioquímico está asociado a una alta colonización por *C. gloeosporoides*. Además, la aplicación de soluciones acuotánolicas de hidroxiacetosiringona en la superficie de frutas de las variedades Sofía (resistente) y Cotové (susceptible) también desencadena una alta patogénesis (Figura 9) (Echeverri *et al.*, 2003a, sin publicar).

Otro ejemplo de estos “errores metabólicos” se presentan en el tabaco pero de una manera un poco más compleja. En algunas variedades una sutil mezcla de compuestos del tipo divatrienos y labdanos, son indispensables para atraer la larva del fitófago *Heliothis tergemina*; sin embargo, en otras variedades tiene que existir una asociación con otros compuestos químicos para que la atracción exista (Figura 10). De igual manera, es posible clasificar las variedades de tabaco de acuerdo con sus perfiles químicos e incluso asociar la ausencia/presencia de un compuesto con el comportamiento de la larva hacia dicho material (Amaya, 2001).

1.1.6. Elictores de fitoalexinas

En varias ocasiones se ha demostrado que algunos aminoglicósidos son agentes inductores de la producción

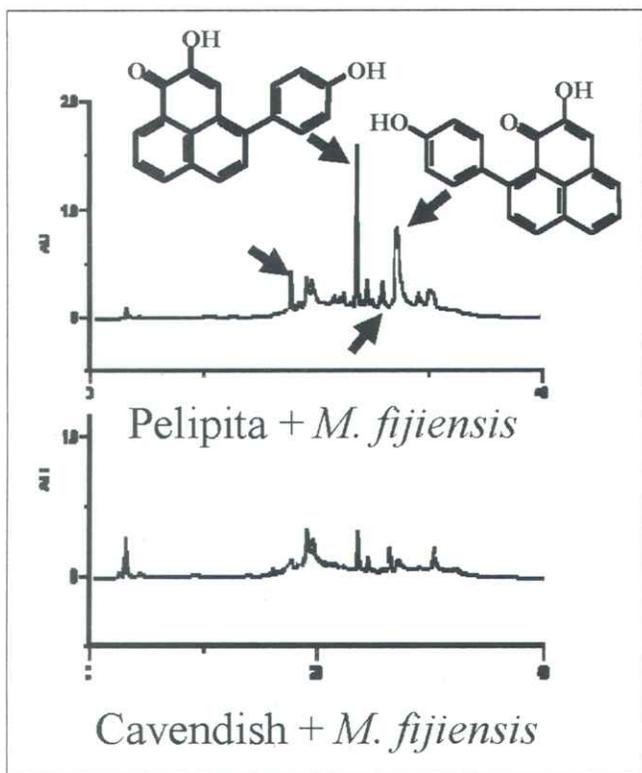


Figura 7. Producción de fitoalexinas en hojas de plátano vars. Pelipita (resistente) y Cavendish (susceptible) atacadas por sigatoka negra.

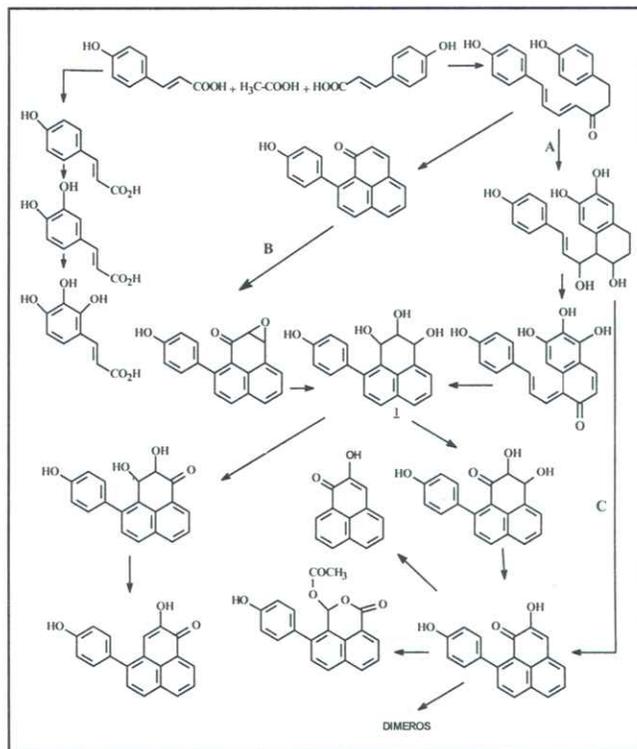


Figura 8. Biosíntesis propuesta para los metabolitos de *Musa*

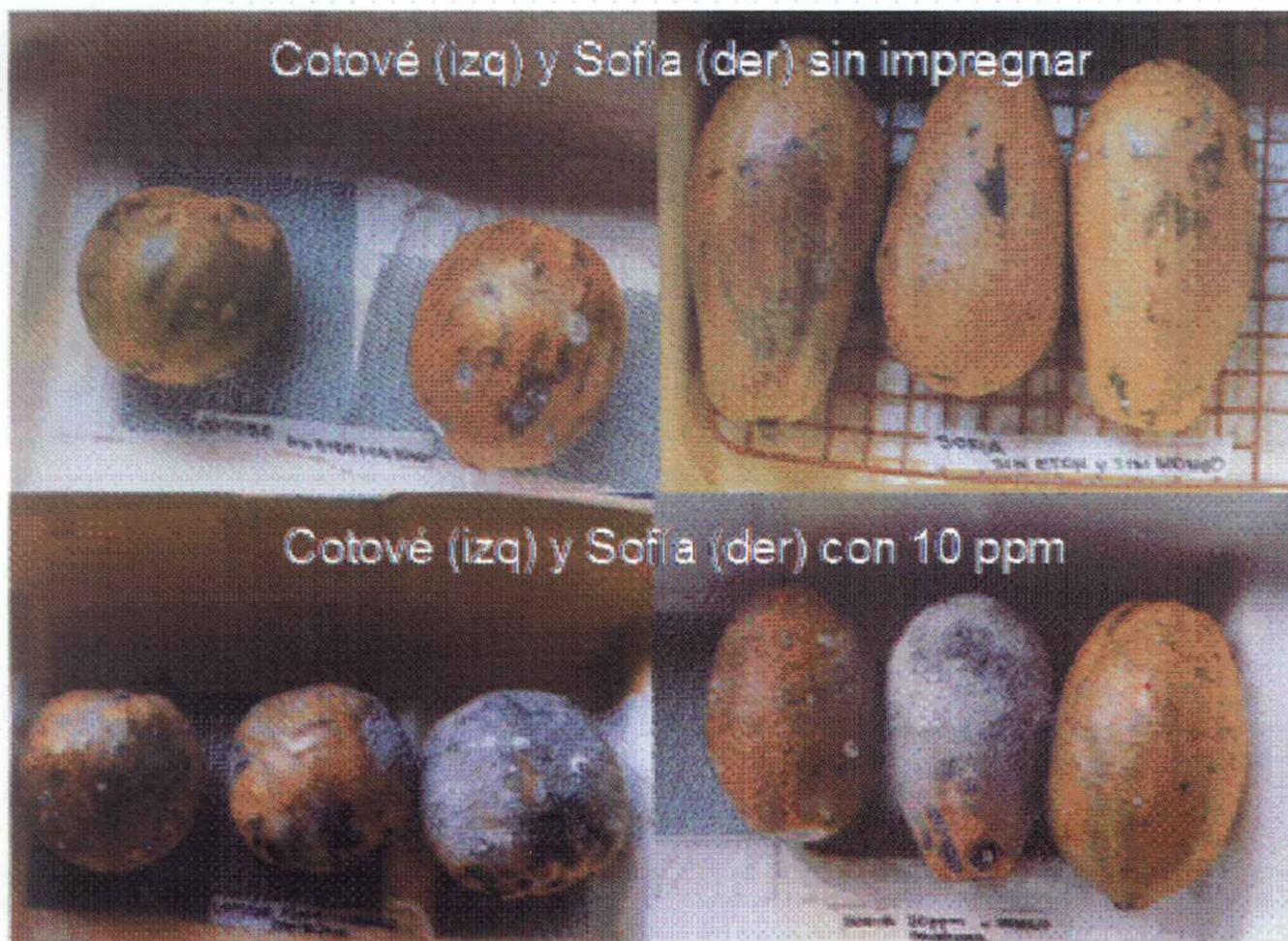
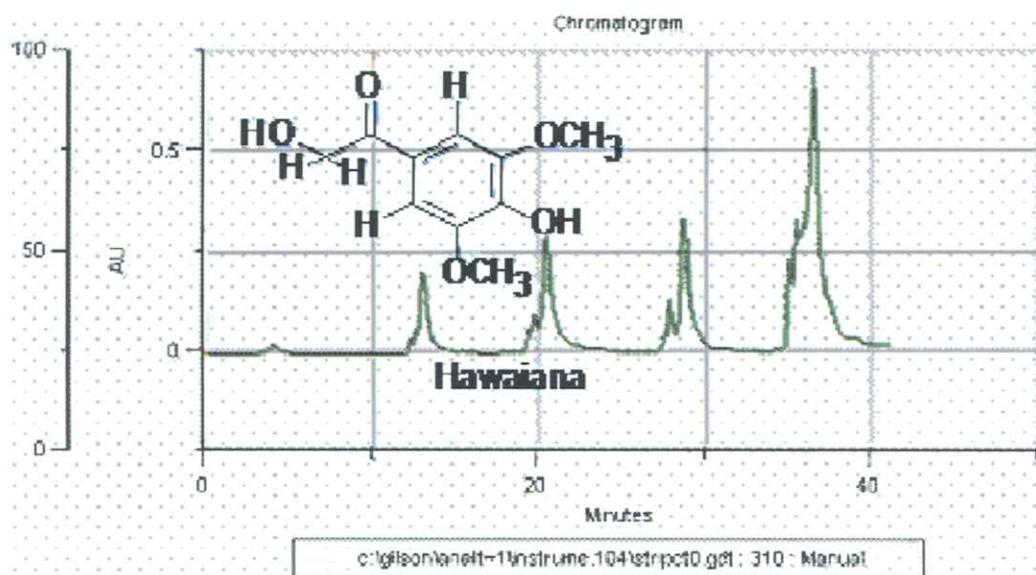


Figura 9. Acumulación de hidroxiaetosiringona en var. Hawaiiana y patogénesis por Antracnosis. Arriba, estado natural, abajo, rociadas con 10 ppm de hidroxiaetosiringona

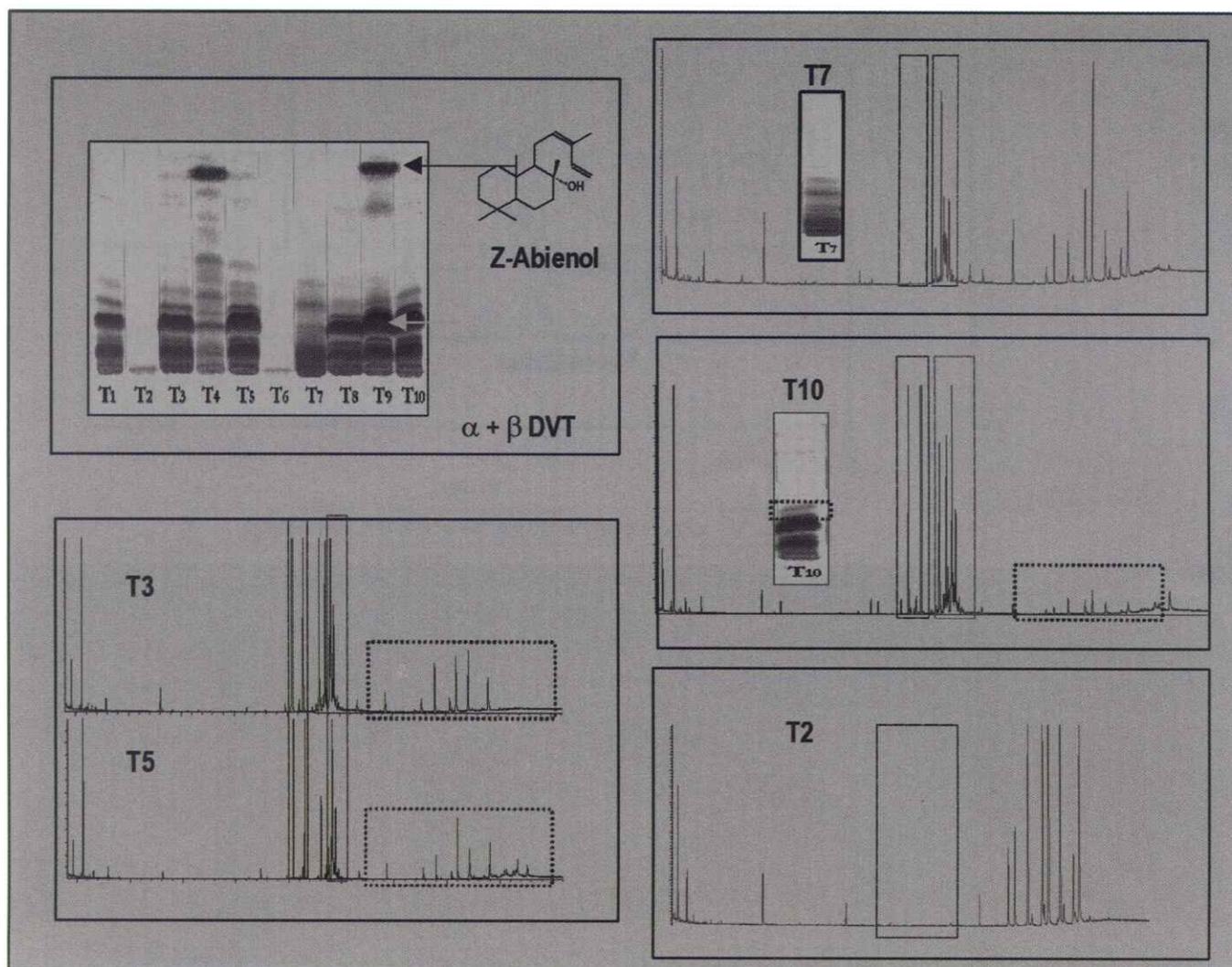


Figura 10. Clasificación de variedades de tabaco (T) en varios grupos, de acuerdo al perfil químico obtenido por GC; cromatografías en capa fina de los metabolitos más importantes

de fitoalexinas; por tal razón, también se tiene prevista la síntesis de otros aminoglicósidos inductores de la generación de fitoalexinas, a partir de materias primas abundantes y baratas; también cabe la posibilidad de emplear algunos compuestos aminados como la quitina y el quitosano, que en ensayos previos en fríjol demuestran un alto poder inductivo de fitoalexinas isoflavonoides.

Con la aplicación de estos derivados es factible proponer un nuevo modo de proteger las cosechas, ya que al inducir la síntesis de antibióticos naturales se facilita la defensa propia de la planta. Una vez se hace presente el microorganismo patógeno, la planta posee altos niveles de mecanismos químicos de defensa; los elicitores actuarían de manera similar a como lo hacen las vacunas en humanos y en animales.

Por lo tanto, las alternativas que tienen las fitoalexinas como sustancias candidatas para proteger cultivos de plantas importantes son las siguientes:

- a. Emplearlas directamente como antibióticos o tomarlas como plantillas para crear moléculas más activas que las originales.
- b. Aplicar elicitores que induzcan su producción en un momento y en un órgano específico.
- c. Manipular genes que regulen su biosíntesis, bien sea transfiriéndolos desde especies o variedades que las produzcan espontáneamente hacia aquellas plantas que tengan deficiencias en su producción (Figura 11). Es posible diseñar plantas resistentes a patógenos, interviniendo

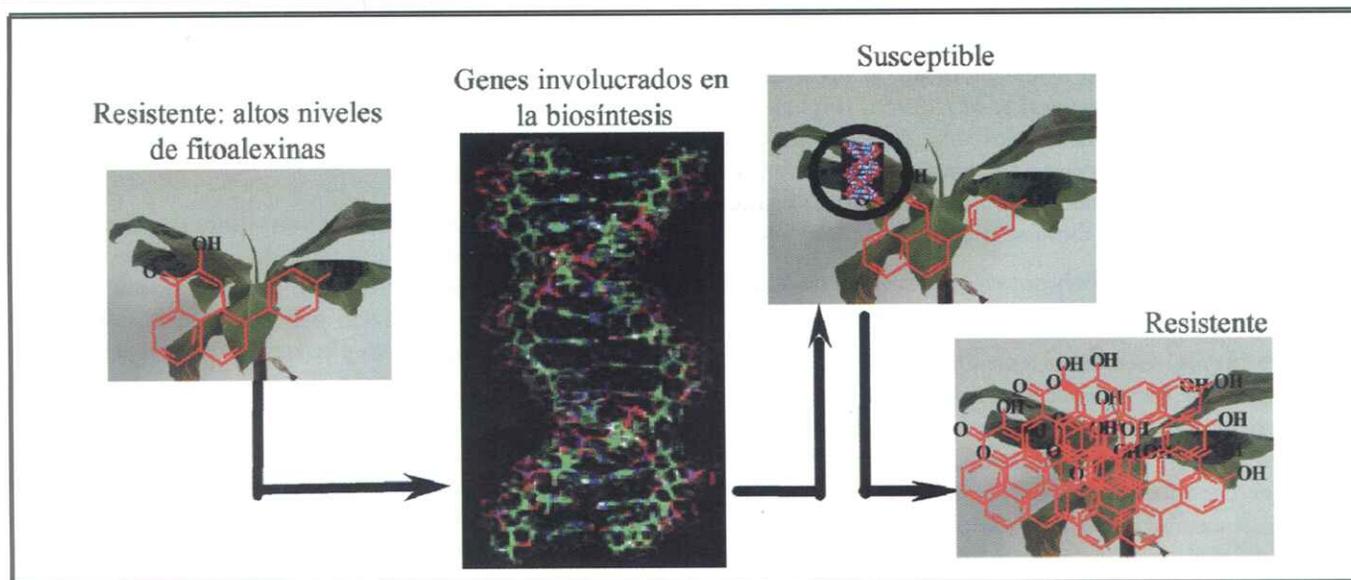


Figura 11. Diseño de plantas transgénicas con altos niveles de fitoalexinas

do directamente en los genes que regulan las enzimas involucradas en el proceso biosintético que conduce a las fitoalexinas (Hammerschmidt & Kagan, 2001; Essenberg, 2001; Zhang *et al.*, 2002). La metabolómica permitirá diseñar plantas transgénicas con una alta especificidad por la producción de un metabolito secundario importante en su respuesta hacia factores de estrés físico, químico y biológico (Sumner *et al.*, 2003)

1.2. Compuestos activos contra insectos y garrapatas

1.2.1. Disuasor de ingestión de *Passifloras*

Las hojas de varias passifloras comestibles como la badea, el maracuyá y la curuba, son atacadas por el insecto *Dione juno*; no obstante, la maleza *Passiflora foetida* no es atacada por esta larva. Bioensayos dirigidos condujeron al aislamiento de un flavonoide, el cual actúa como disuasor

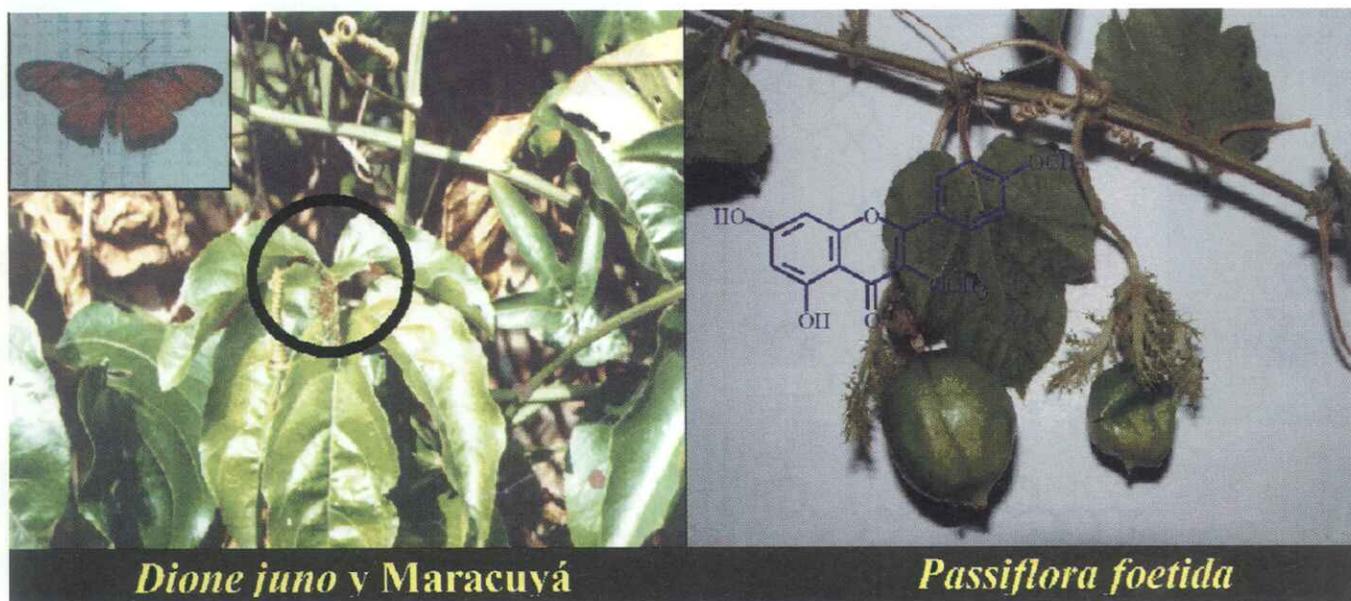


Figura 12. Oviposición de *D. juno* (izq); *P. foetida* y flavonoide disuasor de ingestión

de ingestión. La impregnación de hojas de maracuyá con esta molécula disminuye ostensiblemente el nivel de ingestión de la larva (Echeverri *et al.*, 1991b) (Figura 12). De esta misma planta y en el transcurso de este trabajo, se obtuvieron varios compuestos que aparentemente eran ceras pero resultaron ser moléculas muy interesantes estructural y biológicamente, como se describe más adelante.

1.2.2. Repelente en *Polygonum punctatum* y nuchicida en *Abelmoschus esculentus*.

En varias regiones del oriente antioqueño se emplean decocciones de *Polygonum punctatum* (familia Polygonaceae) para controlar garrapatas en el ganado; algunas especies de esta misma familia, principalmente *P. hydropiper*, son fuente de varios sesquiterpenos insecticidas. En este caso se obtuvieron varios sesquiterpenos, uno de ellos no registrado antes en la literatura (Echeverri *et al.*, 1997a) así como también flavonoides, cuyas estructuras y estereoquímica se asignaron mediante 2D RMN (Marín *et al.*, 2001) (Figura 13).

Los ensayos *in vitro* han permitido definir que el efecto de los componentes de la planta son netamente repelentes y no tóxicos como se presumía inicialmente; además, el efecto parece ser mediado por los sesquiterpenos, aunque la estabilidad del polygodial es muy baja en los extractos acuosos.

Otra planta con reputada acción insecticida contra el nuche (*Dermatobia hominis*) y empleada en el campo, es

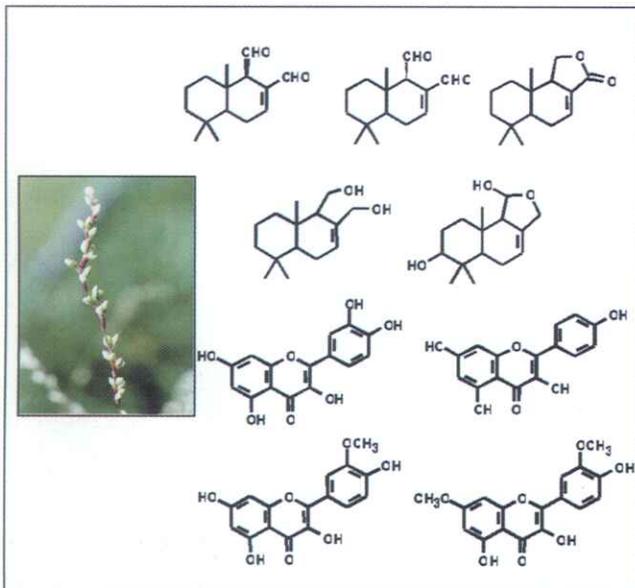


Figura 13. Metabolitos de *P. punctatum*

Abelmoschus esculentus (familia Malvaceae). Procediendo de manera similar a la descrita para la planta anterior, se aislaron varios hidroxiácidos grasos y dos flavonoides (Figura 14), observándose actividad insecticida en las fracciones lipofílicas.

Esto es de significativa importancia estructural y biológica, porque los hidroxiácidos son productos de la transformación enzimática de los ácidos grasos ciclopropanicos, un tipo de núcleo que también se halla en los insecticidas del tipo de los piretroides (Echeverri, 1997b).

1.2.3. Metabolismo

Las hojas del helecho *Davallia fejeensis* son ingeridas por la larva *Callopietria sp.*, un insecto peste de muchos cultivos. Por cromatografía en capa fina, se encontró que algunos compuestos de la planta no están presentes en las heces del insecto (Echeverri *et al.*, 2003b) (Figura 15).

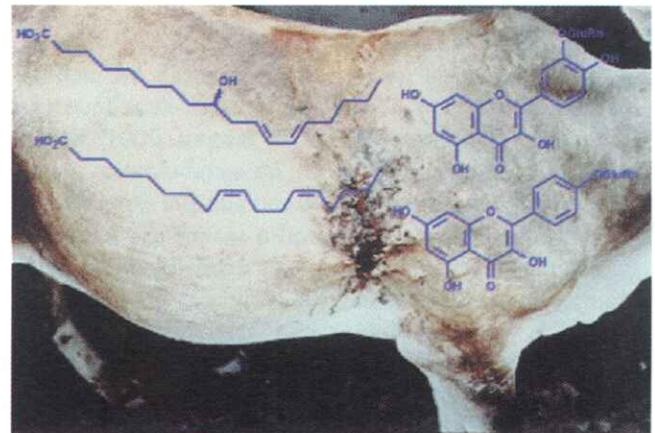


Figura 14. Algunos compuestos aislados de *A. esculentus*

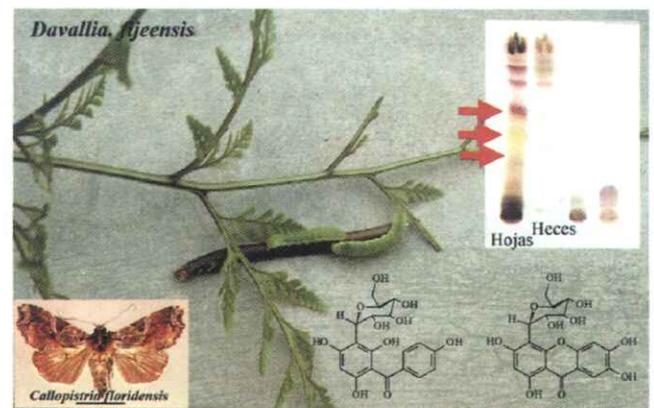


Figura 15. Alelopáticos en *D. fejeensis* (izq) y larva fitófaga *C. floridensis*, incluyendo el perfil cromatográfico de heces y de hojas intactas

Esto da lugar a dos hipótesis: de un lado que hayan sido rápidamente metabolizados por el insecto, o bien que hayan sido secuestrados para hacer parte posteriormente de la coloración del adulto. Ambas hipótesis abren interesantes expectativas para la agroquímica, pues ambas moléculas son plantillas químicas susceptibles de transformarse en otras moléculas que inhiban competitivamente una enzima básica para el metabolismo o para la coloración del insecto.

Un caso similar existe en el insecto *Ceroplastes* sp., que también es peste de varios cultivos y en la ciudad de Medellín ha sido encontrado desarrollando gran parte de su ciclo en *Tabernaemontana coronaria* (Figura 16).

Esta planta secreta un látex rico en alcaloides tóxicos del tipo del indol; no obstante, la química del insecto es más rica en sustancias terpénicas. Se plantean, por lo tanto, dos interrogantes para ser solucionados próximamente: la detoxificación de los alcaloides y el origen biosintético de los metabolitos del insecto.

1.2.4. Perla de tierra

Eurhizococcus colombianus es un insecto que ataca preferiblemente frutales de clima frío tales como la mora y el brevo. Fisiológicamente el organismo se caracteriza porque se recubre de una gruesa capa lipídica que lo aísla del medio (Figura 17). En una especie brasilera se registró la presencia de ácido valérico (Willkins & Soria, 1996), pero

en especies colombianas se han detectado principalmente triglicéridos de ácidos grasos superiores (Echeverri *et al.*, 2003c, sin publicar). Debido a la alta resistencia del insecto contra pesticidas tradicionales, se está estudiando la composición completa de la capa lipídica, sus variaciones según el estado morfológico del insecto y el efecto de inhibidores de la biosíntesis de ácidos grasos, como una medida para contrarrestar sus efectos dañinos.

1.3. Alelopatía

Durante la esporulación, las hojas del helecho ornamental *Davallia fejeensis* se cubren de un polvo amarillo, el cual tiene un potente efecto alelopático sobre yemas y botones florales de algunas plantas; las sustancias responsables de dicha acción fueron identificadas como una benzofenona y la xanthona manguiferina (Echeverri *et al.*, 1998a). Una observación de este tipo es extrapolable a un campo tan poco afín, en primera instancia, como el control de malezas; el mecanismo de acción alelopática y las mismas moléculas pueden ser el punto de partida para crear nuevos herbicidas.

2. Sustancias de interés en salud humana

2.1. Insecticidas contra vectores de enfermedades

El control de los vectores que transmiten enfermedades como la malaria, el dengue y la fiebre amarilla, es una alternativa complementaria a la aplicación de vacunas y

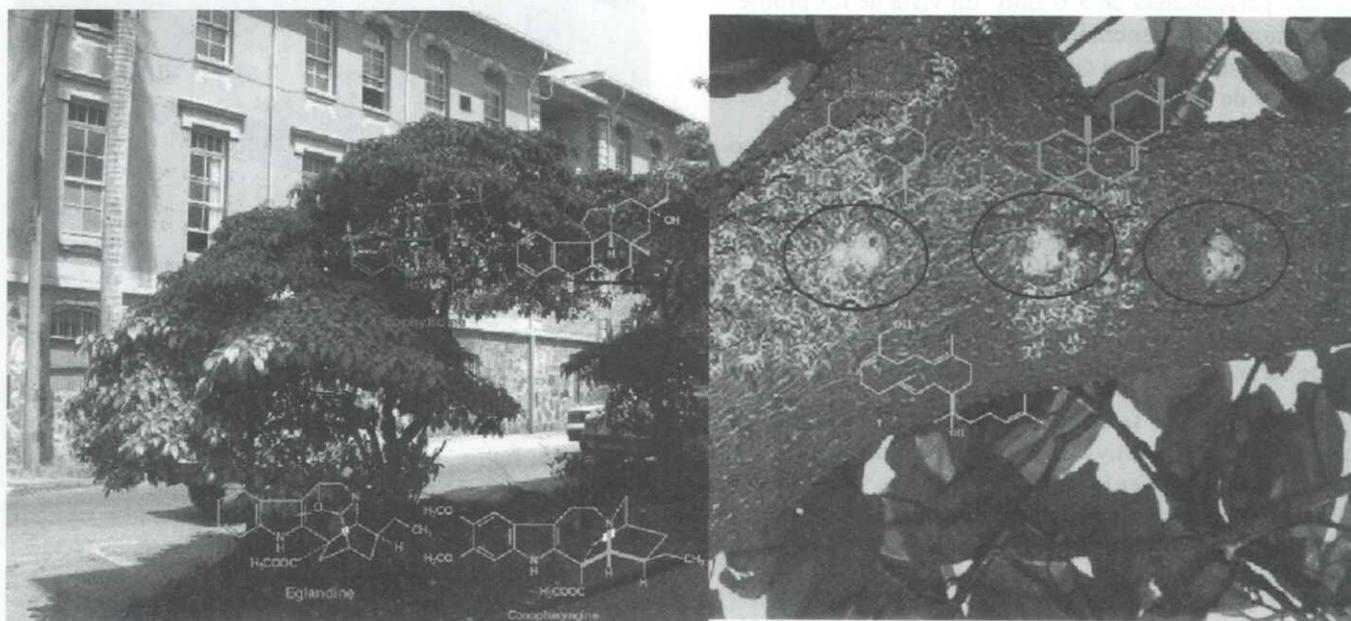


Figura 16. *T. coronaria* y sus metabolitos (izq), *Ceroplastes* sp. y sus metabolitos

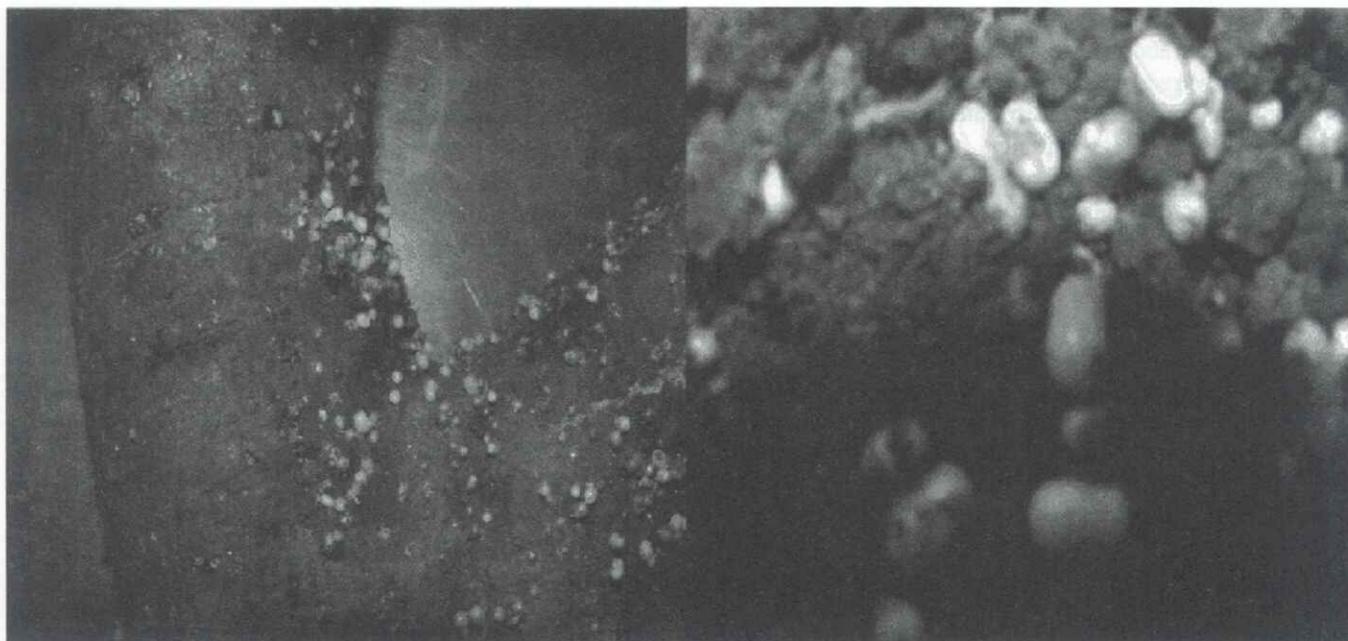


Figura 17. Perla en brevo y en tierra

de drogas; dicho control se hace mediante la aplicación de grandes cantidades de insecticidas no exentos de efectos secundarios y cuyo empleo requiere a veces de personal debidamente capacitado y, en algunos casos, de sofisticados medios de aplicación. En 1989-1990 hubo en Colombia una epidemia de dengue, que se presenta con una periodicidad de 5-6 años. En vista de los problemas secundarios generados por los insecticidas sintéticos, se procuró estudiar otra alternativa química, igual de efectiva y de fácil aplicación.

Con fundamento en tradiciones seculares, se obtuvo de las hojas de eucalipto una sustancia con un potente efecto sobre larvas de *Aedes*, *Culex* y *Anopheles* (Figura 18). Este compuesto fue identificado posteriormente por métodos espectroscópicos como el terpeno 1,8-cineol; se analizaron los medios de aplicación, la dosis y el espectro de acción, según el tipo y el estadio de la larva (Echeverri, *et al.*, 1991c).

Posteriormente, se estableció que si bien no tiene los mismos índices de actividad de los pesticidas Temefós y de *Bacillus thuringiensis*, sí ofrece algunas ventajas adicionales, tales como su fácil obtención a partir de una materia prima abundante y su carencia de efectos toxicológicos secundarios.

La producción de cineol no requiere de una tecnología ni compleja ni cara; además aprovecha las hojas como



Figura 18. Efectos larvicidas del cineol

subproducto de la industria papelera; por lo tanto, este producto puede ser accesible a poblaciones con endemismo de dengue, fiebre amarilla y paludismo, e incluso podría determinarse su efecto sobre otros insectos que se constituyen en plagas de cultivos importantes.

2.2. Inmunomoduladores

Si bien las especies de la familia Solanaceae han sido profundamente estudiadas en otros países como fuente de

materias primas para la elaboración de hormonas y de medicamentos, en Colombia poca atención se les ha prestado a pesar de poseer una gran riqueza de sus especies. Analizando la fitoquímica de *Deprea orinocensis*, fue encontrada una nueva serie de esteroides que se reporta en la literatura como Withajardinas (serie A-G); de la *Dunalia solanacea*, se hallaron otros compuestos del núcleo de Acnistinas (serie A-J) (Figura 19).

Su elucidación estructural se hizo posible a través del empleo de los más modernos métodos espectroscópicos; la difracción de Rayos X permitió establecer la sutil diferencia estructural que existe en el sistema bicíclico lateral en C-17. Su biosíntesis se explica mediante un precursor común que también puede dar lugar a las withametelinas (Luis *et al.*, 1994a; Echeverri *et al.*, 1994).

Algunos de estos compuestos poseen una intensa acción inmunosupresora, según se ha establecido en estudios *in vitro* con linfocitos humanos; esta actividad es altamente dependiente de la estructura de los compuestos, especialmente del tipo de sustituyente en los anillos A y B del núcleo esteroideal (Luis *et al.*, 1994b; Echeverri *et al.*, 1997c). Recientemente, también se encontró un fuerte efecto Leishmanicida pero asociado a una alta toxicidad (Echeverri *et al.*, 2003d, sin publicar). (Figura 20).

2.3. Antiofídicos

Los frutos de *Fevillea cordifolia* (Cucurbitaceae) se emplean como antiofídicos. Se establecieron las estructuras de varios triterpenos pertenecientes a la serie de las cucurbitacinas; dos de ellos no han sido reportados antes en la literatura (Echeverri *et al.*, 1998b) (Figura 21). A pesar de que las cucurbitacinas tienen una acción tóxica reconocida, los productos aislados fueron prácticamente inocuos en ensayos realizados sobre ratones.

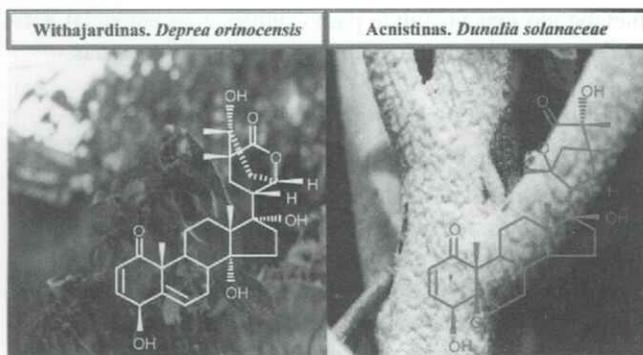


Figura 19. Estructura de Withajardinas y de Acnistinas

Compuesto	CL ₅₀ (µg/mL)	
	X	DS
Acnistina A	0.27	--
Acnistina B	35.5	6.2
Acnistina C	1.7	0.3
Acnistina E	1.0	0.0
Acnistina F	158.5	16.3
Acnistina G	8.5	0.9
Glucantime	400.0	5.0

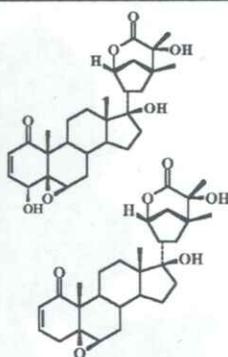


Figura 20. Toxicidad de Acnistinas

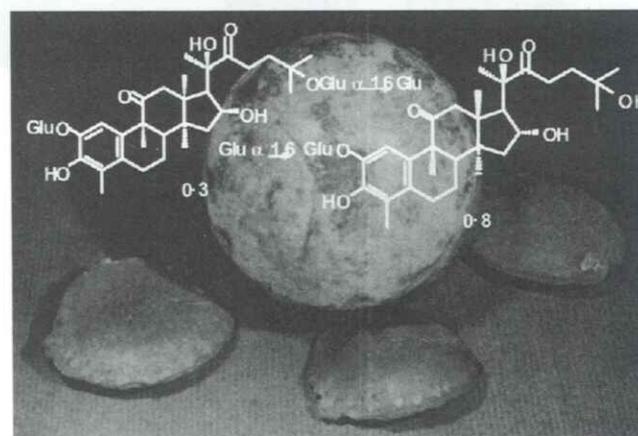
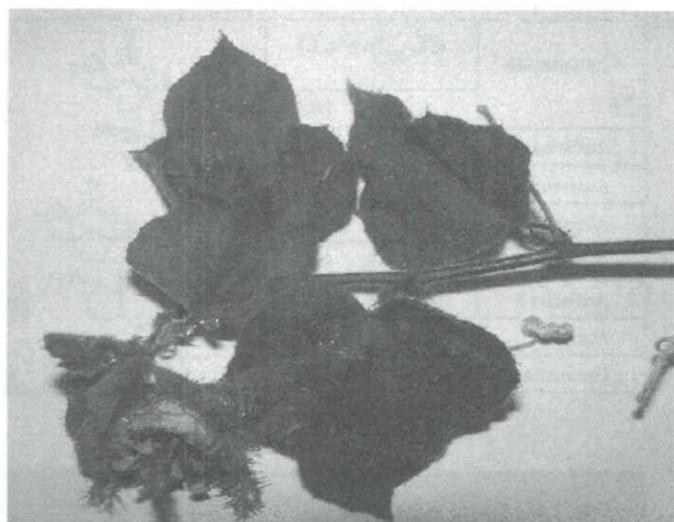
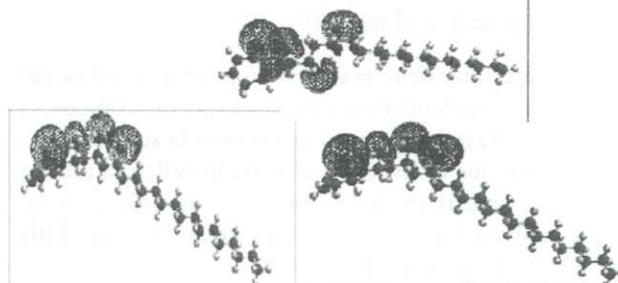
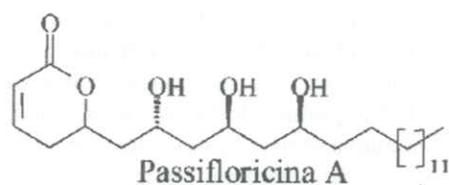


Figura 21. Fruto y semillas de *F. cordifolia* y estructura de nuevas cucurbitacinas

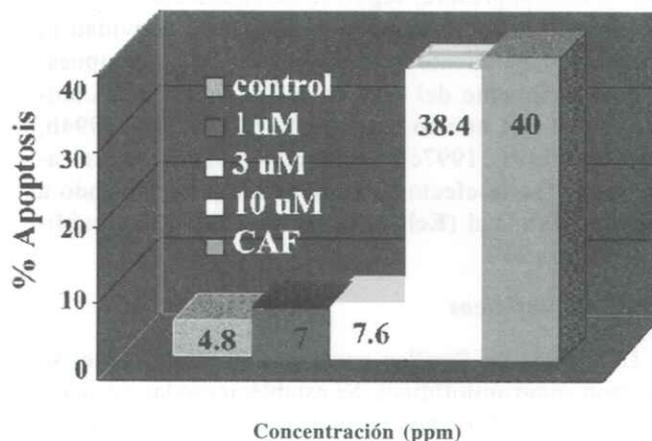
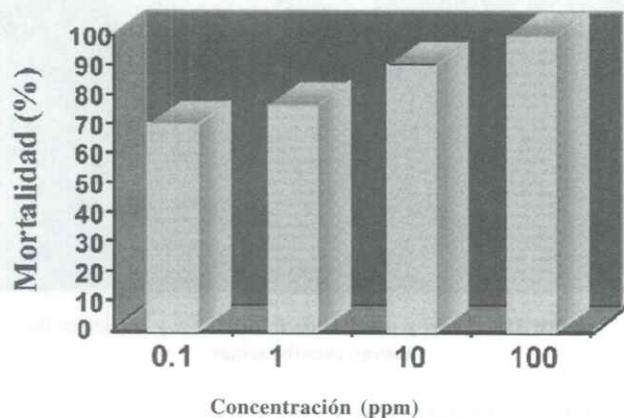
2.4. Antiprotozoarios y citotóxicos

Como resultado de la investigación relacionada con el aislamiento del compuesto responsable de la no ingestión por la larva de *Dione juno*, también se obtuvieron otras sustancias cuya estructura solamente se resolvió después de varios años. Corresponden a moléculas de origen policetídico nunca antes reportadas en la literatura (Echeverri *et al.*, 2001); por esa razón fueron llamadas Passifloricinas (Figura 22). Dos aspectos importantes son dignos de resaltarse; de un lado sus implicaciones quimiotaxonómicas, ya que esta clase de sustancias no se han encontrado en pasifloras. De otro lado, su potente citotoxicidad, ya que la passifloricina A exhibe una LD₅₀ de 0.014 ppm en *Artemia salina* (Echeverri *et al.*, 1998b) y en células Jurkat tiene un fuerte efecto apoptótico similar a CAF pero en la mitad del tiempo necesario.

Adicionalmente, las passifloricinas también tienen actividad contra varias cepas de *Leishmania* de una manera dependiente de la estructura.

Letalidad en *Artemia salina* LC₅₀ 0.014 mg/L

Citotoxicidad en células Jurkat

Figura 22. Efecto de Passifloricina sobre *Artemia salina* y células Jurkat

En la búsqueda de antiprotozoarios, algunos withanolidos también han sido sometidos a ensayos de actividad leishmanicida; no obstante, exhibieron potentes acciones tóxicas. Mediante modelación molecular se han diseñado algunos análogos estructurales que tienen una alta actividad antiprotozoaria, pero una toxicidad muy baja. En la actualidad se evalúa su actividad sobre chagas y malaria y se emprenden estudios in vivo para evaluar su real actividad biológica.

3. Bioremediación

Durante la investigación de la inducción de fitoalexinas en variedades de frijol, algunas soluciones de cobre fueron contaminadas por un microorganismo. Este se aisló posteriormente y luego se estudió su capacidad para remover al-

gunos metales pesados. Los resultados preliminares indican que tiene una alta capacidad para captar selectivamente cobre, cromo y mercurio; como tal, amerita un estudio metabólico más profundo para establecer su potencial aplicación en la bioremediación, especialmente de aguas.

II. Explotación de la biodiversidad

Es indudable que la fitoquímica puede entrar a jugar un importante papel en la investigación nacional y simultáneamente comprometerse abiertamente con varios problemas nacionales, así sus resultados no sean de aplicación inmediata. Los casos anteriormente descritos resaltan varios aspectos importantes de nuestro vasto potencial investigativo, académico, económico e industrial, ya que el país puede ser considerado por su riqueza biológica como un verdadero

laboratorio al aire libre con infinitas posibilidades para derivar conocimiento extrapolables a casos específicos de los cuales ningún otro país desarrollado se interesaría, bien sea porque no hacen parte de su modo de vida o porque los niveles de retorno económico son muy bajos.

En este caso especial, las investigaciones han aportado no solamente moléculas sino también metodologías en los siguientes frentes:

- Nuevas moléculas bioactivas con alto potencial para combatir enfermedades a humanos y controlar pestes de cultivos importantes.
- Metodologías para diseñar plantas transgénicas a partir del conocimiento biosintético de las rutas involucradas en la formación de mecanismos de defensa como las fitoalexinas.

¿Por qué estos resultados no han sido desarrollados ni apropiados por la comunidad?

Recordemos que Colombia es el segundo país megadiverso del mundo, con hondas raíces en medicina tradicional y problemas en el agro, que muchas veces han sido superados por el ingenio y la capacidad de observación del campesino.

Pueden presentarse algunas aproximaciones a la explicación de esta contradicción operativa:

- A. Desarrollar un producto farmacéutico es un proceso que requiere de unos 12 años, un poco más de 800 millones de dólares, la existencia de equipos multidisciplinarios y una logística instrumental y analítica grande y costosa. De todos esos requisitos solamente tenemos el tiempo.
- B. La adjudicación de recursos y el monto de los mismos, no permiten presentar planes a largo plazo con objetivos más ambiciosos situados en la frontera del conocimiento. En los últimos diez años, se han financiado en Colciencias proyectos en productos naturales por un valor (actualizado) cercano a los 7 millones de dólares, menos de la centésima parte de lo que cuesta desarrollar un producto.
- C. Los organismos financiadores de la investigación científica, especialmente Colciencias y las Universidades, atraviesan por períodos de zozobras institucionales, presupuestales y políticas. La falta de continuidad y la incertidumbre financiera hacen replantear continuamente al investigador su papel y su estada en dicha actividad.

- D. Hay una evidente ruptura de intereses investigador-financiador. Mientras que el primero asume que ya ha sido suficiente con plantear una hipótesis, obtener financiación y desarrollar el proyecto, el segundo se limita a cumplir su misión de intermediario financiero. Muy pocos esfuerzos se han hecho en cuanto a Gestión Tecnológica y Apropiación de Resultados. Hace poco se alentó la posibilidad de obtener patentes, pero luego de obtenerlas no hubo manera de comercializarlas.

Es claro que no podemos desarrollar ningún producto farmoquímico de acuerdo a los estándares internacionales. No obstante, también puede existir otra alternativa, no solamente para llevar a buen término económico los proyectos de investigación, sino también para explorar nuestra biodiversidad de una manera más favorable para el país. Una de estas alternativas y que continuamente se trae a colación es la de Costa Rica, país que a cambio de una irrisoria suma (un millón de dólares/año) ha cedido su biodiversidad a las multinacionales químicas, biotecnológicas y farmacéuticas. Un nuevo punto de vista consiste en evaluar la importancia, solidez y trascendencia de los resultados encontrados en una investigación y negociarlos como una especie de "know-how". Estos resultados son especialmente importantes y negociables si se tiene en cuenta que de 10.000 moléculas candidatas a medicamento solamente una o dos llegan a la fase final; de esta manera se acortan varios años de búsqueda e inversión. Además se podrían patrocinar investigaciones que respondan a necesidades nacio-

Cuadro 1. Acciones propuestas para estudiar y explotar la biodiversidad

- | |
|---|
| <ul style="list-style-type: none"> • Explorar la acción de moléculas naturales, hemisintéticas y sintéticas sobre enfermedades tales como malaria, leishmaniosis, chagas, paracoccidiomicosis, amebas y parásitos intestinales. • Validar el uso de plantas medicinales; especialmente las más afines a la situación sanitaria colombiana a juicio de las autoridades de salud (p. e. hipertensión). • Evaluar la toxicidad de los productos naturales que se expenden en el país. • Buscar moléculas que actúen sobre insectos y pestes dañinas a humanos, plantas y animales, así como productos/organismos importantes para bioremediación/biodegradación. • Investigar sustancias bioactivas de alto valor agregado, tales como anticancerosos, anti SIDA. |
|---|

nales en los órdenes agropecuario y sanitario; a la vez, se abre la posibilidad de validar prácticas etnobotánicas experimentalmente y estudiar la toxicidad de material potencial peligroso para la población.

Esto implica plantear un Plan Nacional de Investigación en Biodiversidad con los objetivos planteados en el Cuadro 1, tomando como base los grupos más sólidamente conformados; además, hay que desvirtuar la necesidad de publicar como justificante económico y científico de un proyecto y conformar un pool de hábiles negociadores de propiedad intelectual.

Agradecimientos

Todas las investigaciones anteriormente mencionadas, han sido financiadas por COLCIENCIAS y por la Universidad de Antioquia; agradecimientos muy especiales a los profesores integrantes del grupo de investigación así como a los estudiantes que han desarrollado sus investigaciones con este grupo de trabajo.

Bibliografía

- Amaya, X. 2001. Química y biología de germoplasmas de tabaco. Trabajo de Grado. Instituto de Química, Universidad de Antioquia, Medellín pp. 90.
- Akashi, T., Aoki, T. & Ayabe, S. 1999. Cloning and functional expression of a cytochrome P450 cDNA encoding 2-hydroxyisoflavanone synthase involved in biosynthesis of the isoflavonoid skeleton in licorice. *Plant Physiology*. **121**: 821-828.
- Blount, J., Korth, K., Masoud, S., Rasmussen, S., Lamb, C. & Dixon, A. 2000. Altering expression of cinnamic acid 4-hydroxylase in transgenic plants provides evidence for a feedback loop at the entry point into phenylpropanoid pathway. *Plant Physiology*. **122**: 107-116.
- Dewick, P. & Steele, M. 1982. Biosynthesis of the phytoalexin phaseollin in *Phaseolus vulgaris*. *Phytochemistry*. **21**: 1599-1603.
- Dukra, A., Kudrna, D., Rostoks, N., Brueggeman, R., von Wettstein, D. & Kleinhofs, A. 2003. Chalcone isomerase gene for rice (*Oryza sativa*) and barley (*Hordeum vulgare*): physical, genetic and mutation mapping. *Gene*. **302**: 171-178.
- Durango, D., Quiñones, W., Torres, F., Rosero, Y., Gil, J. & Echeverri, F. 2002. Phytoalexin accumulation in colombian bean varieties and aminosugars as elicitor. *Molecules* **7**: 331-340.
- Echeverri, F., Torres, F., Quiñones, W., Cardona, G., & Archbold, R. 2003a. Factores de resistencia en papaya. Resultados sin publicar.
- _____, Cardona, D., Quiñones, W. & Torres, F. 2003b. Metabolismo de xantonas por *Callopistria floridensis*. Sin publicar.
- _____, Quiñones, W., Vicente, B., Torres, F., Archbold, R. 2003c. Cambios metabólicos en *Eurhizococcus colombianus*. Sin publicar.
- _____, Quiñones, W., Torres, F., Vélez, I., Robledo, S. & Cardona, D. 2003d. Citotoxicidad de withajardinas y acnistinas. Sin publicar.
- _____, Arango, V., Quiñones, W., Torres, F., Escobar, G., Rosero, F. & Archbold, R. 2001. Passifloricins, polyketide a-pyrone from *Passiflora foetida* resin. *Phytochemistry*. **56**: 881-885.
- _____, Quiñones, W., Torres, F., Duque, M. & Archbold, R. 2000. Synthesis of Hydroxyacetosyringone. *Molecules* **5**: 1310-1313.
- _____, Arango, V., Quiñones, W., Torres, F., Roldán, J., Cardona, G., Archbold, R., Luis, J. G. & Grillo, T. 1998a. Metabolites from *Davallia fejeensis*. En "Natural Product Analysis" (Schreier, P., Herderich, M., Humpf HU, Schwab, W., eds) Vieweg Publishers, Wiesbaden. p. 243-244.
- _____, Torres, F. & Lobo, T. 1998b. Structure and toxicity of the cucurbitacins from *Fevillea cordifolia*. En "Natural Product Analysis" (Schreier, P., Herderich, M., Humpf H-U, Schwab, W., eds) Vieweg Publishers, Wiesbaden p. 385-386.
- _____, Arango, V., Alva, A. & Luis, J. 1998c. Symposium "Antitumor Products from Higher Plants". París. Enero 8-10. Universidad René Descartes-Phytochemical Society of Europe.
- _____, Quiñones, W., Torres, F., Alzate, F., Cardona, G., Archbold, R., Roldán, J., Brito, Y. & Hassane, E. L. 1997a. "Danilol, a new drimmane sesquiterpene obtained from *Polygonum punctatum*". *Natural Product Letters* **10**: 295-301.
- _____, Torres, F., Cardona, G., Archbold, R., Roldán, J., Alzate, F. & Román M. 1997b. Búsqueda de pesticidas en dos plantas colombianas. p 399-412. En: Tópicos en Productos Naturales Echeverri, F. Quiñones, W. (Eds.) Impresos Begon, Medellín, pp. 490.
- _____, García, F., Torres, F., Quiñones, W., Cardona, G., López, M., Pelaez, C., Luis, J. & Gonzalez, A. 1997c. Withajardins. Patente Estados Unidos 5,681,950.
- _____, Torres, F., Cardona, G., Quiñones, R., Archbold, R. & Duque, M. 1996a. Activity of chromenes against *Colletotrichum gloeosporioides*. En "Current Trends in Fruit and Vegetable Phytochemistry", Barberan-T. F. (Ed.). CSIC (Madrid), pp. 287-291.
- _____, Torres, F., Quiñones, W., Cardona, G., Archbold, R., Roldán, F., Gutiérrez, J. & Hassane, E. L. 1996b. Danielone, a new phytoalexin obtained from papaya fruit. *Phytochemistry*. **44**: 255-256.
- _____, Luis, J. & González, A. 1994. Acnistins C and D, withanolides from *Dunalia solanacea*. *Phytochemistry* **36**: 1297-1301.
- _____, Quijano, J., Enzuncho, A. 1991a. Flavonoides en la resina de *Eucaliptus* sp. *Rev. Lat. Quím.* **21**: 37-39.
- _____, Cardona, G., Torres, F., Quiñones, W., Peláez, C. & Rentería, E. 1991b. Ermanin: a deterrent compound isolated from *P. foetida*". *Phytochemistry*. **30**: 153-155.
- _____, _____, _____ 1991c. Informe final del proyecto "Actividad Larvívica de *Eucaliptos* contra *Culex*, *Aedes* y *Anopheles*". CIEN-Universidad de Antioquia, Medellín pp.45.

- _____, _____, Gallego, H., López, J. & Torres, F. 1988. Phytoalexins from *Cyphomandra betacea*. Spectroscopy International Journal. **6**: 151-154.
- _____, Quijano, J., Montoya, R. & Uribe, C. 1986. Un metabolito de stress en la resina de *E. globulus*. Rev. Lat. Quim. **16**: 156-158.
- Escobar, G. 2002. Síntesis de fenilfenalenonas y análogos estructurales y su actividad sobre Sigatoka Negra. Tesis de Doctorado en Ciencias Químicas - Universidad de Antioquia. pp. 141.
- Essenberg, M. 2001. Prospects for strengthening plant defenses through phytoalexins engineering. Physiol. Mol. Plant Pathol. **59**: 71-81.
- Hargreaves, J. & Selby, C. 1978. Phytoalexin formation in cell suspensions of *Phaseolus vulgaris* in response to an extract of bean hypocotyls. Phytochemistry. **17**: 1099-1102.
- Hammerschmidt, R. & Kagan, A. 2001. Phytoalexins into the 21st century. Physiol. Mol. Plant Pathol. **59**: 59-61.
- Liu, L., Punja, Z. K. & Rahe, J. E. 1995. Effect of Pythium spp. and glyphosate on phytoalexin production and exudation by bean (*Phaseolus vulgaris* L.) roots grown in different media. Physiological and Molecular Plant Pathology. **47**: 391-405.
- López-Meyer, M. & Paiva, N. 2002. Immunolocalization of vestitone reductase and isoflavone reductase, two enzymes involved in the biosynthesis of the phytoalexin medicarpin. Physiol. and Mol. Plant Pathology. **61**: 15-30.
- Luis, J., Quiñones, W., González, A., Echeverri, F., Cardona, G. & Torres, F. 2000. Composiciones para el tratamiento de enfermedades de plantas ocasionadas por hongos pertenecientes al género *Colletotrichum*. Patente Española P9402157.
- _____, G., San Andrés, L., Lahlou, E.-L., Echeverri, F. & Quiñones, W. 1997. Phenylphenalenonic Phytoanticipins. New acenaphthylene and dimeric phenylphenalenones from the resistant *Musa* select hybrid SH- 3481. Tetrahedron **53**: 8249-56.
- _____, Quiñones, A., Echeverri, F., Kishi, P. & García, F. 1996. "Musanolones: four 9-phenylphenalenones from rhizomes of *M. acuminata*". Phytochemistry. **41**: 753-57.
- _____, Echeverri, F., Quiñones, W., González, A., Torres, F., Cardona, G., Archbold, R. & Perales, A. 1994a. "Withajardins, withanolides with a new type of skeleton". Tetrahedron **50**: 1217-1226.
- _____, _____, Rojas, M. & García, F. 1994b. The structure of acnistin B and the immunosuppressive effect of acnistin A, B and E. Planta Médica **60**: 348-351.
- _____, _____, Quiñones, W., Brito, Y., López, M., Torres, F., Cardona, G. & Aguiar, Z., Rojas, M. 1993. Irenolone and emenolone: two new types of phytoalexins from *Musa paradisiaca*. Journal Organic Chemistry. **58**: 4306-408.
- Marín, C., Torres, F., Quiñones, W., & Echeverri, F. 2001. Fitoquímica y evaluación de la acción biológica de *Polygonum punctatum*. Revista Latinoamericana de Química, **29**: 100-107.
- Newman, D., Cragg, G. & Snader, K. 2000. The influence of natural products upon drug discovery. Natural Prod. Rep. **17**: 215-234.
- Otálvaro, F., Echeverri, F., Quiñones, W., Torres, F. & Schneider, B. 2002a. Correlation between Phenylphenalenone Phytoalexins and Phytopathological Properties in *Musa* and the Role of a Dihydrophenylphenalene Triol. Molecules. **7**: 331-340.
- _____, Schmitt, B., Echeverri, F., Schneider, B. & Quiñones, W. 2002b. Dimeric phenylphenalenones from *Musa acuminata* and various Haemodoraceae species. Crystal structure of anigorootin. Phytochemistry. **60**: 61-66.
- _____, Echeverri, F., Quiñones, W. & Schneider, B. 2002c. Isomeric oxabenzochrysenones from *Musa acuminata* and *Wachendorfia thyrsiflora*. Natural Product Letters. **16**: 335-338.
- Pietra, F. 2002. Biodiversity and natural product diversity. Pergamon, Elsevier, Oxford, 351 p.
- Quiñones, W., Escobar, G., Echeverri, F., Torres, F., Rosero, Y., Arango, V., Cardona, G. & Gallego, A. 2000. Synthesis and Antifungal Activity of *Musa* phytoalexins and structural analogues. Molecules. **5**: 974-980.
- Sumner, W., Mendesb, P. & Dixon, A. 2003. Plant metabolomics: large-scale phytochemistry in the functional genomics era. Phytochemistry **62**: 817-836.
- Tzfira, T. & Citovsky, V. 2002. Partners-in-infection: host proteins involved in the transformation of plant cells by *Agrobacterium*. Trends in Cell Biology **12**: 121-129.
- VanEtten, H., Temporini, E. & Wasmann, C. 2000. Phytoalexin (and phytoanticipin) tolerance as a virulent trait: why is it not required by all pathogens? Physiol. Mol. Plant Pathol. **59**: 83-93.
- Willkins, J. & Soria, P. 1996. Identification by Gas Chromatography - Mass Spectrometry (GC - MS) of the compos responsible for the rancid odor of female cyst of *Eurhizococcus brasiliensis* (Hempel). An. Soc. Entomol. Brasil. **25**: 169-170.
- Winkel-Shirley, B. 2001. Flavonoid biosynthesis. A colorful model for genetics, biochemistry, cell biology, and biotechnology. Plant Physiology. **126**: 485-493.
- Zhang, W., Curtin, C., & Franco, C. 2002. Towards manipulation of post-biosynthetic events in secondary metabolism of plant cell cultures. Enz. Microbial Tech. **30**: 688-696.

BIOLOGÍA REPRODUCTIVA DE *WASMANNIA AUROPUNCTATA* (R.) (HYMENOPTERA: FORMICIDAE)

por

Patricia Chacón de Ulloa¹

Resumen

Chacón de Ulloa P.: Biología reproductiva de *Wasmannia auropunctata* (R.) (Hymenoptera: Formicidae). Rev. Acad. Colomb. Cienc. 27(104): 441-447. 2003. ISSN 0370-3908.

Se estudió la biología reproductiva de la pequeña hormiga de fuego *Wasmannia auropunctata* (Roger), especie poliginia y de origen neotropical. La investigación se centró sobre la biología de las reinas, especialmente en el estudio de dos factores que afectan la fecundidad: edad de las reinas y número de reinas presente en las colonias. Se encontró una correlación significativa entre fecundidad y edad. La postura es muy elevada en las reinas jóvenes y decrece a lo largo de la vida, cuya duración varía entre 11 y 15 meses. Observaciones realizadas bajo condiciones de campo y laboratorio, mostraron una relación inversa entre el número de reinas y la fecundidad individual de las reinas.

Palabras clave: Hormigas, fecundidad de reinas, edad de reinas, poliginia.

Abstract

The reproductive biology of the little fire ant *Wasmannia auropunctata*, a neotropical polygynous species was studied. The research was centered on the biology of queens especially the study of two factors affecting fecundity: age of queens and number of queens present in the colonies. There is a significant correlation between queen fecundity and their age. Egg-laying in young queens is very sharply decreasing through life-time varying between 11 and 15 months. Observations performed under field and laboratory conditions, showed that queen fecundity is also influenced by the number of queens present. There is an inverse relationship between queen number and individual queen fecundity.

Key words: Ants, queen fecundity, queen age, polygyny.

¹ Departamento de Biología. Universidad del Valle. Apartado Aéreo 25360 Cali, Colombia.

Introducción

En las sociedades experimentales de la pequeña hormiga de fuego (*Wasmannia auropunctata*), la tasa de postura de las reinas es bastante elevada y varía significativamente de una reina a otra (Ulloa-Chacón & Cherix, 1988). Por ejemplo, estudios preliminares sobre la fecundidad de reinas en condiciones de laboratorio, muestran que la producción de huevos por reina durante un período de 12 semanas tiene un rango de 305 a 942 con un valor promedio de 599 ± 193 huevos. Esta variabilidad individual que también ha sido observada en otras especies de hormigas (Fletcher *et al.*, 1980, Brian, 1986), condujo a abordar los factores que afectan la fecundidad de las reinas de *W. auropunctata* y que pueden ser de gran importancia en la regulación y crecimiento de las colonias. El presente estudio trata de la influencia de dos factores: edad de las reinas como factor de carácter individual y número de reinas por colonia, como factor de carácter social.

En cuanto al primer factor, varios estudios han demostrado que la edad de las reinas afecta significativamente la fecundidad (Petersen-Braun, 1975; Mercier, 1984; Edwards, 1987; Ulloa-Chacón & Cherix, 1989; Keller & Passera, 1990). La relación entre la edad y la fecundidad parece ser un fenómeno muy complejo ligado a otros aspectos como la composición de las sociedades, especialmente al número de reinas (especies monoginas o poliginias) y al estilo de fundación de nuevas sociedades (dependiente o independiente de la ayuda de obreras) (Keller & Passera, 1990). Así, en las especies monoginas que practican una fundación independiente en la cual una reina se aísla después del vuelo nupcial e inicia la nueva sociedad sin la ayuda de obreras, se observa que la longevidad de las reinas es elevada y que la fecundidad aumenta significativamente en el curso del tiempo. Podemos citar algunas especies como *Lasius niger*, *Camponotus herculeanus* y *C. ligniperda* (Keller & Passera, 1990). En *Camponotus lateralis*, las reinas de 1 a 3 años de edad ponen pocos huevos mientras que las reinas de 5 a 6 años ponen abundantemente (Palma-Valli & Délye, 1981). Contrariamente, en las especies poliginias que practican una fundación dependiente en la cual las reinas parten con un grupo de obreras a fundar una nueva sociedad, y se caracterizan por tener una longevidad baja, la situación es diferente. Se observa que la fecundidad es muy elevada desde la fecundación y no cambia significativamente durante el transcurso del tiempo como en *Linepithema humile* (*Iridomyrmex humilis*) (Keller & Passera, 1990), o se observa que la fecundidad varía en función de un ciclo interno como en *Monomorium pharaonis* (Petersen-Braun, 1975; Edwards, 1987).

En cuanto al factor número de reinas se ha notado que el total de huevos por sociedad es más elevado cuando hay una mayor cantidad de reinas, pero la fecundidad de cada reina disminuye a medida que aumenta su número en las sociedades. Por ejemplo, *Solenopsis invicta* (Fletcher *et al.*, 1980), *Plagiolepis pygmaca* (Mercier *et al.*, 1985a) y *Lasius sakagami* (Yamauchi *et al.*, 1982). Estudios detallados a nivel de laboratorio, confirman esta relación inversa entre número de reinas y fecundidad individual (Fletcher & Blum, 1983a; Greenberg *et al.*, 1985; Vargo y Fletcher, 1989; Mercier *et al.*, 1985 b; Keller, 1988; Arcila *et al.*, 2002).

W. auropunctata es una especie con estructura social poliginia ya que sus sociedades poseen varias reinas fértiles y fecundas (Ulloa-Chacón & Cherix, 1990). En sociedades naturales se observó, durante un año, que el número de reinas por m² varió de 8.4 a 68.6 con un promedio de 18 reinas, de las cuales el 73% estaban inseminadas. Además, hay tendencia a producir nuevas reinas cuando la población de reinas por colonia es muy baja, lo cual conduce al mantenimiento de una poliginia permanente. Con base en lo anterior, se abordó el estudio de la fecundidad de reinas en sociedades de campo y en sociedades experimentales monoginas y poliginias.

Materiales y métodos

Origen de las colonias de hormigas. Las colonias de la pequeña hormiga de fuego fueron recolectadas en la estación experimental de la Universidad del Valle (Cali, Colombia), localizada a una altura de 970 msnm, con una temperatura promedio anual de 24°C y una humedad relativa del 65-70%, caracteres que determinan una zona de vida de bosque seco tropical (Espinal, 1968).

Influencia de la edad de las reinas. Sociedades compuestas por gran cantidad de hembras aladas, machos, obreras y cría, fueron trasladadas al laboratorio donde se esperó a que las reinas perdieran sus alas. Luego se procedió a formar 4 colonias experimentales, cada una de las cuales contenía 5 reinas jóvenes y 1.500 obreras (Figura 1). Durante 15 meses, las colonias fueron mantenidas en un insectario ($26 \pm 2^\circ\text{C}$ y $70 \pm 5\%$ H.R.) y se alimentaron con larvas de insectos, agua y miel de abejas. Cada dos meses se realizaron observaciones sobre el peso y la fecundidad de todas las reinas ($n = 20$). Así, cada reina era pesada en una balanza Mettler (sensibilidad ± 0.1 mg) y luego se sometía a un test de oviposición, que consistía en aislar la reina con 50 obreras durante 24 horas, al cabo de las cuales se procedía a contar, bajo el microscopio estereoscópico, el número de huevos puestos.

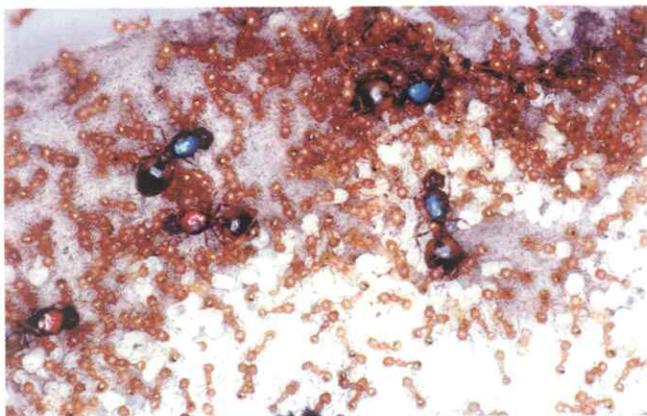


Figura 1.

Influencia del número de reinas. Se escogieron 48 reinas de peso comparable (valor promedio = 1.87 ± 0.17 mg) con las cuales se formaron 24 colonias monoginas y 3 colonias poliginias (cada una con 8 reinas). Cada reina fue acompañada por 300 obreras tanto en las colonias monoginas como en las colonias poliginias. Después de 30 días, cada reina fue pesada y sometida al test de oviposición de 24 horas. El peso y número de huevos puestos por las reinas de las colonias monoginas fueron comparados con los valores obtenidos con las reinas de las colonias poliginias.

Las observaciones en colonias de campo consistieron en examinar las reinas de 25 nidos recolectados durante el mes de abril (estación lluviosa) y de 25 nidos recolectados en el mes de junio (estación seca). En las colonias del mes de abril se contabilizaron 341 reinas y en las colonias del mes de junio se contabilizaron 164. Se escogieron al azar 50 reinas en abril y 50 reinas en junio. Cada reina fue pesada y sometida al test de oviposición de 24 horas. Al final del test, las reinas fueron disectadas con el fin de determinar si habían sido fecundadas.

Análisis estadísticos. Los datos correspondientes a los test de oviposición (número de huevos por reina en 24 horas), fueron transformados en su raíz cuadrada con el fin de aproximarlos a una distribución normal. Posteriormente se realizaron análisis de varianza, comparación de dos promedios, mediante el test de t, pruebas de X^2 , cálculo de coeficientes de correlación de Pearson y regresiones simples (Zar, 1984).

Resultados

Influencia de la edad de las reinas. Durante esta experiencia se realizó un total de 122 test de oviposición. Se observó que cuando las reinas son jóvenes (1 a 2 me-

ses) la postura promedio se eleva a 32.5 huevos por reina en 24 horas, con un valor máximo de 73 huevos. En cambio, cuando las reinas son "viejas", de unos 14 meses de edad, la postura promedio disminuye en un 85% para alcanzar sólo 5 huevos por reina con un máximo de 15 huevos. Se encontró una correlación negativa altamente significativa entre la fecundidad de las reinas y su edad ($r = -0.727$; g.l.=113; $P < 0.0001$) (Figura 2). Un análisis de varianza mostró que existen diferencias significativas ($F_{6,108} = 25.97$; $P < 0.0001$) entre las diferentes edades y la fecundidad de las reinas; además, estas diferencias son bien marcadas desde la edad de 8 meses.

La evolución del peso de las reinas a través del tiempo se indica en la figura 3. Las reinas son más pesadas durante los primeros meses de su vida y a partir del cuarto mes su peso disminuye. Sin embargo, la pérdida de peso observada en las reinas viejas (14 meses) no es superior al 20% en relación con las reinas jóvenes (1 a 2 meses). Un análisis de varianza muestra que existen diferencias significativas entre los diferentes intervalos de edad ($F_{5,94} = 3.60$; $P < 0.005$). Un análisis a posteriori indica que en las reinas muy jóvenes (1 a 2 meses), el peso promedio de 2.24 ± 0.23 mg, difiere significativamente del observado a la edad de 6 meses (2.01 ± 0.17 mg) ($t = 3.23$; d.l.=33; $P < 0.01$) y a la edad de 14 meses (1.94 ± 0.32 mg) ($t = 3.58$; d.l.=38; $P < 0.001$).

En cuanto a la duración promedio de la vida de las reinas, se observó que al final de los 14 meses del experimento, 6 de las 20 reinas habían muerto. Esta observación confirma un trabajo precedente que reveló una duración promedio de vida de 13.0 ± 1.8 meses (Ulloa-Chacón &

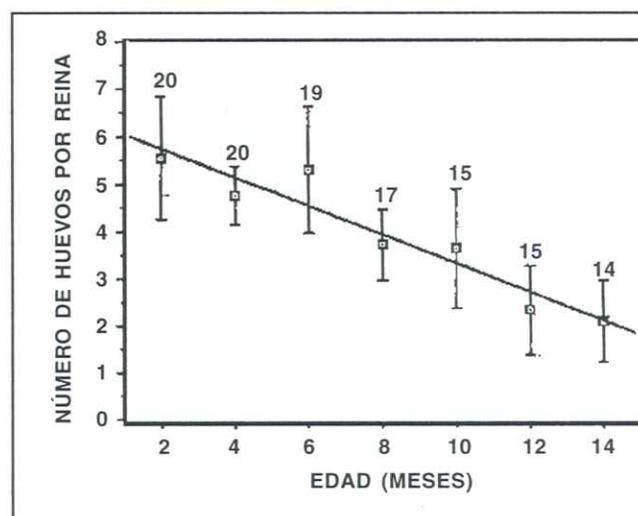


Figura 2.

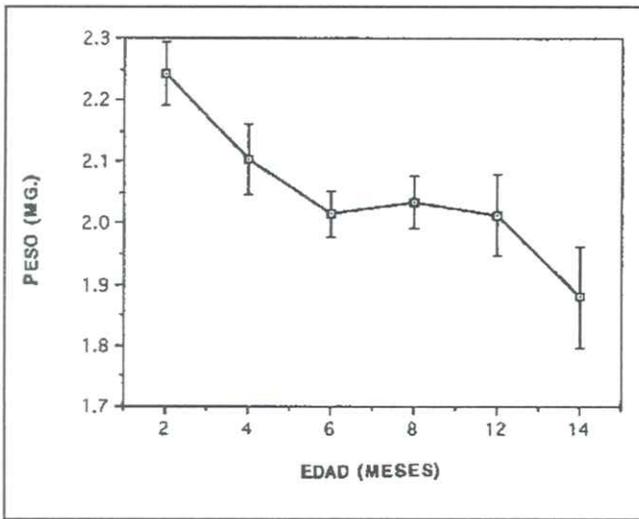


Figura 3.

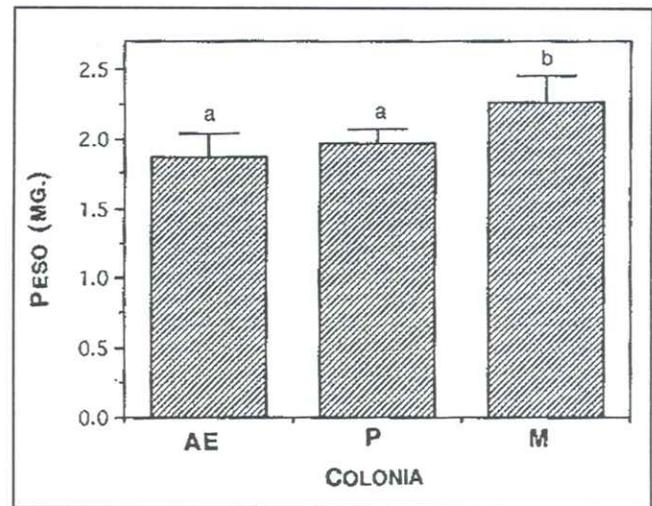


Figura 4.

Cherix, 1989). Finalmente, la disección de las reinas al cabo de los 14 meses permitió observar la espermateca y verificar que todas ellas estaban inseminadas.

Influencia del número de reinas. En las colonias de laboratorio, teniendo en cuenta el valor promedio del peso de cada reina al inicio del experimento (1.87 ± 0.17 ; $n = 48$) y el valor observado 30 días después, se nota que las reinas de las colonias monoginas sufrieron un aumento promedio de 0.39 ± 0.14 mg por reina, mientras que el peso de las reinas en las colonias poliginias aumentó sólo 0.12 ± 0.10 mg por reina (Figura 4). La diferencia entre el peso promedio de las reinas de las colonias monoginas y de las colonias poliginias es estadísticamente significativa ($t = 6.37$; $dl = 47$; $P < 0.001$).

Las observaciones sobre el peso de las reinas, se relacionan con los resultados obtenidos en los 48 test de oviposición realizados con las reinas de los dos tipos de colonias. La postura de cada una de las reinas de las colonias monoginas y de las colonias poliginias se representa en la figura 5. Dos aspectos sobresalen en esta figura: la variación individual entre las reinas de ambos tipos de colonias y las diferencias entre las reinas de colonias monoginas y poliginias. Primero, una comparación de la fecundidad de las reinas pertenecientes a las colonias monoginas, muestra que existen diferencias significativas entre ellas ($X^2 = 81.3$; $gl = 23$; $P < 0.0001$); la postura varía de 16 a 41 huevos por reina en 24 horas. Lo mismo ocurre con las reinas de las colonias poliginias ($X^2 = 40.9$; $gl = 23$; $P < 0.05$); la postura varía de 5 a 25 huevos por reina en 24 horas. Segundo, si se compara la fecundidad de las reinas en las dos clases de colonias, se comprueba

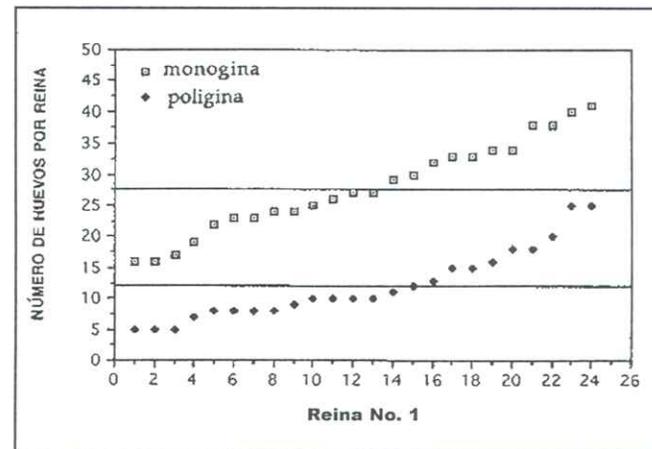


Figura 5.

que el número promedio de huevos puestos por reina en las colonias monoginas (27.4 ± 7.0 ; $n = 24$) es significativamente más elevado que el observado en las colonias poliginias que contienen 8 reinas (12.3 ± 5.8 ; $n = 24$) ($t = 8.39$; $dl = 46$; $P < 0.0001$).

Para las colonias de campo, se presentan en la tabla 1 los valores sobre poblaciones de reinas en los meses de abril y de junio y los resultados obtenidos durante los test de oviposición. El número promedio de reinas por nido en las colonias de abril es el doble que el observado en las colonias del mes de junio (test de t). En cuanto a la postura de las reinas, una proporción del total de reinas probadas, 10% en abril y 16% en junio, no pusieron huevos durante las 24 horas del test. Teniendo en cuenta los individuos que pusieron ($n = 87$), se observa que las reinas de las colo-

Tabla 1.

Estación	Número de reinas por nido	% reinas inseminadas	Peso (mg)	Número de huevos por reina
Lluviosa (abril)	13.11 ± 5.99 (2-26)	74.0	1.99 ± 0.20	16.3 ± 7.9 (5-35)
Seca (junio)	6.83 ± 6.40 (0-24)	86.0	2.24 ± 0.23	30.6 ± 14.7 (8-69)
test de t	t=3.75; gl=48 P< 0.001		t=3.89; gl = 85 P< 0.001	t =5.98; gl = 5 P< 0.0001

nias de abril y de junio, difieren significativamente en cuanto a su peso y a su fecundidad individual. Así, las reinas pertenecientes a las colonias con mayor número de reinas (abril), son menos pesadas (1.99 mg.) y ponen menos (16.3 huevos por reina). Inversamente, en las colonias con un menor número de reinas (junio), estas son más pesadas (2.24 mg.) y ponedoras (30.6 huevos por reina).

La figura 6 representa la distribución de frecuencias de la postura de reinas de las colonias de los meses de abril y junio. La postura de los individuos del mes de abril no es superior a 35 huevos por reina y la mayoría de los individuos (70%) pusieron entre 5 y 20 huevos. Mientras que las reinas del mes de junio, la postura llegó hasta

69 huevos por reina y la mayoría de los individuos (69%) pusieron más de 20 huevos. Estas observaciones confirman el estudio de laboratorio: el número promedio de huevos puestos por cada reina en una colonia, disminuye cuando se aumenta el número de reinas.

Discusión

Se comprobó que tanto la fecundidad como el peso de las reinas son más elevados durante los dos primeros meses de vida y permanecen altos durante aproximadamente seis meses. A partir del séptimo mes, comienzan a disminuir significativamente y alcanzan valores mínimos cuando las reinas tienen más de un año de edad. Al cabo de este tiempo, el 25% de los individuos llegan al final de su vida confirmando así nuestras observaciones sobre la corta vida de las reinas. Estos resultados, así como las observaciones sobre la evolución de las sociedades en la naturaleza (Ulloa-Chacón, 1990), sugieren que en esta especie existe un ciclo de la sociedad cuya duración podría estar en relación con la longevidad de las reinas.

En lo que respecta a los datos sobre la fecundidad y la edad de las reinas, conviene ser prudente cuando se intentan establecer comparaciones con otras especies de hormigas. Lo anterior se debe al hecho de que las sociedades de *W. auropunctata*, como otras especies tropicales, son activas durante todo el año (Ulloa-Chacón, 1990), mientras que en las especies de zonas templadas existen períodos de actividad y de reposo (hibernación) bien marcados, que afectan el ritmo de postura de las reinas (Passera, 1984). Sin embargo, es muy interesante destacar varios puntos en común con otras especies de hormigas poliginias estudiadas. En *Monomorium pharaonis*, una especie igualmente tropical, la longevidad de las reinas también es bastante

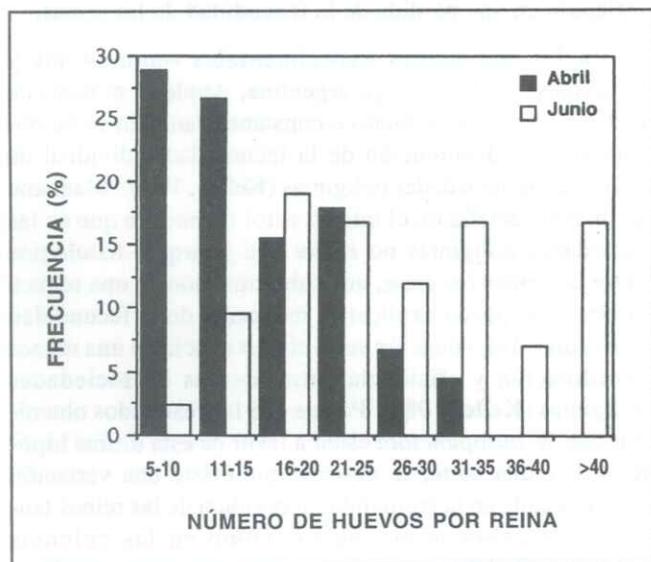


Figura 6.

corta (aproximadamente 200 días), pero las reinas pasan por tres fases: una fase juvenil y una fase senil, durante las cuales la postura es bastante reducida y una fase fértil con una fecundidad máxima (Petersen-Braun, 1975). Según Edwards (1987), las reinas de esta especie mantenidas en condición digna ponen en promedio 5 huevos por día a la edad de 1 mes (fase juvenil), 24 huevos por día a los 4 meses (fase fértil) y 10 huevos por día durante su último mes de vida (fase senil). En *Myrmica rubra*, la fecundidad de las reinas es más importante durante su segundo año de vida y muy baja en las reinas jóvenes y en las reinas viejas (Brian, 1988). En *Plagiolepis pygmaea*, Mercier (1984), observa en sociedades experimentales monoginas, que las reinas jóvenes (9 meses) ponen 636 huevos en cinco semanas, mientras que las reinas viejas (mayores de 21 meses), ponen solamente 337 huevos. En la misma especie, Keller & Passera (1990), notan que las reinas jóvenes ponen el doble de huevos de las reinas viejas, pero la diferencia observada no es significativa. En *Iridomyrmex humilis*, las reinas viven menos de un año (Keller et al., 1989) y la postura alcanza su máximo en las reinas jóvenes (Keller & Passera, 1990), pero la fecundidad no cambia significativamente durante el transcurso del tiempo.

Se ha comprobado que la fecundidad individual de las reinas de *W. auropunctata* es afectada por el número de reinas presentes en las colonias. Bajo condiciones controladas de laboratorio (número constante de obreras por reina, alimento abundante, temperatura y humedad constantes), las reinas de las colonias monoginas son más pesadas y producen más del doble de huevos (27.4 huevos por reina) que las reinas de colonias poliginias (12.3 huevos por reina). Estos resultados son comparables con los obtenidos en colonias de laboratorio de *Plagiolepis pygmaea* (Mercier, et al., 1985b), *Iridomyrmex humilis* (Keller, 1988), *Solenopsis invicta* (Vargo & Fletcher, 1989) y *Paratrechina fulva* (Arcila et al., 2002).

En las colonias examinadas directamente del campo, la fecundidad individual de las reinas está en relación con la densidad de las reinas en las colonias. Cuando la densidad de las reinas es elevada, el peso y la tasa de postura de cada reina son significativamente más bajos que aquellos observados cuando las colonias contienen un menor número de reinas. Se destaca que en el mes de abril, el número de reinas es 2.1 veces más elevado que en el mes de junio, pero en este último la postura fue 1.9 veces mayor. Así, al interior de las sociedades la disminución de la postura individual de las reinas sería compensada por un número de reinas ponedoras más elevado y el aumento de la postura individual resultaría de la disminución del número de reinas por nido.

Varias hipótesis intentan explicar la disminución de la fecundidad individual de las reinas en las sociedades poliginias. En *P. pygmaea*, el tamaño de las colonias es considerado como un factor determinante. Cuando en las sociedades experimentales se aumenta el número de reinas sin aumentar proporcionalmente el número de obreras, la fecundidad individual de las reinas se disminuye fuertemente; pero, cuando el número de obreras por reina permanece constante, la fecundidad de las reinas no cambia (Passera, 1984). Así, la pérdida de peso y de fecundidad, serían debidas a una disminución de la cantidad de alimento recibido por cada reina. Sin embargo, observaciones más precisas sobre la misma especie, indican que las obreras ajustan su comportamiento de recolección de alimento al número de reinas que deben nutrir (Mercier et al., 1986). Entonces, la reducción de la fecundidad de las reinas en sociedades poliginias no sería significativamente influida por el tamaño de las colonias.

Según las observaciones sobre las sociedades poliginias de la hormiga de fuego, la relación inversa entre el número de reinas y su fecundidad sería el resultado de una inhibición mutua entre las reinas, debida a una emisión de feromonas (Fletcher et al., 1980; Vargo & Fletcher, 1989). En esta especie se ha demostrado que existe un control de carácter feromonal: las reinas ponedoras inhiben el desarrollo ovárico de las reinas vírgenes probablemente al suprimir la producción de la hormona juvenil (Fletcher & Blum, 1981, 1983 b; Willer & Fletcher, 1986). Vargo & Fletcher (1989) piensan que de manera similar a la acción de esas feromonas inhibitorias, las feromonas emitidas por las reinas de sociedades poliginias afectan la tasa de hormona juvenil, disminuyendo su producción. Lo anterior se reflejaría en una pérdida de la fecundidad de las reinas.

En las sociedades experimentales –monoginas y poliginias– de la hormiga argentina, donde el número de obreras por reina permanece constante, también se ha observado una disminución de la fecundidad individual de las reinas de sociedades poliginias (Keller, 1988). Mediante un análisis detallado, el mismo autor demuestra que en las sociedades poliginias no existe una jerarquía fisiológica entre las reinas (es decir, una subordinación de una reina a la otra) que pueda explicar la reducción de la fecundidad individual. Tal reducción sería consecuencia de una menor coordinación y eficiencia entre obreras de sociedades poliginias (Keller 1988). Parece que los resultados obtenidos con *W. auropunctata* están a favor de esta última hipótesis. Por una parte, se observa que existe una variación muy marcada en la fecundidad individual de las reinas tanto en las colonias monoginas como en las colonias poliginias de laboratorio: hay reinas que ponen mucho y reinas que ponen poco en las dos clases de colonias. Lo

anterior sugiere ausencia de una jerarquía entre las reinas de las colonias poliginias. Por otra parte, las observaciones sobre la composición de las colonias en la naturaleza, sugieren que el rendimiento de las obreras es mejor en las colonias pequeñas. En efecto, en *W. auropunctata* las colonias nunca están formadas por grandes agregaciones, sino divididas en varios nidos que se comunican y que contienen un número variable de individuos (reinas, obreras y crías), cuyas proporciones varían en forma bastante interdependiente (Ulloa-Chacón & Cherix 1990).

Agradecimientos

Se agradece al Dr. Daniel Cherix, conservador del Museo de Zoología de Lausanne (Suiza), por toda la colaboración brindada a lo largo de este estudio, así como por las valiosas sugerencias y comentarios sobre los resultados obtenidos.

Bibliografía

- Arcila, A.M., Ulloa-Chacón, P. & Gómez, L.A. 2002. Factors that influence individual fecundity of queens and queen production in crazy ant *Paratrechina fulva* (Hymenoptera: Formicidae). *Sociobiology* **39** (2): 323-334.
- Brian, M. V. 1986. The distribution, sociability and fecundity of queens in normal groups of the polygynous ant *Myrmica rubra*. *Insectes Soc.*, **33**: 118-131.
- . 1988. The Behavior and fecundity of queens of different ages in synthetic groups of *Myrmica rubra* L. with different workers populations. *Insectes Soc.*, **35**: 153-166.
- Edwards, J. P. 1987. Caste regulation in the pharaoh's ant *Monomorium pharaonis*: the influence of queens on the production of new sexual forms. *Physiol. Entomol.*, **12**: 31-39.
- Espinal L. S. 1968. Visión ecológica del departamento del Valle del Cauca. Universidad del Valle, Cali-Colombia, 40 pp.
- Fletcher, D. J. C. & Blum, M. S. 1981. Pheromonal control of dealation and oogenesis in virgin queen fire ants. *Science*, **212**: 73-75.
- . 1983 a. Regulation of queen number by workers in colonies of social insecto. *Science*, **219**: 312-314.
- . 1983 b. The inhibitory pheromone of queen fire ants (*Solenopsis invicta*): effects of disinhibition on dealation and oviposition by virgin queens. *Comp. Physiol. A.*, **153**: 467-476.
- Fletcher, D. J. C., Blum, M. S., Whitt, T. V. & Tempel, N. 1980. Monogyny and polygyny in the fire ant *Solenopsis invicta* Burén. *Ann. Entomol. Soc. Am.*, **73**: 658-661.
- Greenberg, L., Fletcher, D. J. C. & Vinson, S. B. 1985. Difference in worker size and mound distribution in monogynous and polygynous colonies of the fire ant *Solenopsis invicta* Burén. *J. Kansas Entomol. Soc.*, **58**: 9-18.
- Keller, L. 1988. Evolutionary implications of polygyny in the Argentine ant, *Iridomyrmex humilis* (Mayr) (Hymenoptera, Formicidae): an experimental study. *Anim. Behav.*, **36**: 159-165.
- Keller, L. & Passera, L. 1990. Fecundity of ant queens in relation to their age and the mode of colony founding. *Insectes Soc.*, **37**: 116-130.
- Keller, L., Passera, L. & Suzzoni, J. P. 1989. Queen execution in the Argentine ant *Iridomyrmex humilis* (Mayr). *Physiol. Entomol.*, **14**: 157-163.
- Mercier, B. 1984. Role de la polygynie dans la productivité des reines de la fourmi *Plagiolepis pygmaea* Latr. (Hymenoptera, Formicidae). These 3ème cycle, Université Paul-Sabatier, Toulouse, 130 pp.
- Mercier, B., Passera, L. & Suzzoni, J. P. 1985 a. Etude de la polygynie chez la fourmi *Plagiolepis pygmaea* Latr. (Hymenoptera: Formicidae). I. La fécondité des reines en condition expérimentale monogyne. *Insectes Soc.*, **32**: 335-348.
- . 1985 b. Etude de la polygynie chez la fourmi *Plagiolepis pygmaea* Latr. (Hymenoptera: Formicidae). II. La fécondité des reines en condition expérimentale polygyne. *Insectes Soc.*, **32**: 349-362.
- . 1986. La polygynie chez *Plagiolepis pygmaea* Latr. (Hymenoptera, Formicidae): Les interactions royales et la fécondité. *Actes Coll. Insectes Sociaux*, **3**: 173-185.
- Palma-Valli, G. & Délye, G. 1981. Contrôle neuro-endocrine de la ponte chez les reines de *Camponotus lateralis* Olivier (Hymenoptère, Formicidae). *Insectes Soc.*, **28**: 167-181.
- Passera, L. 1984. L'organisation sociale chez les fourmis. Ed. Univ. Paul Sabatier Toulouse, France, 360 p.
- Petersen-Braun, M. 1975. Untersuchung zur sozialen Organisation de Pharaonameise *Monomorium pharaonis* (L.) (Hymenoptera, Formicidae). 1. Der Brutzyklus und seine Steuerung durch populationseigene Faktoren. *Insectes Soc.*, **22**: 269-292.
- Ulloa-Chacón, P. 1990. Biologie de la reproduction chez la petite fourmi de feu *Wasmannia auropunctata* (Roger) (Hymenoptera, Formicidae). These de doctorat, Université de Lausanne, 161 p.
- Ulloa-Chacón, P. & Cherix, D. 1988. Quelques aspects de la biologie de *Wasmannia auropunctata* (Roger) (Hymenoptera, Formicidae). *Actes Coll. Ins. Soc.*, **4**: 177-184.
- . 1989. Etude de quelques facteurs influenciant la fécondité des reines de *Wasmannia auropunctata* (R.) (Hymenoptera, Formicidae). *Actes Coll. Insectes Soc.*, **5**: 121-129.
- . 1990. The little fire ant, *Wasmannia auropunctata* (Roger) (Hymenoptera, Formicidae). In: *Applied Myrmecology: A world perspective*. Vander Meer, R.K., Jaffe, K. And Cedeño, A. (eds.). Westview press, Boulder, Colorado.
- Vargo, E. L. & Fletcher, D. J. C. 1989. On the relationship between queen number and fecundity in polygynous colonies of the fire ant, *Solenopsis invicta*. *Physiol. Entomol.*, **14**: 223-232.
- Willer, D. E. & Fletcher, D. J. C. 1986. Differences in inhibitory capability among queens of the ant *Solenopsis invicta*. *Physiol. Entomol.*, **11**: 475-482.
- Yamauchi, K., Kinomura, K. & Miyake, S. 1982. Sociobiological studies of the polygynous ant *Lasius sakagami*. 2. Production of colony members. *Insectes Soc.*, **29**: 164-174.
- Zar, J.H. 1984. *Biostatistical Analysis*. Prentice Hall, Inc., New Jersey.

NEW SPECIES OF FROGS (*ELEUTHERODACTYLUS*: LEPTODACTYLIDAE) FROM THE CORDILLERA ORIENTAL OF NORTE DE SANTANDER AND SANTANDER, COLOMBIA

por

John D. Lynch¹

Resumen

Lynch, J. D.: New species of frogs (*Eleutherodactylus*: Leptodactylidae) from the Cordillera Oriental of Norte de Santander and Santander, Colombia. Rev. Acad. Colomb. Cienc. 27 (104): 449-460, 2003. ISSN 0370-3908.

Se describen tres especies más de *Eleutherodactylus* de los bosques andinos de la parte norte de la Cordillera Oriental. La primera pertenece al grupo *E. conspicillatus* y aparentemente esta relacionada con una especie ampliamente distribuida, *E. w-nigrum* pero es alopátrica de ella. La segunda es parecida superficialmente a *E. tubernasus* pero parece tener parentesco con otras especies de las cordilleras Central y Occidental. Se re-evalúa el grupo *E. tubernasus* en el cual, de las cuatro especies originales, solamente dos son válidas y no muestran parentescos cercanos. La tercera especie parece tener parentesco con *E. ganonotus* (de los bosques andinos del oriente de Ecuador) y *E. viridis* (parte norte de la Cordillera Occidental).

Palabras clave: *Eleutherodactylus*, taxonomía.

Abstract

Three additional species of *Eleutherodactylus* are described from the Andean forests of the northern Cordillera Oriental. One is a species of the *E. conspicillatus* species group, apparently related to the wide-spread *E. w-nigrum*. A second superficially resembles *E. tubernasus* but appears related to other frogs from the Central and Occidental cordilleras. The *E. tubernasus* species group is re-evaluated and the four species once-recognized are reduced to two species, not closely related. The third new species appears to be related to *E. ganonotus* (Andean forests of eastern Ecuador) and *E. viridis* (northern part of the Cordillera Occidental).

Key words: *Eleutherodactylus*, taxonomy.

¹ Instituto de Ciencias Naturales, Universidad Nacional de Colombia.

Introduction

The Cordillera Oriental of Colombia is the least species-rich of the three cordilleras in terms of the frog genus *Eleutherodactylus* (Lynch et al., 1997). In spite of my having devoted most of my attention these past 25 years to the Cordillera Central and, especially, the Cordillera Occidental (Lynch, 1998), I remain convinced that the eastern cordillera is more impoverished than the other two, primarily based on the number of species recovered from single localities. That said, it must be admitted that the intensity of fieldwork carried out by my colleagues M. Cristina Ardila, J. Vicente Rueda, and the late Pedro M. Ruiz, and me, at least in terms of intense transects, was much more extensive in the Central and Occidental than in the Oriental.

In the past few years, following study of material collected in the northern portion of the Cordillera Oriental by persons from the Universidad de Antioquia (Juan Manuel Daza), Universidad de Atlántico (Daniel Cuentas), and the Universidad Industrial de Santander (Martha Patricia Ramírez and her students), I have learned that this cordillera harbors more species than have been reported (and this conclusion is further reinforced by the largely unreported surveys carried out in the Parque Nacional Natural Cordillera de Los Picachos [M. C. Ardila] and on the road leading from Florencia, Caquetá, to Huila [Lynch, Restrepo, & Ruiz] Lynch & Suárez, 2000, Suárez, 2000). This contribution is the second (after Lynch, 2003, with two more to follow) to deal with recent discoveries from the northern portion of the Cordillera Oriental and deals with three new species sharing very little except geographic location.

Materials and methods

Methodology and terminology follow Lynch & Duellman (1997). Specimens mentioned here are deposited in six collections: ICN (Instituto de Ciencias Naturales, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá), KU (Natural History Museum, University of Kansas, Lawrence), MHUA (Museo de Herpetología, Universidad de Antioquia, Medellín), SCNLS (Sociedad de Ciencias Naturales La Salle, Caracas), UIS-A (Universidad Industrial de Santander), and UPR-M (Universidad de Puerto Rico-Mayagüez).

A. A new Andean species of the *E. conspicillatus* group

The *E. conspicillatus* group (defined by Lynch, 1994) is a conspicuous element of the fauna in the wet lowlands

of South America (ignoring eastern Brasil and the *conosur*) but the group is also present in montane situations in Colombia, Ecuador, and northern Peru. In the eastern cordillera, the only known species are *E. carregerorum* Lynch from two localities in Boyacá, *E. eparcus* Lynch & Suárez from western Caquetá, *E. savagei* Pyburn and Lynch from eastern Cundinamarca and Meta, and the widespread *E. w-nigrum* (Boettger), known in the Cordillera Oriental from Caquetá, Cundinamarca, and Santander. Recently, I had the opportunity to examine yet another species in collections of the Museo de Herpetología of the Universidad de Antioquia. It is here named.

Eleutherodactylus ixalus sp. nov.

Holotype: ICN 47886, a subadult female, one of a series collected 10-12 October 2001 by Juan Manuel Daza and Eliana M. Muñoz (gift from MHUA, original number MHUA 1814).

Paratopotypes: MHUA 1821-22, 2311, adult males.

Type-locality: COLOMBIA, Departamento de Santander, Municipio de Betulia, vereda Palma de Oro, Finca La Antigua, 1300-1700 msnm., 6° 57' N, 73° 19' W.

Referred specimens: MHUA 1819, 1823, juveniles taken with the type-specimens.

Etymology: Greek, *ixalos*, meaning bounding or springing, in reference to the long hindlegs and my suspicion that this is an active jumper, like most other species of the group.

Diagnosis: (1) skin of dorsum shagreen, that of venter smooth; no dorsolateral folds; (2) tympanum round, 40–45 % length of eye; (3) snout subacuminate or acuminate in dorsal view, round in lateral profile; canthus rostralis distinct; (4) upper eyelid narrower than IOD, without pungent tubercles; no cranial crests; (5) vomerine odontophores subtriangular in outline, median and posterior to choanae, separated by width of an odontophore, smaller than choanae; (6) males lacking vocal slits; nuptial pads ill-defined; (7) first finger longer than second, moderate sized disks on fingers III and IV; (8) fingers bearing lateral keels; (9) ulnar tubercles, excepting antibrachial, absent; (10) conical tubercle on heel, smaller tubercles along outer edge of tarsus; (11) two metatarsal tubercles, inner oval, outer 1/5–1/4 size of inner; (12) toe V slightly longer than toe III; toes bearing lateral keels, lacking webbing; few supernumerary plantar tubercles; (13) Brown above with vague brown markings; throat pigmented, with white raphe, venter white, posterior surfaces of thighs brown with some cream flecks and dark spots along upper edge; (14) adults

of moderate size, three males 23.1—31.3 mm SVL, one young female 45.4 mm SVL.

Eleutherodactylus ixalus is most similar to *E. w-nigrum*, from which it differs in having a longer snout (Fig. 1), heel and outer tarsal tubercles, absence of vocal slits, and in the coloration of the posterior surfaces of the thighs (yellow with black spots in *E. w-nigrum*).

Description: Head broader than body, longer than wide; HW 37.4—38.6 % SVL; snout almost acuminate in dorsal view, rounded in lateral profile; nostrils not (or very weakly) protuberant, directed laterally; E-N 100.0—105.00 % eye length in males, 121.2 % in female; canthus rostralis obvious, edge rounded; loreal region concave, sloping abruptly to lips; lips not flared; upper eyelid without pungent tubercles, its width 74.0—100.0 % IOD; no cranial crests; supratympanic fold distinct, obscuring upper edge of tympanum, ending behind tympanum; tympanum round, its length 40.0—45.0 % eye length; 2 or 3 conical postrectal tubercles; choanae not concealed by palatal shelf of maxillary arch, triangular in outline; vomerine odontophores median and posterior to choanae, subtriangular in outline in female, slanted in males, separated medially by distance equal width of an odontophore, bearing a slanted row of 3-5 teeth; posterior edge of tongue notched, posterior 1/5 not adherent to floor of mouth; no vocal slits in males.

Skin of dorsum fine shagreen (fine tubercles, closely spaced); no dorsolateral nor postocular folds; flanks shagreen, ventral surfaces smooth; discoidal folds anterior to groin; no anal sheath nor subanal tubercles; ulnar surfaces without tubercles except for antebrachial tubercle; palmar tubercle bifid, much larger than oval thenar tubercle; one non-conical supernumerary palmar tubercle/ digit;

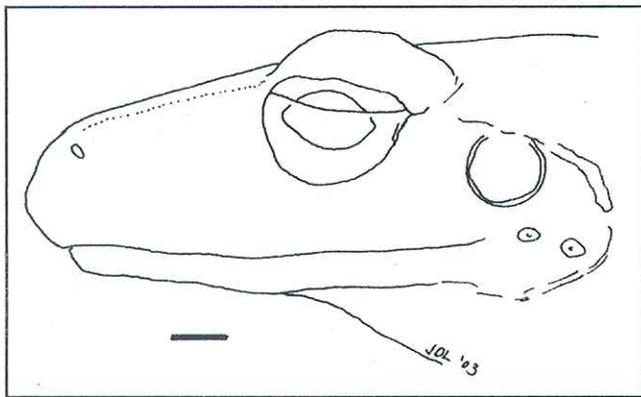


Figure 1. Side of head of *Eleutherodactylus ixalus* (ICN 47886). Scale equals 2 mm.

subarticular tubercles round, subconical; first finger longer than second when each appressed; all digits bearing circumferential grooves defining ventral pads on disks; disks of fingers I and II scarcely wider than digit below disk, of fingers III and IV, circa 2X width of digit; fingers bearing lateral keels; nuptial pad not distinctive but present.

Conical (but small) tubercle on upper edge of heel; series of smaller tubercles along outer edge of tarsus; inner edge of tarsus with elongate tubercle on distal 1/6th; inner metatarsal tubercle 2 1/2 times as long as wide, oval, outer round, 1/4—1/5 size of inner; plantar supernumerary tubercles just below subarticulars, 1—2/ digit; subarticular tubercles longer than wide (basals of toes IV—V) or round, non-pungent; toes with narrow lateral keels, no webbing; Toe V extends just beyond distal edge of penultimate subarticular tubercle of Toe IV, Toe III to proximal 1/2 of same tubercle; disks of toes expanded, nearly so large as those of outer fingers, with circumferential grooves on pads; hindlimbs long, shank 57.1—57.8 % SVL in males, 68.3 % in female, when hindlimbs flexed and held perpendicular to sagittal plane, heels overlapping substantially.

Coloration in alcohol: Brown above with interorbital bar/ triangle and some vague spots on body; limb bars of legs evident in female (not males), edged with cream and oblique to axis of shank; canthal stripe and supratympanic stripe dark brown; pair of pale subocular bars; slanted bars on flanks; venter nearly white but some concentration of brown stippling on throat of MHUA 1822 (with white raphe) and the holotype; venter with few clusters of stipples; posterior surface of thigh with dark spots near upper edge—rest of surface brown with diffuse cream spots.

Coloration in life: Dorsum pale brown with upper lip golden; throat pale gray with faint white line; upper surface of disks golden; plantar surface black; black spots on concealed surface of shank; iris golden with dark horizontal stripe.

Measurements of the holotype in mm: SVL 45.4, shank 31.0, HW 17.5, head length 17.5, chord of head length 17.8, upper eyelid width 3.7, IOD 5.0, tympanum length 2.3, eye length 5.2, E-N 6.3.

Natural history: Little is known except that three paratypes were calling at night in early October and that small (11.0-13.5 mm SVL) juveniles were found at the same time. These data suggest that reproduction is aseasonal. Males were calling, early in the evening (6-8 PM, but not later) on the ground (not on vegetation) near a stream in a very humid forest.

Remarks: My initial, cursory (through the bottle), examination of these specimens resulted in their misidentification as *E. w-nigrum*, a judgment corrected when I removed them from their jar and examined them under a stereoscope. This is not evidence of relationship (rather, of my slothfulness). Nevertheless, *E. ixalus* is considered here as a close relative of the widespread *E. w-nigrum* (Lynch, 1979, Lynch & Duellman, 1997). Departamento de Santander has not yet been adequately collected to assert that *E. ixalus* has a small distributional area (like *E. actites* Lynch of western Ecuador, Lynch & Duellman, 1997). The nearest locality record for *E. w-nigrum* is in southern Santander (municipio de Charalá). At least tentatively, it appears that these three species depart partially (and significantly) from Mayr's model of peripatric speciation—speciation without ecological shifts (Lynch, 1999).

B. The dismantling of the *E. tubernasus* group and a new species similar to *E. tubernasus*

Rivero (1984) proposed the *Eleutherodactylus tubernasus* species group, named three Venezuelan species (*E. chlorosoma*, *E. pulidoi*, and *E. tubernasus*), and included *E. prolixodiscus* Lynch (a Colombian species) in the group as well. Lynch (1978), in his initial concept of *E. prolixodiscus*, included material from the Sierra Nevada de Santa Marta and from the cloud forests of Santander, Colombia. Subsequently, Lynch & Ruiz (1985) pointed out that the specimens from the Sierra Nevada de Santa Marta were not conspecific with specimens from Santander and named the former as *E. tayrona*. Rivero's proposal was based on material from the Sierra Nevada de Santa Marta (*E. tayrona*) and not the species from the Cordillera Oriental (and Venezuela), *E. prolixodiscus*. He

borrowed specimens from the University of Kansas, where the types are deposited (unfortunately he did not borrow some paratypes).

In the early 1990s, I had occasion to wonder about the *E. tubernasus* group and its included species and noted Rivero's error (deriving from an error of my own—confusing *E. prolixodiscus* and *E. tayrona*). Thus, I requested the loan of all type specimens of the three species named by Rivero (1984) to settle ambiguities. Through the good offices of Enrique La Marca, I also had the opportunity to examine specimens assigned to one or more of these names from other localities on the Cordillera de Mérida. Rivero (1984) assumed that Lynch (1978) was correct in assigning Santa Marta specimens to *E. prolixodiscus*—thus he confidently named three species from Venezuela and even provided a cladogram for the four species (here rejected).

All of these frogs live in bromeliads—frequently being seen plastered between the leaves of bromeliads. Their flattened bodies might be taken for evidence of relationship (Rivero, 1984) or as an adaptation for living in bromeliads (a worry of Lynch & Duellman, 1997:92). Reporting the results of my study languished until I visited the Universidad de Antioquia and the Universidad Industrial de Santander in early 2002 and had the opportunity to examine specimens of similar frogs collected in the departments of Norte de Santander and Santander.

Rivero (1984) defined the *tubernasus* complex because its species possessed (1) a tubercle (or papilla) on the tip of the snout, (2) a large tympanum (wider than long, and more prominent ventrally), (3) an indistinct canthus rostralis, concave loreal region, a tendency to



Figure 2. Photographs of *Eleutherodactylus uisae*. (left) The holotype (ICN 47882) and (right) a paratype (ICN 47884), illustrating the two color morphs.

flared upper lips, (4) the lack of dorsolateral folds, and other trivial characters, including color in life. He noted that "*E. prolixodiscus*" did not match in all of the characters (but recall that his "*E. prolixodiscus*" were subsequently re-identified as *E. tayrona*).

In 1978, I dealt with specimens long-preserved but had no experience with any of these organisms. In 1983, 1986, and 1992, I had the opportunity to collect, and closely observe, *E. prolixodiscus* and *E. tayrona*. Rivero (1984) had 27 specimens of the three species that he reported for Venezuela (20 *E. chlorosoma*, five males and 15 females, two females of *E. pulidoi*, and one male and four females of *E. tubernasus*)—in spite of his descriptions, I doubted that he had three species or that they were closely related. Subsequent study of all of his material, and additional collections, resolved my concerns (hence, this report).

Lynch & Ruiz (1985) reported *E. prolixodiscus* from western Venezuela and Ruiz *et al.* (1996), with no further comment, reported *E. tubernasus* from Cerro Tamá (Colombia-Venezuela border), but did not mention the other two names (*E. chlorosoma* and *E. pulidoi*) published by Rivero, because, by then, I had arrived at the conclusions, following examination of the type-specimens, that *E. chlorosoma* and *E. pulidoi* were synonyms of *E. prolixodiscus* and *E. tubernasus*, respectively (see Commentary), and that *E. tubernasus* was a species not related to *E. prolixodiscus*, causing the *E. tubernasus* species group to evaporate, for lack of evidence.

During the 1980s and the early 1990s, I had encountered bromeliad-dwelling frogs in the cloud forests of the Cordillera Central (and its equivalent in Ecuador, there-called the Cordillera Real), the Cordillera Occidental, and the Sierra Nevada de Santa Marta. Likewise, I (Lynch, 1978) had associated *E. prolixodiscus* with this complex and Rivero (1984) had named four taxa as well from the Cordillera Mérida and/or Cordillera Oriental. By the mid 1990s, I had concluded (but not published) that *E. prolixodiscus* and *E. tubernasus* were not closely related to species from the other cordilleras (and that two of the taxa named by Rivero were synonyms).

Nonetheless, collections by students from the Universidad Industrial de Santander revealed the presence of another species similar to *E. tubernasus*, but probably allied with species from the western cordilleras of Colombia, in cloud forests on the western flanks of the Cordillera Oriental in the Departamento de Santander; this species is here named.

Eleutherodactylus uisae sp. nov.

Holotype: ICN (amphibian collection) 47882, a female, part of a series collected by Sandy Arroyo 13 August 2002, formerly UIS-A 2428.

Paratopotype: ICN 47883, a male collected with the holotype (formerly UIS-A 2429).

Paratypes: ICN 47884-85 (formerly UIS-A 2430-31), UIS-A 1876, 2241-46, 3008, 3010, 3012-18, 3022, Santuario de Fauna y Flora Guanentá—Alto Río Fonce, 2400 m (Santander, municipio Charalá)

Type-locality: COLOMBIA, Departamento de Boyacá, Municipio de Paipa, Hacienda La Sierra, dentro el Santuario de Fauna y Flora Guanentá—Alto Río Fonce, antigua escuela, 2700 m.

Referred specimens (juveniles and material dissected or destined to be dissected): UIS-A 1301, 1308, 1310, 1319, 1329, 1339, 1341, 1343, 1345, 1362, 1376, 1386-87, 1389-90, 1395, 1397, 1400, 1402-03, 1584, 1594, 1606, 1853, 1858, 1861, 1872-73, 1892, 1894-95, 1897-901, 1907-08, 2024-25, 2041, 2056, 2063, 2065-68, 2072, 2077, 2084, 2087, 2098-99, 2101, 2104-05, 2173-75, 2190-93, 2195-99, 2204, 2207, 2219, 2221, 2233, 2240, 2264-65, 2268, 2272, 2328, 2331, 2334, 2336-39, 2347, 2350-52, 2488, 2491, 2496, 2500, 2502, 2505-06, 2508, 2510-11, 2514-16, 2521, 2524, 2526-27, 2533-34, 2537-39, 2541, 2544, 2550, 2557, 2559, 2561, 2589, 2654-56, 2659, 2662, 2665, 2668, 2672-74, 2676, 2684-85, 2694, 2696, 2698-99, 2701, 2712-13, 2715-16, 2718, 2720-22, 2727, 2732, 2743-46, 2750, 2760, 2762, 2769, 2771-75, 2778, 2787, 2774, 2801, 2806, 2820, 2822, 2825, 2831, 2835, 2837, 2839, 2844, 2846, 2848-49, 2855, 2869-71, 2874-76.

Etymology: The name is derived from the acronym of the Universidad Industrial de Santander (UIS) and is used as a noun used in apposition. The name intends to honor my colleague, Martha Patricia Ramírez, and her students, for their dedication to learn what frogs occur in the cloud forests above Bucaramanga and things about their ecology.

Diagnosis: (1) Skin of dorsum nearly smooth except for low warts on lower back, that of venter areolate; no dorsolateral folds; (2) tympanum round, 1/3-1/2 length of eye; (3) snout subacuminate to nearly round in dorsal view, pointed in lateral profile, bearing papilla at tip; canthus rostralis distinct, straight or slightly concave; (4) upper eyelid narrower than IOD, bearing small conical tubercle; no cranial crests; (5) vomerine odontophores oval, slanted;

(6) males with vocal slits and nuptial pads; (7) first finger shorter than second, disks of fingers expanded, but small; (8) fingers bearing lateral keels; (9) series of small ulnar tubercles along outer edge of forearm; (10) small tubercle on heel, smaller tubercles along outer edge of tarsus; (11) two metatarsal tubercles, inner oval, outer round, 1/5 size of inner; supernumerary plantar tubercles present; (12) toes bearing lateral fringes but no web, disks expanded, about size of those of hand, fifth toe very long; (13) dorsum brown with darker brown spots; ventral surfaces cream; posterior surfaces of thighs pale brown with some small cream spots; (14) adults small, males 17.0-20.7 (\bar{x} = 18.9 \pm 0.3, N = 16) mm SVL, females 26.3-31.2 (\bar{x} = 27.6 \pm 0.5, N = 9) mm SVL.

Eleutherodactylus uisae is not thought closely related to *E. tubernasus* (as one might assume from geography) but rather to a series of small frogs found on the Cordillera Central, Cordillera Occidental, and western slope of the Macizo Colombiano and northern Cordillera Real of Ecuador (*E. angustilineatus*, *E. baiotis*, *E. boulengeri*, *E. brevifrons*, *E. dorsopictus*, *E. eremitus*), none known in the era of Cochran & Goin (1970). Of these, only *E. brevifrons*, *E. dorsopictus*, and *E. eremitus* have tubercles on the upper eyelid and on the heel and outer edge of the tarsus. *Eleutherodactylus angustilineatus*, *E. baiotis*, and *E. dorsopictus* are readily distinguished in having bifid subarticular tubercles. *Eleutherodactylus brevifrons* is smaller, has a concealed tympanum, and has larger eyes (as reflected by the upper eyelid/IOD ratio). *Eleutherodactylus eremitus* has larger eyes, more prominent vomerine odontophores, and is green in life. The geographically nearer *E. tubernasus* has sharply slanting tympani (in both sexes) and a notably flatter head than *E. uisae*.

Description: Head broader than body; head wider than long; HW 34.8-38.4 (\bar{x} = 37.1 \pm 0.2, N = 16) % SVL in males, 36.9-40.3 (\bar{x} = 38.2 \pm 0.4, N = 9) % in females; snout nearly rounded in dorsal view in females (more subacuminate in males) except for conical tubercle at tip, pointed (due to tubercle) in lateral profile; nostrils weakly protuberant, directed dorsolaterally; canthus rostralis straight or weakly concave, sharp; E-N 70.4-88.0 (\bar{x} = 80.1 \pm 5.4, N = 16) % eye length in males, 81.8-106.9 (\bar{x} = 93.4 \pm 2.3) % in females; loreal region concave, sloping abruptly to lips; lips not flared in males, somewhat in females; small subconical tubercle on upper eyelid and most individuals also have numerous minute tubercles scattered over upper eyelid; width of upper eyelid 50.0-85.7 (\bar{x} = 70.0 \pm 2.4, N = 16) % IOD in males, 57.1-87.5 (\bar{x} = 67.8 \pm 2.9) % in females; interorbital space flat (no cranial crests) but with small tubercle midway between

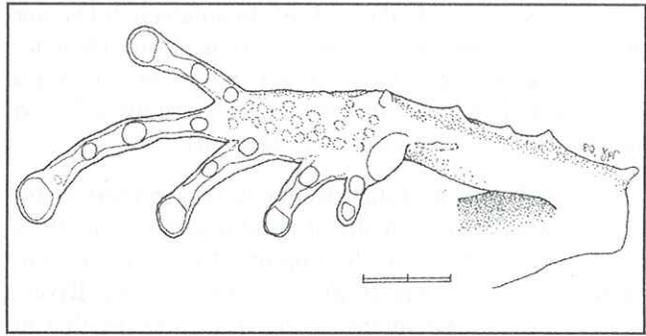


Figure 3. Foot (and tarsus) of *Eleutherodactylus batrachites* (MHUA 1776). Scale equals 2 mm.

two upper eyelids; supratympanic fold ending at midlevel of tympanum; tympanum round, its length 31.8-47.8 (\bar{x} = 39.5 \pm 1.2) % eye length in males, 36.4-58.6 (\bar{x} = 47.3 \pm 2.3) % in females, separated from eye by slightly less than tympanum length; in males, tympanum is nearly vertical whereas in females it is slanted nearly dorsolaterally; two subconical postrictal tubercles; choanae small, round, not concealed by palatal shelf of maxillary arch; vomerine odontophores median and posterior to choanae, slanted in males, more elevated and oval in females, each bearing row of 2-5 teeth; odontophores separated medially by distance 1 1/2-2 times width of an odontophore; posterior edge of tongue with shallow notch; posterior 1/3 of tongue not adherent to floor of mouth; long vocal slits lateral to tongue; vocal sac large, subgular.

Skin of head and anterior trunk smooth, that of lower back bearing many small low tubercles, flanks more noticeably tuberculate, of venter coarsely areolate; no discoidal folds; no anal sheath; series of 3-5 ulnar tubercles in row; palmar tubercle bifid, much larger than oval thenar; numerous low supernumerary palmar tubercles; subarticular tubercles round, conical; narrow lateral keels on fingers; disks of fingers I-II scarcely expanded, of outer fingers 1.5 times width of digit below disk; disks round apically; circumferential grooves complete, defining ventral pads; first finger shorter than second; nuptial pad on thumb of male.

Small tubercle on heel and series of smaller tubercles along outer edge of tarsus; elongate tubercle (or short fold) just proximal to inner metatarsal tubercle on inner edge of tarsus; inner metatarsal tubercle twice as long as wide; outer metatarsal tubercle round, 1/6 size of inner; numerous supernumerary plantar tubercles, non-conical; subarticular tubercles round, simple, non-conical; lateral fringes on toes, no webbing; tip of toe V to distal edge of

distal subarticular tubercle of toe IV, tip of toe III to distal edge of penultimate subarticular tubercle of toe iv; disks of toes slightly smaller than those of outer fingers—ca 1 ¼ times width of digit below disk; circumferential grooves complete; heels overlapping when flexed hindlegs held perpendicular to sagittal plane; shank 46.5—52.9 (\bar{x} = 49.7 ± 0.4, N = 16) % SVL in males, 47.1—52.8 (\bar{x} = 50.3 ± 0.8, N = 9) % in females.

Coloration in alcohol: dorsum brown with darker dorsal markings (interorbital bar, scapular W, inverted Y-shape mark above sacrum, sometimes inguinal spots); canthal stripe present but labial bars only beneath eye; shank bars narrower than interspaces, transverse on shank; flanks paler than dorsum, venter cream with brown stippling; posterior surfaces of thighs pale brown, sometimes with small cream spots.

Coloration in life: dorsum brown to orange brown with darker brown markings, edged in cream; individuals with a *dorsoconcolor* pattern have a cream to reddish-brown dorsum, stripes, if present, are brown, and dark brown flanks; iris golden with brown flecking.

Measurements of holotype in mm.: SVL 27.5, shank 13.7, HW 10.5, head length 9.4, chord of head length 10.0, upper eyelid with 2.5, IOD 3.5, tympanum length 1.2, eye length 3.3, E-N 2.7.

Natural history: *Eleutherodactylus uisae* is somewhat unusual for a species of the *bosque andino* in that it is active both by day and night. **Gutiérrez L.** (2003) found males calling at night as well as in the afternoons. Although some specimens were found in, or perched on, bromeliads, there is no credible evidence that the species is some sort of bromeliad-dwelling frogs (in contrast to many species loosely associated in the bromeliad-dwelling group). Adults (and juveniles) are found normally perched upon broad-leaves or less commonly in the leaf-litter (the latter by day). The study by **Gutiérrez L.** (2003) was an ecological one—she found *E. uisae* to be much more abundant in native forests than in restored (*Quercus*) forests 30 years old. Furthermore, *E. uisae* was found as well in *Pinus* forests near a *cabaña* of the reserve (type-locality).

Remarks: As is the case for many *Eleutherodactylus*, *E. uisae* is pattern-polymorphic. The species exhibits only two polymorphisms in my judgment—a spotted pattern (81 % of individuals) and a *dorsoconcolor* pattern (19 %). Some individuals of the *dorsoconcolor* pattern have no markings on the dorsum, others have a single vertebral band, broadest anteriorly, and yet others have thinner

paravertebral dark bands (the last variant accounts for 75 % of *dorsoconcolor* morphs). To date, too few specimens have been captured in the reforested areas (of *Pinus* or of *Quercus*) to decide if polymorph frequencies might correlate with habitat.

Commentary: My study of the type specimens from Venezuela did not conform to Rivero's reports. The papilla (or tubercle) at the tip of the snout was seen in only the types of *E. pulidoi* and *E. tubernasus*. **Rivero** (1984) reported a cladogram relating the taxa as follows: (((*pulidoi tubernasus*) *chlorosoma*) *prolixodiscus*). He considered the following characters as derived: (a) nuchal depression, (b) tubercular skin, (c) granular loreal region, (d) tympanum close to eye, (e) metatarsal tubercle prominent, (f) cutaneous folds on digits, (g) black testes, and (h) tarsal tubercles. The types of *E. chlorosoma* have a pointed snout but lack a terminal papilla (a character not included in his analysis). Only females are available for *E. pulidoi*, hence, it is not possible to report pigmentation of the mesorchium for this taxon (character g). White testes must be considered as primitive within the genus *Eleutherodactylus* (**Lynch**, 1993), hence this character is *contra* Rivero's hypothesis. Rivero opined that characters b, c, e, f, and h supported his hypothesis but did not recognize that characters a, f, and g were against it. Rivero had no evidence available to assert that *E. chlorosoma* was more closely related to *E. pulidoi* + *E. tubernasus*, except using a most parsimonious treatment of (a), where the derived condition must be reversed in *E. pulidoi* (a claim never made by Rivero).

Based on published results, there seems no reason to doubt Rivero's arguments. However, my study of his specimens (and many others) reveals that the "nuchal depression" (a) cannot be recognized as a character and the distance between the eye and tympanum (d) is equal for all four taxa. This means that *E. pulidoi* and *E. tubernasus* cannot be distinguished. Furthermore, *E. chlorosoma* and *E. prolixodiscus* are united by sharing black mesorchia (a derived character achieved repeatedly in *Eleutherodactylus*, and other frogs).

Rivero (1984) was a victim of an error that **Lynch** (1978) reported—that frogs (*E. prolixodiscus*) from Santander were conspecific with frogs from Magdalena. Nevertheless, Rivero made additional errors (in distinguishing *E. chlorosoma* from whoever's *E. prolixodiscus* and in distinguishing *E. pulidoi* from *E. tubernasus*) and in grouping the two (or four) taxa. Among all the specimens reported by **Lynch** (1978), **Lynch & Ruiz** (1985), and **Rivero** (1984), there are only three species—*E. prolixodiscus* (in Colombia and Venezuela), *E. tayrona*

(endemic to the Sierra Nevada de Santa Marta), and *E. tubernasus* (Colombia and Venezuela)—*E. chlorosoma* and *E. pulidoi* are synonyms of other species.

Necessary taxonomic housecleaning

Eleutherodactylus chlorosoma Rivero 1984

This taxon was recognized by **Rivero** (1984) because it exhibited two characters (a) nuchal depression and (f) lateral fringes on the digits. I do not recognize a nuchal depression as a character and attribute the digital fringe character to Rivero's confusion as to what is *E. prolixodiscus* (actually, my fault, **Lynch**, 1978, for confusing *E. prolixodiscus* and *E. tayrona*). Direct comparisons of the types of *E. chlorosoma* and *E. prolixodiscus* (1992) fail to reveal any differences. Therefore, *Eleutherodactylus chlorosoma* (**Rivero**, 1984) is placed in the synonymy of *Eleutherodactylus prolixodiscus* (**Lynch**, 1978).

Eleutherodactylus pulidoi Rivero 1984

Direct comparison of the holotypes (and/or paratypes) of *E. pulidoi* and *E. tubernasus* do not reveal differences (and, additional specimens confirm this conclusion). **Rivero** (1984) claimed that the latter possessed a nuchal depression lacking in the former and that the former had a tympanum less separated from the eye than did the latter. As mentioned previously, I cannot confirm the existence of a nuchal depression (as a character) and do not see any difference in the separation of the eye and tympanum in these specimens. Accordingly, *Eleutherodactylus pulidoi* Rivero is assigned to the synonymy of *Eleutherodactylus tubernasus* Rivero (the latter has page priority over the former and is a descriptive name as well—I exercise my prerogative as first revisor, in any case).

The conclusions just presented mean that only two biological species are involved—*E. prolixodiscus* (including *E. chlorosoma*) and *E. tubernasus* (including *E. pulidoi*). However, there is at least one other species loosely involved—a species found in the cloud forest of western Santander (*E. uisae*). Even more important is the assertion (on the part of **Rivero**, 1984) that *E. prolixodiscus* and *E. tubernasus* form a group (i.e., are sister species).

My observation that *E. chlorosoma* and *E. pulidoi* do not constitute biological entities requires a summary (and I believe that such a summary begins at the level of species). I am prepared to recognize only three biological (or phylogenetic) species at this point—*E. prolixodiscus*, *E. tubernasus*, and *E. uisae*:

Eleutherodactylus prolixodiscus Lynch

This species is now known from eleven localities west of the Táchira Depression (nine localities in NE Colombia) and six localities east of the Táchira Depression on the southeastern flanks of the Cordillera de Mérida (see Specimens Examined for data). As mentioned by **Rivero** (1984), and based on my own experiences, this is a frog of bromeliads. At night, individuals can be found perched on vegetation only a short distance from a bromeliad—by day, individuals (and egg clutches) are found in the axillae of bromeliads.

Rivero (1984) reported the sizes of *E. chlorosoma* as five males 22.0–22.5 mm and 15 females 18.2–26.0 mm SVL; however, many of his specimens are immature. My study of his specimens revealed nine adult males and four other adult males were obtained from other collections. These males (all with vocal slits and all but one with nuptial pads) are 19.9–25.8 mm SVL (mean = 23.4 ± 0.4). Nearly all of Rivero's females are juveniles—only five are adults. The La Salle collection includes an additional adult female. The six adult females are 24.1–25.8 mm SVL (mean = 25.2 ± 0.3). The two males from Barinas are small (19.9–21.9 mm SVL) in comparison with the specimens from most other localities (see below, for data on specimens from Departamento Cesar, Colombia) but are otherwise indistinguishable. Taking all of the data (except Depto. Cesar) available reveals that males average 23.7 ± 0.3 mm SVL (range 19.3–25.8, N = 34) and females average 25.8 ± 0.3 mm SVL (range 24.1–28.2, N = 12).

A small collection from Departamento Cesar, Municipio de La Jagua de Ibirico, corregimiento de La Victoria de San Isidro, vereda Alto de Canta Rana, 1810–1850 m (260 kms. N of the next-nearest record), is peculiar for the small sizes of the frogs (eight males 17.8–21.9 mm SVL, six females 18.7–22.4 mm SVL). The data are even more peculiar when the frogs are separated into the two elevations—1810 m (four males 20.4–21.9 mm, three young females 21.2–21.7 mm, two gravid females 21.9–22.4 mm) and 1850 m (four males 17.8–20.4 mm, four gravid females 18.7–20.6 mm). These samples are also peculiar for the near absence of sexual dimorphism in size.

Eleutherodactylus tubernasus Rivero

This species, also a bromeliad endemic, has been found at only four localities (two in Colombia and two in Venezuela—see Specimens Examined for data) and three of these lie to the west of the Táchira Depression. As noted by **Rivero** (1984) this species is readily distinguished from *E. prolixodiscus* in having the tympanum oriented dorsolaterally rather than

laterally. Such a character is also seen in *E. lacrimosus*, a species that was not considered by Rivero—I think that *E. tubernasus* is an Andean species of the *E. lacrimosus* group. Males average 23.2 ± 0.4 mm (range 20.1—25.5, N = 14) and females 26.6 mm (range 24.8—28.3, N = 4).

***Eleutherodactylus uisae* Lynch**

See description (above).

C. A new species allied to *E. ganonotus* and *E. viridis*

***Eleutherodactylus batrachites* sp. nov.**

Holotype: ICN 47887, adult female, one of a series collected by Juan Manuel Daza and Eliana M. Muñoz 21 August 2001 (original numbers JMD 661, MHUA 1607).

Paratopotypes: ICN 47888-92 Original numbers MHUA 1605-06, 1608-10), MHUA 1572-73, 1575-76, 1578-88, 1590-97, 1600-01, 1603-04, 1775-80, 2023, UIS-A 2280, 2283, same collectors, between 13 and 21 August 2001.

Type-locality: COLOMBIA, Departamento de Norte de Santander, municipio de Cucutilla, vereda Carrizal, sitio Sisavita, 2180—2250 msnm. 7° 13' N, 72° 51' W.

Referred specimens: MHUA 1574, 1577-78, 1589, 1598, 1602, from the type-locality (all are juveniles).

Etymology: Greek, a stone of frog-green color.

Diagnosis: (1) Skin of dorsum smooth or very minutely granular, that of venter finely granular; no dorsolateral folds; (2) tympanum round, its length 1/3—3/5 eye length; (3) snout acuminate in dorsal view, protruding in lateral profile; canthus rostralis sharp, weakly concave; (4) upper eyelid narrower than IOD, without tubercles; no cranial crests; (5) vomerine odontophores very low, not evident in males; (6) long vocal slits, subgular vocal sack, nuptial pads in males; (7) first finger shorter than second, disks on fingers II-IV; (8) fingers bearing lateral fringes; (9) series of prominent, subconical ulnar tubercles; (10) conical tubercle on heel, row of subconical outer tarsal tubercles; (11) two metatarsal tubercles, inner oval, outer round, 1/3 size of inner; numerous supernumerary plantar tubercles; (12) Toe V slightly longer than Toe III, toes bearing lateral fringes, no webbing, toe disks almost as large as those of outer fingers; (13) cream above with almost no markings; venter cream with brown spots, most dense on underside of hindlegs; posterior surface of thighs brown with cream spots; green in life; (14) a minute species, males 14.0—17.0 ($x = 15.6 \pm 0.3$, N = 16) mm SVL, females 17.9—21.7 ($x = 19.9 \pm 0.3$, N = 13) mm SVL.

Although the fifth toe in *E. batrachites* is only slightly longer than the third, I consider *E. batrachites* a near relative of *E. ganonotus* and *E. viridis*. The three species share the shape of the head, size, and color in life but, none of these could be a synapomorphy—hence, my decision here is phenetic. *Eleutherodactylus batrachites* is readily distinguished from the other two by virtue of having series of ulnar and tarsal tubercles and a conical heel tubercle.

Description: Head as wide as body (males) or narrower than body (females); head slightly wider than long (males), or longer than wide (females); HW 33.3—42.8 ($x = 37.2 \pm 0.6$) % SVL in males, 32.7—36.3 ($x = 34.4 \pm 0.3$) % in females; snout acuminate in dorsal view, protruding in lateral profile; nostrils not protuberant, directed laterally; canthus rostralis sharp, slightly concave; E-N 95.0—117.6 ($x = 105.1 \pm 2.0$) % eye length in males, 111.1—136.8 ($x = 123.7 \pm 2.4$) % in females; loreal region nearly flat, sloping abruptly to lips; lips not flared; no tubercles on upper eyelid, interorbital space flat, no cranial crests; upper eyelid width 40.0—68.4 ($x = 56.6 \pm 1.9$) % IOD in males, 43.5—62.5 ($x = 53.9 \pm 1.8$) % in females; no supratympanic fold; tympanum directed laterally, round or slightly higher than long, its length 29.4—47.6 ($x = 37.6 \pm 1.4$) % eye length in males, 35.0—63.2 ($x = 47.1 \pm 2.1$) % in females; no postrectal tubercles; choanae small, round, not concealed by palatal shelf of maxillary arch; in females vomerine odontophores median and posterior to choanae, each smaller than a choana, oval, separated on midline by distance equal choana width, bearing 1 or 2 teeth, odontophores not apparent in males; posterior border of tongue with feeble notch, posterior 1/3-1/2 not adherent to floor of mouth; long vocal slits lateral to tongue; vocal sac large, subgular.

Skin of dorsum smooth but under magnification, very finely shagreen; no dorsolateral folds; skin of venter areolate; discoidal folds not apparent; no anal sheath; pair of prominent subanal tubercles; antibrachial tubercle small, large, subconical tubercles along outer edge of forearm; palmar tubercle bifid, larger than oval thenar; few supernumerary palmar tubercles, at bases of fingers II-III; subarticular tubercles round, non-pungent; narrow lateral fringes on fingers; all fingers with ventral pads (defined by circumferential grooves); disks on fingers II-IV, 1 ¼-1 ½ times width of digit below disk; first finger shorter than second; males with nuptial pads on thumbs.

Conical tubercle on heel; outer edge of tarsus with row of subconical tubercles; short inner tarsal fold on distal ¼ of tarsus; inner metatarsal tubercle 2 ½ times as long as wide, outer round, subconical, ¼ size of inner;

plantar surface bearing numerous supernumerary tubercles; basal subarticular tubercles longer than wide, distal ones round, all non-pungent; toes bearing lateral fringes but no webbing; all toes with ventral pads; disk of I not expanded, of II-V expanded ($1\frac{1}{4}$ - $1\frac{1}{2}$ width of digit below disk); tip of toe III to distal edge of penultimate subarticular tubercle of toe IV, tip of toe V to $\frac{1}{2}$ way between distal and penultimate subarticular tubercles of toe IV; heels overlapping when flexed hindlimbs held perpendicular to sagittal plane; shank 45.0–53.0 ($x = 49.8 \pm 0.6$) % SVL in males, 44.2–51.3 ($x = 47.6 \pm 0.6$) % in females.

Coloration in alcohol: Above cream with little or no trace of pattern (light stippling between eyes in some specimens); canthal stripe brown, thin; anal triangle dark brown; no limb bars except brown band across wrist; in 2003, some specimens have the cream washed with red; brown spotting on venter, underside of thighs, shanks, arm; posterior surfaces of thighs brown with irregularly shaped cream spots. The mesorchium of adult and juvenile males is black.

Coloration in life: Dorsum and upper surfaces of limbs lemon green delimited ventrally by a non-continuous chocolate brown stripe, venter transparent, flecked with white spots, throat pale yellow with small gray spots; canthal stripe chocolate brown.

Measurements of holotype in mm.: SVL 19.0, shank 9.6, HW 6.5, upper eyelid width 1.0, IOD 2.3, length of tympanum 0.8, eye length 1.8, E-N 2.1.

Natural history: Most of the available specimens are adults (males with obvious vocal sacs, gravid females) but in the MHUA sample, there are three very small juveniles (MHUA 1578, 1598, 1602). These were not sexed but measure 5.9–8.1 mm SVL. Three other juveniles are larger (MHUA 1574 and 1589, juvenile males, 13.0–13.5 mm SVL, and MHUA 1577, juvenile female, 12.5 mm SVL). The presence of reproductive adults and two classes of immature frogs, strongly suggests that reproduction in *E. batrachites* is aseasonal. *Eleutherodactylus batrachites* called during the day as well as at night but in more dense chorus during the day (however, the frogs were very cryptic by day). All specimens were found along a trail on ground covered with a moss blanket—none was found within the forest proper or open areas at the type-locality. The frogs appear to have some affinity for the moss—when sitting on/in the moss, the frogs become nearly invisible. At night, frogs were more easily seen perched on ferns, up to one meter above the ground. The collectors found *E. batrachites* to be

very abundant and report finding more than 30 in a half an hour—they declined to preserve most specimens found, assuming the species to be well-known.

During the visit to Sisavita, the site was normally shrouded in fog and most specimens were either collected under cover of fog or at night. MHUA 1600-02 were collected one morning and were found in full sun.

Remarks: My association of *E. batrachites* here with *E. ganonotus* and *E. viridis* is done in the absence of synapomorphies (and must thus be viewed with some skepticism). If my association is correct, there is another complex of frogs that exhibits as disjunct a pattern of distribution as does the *E. galdi* group (Lynch, 1996, Lynch & Rueda-A., 1997).

Discussion

With these three descriptions, the *Eleutherodactylus* fauna (found above 1000 m) of the Cordillera Oriental, climbs to 38 species (four of which, *E. cornutus*, *E. dolops*, *E. hernandezii*, and *E. pugnax*, are shared with the Cordillera Central and one, *E. w-nigrum*, is shared by all three cordilleras). The Cordillera Oriental is a massive cordillera yet its *Eleutherodactylus* fauna is impoverished in comparison with the Cordillera Central and Cordillera Occidental (each with 80 species above 1000 m).

The impoverishment of the Cordillera Oriental is probably real rather than an artifact of the intensity of investigation (I am aware of yet other undescribed species from all three cordilleras but more from the Cordillera Oriental than the others). Explaining this impoverishment remains a serious challenge for the future. The yet smaller Cordillera de Mérida (Venezuela) is also species impoverished and notably isolated from the Cordillera Oriental (they share on two species of *Eleutherodactylus*, *E. prolixodiscus* and *E. tubernasus*, each discussed in this paper).

Although one of the new species described here is from Norte de Santander, this paper hardly begins to address distribution patterns for *Eleutherodactylus* in that Departamento. Two species described herein are from the Departamento de Santander (as is the recently described *E. adercus*, Lynch, 2003). My previous fieldwork in Santander was confined to revisiting some of the localities previously studied by my deceased colleague, Pedro M. Ruiz (the area of Virolín, municipio de Charalá, 1700–2200 m and the municipio de Tona) and our joint fieldwork on the road between Bucaramanga and Cúcuta (2000–2750 m). The recent fieldwork by students from the Universidad Industrial de Santander has enlarged measurably our

understanding of the frogs of the *bosque andino* and *subpáramo* of this department. Arroyo (2002) and Suárez Badillo (2003) studied the frogs of the *Estación Experimental y Demonstrativa El Rasgón* (municipio Piedecuesta) and Gutiérrez L. (2003) frogs from *el Santuario de Fauna y Flora Guanentá—Alto Río Fonce* (municipio Charalá, above the area ["Virolín"] studied by Ruiz and his students). Five studies have been carried out (six, including the collections by Juan Manuel Daza from the Universidad de Antioquia in municipio Betulia, which remain to be studied in detail) of the frog fauna on the western face of the Cordillera Oriental in Santander. Several species suggest that this is not a single region—*E. adercus* and *E. ixalus* are known only from Betulia, positioned on an Andean spur, perhaps explaining their uniqueness; *E. anolirez*, *E. douglasi*, *E. jorgevelosai*, and *E. prolixodiscus* are known from northern transects but not from el Santuario de Fauna y Flora Guanentá—Alto Río Fonce, nor from areas lower than their apparent distributional limits; and *E. uisae*, the most common frog in the Santuario de Fauna y Flora Guanentá—Alto Río Fonce, remains endemic to the *santuario*. Some of these observations can be dismissed as results of collectors with different levels of experience and search-image, combined with microhabitat preferences (or rarity) of certain species (for example, *E. ingeri* has yet to fall into the collections of students of the UIS, an observation probably consonant with their lack of experience, but others are not be so easily dismissed). It appears certain (as certain as one can be with "negative" evidence) that *E. uisae* is not present in the seemingly equivalent forests to the north-northwest of the *Santuario de Fauna y Flora Guanentá—Alto Río Fonce* and that the *Santuario de Fauna y Flora Guanentá—Alto Río Fonce* lies beyond the distributional limits of *E. anolirez*, *E. douglasi*, and *E. prolixodiscus* (and possibly of the rare *E. jorgevelosai* as well). The northeastern extent of *E. w-nigrum* remains the forests near the town of Virolín and the absence of this species in *El Diviso*, *El Rasgón*, *el Santuario de Fauna y Flora Guanentá—Alto Río Fonce*, and Tona probably serve as evidence of a range limit.

Acknowledgments

I am grateful to William E. Duellman (University of Kansas Natural History Museum) and to Fernando Pico-Bird and Juan Rivero (Universidad de Puerto Rico) for loan of type-specimens some 10 years ago. My early access (1979-1996) to the collections of the Instituto de Ciencias Naturales was facilitated by the late Pedro M. Ruiz (before I joined it in 1997). The study of specimens (in Colombia and Venezuela) was facilitated by a sabbatical

leave granted by the University of Nebraska (1992). Study of material in the herpetological collections of the University of Antioquia was facilitated by Vivian Paéz (and her students), of those of the Universidad Industrial de Santander by Martha Patricia Ramírez (and her students), and of those of the Universidad de Los Andes (Mérida, Venezuela) by Enrique La Marca. Specimens from the Museo de La Salle (Caracas, Venezuela) were loaned by A. Paolillo.

Three persons merit special thanks. Juan Manuel Daza was especially helpful because he provided free access to his personal fieldnotes. Vivian Páez and Martha Patricia Ramírez agreed to my requests that they donate the holotypes to the collection of the Instituto de Ciencias Naturales.

Appendix (Specimens examined)

Eleutherodactylus prolixodiscus

COLOMBIA, Depto. Cesar: Municipio de La Jagua de Ibirico, correg. La Victoria de San Isidro, vereda Alto Canta Rana, 1810 m (ICN, field nos. PR 16950-8), 1850 m (ICN, field nos. PR 16966-81, 17101). Depto. Norte de Santander: Municipio Chinácota, Alto de Mejuey, 2500-2550 m (ICN 15157-73); Municipio Cucutilla, vereda Carrizal, Sisavita, 2180-2250 m (UIS-A 2275); Municipio Herrán, Parque Nacional Natural Tamá, vicinity of cabaña Orocué, 2300-2400 m (ICN 10102-19). Depto. Santander: 30 km ENE Bucaramanga, road to Cúcuta, 2485 m (KU 132724-33, holotype and paratypes of *E. prolixodiscus*); Municipio de Piedecuesta, Estación Experimental y Demostrativa El Rasgón, 2200-2400 m, 2450-3000m, 3200-3450 m (UIS-A 1159-61, 1164, 1214, 1456, 2006, 2019, 2132-33, 2135-38, 2140-43, 2145, 2147, 2149-50, 2153, 2913-23; Municipio tona, El Diviso, 1890-2050 m (ICN 15174-81).

VENEZUELA, Edo. Barinas: Altamiras, Soledad "900 m" (UPR-M 6900, 6998-99). Edo. Mérida: camino de Pregonero, Boca de Monte, 2393 m (UPR-M 4484-86, 4615-16, 4746, 5929); Selvas de San Eusebio, 2316 m (UPR-M 4958); 3 km SW Bailadores, Qda. El Capador, 2000 m (ELM 1985, 1995); carretera El Molino-Estanques, ca. Estanques, 2400 m (ELM 2438-39). Edo. Táchira: Distrito Junín, Betania (SCNLS 8383-84); camino de El Zumbador a Queniquea, 2240 m (UPR-M 4954-57, 5678); La Loma, entre El Zumbador y Queniquea, 2225 m (UPR 4960-69).

Eleutherodactylus tubernasus

COLOMBIA, Depto. Norte de Santander: Municipio Cucutilla, vereda Carrizal, Sisavita, 1950-2000 m (MHUA

1668-72, UIS-A 2284); municipio Herrán, Parque Nacional Natural Tamá, vicinity of cabaña Orocué, 2300 m (ICN 10483).

VENEZUELA, Edo. Barinas: Altamira, Soledad "900 m" (UPR-M 6894-97). Edo. Mérida: camino de Pregone-ro, Boca de Monte, 2390 m (UPR-M 4349, 4613, holotype and paratype of *E. tubernasus*). Edo. Táchira: Delicias, Matamula, 1120 m (UPR-M 6085-86, holotype and paratype of *E. pulidoi*); Laguna de García, 2.4 km del cruce vías Bailadores—Lago García—Pregonero, 1900 m (ELM 1490-96).

Literature cited

- Arroyo, S. 2002. Microhábitat, dieta y horas de actividad en especies del género *Eleutherodactylus* (Anura: Leptodactylidae) en un bosque de niebla de la Cordillera Oriental. Trabajo de grado, Universidad Industrial de Santander, xxx páginas.
- Gutiérrez-Lamas, D. L. 2003. Composición de especies, dieta, microhábitat y horas de actividad de los anuros presentes en dos tipos de bosque dentro del Santuario de Fauna y Flora Guanentá, Alto Río Fonce. Trabajo de grado, Universidad Industrial de Santander, 102 páginas.
- Lynch, J. D. 1978. A new eleutherodactyline frog from the Andes of northern Colombia (Leptodactylidae). *Copeia* 1978: 17-21.
- . 1979. A new frog species of the *Eleutherodactylus fitzingeri* group from the Pacific Andean versant in Ecuador. *Herpetologica* 35: 228-233.
- . 1993 ("1992"). Distribution and variation in a Colombian frog, *Eleutherodactylus erythropleura* (Amphibia: Leptodactylidae). *Studies of the Neotropical Fauna and Its Environment* 27: 211-226.
- . 1994. Two new species of the *Eleutherodactylus conspicillatus* group from the Cordillera Oriental of Colombia (Amphibia: Leptodactylidae). *Rev. Acad. Colomb. Cienc. Ex., Fís. Nat.* 19: 187-193.
- . 1996. New frog (*Eleutherodactylus*: Leptodactylidae) from the Andes of eastern Colombia, part of a remarkable pattern of distribution. *Copeia* 1996: 103-108.
- . 1998. New species of *Eleutherodactylus* from the Cordillera Occidental of western Colombia with a synopsis of the distributions of species in western Colombia. *Rev. Acad. Colomb. Cienc. Ex., Fís. Nat.* 22: 117-148.
- . 1999. Ranas pequeñas, la geometría de evolución, y la especiación en los Andes colombianos. *Rev. Acad. Colomb. Cienc. Ex., Fís. Nat.* 23: 143-159.
- . 2003. A new species of frog from northeastern Colombia (genus *Eleutherodactylus*: Leptodactylidae). *Rev. Acad. Colomb. Cienc. Ex., Fís. Nat.* 27: 000-00.
- Lynch, J. D. & W. E. Duellman. 1997. Frogs of the genus *Eleutherodactylus* (Leptodactylidae) in western Ecuador/systematics, ecology, and biogeography. University of Kansas Natural History Museum, Special Publication (23): 1-236.
- Lynch, J. D. & J. V. Rueda-Almonacid. 1997. Three new frogs (*Eleutherodactylus*: Leptodactylidae) from cloud forests in eastern Departamento de Caldas, Colombia. *Rev. Acad. Colomb. Cienc. Ex., Fís. Nat.* 21: 131-142.
- Lynch, J. D. & P. M. Ruiz-C. 1985. A synopsis of the frogs of the genus *Eleutherodactylus* from the Sierra Nevada de Santa Marta, Colombia. *Occasional Papers of the Museum of Zoology, University of Michigan* (711): 1-59.
- Lynch, J. D., P. M. Ruiz-C. & M. C. Ardila-R. 1997. Biogeographic patterns of Colombian frogs and toads. *Rev. Acad. Colomb. Cienc. Ex., Fís. Nat.* 21: 237-248.
- Lynch, J. D. & A. M. Suárez Mayorga. 2000. A new frog (*Eleutherodactylus*: Leptodactylidae) from the southern part of the Cordillera Oriental of Colombia. *Rev. Acad. Colomb. Cienc. Ex., Fís. Nat.* 24: 289-293.
- Rivero, J. A. 1984 ("1982"). Los *Eleutherodactylus* (Amphibia, Leptodactylidae) de los Andes venezolanos II: especies subparamunas. *Memorias de la Soc. Cienc. Nat. La Salle* 118: 57-132.
- Ruiz-C., P. M., M. C. Ardila-R. & J. D. Lynch. 1996. Lista actualizada de la fauna de Amphibia de Colombia. *Rev. Acad. Colomb. Cienc. Ex., Fís. Nat.* 20: 365-415.
- Suárez Badillo, H. A. 2003. Caracterización de la anurofauna de un bosque altoandino y subpáramo de la Cordillera Oriental en el Departamento de Santander, Colombia. Trabajo de grado, Universidad Industrial de Santander, 130 páginas.
- Suárez-Mayorga, A. M. 2000. Lista preliminar de la fauna Amphibia presente en el transecto La Montañita—Alto de Gabinete, Caquetá, Colombia. *Rev. Acad. Colomb. Cienc. Ex., Fís. Nat.* 23 (suplemento): 395-405.

UNA NUEVA ESPECIE DE ANFIBIO (ANURA: LEPTODACTYLIDAE) DE LOS ALREDEDORES DE LA SABANA DE BOGOTÁ, COLOMBIA

por

José Vicente Rueda-Almonacid¹, John D. Lynch² & Pedro A. Galvis³

Resumen

Rueda-Almonacid, J. V., J. D. Lynch & P. A. Galvis.: Una nueva especie de anfibio (Anura: Leptodactylidae) de los alrededores de la sabana de Bogotá, Colombia. Rev. Acad. Colomb. Cienc. 27 (104): 461-466. 2003. ISSN 0370-3908.

Se nomina una especie nueva de rana, *Eleutherodactylus susaguae* sp.nov., habita en los bosques altoandinos del noroccidente de la sabana de Bogotá, aledaños a los municipios de Cogua y Facatativá en el Departamento de Cundinamarca. La especie es un miembro del subgénero *Eleutherodactylus* grupo *unistrigatus*, que parece tener afinidades con *E. anolirex* de los páramos y bosques montanos del norte de la Cordillera Oriental en los departamentos de Santander y Norte de Santander.

Palabras clave: Anfibio, Anura, Leptodactylidae, especie nueva, taxonomía, Cogua, Cundinamarca.

Abstract

A new species of frog is named, *Eleutherodactylus susaguae* sp.nov., that inhabits high Andean forests of the northwestern part of the Sabana de Bogotá, bordering the municipios de Cogua and Facatativa in the department of Cundinamarca. The species is a member of the subgenus *Eleutherodactylus* and the *unistrigatus* species group and appears to be related to *E. anolirex* of paramos and montane forests in the northern part of the Cordillera Oriental in the departments of Santander and Norte de Santander.

Key words: Amphibia, Anura, Leptodactylidae, new species, taxonomy, Cogua, Cundinamarca.

1 Conservación Internacional-Colombia, jvrueda@yahoo.com

2 Instituto de Ciencias Naturales, Universidad Nacional de Colombia, jlynch@ciencias.unal.edu.co

3 pgalvis@rocketmail.com

Introducción

En una publicación reciente sobre la herpetofauna de Bogotá y sus alrededores, **Lynch & Renjifo** (2001), registraron 24 especies de anfibios y reptiles para una amplia región de la Cordillera Oriental de los Departamentos de Cundinamarca y Boyacá, en donde citaron desde elementos propios de los pisos templados, como la serpiente venenosa conocida como talla sapa (*Bothrops microphthalmus*), sobre la cual, si bien se conocen algunos registros localizados a 2400-2600 msnm, sobre la ladera oriental de la cordillera, nunca ha sido encontrada en el altiplano, e incluyeron, así mismo, algunas especies características y exclusivas de los páramos aledaños a Bogotá como la ranita arlequín *Atelopus muisca*, e incluso mencionaron a *Centrolene geckoideum*, una rana de cristal gigante cuya población más cercana dista cerca de 200 Km., en línea recta de la capital de la República.

Es preciso aclarar que la herpetofauna (conocida hasta el momento), propia del altiplano bogotano y que habita en las praderas y las cañadas de las estribaciones de los cerros aledaños, incluye tan sólo a seis especies de anfibios anuros: *Centrolene buckleyi*, *Colostethus subpunctatus*, *Eleutherodactylus bogotensis*, *E. renjiforum*, *Hyla bogotensis* e *Hyla labialis*, una salamandra (*Bolitoglossa adspersa*) y 7 especies de reptiles, dentro de los que se encuentran 3 serpientes inofensivas: *Atractus crassicaudatus*, *Atractus werneri* (posiblemente un sinónimo de *crassicaudatus*) y *Liophis epinephelus bimaculatus*; así como 4 lagartijas: *Anadia bogotensis*, *Proctoporus striatus*, *Phenacosaurus heterodermis* y *Stenocercus trachycephalus*.

A este conjunto se deben adicionar dos especies de anuros descubiertas por un equipo de investigadores de Conservación Internacional-Colombia, en desarrollo de los estudios bioecológicos adelantados en el marco del Convenio para la conservación y el uso sostenible del Páramo de Guerrero, auspiciado por la CAR. Una de ellas, *Eleutherodactylus affinis*, se conocía previamente de los bosques altoandinos de Chingaza y El Calvario, al oriente de la capital, y de la Hacienda Barranquilla (5° 09' N, 73° 53' W), así como del municipio de Nemocón, por lo cual estos nuevos registros extienden sus límites de distribución natural hacia el complejo de los bosques altoandinos ubicados al noroccidente de Bogotá; en tanto que la segunda de ellas que resultó ser una especie no conocida para la ciencia, se describe a continuación.

Materiales y métodos

La terminología utilizada para describir los rasgos morfológicos de las ranas, sigue los criterios establecidos

por **Lynch & Duellman** (1997). Las abreviaturas empleadas en la descripción de la especie se refieren a la longitud rostro-cloacal (LRC), la anchura cefálica (AC), la longitud cefálica (LC), el diámetro del ojo (DO), la longitud de la pierna (LP), la anchura del párpado superior (AP), la distancia interorbital (DIO), el diámetro del tímpano (DT), el diámetro del ojo (DO), la distancia entre ojo y narina (DO-N). Los acrónimos identifican a las instituciones de la siguiente manera: **IAvH** = Instituto de Investigación de los Recursos Biológicos Alexander von Humboldt, de la ciudad de Villa de Leiva, Boyacá, **KU** = Universidad de Kansas, USA e **ICN** = Instituto de Ciencias Naturales-Museo de Historia Natural de la Universidad Nacional de Colombia, con sede en la ciudad de Bogotá. La sigla **VR** identifica el número de campo de José Vicente Rueda-Almonacid.

Eleutherodactylus susaguae sp.nov.

Holotipo: IAvH 6794, una hembra inmadura colectada el 21 de agosto del 2001 por José Vicente Rueda-Almonacid (identificada con el número de campo VR 5510).

Localidad Típica: Colombia, Departamento de Cundinamarca, municipio de Cogua, Vereda Rodamontal, cabeceras del río Susaguá, 2700 msnm. Coordenadas: N 05° 03' 31.4" – W 074° 01' 11.3".

Paratopotipos: IAvH 6795-6803, ICN 47712-13, obtenidos conjuntamente con el holotipo por Humberto Piñeros, Juan Carlos Jaramillo, Pedro A. Galvis y José Vicente Rueda-Almonacid.

Ejemplares referidos: KU 132720-21 procedentes de Cundinamarca, "20 km SW Facatativá, road between Anolaima and La Mesa, 2530 msnm", recolectados por Stephen Edwards en 1970.

Etimología: El epíteto específico utilizado como un sustantivo en aposición, hace referencia a la localidad típica donde fue descubierta la especie y es derivado de un vocablo muisca que significa "nube de la cordillera" y con el cual estos indígenas designaban las cañadas abrigadas que descienden o se encuentran al pie de las montañas.

Diagnos: (1) Piel del dorso con abundantes verrugas y pústulas especialmente concentradas sobre la región posterior del tronco y flancos abdominales; pliegues dorsolaterales prominentes e ininterrumpidos; pliegues transversales, diagonales y cortos sobre el dorso de la pierna; (2) tímpano, pequeño y redondeado, parcialmente visible en su mitad anterior; (3) margen del rostro redondeada en vista dorsal y en perfil lateral; (4) superfi-

cie posterior del párpado superior con 3 o 4 pequeños tubérculos, no cónicos; el ancho del párpado es inferior a la distancia interorbital; crestas craneanas ausentes; (5) odontoforos vomerinos pequeños y oblicuos; (6) machos adultos "mudos", carentes de sacos y cuerdas vocales; excrecencias nupciales ausentes sobre los dígitos manuales; (7) primer dedo manual más corto que el segundo, dígitos manuales y pediales con discos ensanchados sobre el ápice de los mismos; (8) angostos rebordes cutáneos sobre las márgenes de los dedos, (9) tubérculos del margen posterior y ventral del antebrazo pequeños, redondos y aplanados sin llegar a formar hileras o pliegues; (10) con un par de diminutos tubérculos redondos y bajos sobre el talón; (11) dos tubérculos metatarsianos, el interno grande y redondeado cerca de 6 veces el tamaño del tubérculo metatarsal externo; (12) manos y patas carentes de palmeaduras; discos de los dígitos de los miembros posteriores más pequeños que los de las manos; quinto dedo pedial más largo que el tercero; (13) coloración del dorso café-oliváceo oscuro (*Dark brownish olive*) a verde prieto, con una vistosa barra interocular negra; canto rostral y pliegue supratimpánico de color negro; vientre sepia manchado de crema; (14) adultos de tamaño moderado, tres hembras inmaduras midieron 31.34 mm de longitud rostricloacal promedio, en tanto que dos machos midieron entre 31.2 - 32.0 mm.

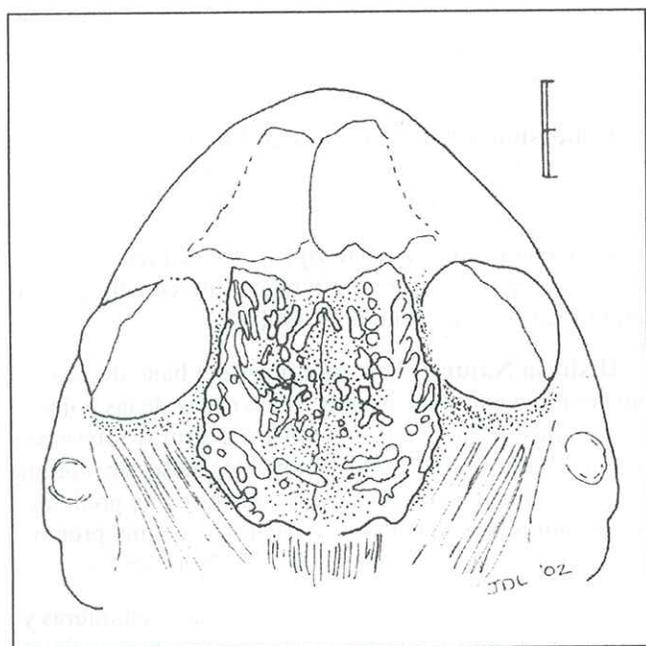


Figura 1. Vista dorsal de la cabeza de *Eleutherodactylus susaguae* mostrando la forma de los huesos frontoparietales (ICN 47712). Escala 2 mm.

Aunque *Eleutherodactylus susaguae* carece de crestas craneales, posee sus frontoparietales modificados (Figura 1), ya que estos huesos poseen sus márgenes laterales convexos y no paralelos como aparecen en la mayoría de las especies andinas relacionadas. Además, la superficie de los frontoparietales tiene tubérculos óseos especialmente concentrados hacia los lados de los mismos.

Descripción: Cabeza tan ancha como el cuerpo, su anchura excede tan sólo levemente la longitud de la misma; AC 40.73-42.18% (\bar{X} =41%) de LRC; hocico corto, la longitud ojo-narina 82.05-93.75% (\bar{X} =86%) del diámetro de la órbita; narinas muy poco prominentes ubicadas en el plano dorsolateral del rostro; margen del rostro redondeado tanto en vista dorsal como en perfil lateral, canto rostral ligeramente cóncavo, región loreal cóncava; labios no sobresalientes; párpado superior más angosto que la distancia interorbital, su anchura máxima equivale al 56-66.6% (\bar{X} =59.68%) del DIO, crestas craneales ausentes; dorso cefálico liso o con pústulas muy atenuadas; párpado superior con diminutos tubérculos bajos y aplanados ubicados sobre el margen posterolateral, sin llegar a formar un tubérculo palpebral nítido; un corto pero bien definido pliegue supratimpánico, se extiende desde el borde posterior de la órbita, descendiendo oblicuamente sobre el borde superior de la región temporal y se desvanece al nivel de los tubérculos postrictales, justo encima de ellos; membrana y anillo timpánico distintivos y visibles externamente, tímpano relativamente pequeño, de forma redondeada, parcialmente cubierto en su mitad postero-dorsal por el pliegue supratimpánico y separado del ojo por una distancia inferior a su propio diámetro; diámetro del tímpano equivalente a 35% de la longitud del ojo, tubérculos postrictales redondos, bajos aun cuando rela-



Figura 2. Fotografía de uno de los ejemplares tipos de *Eleutherodactylus susaguae*. Foto cortesía de Juan Manuel Renjifo.

tivamente bien desarrollados; lengua mucho más larga que ancha, con el borde posterior no escotado y adherida al piso de la boca en cerca de 1/3 de su longitud; odontoforos vomerinos oblicuos y prominentes, situados a nivel posterior y medial de las coanas y bien separados entre sí; coanas redondeadas no cubiertas por el arco maxilar cuando vistas desde abajo; hendiduras y cuerdas vocales ausentes en los machos adultos.

Piel de la superficie posterior del dorso con grandes pústulas semi-redondeadas y verrugas aplanadas, las más grandes están ubicadas sobre los flancos abdominales y el área perianal, las de la región posterior del cóccix son alargadas y simulan cortos pliegues sagitales; pliegue dorsolateral conspicuo y prominente en toda su longitud, extendido de manera continua desde la esquina posterior del ojo hasta el nivel superior de la ingle, no interrumpido o fragmentado posteriormente; pliegues interocular y paravertebrales ausentes; superficie postaxial del antebrazo con 3-4 diminutos y dispersos tubérculos, sin un tubérculo antebraquial definido; un discreto pliegue metatarsal interno recorre la mitad distal e interna del pie; varios pliegues transversales corren paralelos sobre el dorso de la pierna; calcar y tubérculos cónicos sobre el talón ausentes, si bien un par de tubérculos redondeados muy bajos se sitúan justo en el borde de la articulación de la pierna y el pie; superficie postaxial del tarso con pequeños tubérculos dispersos; vientre densamente granular; pliegue discoidal presente y plenamente visible posterolateralmente.

Primer dedo manual más corto que el segundo, cuando estos dos dígitos son colocados uno al lado del otro, el ápice del primero no alcanza la base de la última falange del segundo; todos los dedos poseen discos ensanchados en sus extremos, aquellos de los dígitos internos manuales redondeados y mucho más pequeños que los de los dedos externos, los cuales tienen forma truncada o levemente emarginada; cuando los discos del III y IV dedos manuales son superpuestos de manera independiente, sobre el tímpano lo cubren por completo; el conjunto de los discos manuales son mucho más grandes que los de las patas; los cojinetes digitales bien desarrollados y limitados por un surco perimetral; todos los dedos poseen angostos márgenes carnosos; palmeaduras manuales y pediales ausentes; almohadillas nupciales ausentes sobre los dígitos manuales. El V dedo del pie sobrepasa ampliamente la longitud del III, aún cuando su extremo no alcanza a llegar hasta la base del tubérculo subarticular distal del IV dígito. La longitud relativa de los dedos del pie en orden ascendente de tamaño es: $I < II < III < V < IV$; tubérculos subarticulares manuales simples y redondeados, tubérculo palmar grande y redondeado, tubérculo tenar

elongado, casi dos veces más largo que ancho, tubérculos supernumerarios manuales ausentes, pediales pequeños y numerosos; tubérculo metatarsal externo diminuto y redondeado. Miembros posteriores largos, cuando estos son colocados en posición perpendicular al eje sagital del cuerpo, los tobillos se superponen entre sí, la longitud de la tibia es igual al 53.6% de la longitud rostro-cloacal.

Coloración en etanol 70%: Dorso gris pizarra o gris oscuro con manchas negras y el pliegue dorsolateral un poco más claro. Región loreal y pliegue supratimpánico con un color contrastante negro. Labios con difusas barras oscuras. Flancos abdominales grises marmoreados de blanco. Miembros grises con difusas barras negras muy poco visibles, superficies posteriores de los muslos oscuras. Gula y muslos grises muy poco ennegrecidos, abdomen blanquecino con un grueso retículo o grandes manchas irregulares de color negro.

Coloración en vivo: Iris cobrizo, superficies dorsales con una coloración variable: castaño, café oliváceo oscuro o verde oscuro (*Dark brownish olive*) y un patrón de marcas negras consistentes en una ancha barra entre los ojos, una mancha postocular de forma de W y una mancha en forma de V invertida sobre el cóccix. Una vistosa lista de color negro cubre el canto rostral y el pliegue supratimpánico.

Los miembros posteriores poseen angostas barras diagonales oscuras y las superficies ocultas son de color sepia con (o sin) punteaduras blancas. La garganta y el vientre son de color crema con abundantes manchas irregulares café oscuras.

Dimensiones del Holotipo IAvH 6794 (mm): LRC=32.8; LP=17.4; AC=13.4; LC=13; AP=3.0; AIO=4.5; DT=1.4; DO=3.7; O-N=3.1; peso = 3.5 g.

Dimensiones de la serie típica: Las dimensiones lineales de algunos de los individuos que constituyen la serie típica se consignan en la Tabla 1.

Historia Natural: Especie arborícola baja, de actividad nocturna que suele perchar sobre el haz de las hojas y los pecíolos de la vegetación riparia a alturas inferiores de 1 m. Muestreos realizados durante los meses de febrero y agosto, durante la estación seca, mostraron un predominio de individuos inmaduros y juveniles, en una proporción aproximada de 1 adulto por cada 20 juveniles.

Los machos maduros carecen de cuerdas, hendiduras y sacos vocales por lo que se considera que esta especie es "muda", apreciación que parece confirmarla el hecho de que no se oyeran vocalizaciones durante las jornadas de muestreo. Curiosamente dos de los cuatro machos obteni-

Tabla 1. Morfometría de *Eleutherodactylus susaguae* sp. nov. Todas las dimensiones están dadas en milímetros.

EJEMPLAR	SEXO	LRC	LP	AC	LC	AP	DIO	DT	DO	D O-N
ICN 47712	Macho	31.2	16.7	12.6	11.7	2.6	4.8	1.2	3.2	3.0
IAvH 6795	Macho	32.0	17.8	13.5	12.6	3.0	4.8	1.3	3.9	3.2
IAvH 6794	Hembra juvenil	32.8	17.4	13.4	13.0	3.0	4.5	1.4	3.7	3.1
ICN 47713	Hembra juvenil	30.2	15.8	12.3	10.8	2.8	5.0	1.6	3.5	3.0
IAvH 6796	Hembra juvenil	31.0	15.6	11.9	10.0	2.7	5.0	1.3	3.3	3.0

dos, poseen los testículos completamente negros en tanto que la pigmentación de las gónadas de los otros es de color blanco.

Varias especies de anfibios conviven en simpatria con *Eleutherodactylus susaguae* y comparten el mismo hábitat, dentro de las que cabe destacar a la ranita de cristal *Centrolene buckleyi*, que percha sobre la vegetación alta en las riberas del río; *Eleutherodactylus affinis*, que gusta de la vegetación frondosa y vocaliza a alturas moderadas sobre el suelo y *E. bogotensis* que prefiere los pastizales, las áreas abiertas y los bordes del bosque.

Fisionómicamente el hábitat de *Eleutherodactylus susaguae* está constituido por pequeños remanentes de encenillo (*Weinmannia tomentosa*), en donde abundan además, como elementos arbóreos, *Drymis granadensis*, *Clusia multiflora*, *Persea ferruginea*, *Myrsine guianensis* y *Diplostephium rosmarinifolium* entre otros. En el sotobosque prosperan los culmos de chusquea o los arbustos de *Macleania rupestris* y *Cavendishia nítida*. Las enredaderas *Munnozia senecionidis* y *Berberis goudotii* son relativamente comunes en los estratos bajos y el bejuco *Cynanchum tenellum* asciende hasta el dosel (Moreno & Hernández, 2000). Estos bosquecillos persisten, por lo regular, a lo largo de las cañadas y en contrafuertes con pendientes pronunciadas en donde llegan a alcanzar una altura media de 18 m, en razón a que la mayor parte de la vegetación natural fue derribada para adecuar pastizales para la agricultura y la ganadería.

Resulta sorprendente constatar como *Eleutherodactylus susaguae* fue tan sólo avistada en las cabeceras del río Susaguá y nunca se encontró en otras comunidades de encenillo aledañas a la localidad típica o en otras microcuencas de la región.

Distribución. Especie conocida en los remanentes de bosques altoandinos de la vertiente occidental de la Cor-

dillera Oriental en el Departamento de Cundinamarca y en las reservas forestales de Zipaquirá y Cogua, a alturas comprendidas entre los 2530 y 2900 msnm.

Comentarios. En 1997, Lynch & Duellman dividieron el subgénero *Eleutherodactylus* dentro de 6 series e incluyeron en la serie *martinicensis* cerca de 200 especies de *Eleutherodactylus* de las Antillas y el noroccidente de Sudamérica. Estos autores reorganizaron el grupo *devillei* y excluyeron del mismo a *E. anolirex*, *E. briceni*, *E. permixtus* y *E. supernatis*, los cuales fueron transferidos al grupo *unistrigatus*.

Eleutherodactylus susaguae es un miembro del grupo *unistrigatus*, tal como fue definido por Lynch (1976), y representa la séptima especie conocida del ensamble *vertebralis* o *devillei* (subunidad de un grupo de especies) mencionada por Lynch & Duellman (1980), el cual está constituido por: *Eleutherodactylus anolirex*, *E. briceni*, *E. devillei*, *E. permixtus*, *E. supernatis* y *E. vertebralis*.

En este momento suponemos que *E. susaguae* se encuentra más relacionado con *E. anolirex* de los páramos y bosques altoandinos de los departamentos de Santander. Sin embargo, en *E. anolirex* como en *E. permixtus* y *E. supernatis* (y la mayoría de las especies andinas), los márgenes laterales de los frontoparietales son paralelos.

Este conjunto de ranitas habitan los bosques nublados, páramos y subpáramos del norte de los Andes en Ecuador, Colombia y Venezuela, con el mayor número de especies distribuidas de manera aislada y alopatrica dentro del territorio colombiano y en donde *E. supernatis*, constituye quizás la especie más abundante en el sur de la Cordillera Central y el Macizo colombiano, la cual es reemplazada hacia el norte del Parque de Los Nevados por una especie muy cercana, *E. permixtus*; en tanto que *E. anolirex* y *E. susaguae* habitan de manera disyunta en el norte de la Cordillera Oriental, ya que el primero de ellos se conoce

del Páramo del Almorzadero y los bosques altoandinos de los departamentos de Santander y Norte de Santander, en tanto que la especie aquí descrita procede de los bosques nublados aledaños al Páramo de Guerrero en el Departamento de Cundinamarca; una quinta especie, *E. vertebralis*, se conoce tan sólo del norte del Ecuador.

Agradecimientos

Esta publicación fue desarrollada dentro del marco del convenio de cooperación suscrito entre la CAR y Conservación Internacional: "Proyecto Piloto para la Conservación del Páramo de Guerrero-Cundinamarca". Las autoridades ambientales de los municipios de Cogua y Zipaquirá, brindaron todas las facilidades para estudiar los remanentes boscosos de las reservas forestales de cada una de sus jurisdicciones.

Los colegas Alejandro Ayala, Vlasova González y Susana Díaz, adscritos al proyecto, hicieron posible las reiteradas visitas a la zona de estudio, en tanto que los doctores José Vicente Rodríguez y Víctor Hugo Vásquez, directivos de Conservación Internacional-Colombia, alentaron permanentemente la realización de la presente publicación y el Instituto de Investigación Alexander von Humboldt, facilitó material de comparación.

Una vez más el doctor Javier Rodríguez, funcionario del IDEAM y filólogo de vocación, asistió al tercer autor en la búsqueda del significado de algunos términos del lenguaje muisca y el doctor Juan Manuel Renjifo suministró la fotografía de uno de los ejemplares tipo.

Bibliografía

- Lynch, J. D. 1976. The species groups of the South American frogs of the genus *Eleutherodactylus* (Leptodactylidae). *Uni. Kansas. Mus. Nat. Hist. Occas. Pap.*, (61): 1-24.
- Lynch, J. D. & W. E. Duellman. 1980. The *Eleutherodactylus* of the Amazonian slopes of the Ecuadorian Andes (Anura: Leptodactylidae) *Uni. Kansas. Mus. Nat. Hist. Misc. Publ.*, (69): 1-86.
- . 1997. Frogs of the genus *Eleutherodactylus* (Leptodactylidae) in western Ecuador: Systematics, ecology and biogeography. *Natural History Museum of the University of Kansas, Special Publication* (23): ii + 1-236 pp.
- Lynch, J. D. & J. M. Renjifo. 2001. Guía de anfibios y reptiles de Bogotá y sus alrededores. Alcaldía Mayor de Bogotá D.C. Departamento Técnico Administrativo del Medio Ambiente. 78 pp.
- Moreno, C. & M. Hernández. 2000. Caracterización florística. "Proyecto Piloto para la Conservación del Páramo de Guerrero-Cundinamarca". Informe de avance. Conservación Internacional-Colombia-CAR. 51 pp., 9 anexos.