

## Matemáticas

### Artículo original

## Una generalización del método de Newton-Kantorovich

### A generalization of the Newton-Kantorovich method

 Guillermo Albuja-Proaño<sup>1,\*</sup>,  Miguel Murillo<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Centro de Matemática, Universidad Central del Ecuador, Quito, Ecuador

<sup>2</sup> Facultad de Ciencias, Universidad Central del Ecuador, Quito, Ecuador

### Resumen

En este artículo presentamos una generalización del clásico método de Newton-Kantorovich, el cual se usa frecuentemente para aproximar una solución de una ecuación no lineal en un espacio de Banach. Los métodos que aquí sugerimos constituyen una mejora del método iterativo de Newton. Estos nuevos esquemas se derivan a partir de la fórmula integral dada en **Argyros** (2007) (pág. 33) y en **Kelley** (1995) (pág. 65), y los esquemas numéricos clásicos de integración de funciones. Se presentan varios ejemplos que ilustran cómo el orden de convergencia experimental de los nuevos métodos es cúbico. Por último, cabe recordar que estos esquemas se utilizan para encontrar la solución numérica de una ecuación no lineal en una y dos dimensiones.

**Palabras clave:** Ecuaciones no lineales; Newton-Kantorovich; Métodos iterativos.

### Abstract

Here, we present a generalization of the classical Newton-Kantorovich method, which is frequently used to approximate a solution to a nonlinear equation in a Banach space. The methods we suggest are an improvement on the iterative Newton method. These new schemes are derived from the integral formula given in **Argyros** (2007) (p. 33), **Kelley** (1995) (p. 65), and the classical numerical schemes for function integration. Through several examples, we show how the experimental order of convergence of the new methods is cubic. These schemes are used to find the numerical solution of a nonlinear equation in one and two dimensions.

**Keywords:** Nonlinear equations; Newton-Kantorovich; Iterative methods.

### Introducción

Las ecuaciones no lineales son problemas muy comunes que aparecen frecuentemente en varias partes de la ciencia y la ingeniería. Además, juegan un papel fundamental en numerosas áreas de investigación en matemática. Es así que uno de los problemas más estudiados en análisis numérico es la aproximación de soluciones de ecuaciones no lineales. Una de las formas más generales de este problema esta dada de la siguiente manera: Sea  $V$  y  $W$  dos espacios de Banach,  $\Omega$  un conjunto convexo abierto subconjunto de  $V$  y  $F : V \longrightarrow W$  un operador no lineal, el problema consiste en

$$\begin{cases} \text{Encontrar } x \in \Omega \text{ tal que,} \\ F(x) = 0. \end{cases} \quad (1)$$

En este campo, los métodos iterativos se han convertido en herramientas computacionales importantes y útiles. Principalmente por su sencillez, eficacia y facilidad de implementación. Uno de los esquemas iterativos más importantes y conocidos para aproximar una solución del problema (1), es el clásico método de Newton-Kantorovich (**Argyros**, 2007, pág 88), (**Kelley**, 1995, pág 71), que fue propuesto en 1948 por Leonid Kantoróvich como una generalización del conocido método de Newton, en el marco de los espacios de Banach. Este

**Citación:** Albuja-Proaño G & Murillo M. Una generalización del método de Newton-Kantorovich. Revista de la Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. 49(192):629-644, julio-septiembre de 2025. doi: <https://doi.org/10.18257/raccefyn.3214>

**Editor:** Luis Carlos Arboleda Aparicio

**\*Correspondencia:**

Miguel Murillo;  
[miguel\\_fima.ldu@hotmail.com](mailto:miguel_fima.ldu@hotmail.com)

**Recibido:** 25 de abril de 2025

**Aceptado:** 17 de julio de 2025

**Publicado en línea:** 8 de agosto de 2025



Este artículo está bajo una licencia de Creative Commons Reconocimiento-NoComercial-Compartir Igual 4.0 Internacional

método es muy usado por su simplicidad y rápida tasa de convergencia ya que construye una sucesión de aproximaciones que convergen cuadráticamente a la solución. Lo que significa que, el método aproximadamente duplica el número de decimales correctos o dígitos significativos en cada iteración.

Muchas variantes del método de Newton se han propuesto y estudiado por varios autores como por ejemplo (Schneebeli & Wihler, 2011), (Amrein & Wihler, 2014), (Amrein & Wihler, 2015), (Amrein & Hilber, 2020), (Amrein, 2021), que investigaron una generalización del esquema de Newton llamado método de Newton continuo, en (Jacobsen, Lewis, & Tennis, 2007) se propone varios esquemas derivados de este método para los complejos, otras variante fueron propuestas en (de los Angeles Martínez & Fernandez, 2019), (Grau & Noguera, 2004).

Algunos investigadores han introducido y estudiado otros métodos iterativos para resolver el problema (1), muchos de ellos en espacios de Banach como por ejemplo (Zhao & Wu, 2009), (Heid & Wihler, 2020a), (Cárdenas, Castro, & Sierra, 2020), y otros para ecuaciones no lineales en una sola dimensión como (Weerakoon & Fernando, 2000), (Kou, Li, & Wang, 2007), (Bi, Ren, & Wu, 2009), (Thukral & Petković, 2010), (Petković & Petković, 2010) y (McDougall & Wotherspoon, 2014). Muchos métodos iterativos se han desarrollado para resolver numéricamente ecuaciones diferenciales no lineales por ejemplo (Chaillou & Suri, 2006), (Amrein & Wihler, 2015), (Heid & Wihler, 2020a) y (Heid & Wihler, 2020b).

En los últimos años se han propuesto algunos métodos multipaso, ver por ejemplo (Weerakoon & Fernando, 2000), (Amat & Busquier, 2006), (Kou, Li, & Wang, 2007), (Argyros & Chen, 2009), (Argyros & Ren, 2009), (Zhao & Wu, 2009), (Bi, Ren, & Wu, 2009), (Petković & Petković, 2010), (Amat *et al.*, 2010), (Thukral & Petković, 2010), (Soleymani, Khattri, & Vanani, 2012), (McDougall & Wotherspoon, 2014) (de los Angeles Martínez & Fernandez, 2019), (Cárdenas, Castro, & Sierra, 2020), (Ezquerro *et al.*, 2023), y sus referencias. Aunque los métodos de varios pasos (Amorós-Canet, 2020) ofrecen una convergencia de alto orden para resolver ecuaciones no lineales, la mayoría tiene la desventaja de requerir la evaluación de derivadas de mayor orden, lo que en general puede ser computacionalmente costoso. En contraste con esto, los métodos de dos pasos, estudiados por ejemplo en (Weerakoon & Fernando, 2000), (Amat & Busquier, 2006), (Kou, Li, & Wang, 2007), (Argyros & Ren, 2009), (Zhao & Wu, 2009), (Petković & Petković, 2010), (McDougall & Wotherspoon, 2014) y (Cárdenas, Castro, & Sierra, 2020), tienen la ventaja de requerir solo la evaluación de la función y su primera derivada en cada iteración, y ofrecen una convergencia de mayor orden que el método de Newton. Motivados por estos trabajos, proponemos una generalización del esquema de Newton-Kantorovich que nos permite obtener varios métodos iterativos de dos pasos para aproximar una solución del problema (1); discutimos los métodos y comparamos su orden de convergencia experimental, así como su índice de eficiencia de Ostrowski-Traub. Para mayores detalles ver (Kogan *et al.*, 2017) y sus referencias.

Este artículo está organizado de la siguiente forma: En la Sección 2, introducimos una generalización del método de Newton-Kantorovich y se obtienen varios esquemas numéricos. En la Sección 3, se utilizan varios experimentos numéricos para evaluar la convergencia de los nuevos esquemas y obtener el orden de convención experimental siguiendo las ideas de (Grau-Sánchez *et al.*, 2012). Finalmente, en la Sección 4 se realizan algunos comentarios finales sobre los métodos iterativos.

## Nuevos esquemas tipo Newton de dos pasos

Usando la fórmula integral dada en (Argyros, 2007, pág 33), (Kelley, 1995, pág 65). La ecuación del problema (1), puede ser escrita de la siguiente forma:

$$F(\hat{x}) = F(x_n) + \int_0^1 F'(x_n + t(\hat{x} - x_n))(\hat{x} - x_n) dt = 0, \quad (2)$$

donde  $x_n \in \Omega$ ,  $\hat{x}$  es la solución de (2) y  $F'$  es la derivada de Fréchet de  $F$ . A continuación, se utilizan varios métodos para aproximar la integral involucrada en (2) y de esta forma derivar varios esquemas iterativos en espacios de Banach. En consecuencia, se van a clasificar los esquemas iterativos implícitos en dos partes para estimar el valor de  $y_n$ : La Forma 1 se utilizará el esquema de Newton-Kantorovich y en la Forma 2, se utiliza el mismo esquema definido en esa subsección para estimar el valor de  $y_n$ . Para una descripción detallada de los esquemas de integración se sugiere revisar (Davis & Rabinowitz, 2007).

### 1. Regla del rectángulo

Usando uno de los métodos mas simples de integración numérica que existen llamado regla del rectángulo aplicada a la integral en la ecuación (2), se tiene que:

$$F(x_n) + F'(x_n)(\hat{x} - x_n) \approx 0,$$

de donde se obtiene inmediatamente el esquema de Newton-Kantorovich

$$x_{n+1} = x_n - (F'(x_n))^{-1} F(x_n). \quad (3)$$

Este método de integración numérica corresponde a la fórmula de cuadratura de Newton-Cotes de orden cero y es un caso particular del esquema que se encuentra detallado en (Davis & Rabinowitz, 2007, pág 57). El procedimiento anterior, está descrito con bastante detalle en (Weerakoon & Fernando, 2000), pero solo para el caso de funciones reales.

### 2. Regla del punto medio

Usando la regla de integración del punto medio en (2), se obtiene

$$F(x_n) + F'\left(\frac{x_n + \hat{x}}{2}\right)(\hat{x} - x_n) \approx 0,$$

de donde se deduce el esquema implícito siguiente:

$$x_{n+1} = x_n - \left(F'\left(\frac{x_n + x_{n+1}}{2}\right)\right)^{-1} F(x_n). \quad (4)$$

Se puede obtener un esquema explícito de dos pasos estimando el valor de  $x_{n+1}$  por  $y_n$ . Así, se obtienen dos esquemas iterativos de dos pasos:

La Forma 1 se construye mediante la aplicación del método de Newton-Kantorovich (3):

$$\begin{cases} y_n = x_n - (F'(x_n))^{-1} F(x_n), \\ x_{n+1} = x_n - \left(F'\left(\frac{x_n + y_n}{2}\right)\right)^{-1} F(x_n). \end{cases}$$

Por otro lado, la Forma 2 se obtiene al utilizar el mismo esquema (4) para la estimación de  $y_n$ , pero evaluando la derivada en un punto anterior:

$$\begin{cases} y_n = x_n - \left(F'\left(\frac{x_{n-1} + y_{n-1}}{2}\right)\right)^{-1} F(x_n), \\ x_{n+1} = x_n - \left(F'\left(\frac{x_n + y_n}{2}\right)\right)^{-1} F(x_n), \end{cases}$$

donde  $x_0 \in \Omega \subset V$  es un punto dado y  $y_0 = x_0 - (F'(x_0))^{-1} F(x_0)$ . Este último esquema fue estudiado para problemas unidimensionales en (McDougall & Wotherpoon, 2014), y para el caso general en espacios de Banach en (Cárdenas, Castro, & Sierra, 2020).

### 3. Método del Trapecio

Aplicando el método de integración de los trapecios en (2), se deduce que

$$F(x_n) + \frac{1}{2} [F'(x_n) + F'(\hat{x})] (\hat{x} - x_n) \approx 0,$$

de donde se obtiene el esquema implícito siguiente:

$$x_{n+1} = x_n - 2 [F'(x_n) + F'(x_{n+1})]^{-1} F(x_n).$$

En consecuencia, la Forma 1, construida a partir del método de Newton-Kantorovich, da lugar a un esquema iterativo de dos pasos:

$$\begin{cases} y_n = x_n - (F'(x_n))^{-1} F(x_n), \\ x_{n+1} = x_n - 2 [F'(x_n) + F'(y_n)]^{-1} F(x_n). \end{cases}$$

Este método fue estudiado en (Weerakoon & Fernando, 2000), únicamente para problemas unidimensionales. De manera análoga, la Forma 2 conduce a un nuevo método iterativo de dos pasos, al reutilizar el mismo esquema para la estimación de  $y_n$ :

$$\begin{cases} y_n = x_n - 2 [F'(x_{n-1}) + F'(y_{n-1})]^{-1} F(x_n), \\ x_{n+1} = x_n - 2 [F'(x_n) + F'(y_n)]^{-1} F(x_n), \end{cases}$$

donde  $x_0 \in \Omega \subset V$  es un punto dado y  $y_0 = x_0 - (F'(x_0))^{-1} F(x_0)$ . Estos esquemas iterativos que se presentan, aún no han sido reportados, y se analizará en las siguientes secciones.

### 4. Método de Simpson 1/3

Aplicando el clásico método de integración de Simpson  $\frac{1}{3}$  en (2), se deduce

$$F(x_n) + \frac{1}{6} \left[ F'(x_n) + 4F' \left( \frac{x_n + \hat{x}}{2} \right) + F'(\hat{x}) \right] (\hat{x} - x_n) \approx 0,$$

de donde se obtiene el esquema implícito siguiente:

$$x_{n+1} = x_n - 6 \left[ F'(x_n) + 4F' \left( \frac{x_n + x_{n+1}}{2} \right) + F'(x_{n+1}) \right]^{-1} F(x_n).$$

En consecuencia, la Forma 1, construida a partir del método de Newton-Kantorovich, da lugar a un esquema iterativo de dos pasos:

$$\begin{cases} y_n = x_n - (F'(x_n))^{-1} F(x_n), \\ x_{n+1} = x_n - 6 \left[ F'(x_n) + 4F' \left( \frac{x_n + y_n}{2} \right) + F'(y_n) \right]^{-1} F(x_n). \end{cases}$$

La Forma 2 conduce a un nuevo método iterativo de dos pasos, al reutilizar el mismo esquema para la estimación de  $y_n$ :

$$\begin{cases} y_n = x_n - 6 \left[ F'(x_{n-1}) + 4F' \left( \frac{x_{n-1} + y_{n-1}}{2} \right) + F'(y_{n-1}) \right]^{-1} F(x_n), \\ x_{n+1} = x_n - 6 \left[ F'(x_n) + 4F' \left( \frac{x_n + y_n}{2} \right) + F'(y_n) \right]^{-1} F(x_n), \end{cases}$$

donde  $x_0 \in \Omega \subset V$  es un punto dado y  $y_0 = x_0 - (F'(x_0))^{-1} F(x_0)$ .

## 5. Método de Simpson 3/8

Aplicando el método de integración de Simpson  $\frac{3}{8}$  en (2), se deduce

$$F(x_n) + \frac{1}{8} \left[ F'(x_n) + 3F' \left( \frac{2}{3}x_n + \frac{1}{3}\hat{x} \right) + 3F' \left( \frac{1}{3}x_n + \frac{2}{3}\hat{x} \right) + F'(\hat{x}) \right] (\hat{x} - x_n) \approx 0,$$

de donde se obtiene el esquema implícito siguiente:

$$x_{n+1} = x_n - 8 \left[ F'(x_n) + 3F' \left( \frac{2}{3}x_n + \frac{1}{3}x_{n+1} \right) + 3F' \left( \frac{1}{3}x_n + \frac{2}{3}x_{n+1} \right) + F'(x_{n+1}) \right]^{-1} F(x_n).$$

En consecuencia, la Forma 1, construida a partir del método de Newton-Kantorovich, da lugar a un esquema iterativo de dos pasos:

$$\begin{cases} y_n = x_n - (F'(x_n))^{-1} F(x_n), \\ x_{n+1} = x_n - 8 \left[ F'(x_n) + 3F' \left( \frac{2}{3}x_n + \frac{1}{3}y_n \right) + 3F' \left( \frac{1}{3}x_n + \frac{2}{3}y_n \right) + F'(y_n) \right]^{-1} F(x_n). \end{cases}$$

La Forma 2 conduce a un nuevo método iterativo de dos pasos, al reutilizar el mismo esquema para la estimación de  $y_n$ :

$$\begin{cases} y_n = x_n - 8 \left[ F'(x_{n-1}) + 3F' \left( \frac{2}{3}x_{n-1} + \frac{1}{3}y_{n-1} \right) + 3F' \left( \frac{1}{3}x_{n-1} + \frac{2}{3}y_{n-1} \right) + F'(y_{n-1}) \right]^{-1} F(x_n), \\ x_{n+1} = x_n - 8 \left[ F'(x_n) + 3F' \left( \frac{2}{3}x_n + \frac{1}{3}y_n \right) + 3F' \left( \frac{1}{3}x_n + \frac{2}{3}y_n \right) + F'(y_n) \right]^{-1} F(x_n), \end{cases}$$

donde  $x_0 \in \Omega \subset V$  es un punto dado y  $y_0 = x_0 - (F'(x_0))^{-1} F(x_0)$ .

## 6. Puntos de Gauss

En el método de los puntos de Gauss, se realiza un cambio de variable en la integral de (2), obteniendo

$$F(\hat{x}) = F(x_n) + \frac{1}{2} \int_{-1}^1 F' \left( x_n + \frac{t+1}{2} (\hat{x} - x_n) \right) (\hat{x} - x_n) dt = 0. \quad (5)$$

En consecuencia, si se utiliza en esta integral el métodos de puntos Gauss, con un solo punto de interpolación, se obtiene el esquema iterativo de la Regla del punto medio (4). Por consiguiente, se van a determinar nuevos esquemas utilizando los puntos de Gauss, hasta 3 puntos de interpolación.

### 6.1. Método de Gauss con dos puntos

Aplicando el método de Gauss de dos puntos en (5), se obtiene

$$F(x_n) + \frac{\hat{x} - x_n}{2} \cdot \left[ F' \left( x_n + \left( \frac{-\sqrt{3}+3}{6} \right) \cdot (\hat{x} - x_n) \right) + F' \left( x_n + \left( \frac{\sqrt{3}+3}{6} \right) \cdot (\hat{x} - x_n) \right) \right] \approx 0,$$

de donde se obtiene el esquema implícito siguiente:

$$x_{n+1} = x_n - 2 \left[ F' \left( x_n + \left( \frac{-\sqrt{3}+3}{6} \right) \cdot (x_{n+1} - x_n) \right) + F' \left( x_n + \left( \frac{\sqrt{3}+3}{6} \right) \cdot (x_{n+1} - x_n) \right) \right]^{-1} F(x_n).$$

En consecuencia, la Forma 1, construida a partir del método de Newton-Kantorovich, da lugar a un esquema iterativo de dos pasos:

$$\begin{cases} y_n = x_n - (F'(x_n))^{-1} F(x_n), \\ x_{n+1} = x_n - 2 \left[ F' \left( x_n + \left( \frac{-\sqrt{3}+3}{6} \right) \cdot (y_n - x_n) \right) \right. \\ \left. + F' \left( x_n + \left( \frac{\sqrt{3}+3}{6} \right) \cdot (y_n - x_n) \right) \right]^{-1} F(x_n). \end{cases}$$

La Forma 2 conduce a un nuevo método iterativo de dos pasos, al reutilizar el mismo esquema para la estimación de  $y_n$ :

$$\begin{cases} y_n = x_n - 2 \left[ F' \left( x_{n-1} + \left( \frac{-\sqrt{3}+3}{6} \right) \cdot (y_{n-1} - x_{n-1}) \right) \right. \\ \left. + F' \left( x_{n-1} + \left( \frac{\sqrt{3}+3}{6} \right) \cdot (y_{n-1} - x_{n-1}) \right) \right]^{-1} F(x_n), \\ x_{n+1} = x_n - 2 \left[ F' \left( x_n + \left( \frac{-\sqrt{3}+3}{6} \right) \cdot (y_n - x_n) \right) \right. \\ \left. + F' \left( x_n + \left( \frac{\sqrt{3}+3}{6} \right) \cdot (y_n - x_n) \right) \right]^{-1} F(x_n), \end{cases}$$

donde  $x_0 \in \Omega \subset V$  es un punto dado y  $y_0 = x_0 - (F'(x_0))^{-1} F(x_0)$ .

## 6.2 Método de Gauss con 3 puntos

Aplicando el método de Gauss de tres puntos en (5), se obtiene

$$\begin{aligned} F(x_n) + \frac{(\hat{x} - x_n)}{18} \cdot \left[ 5 \cdot F' \left( x_n + \left( \frac{-0.7745966692 + 1}{2} \right) \cdot (\hat{x} - x_n) \right) \right. \\ \left. + 5 \cdot F' \left( x_n + \left( \frac{0.7745966692 + 1}{2} \right) \cdot (\hat{x} - x_n) \right) \right. \\ \left. + 8 \cdot F' \left( \frac{\hat{x} + x_n}{2} \right) \right] \approx 0, \end{aligned}$$

de donde se obtiene el esquema implícito siguiente:

$$\begin{aligned} x_{n+1} = x_n - 18 \left[ 5 \cdot F' \left( x_n + \left( \frac{-0.7745966692 + 1}{2} \right) \cdot (x_{n+1} - x_n) \right) \right. \\ \left. + 5 \cdot F' \left( x_n + \left( \frac{0.7745966692 + 1}{2} \right) \cdot (x_{n+1} - x_n) \right) \right. \\ \left. + 8 \cdot F' \left( \frac{x_{n+1} + x_n}{2} \right) \right]^{-1} F(x_n). \end{aligned}$$

En consecuencia, la Forma 1, construida a partir del método de Newton-Kantorovich, da lugar a un esquema iterativo de dos pasos:

$$\begin{cases} y_n = x_n - (F'(x_n))^{-1} F(x_n), \\ x_{n+1} = x_n - 18 \cdot \left[ 5 \cdot F' \left( x_n + \left( \frac{-0.7745966692 + 1}{2} \right) \cdot (y_n - x_n) \right) \right. \\ \left. + 5 \cdot F' \left( x_n + \left( \frac{0.7745966692 + 1}{2} \right) \cdot (y_n - x_n) \right) \right. \\ \left. + 8 \cdot F' \left( \frac{y_n + x_n}{2} \right) \right]^{-1} F(x_n). \end{cases}$$

La Forma 2 conduce a un nuevo método iterativo de dos pasos, al reutilizar el mismo esquema para la estimación de  $y_n$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} y_n = x_n - 18 \cdot \left[ 5 \cdot F' \left( x_{n-1} + \left( \frac{-0.7745966692 + 1}{2} \right) \cdot (y_{n-1} - x_{n-1}) \right) \right. \\ \quad \left. + 5 \cdot F' \left( x_{n-1} + \left( \frac{0.7745966692 + 1}{2} \right) \cdot (y_{n-1} - x_{n-1}) \right) \right. \\ \quad \left. + 8 \cdot F' \left( \frac{y_{n-1} + x_{n-1}}{2} \right) \right]^{-1} F(x_n), \\ x_{n+1} = x_n - 18 \cdot \left[ 5 \cdot F' \left( x_n + \left( \frac{-0.7745966692 + 1}{2} \right) \cdot (y_n - x_n) \right) \right. \\ \quad \left. + 5 \cdot F' \left( x_n + \left( \frac{0.7745966692 + 1}{2} \right) \cdot (y_n - x_n) \right) \right. \\ \quad \left. + 8 \cdot F' \left( \frac{y_n + x_n}{2} \right) \right]^{-1} F(x_n), \end{array} \right.$$

donde  $x_0 \in \Omega \subset V$  es un punto dado y  $y_0 = x_0 - (F'(x_0))^{-1} F(x_0)$ .

## 7. Método NK1

En este método NK1, se utiliza una fórmula desarrollada en (Al-Karamy & Alsharif, 2020) para la aproximación de la integral de la ecuación (2), con lo cual se obtiene

$$F(x_n) + \frac{1}{6} \left[ 4 \cdot \left( F' \left( \frac{3}{4}x_n + \frac{1}{4}\hat{x} \right) + F' \left( \frac{1}{4}x_n + \frac{3}{4}\hat{x} \right) \right) - 2F' \left( \frac{x_n + \hat{x}}{2} \right) \right] (\hat{x} - x_n) \approx 0,$$

de donde se deduce el esquema implícito siguiente:

$$x_{n+1} = x_n - 6 \left[ 4 \cdot \left( F' \left( \frac{3}{4}x_n + \frac{1}{4}x_{n+1} \right) + F' \left( \frac{1}{4}x_n + \frac{3}{4}x_{n+1} \right) \right) - 2F' \left( \frac{x_n + x_{n+1}}{2} \right) \right]^{-1} F(x_n),$$

En consecuencia, la Forma 1, construida a partir del método de Newton-Kantorovich, da lugar a un esquema iterativo de dos pasos:

$$\left\{ \begin{array}{l} y_n = x_n - (F'(x_n))^{-1} F(x_n), \\ x_{n+1} = x_n - 6 \cdot \left[ 4 \cdot \left( F' \left( \frac{3}{4}x_n + \frac{1}{4}y_n \right) + F' \left( \frac{1}{4}x_n + \frac{3}{4}y_n \right) \right) - 2F' \left( \frac{x_n + y_n}{2} \right) \right]^{-1} F(x_n). \end{array} \right.$$

La Forma 2 conduce a un nuevo método iterativo de dos pasos, al reutilizar el mismo esquema para la estimación de  $y_n$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} y_n = x_n - 6 \cdot \left[ 4 \cdot \left( F' \left( \frac{3}{4}x_{n-1} + \frac{1}{4}y_{n-1} \right) + F' \left( \frac{1}{4}x_{n-1} + \frac{3}{4}y_{n-1} \right) \right) - 2F' \left( \frac{x_{n-1} + y_{n-1}}{2} \right) \right]^{-1} F(x_n) \\ x_{n+1} = x_n - 6 \cdot \left[ 4 \cdot \left( F' \left( \frac{3}{4}x_n + \frac{1}{4}y_n \right) + F' \left( \frac{1}{4}x_n + \frac{3}{4}y_n \right) \right) - 2F' \left( \frac{x_n + y_n}{2} \right) \right]^{-1} F(x_n), \end{array} \right.$$

donde  $x_0 \in \Omega \subset V$  es un punto dado y  $y_0 = x_0 - (F'(x_0))^{-1} F(x_0)$ .

## 8. Método de Romberg

El método de Romberg es una técnica de integración numérica que combina la extrapolación de Richardson con la regla del trapecio para mejorar la precisión de la aproximación de una integral definida. Para desarrollar la fórmula del método de Romberg con  $n = 4$  en la integral de la ecuación (2), note que

$$F(x_n) + \frac{1}{90} \left[ 7F'(x_n) + 32F' \left( \frac{1}{4}x_n + \frac{3}{4}\hat{x} \right) + 12F' \left( \frac{x_n + \hat{x}}{2} \right) + 32F' \left( \frac{3}{4}x_n + \frac{1}{4}\hat{x} \right) + 7F'(\hat{x}) \right] (\hat{x} - x_n) \approx 0,$$

de donde se obtiene el esquema implícito siguiente:

$$x_{n+1} = x_n - 90 \left[ 7F'(x_n) + 32F' \left( \frac{1}{4}x_n + \frac{3}{4}x_{n+1} \right) + 12F' \left( \frac{x_n + x_{n+1}}{2} \right) + 32F' \left( \frac{3}{4}x_n + \frac{1}{4}x_{n+1} \right) + 7F'(x_{n+1}) \right]^{-1} F(x_n).$$

En consecuencia, la Forma 1, construida a partir del método de Newton-Kantorovich, da lugar a un esquema iterativo de dos pasos:

$$\begin{cases} y_n = x_n - (F'(x_n))^{-1} F(x_n), \\ x_{n+1} = x_n - 90 \left[ 7F'(x_n) + 32F' \left( \frac{1}{4}x_n + \frac{3}{4}y_n \right) + 12F' \left( \frac{x_n + y_n}{2} \right) + 32F' \left( \frac{3}{4}x_n + \frac{1}{4}y_n \right) + 7F'(y_n) \right]^{-1} F(x_n). \end{cases}$$

La Forma 2 conduce a un nuevo método iterativo de dos pasos, al reutilizar el mismo esquema para la estimación de  $y_n$ :

$$\begin{cases} y_n = x_n - 90 \left[ 7F'(x_{n-1}) + 32F' \left( \frac{1}{4}x_{n-1} + \frac{3}{4}y_{n-1} \right) + 12F' \left( \frac{x_{n-1} + y_{n-1}}{2} \right) + 32F' \left( \frac{3}{4}x_{n-1} + \frac{1}{4}y_{n-1} \right) + 7F'(y_{n-1}) \right]^{-1} F(x_n), \\ x_{n+1} = x_n - 90 \left[ 7F'(x_n) + 32F' \left( \frac{1}{4}x_n + \frac{3}{4}y_n \right) + 12F' \left( \frac{x_n + y_n}{2} \right) + 32F' \left( \frac{3}{4}x_n + \frac{1}{4}y_n \right) + 7F'(y_n) \right]^{-1} F(x_n), \end{cases}$$

donde  $x_0 \in \Omega \subset V$  es un punto dado y  $y_0 = x_0 - (F'(x_0))^{-1} F(x_0)$ .

## Resultados y Discusión

### Experimentos numéricos

Se probarán los nueve métodos iterativos de dos pasos en las Formas 1 y 2 con dos ejemplos que fueron analizados en (Argyros & Chen, 2009) y (Weerakoon & Fernando, 2000). En estos ejemplos determinaremos el orden de convergencia y un número de iteraciones de cada esquema numérico. Se considera un criterio de parada en el cual emplea la solución exacta  $x_e$ , y se comparan los esquemas que utilizan la norma en  $\mathbb{R}$  y en  $\mathbb{R}^2$  estableciendo que el error de la solución aproximada satisfaga:  $\|x_n - x_e\|_{\Omega} < 10^{-15}$  y un número máximo de iteraciones de 1000. Todos los cálculos se realizaron en una notebook Dell con un procesador Intel(R) Core(TM) i3-1115G4, 8 GB de RAM y utilizamos el Software Python para todas las simulaciones.

### Ejemplo 1:

Consideramos nueve ecuaciones no lineales de variable real que tienen algunas soluciones; en este caso se comparará con la solución más cercana a la solución aproximada al esquema numérico. Observamos que algunas ecuaciones no lineales se utilizaron en (Weerakoon & Fernando, 2000) para comparar un método de orden de convergencia cúbica estudiado en ese artículo con el método clásico de Newton.



**Tabla 1.** Ejemplos del orden de convergencia computacional de varios métodos para funciones en una dimensión

| Métodos Iterativos                     |                        | Forma 1 |          | Forma 2 |          | Raíz               |
|----------------------------------------|------------------------|---------|----------|---------|----------|--------------------|
|                                        |                        | N       | O.C.C    | N       | O.C.C    |                    |
| (1) $f(x) = x^3 + 4x^2 - 10$           |                        |         |          |         |          |                    |
| $x_0 = -0.5$                           |                        |         |          |         |          |                    |
|                                        | Método del rectángulo  | 118     | 2.001787 |         |          | 1.3652300134140969 |
|                                        | Método del punto medio | 11      | 2.927467 | 91      | 2.842174 |                    |
|                                        | Método del Trapecio    | 7       | 2.962998 | 9       | 2.413360 |                    |
|                                        | Método de Simpson 1/3  | 11      | 2.962931 | 38      | 2.427136 |                    |
|                                        | Método de Simpson 3/8  | 11      | 2.962931 | 38      | 2.427136 |                    |
|                                        | Método de Gauss P2     | 11      | 2.962931 | 38      | 2.427136 |                    |
|                                        | Método de Gauss P3     | 11      | 2.962931 | 38      | 2.424053 |                    |
|                                        | Método NK1             | 11      | 2.962931 | 38      | 2.427136 |                    |
|                                        | Método de Romberg      | 67      | 1.031869 | 44      | 1.922229 |                    |
| $x_0 = 1$                              |                        |         |          |         |          |                    |
|                                        | Método del rectángulo  | 6       | 1.999575 |         |          | 1.3652300134140969 |
|                                        | Método del punto medio | 4       | 3.358756 | 5       | 2.446423 |                    |
|                                        | Método del Trapecio    | 4       | 3.329056 | 5       | 2.408121 |                    |
|                                        | Método de Simpson 1/3  | 4       | 3.348693 | 5       | 2.433327 |                    |
|                                        | Método de Simpson 3/8  | 4       | 3.348693 | 5       | 2.433327 |                    |
|                                        | Método de Gauss P2     | 4       | 3.348693 | 5       | 2.433327 |                    |
|                                        | Método de Gauss P3     | 4       | 3.348693 | 5       | 2.433327 |                    |
|                                        | Método NK1             | 4       | 3.348693 | 5       | 2.433327 |                    |
|                                        | Método de Romberg      | 28      | 1.005584 | 5       | 2.063738 |                    |
| $x_0 = 2$                              |                        |         |          |         |          |                    |
|                                        | Método del rectángulo  | 6       | 1.998934 |         |          | 1.3652300134140969 |
|                                        | Método del punto medio | 4       | 3.438683 | 5       | 2.485035 |                    |
|                                        | Método del Trapecio    | 5       | 3.404892 | 5       | 2.475681 |                    |
|                                        | Método de Simpson 1/3  | 4       | 3.426959 | 5       | 2.481708 |                    |
|                                        | Método de Simpson 3/8  | 4       | 3.426959 | 5       | 2.481708 |                    |
|                                        | Método de Gauss P2     | 4       | 3.426959 | 5       | 2.481708 |                    |
|                                        | Método de Gauss P3     | 4       | 3.426959 | 5       | 2.481708 |                    |
|                                        | Método NK1             | 4       | 3.426959 | 5       | 2.481708 |                    |
|                                        | Método de Romberg      | 29      | 0.983486 | 5       | 1.753006 |                    |
| $x_0 = -0.3$                           |                        |         |          |         |          |                    |
|                                        | Método del rectángulo  | 54      | 1.996655 |         |          | 1.3652300134140969 |
|                                        | Método del punto medio | 19      | 2.993514 | 48      | 2.431856 |                    |
|                                        | Método del Trapecio    | 7       | 3.054323 | 7       | 2.015201 |                    |
|                                        | Método de Simpson 1/3  | 5       | 2.839654 | 7       | 2.470211 |                    |
|                                        | Método de Simpson 3/8  | 5       | 2.839654 | 7       | 2.470211 |                    |
|                                        | Método de Gauss P2     | 5       | 2.839654 | 7       | 2.470211 |                    |
|                                        | Método de Gauss P3     | 5       | 2.839654 | 7       | 2.470211 |                    |
|                                        | Método NK1             | 5       | 2.839654 | 7       | 2.470211 |                    |
|                                        | Método de Romberg      | 28      | 0.966897 | 8       | 2.020011 |                    |
| (2) $f(x) = \text{sen}^2(x) - x^2 + 1$ |                        |         |          |         |          |                    |
| $x_0 = 1$                              |                        |         |          |         |          |                    |
|                                        | Método del rectángulo  | 7       | 1.999859 |         |          | 1.4044916482153411 |
|                                        | Método del punto medio | 5       | 3.027389 | 5       | 2.029363 |                    |
|                                        | Método del Trapecio    | 5       | 3.041036 | 5       | 1.807153 |                    |
|                                        | Método de Simpson 1/3  | 5       | 3.031753 | 5       | 1.964893 |                    |
|                                        | Método de Simpson 3/8  | 5       | 3.031773 | 5       | 1.964268 |                    |
|                                        | Método de Gauss P2     | 5       | 3.031816 | 5       | 1.963022 |                    |
|                                        | Método de Gauss P3     | 5       | 3.031790 | 5       | 1.963775 |                    |
|                                        | Método NK1             | 5       | 3.031823 | 5       | 1.962785 |                    |
|                                        | Método de Romberg      | 27      | 0.933203 | 6       | 2.019065 |                    |
| $x_0 = 3$                              |                        |         |          |         |          |                    |
|                                        | Método del rectángulo  | 7       | 1.999529 |         |          | 1.4044916482153411 |
|                                        | Método del punto medio | 5       | 2.908886 | 6       | 2.434955 |                    |
|                                        | Método del Trapecio    | 4       | 3.088464 | 5       | 2.694990 |                    |
|                                        | Método de Simpson 1/3  | 5       | 2.939020 | 6       | 2.435189 |                    |
|                                        | Método de Simpson 3/8  | 5       | 2.940167 | 6       | 2.435032 |                    |
|                                        | Método de Gauss P2     | 5       | 2.942411 | 6       | 2.434989 |                    |
|                                        | Método de Gauss P3     | 5       | 2.941028 | 6       | 2.434930 |                    |

|                                 |                        |    |          |   |          |                     |
|---------------------------------|------------------------|----|----------|---|----------|---------------------|
|                                 | Método NK1             | 5  | 2.942850 | 6 | 2.434914 |                     |
|                                 | Método de Romberg      | 28 | 1.132801 | 6 | 1.906298 |                     |
| (3) $f(x) = x^2 - e^x - 3x + 2$ |                        |    |          |   |          |                     |
| $x_0 = 2$                       |                        |    |          |   |          |                     |
|                                 | Método del rectángulo  | 6  | 2.000483 |   |          |                     |
|                                 | Método del punto medio | 4  | 3.306218 | 5 | 2.477307 |                     |
|                                 | Método del Trapecio    | 5  | 3.008538 | 5 | 2.328873 |                     |
|                                 | Método de Simpson 1/3  | 4  | 3.269328 | 5 | 2.412982 |                     |
|                                 | Método de Simpson 3/8  | 4  | 3.265689 | 5 | 2.413106 | 0.25753028543986073 |
|                                 | Método de Gauss P2     | 4  | 3.258350 | 5 | 2.413358 |                     |
|                                 | Método de Gauss P3     | 4  | 3.269629 | 5 | 2.413207 |                     |
|                                 | Método NK1             | 4  | 3.269629 | 5 | 2.413405 |                     |
|                                 | Método de Romberg      | 30 | 1.028661 | 5 | 1.835977 |                     |
| $x_0 = 3$                       |                        |    |          |   |          |                     |
|                                 | Método del rectángulo  | 7  | 2.000754 |   |          |                     |
|                                 | Método del punto medio | 5  | 3.385472 | 5 | 2.425419 |                     |
|                                 | Método del Trapecio    | 5  | 3.036769 | 6 | 2.235149 |                     |
|                                 | Método de Simpson 1/3  | 5  | 2.655800 | 5 | 2.889906 |                     |
|                                 | Método de Simpson 3/8  | 5  | 2.666609 | 5 | 2.891673 | 0.25753028543986073 |
|                                 | Método de Gauss P2     | 5  | 2.685914 | 5 | 2.895305 |                     |
|                                 | Método de Gauss P3     | 5  | 2.674712 | 5 | 2.893122 |                     |
|                                 | Método NK1             | 5  | 2.689225 | 5 | 2.895994 |                     |
|                                 | Método de Romberg      | 29 | 1.013196 | 6 | 2.004549 |                     |
| (4) $f(x) = \cos(x) - x$        |                        |    |          |   |          |                     |
| $x_0 = -0.3$                    |                        |    |          |   |          |                     |
|                                 | Método del rectángulo  | 6  | 1.989932 |   |          |                     |
|                                 | Método del punto medio | 5  | 3.052179 | 5 | 1.923553 |                     |
|                                 | Método del Trapecio    | 4  | 3.404689 | 5 | 2.419577 |                     |
|                                 | Método de Simpson 1/3  | 5  | 3.049556 | 5 | 2.106761 |                     |
|                                 | Método de Simpson 3/8  | 5  | 3.049342 | 5 | 2.109855 | 0.7390851332151607  |
|                                 | Método de Gauss P2     | 5  | 3.048924 | 5 | 2.115947 |                     |
|                                 | Método de Gauss P3     | 5  | 3.049177 | 5 | 2.112248 |                     |
|                                 | Método NK1             | 5  | 3.048842 | 5 | 2.117110 |                     |
|                                 | Método de Romberg      | 27 | 0.983580 | 6 | 2.011285 |                     |
| $x_0 = 1$                       |                        |    |          |   |          |                     |
|                                 | Método del rectángulo  | 5  | 1.998032 |   |          |                     |
|                                 | Método del punto medio | 4  | 3.385918 | 4 | 2.400006 |                     |
|                                 | Método del Trapecio    | 3  | 3.384686 | 4 | 2.427962 |                     |
|                                 | Método de Simpson 1/3  | 4  | 3.403739 | 4 | 2.596812 |                     |
|                                 | Método de Simpson 3/8  | 4  | 3.403730 | 4 | 2.596801 | 0.7390851332151607  |
|                                 | Método de Gauss P2     | 4  | 3.403714 | 4 | 2.596778 |                     |
|                                 | Método de Gauss P3     | 4  | 3.403724 | 4 | 2.596792 |                     |
|                                 | Método NK1             | 4  | 3.403712 | 4 | 2.596774 |                     |
|                                 | Método de Romberg      | 28 | 1.018377 | 4 | 2.400006 |                     |
| $x_0 = 1.7$                     |                        |    |          |   |          |                     |
|                                 | Método del rectángulo  | 5  | 1.990525 |   |          |                     |
|                                 | Método del punto medio | 4  | 3.713338 | 5 | 2.441520 |                     |
|                                 | Método del Trapecio    | 4  | 3.941634 | 5 | 2.368736 |                     |
|                                 | Método de Simpson 1/3  | 4  | 3.574071 | 4 | 2.681955 |                     |
|                                 | Método de Simpson 3/8  | 4  | 3.572678 | 4 | 2.680386 | 0.7390851332151607  |
|                                 | Método de Gauss P2     | 4  | 3.569864 | 4 | 2.677214 |                     |
|                                 | Método de Gauss P3     | 4  | 3.571564 | 4 | 2.679131 |                     |
|                                 | Método NK1             | 4  | 3.569328 | 4 | 2.676610 |                     |
|                                 | Método de Romberg      | 29 | 0.987558 | 5 | 1.918761 |                     |
| (5) $f(x) = (x - 1)^3 - 1$      |                        |    |          |   |          |                     |
| $x_0 = 3.5$                     |                        |    |          |   |          |                     |
|                                 | Método del rectángulo  | 8  | 1.999492 |   |          |                     |
|                                 | Método del punto medio | 6  | 2.992126 | 6 | 2.379779 |                     |
|                                 | Método del Trapecio    | 6  | 2.985496 | 7 | 2.434064 |                     |
|                                 | Método de Simpson 1/3  | 6  | 2.990191 | 6 | 2.377267 |                     |
|                                 | Método de Simpson 3/8  | 6  | 2.990191 | 6 | 2.377267 | 2.0                 |
|                                 | Método de Gauss P2     | 6  | 2.990191 | 6 | 2.377267 |                     |
|                                 | Método de Gauss P3     | 6  | 2.990191 | 6 | 2.377267 |                     |
|                                 | Método NK1             | 6  | 2.990191 | 6 | 2.377267 |                     |
|                                 | Método de Romberg      | 27 | 1.052410 | 7 | 1.956669 |                     |
| $x_0 = 2.5$                     |                        |    |          |   |          |                     |

|                                                             |                        |      |          |    |          |                     |
|-------------------------------------------------------------|------------------------|------|----------|----|----------|---------------------|
|                                                             | Método del rectángulo  | 7    | 1.998128 |    |          |                     |
|                                                             | Método del punto medio | 5    | 2.985266 | 5  | 2.449922 |                     |
|                                                             | Método del Trapecio    | 5    | 2.979137 | 5  | 2.435259 |                     |
|                                                             | Método de Simpson 1/3  | 5    | 2.983280 | 5  | 2.444696 |                     |
|                                                             | Método de Simpson 3/8  | 5    | 2.983280 | 5  | 2.444696 | 2.0                 |
|                                                             | Método de Gauss P2     | 5    | 2.983280 | 5  | 2.444696 |                     |
|                                                             | Método de Gauss P3     | 5    | 2.983280 | 5  | 2.444696 |                     |
|                                                             | Método NK1             | 5    | 2.983280 | 5  | 2.444696 |                     |
|                                                             | Método de Romberg      | 28   | 0.970379 | 5  | 1.976656 |                     |
| (6) $f(x) = x^3 - 10$                                       |                        |      |          |    |          |                     |
| $x_0 = 1.5$                                                 |                        |      |          |    |          |                     |
|                                                             | Método del rectángulo  | 7    | 2.000768 |    |          |                     |
|                                                             | Método del punto medio | 5    | 3.013936 | 5  | 2.202375 |                     |
|                                                             | Método del Trapecio    | 5    | 3.023989 | 5  | 1.979051 |                     |
|                                                             | Método de Simpson 1/3  | 5    | 3.017113 | 5  | 2.130544 |                     |
|                                                             | Método de Simpson 3/8  | 5    | 3.017113 | 5  | 2.130544 | 2.154434690031884   |
|                                                             | Método de Gauss P2     | 5    | 3.017113 | 5  | 2.130544 |                     |
|                                                             | Método de Gauss P3     | 5    | 3.017113 | 5  | 2.130544 |                     |
|                                                             | Método NK1             | 5    | 3.017113 | 5  | 2.130544 |                     |
|                                                             | Método de Romberg      | 25   | 0.932707 | 6  | 2.012653 |                     |
| (7) $f(x) = x \exp(x^2) - \sin^2(x) + 3 \cos(x) + 5$        |                        |      |          |    |          |                     |
| $x_0 = -2$                                                  |                        |      |          |    |          |                     |
|                                                             | Método del rectángulo  | 33   | 1.908396 |    |          |                     |
|                                                             | Método del punto medio | 35   | 3.281230 | 34 | 1.829848 |                     |
|                                                             | Método del Trapecio    | 36   | 2.596892 | 35 | 2.085558 |                     |
|                                                             | Método de Simpson 1/3  | 36   | 2.964147 | 33 | 2.096712 |                     |
|                                                             | Método de Simpson 3/8  | 36   | 2.965632 | 33 | 2.096710 | -1.207647827130919  |
|                                                             | Método de Gauss P2     | 36   | 2.968623 | 33 | 2.096704 |                     |
|                                                             | Método de Gauss P3     | 36   | 2.966839 | 33 | 2.096707 |                     |
|                                                             | Método NK1             | 36   | 2.969179 | 33 | 2.096703 |                     |
|                                                             | Método de Romberg      | 118  | 1.029848 | 35 | 2.200978 |                     |
| (8) $f(x) = x^2 \sin^2(x) + \exp[x^2 \cos(x) \sin(x)] - 28$ |                        |      |          |    |          |                     |
| $x_0 = 5$                                                   |                        |      |          |    |          |                     |
|                                                             | Método del rectángulo  | 91   | 1.968479 |    |          | -7.1208726199848105 |
|                                                             | Método del punto medio | 24   | 1.000051 | ND | ND       | 15852.476196217493  |
|                                                             | Método del Trapecio    | ND   | ND       | ND | ND       | NC                  |
|                                                             | Método de Simpson 1/3  | 72   | 1.000059 | ND | ND       | -12.986058716491828 |
|                                                             | Método de Simpson 3/8  | ND   | ND       | ND | ND       | NC                  |
|                                                             | Método de Gauss P2     | 82   | 1.000013 | ND | ND       | 18.56044975198646   |
|                                                             | Método de Gauss P3     | ND   | ND       | ND | ND       | NC                  |
|                                                             | Método NK1             | 94   | 2.935344 | ND | ND       | 12.114335933712576  |
|                                                             | Método de Romberg      | 1001 | 0.999964 | ND | ND       | -28.46134091825484  |
| (9) $f(x) = \exp(x^2 + 7x - 30) - 1$                        |                        |      |          |    |          |                     |
| $x_0 = 3.5$                                                 |                        |      |          |    |          |                     |
|                                                             | Método del rectángulo  | 13   | 1.999855 |    |          |                     |
|                                                             | Método del punto medio | 8    | 2.910432 | 10 | 2.399924 |                     |
|                                                             | Método del Trapecio    | 9    | 2.962434 | 11 | 2.442645 |                     |
|                                                             | Método de Simpson 1/3  | 9    | 2.993685 | 10 | 2.392948 |                     |
|                                                             | Método de Simpson 3/8  | 9    | 2.993834 | 10 | 2.392980 | 3.0                 |
|                                                             | Método de Gauss P2     | 9    | 2.993012 | 10 | 2.393046 |                     |
|                                                             | Método de Gauss P3     | 9    | 2.993451 | 11 | 2.403392 |                     |
|                                                             | Método NK1             | 9    | 2.994402 | 10 | 2.393058 |                     |
|                                                             | Método de Romberg      | 30   | 1.016734 | 10 | 1.915685 |                     |
| $x_0 = 3.25$                                                |                        |      |          |    |          |                     |
|                                                             | Método del rectángulo  | 9    | 1.998775 |    |          |                     |
|                                                             | Método del punto medio | 6    | 2.933090 | 8  | 2.444156 |                     |
|                                                             | Método del Trapecio    | 7    | 2.991491 | 8  | 2.442752 |                     |
|                                                             | Método de Simpson 1/3  | 6    | 2.895654 | 8  | 2.440973 |                     |
|                                                             | Método de Simpson 3/8  | 6    | 2.895697 | 8  | 2.440123 | 3.0                 |
|                                                             | Método de Gauss P2     | 6    | 2.895781 | 8  | 2.438418 |                     |
|                                                             | Método de Gauss P3     | 6    | 2.895731 | 8  | 2.445546 |                     |
|                                                             | Método NK1             | 6    | 2.895797 | 8  | 2.438100 |                     |
|                                                             | Método de Romberg      | 27   | 0.928468 | 8  | 1.936775 |                     |

O.C.C → Orden de Convergencia Computacional

ND → No definida

NC → No Converge

## Ejemplo 2:

Consideramos un sistema de ecuaciones no lineales de variable real, el cual tiene algunas soluciones. En este caso se comparará con la solución más cercana a la solución aproximada al esquema numérico.

$$\begin{aligned} 2x - \frac{1}{9}x^2 - y &= 0 \\ -x + 2y - \frac{1}{9}y^2 &= 0 \end{aligned} \quad (6)$$

Observamos que el sistema se utilizó en (Argyros & Chen, 2009) para comparar el método de tipo Newton-Kantorovich estudiado en ese artículo con el método clásico de Newton.

**Tabla 2.** Ejemplos del orden de convergencia computacional de un sistema de ecuaciones no lineales de variable real

| Métodos Iterativos          | Forma 1 |          | Forma 2 |          |                   |
|-----------------------------|---------|----------|---------|----------|-------------------|
|                             | N       | O.C.C    | N       | O.C.C    | Raíz              |
| $(x_0, y_0) = (11.4, 11.4)$ |         |          |         |          |                   |
| Método del rectángulo       | 5       | 1.999369 |         |          | $(x, y) = (9, 9)$ |
| Método del punto medio      | 4       | 2.365630 | 3       | 2.487628 |                   |
| Método del Trapecio         | 4       | 2.365630 | 3       | 2.487628 |                   |
| Método de Simpson 1/3       | 4       | 2.365630 | 3       | 2.487628 |                   |
| Método de Simpson 3/8       | 4       | 2.365630 | 3       | 2.487628 |                   |
| Método de Gauss P2          | 4       | 2.365630 | 3       | 2.487628 |                   |
| Método de Gauss P3          | 4       | 2.365630 | 3       | 2.487628 |                   |
| Método NK1                  | 4       | 2.365630 | 3       | 2.487628 |                   |
| Método de Romberg           | 14      | 0.999999 | 5       | 2.000002 |                   |
| $(x_0, y_0) = (5.3, 5.3)$   |         |          |         |          |                   |
| Método del rectángulo       | 7       | 1.998897 |         |          | $(x, y) = (9, 9)$ |
| Método del punto medio      | 5       | 3.018029 | 4       | 2.114003 |                   |
| Método del Trapecio         | 5       | 3.018029 | 4       | 2.114003 |                   |
| Método de Simpson 1/3       | 5       | 3.018029 | 4       | 2.114003 |                   |
| Método de Simpson 3/8       | 5       | 3.018029 | 4       | 2.114003 |                   |
| Método de Gauss P2          | 5       | 3.018029 | 4       | 2.114003 |                   |
| Método de Gauss P3          | 5       | 3.018029 | 4       | 2.114003 |                   |
| Método NK1                  | 5       | 3.018029 | 4       | 2.114003 |                   |
| Método de Romberg           | 14      | 0.999999 | 6       | 1.999996 |                   |

O.C.C → Orden de Convergencia Computacional

ND → No definida

NC → No Converge

De la Tabla 1 y la Tabla 2 podemos ver que el orden de convergencia de los métodos iterativos de dos pasos para la Forma 1 y la Forma 2, son lineales, cuadráticos, cúbicos y supercuadrática  $(1 + \sqrt{2})$ . Se presenta una tabla de resumen del orden de convergencia y índice de eficiencia de Ostrowski.

**Tabla 3.** Orden de Convergencia e Índice de Eficiencia de métodos iterativos de dos pasos

| Métodos Iterativos     | Forma 1       |       |                           | Forma 2       |                |                                      |
|------------------------|---------------|-------|---------------------------|---------------|----------------|--------------------------------------|
|                        | $\mathcal{N}$ | O.C.C | $I_E$                     | $\mathcal{N}$ | O.C.C          | $I_E$                                |
| Método del rectángulo  | 2             | 2     | $\sqrt{2} \approx 1.4142$ |               |                |                                      |
| Método del punto medio | 2             | 3     | $\sqrt{3} \approx 1.7320$ | 2             | $1 + \sqrt{2}$ | $\sqrt{1 + \sqrt{2}} \approx 1.5537$ |
| Método del Trapecio    | 2             | 3     | $\sqrt{3} \approx 1.7320$ | 2             | $1 + \sqrt{2}$ | $\sqrt{1 + \sqrt{2}} \approx 1.5537$ |

|                       |   |   |                           |   |                |                                      |
|-----------------------|---|---|---------------------------|---|----------------|--------------------------------------|
| Método de Simpson 1/3 | 2 | 3 | $\sqrt{3} \approx 1.7320$ | 2 | $1 + \sqrt{2}$ | $\sqrt{1 + \sqrt{2}} \approx 1.5537$ |
| Método de Simpson 3/8 | 2 | 3 | $\sqrt{3} \approx 1.7320$ | 2 | $1 + \sqrt{2}$ | $\sqrt{1 + \sqrt{2}} \approx 1.5537$ |
| Método de Gauss P2    | 2 | 3 | $\sqrt{3} \approx 1.7320$ | 2 | $1 + \sqrt{2}$ | $\sqrt{1 + \sqrt{2}} \approx 1.5537$ |
| Método de Gauss P3    | 2 | 3 | $\sqrt{3} \approx 1.7320$ | 2 | $1 + \sqrt{2}$ | $\sqrt{1 + \sqrt{2}} \approx 1.5537$ |
| Método NK1            | 2 | 3 | $\sqrt{3} \approx 1.7320$ | 2 | $1 + \sqrt{2}$ | $\sqrt{1 + \sqrt{2}} \approx 1.5537$ |
| Método de Romberg     | 2 | 1 | $\sqrt{1} = 1$            | 2 | 2              | $\sqrt{2} \approx 1.4142$            |

$\mathcal{N} \rightarrow$  Número de evaluaciones

O.C.C  $\rightarrow$  Orden de Convergencia Computacional

$I_E \rightarrow$  Índice de Eficiencia de Ostrowski

En el Ejemplo 1, se observa que el método del Rectángulo de la Forma 1 presenta, en algunas funciones, el mayor número de iteraciones requeridas para alcanzar la convergencia, a pesar de tener orden de convergencia cuadrático. En cambio, el método de Romberg aplicado a la Forma 1 muestra un comportamiento linealmente convergente en todos los casos, con una cantidad constante de iteraciones, lo que indica estabilidad, pero a costa de una velocidad de convergencia menor.

Por otro lado, los métodos restantes aplicados a la Forma 1 exhiben un orden de convergencia cúbico, lo cual se traduce en una convergencia más rápida. Además, mantienen un número constante de iteraciones y presentan un mejor rendimiento comparado con el método de Newton clásico, en términos tanto de eficiencia como de estabilidad numérica.

En el caso de la Forma 2, todos los métodos iterativos analizados presentan un orden de convergencia igual a  $1 + \sqrt{2} \approx 2.4142$ , valor que también ha sido reportado en la literatura para ciertos métodos modificados de tipo Newton, como en el trabajo de **McDougall and Wotherspoon**, 2014, salvo el método de Romberg, el cual alcanza una convergencia cuadrática. Nuevamente, se destaca que el número de iteraciones se mantiene constante, y el rendimiento general de los métodos supera al del método de Newton, especialmente en estabilidad frente a variaciones en las condiciones iniciales.

Un caso particular se presenta en la función 8, donde algunos métodos no logran converger. Esto se debe a la presencia de múltiples raíces, lo cual puede hacer que, dependiendo del punto inicial, el método converja a una raíz distinta o incluso diverja. Este comportamiento está relacionado con la dependencia de la derivada de la función en cada iteración, la cual no está moderada por un parámetro de amortiguamiento, lo que limita el control del comportamiento dinámico del método.

En el Ejemplo 2, se analiza el comportamiento de los métodos iterativos de dos pasos bajo dos condiciones iniciales distintas. En ambos casos, tanto en la Forma 1 como en la Forma 2, los métodos convergen exitosamente y mantienen los mismos órdenes de convergencia observados en el Ejemplo 1. Además, se confirma que una mejor elección del punto inicial (es decir, más cercano a la raíz) acelera la convergencia, debido a que la derivada de la función en las iteraciones subsecuentes se mantiene más controlada.

Asimismo, la Forma 2 demuestra un mejor índice de eficiencia computacional, dado que en cada paso se reutiliza el mismo método para el cálculo de los valores  $y_n$ , lo cual reduce el esfuerzo computacional sin sacrificar precisión.

Finalmente, al comparar todos los métodos iterativos propuestos con el método de Newton-Kantorovich clásico, se observa que los nuevos métodos presentan tanto un mayor orden de convergencia como un mejor índice de eficiencia. Incluso en casos donde el método de Newton falla en converger, los métodos propuestos logran hacerlo. Esto se debe a que las aproximaciones sucesivas aprovechan de manera más efectiva la estructura del método, en particular por utilizar el mismo esquema en el cálculo de las variables secundarias, lo que mejora la estabilidad global.

Una limitación importante de estos métodos iterativos de dos pasos es la dependencia del cálculo de la derivada de la función. Sin embargo, en comparación con métodos que no requieren derivadas, como el método de la secante, los métodos propuestos tienen un mayor orden de convergencia y, en muchos casos, un índice de eficiencia superior. Recordemos que el orden de convergencia (O.C.C) del método de la secante es:  $(1 + \sqrt{5})/2 \approx 1.6180$  y  $I_E = 1.6180$ .

## Conclusiones

Aunque el método de Newton presenta un orden de convergencia cuadrático, lo que lo hace teóricamente más rápido, su desempeño en la práctica puede verse comprometido por su alta sensibilidad a las condiciones iniciales y a la forma específica de la función. En contraste, los métodos iterativos de dos pasos analizados ofrecen mayor estabilidad frente a estas variaciones, lo que los convierte en alternativas más robustas en situaciones complejas.

Por otro lado, la incorporación de estrategias como parámetros de relajación o amortiguamiento adaptativo podría mejorar aún más la convergencia de los métodos en casos donde la función presenta múltiples raíces o derivadas oscilantes, ayudando a evitar la divergencia o la convergencia hacia soluciones no deseadas.

Finalmente, una evaluación más detallada del costo computacional total (incluya el número de evaluaciones de funciones, derivadas y operaciones por iteración) permitiría fortalecer la justificación del uso de estos métodos iterativos de dos pasos, especialmente cuando se aplican en contextos como la resolución de ecuaciones diferenciales, donde la eficiencia y estabilidad son fundamentales.

## Agradecimientos

Expresamos nuestro profundo agradecimiento a la Universidad Central del Ecuador por brindarnos el tiempo necesario y proveernos de todo el material para el desarrollo de este trabajo.

## Contribución de los autores

GAP y MM trabajaron por igual en el desarrollo teórico, diseño y programación de esquemas numéricos, análisis de resultados, conclusiones y redacción del manuscrito.

## Conflicto de intereses

Los autores declaran no tener ningún conflicto de intereses en todo lo que se refiere al contenido de este artículo.

## References

- Al-Karamy, N. A. M., Alsharify, F. H. (2020) New numerical method nk1 for calculating single integrals. *International Journal of Technology, Science and Engineering* ISSN: 2457, 33.
- Amat, S., Busquier, S. (2006) A two-step steffensen's method under modified convergence conditions. *Journal of mathematical analysis and applications*, 324(2), 1084–1092.

- Amat, S., Bermúdez, C., Busquier, S., Plaza, S.** (2010) On a third-order newton-type method free of bilinear operators. *Numerical Linear Algebra with Applications*, 17(4), 639–653.
- Amorós-Canet, C.** (2020) Estudio sobre convergencia y dinámica de los métodos de newton, stirling y alto orden.
- Amrein, M.** (2021) A global newton-type scheme based on a simplified newton-type approach. *JOURNAL OF APPLIED MATHEMATICS AND COMPUTING*, 65(1-2), 321–334. <https://doi.org/10.1007/s12190-020-01393-w>
- Amrein, M., Hilber, N.** (2020) Adaptive newton-type schemes based on projections. *International Journal of Applied and Computational Mathematics*, 6(4), 120.
- Amrein, M., Wihler, T. P.** (2014) An adaptive newton-method based on a dynamical systems approach. *COMMUNICATIONS IN NONLINEAR SCIENCE AND NUMERICAL SIMULATION*, 19(9), 2958–2973. <https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2014.02.010>
- Amrein, M., Wihler, T. P.** (2015) Fully adaptive newton-galerkin methods for semilinear elliptic partial differential equations. *SIAM JOURNAL ON SCIENTIFIC COMPUTING*, 37(4), A1637–A1657. <https://doi.org/10.1137/140983537>
- Argyros, I.** (2007) *Computational theory of iterative methods*. Elsevier.
- Argyros, I. K., Chen, J.** (2009) On local convergence of a newton-type method in banach space. *International Journal of Computer Mathematics*, 86(8), 1366–1374.
- Argyros, I. K., Ren, H.** (2009) On the convergence of modified newton methods for solving equations containing a non-differentiable term. *Journal of computational and applied mathematics*, 231(2), 897–906.
- Bi, W., Ren, H., Wu, Q.** (2009) Three-step iterative methods with eighth-order convergence for solving nonlinear equations. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 225(1), 105–112.
- Cárdenas, E., Castro, R., Sierra, W.** (2020) A newton-type midpoint method with high efficiency index. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 491(2), 124381.
- Chaillou, A. L., Suri, M.** (2006) Computable error estimators for the approximation of nonlinear problems by linearized models. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 196(1-3), 210–224.
- Davis, P. J., Rabinowitz, P.** (2007) *Methods of numerical integration*. Courier Corporation.
- de los Angeles Martinez, M., Fernandez, D.** (2019) A quasi-newton modified lp-newton method [4th International Conference on Computational and Experimental Science and Engineering (ICCESN), Kemer, TURKEY, OCT 04-08, 2017]. *OPTIMIZATION METHODS & SOFTWARE*, 34(3), 634–649. <https://doi.org/10.1080/10556788.2017.1384955>
- Ezquerro, J. A., Hernandez-Veron, M. A., Magrenan, A. A., Moysi, A.** (2023) A significant improvement of a family of secant-type methods. *JOURNAL OF COMPUTATIONAL AND APPLIED MATHEMATICS*, 424. <https://doi.org/10.1016/j.cam.2022.115002>
- Grau, M., Noguera, M.** (2004) A variant of cauchy’s method with accelerated fifth-order convergence. *Applied Mathematics Letters*, 17(5), 509–517.
- Grau-Sánchez, M., Noguera, M., Grau, À., Herrero, J. R.** (2012) On new computational local orders of convergence. *Applied Mathematics Letters*, 25(12), 2023–2030.
- Heid, P., Wihler, T. P.** (2020a) On the convergence of adaptive iterative linearized galerkin methods. *CALCOLO*, 57(3). <https://doi.org/10.1007/s10092-020-00368-4>
- Heid, P., Wihler, T. P.** (2020b) Adaptive iterative linearization galerkin methods for nonlinear problems. *MATHEMATICS OF COMPUTATION*, 89(326), 2707–2734. <https://doi.org/10.1090/mcom/3545>
- Jacobsen, J., Lewis, O., Tennis, B.** (2007) Approximations of continuous newton’s method: An extension of cayley’s problem. *Electronic Journal of Differential Equations (EJDE)[electronic only]*, 2007, 163–173.



- Kelley, C. T.** (1995) *Iterative methods for linear and nonlinear equations*. SIAM.
- Kogan, T., Sapir, L., Sapir, A., Sapir, A.** (2017) To the question of efficiency of iterative methods. *APPLIED MATHEMATICS LETTERS*, 66, 40–46. <https://doi.org/10.1016/j.aml.2016.11.006>
- Kou, J., Li, Y., Wang, X.** (2007) Some variants of ostrowski's method with seventh-order convergence. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 209(2), 153–159.
- McDougall, T. J., Wotherspoon, S. J.** (2014) A simple modification of newton's method to achieve convergence of order  $1 + \sqrt{2}$ . *APPLIED MATHEMATICS LETTERS*, 29, 20–25. <https://doi.org/10.1016/j.aml.2013.10.008>
- Petković, M. S., Petković, L. D.** (2010) Families of optimal multipoint methods for solving nonlinear equations: A survey. *Applicable Analysis and Discrete Mathematics*, 1–22.
- Schneebeli, H. R., Wihler, T. P.** (2011) The newton–raphson method and adaptive ode solvers. *Fractals*, 19(01), 87–99.
- Soleymani, F., Khattri, S. K., Vanani, S. K.** (2012) Two new classes of optimal jarratt-type fourth-order methods. *Applied mathematics letters*, 25(5), 847–853.
- Thukral, R., Petković, M.** (2010) A family of three-point methods of optimal order for solving nonlinear equations. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 233(9), 2278–2284.
- Weerakoon, S., Fernando, T.** (2000) A variant of newton's method with accelerated third-order convergence. *Applied mathematics letters*, 13(8), 87–93.
- Zhao, Y., Wu, Q.** (2009) Convergence analysis for a deformed newton's method with third-order in banach space under  $\gamma$ -condition. *International Journal of Computer Mathematics*, 86(3), 441–450.