

Artículo original

Una nota acerca del método de la función inversa de codificación de redes

A note on the inverse function method for network coding

 Victor Peña-Macías

Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá, Colombia

Resumen

La teoría de codificación de redes estudia la transmisión de mensajes a través de un grafo dirigido o red, de tal manera que los destinatarios previstos los reciban claramente. Es importante determinar la mejor forma de transmitir mensajes, lo cual se mide mediante una tasa. El método de la función inversa es una técnica que involucra la construcción de transformaciones lineales que cumplen ciertas condiciones asociadas con la topología de una red. Según la estructura de la red, el método funcionaría al producir una desigualdad propia del álgebra lineal, lo que a su vez brindaría información acerca del comportamiento de la tasa con respecto a un espacio vectorial sobre un cuerpo finito. Se demuestra aquí que el método puede usarse con la red conocida como Char-2, el cual produce una desigualdad válida en espacios vectoriales definidos sobre cuerpos de característica impar.

Palabras clave: Grafo acíclico dirigido; Transformación lineal; Codificación lineal de redes; Desigualdades rango lineales; Capacidad de red.

Abstract

Network coding focuses on studying the transmission of messages through a directed graph or network in such a way that they are received by their intended receivers. It is of interest to determine the best way to transmit messages, which is measured by a rate. The inverse function method is a technique that involves the construction of linear functions that satisfy certain conditions associated with the topology in a network. Depending on the network structure, the method could succeed in producing an inequality inherent to linear algebra, which in turn provides information about the behavior of the rate with respect to a vector space over a finite field. This paper shows that the method can be used with the network known as Char-2, resulting in a valid inequality in vector spaces defined over odd-characteristic fields.

Keywords: Directed acyclic graph; Linear function; Linear network coding; Linear rank inequality; Network capacity.

Introducción

La teoría de codificación de redes conocida en inglés como *network coding* fue introducida por Ahlswede et al. en el año 2000. En esta área se estudia un grafo dirigido o red en el cual hay ciertos nodos que poseen algunos mensajes que están siendo demandados por otros nodos. Los mensajes deben ser combinados o codificados a lo largo de la red hasta que sean decodificados por los nodos demandantes (Ahlswede et al., 2000). Existen diferentes modelos matemáticos que ofrecen una visión del estudio de este problema, haciendo uso de diversas herramientas de la teoría de grafos, topología, álgebra lineal, álgebra abstracta, teoría de modelos, teoría de números, teoría de códigos y teoría de la información. Su problema más importante consiste en determinar códigos eficientes que cumplan la demanda de todos los nodos que soliciten un mensaje. La eficiencia de un código depende de la forma de los

Citación: Peña-Macías V. Una nota acerca del método de la función inversa de codificación de redes. Revista de la Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. 48(189):936-951, octubre-diciembre de 2024. doi: <https://doi.org/10.18257/raccefyn.3018>

Editor: Jorge Cossio

***Correspondencia:**

Victor Peña-Macías;
vbpenam@udistrital.edu.co

Recibido: 30 de julio de 2024

Aceptado: 18 de noviembre de 2024

Publicado en línea: 29 de noviembre de 2024



Este artículo está bajo una licencia de Creative Commons Reconocimiento-NoComercial-Compartir Igual 4.0 Internacional

mensajes usados y se mide con una tasa; se requieren tasas de información grandes y la mejor tasa se le conoce como la capacidad de la red. La teoría de la información, mediante el concepto de entropía y las llamadas desigualdades de la información, ha sido una gran herramienta para establecer cotas o límites que deben cumplir las capacidades (**Dougherty, Freiling, & Zeger, 2007**).

Cuando los mensajes son dotados de estructuras algebraicas, tales como cuerpos, anillos o espacios vectoriales el proceso de codificación se hace más sencillo y eficiente pero sigue teniendo un amplio margen de estudio con una cantidad de problemas abiertos. Este documento está interesado en códigos con estructuras de espacios vectoriales finito dimensionales definidos sobre un cuerpo finito. Las *desigualdades de la información* tienen una estrecha relación con unas desigualdades propias del álgebra lineal conocidas como *desigualdades rango lineales* (**Shen et al., 2000**). Estas últimas son desigualdades que establecen las leyes o condiciones que deben cumplir las dimensiones de unos espacios con respecto a las dimensiones de otros. Algunos conceptos de álgebra lineal tienen su contraparte en la teoría de la información: la dimensión de un espacio es su entropía, la codimensión se interpreta como la entropía condicional y la dimensión de la intersección de subespacios como la información mutua. De ahí, las desigualdades rango lineales son importantes al estudiar la capacidad de una red cuyos códigos tienen una estructura de espacio vectorial (**Dougherty, Freiling, & Zeger, 2005**).

Existen desigualdades rango lineales que solo son válidas dependiendo de la característica del cuerpo finito del espacio vectorial. Son conocidas como *desigualdades rango lineales dependientes de la característica* (**Blasiak, Kleinberg, & Lubetzky, 2011**) y (**Dougherty, Freiling, & Zeger, 2015**). Se consideran las desigualdades ideales si se desea estudiar la capacidad de una red sobre cuerpos finitos específicos. En la literatura se han encontrado tres técnicas para producir estas desigualdades:

- La primera técnica construye desigualdades siempre que existan cierto tipo de matrices binarias (**Peña-Macias & Sarria-Zapata, 2019**) y (**Peña-Macias & Sarria, 2020**).
- La segunda técnica permite obtener una desigualdad usando algunas redes como guía del razonamiento que se debe seguir. Fue bautizado por los autores como *el método de la función inversa* debido a que usa transformaciones lineales asignadas en “sentido inverso” al flujo de mensajes en una red (**Dougherty, Freiling, & Zeger, 2015**), (**Freiling, 2014**) y (**Das & Rai, 2017**).
- La tercera técnica construye una desigualdad siempre que existan ciertos tipos de objetos de teoría de matroides y criptografía (**Peña-Macias, 2023**).

La primera y tercera técnica permiten obtener las desigualdades bajo ciertas condiciones muy concretas, pero esto no ocurre con la segunda ya que aún no ha alcanzado un grado suficiente de desarrollo: no es claro si en efecto se producirá una desigualdad. El método de la función inversa involucra a una red y una serie de lemas que garantizan la existencia de espacios vectoriales y transformaciones lineales con algunas propiedades. Lo interesante de esto es la forma en como se operan las transformaciones lineales ya que en principio el método usa la topología de la red en cuestión como guía de los razonamientos que se deben seguir. Dentro del proceso se debe definir un subespacio S que es nulo solo en cuerpos finitos de una característica en concreto. Si se logra conseguir este subespacio, entonces la desigualdad es encontrada y demostrada; de otro modo el método falla. La obtención de este subespacio no es clara y la topología de la red no ayuda en una correcta definición. Las redes usadas como guía en (**Dougherty, Freiling, & Zeger, 2015**), (**Freiling, 2014**) y (**Das & Rai, 2017**) tienen la cualidad de tener mejores capacidades sobre unos cuerpos de determinada característica que sobre otros, y puede ser una razón por la que el método tuvo éxito con estas redes. Aunque, exceptuando las redes *Fano* y *no-Fano*, estas redes fueron introducidas con el propósito de que funcionara el método.

Permanece como problema abierto si la dependencia de la capacidad de una red, sobre un cuerpo finito de determinada característica, es una condición suficiente para producir una desigualdad: si el subespacio S siempre puede ser definido en estas redes. Es por esta razón que el autor está interesado en estudiar la aplicación del método de la función inversa a nuevas redes. En (Connelly & Zeger, 2019) y (Connelly & Zeger, 2016) fueron definidas nuevas familias de redes que presentan dependencias sobre determinados cuerpos y anillos, enfatizando en una familia de redes llamada redes Char- m . Los autores definen una red Char- m para cada entero $m \geq 2$, como se muestra en la figura 1. Además, demuestran mediante razonamientos muy distantes al método de la función inversa, que esas redes tienen mejores capacidades sobre anillos cuya característica divide a m ; concretamente una capacidad de uno. En este trabajo se va a demostrar que el método de la función inversa funciona cuando $m = 2$, de este modo, se establecen bases teóricas que permiten extender el razonamiento para toda la familia de redes Char- m . Se produce una desigualdad rango lineal verdadera en espacios vectoriales definidos sobre cuerpos finito de característica impar y se obtiene de una manera alternativa, los resultados conseguidos en (Connelly & Zeger, 2019) sobre la capacidad de la red Char-2.

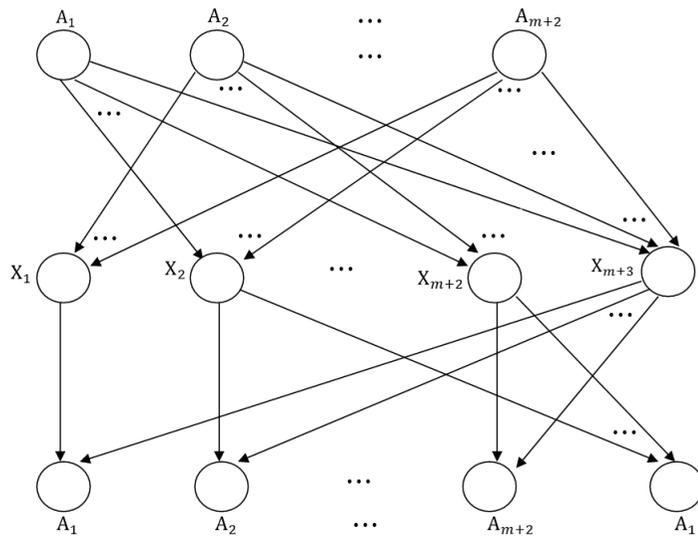


Figura 1. Red Char- m . Una red para cada entero $m \geq 2$. Alcanzan una capacidad de 1 cuando la característica del anillo de sus códigos divide a m ; de otro modo, su capacidad es inferior.

Organización del trabajo: primero se hace una breve introducción a la teoría de codificación de redes omitiendo formalismos. Luego se introduce la codificación lineal y se presenta el problema de codificación de una red en términos de espacios vectoriales. Después se escriben los lemas claves del método de la función inversa y se presenta el teorema principal - Teorema 5 - y su demostración. Como corolario se muestran resultados relacionados con la red Char-2 y algunas conclusiones. Adicional a esto, el autor pretende desarrollar todas las ideas haciendo omisión de conceptos propios de la teoría de la información, de modo que los argumentos recaigan completamente en el álgebra lineal.

Notación: letras mayúsculas $A, B, \dots, A_1, \dots, A_m$, denotan espacios vectoriales de dimensión finita sobre un cuerpo finito. Se denota por $\langle 0 \rangle$ es espacio nulo. Letras f, f_1, f_2, \dots, f_m denotan transformaciones lineales, el 1 y el 0 representan las transformaciones identidad y nula, respectivamente. Para cualesquiera A, B subespacios de un espacio vectorial V , la suma o el subespacio generado por A y B se denota por $A + B$. La dimensión de

$A + B$ se escribe como $\dim(A, B)$. La *codimensión* de A en V se define como $\text{codim}_V A := \dim V - \dim A$, esto es, la cantidad de vectores que le hacen falta a una base de A para generar V .

Desarrollo

A continuación, se presentan conceptos básicos de la teoría de codificación de redes omitiendo algunos formalismos. Una *red* es un grafo dirigido acíclico y conectado. Cada arista del grafo posee dos nodos, uno es su nodo inicial y otro es su nodo final. No se aceptan aristas repetidas. El no tener ciclos permite garantizar la existencia de ciertos nodos llamados fuentes y otros llamados receptores. Un nodo *fuerza* solo le corresponden aristas en donde éste es el nodo inicial; y un nodo *receptor* solo le corresponden aristas en donde éste es el nodo final. Un *mensaje* es una k -tupla de elementos de un conjunto finito llamado *alfabeto*. Cada fuente posee un mensaje que está siendo solicitado por un receptor. Un nodo *intermedio* es aquel que no es fuente ni receptor. Cualquier nodo que no es fuente tiene la capacidad de almacenar un mensaje de n -tuplas de elementos del alfabeto. El mensaje de estos nodos depende o son combinación de los mensajes almacenados en el nodo inicial de todas las aristas en donde éste es un nodo final; en otras palabras, los mensajes de los intermedios y receptores están en función de otros mensajes intermedios y de los mensajes fuentes.

El problema de codificación de una red consiste en encontrar eficientes asignaciones de mensajes o funciones que le permitan a los nodos receptores recibir los mensajes solicitados. Una asignación de mensaje se denomina (k, n) -*código* y su eficiencia se mide con la tasa k/n . Se buscan tasas grandes, por lo que la *capacidad de la red* es el supremo del conjunto de todas las tasas de un código. Muchos problemas de codificación de red involucran grafos en los cuales solo hay un camino que conecta una fuente con un receptor que requiere su mensaje, en estas redes la capacidad nunca es superior a uno (**Dougherty, Freiling, & Zeger, 2005**). Una red es soluble cuando su capacidad es exactamente uno y existe un código con esta tasa.

Cuando los mensajes involucrados en la red son vectores, el problema de codificación de una red se puede escribir de una manera alternativa. Los mensajes son reemplazados por subespacios de un espacio vectorial de dimensión finita y cada receptor solicita uno de estos. De este modo, el problema consiste en encontrar una tupla de subespacios que cumplan las siguientes condiciones:

- Cada fuente tiene asociado un subespacio de dimensión k y cada uno es independiente de los otros. Es decir, cualquier vector no nulo de un subespacio no es combinación lineal de vectores del espacio generado por la suma de subespacios asignados a las otras fuentes.
- Cada nodo que no es fuente tiene asociado un subespacio de dimensión a lo mucho n que está contenido en la suma de los subespacios que se asocian al nodo inicial de todas las aristas en donde él es un nodo final.
- El subespacio asociado a un receptor debe contener como subconjunto el subespacio que solicita.

Un (k, n) -*código lineal* es una tupla de tales subespacios. También, se requieren tasas eficientes y el supremo de todas se conoce como la capacidad lineal de la red.

En la figura 2 (izquierda) se presenta un ejemplo, con una red soluble conocida como *la red mariposa*. El código del centro funciona sobre cualquier cualquier cuerpo finito; incluso sobre cualquier estructura de grupo. El código de la derecha está escrito en términos de espacios vectoriales y es un $(1, 1)$ -código lineal. Se hace notar que el espacio X se genera por $(1, 1)$ que es combinación lineal de $(1, 0)$ y $(0, 1)$. El espacio B se genera por $(0, 1)$ que es

combinación lineal de $(1, 0)$ y $(1, 1)$. El espacio A se genera por $(1, 0)$ que es combinación lineal de $(1, 1)$ y $(0, 1)$. Con el ánimo de manifestar la importancia de las desigualdades rango lineales, se hace el siguiente análisis. Cualquier (k, n) -código lineal de la red mariposa cumple que $\dim A = \dim B = k$, $\dim(A, B) = 2k$, $\dim(X) \leq n$, $X \leq A + B$, $A \leq B + X$ y $B \leq A + X$. De modo que

$$\begin{aligned} 2k &= \dim(A, B) \\ &\leq \dim(A, B, X) && \text{[desigualdad rango lineal]} \\ &= \dim(A, X) \\ &\leq \dim A + \dim X && \text{[desigualdad rango lineal]} \\ &\leq k + n. \end{aligned}$$

Esto implica que

$$\frac{k}{n} \leq 1.$$

En general, los razonamientos usados tanto con desigualdades de la información como con desigualdades rango lineales son de este estilo. Las desigualdades establecen cotas sobre las tasas o capacidad y luego se busca alcanzar esa cota con un código.

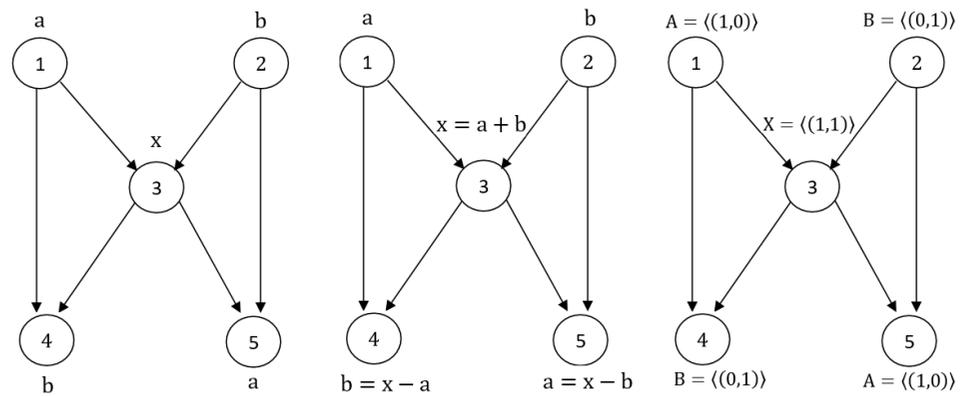


Figura 2. Izquierda: Red mariposa. Centro: Una solución sobre cualquier cuerpo finito. Derecha: Una solución en términos de subespacios.

Los Lemas 1-4 son usados para desarrollar el método de la función inversa. Las pruebas se encuentran en (Dougherty, Freiling, & Zeger, 2015).

Lema 1. Para cualesquiera subespacios A_1, \dots, A_m de un espacio vectorial de dimensión finita V ,

$$\text{codim}_V \bigcap_{i \leq m} A_i \leq \sum_{i \leq m} \text{codim}_V A_i.$$

Lema 2. Sean A y B espacios vectoriales finito dimensionales y $f : A \rightarrow B$ una transformación lineal. Considere un subespacio B' de B , entonces

$$\text{codim}_A f^{-1}(B') \leq \text{codim}_B B'.$$

El siguiente lema garantiza la existencia de las transformaciones lineales con las cuales puede trabajar el método.

Lema 3. Sean A_1, \dots, A_m, B subespacios de un espacio vectorial de dimensión finita V . Entonces existen m transformaciones lineales de la forma $f_i : B \rightarrow A_i, i \leq m$, tales que $f_1 + \dots + f_m = 1$ en un subespacio de B cuya codimensión en B es $\text{codim}_{A_1, \dots, A_k, B}(A_1, \dots, A_k)$.

Una vez se tienen las transformaciones lineales, el lema de abajo garantiza la existencia de subespacios convenientes. Nótese que todos estos lemas aportan cotas superiores sobre la codimensión.

Lema 4. Para cualesquiera subespacios A, B_1, \dots, B_m de un espacio vectorial finito dimensional V y m transformaciones lineales $f_i : A \rightarrow B_i, i \leq m$, tales que $f_1 + \dots + f_m = 0$. Se verifica que $f_1 = \dots = f_m = 0$ en un subespacio de A cuya codimensión en A es a lo sumo $\dim B_1 + \dots + \dim B_m - \dim (B_1, \dots, B_m)$.

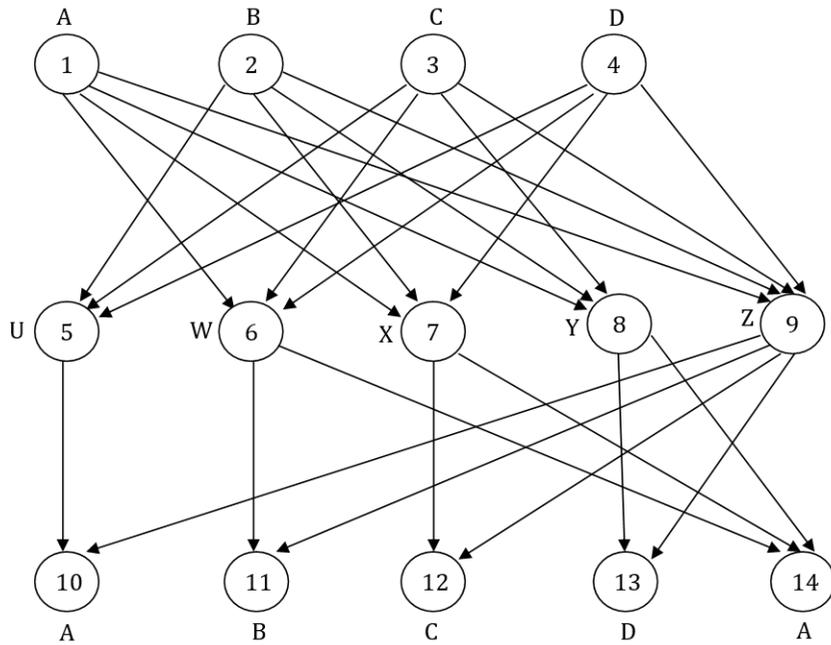


Figura 3. Red Char-2. Soluble únicamente sobre cuerpos finitos de característica par.

La red de la figura 3 se conoce como la red Char-2 y es una red Char- m cuando se toma $m = 2$. Tiene la cualidad de ser soluble cuando los códigos se definen sobre cuerpos finitos de característica par. En característica impar no lo es y se conoce que tiene una cota superior sobre la capacidad de $\frac{6}{7}$ (Connelly & Zeger, 2016). La demostración del Teorema 5 usa el método de la función inversa tomando esta red como guía del razonamiento a seguir. La figura 4 modifica la red invirtiendo sus aristas solo con el fin de facilitar este razonamiento.

Teorema 5. Para cualesquiera subespacios A, B, C, D, W, X, Y y Z de un espacio vectorial de dimensión finita V sobre un cuerpo finito cuya característica es impar, se verifica la siguiente desigualdad:

$$\begin{aligned}
 & 13 \dim(A, B, C, D) + 2 \dim(A, B, C) + 2 \dim(A, B, D) + 2 \dim(A, C, D) \\
 & + 3 \dim(B, C, D) + \dim(W, X, Y) + \dim(W, Z) + \dim(Y, Z) + \dim(X, Z) + 3 \dim(U, Z) \\
 & \leq 3 \dim A + 6 \dim B + 6 \dim C + 6 \dim D + \dim W + \dim X + \dim Y + 3 \dim Z \\
 & \quad + 3 \dim(A, U, Z) + \dim(B, W, Z) + \dim(C, X, Z) + \dim(D, Y, Z) \\
 & \quad + 2 \dim(A, C, D, W) + 2 \dim(A, B, D, X) + 2 \dim(A, B, C, Y) \\
 & \quad + 3 \dim(B, C, D, U) + \dim(A, W, X, Y) + 6 \dim(A, B, C, D, Z).
 \end{aligned}$$

Además, en general la desigualdad es falsa cuando la característica del cuerpo es par.

Demostración. El Lema 3 permite garantizar la existencia de 27 transformaciones lineales

$$\begin{aligned} f_1 : U \rightarrow B, & \quad f_2 : U \rightarrow C, & \quad f_3 : U \rightarrow D, & \quad f_4 : W \rightarrow A, & \quad f_5 : W \rightarrow C, & \quad f_6 : W \rightarrow D, \\ f_7 : X \rightarrow A, & \quad f_8 : X \rightarrow B, & \quad f_9 : X \rightarrow D, & \quad f_{10} : Y \rightarrow A, & \quad f_{11} : Y \rightarrow B, & \quad f_{12} : Y \rightarrow C, \\ f_{13} : Z \rightarrow A, & \quad f_{14} : Z \rightarrow B, & \quad f_{15} : Z \rightarrow C, & \quad f_{16} : Z \rightarrow D, & \quad f_{17} : A \rightarrow U, & \quad f_{18} : A \rightarrow Z, \\ f_{19} : B \rightarrow W, & \quad f_{20} : B \rightarrow Z, & \quad f_{21} : C \rightarrow X, & \quad f_{22} : C \rightarrow Z, & \quad f_{23} : D \rightarrow Y, & \quad f_{24} : D \rightarrow Z, \\ f_{25} : A \rightarrow W, & \quad f_{26} : A \rightarrow X, & \quad f_{27} : A \rightarrow Y, \end{aligned}$$

tales que

- $f_1 + f_2 + f_3 = 1$ en un subespacio U' de U con

$$\text{codim}_U U' \leq \text{codim}_{U,B,C,D}(B, C, D). \quad (1)$$

- $f_4 + f_5 + f_6 = 1$ en un subespacio W' de W con

$$\text{codim}_W W' \leq \text{codim}_{W,A,C,D}(A, C, D). \quad (2)$$

- $f_7 + f_8 + f_9 = 1$ en un subespacio X' de X con

$$\text{codim}_X X' \leq \text{codim}_{X,A,B,D}(A, B, D). \quad (3)$$

- $f_{10} + f_{11} + f_{12} = 1$ en un subespacio Y' de Y con

$$\text{codim}_Y Y' \leq \text{codim}_{Y,A,B,C}(A, B, C). \quad (4)$$

- $f_{13} + f_{14} + f_{15} + f_{16} = 1$ en un subespacio Z' de Z con

$$\text{codim}_Z Z' \leq \text{codim}_{Z,A,B,C,D}(A, B, C, D). \quad (5)$$

- $f_{17} + f_{18} = 1$ en un subespacio A' de A con

$$\text{codim}_A A' \leq \text{codim}_{A,U,Z}(U, Z). \quad (6)$$

- $f_{19} + f_{20} = 1$ en un subespacio B' de B con

$$\text{codim}_B B' \leq \text{codim}_{B,W,Z}(W, Z). \quad (7)$$

- $f_{21} + f_{22} = 1$ en un subespacio C' de C con

$$\text{codim}_C C' \leq \text{codim}_{C,X,Z}(X, Z). \quad (8)$$

- $f_{23} + f_{24} = 1$ en un subespacio D' de D con

$$\text{codim}_D D' \leq \text{codim}_{D,Y,Z}(Y, Z). \quad (9)$$

- $f_{25} + f_{26} + f_{27} = 1$ en un subespacio A^* de A con

$$\text{codim}_A A^* \leq \text{codim}_{A,W,X,Y}(W, X, Y). \quad (10)$$

En la figura 4 se ha invertido la red Char-2 y se han etiquetado convenientemente sus aristas con las transformaciones definidas. Ahora se busca encontrar transformaciones de A en A que resulten de operaciones de composición y suma de estas transformaciones. Como ayuda para ubicar rápidamente estas transformaciones se fija el nodo 10 y se ubican todos los caminos que van hasta el nodo 1, las transformaciones requeridas son las asignadas a las aristas de estos caminos. Luego, se buscan todas las transformaciones de A en B ubicando todos los caminos que van del nodo 10 al nodo 2. Después buscamos los caminos que van del nodo 10 al nodo 3 para ubicar las transformaciones de A en C y por último los caminos que van del nodo 10 al nodo 4 para ubicar las transformaciones de A en D .

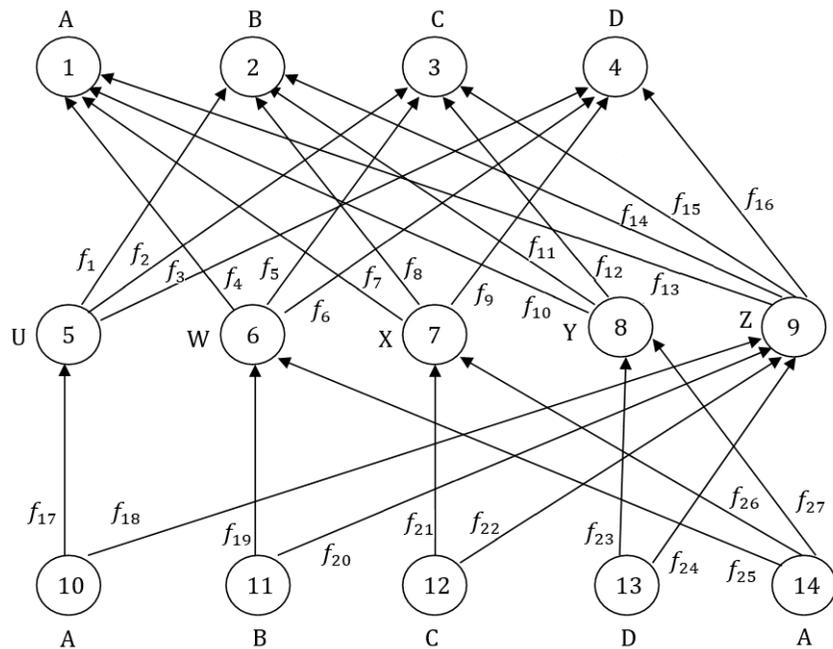


Figura 4. Red Char-2 invertida y con una transformación lineal asociada a cada arista.

Se consiguen entonces las transformaciones

$$\begin{aligned} f_{13}f_{18} &: A \rightarrow A \\ f_1f_{17} + f_{14}f_{18} &: A \rightarrow B \\ f_2f_{17} + f_{15}f_{18} &: A \rightarrow C \\ f_3f_{17} + f_{16}f_{18} &: A \rightarrow D \end{aligned}$$

que cumplen la ecuación

$$f_{13}f_{18} + f_1f_{17} + f_{14}f_{18} + f_2f_{17} + f_{15}f_{18} + f_3f_{17} + f_{16}f_{18} = 1$$

en un subespacio $A'' = A' \cap f_{17}^{-1}(U') \cap f_{18}^{-1}(Z')$, y de los Lemas 1 y 2 se tiene

$$\begin{aligned} \text{codim}_A A'' &\leq \text{codim}_A A' + \text{codim}_A f_{17}^{-1}(U') + \text{codim}_A f_{18}^{-1}(Z') \\ &\leq \text{codim}_A A' + \text{codim}_U U' + \text{codim}_Z(Z') \\ &\leq \text{codim}_{A,U,Z}(U, Z) + \text{codim}_{U,B,C,D}(B, C, D) \\ &\quad + \text{codim}_{Z,A,B,C,D}(A, B, C, D). \quad [\text{de (1), (5) y (6)}] \quad (11) \end{aligned}$$

Aplicando el Lema 4 a

$$\begin{aligned} f_{13}f_{18} - 1 \\ f_1f_{17} + f_{14}f_{18} \\ f_2f_{17} + f_{15}f_{18} \\ f_3f_{17} + f_{16}f_{18} \end{aligned}$$

se consigue un subespacio \bar{A} de A'' tal que

$$\begin{aligned} f_{13}f_{18} &= 1 \\ f_1f_{17} + f_{14}f_{18} &= 0 \\ f_2f_{17} + f_{15}f_{18} &= 0 \\ f_3f_{17} + f_{16}f_{18} &= 0 \end{aligned} \quad (12)$$

y la desigualdad

$$\begin{aligned} \text{codim}_A \bar{A} &= \text{codim}_A A'' + \text{codim}_{A''} \bar{A} \\ &\leq \Delta_A := \text{codim}_{A,U,Z}(U,Z) + \text{codim}_{U,B,C,D}(B,C,D) + \text{codim}_{Z,A,B,C,D}(A,B,C,D) \\ &\quad + \dim A + \dim B + \dim C + \dim D - \dim(A,B,C,D). \quad [\text{de (11)}] \end{aligned} \quad (13)$$

Se debe repetir el proceso previo cuatro veces más definiendo transformaciones cuyos dominios sean B del nodo 11, C del nodo 12, D del nodo 13 y A del nodo 14, respectivamente. Se puede usar la topología de la red de la figura 4 tal y como se hizo anteriormente, como guía del razonamiento a seguir. Las transformaciones

$$\begin{aligned} f_4f_{19} + f_{13}f_{20} &: B \rightarrow A \\ f_{14}f_{20} &: B \rightarrow B \\ f_5f_{19} + f_{15}f_{20} &: B \rightarrow C \\ f_6f_{19} + f_{16}f_{20} &: B \rightarrow D \end{aligned}$$

cumplen la ecuación

$$f_4f_{19} + f_{13}f_{20} + f_{14}f_{20} + f_5f_{19} + f_{15}f_{20} + f_6f_{19} + f_{16}f_{20} = 1$$

en un subespacio $B'' = B' \cap f_{19}^{-1}(W') \cap f_{20}^{-1}(Z')$, y de los Lemas 1 y 2 se tiene

$$\begin{aligned} \text{codim}_B B'' &\leq \text{codim}_{B,W,Z}(W,Z) + \text{codim}_{W,A,C,D}(A,C,D) \\ &\quad + \text{codim}_{Z,A,B,C,D}(A,B,C,D). \quad [\text{de (2), (5) y (7)}] \end{aligned} \quad (14)$$

Aplicando el Lema 4 a

$$\begin{aligned} f_4f_{19} + f_{13}f_{20} \\ f_{14}f_{20} - 1 \\ f_5f_{19} + f_{15}f_{20} \\ f_6f_{19} + f_{16}f_{20} \end{aligned}$$

se consigue un subespacio \bar{B} de B'' tal que

$$\begin{aligned} f_4f_{19} + f_{13}f_{20} &= 0 \\ f_{14}f_{20} &= 1 \\ f_5f_{19} + f_{15}f_{20} &= 0 \\ f_6f_{19} + f_{16}f_{20} &= 0 \end{aligned} \quad (15)$$

y la desigualdad

$$\begin{aligned} \text{codim}_B \bar{B} &\leq \Delta_B := \text{codim}_{B,W,Z}(W,Z) + \text{codim}_{W,A,C,D}(A,C,D) + \text{codim}_{Z,A,B,C,D}(A,B,C,D) \\ &\quad + \dim A + \dim B + \dim C + \dim D - \dim(A,B,C,D). \quad [\text{de (14)}] \end{aligned} \quad (16)$$

Las transformaciones

$$\begin{aligned} f_7 f_{21} + f_{13} f_{22} &: C \rightarrow A \\ f_8 f_{21} + f_{14} f_{22} &: C \rightarrow B \\ f_{15} f_{22} &: C \rightarrow C \\ f_9 f_{21} + f_{16} f_{22} &: C \rightarrow D \end{aligned}$$

cumplen la ecuación

$$f_7 f_{21} + f_{13} f_{22} + f_8 f_{21} + f_{14} f_{22} + f_{15} f_{22} + f_9 f_{21} + f_{16} f_{22} = 1$$

en un subespacio $C'' = C' \cap f_{21}^{-1}(X') \cap f_{22}^{-1}(Z')$, y de los Lemas 1 y 2 se tiene

$$\begin{aligned} \text{codim}_C C'' &\leq \text{codim}_{C,X,Z}(X, Z) + \text{codim}_{X,A,B,D}(A, B, D) \\ &+ \text{codim}_{Z,A,B,C,D}(A, B, C, D). \quad [\text{de (3), (5) y (8)}] \end{aligned} \tag{17}$$

Aplicando el Lema 4 a

$$\begin{aligned} f_7 f_{21} + f_{13} f_{22} \\ f_8 f_{21} + f_{14} f_{22} \\ f_{15} f_{22} - 1 \\ f_9 f_{21} + f_{16} f_{22} \end{aligned}$$

se consigue un subespacio \bar{C} de C'' tal que

$$\begin{aligned} f_7 f_{21} + f_{13} f_{22} &= 0 \\ f_8 f_{21} + f_{14} f_{22} &= 0 \\ f_{15} f_{22} &= 1 \\ f_9 f_{21} + f_{16} f_{22} &= 0 \end{aligned} \tag{18}$$

y la desigualdad

$$\begin{aligned} \text{codim}_C \bar{C} \leq \Delta_C := \text{codim}_{C,X,Z}(X, Z) + \text{codim}_{X,A,B,D}(A, B, D) + \text{codim}_{Z,A,B,C,D}(A, B, C, D) \\ + \dim A + \dim B + \dim C + \dim D - \dim(A, B, C, D). \quad [\text{de (17)}] \end{aligned} \tag{19}$$

Las transformaciones

$$\begin{aligned} f_{10} f_{23} + f_{13} f_{24} &: D \rightarrow A \\ f_{11} f_{23} + f_{14} f_{24} &: D \rightarrow B \\ f_{12} f_{23} + f_{15} f_{24} &: D \rightarrow C \\ f_{16} f_{24} &: D \rightarrow D \end{aligned}$$

cumplen la ecuación

$$f_{10} f_{23} + f_{13} f_{24} + f_{11} f_{23} + f_{14} f_{24} + f_{12} f_{23} + f_{15} f_{24} + f_{16} f_{24} = 1$$

en un subespacio $D'' = D' \cap f_{23}^{-1}(Y') \cap f_{24}^{-1}(Z')$, y de los Lemas 1 y 2 se tiene

$$\begin{aligned} \text{codim}_D D'' &\leq \text{codim}_{D,Y,Z}(D, Y, Z) + \text{codim}_{Y,A,B,C}(A, B, C) \\ &+ \text{codim}_{Z,A,B,C,D}(A, B, C, D). \quad [\text{de (4), (5) y (9)}] \end{aligned} \tag{20}$$

Aplicando el Lema 4 a

$$\begin{aligned} f_{10} f_{23} + f_{13} f_{24} \\ f_{11} f_{23} + f_{14} f_{24} \\ f_{12} f_{23} + f_{15} f_{24} \\ f_{16} f_{24} - 1 \end{aligned}$$

se consigue un subespacio \bar{D} de D'' tal que

$$\begin{aligned} f_{10} f_{23} + f_{13} f_{24} &= 0 \\ f_{11} f_{23} + f_{14} f_{24} &= 0 \\ f_{12} f_{23} + f_{15} f_{24} &= 0 \\ f_{16} f_{24} &= 1 \end{aligned} \tag{21}$$

y la desigualdad

$$\begin{aligned} \text{codim}_D \bar{D} \leq \Delta_D := & \text{codim}_{D,Y,Z}(Y,Z) + \text{codim}_{Y,A,B,C}(A,B,C) + \text{codim}_{Z,A,B,C,D}(A,B,C,D) \\ & + \dim A + \dim B + \dim C + \dim D - \dim(A,B,C,D). \quad [\text{de (20)}] \end{aligned} \quad (22)$$

Las transformaciones

$$\begin{aligned} f_4 f_{25} + f_7 f_{26} + f_{10} f_{27} &: A \rightarrow A \\ f_8 f_{26} + f_{11} f_{27} &: A \rightarrow B \\ f_5 f_{25} + f_{12} f_{27} &: A \rightarrow C \\ f_6 f_{25} + f_9 f_{26} &: A \rightarrow D \end{aligned}$$

cumplen la ecuación

$$f_4 f_{25} + f_7 f_{26} + f_{10} f_{27} + f_8 f_{26} + f_{11} f_{27} + f_5 f_{25} + f_{12} f_{27} + f_6 f_{25} + f_9 f_{26} = 1$$

en un subespacio $A^{**} = A^* \cap f_{25}^{-1}(W') \cap f_{26}^{-1}(X') \cap f_{27}^{-1}(Y')$, y de los Lemas 1 y 2 se tiene

$$\begin{aligned} \text{codim}_A A^{**} \leq & \text{codim}_{A,W,X,Y}(W,X,Y) + \text{codim}_{W,A,C,D}(A,C,D) \\ & + \text{codim}_{X,A,B,D}(A,B,D) + \text{codim}_{Y,A,B,C}(A,B,C). \quad [\text{de (2), (3), (4) y (10)}] \end{aligned} \quad (23)$$

Aplicando el Lema 4 a

$$\begin{aligned} f_4 f_{25} + f_7 f_{26} + f_{10} f_{27} - 1 \\ f_8 f_{26} + f_{11} f_{27} \\ f_5 f_{25} + f_{12} f_{27} \\ f_6 f_{25} + f_9 f_{26} \end{aligned}$$

se consigue un subespacio \hat{A} de A^{**} tal que

$$\begin{aligned} f_4 f_{25} + f_7 f_{26} + f_{10} f_{27} &= 1 \\ f_8 f_{26} + f_{11} f_{27} &= 0 \\ f_5 f_{25} + f_{12} f_{27} &= 0 \\ f_6 f_{25} + f_9 f_{26} &= 0 \end{aligned} \quad (24)$$

y la desigualdad

$$\begin{aligned} \text{codim}_A \hat{A} \leq \bar{\Delta}_A := & \text{codim}_{A,W,X,Y}(W,X,Y) + \text{codim}_{W,A,C,D}(A,C,D) + \text{codim}_{X,A,B,D}(A,B,D) \\ & + \text{codim}_{Y,A,B,C}(A,B,C) + \dim A + \dim B + \dim C + \dim D - \dim(A,B,C,D). \quad [\text{de (23)}] \end{aligned} \quad (25)$$

En lo sucesivo, la topología de la red no se usa como guía del razonamiento a seguir. Se busca construir un subespacio conveniente S que sea nulo cuando el cuerpo tenga característica impar. Con esto en mente, se definen subespacios y funciones restringidas que proporcionen subespacios en común de A , B , C o D en donde algunas transformaciones puedan ser invertibles:

- Sea $\tilde{A} := f_{18}(\bar{A})$. Usando la primera ecuación de (12) se sigue que $f_{18} |_{\tilde{A}}$ y $f_{13} |_{\tilde{A}}$ son inversas.
- Sea $\tilde{B} := f_{20}(\bar{B})$. Usando la segunda ecuación de (15) se sigue que $f_{20} |_{\tilde{B}}$ y $f_{14} |_{\tilde{B}}$ son inversas.
- Sea $\tilde{C} := f_{22}(\bar{C})$. Usando la tercera ecuación de (18) se sigue que $f_{22} |_{\tilde{C}}$ y $f_{15} |_{\tilde{C}}$ son inversas.
- Sea $\tilde{D} := f_{24}(\bar{D})$. Usando la cuarta ecuación de (21) se sigue que $f_{24} |_{\tilde{D}}$ y $f_{16} |_{\tilde{D}}$ son inversas.

Usando los numerales anteriores, se pueden obtener algunas funciones inyectivas:

- Sea $\check{B} := f_{14}(\check{A} \cap \check{B}) \leq \check{B}$. Entonces f_{20} es inyectiva en \check{B} y $f_{20}(\check{B}) = \check{A} \cap \check{B}$. Así $f_{13}f_{20}$ es inyectiva en \check{B} . De la primera ecuación de (15), se sigue que f_4f_{19} también lo es. Por lo que f_{19} es inyectiva y verifica

$$\dim f_{19}(\check{B}) = \dim \check{B} = \dim(\check{A} \cap \check{B}). \quad (26)$$

- Sea $\check{C} := f_{15}(\check{A} \cap \check{C}) \leq \check{C}$. Entonces f_{22} es inyectiva en \check{C} y $f_{22}(\check{C}) = \check{A} \cap \check{C}$. Así $f_{13}f_{22}$ es inyectiva en \check{C} . De la primera ecuación de (18) se sigue que f_7f_{21} también lo es. Por lo que f_{21} es inyectiva y verifica

$$\dim f_{21}(\check{C}) = \dim \check{C} = \dim(\check{A} \cap \check{C}). \quad (27)$$

- Sea $\check{D} := f_{16}(\check{A} \cap \check{D}) \leq \check{D}$. Entonces f_{24} es inyectiva en \check{D} y $f_{24}(\check{D}) = \check{A} \cap \check{D}$. Así $f_{13}f_{24}$ es inyectiva en \check{D} . De la primera ecuación de (21) se sigue que $f_{10}f_{23}$ también lo es. Por lo que f_{23} es inyectiva y verifica

$$\dim f_{23}(\check{D}) = \dim \check{D} = \dim(\check{A} \cap \check{D}). \quad (28)$$

Ahora ya es posible definir el subespacio de A ,

$$S := \hat{A} \cap S_1 \cap S_2 \cap S_3.$$

donde

$$S_1 = \{s \in A : f_{25}(s) \in f_{19}(\check{B})\}$$

$$S_2 = \{s \in A : f_{26}(s) \in f_{21}(\check{C})\}$$

$$S_3 = \{s \in A : f_{27}(s) \in f_{23}(\check{D})\}.$$

Se presentará que $S = \langle 0 \rangle$ en espacios definidos sobre cuerpos de característica impar. Sea $s \in S$. Existen $b \in \check{B}$, $c \in \check{C}$ y $d \in \check{D}$ tales que

$$\begin{aligned} f_{25}(s) &= f_{19}(b) \\ f_{26}(s) &= f_{21}(c) \\ f_{27}(s) &= f_{23}(d). \end{aligned}$$

Entonces

$$f_4f_{19}(b) + f_7f_{21}(c) + f_{10}f_{23}(d) = s \quad [\text{de la primera ecuación de (24)}] \quad (29)$$

$$f_8f_{21}(c) + f_{11}f_{23}(d) = 0 \quad [\text{de la segunda ecuación de (24)}] \quad (30)$$

$$f_5f_{19}(b) + f_{12}f_{23}(d) = 0 \quad [\text{de la tercera ecuación de (24)}] \quad (31)$$

$$f_6f_{19}(b) + f_9f_{21}(c) = 0. \quad [\text{de la cuarta ecuación de (24)}] \quad (32)$$

Por lo que

$$f_{14}f_{22}(c) + f_{14}f_{24}(d) = 0 \quad [\text{de (30) y segundas ecuaciones de (18) y (21)}]$$

$$f_{15}f_{20}(b) + f_{15}f_{24}(d) = 0 \quad [\text{de (31) y terceras ecuaciones de (15) y (21)}]$$

$$f_{16}f_{20}(b) + f_{16}f_{22}(c) = 0. \quad [\text{de (32) y cuartas ecuaciones de (15) y (18)}]$$

La inyectividad de las transformaciones f_{14} , f_{15} y f_{16} sobre los espacios en previamente definidos, permiten conseguir

$$\begin{aligned} f_{22}(c) + f_{24}(d) &= 0 \\ f_{20}(b) + f_{24}(d) &= 0 \end{aligned}$$

$$f_{20}(b) + f_{22}(c) = 0$$

De modo que $f_{22}(c) = f_{24}(d) = -f_{20}(b)$. Por lo que $2f_{20}(b) = 0$ y ya que la característica del cuerpo finito es impar, se sigue que $f_{20}(b) = 0$. De la inyectividad de f_{20} , f_{22} y f_{24} , se puede asegurar que $b = c = d = 0$. Por lo tanto, de (29) se sigue que $s = 0$. Además, se verifica que

$$\begin{aligned} \text{codim}_A S_1 &\leq \text{codim}_W f_{19}(\check{B}) && \text{[del Lema 2]} \\ &= \dim W - \dim(\check{A} \cap \check{B}) + \dim Z - \dim Z && \text{[de (26)]} \\ &= \text{codim}_Z(\check{A} \cap \check{B}) + \dim W - \dim Z \\ &\leq \text{codim}_Z \check{A} + \text{codim}_Z \check{B} + \dim W - \dim Z && \text{[del Lema 1]} \\ &= \dim Z - \dim \check{A} + \dim Z - \dim \check{B} + \dim W - \dim Z && \text{[}f_{18} \text{ y } f_{20} \text{ son inyectivas]} \\ &= \dim A - \dim \check{A} + \dim B - \dim \check{B} + \dim W + \dim Z - \dim A - \dim B \\ &= \text{codim}_A \check{A} + \text{codim}_B \check{B} + \dim W + \dim Z - \dim A - \dim B \\ &\leq \Delta_A + \Delta_B + \dim W + \dim Z - \dim A - \dim B. && \text{[de (13) y (16)]} \end{aligned}$$

De forma semejante,

$$\begin{aligned} \text{codim}_A S_2 &\leq \Delta_A + \Delta_C + \dim X + \dim Z - \dim A - \dim C. \\ \text{codim}_A S_3 &\leq \Delta_A + \Delta_D + \dim Y + \dim Z - \dim A - \dim D. \end{aligned}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} \dim A &= \text{codim}_A S && \text{[ya que } S = \langle 0 \rangle \text{]} \\ &\leq \text{codim}_A \hat{A} + \text{codim}_A S_1 + \text{codim}_A S_2 + \text{codim}_A S_3 && \text{[del Lema 1]} \\ &\leq \bar{\Delta}_A + 3\Delta_A + \Delta_B + \Delta_C + \Delta_D - 3\dim A - \dim B - \dim C - \dim D \\ &\quad + \dim W + \dim X + \dim Y + 3\dim Z. && \text{[de (25) y desigualdades anteriores]} \end{aligned}$$

En resumen,

$$\begin{aligned} 4\dim A + \dim B + \dim C + \dim D &\leq \bar{\Delta}_A + 3\Delta_A + \Delta_B + \Delta_C + \Delta_D \\ &\quad + \dim W + \dim X + \dim Y + 3\dim Z \end{aligned} \tag{33}$$

simplificando las expresiones Δ 's se consigue la desigualdad deseada de nuestro teorema. Además, la desigualdad en general es falsa cuando la característica del cuerpo es par. Defina los espacios 1-dimensionales,

$$\begin{aligned} A &= \langle\langle 1, 0, 0, 0 \rangle\rangle \\ B &= \langle\langle 0, 1, 0, 0 \rangle\rangle \\ C &= \langle\langle 0, 0, 1, 0 \rangle\rangle \\ D &= \langle\langle 0, 0, 0, 1 \rangle\rangle \\ U &= \langle\langle 0, 1, 1, 1 \rangle\rangle \\ W &= \langle\langle 1, 0, 1, 1 \rangle\rangle \\ X &= \langle\langle 1, 1, 0, 1 \rangle\rangle \\ Y &= \langle\langle 1, 1, 1, 0 \rangle\rangle \\ Z &= \langle\langle 1, 1, 1, 1 \rangle\rangle. \end{aligned} \tag{34}$$

Nótese que $\Delta_A = \Delta_B = \Delta_C = \Delta_D = 0$ sin importar la característica pero $\bar{\Delta}_A = 0$ solo si ésta es par ya que

$$\text{codim}_{A,W,X,Y}(W, X, Y) = \begin{cases} 0 & \text{característica par} \\ 1 & \text{característica impar.} \end{cases}$$

Luego, la desigualdad (33) implica la contradicción $7 \leq 6$. □

La tupla de espacios (34) también funciona como un (1,1)-código lineal de la red Char-2 en cuerpos con característica par. La desigualdad presentada, sirve como una alternativa para encontrar una cota sobre cuerpos con característica impar. Desafortunadamente, no mejora la cota ya conocida.

Corolario 6. *La capacidad lineal de la red Char-2, sobre cuerpos finitos cuya característica es impar, es a lo sumo $\frac{6}{7}$.*

Demostración. Considere los subespacios $A, B, C, D, U, W, X, Y,$ y Z de un (k,n) -código lineal de la red Char-2. Nótese que A, B, C y D tienen dimensión k y su suma dimensión $4k$; $U, W, X, Y,$ y Z deben tener dimensión a lo sumo n ; $U \leq A + B + C, W \leq A + C + D, X \leq A + B + D, Y \leq A + B + C, Z \leq A + B + C + D, A \leq U + Z, B \leq W + Z, C \leq X + Z, D \leq Y + Z$ y $A \leq W + X + Y$. Todo esto permite verificar que $\bar{\Delta}_A = \Delta_A = \Delta_B = \Delta_C = \Delta_D = 0$. Lo que implica que la desigualdad (33) es equivalente a $7k \leq 6n$. De modo que $\frac{6}{7}$ es una cota superior de la tasa $\frac{k}{n}$ y por lo tanto una cota superior de la capacidad lineal sobre cuerpos finitos de característica impar. \square

Ya que hay dos técnicas diferentes que arrojan la misma cota sobre la red Char-2, se podría pensar que $\frac{6}{7}$ es la capacidad sobre cuerpos de característica impar, sin embargo encontrar un código con esta tasa parece ser una tarea no trivial. Aunque, es posible alcanzar una tasa de $\frac{4}{5}$, obteniendo una brecha aproximada de 5,7% respecto a $\frac{6}{7}$, mediante el siguiente (4,5)-código lineal válido sobre cualquier cuerpo finito:

$$a = (a_1, a_2, a_3, a_4)$$

$$b = (b_1, b_2, b_3, b_4)$$

$$c = (c_1, c_2, c_3, c_4)$$

$$d = (d_1, d_2, d_3, d_4)$$

$$u = (b_1 + c_1 + d_1, b_2 + c_2 + d_2, b_3 + c_3 + d_3, b_4 + c_4 + d_4)$$

$$w = (a_1 + c_1 + d_1, a_2 + c_2 + d_2, a_3 + c_3 + d_3, a_4 + c_4 + d_4, a_2)$$

$$x = (a_1 + d_1, a_2 + b_2 + d_2, a_3 + b_3 + d_3, a_4 + b_4 + d_4, a_3)$$

$$y = (a_1 + c_1, a_2 + b_2 + c_2, a_3 + b_3 + c_3, a_4 + b_4 + c_4, a_4)$$

$$z = (a_1 + b_1 + c_1 + d_1, a_2 + b_2 + c_2 + d_2, a_3 + b_3 + c_3 + d_3, a_4 + b_4 + c_4 + d_4, b_1).$$

En efecto, el nodo 10 puede usar los mensajes u y z , por lo que a se recupera con $a = z^* - u$, donde z^* representa las primeras cuatro componentes de z . El nodo 11 puede usar los mensajes w y z , por lo que b se recupera con $b = z^* - w^*$, donde w^* representa las primeras cuatro componentes de w . El nodo 12 puede usar los mensajes x y z , por lo que c se recupera con $c = z^* - x^*$, donde

$$x^* = (a_1 + b_1 + d_1, a_2 + b_2 + d_2, a_3 + b_3 + d_3, a_4 + b_4 + d_4, a_3).$$

El nodo 13 puede usar los mensajes y y z , por lo que d se recupera con $d = z^* - y^*$, donde

$$y^* = (a_1 + b_1 + c_1, a_2 + b_2 + c_2, a_3 + b_3 + c_3, a_4 + b_4 + c_4, a_4).$$

El nodo 14 puede usar los mensajes w, x e y , por lo que a se recupera de la siguiente forma: a_1 es la primera componente de $y - w + x$. Mientras que a_2, a_3 y a_4 son la cuarta componente de w, x e y , respectivamente. Todas las operaciones involucradas son lineales.

Conclusiones

En este documento se estudia el método de la función inversa de la teoría de codificación de redes que consiste en una técnica para demostrar la existencia de desigualdades rango lineales que depende de la característica del cuerpo finito donde se definen los espacios vectoriales involucrados. Con el fin de dar mayor claridad de cuando es posible aplicar el método, se trabajó con la red Char-2 obteniendo una desigualdad que es verdadera en espacios vectoriales definidos sobre cuerpos finitos de característica impar. Si bien aún no es posible definir condiciones concretas que indiquen cuando el método producirá una desigualdad o no, se abre camino para que la respuesta sea afirmativa en el caso de la familia de redes Char-m.

Agradecimientos

El autor agradece el soporte proporcionado por Minciencias en Conv. 727.

Conflicto de intereses

El autor declara no tener conflicto de intereses con respecto al contenido de este artículo.

References

- Ahlsvede, R., Cai, N., Li, S.-Y. R., Yeung, R. W. (2000) Network information flow. *IEEE Transactions on Information Theory*, 46, 1204–1216. <https://doi.org/10.1109/18.850663>
- Blasiak, A., Kleinberg, R., Lubetzky, E. (2011) Lexicographic products and the power of non-linear network coding. *2011 IEEE 52nd Annual Symposium on Foundations of Computer Science*, 609–618. <https://doi.org/10.1109/FOCS.2011.39>
- Connelly, J., Zeger, K. (2016) A class of non-linearly solvable networks. *2016 IEEE International Symposium on Information Theory (ISIT)*, 1964–1968. <https://doi.org/10.1109/ISIT.2016.7541642>
- Connelly, J., Zeger, K. (2019) Capacity and achievable rate regions for linear network coding over ring alphabets. *IEEE Transactions on Information Theory*, 65(1), 220–234. <https://doi.org/10.1109/TIT.2018.2866244>
- Das, N., Rai, B. K. (2017) On the dependence of linear coding rates on the characteristic of the finite field. *arXiv:1709.05970*.
- Dougherty, R., Freiling, C., Zeger, K. (2005) Insufficiency of linear coding in network information flow. *IEEE Transactions on Information Theory*, 51(8), 2745–2759. <https://doi.org/10.1109/TIT.2005.851744>
- Dougherty, R., Freiling, C., Zeger, K. (2007) Networks, matroids, and non-shannon information inequalities. *IEEE Transactions on Information Theory*, 3(6), 1949–1969. <https://doi.org/10.1109/TIT.2007.896862>
- Dougherty, R., Freiling, C., Zeger, K. (2015) Achievable rate regions for network coding. *IEEE Transactions on Information Theory*, 61(5), 2488–2509. <https://doi.org/10.1109/TIT.2015.2403315>
- Freiling, E. F. (2014) *Characteristic dependent linear rank inequalities and applications to network coding*. Dissertation for the doctoral degree, University of California, San Diego.
- Peña-Macías, V. (2023) Access structures for finding characteristic-dependent linear rank inequalities. *Kybernetika - International Journal of Institute of Information Theory and Automation*, 59(2), 198–208. <https://doi.org/10.14736/kyb-2023-2-0198>

- Peña-Macias, V., Sarria, H.** (2020) Characteristic-dependent linear rank inequalities via complementary vector spaces. *Journal of Information and Optimization Sciences*, 42(2), 345–369. <https://doi.org/10.1080/02522667.2019.1668157>
- Peña-Macias, V., Sarria-Zapata, H.** (2019) Characteristic-dependent linear rank inequalities in 21 variables. *Revista De La Academia Colombiana De Ciencias Exactas, Físicas y Naturales*, 43(169), 764–770. <https://doi.org/10.18257/raccefyn.928>
- Shen, A., Hammer, D., Romashchenko, A. E., Vereshchagin, N. K.** (2000) Inequalities for shannon entropy and kolmogorov complexity. *Journal of Computer and Systems Sciences*, 60, 442–464. <https://doi.org/10.1006/jcss.1999.1677>