Rev. Acad. Colomb. Cienc. Ex. Fis. Nat. 45(174):30-51, enero-marzo de 2021
doi: https://doi.org/10.18257/raccefyn.1276

Ciencias Físicas

Artículo original

Soluciones exactas de agujeros negros en la teoría generalizada de Proca

Exact black hole solutions in the generalized Proca theory

Sergio Manuel Cubides Pérez[1], **Yeinzon Rodríguez García**[1,2,3]

[1]Escuela de Física, Universidad Industrial de Santander
[2]Centro de Investigaciones en Ciencias Básicas y Aplicadas, Universidad Antonio Nariño
[3]Simons Associate at The Abdus Salam International Centre for Theoretical Physics

Resumen

Con el fin de restringir la teoría generalizada de Proca y de determinar su compatibilidad con las futuras observaciones en el ámbito astrofísico, se estudiaron soluciones de agujeros negros en el marco de esta teoría. Para ello, en primer lugar, se determinaron las ecuaciones de campo gravitacional y de campo vectorial correspondientes a la acción generalizada de Proca para, posteriormente, obtener sus versiones adaptadas a agujeros negros estáticos y esféricamente simétricos. Posteriormente se encontraron soluciones de las ecuaciones de campo para diferentes tipos de acoplamientos dentro de esta teoría las cuales, debido a las condiciones establecidas para las funciones métricas, difieren de las soluciones de Reissner-Nordström y de Schwarzschild tan sólo en las funciones que describen al campo vectorial dependiendo del acomplamiento estudiado. A juzgar únicamente por este resultado, la teoría de la Relatividad General luce más atractiva que la teoría generalizada de Proca.
Palabras clave: Agujeros negros, gravedad modificada, teorías vector-tensor.

Abstract

In order to constrain the generalized Proca theory and determine its compatibility with the future astrophysical observations, we have studied black holes solutions in the framework of this theory. To this end, in the first place, we have obtained the gravitational field and vector field equations from the generalized Proca action to subsequently obtain its adapted versions to static and spherically symmetric black holes. Later, exact solutions were found for different couplings in this theory. Due to established conditions for the metric functions, these solutions differ from the Schwarzschild and Reissner-Nordström solutions only in the functions that describe the vector field, depending on the studied coupling. Judging only from this result, General Relativity looks more attractive than the generalized Proca theory.
Keywords: Black holes, modified gravity, vector-tensor theories.

Citación: Cubides Pérez SM, Rodríguez García Y. Soluciones exactas de agujeros negros en la teoría generalizada de Proca. Rev. Acad. Colomb. Cienc. Ex. Fis. Nat. 45(174):30-51, enero-marzo de 2021. doi: https://doi.org/10.18257/raccefyn.1276

Editor: María Elena Gómez

***Correspondencia:**
Sergio Manuel Cubides Pérez;
sergioma11@hotmail.com

Recibido: 27 de julio de 2020
Aceptado: 9 de noviembre de 2020
Publicado: 29 de marzo de 2021

Introducción

Pese a que el modelo estándar cosmológico ΛCDM es compatible con las observaciones (**Aghanim, N., *et al***, 2020), éste no logra darle una explicación física consistente a los problemas de la cosmología moderna como lo son la actual expansión acelerada del universo (energía oscura) (**Riess, A. G., *et al***, 1998; **Perlmutter, S., *et al***, 1999) y la existencia de materia oscura (**Bertone, G. & Hooper, D.**, 2018). Debido a esto y en un intento por explicar físicamente el problema del sector oscuro, se han construido gran cantidad de teorías que modifican la gravedad. Una de las ramas más importantes de estas teorías es aquélla que comprende todos los modelos en los cuales se asume la presencia de un campo acoplado de forma no mínima con la gravedad que puede ser escalar (**Deffayet, C., *et al***, 2011; **Nicolis, A., *et al***, 2009; **Deffayet, C., *et al***, 2009a, 2009b; **Horndeski, H. W.,**, 1974; **Deffayet, C., & Steer, D.**, 2013; **Gleyzes, J. *et al***, 2015; **Crisostomi, M., *et al***, 2017; **Ben Achour, J., *et al***, 2016; **Crisostomi, M., *et al***, 2016; **Langlois, D., & Noui, K.**, 2016), vectorial (**Heisenberg, L.**, 2014; **Tasinato, G.**, 2014a, 2014b; **Allys, E., *et al***, 2016a, 2016c; **Beltrán Jiménez,**

J., & Heisenberg, L., 2016; **Rodríguez, Y., & Navarro, A.**, 2017; **Heisenberg. L., *et al***, 2016; **Gallego Cadavid, A., & Rodríguez, Y.**, 2019; **Kimura, R., *et al***, 2017; **Allys, E., *et al***, 2016b; **Beltrán Jiménez, J., & Heisenberg, L.**, 2017) o tensorial (**de Rham, C., *et al***, 2011; **Hinterbichler, K.**, 2012; **de Rham, C.**, 2014; **Hassan, S. F., & Rosen, R. A.**, 2012; **Hinterbichler, K., & Rosen, R. A.**, 2012; **de Rham, C. & Gabadadze, G.**, 2010). Este gran número de teorías existentes ofrece una amplia variedad en cosmología, brindándonos herramientas para poner a prueba y descartar aquellas teorías que no sean compatibles con las observaciones.

Un candidato natural para atacar el problema del sector oscuro es un campo escalar acoplado de forma no mínima a la gravedad (**Deffayet, C., *et al***, 2011; **Nicolis, A., *et al***, 2009; **Deffayet, C., *et al***, 2009a, 2009b; **Horndeski, H. W.,**, 1974; **Deffayet, C., & Steer, D.**, 2013; **Gleyzes, J. *et al***, 2015; **Crisostomi, M., *et al***, 2017; **Ben Achour, J., *et al***, 2016; **Crisostomi, M., *et al***, 2016; **Langlois, D., & Noui, K.**, 2016); sin embargo, las teorías basadas en esta idea (teorías escalar-tensor) han sufrido fuertes restricciones a raíz de la observación de la onda gravitacional GW170817 y su contraparte electromagnética GRB 170817A (**Abbott, B. P., *et al***, 2017b, 2017a, 2017c; **Baker, T., *et al***, 2017; **Creminelli, P. & Vernizzi, F.**, 2017; **Sakstein, J. & Jain, B.**, 2017; **Ezquiaga, J. M. & Zumalacárregui, M.**, 2017; **Wang, H., *et al***, 2017; **Kase, R. & Tsujikawa, S.**, 2019). Otra alternativa (teorías vector-tensor) surge de acoplar de forma no mínima un campo vectorial a la gravedad, lo que es motivado, en particular, por la existencia de campos de gauge en el Modelo Estándar de la física de partículas como campos mediadores de las interacciones fundamentales. Un aspecto que parece ser negativo concerniente al uso de campos vectoriales es el hecho de que éstos generan anisotropía en la expansión del universo, lo cual no los erige como candidatos naturales para dar cuenta del fenómeno de la energía oscura; no obstante, esta característica podría, naturalmente, explicar aquellas anomalías relacionadas con una posible dirección privilegiada en dicha expansión (**Cai, R. G., *et al***, 2013; **Rodrigues, D. C.**, 2008; **Beltrán Jiménez, J. & López Maroto, A.**, 2007; **Campanelli, L., *et al***, 2006). Un caso particular de estas teorías vector-tensor es el de la teoría generalizada de Proca (o teoría de Galileones vectoriales) (**Heisenberg, L.**, 2014; **Tasinato, G.**, 2014a, 2014b; **Allys, E., *et al***, 2016a, 2016c; **Beltrán Jiménez, J., & Heisenberg, L.**, 2016; **Rodríguez, Y., & Navarro, A.**, 2017) en la cual la acción se construye a partir del campo vectorial y su primera derivada de tal manera que tanto las ecuaciones de campo de la teoría completa como las de la respectiva teoría en el límite de desacoplamiento contienen derivadas de orden no mayor a dos. Lo anterior impide el desarrollo de la conocida inestabilidad de Ostrogradski (**Ostrogradski, M.**, 1850; **Woodard, R. P.**, 2007; **Woodard, R. P**, 2015).

Así cómo sucedió con las teorías escalar-tensor, es necesario hacer uso de las observaciones de los fenómenos astrofísicos para determinar la factibilidad de las teorías vector-tensor. Una de las alternativas empleadas últimamente para este fin ha sido el estudio de las soluciones de agujeros negros, en vista de las recientes observaciones de ondas gravitacionales (**Abbott, B. P., *et al***, 2017b, 2017a, 2017c; **Abbott, R., *et al***, 2020). Esto se debe a que estas últimas transportan información acerca de los objetos que las producen, lo que permite conocer más sobre la física de los agujeros negros y los alrededores de los mismos así como comparar las características de estas ondas con aquéllas predichas por las diferentes teorías de gravedad para estos objetos astrofísicos. Dicho enfoque ya ha sido recientemente explorado en las teorías escalar-tensor mediante el análisis perturbativo de las soluciones de agujeros negros (**Kobayashi, T., *et al***, 2012, 2014; **Ganguly, A., *et al***, 2018) y el cálculo de los modos quasinormales de las ondas gravitacionales provenientes de este tipo de objetos (**Tattersall, O. J. & Ferreira, P. G.**, 2018; **Dong, R., *et al***, 2017). También se ha explorado la estabilidad de la respectivas soluciones en las teorías vector-tensor, en especial en la teoría generalizada de Proca (**Kase, R., *et al***, 2018; **Heisenberg, L., *et al***, 2018).

En este trabajo se han encontrado, como primera aproximación y con base en el artículo de la Ref. (**Heisenberg, L., *et al***, 2017), soluciones exactas de agujeros negros estáticos y esféricamente simétricos en la teoría generalizada de Proca. Esto se llevó a cabo, en primer lugar, determinando las ecuaciones de campo gravitacional y de campo vectorial de la teoría. Posteriormente se determinó el perfil de la métrica y del campo vectorial acoplado a la

Rev. Acad. Colomb. Cienc. Ex. Fis. Nat. 45(174):30-51, enero-marzo de 2021
doi: https://doi.org/10.18257/raccefyn.1276

gravedad para cada acoplamiento presente en la acción generalizada de Proca. Finalmente se establecieron las condiciones necesarias para obtener soluciones exactas para cada tipo de acoplamiento.

Teoría generalizada de Proca

Considérese, en primer lugar, un espaciotiempo plano. Es sabido que cualquier vector, debido al teorema de Helmholtz, puede expresarse como la suma de una parte sin divergencia y una sin rotacional de la siguiente manera:

$$A_\mu = \mathcal{A}_\mu + \partial_\mu \pi, \tag{1}$$

con $\mathcal{A}_\mu$ siendo la parte sin divergencia y π, siendo un campo escalar que se identifica con el grado de libertad longitudinal asociado a A_μ. Entonces, si se desea que las ecuaciones de campo, tanto para A_μ como para su componente longitudinal π no sean de orden superior a dos, con el fin de evitar la inestabilidad de Ostrogradski (**Ostrogradski, M.**, 1850; **Woodard, R. P.**, 2007; **Woodard, R. P**, 2015), la acción del campo vectorial puede incluir, únicamente, al campo mismo y a sus primeras derivadas espaciotemporales $\partial_\mu A_\nu$ (**Rodríguez, Y., & Navarro, A.**, 2017).

Para construir la acción de la teoría generalizada de Proca (o acción de Galileones vectoriales) (**Rodríguez, Y., & Navarro, A.**, 2017; **Heisenberg, L.**, 2014; **Beltrán Jiménez, J., & Heisenberg, L.**, 2016; **Allys, E.,** ***et al***, 2016a, 2016c; **Tasinato, G.**, 2014a, 2014b) se deben identificar, en primer lugar, todos los posibles invariantes de Lorentz construidos a partir de la contracción de campos vectoriales y derivadas espaciotemporales de primer orden con los invariantes primitivos del grupo de Lorentz $SO(3,1)$: el tensor métrico y el tensor de Levi-Civita. Una vez se han identificado estos términos, se agrupan en una combinación lineal general. A continuación, se establecen relaciones entre los coeficientes de la combinación lineal de tal manera que no se propaguen más de tres grados de libertad, en consonancia con la estructura del grupo de Poincaré, lo cual se establece mediante la ligadura primaria proveniente de la condición Hessiana $\mathcal{H}^{0\nu} = 0$ (**Heisenberg, L.**, 2014; **Errasti, V.,** ***et al***, 2020a, 2020b), en donde

$$\mathcal{H}^{\mu\nu} \equiv \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A_\mu)(\partial_0 A_\nu)}. \tag{2}$$

Como último paso, se realiza el reemplazo $A_\mu \longrightarrow \partial_\mu \pi$ y se remueven los términos cuya acción resultante no corresponda a la de un Galileón escalar (o acción de Horndeski (**Deffayet, C., & Steer, D.**, 2013; **Nicolis, A.,** ***et al***, 2009; **Horndeski, H. W.,**, 1974; **Deffayet, C.,** ***et al***, 2009a, 2009b)).

De todo lo anterior resulta que la acción para el Galileón vectorial que generaliza la acción Abeliana de Proca es

$$S = \int \left[-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} m^2 A^2 + \sum_{N=2}^{6} \mathcal{L}^{Gal}_{N,A} \right] \mathrm{d}^4 x, \tag{3}$$

en donde (**Beltrán Jiménez, J., & Heisenberg, L.**, 2016; **Allys, E.,** ***et al***, 2016c)

$$\mathcal{L}^{Gal}_{2,A} = f_2(A_\mu, F_{\mu\nu}, \tilde{F}_{\mu\nu}), \tag{4}$$

$$\mathcal{L}^{Gal}_{3,A} = f_3(A^2) S^\mu_\mu, \tag{5}$$

$$\mathcal{L}^{Gal}_{4,A} = f_4(A^2) \left[(S^\mu_\mu)^2 - S^\sigma_\rho S^\rho_\sigma \right], \tag{6}$$

$$\mathcal{L}^{Gal}_{5,A} = f_5(A^2) \left[(S^\mu_\mu)^3 - 3 S^\mu_\mu S^\sigma_\rho S^\rho_\sigma + 2 S^\sigma_\rho S^\gamma_\sigma S^\rho_\gamma \right] + g_5(A^2) \tilde{F}^{\alpha\mu} \tilde{F}^{\beta}{}_{\mu} S_{\alpha\beta}, \tag{7}$$

$$\mathcal{L}^{Gal}_{6,A} = g_6(A^2) \tilde{F}^{\alpha\beta} \tilde{F}^{\mu\nu} S_{\alpha\mu} S_{\beta\nu}, \tag{8}$$

siendo $F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, $\tilde{F}_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F^{\rho\sigma}$, y $S_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu + \partial_\nu A_\mu$, en donde $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ es el tensor de Levi-Civita.

La versión para espacio tiempo curvo se obtiene promoviendo las derivadas parciales a derivadas covariantes y añadiendo los contratérminos requeridos para evitar la aparición de derivadas de orden mayor a dos en las ecuaciones de campo asociadas al modo longitudinal (**Deffayet, C., *et al***, 2009a). De esta forma se obtiene (**Heisenberg, L.**, 2014; **Tasinato, G.**, 2014a, 2014b; **Allys, E., *et al***, 2016a, 2016c; **Beltrán Jiménez, J., & Heisenberg, L.**, 2016; **Rodríguez, Y., & Navarro, A.**, 2017)

$$S = \int \mathrm{d}^4x\sqrt{-g}\left(F + \sum_{i=2}^{6}\mathcal{L}_i\right), \tag{9}$$

en donde g es el determinante de la métrica, $F \equiv -F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}/4$, y

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_2 &= G_2(X, F_{\mu\nu}, \tilde{F}_{\mu\nu}), && (10)\\
\mathcal{L}_3 &= G_3(X)\nabla_\mu A^\mu, && (11)\\
\mathcal{L}_4 &= G_4(X)R + G_{4,X}(X)\left[(\nabla_\mu A^\mu)^2 - \nabla_\mu A_\nu \nabla^\nu A^\mu\right], && (12)\\
\mathcal{L}_5 &= G_5(X)G_{\mu\nu}\nabla^\mu A^\nu - \frac{1}{6}G_{5,X}(X)\left[(\nabla_\mu A^\nu)^3\right.\\
&\quad \left.-3\nabla_\mu A^\mu \nabla_\rho A_\sigma \nabla^\sigma A^\rho + 2\nabla_\rho A_\sigma \nabla^\nu A^\rho \nabla^\sigma A_\nu\right]\\
&\quad +g_5(X)\tilde{F}^{\alpha\mu}\tilde{F}^{\beta}{}_{\mu}\nabla_\alpha A_\beta, && (13)\\
\mathcal{L}_6 &= G_6(X)L^{\mu\nu\alpha\beta}\nabla_\mu A_\nu \nabla_\alpha A_\beta\\
&\quad +\frac{1}{2}G_{6,X}(X)\tilde{F}^{\alpha\beta}\tilde{F}^{\mu\nu}\nabla_\alpha A_\mu \nabla_\beta A_\nu, && (14)
\end{aligned}$$

siendo $X \equiv -A_\mu A^\mu/2$, R el escalar de Ricci, $G_{\mu\nu}$ el tensor de Einstein, $G_{i,X} \equiv \partial G_i/\partial X$, y $L_{\mu\nu\rho\sigma}$ es el tensor doble dual de Riemann

$$L^{\mu\nu\alpha\beta} \equiv \frac{1}{4}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}R_{\rho\sigma\gamma\delta}. \tag{15}$$

Soluciones exactas de agujeros negros estáticos y esféricamente simétricos

Se emplearán a continuación las ecuaciones de campo gravitacional y vectorial de la teoría generalizada de Proca presentadas en el apéndice. Se empleará, además, el siguiente ansatz para la métrica y el campo vectorial de la teoría en coordenadas (pseudo)esféricas:

$$\begin{aligned}
\mathbf{g} &= -f(r)\,\mathrm{d}t \otimes \mathrm{d}t + h^{-1}(r)\,\mathrm{d}r \otimes \mathrm{d}r + r^2\,\mathrm{d}\theta \otimes \mathrm{d}\theta\\
&\quad +r^2 \sin^2\theta\,\mathrm{d}\phi \otimes \mathrm{d}\phi, && (16)\\
\mathbf{A} &= A_0(r)\,\mathrm{d}t + A_1(r)\,\mathrm{d}r. && (17)
\end{aligned}$$

Estos perfiles para los campos son compatibles con un espaciotiempo estático y esféricamente simétrico.

Solución de Reissner-Nordström en Relatividad General

Como preparación, en primer lugar, se usará el acomplamiento

$$G_4 = \frac{m_p^2}{2}, \quad G_2 = G_3 = G_5 = g_5 = G_6 = 0, \tag{18}$$

en donde m_p es la masa reducida de Planck, el cual conduce a las siguientes ecuaciones de campo vectorial y gravitacional, respectivamente,

$$0 = \nabla_\beta F^{\alpha\beta}, \tag{19}$$

$$\frac{m_p^2}{2}G_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(F_{\mu\alpha}F_\nu{}^\alpha - \frac{1}{4}g_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}\right), \tag{20}$$

Rev. Acad. Colomb. Cienc. Ex. Fis. Nat. 45(174):30-51, enero-marzo de 2021
doi: https://doi.org/10.18257/raccefyn.1276

en donde la única componente diferente de cero para el tensor de esfuerzos, para el perfil estático esféricamente simétrico, es la siguiente:

$$F_{01} = \partial_0 A_1 - \partial_1 A_0 = -A'_0 = -F_{10}. \tag{21}$$

En la expresión anterior y en las subsiguientes, una prima significa una derivada con respecto a r.

Así, las ecuaciones de campo no triviales obtenidas son

$$-\frac{h}{fr}A'_0 + \frac{hfA'_0}{4f^2} - \frac{h'A'_0}{4f} - \frac{hA''_0}{2f} = 0, \tag{22}$$

$$\frac{m_p^2}{2r^2}f - \frac{m_p^2 fh}{2r^2} - \frac{1}{4}hA'^2_0 - \frac{m_p^2 fh'}{2r} = 0, \tag{23}$$

$$\frac{m_p^2}{2r^2} - \frac{m_p^2}{2hr^2} + \frac{A'^2_0}{4f} + \frac{m_p^2 f'}{2fr} = 0, \tag{24}$$

$$\frac{m_p^2 rh'}{4} - \frac{hr^2A'^2_0}{4f} + \frac{m_p^2 hf'r}{4f} - \frac{m_p^2 hf'^2r^2}{8f^2} - \frac{m_p^2 f'h'r^2}{8f} + \frac{m_p^2 hf''r^2}{4f} = 0. \tag{25}$$

Si se multiplica la ecuación (23) por $(hf)^{-1}$ y se suma a la ecuación (24) se obtiene como resultado

$$f = const * h, \tag{26}$$

y, al considerarse un comportamiento asintóticamente plano es claro que $f(r) = h(r) = 1$ cuando $r \to \infty$, por lo tanto $const. = 1$ y

$$f = h. \tag{27}$$

Posteriormente, al reemplazar (27) en la expresión (22) se llega a la ecuación diferencial

$$\frac{A'_0}{r} + \frac{A''_0}{2} = 0, \tag{28}$$

la cual tiene como solución

$$A_0 = P + \frac{Q}{r}, \tag{29}$$

en donde P y Q son constantes de integración. Luego, sustituyendo las ecuaciones (27) y (29) en la ecuación (23) se obtiene que la función métrica f es

$$f = 1 - \frac{2M}{r} - \frac{Q^2}{2m_p^2 r^2}, \tag{30}$$

en donde Q es la carga asociada al campo vectorial y $-2M$ es la constante de integración que, una vez se lleva al límite Newtoniano, se identifica como la masa del agujero negro. La solución obtenida es, por lo tanto, la de Reissner-Nordström:

$$f = h = 1 - \frac{2M}{r} - \frac{Q^2}{2m_p^2 r^2}, \tag{31}$$

$$A_0 = P + \frac{Q}{r}. \tag{32}$$

Estas soluciones satisfacen también la ecuación (25) ya que usando la condición (27), y posteriormente las soluciones (31) y (32), se obtiene la ecuación

$$rA'^2_0 - 2m_p^2(2f'r + f'') = 0, \tag{33}$$

la cual se satisface idénticamente.

Sumado a todo lo anterior, cabe resaltar que la componente longitudinal A_1 corresponde a un modo de gauge no físico ya que este valor está indeterminado por las ecuaciones (22)-(25). Asimismo, la constante P es una constante arbitraria sin significado físico alguno.

Campo masivo de Proca

También cabe revisar el campo masivo de Proca en Relatividad General, el cual está dado por las funciones

$$G_4 = \frac{m_p^2}{2}, \quad G_2 = \mu^2 X, \quad G_3 = G_5 = g_5 = G_6 = 0, \tag{34}$$

en donde μ es la masa del campo vectorial.

Las ecuaciones de campo gravitacional y vectorial para esta configuración están dadas por

$$\mu^2 A^\alpha = \nabla_\beta F^{\alpha\beta}, \tag{35}$$

$$\frac{m_p^2}{2} G_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} - F_{\mu\alpha} F_\nu{}^\alpha\right) + \frac{1}{2}\mu^2 A_\mu A_\nu + \frac{1}{2}\mu^2 X g_{\mu\nu}, \tag{36}$$

las cuales llevan al siguiente sistema de ecuaciones diferenciales para los perfiles de la métrica y el campo vectorial que se están teniendo en consideración:

$$\frac{\mu^2}{f} A_0 - \frac{h}{rf} A_0' - \frac{h}{2f} A_0'' - \frac{h'}{4f} A_0' + \frac{hf'}{4f^2} A_0' = 0, \tag{37}$$

$$-\mu^2 A_1 h = 0, \tag{38}$$

$$\frac{m_p^2 f}{2r^2} - \frac{m_p^2 fh}{2r^2} - \frac{m_p^2 fh'}{2r} - \frac{1}{4} h A_0'^2 - \frac{1}{4}\mu^2 A_0^2 - \frac{1}{4}\mu^2 fh A_1^2 = 0, \tag{39}$$

$$-\frac{m_p^2 f}{2r^2} + \frac{m_p^2}{fh} + \frac{m_p^2 hf'}{2r} + \frac{1}{4} h A_0'^2 - \frac{1}{4}\mu^2 A_0^2 - \frac{1}{2}\mu fh A_1^2 = 0, \tag{40}$$

$$\frac{m_p^2 hf' r}{4f} - \frac{m_p^2 hf'^2 r^2}{8f^2} + \frac{1}{4} m_p^2 h' r + \frac{m_p^2 f' h' r^2}{8f} - \frac{hr^2}{4f} A_0'^2 + \frac{m_p^2 hf'' r^2}{4f} - \frac{\mu^2 r^2}{4f} A_0^2 + \frac{1}{4}\mu^2 hr^2 A_1^2 = 0, \tag{41}$$

$$-\frac{1}{2}\mu^2 A_0 A_1 = 0. \tag{42}$$

A partir de la ecuación (38), y observando que $\mu \neq 0$, se tiene que $A_1 = 0$, lo que implica que la ecuación (42) se satisface idénticamente. Reemplazando $A_1 = 0$ en las ecuaciones (39) y (40) y sumándolas se llega a la expresión

$$m_p^2 (f'h - fh') = \mu^2 A_0^2 r, \tag{43}$$

que al multiplicar por h^{-2} se convierte en

$$m_p^2 \frac{(f'h - fh')}{h^2} = \frac{\mu^2 A_0^2 r}{h^2}, \tag{44}$$

i.e,

$$\left(\frac{f}{h}\right)' = \frac{\mu^2 A_0^2 r}{m_p^2 h^2}. \tag{45}$$

Rev. Acad. Colomb. Cienc. Ex. Fis. Nat. 45(174):30-51, enero-marzo de 2021
doi: https://doi.org/10.18257/raccefyn.1276

Considerando el comportamiento asintótico del lado izquierdo de esta expresión se sabe que, con el fin de que r_h sea el horizonte de eventos, $f \longrightarrow 0$ y $h \longrightarrow 0$ cuando $r \longrightarrow r_h$. Es necesario también que $f(r) > 0$ y $h(r) > 0$ para $r > r_h$ con el objetivo de que la métrica sea Lorentziana. Debido a esto, las funciones métricas se pueden expandir alrededor del horizonte de la forma

$$f = \sum_{i=1} f_i (r - r_h)^i, \qquad h = \sum_{i=1} h_i (r - r_h)^i, \tag{46}$$

por lo tanto, si $r \longrightarrow r_h$, el lado izquierdo de la ecuación (45) tiende a un valor finito en tal límite. Asimismo, al analizar el comportamiento del lado derecho, se requiere que A_0 tienda a cero con el fin de que la expresión sea consistente. De otra parte, considerando el comportamiento asintótico para $r \longrightarrow \infty$, se sabe que en este límite $f = h = 1$. De esta manera , el límite de la expresión (44) conduce a

$$\lim_{r\to\infty} \left(\frac{f'h - fh'}{h^2} \right) = \lim_{r\to\infty} \left(\frac{\mu^2 A_0^2(r) r}{m_p^2 h^2} \right),$$

i.e,

$$0 = \lim_{r\to\infty} \frac{\mu^2 A_0^2(r) r}{m_p^2}, \tag{47}$$

y siendo $\mu \neq 0$ se concluye que $A_0 \longrightarrow 0$ cuando $r \longrightarrow \infty$.

Ahora bien, para determinar el comportamiento predicho por la ecuación (37) para valores de $r \gg r_h$, se reescribe esta ecuación empleando la expresión (45):

$$-h \left(\frac{A_0''}{2} + \frac{A_0'}{r} \right) + \frac{\mu^2 A_0^2 A_0'}{4 m_p^2 f} + \mu^2 A_0 = 0. \tag{48}$$

Ya que A_0 se hace muy pequeño para $r \gg r_h$, se descartan los términos cuadráticos de éste obteniéndose así la ecuación diferencial

$$-\frac{A_0''}{2} - \frac{A_0'}{r} + \mu^2 A_0 = 0, \tag{49}$$

cuya solución es

$$A_0(r) = c_1 \frac{e^{-\sqrt{2}\mu r}}{r} + c_2 \frac{e^{\sqrt{2}\mu r}}{r}, \tag{50}$$

siendo c_1 y c_2 constantes de integración. De otra parte, teniendo en cuenta que la ecuación (47) predice que $A_0(r \longrightarrow \infty) = 0$, la ecuación (49) conduce a

$$A_0 \propto \frac{e^{\mu r}}{r}. \tag{51}$$

Este comportamiento comienza a ser dominante cuando $r > \frac{1}{\mu}$. Además, debido a que se debe tener que $A_0 \longrightarrow 0$ cuando $r \longrightarrow \infty$, se concluye que $\mu = 0$. Por lo tanto no hay solución de agujero negro estático y esféricamente simétrico para un campo vectorial de Proca debido a que dicha solución existe solamente si $\mu = 0$, reduciéndose así a la solución de Reissner-Nordström.

Soluciones exactas para el acoplamiento cuártico G_4

Para este caso se considera el acoplamiento

$$G_4 = \frac{m_p^2}{2} + \frac{X}{4}, \tag{52}$$

el cual reduce las ecuaciones de campo a las expresiones

$$
\begin{aligned}
\frac{m_p^2}{2}G_{\mu\nu} =&\frac{1}{2}\left[F_{\mu\alpha}F_{\nu}{}^{\alpha}-\frac{F^2}{4}g_{\mu\nu}\right]-\frac{1}{4}\left[\frac{1}{2}g_{\mu\nu}(\nabla_\alpha A^\alpha)^2\right.\\
&-2A_{(\mu}\nabla_{\nu)}\nabla_\alpha A^\alpha-2\nabla_\alpha A_{(\mu}\nabla_{\nu)}A^\alpha\\
&+\frac{1}{2}g_{\mu\nu}\nabla_\alpha A_\beta\nabla^\beta A^\alpha+\nabla_\alpha(A_{(\mu}\nabla^\alpha A_{\nu)}\\
&+A_{(\mu}\nabla_{\nu)}A^\alpha-A^\alpha\nabla_{(\mu}A_{\nu)})+g_{\mu\nu}A_\beta\nabla^\beta\nabla^\alpha A_\alpha\\
&\left.-\frac{1}{2}\left(A_\mu A_\nu R-A^2G_{\mu\nu}-g_{\mu\nu}\Box A^2+\nabla_\mu\nabla_\nu A^2\right)\right], \qquad (53)\\
\nabla_\beta F^{\beta\alpha}=&-\frac{1}{2}G^{\beta\alpha}A_\beta, \qquad (54)
\end{aligned}
$$

en donde la simetrización se define como $M_{(\alpha\beta)}\equiv\frac{1}{2}\left(M_{\alpha\beta}+M_{\beta\alpha}\right)$.

La forma explícita de estas ecuaciones, para la configuración del campo y métrica que se está estudiando, es la siguiente:

$$
\begin{aligned}
0=&-2A_0f(-1+h+rh')\\
&+r\left[A_0'(hrf'-f(4h+rh'))-2fhrA_0''\right], \qquad (55)\\
0=&A_1h(f(h-1)+hrf'), \qquad (56)\\
0=&-2hr^2A_0'^2+A_0^2(-1+h+rh')\\
&-f\left[A_1h^2(A_1+4rA_1')+4m_p^2(rh'-1)\right.\\
&\left.+h(4m_p^2+A_1^2(1+3rh'))\right], \qquad (57)\\
0=&4A_0A_0'fhr+A_0^2\left[f(h-1)-hrf'\right]\\
&+f\left[f(-4m_p^2+(4m_p^2-A_1^2)h+3A_1^2h^2)\right.\\
&\left.+hr(2rA_0'^2+(4m_p^2+3A_1^2h)f')\right], \qquad (58)\\
0=&4A_0f\left[-2hf'rA_0'+f(rA_0'h'+2h(A_0'+rA_0''))\right]\\
&+A_0^2\left[3hf'^2r+2f^2h'-f(rf'h'+2h(f'+rf''))\right]\\
&+f\left[4A_1fh^2A_1'(2f+rf')+4m_p^2(-hrf'^2+2f^2h'\right.\\
&+f(rf'h'+2h(f'+rf'')))]+A_1^2h\left[-hrf'^2+6f^2h'\right.\\
&\left.+f(2rf'h'+2h(f'+rf''))\right], \qquad (59)\\
0=&A_0A_1\left[f(h-1)+hrf'\right]. \qquad (60)
\end{aligned}
$$

En primer lugar, la ecuación (60) admite una solución en donde $A_0=0$ o $A_1=0$. Por lo tanto, considerando $A_0=0$ y $A_1\neq 0$, la ecuación (56) establece la siguiente relación entre las funciones métricas:

$$h=\frac{f}{f+f'r}. \qquad (61)$$

Entonces, al reemplazar esta relación en la ecuación (58) se obtiene:

$$0=A_1^2f^2, \qquad (62)$$

lo que inevitablemente lleva a la inconsistencia $A_1=0$. En segundo lugar, si se considera $A_0\neq 0$ y $A_1=0$, el sistema de ecuaciones diferenciales tiene solución únicamente si $A_0=0$, lo que resulta, de nuevo, en una inconsistencia. La conclusión es que tanto A_0 como A_1 son iguales a cero y, por lo tanto, la solución es de tipo Schwarzschild.

Ahora bien, si se considera la rama en la cual A_0 y A_1 son diferentes de cero, de la ecuación (60) se obtiene la relación (61). Reemplazando esta relación y su derivada en la ecuación (58) se obtiene

$$A_1=\pm\frac{\sqrt{r^2(A_0A_0'f-frA_0'^2+A_0^2f')}}{f}. \qquad (63)$$

Rev. Acad. Colomb. Cienc. Ex. Fis. Nat. 45(174):30-51, enero-marzo de 2021
doi: https://doi.org/10.18257/raccefyn.1276

Al reemplazar esta expresión en las ecuaciones (55) y (57) y resolver el sistema, se obtiene la solución dada por

$$A_0 = P + \frac{Q}{r}, \tag{64}$$

$$f = C - \frac{2M}{r}, \tag{65}$$

en donde P, $2M$ y Q son constantes de integración. De otra parte, dado que en el límite $r \to \infty$ se debe tener espaciotiempo plano, se deduce que $C = 1$. Insertando estas expresiones en (61) y (63) se obtiene la solución

$$h = f = 1 - \frac{2M}{r}, \tag{66}$$

$$A_0 = P + \frac{Q}{r}, \tag{67}$$

$$A_1 = \frac{\sqrt{2P(MP + Q)r + Q^2}}{r - 2M}. \tag{68}$$

Por consiguiente, las soluciones para el presente acoplamiento cumplen las siguientes condiciones:

$$f = h, \tag{69}$$

$$X = -\frac{A_\mu A^\mu}{2} = X_c, \tag{70}$$

con X_c constante, las cuales serán usadas de aquí en adelante con el fin de encontrar soluciones exactas. Esta última condición se traduce en que

$$A_1 = \pm \frac{\sqrt{A_0^2 - 2fX_c}}{f}. \tag{71}$$

En contraste, para un acoplamiento general $G_4 = G_4(X)$, las ecuaciones de campo vectorial están dadas por

$$\begin{aligned} &A_0 \left\{G_{4,XX} A_1^2 h^2 f' r + f \left[G_{4,X} + h(-G_{4,X}\right.\right. \\ &\left.\left. + G_{4,XX} A_1 h(A_1 + 2rA_1')) + (-G_{4,X} + G_{4,XX} A_1^2 h) r h'\right]\right\} \\ &+ \frac{r}{8}\left[A_0'^2 (hf'r - f(4h + rh')) - 2fhrA_0''\right] = 0, \end{aligned} \tag{72}$$

$$\begin{aligned} &A_1 \left\{\left[f(G_{4,X} - G_{4,X} h + G_{4,XX} A_1^2 h^2) + 2G_{4,XX} A_0 \frac{h}{f} A_0' r\right]\right. \\ &\left. - \frac{h}{f}\left[G_{4,XX} A_0^2 + f(G_{4,X} - G_{4,XX} A_1^2 h)\right] r f'\right\} = 0. \end{aligned} \tag{73}$$

Para que la última expresión se satisfaga existen dos posibilidades, $A_1 = 0$ y $A_1 \neq 0$, que serán estudiadas a continuación.

$A_1 \neq 0$

Al proponer que la segunda derivada del acoplamiento G_4 evaluada en X_c cumpla la condición

$$G_{4,XX}(X_c) = 0, \tag{74}$$

se observa que la ecuación (73) establece la siguiente relación entre las funciones métricas h y f:

$$h = \frac{f}{f + f'r}, \tag{75}$$

de la cual, haciendo uso de la condición (69), se obtiene que la función métrica f viene dada por

$$f = 1 - \frac{2M}{r}. \tag{76}$$

Dicha solución lleva a que la ecuación (72) se reduzca a la expresión

$$2A_0' + rA_0'' = 0, \tag{77}$$

cuya solución ya fue obtenida previamente. Esta solución es

$$A_0 = P + \frac{Q}{r}, \tag{78}$$

la cual, a causa de la condición (70), lleva a que la componente longitudinal del campo tenga la forma

$$A_1 = \pm\frac{\sqrt{-2X_c\left(1 - \frac{2M}{r}\right) + \left(P + \frac{Q}{r}\right)^2}\, r}{r - 2M}. \tag{79}$$

Así, insertando las expresiones de f, h, A_0 y A_1 en la ecuación de campo gravitacional de componente $(\mu, \nu) = (0, 0)$,

$$\begin{aligned} 0 =& hr^2 A_0'^2 - 4G_{4,X}(-1 + h + rh') \\ &+ 4f\left[G_{4,X} A_1 h^2 (A_1 + 2rA_1') + G_4(rh' - 1)\right. \\ &+ \left. h(G_4 + 2G_{4,X} A_1^2 rh')\right], \end{aligned} \tag{80}$$

se obtiene

$$G_{4,X}(X_c) = \frac{1}{4}. \tag{81}$$

De manera análoga, realizando el mismo procedimiento anterior en la ecuación de componente $(\mu, \nu) = (1, 1)$,

$$\begin{aligned} 0 =& 4f^2\left[-G_4 + (G_4 - G_{4,X} A_1^2)h + 2G_{4,X} A_1^2 h^2\right] \\ &- 4G_{4,X} A_0^2 h f' r + fhr\left[8G_{4,X} A_0 A_0'\right. \\ &+ \left. rA_0'^2 + 4(G_4 + 2G_{4,X} A_1^2 h)f'\right], \end{aligned} \tag{82}$$

y reemplazando (81) en la misma, se logra determinar el valor de X_c en términos de las constantes de integración. Este valor es

$$X_c = \frac{P^2}{2}. \tag{83}$$

Esto último indica que la función que describe a la componente longitudinal del campo está dada por

$$A_1 = \frac{\sqrt{Q^2 + 2P(MP + Q)r}}{r - 2M}. \tag{84}$$

De lo anterior se infiere que la función $G_4(X)$, que obedece a las condiciones (74) y (81), está dada por

$$G_4(X) = G_4(X_c) + \frac{1}{4}(X - X_c) + \sum_{n=3} b_n (X - X_c), \tag{85}$$

en donde $X_c = P^2/2$ y todas las b_n son constantes. El modelo $G_4(X) = m_p^2/2 + X/4$ es el caso especial de la última expresión (85), es decir, $G_4(X_c) = m_p^2/2 + X_c/4$ y todos los $b_n = 0$ para $n \geq 3$. La solución de arriba es una solución de Schwarzschild con componente vectorial longitudinal diferente de cero.

Rev. Acad. Colomb. Cienc. Ex. Fis. Nat. 45(174):30-51, enero-marzo de 2021
doi: https://doi.org/10.18257/raccefyn.1276

Aunque la carga P en un espaciotiempo de Reisner-Nordström no tiene significado físico, en este caso es una carga que controla el perfil longitudinal $A_1(r)$, mas no su geometría. Nótese que se puede apagar la carga Q y dejar la carga P encendida en presencia de un agujero negro masivo, caracterizando así un perfil longitudinal no trivial. En este sentido, P representa una carga adicional para la configuración, además de la masa y la carga eléctrica. Sin embargo, esta carga no es observable aplicando la ley de Gauss -ya que el campo no contribuye a $F_{\mu\nu}$- y por lo tanto, estrictamente hablando, esta configuración no viola la conjetura de no pelo (**Carter, B.**, 1971; **Robinson, D. C.**, 1975).

$A_1 = 0$

Si se impone $A_1 = 0$ y la condición (70), se tiene que $A_0^2 = 2fX_c$ a partir de (71). Bajo la condición (69), la ecuación (73) se anula y la ecuación (72) se reduce a

$$8G_{4,X}(X_c)(f - f^2 - frf') + \left(\frac{1}{2}r^2 f'^2 - fr^2 f'' - 2ff'r\right) = 0. \tag{86}$$

Si se toma $1 - f - rf' = 0$, su solución

$$f = 1 - \frac{2M}{r}, \tag{87}$$

no satisfaría la ecuación (86). Entonces, se debe considerar

$$\frac{1}{2}r^2 f'^2 - f'' f r^2 - 2rff' = 0, \tag{88}$$

con $G_{4,X}(X_c) = 0$. Escribiendo a la función métrica f como

$$f(r) = e^{\lambda(r)}, \tag{89}$$

la ecuación (88) se transforma en una nueva ecuación diferencial para la función $\lambda(r)$, la cual es

$$4\lambda' + r\lambda'^2 + 2r\lambda'' = 0. \tag{90}$$

Esta expresión se puede reescribir como

$$r^2\lambda'^2 + 2(\lambda' r^2)' = 0, \tag{91}$$

cuya solución, $\forall M < r$, es

$$\lambda = \ln\left(\frac{C_2 - Cr}{r}\right)^2, \tag{92}$$

en donde C_2 y C son constantes. En consecuencia, la función f queda representada por la siguiente expresión:

$$f = \left(C - \frac{M}{r}\right)^2, \tag{93}$$

en donde $M = C_2$. Además, se deduce que $C = 1$ ya que la función métrica debe tender a 1 cuando $r \to \infty$. Así,

$$f = \left(1 - \frac{M}{r}\right)^2. \tag{94}$$

Con todo lo anterior, al usar la ecuación de campo gravitacional de componente $(\mu, \nu) = (0, 0)$, se tiene que

$$G_4(X_c) = \frac{X_c}{2}. \tag{95}$$

Este resultado implica, adicionalmente, que las ecuaciones de campo resultantes se satisfagan idénticamente. Así, se tiene que un acoplamiento $G_4(X)$ que cumpla todo lo anterior debe ser de la forma

$$G_4(X) = \frac{X_c}{2} + \sum_{n=2} b_n (X - X_c)^n. \tag{96}$$

La solución exacta resultante es, por lo tanto,

$$\begin{aligned} f = h &= \left(1 - \frac{M}{r}\right)^2, \\ A_0 &= P - \frac{MP}{r}, \\ A_1 &= 0, \end{aligned} \tag{97}$$

en donde $P = \pm\sqrt{2X_c}$. Esto corresponde a una solución de agujero de Reissner-Nordström con una carga eléctrica igual a la masa del agujero negro.

Soluciones exactas de agujeros negros para acoplamientos generales

Se procede ahora con la deducción de soluciones exactas de agujeros negros en la presencia de los acoplamientos $G_3(X)$, $G_5(X)$, $G_6(X)$, $g_5(X)$ y $G_2(X, F) = -2g_4(X)F$. Este último corresponde al modo vectorial intrínseco que fue originalmente introducido en $\mathcal{L}_4$ en la forma $g_4(X)(\nabla_\rho A_\sigma \nabla^\rho A^\sigma - \nabla_\rho A_\sigma \nabla^\sigma A^\rho)$, en donde $g_4(X) = const * G_{4,X}$. Para este análisis se toma en cuenta el término de Einstein-Hilbert, es decir, $G_4(X) = m_p^2/2$. De manera similar a lo realizado en las secciones anteriores, se imponen las condiciones (69) y (70) en el desarrollo siguiente.

Acoplamiento cúbico $G_3(X)$

Para este caso, la ecuación de campo vectorial de componente $\alpha = 1$ es

$$G_{3,X}\left(A_0 r(2fA_0' - A_0 f') + A_1^2 f^2(4f + rf')\right) = 0, \tag{98}$$

la cual da paso a dos posibilidades: $G_{3,X}(X_c) = 0$ y $G_{3,X}(X_c) \neq 0$.

(i) $G_{3,X}(X_c) = 0$

Para este caso, las ecuaciones para el campo vectorial A_0 y las de campo gravitacional de componentes $(\mu, \nu) = (0, 0)$ y $(\mu, \nu) = (2, 2)$ son, respectivamente,

$$0 = \frac{A_0'}{r} + \frac{A_0''}{2}, \tag{99}$$

$$0 = -2m_p^2 + r^2 A_0'^2 + 2m_p^2(f + rf'), \tag{100}$$

$$0 = -r^2 A_0'^2 + m_p^2(2rf' + r^2 f''), \tag{101}$$

ya que la ecuación de componente $(\mu, \nu) = (1, 1)$ es igual a la de componente $(\mu, \nu) = (0, 0)$, siendo las demás triviales.

A partir de la solución a la ecuación (99), la cual fue obtenida en secciones anteriores, se concluye que la componente en dirección temporal del campo está dada por

$$A_0 = P + \frac{Q}{r}, \tag{102}$$

en donde P y Q son constantes de integración. Adicionalmente, si inserta este resultado en la ecuación (100), se obtiene la expresión

$$0 = -2m_p^2 + \frac{Q^2}{r^2} + 2m_p^2(f + rf'), \tag{103}$$

cuya solución para f viene dada por

$$f = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{2m_p^2 r^2}. \tag{104}$$

Por lo tanto, para este caso se tiene una solución de Reissner-Nordström con la componente longitudinal del campo diferente de cero gracias a la condición (70):

$$\begin{aligned} A_1 = \pm &\frac{2m_p^2 r}{2m_p^2(r^2 - 2Mr) + Q^2}\left[m_p^2(P^2 - 2X_c)r^2\right. \\ &\left. +2m_p^2(PQ + 2MX_c)r + Q^2(m_p^2 - X_c)\right]^{1/2}. \end{aligned} \tag{105}$$

Rev. Acad. Colomb. Cienc. Ex. Fis. Nat. 45(174):30-51, enero-marzo de 2021
doi: https://doi.org/10.18257/raccefyn.1276

Por consiguiente, una función que lleve a esta solución debe estar dada por

$$G_3(X) = G_3(X_c) + \sum_{n=2} b_n (X - X_c)^n, \tag{106}$$

en donde los b_n son constantes.

(ii) $G_{3,X}(X_c) \neq 0$

Combinando las expresiones (69), (70) y (98) se obtiene

$$f' = \frac{rA_0A_0' + 2A_0^2 - 4fX_c}{X_c r}. \tag{107}$$

Sustituyendo esta expresión en la ecuación de campo vectorial para $\alpha = 0$ se obtiene $rA_0'' + 2A_0' = 0$, lo cual lleva a la solución $A_0 = P + Q/r$ con dos constantes P y Q. Entonces, insertando esta solución en la ecuación (107) se obtiene

$$\begin{aligned} f' =& -\frac{4f}{r} + \frac{Q^2}{X_c r^3} + \frac{2PQ}{X_c r^2} + \frac{2P^2}{X_c r}, \\ 4fr^3 + r^4 f' =& \frac{Q^2 r}{X_c} + \frac{2PQr^2}{X_c} + \frac{2P^2r^3}{X_c}, \\ (r^4 f)' =& \frac{Q^2 r}{X_c} + \frac{2PQr^2}{X_c} + \frac{2P^2r^3}{X_c}, \\ r^4 f =& \frac{Q^2r^2}{2X_c} + \frac{2PQr^2}{3X_c} + \frac{P^2r^4}{2X_c} + C, \\ f =& \frac{1}{X_c}\left(P + \frac{Q}{r}\right)^2 + \frac{C}{r^4}, \end{aligned} \tag{108}$$

en donde C es una constante. Para satisfacer que la métrica sea asintóticamente plana, f debe tender a 1 cuando $r \to \infty$, lo que conduce a que $P^2 = 2X_c$. Así las ecuaciones de campo gravitacional se satisfacen únicamente si $C = 0$ y $P = \sqrt{2}m_p$. Ademas, de la ecuación de componente $(\mu, \nu) = (0, 1)$ se tiene que $A_1 = 0$. Entonces, para $M = \pm Q/(\sqrt{2}m_p)$ se obtiene la solución (94) con el modo A_1 igual a cero.

Acoplamiento de quinto orden $G_5(X)$

Para este acoplamiento, las ecuaciones de campo vectorial de componentes $\alpha = 0$ y $\alpha = 1$ vienen dadas por

$$\begin{aligned} 0 =& A_0 r + \frac{1}{2}A_0'' r^2 + G_{5,XX} A_0 A_1^2 (fA_1' + A_1 f') \\ &+ \frac{1}{f} G_{5,X} A_0 \left(-(-1+f) f A_1' + A_1(1-2f) f'\right), \end{aligned} \tag{109}$$

$$\begin{aligned} 0 =& G_{5,X} \left(A_0^2 (f-1)\frac{f'}{f^2} - 2A_0(f-1)\frac{A_0'}{f} + A_1^2(1-3f)f'\right) \\ &+ G_{5,XX} A_1^2 \left(2A_0A_0' f + (A_1^2 f^2 - A_0^2) f'\right). \end{aligned} \tag{110}$$

Aplicando la condición (70) en ambas ecuaciones, multiplicando la ecuación (109) por $2A_1 f$ y restándola de la ecuación (110) multiplicada por A_0, se obtiene la ecuación diferencial

$$0 = 2A_0' + rA_0''. \tag{111}$$

Adicionalmente, la ecuación (110), bajo la condición (70), adopta la forma

$$\begin{aligned} 0 =& -G_{5,X}(X_c)\left[A_0A_0'(f-1) - f'(X_c + A_0^2 - 3X_c f)\right] \\ &+ G_{5,XX}(X_c)(A_0^2 - 2X_c f)(A_0A_0' - X_c f'). \end{aligned} \tag{112}$$

De la ecuación (111) se obtiene, por supuesto, que $A_0 = P + Q/r$, con P y Q constantes. Si la ecuación (112) se satisface para (i) $A_0A_0' = X_c f'$ o (ii) $A_0^2 = 2fX_c$.

Para la primera rama se tiene la expresión

$$f' = \frac{A_0A_0'}{X_c} = -\frac{(Pr+Q)Q}{X_c r^3}, \tag{114}$$

cuya integración da como resultado

$$f = h = C - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{2X_c r^2}, \tag{115}$$

con $M = -PQ/(2Xc)$. En el límite asíntotico cuando $r \to \infty$, se debe tener que $f = h = 1$, lo cual indica que $C = 1$. De otra parte, se tiene que las ecuaciones de campo gravitacional de componentes $(\mu, \nu) = (0, 0)$, $(\mu, \nu) = (1, 1)$ y $(\mu, \nu) = (2, 2)$ son, respectivamente,

$$\begin{aligned}
0 =& \frac{1}{2fr^2}\left\{-m_P^2(-1 + rf' + f) - r^2A_0'^2\right\} \\
&+ \frac{1}{4r^2}G_{5,XX}a_1^2\left\{2f\left[A_0A_1A_0' + (A_0^2 - A_1^2f^2)A_1'\right]\right. \\
&\left.+ A_1(A_0^2 - A_1^2f^2)f'\right\},
\end{aligned} \tag{116}$$

$$\begin{aligned}
0 =& \frac{f}{2r}\left\{m_P^2(-1 + rf' + f) + r^2A_0'^2\right\} \\
&+ \frac{1}{4r^2}G_{5,XX}A_1^3f^2\left[2A_0A_0'f + (-A_0^2 + A_1^2f^2)f'\right],
\end{aligned} \tag{117}$$

$$0 = -2rA_0'^2 + m_P^2(2f' + rf''). \tag{118}$$

Insertando la solución para A_0 y para f en la ecuación de componente $(\mu, \nu) = (2, 2)$ se obtiene que

$$X_c = m_P^2. \tag{119}$$

Lo anterior lleva a que se satisfagan idénticamente las ecuaciones de componentes $(\mu, \nu) = (0, 0)$ y $(\mu, \nu) = (1, 1)$. Por lo tanto las soluciones para este tipo de acoplamiento están dadas por

$$f = h = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{2m_P^2r^2}, \tag{120}$$

$$A_0 = -\frac{2Mm_P^2}{Q} + \frac{Q}{r}, \tag{121}$$

lo cual, usando la condición (70), conlleva a

$$A_1 = \pm\frac{2m_P^2\sqrt{2(2M^2m_P^2 - Q)r^2}}{Q\left[2m_P^2r(2M - r) - Q^2\right]}. \tag{122}$$

La existencia de esta solución requiere que $2M^2m_P^2 > Q^2$.

A partir de la ecuación (70), la segunda rama corresponde a $A_1 = 0$. El reemplazar esta condición en la ecuación (109) conduce a

$$-r^2f'^2 + 2f(2rf' + r^2f'') = 0, \tag{123}$$

la cual es la misma ecuación diferencial (88) cuya solución es

$$f = h = \left(1 - \frac{M}{r}\right)^2. \tag{124}$$

Por otra parte, de la ecuación (118) se tiene que

$$X_c = m_P^2, \tag{125}$$

Rev. Acad. Colomb. Cienc. Ex. Fis. Nat. 45(174):30-51, enero-marzo de 2021
doi: https://doi.org/10.18257/raccefyn.1276

lo que indica que la expresión para la componente temporal del campo vectorial, A_0, está dada por

$$A_0 = \sqrt{2}\left(-m_p + \frac{Mm_p}{r}\right), \tag{126}$$

con la relación particular $Q^2 = 2M^2 m_p^2$. De hecho esto puede ser visto como el caso de las soluciones de la rama anterior con la componente radial del campo siendo nula.

Es de anotar que un modo concreto de obtener las soluciones ya presentadas es mediante un acoplamiento $G_5(X)$ que esté descrito por la siguiente expresión:

$$G_5(X) = G_5(X_c) + \sum_{n=2} b_n (X - X_c)^2, \tag{127}$$

en donde $X_c = m_p^2$.

Acoplamiento de sexto orden $G_6(X)$

En presencia del acoplamiento general G_6, la ecuación de campo vectorial de componente $\alpha = 1$ se reduce a

$$A_1 A_0'^2 \left[G_{6,X}\,(3f - 1) - G_{6,XX} A_1^2 f^2\right] = 0, \tag{128}$$

para la cual se requiere que $A_1 = 0$ o $A_0' = 0$.

(i) $A_0' = 0$

En este caso se tiene que

$$A_0 = P = const., \tag{129}$$

lo que implica que la componente $\alpha = 0$ de la ecuación de campo vectorial y la componente $(\mu, \nu) = (0, 1)$ de la ecuación de campo gravitacional se safisfagan idénticamente. De esta manera, las ecuaciones de campo gravitacional de componentes $(\mu, \nu) = (0, 0)$ y $(\mu, \nu) = (1, 1)$ llevan a la ecuación diferencial

$$-1 + f + rf' = 0, \tag{130}$$

cuya solución, obtenida previamente, es

$$f = h = 1 - \frac{2M}{r}, \tag{131}$$

la cual también hace que la ecuación de campo gravitacional de componente $(\mu, \nu) = (2, 2)$ se satisfaga idénticamente. Por lo tanto, usando la condición (70), se obtiene que el modo longitudinal del campo vectorial viene dado por

$$A_1 = \pm\frac{\sqrt{r(P^2 r + 4MX_c - 2rX_c)}}{r - 2M}. \tag{132}$$

Ya que $A_1 \to \pm\sqrt{P^2 - 2X_c}$ cuando $r \to \infty$, se requiere que $P^2 > 2X_c$ para garantizar la existencia de la solución.

0.0.1 (ii) $A_1 = 0$

Para este caso, en primer lugar, la ecuación de campo gravitacional de componente $(\mu, \nu) = (0, 1)$ se satisface idénticamente. Además, debido a la condición (70), $A_0^2 = 2fX_c$. Esto lleva a que las ecuaciones de campo gravitacional de componentes $(\mu, \nu) = (0, 0)$ y $(\mu, \nu) = (1, 1)$ se reduzcan, respectivamente, a

$$\frac{m_p^2}{2} f(rf'' + 2f') - \frac{X_c}{4} rf'^2 - X_c f f' f'' G_6 = 0, \tag{133}$$

$$\begin{aligned}&(rf'' + 2f') - \frac{rf'^2}{2rf} - \frac{1}{r}\left[2ff'' + (f'^2 - 2f'') + \frac{f'^2}{f}\right] G_6 \\ &+ 2X_c(f - 1) f'^2 G_{6,X} = 0.\end{aligned} \tag{134}$$

Para obtener soluciones exactas se tomarán las condiciones

$$G_6(X_c) = 0, \quad y \quad G_{6,X}(X_c) = 0. \tag{135}$$

De la ecuación (134) se obtiene la solución de Reissner-Nordström cuya carga es igual a la masa del agujero negro, es decir,

$$f = h = \left(1 - \frac{M}{r}\right)^2, \tag{136}$$

que al reemplazar en la ecuación (133) da como resultado que $X_c = m_p^2$. Además, la componente temporal del campo vectorial es $A_0 = P + Q/r$, en donde $P = \pm\sqrt{2}m_p$ y $Q = \sqrt{2}Mm_p$. Esto es equivalente a la solución obtenida para el acoplamiento de quinto orden $G_5(X)$ de la rama $A_0^2 = 2fX_c$.

Un modelo concreto que lleve a la solución obtenida para este caso debe ser de la forma

$$G_6(X) = \sum_{n=2} b_n(X - X_c), \tag{137}$$

en donde $X_c = m_p^2$.

Acoplamiento cuártico $g_4(X)$

Considérese el acoplamiento dado por

$$G_2(X, F) = -2g_4(X)F, \tag{138}$$

en donde $g_4(X)$ es una función de X. De esta manera, la ecuación de campo vectorial de componente $\alpha = 1$, usando las condiciones (69) y (70), es

$$g_{4,X}A_1A_0'^2 = 0. \tag{139}$$

Considérese ahora, por lo tanto, el caso en el cual se satisface la relación

$$g_{4,X}(X_c) = 0. \tag{140}$$

En estas circunstancias, la ecuación de campo vectorial de componente $\alpha = 0$ y la ecuación de campo gravitacional de componente $(\mu, \nu) = (0, 0)$ son, respectivamente,

$$rA_0'' + 2A_0' = 0, \tag{141}$$

$$2m_p^2(1 - f - rf') + (1 - 2g_4)r^2A_0'^2 = 0. \tag{142}$$

A partir de la primera ecuación, la componente temporal del campo vectorial es

$$A_0 = P + \frac{Q}{r}, \tag{143}$$

la cual, al reemplazar en la segunda ecuación, lleva a

$$f = h = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{2m_p^2r^2}\left[1 - 2g_4(X_c)\right], \tag{144}$$

con el modo longitudinal del campo dado por la expresión (71). Esto equivale a un solución de Reissner-Nordström con carga efectiva $Q_{eff} = Q\sqrt{1 - 2g_4(X_c)}$ que es diferente de Q a menos que $g_4(X_c) = 0$.

Así, un acoplamiento que lleve a estas soluciones viene dado por

$$g_4(X) = g_4(X_c) + \sum_{n=2} b_n(X - X_c). \tag{145}$$

Rev. Acad. Colomb. Cienc. Ex. Fis. Nat. 45(174):30-51, enero-marzo de 2021
doi: https://doi.org/10.18257/raccefyn.1276

Para el caso particular $g_4(X_c) = 1/2$ se obtiene la solución de Schwarzschild $f = h = 1 - 2M/r$ con A_0 indeterminado.

Por otra parte, la ecuación (139) también se satisface si $(i) A_1 = 0$ o $(ii) A_0' = 0$. Para la rama (i), la ecuación de campo vectorial de componente $\alpha = 0$ y la ecuación de campo gravitacional de componente $(\mu, \nu) = (0, 0)$ vienen dadas, respectivamente, por

$$2A_0(f + g_{4,X} A_0 A_0' r) + f A_0'' r = 0, \tag{146}$$

$$2g_{4,X} A_0^2 A_0'^2 r^2 - f\left[2m_p^2(rf' + f - 1) + (1 - 2g_4)A_0'^2 r^2\right] = 0. \tag{147}$$

Existe una solución exacta bajo las condiciones $g_{4,X}(X_c) = 0$ y $g_4(X_c) = 1/2$ la cual está dada por

$$f = h = 1 - \frac{2M}{r}, \quad A_0 = \pm\sqrt{2\left(1 - \frac{2M}{r} X_c\right)},$$
$$A_1 = 0. \tag{148}$$

Esta solución existe para la función (145) con $g_4(X_c) = 1/2$.

Para la rama (ii), se obtiene la solución de Schwarzschild $f = h = 1 - 2M/r$ con $A_0 = const.$ y A_1 dado por la ecuación (71) para acoplamientos generales $g_4(X)$.

Acoplamiento vectorial de quinto orden $g_5(X)$

Finalmente, se busca la solución exacta para el acoplamiento de quinto orden $g_5(X)$. Para este acomplamiento, la ecuación de campo vectorial de componente $\alpha = 0$ viene dada por

$$A_0'^2(g_5 - g_{5,X}(A_0^2 - 2fX_c)) = 0. \tag{149}$$

Para la rama $A_0' = 0$, se obtiene la solución de Schwarzschild $f = h = 1 - 2M/r$ seguida del modo longitudinal del campo dado por la ecuación (71), con $A_0 = const$, para acoplamientos $g_5(X)$ generales.

Para la otra rama, $fg_5 = (A_0^2 - 2fX_c)g_{5,X}$, existe solución exacta bajo la condición

$$g_{5,X} = 0. \tag{150}$$

Esto lleva a que la ecuación de campo vectorial de componente $\alpha = 0$ y la ecuación de campo gravitacional de componente $(\mu, \nu) = (0, 0)$ sean las de la solución de Reissner-Nördstrom en Relatividad General. De esta manera se obtiene la solución de Reissner-Nordström con A_1 dado por la ecuación (71).

Ya que $g_5(X_c) = 0$, un acoplamiento de quinto orden de la forma

$$g_5(X) = \sum_{n=2} b_n (X - X_c)^n, \tag{151}$$

da como resultado, en este caso, la solución de Reissner-Nordström con el modo longitudinal diferente de cero.

Conclusiones

En este trabajo se hizo uso de la acción (9) y a partir del método variacional se obtuvieron las ecuaciones de campo gravitacionales y vectoriales de la teoría generalizada de Proca. Posteriormente, se determinaron los perfiles del campo y del tensor métrico propios de un espaciotiempo estático y con simetría esférica. Con ello se establecieron condiciones para las funciones métricas y las funciones componentes del campo vectorial con el fin de obtener soluciones exactas. También se calculó la forma que deben tener los acoplamientos para llegar a dichas soluciones.

En primer lugar, al usar el acoplamiento $G_4 = m_p^2/2$, se recuperó la Relatividad General para un espaciotiempo de electrovacío. En éste se obtuvo la solución de Reissner-Nördstrom. Por otra parte, se corroboró la no existencia de soluciones en el caso de Proca masivo. La no existencia se da como consecuencia de que la solución para el campo vectorial es incompatible con el comportamiento asintótico que deben tener las funciones métricas, tanto en el horizonte de eventos ($f(r_h) = h(r_h) = 0$) como en el infinito ($f(r \to \infty) = h(r \to \infty) = 1$). La incompatibilidad desaparece cuando la masa del campo μ es nula, lo cual corresponde a un espaciotiempo de Reissner-Nordström.

Seguidamente se encontró la solución para el acoplamiento $G_4 = m_p^2/2 + X/4$. Para esta solución se satisfacen las condiciones $f = h$ y $X = X_c = const.$, las cuales se usaron para encontrar soluciones exactas correspondientes a cada tipo de acoplamiento usado. En general, las soluciones obtenidas para todos los acoplamientos considerados en este documento no difieren de soluciones de Schwarzschild y Reissner-Nordström salvo en las funciones componentes del campo vectorial. Esto, en efecto, es consecuencia de las restricciones usadas con el objetivo de encontrar soluciones exactas. Entonces, el aliviar las condiciones puede conducir a soluciones más generales mediante métodos iterativos. Adicionalmente, en varias de las soluciones encontradas en este trabajo, el modo longitudinal del campo vectorial resultó ser diferente de cero con lo cual aparece una nueva carga P que no rompe la conjetura de no pelo dado que en las funciones métricas no se evidencia la presencia de esta carga. Sumado a esto, la carga P aparece como un modo de gauge no físico en la componente temporal del campo. Por otra parte, aunque se obtienen diversas expresiones para la componente longitudinal del campo vectorial, en los demás acoplamientos estudiados en este documento, las funciones métricas siguen siendo soluciones de Schwarzschild o Reissner-Nordström.

Es claro que al usar una teoría y obtener resultados que ya son predichos por una teoría más simple, se tiene mayor preferencia por esta última. En este caso, al usar la teoría generalizada de Proca, que es de mayor complejidad que la Relatividad General, se obtiene soluciones exactas que ya son predichas por esta última. Por consiguiente, en el marco de las soluciones exactas de agujeros negros estáticos y esféricamente simétricos, la teoría de Einstein luce más atractiva que la teoría generalizada de Proca.

Agradecimientos

Este trabajo fue financiado por los siguientes proyectos de investigación: Patrimonio Autónomo - Fondo Nacional de Financiamiento para la Ciencia, la Tecnología y la Innovación Francisco José de Caldas (MINCIENCIAS - COLOMBIA) programa No. 110685269447 RC-80740-465-2020, proyecto 69553, Vicerrectoría de Ciencia, Tecnología, e Innovación - Universidad Antonio Nariño proyecto No. 2017239, Dirección de Investigación y Extensión de la Facultad de Ciencias - Universidad Industrial de Santander proyecto No. 2460, y Centro de Investigaciones - Universidad Santo Tomás de Aquino proyecto No. 1952392.

Contribución de los autores

SMC llevó a cabo todos los desarrollos presentados en este artículo bajo la continua supervisión y revisión de YR.

Conflicto de intereses

Los autores declaran no tener conflicto de intereses con respecto al contenido de este artículo.

References

Abbott, B. P., *et al*. (2017a). Gravitational waves and gamma-rays from a binary neutron star merger: GW170817 and GRB 170817A. *Astrophys. J*, **848**, L13.

Abbott, B. P., *et al*. (2017b). GW170817: Observation of gravitational waves from a binary neutron star inspiral. *Phys. Rev. Lett*, **119**, 161101.

Abbott, B. P., *et al*. (2017c). Multi-messenger Observations of a Binary Neutron Star Merger. *Astrophys. J*, **848**, L12.

Abbott, R., *et al*. (2020). GW190412: Observation of a binary-black-hole coalescence with asymmetric masses. *Phys. Rev. D*, **102**, 043015.

Aghanim, N., *et al*. (2020). Planck 2018 results. VI. Cosmological parameters. *Astron. Astrophys.*, **641**, A6.

Allys, E., *et al*. (2016a). Generalized Proca action for an Abelian vector field. *JCAP*, **1602**, 004.

Allys, E., *et al*. (2016b). Generalized SU(2) Proca Theory. *Phys. Rev. D*, **94**, 084041.

Allys, E., *et al*. (2016c). On the 4D generalized Proca action for an Abelian vector field. *JCAP*, **1609**, 026.

Baker, T., *et al*. (2017). Strong constraints on cosmological gravity from GW170817 and GRB 170817A. *Phys. Rev. Lett.*, **119**, 251301.

Beltrán Jiménez, J., & Heisenberg, L. (2016). Derivative self-interactions for a massive vector field. *Phys. Lett B*, **757**, 405.

Beltrán Jiménez, J. & López Maroto, A. (2007). Cosmology with moving dark energy and the CMB quadrupole. *Phys. Rev. D*, **76**, 023003.

Beltrán Jiménez, J., & Heisenberg, L. (2017). Generalized multi-Proca fields. *Phys. Lett. B*, **770**, 16.

Ben Achour, J., *et al*. (2016). Degenerate higher order scalar-tensor theories beyond Horndeski and disformal transformations. *Phys. Rev. D*, **93**, 124005.

Bertone, G. & Hooper, D. (2018). History of dark matter. *Rev. Mod. Phys.*, **90**, 045002.

Cai, R. G., *et al*. (2013). Constraining the anisotropic expansion of the universe. *Phys. Rev. D*, **87**, 123522.

Campanelli, L., *et al*. (2006). Ellipsoidal universe can solve the cosmic microwave background quadrupole problem. *Phys. Rev. Lett.*, **97**, 131302.

Carter, B. (1971). Axisymmetric black hole has only two degrees of freedom. *Phys. Rev. Lett.*, **26**, 331.

Creminelli, P. & Vernizzi, F. (2017). Dark energy after GW170817 and GRB170817A. *Phys. Rev. Lett.*, **119**, 251302.

Crisostomi, M., *et al*. (2016). Extended scalar-tensor theories of gravity. *JCAP*, **1604**, 044.

Crisostomi, M., *et al*. (2017). Higher derivative field theories: degeneracy conditions and classes. *JHEP*, **1706**, 124.

Deffayet, C., *et al*. (2009a). Covariant Galileon. *Phys. Rev. D*, **79**, 084003.

Deffayet, C., *et al*. (2009b). Generalized Galileons: All scalar models whose curved background extensions mantain second-order field equations and stress tensors. *Phys. Rev. D*, **80**, 064015.

Deffayet, C., *et al*. (2011). From k-essence to generalized Galileons. *Phys. Rev. D*, **84**, 064039.

Deffayet, C., & Steer, D. (2013). A formal introduction to Horndeski and Galileon theories and their generalizations. *Class. Quantum Grav.*, **30**, 214006.

de Rham, C. (2014). Massive Gravity. *Living Rev. Relativ.*, **17**, 7.

de Rham, C., *et al*. (2011). Resummation of Massive Gravity. *Phys. Rev. Lett.*, **106**, 231101.

de Rham, C. & Gabadadze, G. (2010). Generalization of the Fierz-Pauli action. *Phys. Rev. D*, **82**, 044020.

Dong, R., *et al*. (2017). Quasinormal modes of black holes in scalar-tensor theories with nonminimal derivative couplings. *Phys. Rev. D*, **96**, 064048.

Errasti, V., *et al*. (2020a). Complete theory of Maxwell and Proca fields. *Phys. Rev. D*, **101**, 045008.

Errasti, V., *et al*. (2020b). Maxwell-Proca theory: Definition and construction. *Phys. Rev. D*, **101**, 045009.

Ezquiaga, J. M. & Zumalacárregui, M. (2017). Dark energy after GW170817: Dead ends and the road ahead. *Phys. Rev. Lett.*, **119**, 251304.

Gallego Cadavid, A., & Rodríguez, Y. (2019). A systematic procedure to build the beyond generalized Proca field theory. *Phys. Lett. B*, **798**, 134958.

Ganguly, A., *et al*. (2018). Black hole stability under odd-parity perturbations in Horndeski gravity. *Class. Quantum Grav.*, **35**, 145008.

Gleyzes, J. *et al*. (2015). New Class of Consistent Scalar-Tensor Theories. *Phys. Rev. Lett.*, **114**, 211101.

Hassan, S. F., & Rosen, R. A. (2012). Bimetric gravity from ghost-free massive gravity. *JHEP*, **1202**, 126.

Heisenberg, L. (2014). Generalization of the Proca action. *JCAP*, **1405**, 015.

Heisenberg. L., *et al*. (2016). Beyond generalized Proca theories. *Phys. Lett. B*, **760**, 617.

Heisenberg, L., *et al*. (2017). Black holes in vector-tensor theories. *JCAP*, **1708**, 024.

Heisenberg, L., *et al*. (2018). Odd-parity stability of hairy black holes in U(1) gauge-invariant scalar-vector-tensor theories. *Phys. Rev. D*, **97**, 124043.

Hinterbichler, K. (2012). Theorical aspects of massive gravity. *Rev. Mod. Phys*, **84**, 671.

Hinterbichler, K., & Rosen, R. A. (2012). Interacting spin-2 fields. *JHEP*, **1207**, 047.

Horndeski, H. W.,. (1974). Second-order-scalar-tensor field equations in a four-dimensional space. *Int. J. Theor. Phys.*, **10**, 363-384.

Kase, R., *et al*. (2018). Black hole perturbations in vector-tensor theories: the odd-mode analysis. *JCAP*, **1802**, 048.

Kase, R. & Tsujikawa, S. (2019). Dark energy in Horndeski theories after GW170817: A review. *Int. J. Mod. Phys. D*, **28**, 1942005.

Kimura, R., *et al*. (2017). Extended vector-tensor theories. *JCAP*, **1701**, 002.

Kobayashi, T., *et al*. (2012). Black hole perturbation in the most general scalar-tensor theory with second-order field equations: The odd-parity sector. *Phys. Rev. D*, **85**, 084025.

Kobayashi, T., *et al*. (2014). Black hole perturbation in the most general scalar-tensor theory with second-order field equations. II. The even-parity sector. *Phys. Rev. D*, **89**, 084042.

Langlois, D., & Noui, K. (2016). Degenerate higher derivative theories beyond Horndeski: evading the ostrogradski instability. *JCAP*, **1602**, 034.

Martin-Garcia, J. (2019). *xact: Efficient tensor computer algebra for the wolfram language. Xact.es.*

Nicolis, A., *et al*. (2009). Galileon as a local modification of gravity. *Phys. Rev. D*, **79**, 064036.

Ostrogradski, M. (1850). Memoires sur les equations differentielles relatives au probleme des isoperimetres. *Mem. Ac. St. Petersbourg VI*, **4**, 385.

Perlmutter, S., *et al*. (1999). Measurements of Ω and Λ from 42 High-Redshift Supernovae. *Astrophys. J*, **517**, 565.

Riess, A. G., *et al*. (1998). Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant. *Astronom. J*, **116**, 1009.

Robinson, D. C. (1975). Uniqueness of the Kerr black hole. *Phys. Rev. Lett.*, **34**, 905.

Rodrigues, D. C. (2008). Anisotropic cosmological constant and the CMB quadrupole anomaly. *Phys. Rev. D*, **77**, 023534.

Rodríguez, Y., & Navarro, A. (2017). Scalar and vector Galileons. *J. Phys.: Conf. Ser.*, **831**, 012004.

Sakstein, J. & Jain, B. (2017). Implications of the neutron star merger GW170817 for cosmological scalar-tensor theories. *Phys. Rev. Lett.*, **119**, 251303.

Tasinato, G. (2014a). Cosmic acceleration from Abelian symmetry breaking. *JHEP*, **1404**, 067.

Tasinato, G. (2014b). A small cosmological constant from Abelian symmetry breaking. *Class. Quantum Grav.*, **31**, 225004.

Tattersall, O. J. & Ferreira, P. G. (2018). Quasinormal modes of black holes in Horndeski gravity. *Phys. Rev. D*, **97**, 104047.

Wang, H., *et al*. (2017). The GW170817/GRB 170817A/AT 2017gfo Association: Some Implications for Physics and Astrophysics. *Astrophys. J.*, **851**, L18.

Woodard, R. P. (2007). Avoiding dark energy with $1/R$ modifications of gravity. *Lec. Notes Phys.*, **720**, 403.

Woodard, R. P. (2015). Ostrogradsky's theorem on Hamiltonian instability. *Scholarpedia*, **10**, 32243.

 Rev. Acad. Colomb. Cienc. Ex. Fis. Nat. 45(174):30-51, enero-marzo de 2021
doi: https://doi.org/10.18257/raccefyn.1276

Apéndice: Ecuaciones de campo en la teoría generalizada de Proca

Como resultado de variar la acción (9) con respecto a la métrica, se obtuvieron las ecuaciones de campo gravitacional en la teoría generalizada de Proca, las cuales vienen dadas por:

$$
\begin{aligned}
0 =& -\frac{1}{2}\left(g_{\mu\nu}F + F_{\mu\alpha}F_{\nu}{}^{\alpha}\right) - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}G_2 - \frac{1}{2}G_{2,X}A_\mu A_\nu - \frac{1}{2}G_{2,F}F_{\mu\alpha}F_\nu{}^\alpha \\
&+ G_{2,Y}\left(2A^\sigma A_{(\mu}F_{\nu)}{}^\alpha F_{\sigma\alpha} - A^\alpha A^\beta F_{\beta\nu}F_{\mu\alpha}\right) + G_{3,X}\left[-\frac{1}{2}A_\mu A_\nu \nabla_\alpha A^\alpha\right. \\
&\left.+A^\alpha\left(A_{(\mu}\nabla_{\nu)}A_\alpha - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}A^\beta\nabla_\alpha A_\beta\right)\right] + G_4 G_{\mu\nu} + G_{4,X}\left[\frac{1}{2}g_{\mu\nu}(\nabla_\alpha A^\alpha)^2\right. \\
&-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}\nabla_\alpha A_\beta \nabla^\beta A^\alpha - 2A_{(\mu}\nabla_{\nu)}\nabla_\alpha A^\alpha + g_{\mu\nu}A_\beta\nabla^\beta\nabla^\alpha A_\alpha + \nabla_\alpha\left(A_{(\mu}\nabla^\alpha A_{\nu)}\right. \\
&\left.+A_{(\mu}\nabla_{\nu)}A^\alpha - A^\alpha\nabla_{(\mu}A_{\nu)}\right) - 2\nabla_\alpha A_{(\mu}\nabla_{\nu)}A^\alpha - \frac{1}{2}\left(RA_\mu A_\nu + \nabla_\mu\nabla_\nu A^2\right. \\
&\left.\left.-g_{\mu\nu}\Box A^2\right)\right] + G_{4,XX}\left[\frac{1}{4}\nabla_\mu A^2\nabla_\nu A^2 - \frac{1}{4}g_{\mu\nu}\nabla^\alpha A^2\nabla_\alpha A^2 + A_{(\mu}\nabla_{\nu)}A^2\nabla_\alpha A^\alpha\right. \\
&\left.-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}A^\beta\nabla_\beta A^2\nabla_\alpha A^\alpha - \frac{1}{2}\nabla_\alpha A^2\left(A_{(\mu}\nabla^\alpha A_{\nu)} + A_{(\mu}\nabla_{\nu)}A^\alpha - A^\alpha\nabla_{(\mu}A_{\nu)}\right)\right] \\
&+ (terminos\ \ correspondientes\ \ a\ \ \mathcal{L}_5\ \ y\ \ \mathcal{L}_6).
\end{aligned}
\tag{152}
$$

Debido a la gran extensión en la variación de los términos que conforman $\mathcal{L}_5$ y $\mathcal{L}_6$, se optó por usar el paquete *xAct* del software $Mathematica$ (**Martin-Garcia, J.**, 2019), con el fin de obtener los términos restantes de la expresión de arriba. Las ecuaciones propias para cada acoplamiento contenido en $\mathcal{L}_5$ y $\mathcal{L}_6$ fueron presentadas en la sección de soluciones exactas de agujeros negros estáticos y esféricamente simétricos.

De otra parte, las ecuaciones de campo vectorial, las cuales provienen de variar la acción de la teoría generalizada de Proca con respecto al campo vectorial, vienen dadas por

$$
\begin{aligned}
0 =& \nabla_\beta F^{\alpha\beta} - G_{2,X}A^\alpha + \nabla_\beta G_{2,F}F^{\beta\alpha} + G_{2,F}\nabla_\beta F^{\beta\alpha} - 4\nabla_\beta G_{2,Y}A^\nu A^{[\beta}F_\nu{}^{\alpha]} \\
&- 2G_{2,Y}\left[A^\mu F_{\mu\lambda}F^{\alpha\lambda} + 2(\nabla_\beta A^\nu)A^{[\beta}F_\nu{}^{\alpha]} - 2A^\nu\nabla_\beta A^{[\beta}F_\nu{}^{\alpha]} - 2A^\nu A^{[\beta}\nabla_\beta F_\nu{}^{\alpha]}\right] \\
&+ G_{3,X}\left(\frac{1}{2}\nabla^\alpha A^2 - A^\alpha\nabla_\mu A^\mu\right) + 2G_{4,X}G^{\beta\alpha}A_\beta - G_{4,XX}\left[A^\alpha(\nabla_\mu A^\mu)^2\right. \\
&\left.-A^\alpha\nabla_\mu A_\nu\nabla^\nu A^\mu - \nabla_\beta A^2(g^{\alpha\beta}\nabla_\mu A^\mu - \nabla^\alpha A^\beta)\right] + G_{5,X}\left[\frac{1}{2}\nabla_\beta A^2 G^{\beta\alpha}\right. \\
&\left.-A^\alpha G_{\mu\nu}\nabla^\mu A^\nu + \frac{1}{2}\nabla_\mu A^\mu\nabla^\alpha\nabla_\beta A^\beta - \nabla_\beta(\nabla_\mu A^\mu\nabla^\alpha A^\beta) - \frac{1}{2}\nabla^\alpha(\nabla_\rho A_\sigma\nabla^\sigma A^\rho)\right] \\
&+ G_{5,XX}\left\{\frac{1}{6}A^\alpha\left[(\nabla_\mu A^\mu)^3 - 3\nabla_\mu A^\mu\nabla_\rho A_\sigma\nabla^\sigma A^\rho + 2\nabla_\rho A_\sigma\nabla^\nu A^\rho\nabla^\sigma A_\nu\right]\right. \\
&- \frac{1}{4}\left[\nabla^\alpha A^2(\nabla_\mu A^\mu)^2 + \nabla^\alpha A^2\nabla_\rho A_\sigma\nabla^\sigma A^\rho + 2\nabla_\beta A^2\nabla_\mu A^\mu\nabla^\alpha A^\beta\right. \\
&\left.\left.-2\nabla_\beta A^2\nabla^\nu A^\beta\nabla^\alpha A_\nu + 4A^2\nabla_\beta(\nabla^\nu A^\beta\nabla^\alpha A_\nu)\right]\right\} + g_5\left[\nabla_\beta\tilde{F}^{\beta\mu}\tilde{F}^\alpha{}_\mu + \tilde{F}^{\beta\mu}\nabla_\beta\tilde{F}^\alpha{}_\mu\right. \\
&\left.-2\nabla_\beta\tilde{F}^\sigma{}_\mu\varepsilon^{\lambda\mu\alpha\beta}\nabla_{(\lambda}A_{\sigma)} - 2\tilde{F}^\sigma{}_\mu\varepsilon^{\lambda\mu\alpha\beta}\nabla_\beta\nabla_{(\lambda}A_{\sigma)}\right] \\
&+ g_{5,X}\left[A^\alpha\tilde{F}^{\gamma\mu}\tilde{F}^\beta{}_\mu\nabla_\gamma A_\beta + A_\beta\tilde{F}^\sigma{}_\mu\varepsilon^{\lambda\mu\alpha\beta}\nabla_{(\lambda}A_{\sigma)} - \frac{1}{2}\nabla_\beta A^2\tilde{F}^{\beta\mu}\tilde{F}^\alpha{}_\mu\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&- 2G_6 \left[\nabla_\beta L^{\beta\alpha\gamma\sigma}\nabla_\gamma A_\sigma + L^{\beta\alpha\gamma\sigma}\nabla_\beta\nabla_\gamma A_\sigma\right] + G_{6,X}\left[\nabla_\beta A^2 L^{\beta\alpha\gamma\sigma}\nabla_\gamma A_\sigma\right.\\
&-\varepsilon^{\gamma\sigma\beta\alpha}\nabla_\beta\tilde{F}^{\mu\nu}\nabla_\gamma A_\mu\nabla_\sigma A_\nu - \varepsilon^{\gamma\sigma\beta\alpha}\tilde{F}^{\mu\nu}(\nabla_\beta\nabla_\gamma A_\mu)\nabla_\sigma A_\nu\\
&-\varepsilon^{\gamma\sigma\beta\alpha}\tilde{F}^{\mu\nu}\nabla_\gamma A_\mu\nabla_\beta\nabla_\sigma A_\nu - A^\alpha L^{\mu\nu\gamma\beta}\nabla_\mu A_\nu\nabla_\gamma A_\beta - \nabla_\beta\tilde{F}^{\mu\nu}\varepsilon^{\gamma\sigma\beta\alpha}\nabla_\mu A_\gamma\nabla_\nu A_\sigma\\
&-\tilde{F}^{\mu\nu}\varepsilon^{\gamma\sigma\beta\alpha}(\nabla_\beta\nabla_\mu A_\gamma)\nabla_\nu A_\sigma - \tilde{F}^{\mu\nu}\varepsilon^{\gamma\sigma\beta\alpha}\nabla_\mu A_\gamma\nabla_\beta\nabla_\nu A_\sigma - \nabla_\beta\tilde{F}^{\gamma\beta}\tilde{F}^{\mu\alpha}\nabla_\gamma A_\mu\\
&-\tilde{F}^{\gamma\beta}\nabla_\beta F^{\mu\alpha}\nabla_\gamma A_\mu - \tilde{F}^{\gamma\beta}\tilde{F}^{\mu\alpha}\nabla_\beta\nabla_\gamma A_\mu\Big] + \frac{G_{6,XX}}{2}\left[\nabla_\beta A^2\varepsilon^{\gamma\sigma\beta\alpha}\tilde{F}^{\mu\nu}\nabla_\gamma A_\mu\nabla_\sigma A_\nu\right.\\
&\left.-A^\alpha\tilde{F}^{\gamma\beta}\tilde{F}^{\mu\nu}\nabla_\gamma A_\mu\nabla_\beta A_\nu + \nabla_\beta A^2\tilde{F}^{\mu\nu}\varepsilon^{\gamma\sigma\beta\alpha}\nabla_\mu A_\gamma\nabla_\nu A_\sigma + \nabla_\beta A^2\tilde{F}^{\gamma\beta}\tilde{F}^{\mu\alpha}\nabla_\gamma A_\mu\right].
\end{aligned}
\tag{153}
$$