Revista de la Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales.
48(188):671-686, julio-septiembre de 2024. doi: https://doi.org/10.18257/raccefyn.2644

Matemáticas

Artículo original

Reconstrucción de campos multivectoriales a partir del análisis de Clifford

Reconstruction of multivectorial fields in Clifford analysis

Ricardo Abreu-Blaya[1,4], **Juan Bory-Reyes**[2], **Tania Moreno-García**[3], **Daniel Alfonso-Santiesteban**[1,*]

[1] Facultad de Matemáticas, Universidad Autónoma de Guerrero, México
[2] SEPI, ESIME-Zacatenco, Instituto Politécnico Nacional, México
[3] Departamento de Matemática, Universidad de Holguín, Cuba
[4] Investigador Invitado, Universidad UTE, Quito, Ecuador

Resumen

El análisis de Clifford tiene muchas aplicaciones inesperadas en geometría diferencial y análisis global. Es el caso del tratamiento efectivo de las rotaciones en espacios euclidianos de alta dimensión mediante los grupos espinoriales, uno de los cuales es el grupo de Lorentz de la relatividad especial. En el presente estudio se aborda la reconstrucción de campos multivectoriales a partir del salto que estos experimentan sobre una superficie de geometría suficientemente irregular en espacios euclidianos. Además, se presentan algunos problemas de frontera para ecuaciones de Dirac de segundo orden que no quedan bien planteados si se consideran bases ortonormales diferentes a la base estándar.

Palabras clave: Análisis de Clifford; Campos multivectoriales; Operadores de Dirac; Problemas de frontera.

Abstract

The Clifford analysis has many applications in differential geometry and global analysis, such as the effective treatment of rotations in high-dimensional Euclidean spaces employing spinorial groups, where a particular example is the Lorentz group of special relativity. Here we approach the reconstruction of multivectorial fields from the jump occurring when they go through a surface of sufficiently irregular geometry in Euclidean spaces. Additionally, we show some boundary value problems for second-order Dirac equations that are not well posed if orthonormal bases different from the standard base are considered.

Keywords: Clifford analysis; Multivectorial fields; Dirac operators; Boundary value problems.

Citación: Ricardo Abreu-Blaya, *et al*. Reconstrucción de campos multivectoriales a partir del análisis de Clifford. Revista de la Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. 48(188):671-686, julio-septiembre de 2024. doi: https://doi.org/10.18257/raccefyn.2644

Editor: Carolina Benedetti Velásquez

***Correspondencia:**
Daniel Alfonso-Santiesteban; danielalfonso950105@gmail.com

Recibido: 25 de junio de 2024
Aceptado: 26 de junio de 2024
Publicado en línea: 5 de agosto de 2024

Introducción

El matemático y filósofo inglés William Kingdon Clifford (1845-1879) introdujo las álgebras que llevan su nombre, las cuales pueden ser entendidas como una generalización multidimensional de los números complejos y los cuaternios de Hamilton (**Clifford**, 1878). Estas constituyen un tipo de álgebras asociativas que se caracterizan por sus importantes aplicaciones en una gran variedad de campos que incluyen la geometría y la física teórica. Las álgebras de Clifford constituyen un caso especial de las álgebras geométricas, que permiten la manipulación algebraica de nociones geométricas usadas actualmente en la física-matemática.

Revista de la Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales.
48(188):671-686, julio-septiembre de 2024. doi: https://doi.org/10.18257/raccefyn.2644

El estudio de las propiedades locales de las funciones pertenecientes al núcleo del operador de Dirac sobre un fibrado espinorial ha conducido a una teoría de funciones, comúnmente conocida como análisis de Clifford. Dichas funciones que anulan a este operador son llamadas: funciones monogénicas. El análisis de Clifford ha probado ser un medio eficaz para abordar problemas de contorno en espacios euclidianos de altas dimensiones.

Algunos de los resultados pioneros sobre análisis de Clifford fueron reportados por Moisil y Théodoresco (**Moisil** & **Theodoresco**, 1931), Fueter (**Fueter**, 1935), Iftimie (**Iftimie**, 1965), Hestenes (**Hestenes**, 1968) y Delanghe (**Delanghe**, 1970).

Las bases del análisis de Clifford fueron desarrolladas por Richard Delanghe, académico de la Universidad de Gante, Bélgica, quien es autor (junto con sus discípulos Fred Brackx y Frank Sommen) del primer libro publicado sobre el tema en 1982 (**Brackx**, **Delanghe**, & **Sommen**, 1982). Para el lector interesado en profundizar sobre los fundamentos y las aplicaciones de esta teoría de funciones recomendamos las referencias (**Delanghe**, **Sommen**, & **Souček**, 1992; **Gilbert** & **Murray**, 1991; **Gilbert** & **Buchanan**, 1983; **Gürlebeck**, **Habetha**, & **Sprössig**, 2007; **Gürlebeck** & **Sprössig**, 1990, 1997; **Kravchenko** & **Shapiro**, 1996; **Mitrea**, 1994; **Obolashvili**, 2002; **Rocha-Chávez**, **Shapiro**, & **Sommen**, 2001; **Wen**, **Sha**, & **Yu-Ying**, 2005).

El desarrollo alcanzado por el análisis de Clifford es evidenciado por los cientos de artículos publicados cada año en diversas revistas científicas de alta calidad e indexadas en las principales base de datos de consulta mundial. Algunos artículos introductorios a los rudimentos básicos del análisis de Clifford, los cuales incluyen notas históricas, son (**Cnops** & **Malonek**, 1997; **Delanghe**, 2001; **Delanghe** & **Reyes**, 2003; **Reséndis** & **Shapiro**, 2002; **Ryan**, 2000, 2004; **Sommen** & **Sprössig**, 2002; **Sprössig**, 2002; **Sudbery**, 1979).

La reconstrucción de una función monogénica a partir del salto que esta experimenta en una superficie (Problema del Salto), es un problema estrechamente ligado a la geometría de dicha superficie y clásicamente ha sido resuelto con ayuda de la transformada de Cauchy. La presencia del vector normal a la superficie en esta integral ha obligado a considerar, a priori, un conjunto de suposiciones de suavidad.

Estas restricciones pueden ser eliminadas, si el vector normal usual es reemplazado por el llamado vector normal de Federer (**Federer,** 1969), lo cual permite resolver varios problemas de reconstrucción de soluciones de sistemas diferenciales parciales a partir de sus singularidades, sin hacer suposiciones de suavidad. Esta posibilidad abre el camino hacia la investigación de las restricciones mínimas sobre la superficie y las clases de funciones permitidas para dar solución a dichos problemas de reconstrucción.

En este sentido, se han logrado extender satisfactoriamente el formalismo de la transformada de Cauchy a ciertas clases de superficies no rectificables e incluso fractales. El caso de superficies fractales ha sido obviado por muchos autores (debido a su complejidad) y la propuesta de solución emplea la transformada de Théodoresco en lugar de la de Cauchy, lo cual constituye una extensión del método propuesto por Boris Kats en el caso del plano complejo (**Kats**, 1983) al ámbito multidimensional.

El presente trabajo tiene como propósito presentar un recorrido por algunos de los principales resultados que en el tema han sido obtenidos por los autores. La lista de referencias contiene adicionalmente algunos de los trabajos relacionados y no pretende de ningún modo estar completa. Los métodos de investigación utilizados en el desarrollo de este trabajo estuvieron determinados por los objetivos y las tareas de investigación. A nivel teórico se emplearon los métodos: histórico-lógico, análisis y síntesis, inducción y deducción, y a nivel empírico: el experimental y la modelación; todos de gran utilidad en el estudio de fuentes de información y en el procesamiento de los fundamentos científicos. Se hace necesario el uso de un cuerpo teórico enfocado a la resolución de este tipo de problemas. Debido a su extensión se explicarán a grandes rasgos algunos conceptos pertinentes.

1 Álgebras de Clifford, de Pauli y de Dirac

Denotemos por $\mathbb{R}^{p,q}$ al espacio $\mathbb{R}^m$ junto con la forma cuadrática

$$Q(x) = x_1^2 + \ldots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \ldots - x_{p+q}^2,\ p+q = m.$$

A los espacios $\mathbb{R}^{m,0}$ se les llama espacios euclidianos, y a los $\mathbb{R}^{0,m}$ antieuclidianos. En particular, $\mathbb{R}^{1,3}$ es el espacio-tiempo de Minkowski, el cual está muy presente en la teoría especial de la relatividad de Einstein.
El álgebra de Clifford universal $\mathbb{R}_{p,q}$ es el álgebra asociativa con identidad $e_0 = 1$ tal que:

(1) $\mathbb{R}_{p,q}$ contiene copias de $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^m$ como subespacios.

(2) Para todo $x \in \mathbb{R}^m$, $x^2 = Q(x)$.

(3) $\mathbb{R}_{p,q}$ es generada como álgebra real por las copias de $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^m$.

(4) La dimensión de $\mathbb{R}_{p,q}$ es 2^m.

Algunos ejemplos elementales son:

- $\mathbb{R}$ es el álgebra de Clifford $\mathbb{R}_{0,0}$ y $\mathbb{R}_{1,0}$,
- $\mathbb{C}$ es el álgebra de Clifford $\mathbb{R}_{0,1}$,
- $\mathbb{H}$ es el álgebra de Clifford $\mathbb{R}_{0,2}$.

En particular, si $\{e_1, \ldots, e_p, e_{p+1}, \ldots, e_m\}$ es la base ortonormal para $\mathbb{R}^{p,q}$, entonces

$$e_i^2 = \begin{cases} 1 & i = 1, \ldots, p \\ -1 & i = p+1, \ldots, m \end{cases}$$

y

$$e_i e_j + e_j e_i = 0,\ i \neq j.$$

Una base para $\mathbb{R}_{p,q}$ se obtiene a través del sistema

$$\{e_A = e_{\alpha_1} \cdots e_{\alpha_h} : A = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_h\},\ 1 \leq \alpha_1 < \cdots < \alpha_h \leq m\}.$$

Sea $\mathbb{R}_{p,q}^k = \mathrm{Span}_{\mathbb{R}}(e_A : |A| = k)$. Entonces $\mathbb{R}_{p,q}^k$ es un subespacio de $\mathbb{R}_{p,q}$- el espacio de los k-vectores- y

$$\mathbb{R}_{p,q} = \sum_{k=0}^{m} \oplus \mathbb{R}_{p,q}^k.$$

Note que cualquier $a \in \mathbb{R}_{p,q}$ puede escribirse de forma única como

$$a = [a]_0 + [a]_1 + \ldots + [a]_m, \tag{1}$$

donde $[.]_k$ denota la proyección de $\mathbb{R}_{p,q}$ en $\mathbb{R}_{p,q}^k$. Algunas observaciones necesarias son las siguientes:

(1) $\mathbb{R}_{p,q}^0$ es el subespacio 1-dimensional de 0-vectores, se identifica con $\mathbb{R}$ y sus elementos son por eso llamados escalares.

(2) $\mathbb{R}_{p,q}^1$ es el subespacio m-dimensional de 1-vectores. Puede identificarse con $\mathbb{R}^{p,q}$ y sus elementos son llamados vectores.

(3) $\mathbb{R}_{p,q}^2$ es el subespacio $\begin{pmatrix} m \\ 2 \end{pmatrix}$-dimensional de 2-vectores, los cuales son también llamados bivectores.

(4) $\mathbb{R}_{p,q}^m$ es el subespacio 1-dimensional de m-vectores, también llamados pseudoescalares.

Revista de la Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales.
48(188):671-686, julio-septiembre de 2024. doi: https://doi.org/10.18257/raccefyn.2644

Así mismo podemos descomponer $\mathbb{R}_{p,q}$ en la suma directa

$$\mathbb{R}_{p,q} = \mathbb{R}^{+}_{p,q} \oplus \mathbb{R}^{-}_{p,q}$$

con

$$\mathbb{R}^{+}_{p,q} = \sum_{k\,par} \oplus \mathbb{R}^{k}_{p,q}$$

y

$$\mathbb{R}^{-}_{p,q} = \sum_{k\,impar} \oplus \mathbb{R}^{k}_{p,q}.$$

El subespacio $\mathbb{R}^{+}_{p,q}$ es también un álgebra conocida como la subálgebra par de $\mathbb{R}_{p,q}$ y es isomorfa al álgebra de Clifford universal $\mathbb{R}_{p-1,q}$ o $\mathbb{R}_{p,q-1}$.

Un hecho que pone de manifiesto la importancia del formalismo de las álgebras de Clifford es que muchas álgebras que aparecieron por diferentes razones geométricas y físicas son casos particulares de estas y, lo que es aún más significativo, este formalismo permite esclarecer las relaciones entre estas álgebras. Por ejemplo, el álgebra de Dirac es precisamente el álgebra de Clifford universal $\mathbb{R}_{1,3}$ construida sobre el espacio-tiempo de Minkowski $\mathbb{R}^{1,3}$. Así mismo, el álgebra de Pauli es el álgebra de Clifford universal $\mathbb{R}_{3,0}$ sobre el espacio euclidiano 3-dimensional $\mathbb{R}^{3,0}$. Es conocido que estas álgebras surgieron inspiradas en la mecánica cuántica.

El álgebra de Pauli es realmente la subálgebra par del álgebra de Dirac. Los cuaternios de Hamilton son el álgebra par del álgebra de Pauli, mientras que los números complejos son la subálgebra par de los cuaternios.

En lo que resta de este material nosotros prestaremos especial atención a las álgebras de Clifford $\mathbb{R}_{0,m}$.

2 Nociones básicas de análisis de Clifford

El análisis de Clifford estudia las funciones $u : \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}_{0,m}$ que pertenecen al núcleo del operador de Dirac

$$\mathscr{D} := \sum_{i=1}^{m} e_i \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Este operador es una extensión natural al espacio $\mathbb{R}^m$ del operador complejo de Cauchy-Riemann $\dfrac{\partial}{\partial \bar{z}}$. Las funciones $u : \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}_{0,m}$ que en algún abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ satisfacen la ecuación

$$\mathscr{D}u = 0 \tag{2}$$

se dicen monogénicas a la izquierda en Ω. Debido a la no conmutatividad, la ecuación

$$u\mathscr{D} = 0 \tag{3}$$

es esencialmente diferente a la ecuación (2) y sus soluciones son llamadas: monogénicas a la derecha. Es fácil ver que el operador $\mathscr{D}$ factoriza al operador de Laplace Δ en $\mathbb{R}^m$ ($\mathscr{D}^2 = -\Delta$). Esto significa que las funciones monogénicas son también armónicas, es decir soluciones de la ecuación de Laplace. Por este hecho se concibe al análisis de Clifford como un refinamiento del clásico análisis armónico.

Una diferencia notable entre el análisis complejo y el análisis de Clifford radica en que, a diferencia del caso complejo, el producto de funciones monogénicas no es necesariamente una función monogénica. Esto es una consecuencia analítica de la no conmutatividad del producto cliffordiano.

Un ejemplo importante de función monogénica es el conocido núcleo de Cauchy hipercomplejo:

$$E(x) := \frac{1}{A_m} \frac{-x}{|x|^m}\,,\; x \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\},$$

donde A_m denota el área superficial de la esfera unitaria en $\mathbb{R}^m$. Esta función juega un papel análogo al núcleo de Cauchy complejo

$$\frac{1}{2\pi}\frac{1}{z}.$$

Por otro lado, $E(x)$ permite definir las transformadas de Cauchy y de Hilbert cliffordianas que resultan ser herramientas imprescindibles en el estudio de los valores de frontera de las funciones monogénicas.

Precisamente

$$(\mathscr{C}_\Gamma u)(x) := \int_\Gamma E(y-x)\vec{n}(y)u(y)dy\,,\; x \notin \Gamma,$$

$$(\mathscr{S}_\Gamma u)(x) := 2\int_\Gamma E(y-x)\vec{n}(y)(u(y)-u(x))dy + u(x)\,,\; x \in \Gamma,$$

siendo $\vec{n}(y)$ el vector normal exterior a Γ en y.

La ecuación (2) contiene una serie de casos particulares de gran importancia en las ciencias físicas.

Las funciones u definidas en $\mathbb{R}^3$ con valores en $\mathbb{R}_{0,2}$ son de la forma

$$u = u_0 + \vec{u}.$$

Para estas funciones, la ecuación (2) toma la forma

$$\mathscr{D}(u_0) + \mathscr{D}(\vec{u}) = 0.$$

Separando las partes escalares y vectoriales, es fácil verificar que la ecuación anterior equivale al sistema

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{u} = 0, \\ \nabla u_0 + \nabla \times \vec{u} = 0. \end{cases}$$

En el caso de que u sea un campo vectorial, es decir $u_0 = 0$, entonces el sistema anterior describe un fluido irrotacional sin fuentes ni sumideros, el cual es de importancia vital en la dinámica de fluidos (**Kravchenko**, 2003; **Kravchenko** & **Shapiro**, 1996).

Pasemos ahora a considerar los campos vectoriales $u = F$ en $\mathbb{R}^m$. En este caso, la ecuación (2) se escribe como

$$\mathscr{D}F = \mathscr{D} \bullet F + \mathscr{D} \wedge F = 0,$$

donde

$$\mathscr{D} \bullet F := \frac{1}{2}(\mathscr{D}F + F\mathscr{D})$$

y

$$\mathscr{D} \wedge F := \frac{1}{2}(\mathscr{D}F - F\mathscr{D}).$$

En virtud de las propiedades del producto interior "$\bullet$" y exterior "$\wedge$" se obtiene el sistema equivalente

$$\begin{cases} \mathscr{D} \bullet F = 0, \\ \mathscr{D} \wedge F = 0, \end{cases}$$

Revista de la Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales.
48(188):671-686, julio-septiembre de 2024. doi: https://doi.org/10.18257/raccefyn.2644

conocido como sistema de Riesz.
Para los campos k-vectoriales F_k se obtiene análogamente el sistema

$$\begin{cases} \mathscr{D} \bullet F_k = 0, \\ \mathscr{D} \wedge F_k = 0, \end{cases} \tag{4}$$

y en este caso

$$\mathscr{D} \bullet F_k := \frac{1}{2}(\mathscr{D}F_k - (-1)^k F_k \mathscr{D})$$

y

$$\mathscr{D} \wedge F_k := \frac{1}{2}(\mathscr{D}F + (-1)^k F_k \mathscr{D}).$$

Las soluciones del sistema (4) se denominan campos armónicos o de Stein-Weyl. Es interesante señalar que, identificando el campo k-vectorial

$$F_k = \sum_{|A|=k} F_{k,A}\, e_A$$

con la forma diferencial

$$\omega_k = \sum_{|A|=k} F_{k,A}\, dx_A,$$

entonces el sistema (4) es equivalente al conocido sistema de Hodge-de Rham

$$\begin{cases} d\omega_k = 0, \\ d^* \omega_k = 0, \end{cases}$$

de gran importancia en la teoría de homologías.

El campo electromagnético puede ser escrito como un bivector simple F_2 en el álgebra de Dirac. De esta forma las ecuaciones de Maxwell libre de fuentes admiten la forma simple

$$\mathscr{D} F = 0.$$

Esta ecuación de ondas electromagnéticas es la misma que la ecuación de Dirac para el neutrino.

3 Problema de reconstrucción desde condiciones de salto

En esta sección nos proponemos estudiar los valores de frontera de campos multivectoriales armónicos y funciones monogénicas para el caso en que la frontera sea fractal. En términos físicos, los problemas abordados responden a la siguiente problemática:

Dado el campo electromagnético sobre una superficie cerrada en una región del espacio libre de fuentes, ¿es posible reconstruir dicho campo en la región encerrada por dicha superficie?

Pasemos a la formulación matemática de estos problemas:

Sea Ω un dominio de Jordan de $\mathbb{R}^m$ con frontera fractal Γ y sea u una función Hölder continua con exponente $\alpha \in (0,1]$, definida en Γ y con valores en $\mathbb{R}_{0,m}$, por brevedad escribiremos $u \in C^{0,\alpha}(\Gamma)$.

También la notación temporal $\Omega^+ = \Omega$, $\Omega^- = \mathbb{R}^m \setminus \overline{\Omega^+}$ será necesaria. Asumiremos la monogenicidad por el lado izquierdo. Resultados análogos se obtienen para cuando se tiene monogenicidad a la derecha.

I) (Problema del Salto) ¿Bajo qué condiciones u admite la descomposición

$$u = U^+ + U^-, \tag{5}$$

donde las funciones U^+ y U^- son monogénicas en Ω^+ y Ω^- respectivamente?

II) ¿Bajo qué condiciones u es la traza sobre Γ de una función monogénica en Ω^+? El mismo problema para Ω^-.

Sea $F_k \in C^{0,\alpha}(\Gamma)$ un campo multivectorial con valores en $\mathbb{R}^{(k)}_{0,m}$.

III) (Problema de Dynkin) ¿Bajo qué condiciones F_k admite la descomposición

$$F_k = F_k^+ + F_k^-, \tag{6}$$

donde F_k^+ y F_k^- son campos k-vectoriales armónicos en Ω^+ y Ω^- respectivamente?

IV) ¿Bajo qué condiciones F_k es la traza sobre Γ de un campo k-vectorial armónico en Ω^+? El mismo problema para Ω^-.

En (**Kats**, 1983) se presenta un método para resolver el problema del salto en el plano complejo, el cual no usa la integración sobre la frontera y puede ser utilizado sobre curvas no rectificables y fractales. Un análogo multidimensional de este método apareció poco después en el contexto del análisis cuaterniónico (**Blaya**, 1999; **Blaya** & **Reyes**, 1999). Siguiendo esta línea, también es posible una generalización del método para $m > 2$.

El problema del salto (5) en tales condiciones fue considerado en (**Blaya**, **Reyes**, & **Peña**, 2007), donde se prueba que para $u \in C^{0,\alpha}(\Gamma)$, cuando el exponente de Hölder α y la dimensión de Minkowski $\mathbf{m} := \dim_M(\Gamma)$ de la superficie Γ satisfacen la relación

$$\alpha > \frac{\mathbf{m}}{m}, \tag{7}$$

entonces una solución de (5) está dada por las fórmulas

$$U^+(x) = u^w(x) + \mathscr{T}_\Omega \mathscr{D}_x u^w(x),$$

$$U^-(x) = \mathscr{T}_\Omega \mathscr{D}_x u^w(x),$$

donde $\mathscr{T}_\Omega$ es la transformada de Théodoresco

$$\mathscr{T}_\Omega v(x) = \int_\Omega E(y-x)v(y)dy. \tag{8}$$

En caso de que la condición (7) se viole, entonces se puede construir un ejemplo de superficie Γ con $\dim_M(\Gamma) = \mathbf{m}$ y una función $u \in C^{0,\alpha}(\Gamma)$ tal que el problema del salto no tenga solución. Por tanto, la condición (7) es inmejorable. Remitimos al lector a consultar: (**Blaya**, **Reyes**, & **García**, 2006, Sección 5) y (**Blaya**, **García**, & **Reyes**, 2012), donde se construye el ejemplo antes mencionado. En lo que sigue asumiremos siempre que α y $\mathbf{m}$ están vinculados por la relación (7).

Si Γ es una frontera suficientemente "regular", entonces la condición clásica $\mathscr{S}_\Gamma u = u$ ($\mathscr{S}_\Gamma u = -u$) es necesaria y suficiente para que u sea la traza de una función monogénica en Ω^+ (respectivamente Ω^-). Pero si Γ es fractal, entonces el operador $\mathscr{S}_\Gamma$ pierde su significado usual y sin embargo el problema II sigue teniendo sentido. Denotaremos por $\mathscr{M}(\Omega)$ al espacio de funciones monogénicas a la izquierda en Ω.

El siguiente teorema da una alternativa de solución para el problema II utilizando la herramienta de la transformada de Théodoresco (8) (**Blaya, Reyes, & García,** 2006).

Revista de la Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales.
48(188):671-686, julio-septiembre de 2024. doi: https://doi.org/10.18257/raccefyn.2644

Teorema 3.1 *Si $u \in C^{0,\alpha}(\Gamma)$ es la traza de $U \in C^{0,\alpha}(\Omega_+ \cup \Gamma) \cap \mathscr{M}(\Omega^+)$, entonces*

$$\mathscr{T}_{\Omega^+}\mathscr{D}_x u^w(x)|_\Gamma = 0. \tag{9}$$

Recíprocamente, si (9) se cumple, entonces u es la traza de una función $U \in C^{0,\mu}(\Omega_+ \cup \Gamma) \cap \mathscr{M}(\Omega^+)$, para algún $\mu < \alpha$.

Demostración: Sea U^w una extensión de Whitney de $U \in C^{0,\alpha}(\Omega \cup \Gamma)$. Es un simple ejercicio comprobar que U^w será también una extensión de Whitney para $u = U|_\Gamma$.

Entonces

$$\mathscr{T}_{\Omega^+}\mathscr{D}_x u^w(x) = \mathscr{T}_{\Omega^+}\mathscr{D}_x U^w(x), \;\; x \in \Omega^-. \tag{10}$$

Teniendo en cuenta que $U = U^w|_{\Omega^+}$ es monogénica, se obtiene que

$$\mathscr{T}_{\Omega^+}\mathscr{D}_x u^w(x) = 0 \;\text{ en }\; \Omega^-,$$

lo que a su vez implica ahora (9).

La afirmación recíproca se deduce tomando

$$U(x) = u^w(x) + \mathscr{T}_{\Omega^+}\mathscr{D}_x u^w(x).$$

□

Para Ω^- se obtiene el siguiente resultado análogo.

Teorema 3.2 *Si $u \in C^{0,\alpha}(\Gamma)$ es la traza de $U \in C^{0,\alpha}(\Omega^- \cup \Gamma) \cap \mathscr{M}(\Omega^-)$, y $U(\infty) = 0$, entonces*

$$\mathscr{T}_{\Omega^+}\mathscr{D}_x u^w(x)|_\Gamma = -u(x). \tag{11}$$

Recíprocamente, si (11) se cumple, entonces u es la traza de una función $U \in C^{0,\mu}(\Omega^- \cup \Gamma) \cap \mathscr{M}(\Omega^-)$ y $U(\infty) = 0$, para algún $\mu < \alpha$.

Observación 3.1 *Bajo la condición (9) ((11)) $u^w + \mathscr{T}_{\Omega^+}\mathscr{D}_x u^w$ (respectivamente $\mathscr{T}_{\Omega^+}\mathscr{D}_x u^w$) es una extensión monogénica de u a Ω^+ (respectivamente a Ω^-) que pertenece a $C^{0,\mu}(\Omega^+ \cup \Gamma)$ (respectivamente a $C^{0,\mu}(\Omega^- \cup \Gamma)$) para todo*

$$\mu < \frac{m\alpha - \mathbf{m}}{m - \mathbf{m}}.$$

Es posible obtener resultados para el caso de funciones monogénicas a la derecha (i.e., uD=0). Para ello basta remplazar $\mathscr{T}_{\Omega^+}\mathscr{D}_x u^w|_\Gamma$ por $u^w \mathscr{D}_x \mathscr{T}_{\Omega^+}|_\Gamma$ en (9) y (11) donde para una función v con valores en $\mathbb{R}_{0,m}$ se define

$$v\mathscr{T}_\Omega(x) := -\int_\Omega v(y)E(y-x)dy.$$

Teorema 3.3 *Si $U \in C^{0,\alpha}(\Omega^+ \cup \Gamma) \cap \mathscr{M}(\Omega^+)$ tiene la traza $u := U|_\Gamma$, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) *U es monogénica a ambos lados en Ω^+.*

(ii) $\mathscr{T}_{\Omega^+}\mathscr{D}_x u^w|_\Gamma = u^w \mathscr{D}_x \mathscr{T}_{\Omega^+}|_\Gamma$.

Demostración: La demostración de que (i) implica (ii) se deduce directamente del teorema 3.1 y de su versión para la monogenicidad a la derecha.

Supongamos que (ii) se cumple. Como U es monogénica a la izquierda en Ω^+, entonces por teorema 3.1 tenemos

$$\mathscr{T}_{\Omega^+}\mathscr{D}_x u^w|_\Gamma = u^w \mathscr{D}_x \mathscr{T}_{\Omega^+}|_\Gamma = 0.$$

La segunda igualdad implica la existencia de una función U^* monogénica a la derecha en Ω^+ y tal que $U^*|_\Gamma = u$. Pongamos $w = U - U^*$, entonces $\Delta w = 0$ en Ω^+ y $w|_\Gamma = 0$. Por la solución del problema clásico de Dirichlet concluimos que $U = U^*$ en Ω^+, lo cual significa que U es monogénica a ambos lados en Ω^+. □

Estamos en condiciones de considerar los problemas (III) y (IV).

Teorema 3.4 *Sea $F_k \in C^{0,\alpha}(\Gamma)$ un campo k-vectorial. Si $\mathscr{T}_{\Omega^+}\mathscr{D}_x F_k^w|_\Gamma$ es k-vectorial, es decir, si*

$$[\mathscr{T}_{\Omega^+}\mathscr{D}_x F_k^w|_\Gamma]_{k\pm 2} = 0, \tag{12}$$

entonces el problema (III) es soluble.

Demostración: A partir de la solución del problema del salto tenemos que las funciones $F^+ := F_k^w + \mathscr{T}_{\Omega^+}\mathscr{D}_x F_k^w$ y $F^- := \mathscr{T}_{\Omega^+}\mathscr{D}_x F_k^w$ son monogénicas en Ω^+ y Ω^- respectivamente, y tales que sobre Γ

$$F^+ - F^- = F_k.$$

Además, de las condiciones (12) se deduce que

$$\begin{cases} \Delta[F^\pm]_{k\pm 2} = 0, & \text{en } \Omega_\pm, \\ [F^\pm]_{k\pm 2}|_\Gamma = 0. \end{cases}$$

Entonces, por la solución del problema clásico de Dirichlet tenemos

$$[F^\pm]_{k\pm 2} \equiv 0, \text{ en } \Omega_\pm,$$

es decir, las funciones $F^\pm$ son campos k-vectoriales armónicos en $\Omega_\pm$. □

Los teoremas 3.1 y 3.4 conducen a una respuesta para el problema (IV):

Teorema 3.5 *Sea $F_k \in C^{0,\alpha}(\Gamma)$. Si F_k es la traza de un campo k-vectorial en $C^{0,\alpha}(\Omega^+ \cup \Gamma)$ y armónico en Ω^+, entonces*

$$\mathscr{T}_{\Omega^+}\mathscr{D}_x F_k^w|_\Gamma = 0. \tag{13}$$

Recíprocamente, si (13) se cumple, entonces F_k es la traza de un campo k-vectorial en $C^{0,\mu}(\Omega^+ \cup \Gamma)$, $\mu < \alpha$, y armónico en Ω^+.

En la siguiente sección se abordarán algunos problemas de frontera que involucran operadores de Dirac iterados para campos k-vectoriales.

4 Problemas de frontera para ecuaciones de Dirac de segundo orden

Las funciones inframonogénicas surgen específicamente en las álgebras de Clifford como soluciones a la siguiente versión no conmutativa de la ecuación de Laplace:

$$\mathscr{D}u\mathscr{D} = 0. \tag{14}$$

Tales funciones fueron originalmente definidas en (**Malonek**, **Peña**, & **Sommen**, 2010), donde se encontró una descomposición de Fischer mediante polinomios inframonogénicos. Varios matemáticos se han interesado en su estudio por su estrecha conexión con temas afines de la Elasticidad Lineal, como es el caso del sistema de Lamé-Navier. Remitimos al lector a consultar los trabajos: (**Dinh**, 2021; **García**, **Santiesteban**, & **Blaya**, 2023; **García *et al.***, 2018; **Lávicka**, 2011; **Wang *et al.***, 2022).

En el contexto del cálculo vectorial, cuando nos restringimos a considerar soluciones vectoriales $u = \vec{u}$ en $\mathbb{R}^3$, la ecuación (14) puede ser reescrita en la forma

$$\nabla(\nabla \cdot \vec{u}) + \nabla \times (\nabla \times \vec{u}) = 0. \tag{15}$$

Revista de la Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales.
48(188):671-686, julio-septiembre de 2024. doi: https://doi.org/10.18257/raccefyn.2644

Por otro lado, note que la ecuación de Laplace también puede ser reescrita como

$$\nabla(\nabla\cdot\vec{u}) - \nabla\times(\nabla\times\vec{u}) = 0. \tag{16}$$

Ese pequeño cambio de signo en (15) y (16) provoca que las ecuaciones sean bien diferentes en muchos aspectos que nos interesan. El laplaciano es un operador fuertemente elíptico, mientras que el operador vectorial $\nabla(\nabla\cdot)+\nabla\times(\nabla\times)$ y su análogo cliffordiano $\mathscr{D}(.)\mathscr{D}$ no lo son. Esta sutileza implica que no podamos, en general, asegurar la unicidad de la solución del problema de Dirichlet asociado a estos operadores.

En 1992 Dzhuraev estudió dos problemas de frontera para la ecuación

$$\nabla(\nabla\cdot\vec{u}) + \nabla\times(\nabla\times\vec{u}) = \vec{f}(x) \tag{17}$$

en un dominio acotado $G\subset\mathbb{R}^3$, donde $\vec{f}$ denota una función vectorial suave fija. Dichos problemas, a diferencia del problema de Dirichlet, sí se comportaban bien planteados en el sentido de Hadamard (**Dzhuraev**, 1992). Las condiciones sobre la frontera para el primero de estos problemas eran las siguientes:

$$(\vec{u}\times\vec{n})|_\Gamma = 0, \quad (\nabla\cdot\vec{u})|_\Gamma = 0, \tag{18}$$

mientras que para el segundo se exigía que

$$(\vec{u}\cdot\vec{n})|_\Gamma = 0, \quad (\nabla\times\vec{u})|_\Gamma = 0. \tag{19}$$

Aquí $\vec{n}$ denota el vector normal unitario y exterior sobre Γ, siendo Γ la frontera del dominio G. Dzhuraev obtuvo que las soluciones a ambos problemas estaban dadas mediante operadores integrales compactos sobre el espacio $L^p(G)$, con $p>1$.

En (**Santiesteban**, **Blaya**, & **Reyes**, 2023) estos problemas fueron generalizados a espacios euclidianos de mayor dimensión usando el lenguaje del análisis de Clifford. Por lo que se ha constatado entonces, una generalización de la ecuación (17) para campos k-vectoriales es de la siguiente forma:

$$\mathscr{D}F_k\mathscr{D} = f_k. \tag{20}$$

Los problemas estudiados en (**Santiesteban**, **Blaya**, & **Reyes**, 2023) fueron:

- (Problema A) Encontrar todas las soluciones de (20) en $C^2(\Omega)\cap C^1(\overline{\Omega})$ satisfaciendo las condiciones de frontera

$$(\vec{n}\wedge F_k)|_{\partial\Omega} = 0, \quad (\mathscr{D}\bullet F_k)|_{\partial\Omega} = 0. \tag{21}$$

- (Problema B) Encontrar todas las soluciones de (20) en $C^2(\Omega)\cap C^1(\overline{\Omega})$ satisfaciendo las condiciones de frontera

$$(\vec{n}\bullet F_k)|_{\partial\Omega} = 0, \quad (\mathscr{D}\wedge F_k)|_{\partial\Omega} = 0. \tag{22}$$

Una observación importante es que el operador $\mathscr{D}(.)\mathscr{D}$ se comporta como el laplaciano sobre campos escalares y pseudoescalares, y como consecuencia los problemas A y B se convierten en problemas para la ecuación de Poisson con una condición de tipo Dirichlet o Neumann. Es por ello que en (**Santiesteban**, **Blaya**, & **Reyes**, 2023) solo se trataron los casos cuando $1\le k\le m-1$.

Para la obtención de un resultado como el logrado por Dzhuraev (**Dzhuraev,** 1992), los autores en (**Santiesteban, Blaya, & Reyes,** 2023) tuvieron que probar ciertos resultados auxiliares como una fórmula de Borel-Pompeiu y una descomposición de tipo Helmholtz-Hodge. Ellos generalizaron el clásico resultado de que un campo vectorial suave es únicamente determinado cuando se conocen su divergencia y rotacional sobre el dominio, así como la componente normal o tangencial sobre la frontera. Sugerimos al lector que consulte (**Santiesteban**, **Blaya**, & **Reyes**, 2023, Teorema 4, pág. 15790), el cual plantea que un campo k-vectorial suave $F_k \in C^1(\overline{\Omega})$ es únicamente determinado cuando $\mathscr{D} \bullet F_k$ y $\mathscr{D} \wedge F_k$ son dados en Ω, como también $\vec{n} \bullet F_k$ o $\vec{n} \wedge F_k$ sobre la frontera.

Una de las tantas bondades del análisis de Clifford es que permite reescribir y factorizar muchas ecuaciones diferenciales a formas realmente bellas. Haciendo uso de los productos interior y exterior del operador de Dirac con el campo k-vectorial, la ecuación (20) toma la siguiente forma:

$$(-1)^k(\mathscr{D} \bullet \mathscr{D} \wedge F_k - \mathscr{D} \wedge \mathscr{D} \bullet F_k) = f_k. \tag{23}$$

Gracias a esta reescritura podemos resolver los problemas anteriores analizando problemas de frontera para sistemas de primer orden. Los siguientes lemas son fundamentales.

Lema 4.1 *Si $F_k(x)$ es la solución del Problema A, entonces las funciones $\varphi(x) = \mathscr{D} \wedge F_k(x)$ y $\psi(x) = \mathscr{D} \bullet F_k(x)$ serán la solución en Ω del sistema*

$$\mathscr{D} \wedge \psi(x) - \mathscr{D} \bullet \varphi(x) = (-1)^{k+1} f_k(x), \quad \mathscr{D} \bullet \psi(x) = 0, \quad \mathscr{D} \wedge \varphi(x) = 0, \tag{24}$$

satisfaciendo las condiciones de frontera

$$\psi|_{\partial\Omega} = 0, \quad (\vec{n} \wedge \varphi)|_{\partial\Omega} = 0 \tag{25}$$

y la condición integral

$$\int_\Omega \varphi(x)dx = 0. \tag{26}$$

Inversamente, si φ y ψ son las soluciones en $C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ del sistema (24), satisfaciendo (25) o (25)-(26) cuando $k = m-1$, entonces el campo k-vectorial $F_k \in C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, satisfaciendo en Ω el sistema

$$\mathscr{D} \bullet F_k(x) = \psi(x), \quad \mathscr{D} \wedge F_k(x) = \varphi(x), \tag{27}$$

con

$$(\vec{n} \wedge F_k)|_{\partial\Omega} = 0, \tag{28}$$

será la solución del Problema A.

Lema 4.2 *Si $F_k(x)$ es la solución del Problema B, entonces las funciones $\varphi(x) = \mathscr{D} \wedge F_k(x)$ y $\psi(x) = \mathscr{D} \bullet F_k(x)$ serán la solución en Ω del sistema (24) satisfaciendo las condiciones de frontera*

$$\varphi|_{\partial\Omega} = 0, \quad (\vec{n} \bullet \psi)|_{\partial\Omega} = 0 \tag{29}$$

y la condición integral

$$\int_\Omega \psi(x)dx = 0. \tag{30}$$

Inversamente, si φ y ψ son las soluciones en $C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ del sistema (24), satisfaciendo (29) o (29)-(30) cuando $k = 1$, entonces el campo k-vectorial $F_k \in C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, satisfaciendo en Ω el sistema (27) con

$$(\vec{n} \bullet F_k)|_{\partial\Omega} = 0, \tag{31}$$

será la solución del Problema B.

Las demostraciones de los anteriores lemas se encuentran publicadas en (**Santiesteban**, **Blaya**, & **Reyes**, 2023, Sección 4).

La soluciones de ambos problemas admiten la representación

$$F_k(x) = \int_\Omega K(x,y) f_k(y)dy, \tag{32}$$

Revista de la Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales.
48(188):671-686, julio-septiembre de 2024. doi: https://doi.org/10.18257/raccefyn.2644

con un núcleo escalar y débilmente singular $K(x, y)$. También se obtuvo que dichos operadores integrales lineales, mediante los cuales se obtenían las soluciones, se comportaban como operadores compactos sobre $L^p(\Omega)$, $p > 1$. Cabe mencionar que debido a que

$$-\Delta F_k = \mathscr{D} \wedge \mathscr{D} \bullet F_k + \mathscr{D} \bullet \mathscr{D} \wedge F_k, \tag{33}$$

entonces todos los métodos se pueden adecuar para arribar también al buen planteamiento de los problemas para la ecuación de Poisson.

Mediante un cálculo sencillo podemos obtener que si se tienen los campos k-vectoriales F_k y G_k, ambos en $C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ y satisfaciendo las condiciones (21) o (22), entonces

$$\langle \mathscr{D} F_k \mathscr{D}, G_k \rangle = \langle F_k, \mathscr{D} G_k \mathscr{D} \rangle, \tag{34}$$

donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota el siguiente producto interior en el espacio de Hilbert $L^2(\Omega)$:

$$\langle f, g \rangle = \left[\int_\Omega \overline{f(x)} g(x) dx \right]_0 .$$

La relación (34) nos muestra que el operador sándwich se comporta autoadjunto, sujeto a las condiciones de frontera de los problemas. Las funciones propias de los problemas espectrales correspondientes serán entonces soluciones de una ecuación simétrica de Fredholm

$$F_k(x) - \lambda \int_\Omega K(x, y) F_k(y) dy = 0,$$

y debido a los teoremas de alternativa de Fredholm se justifica la existencia de los valores propios y el sistema completo de funciones propias asociado.

En las últimas décadas han ganado cierta relevancia los llamados conjuntos estructurales, los cuales son bases ortonormales del espacio euclidiano que permiten definir generalizaciones del operador de Dirac. La noción de conjunto estructural se remonta a (**Nôno** & **Inenaga**, 1987; **Shapiro**, 1997).

La flexibilidad introducida por estos conjuntos posibilita el descubrimiento de nuevas perspectivas en líneas de investigación concernientes a elasticidad, ∂-problemas, propiedades de mapeo de transformadas de Ahlfors-Beurling, fórmulas alternativas de Kolosov-Muskhelishvili, descomposiciones aditivas de polinomios contragénicos y transformaciones conformes geométricas (**Blaya *et al.***, 2016; **Gürlebeck** & **Nguyen**, 2014, 2015; **Krausshar** & **Malonek**, 2001; **Santiesteban**, 2024; **Santiesteban**, **Blaya**, & **Alejandre**, 2022b; **Santiesteban**, **Blaya**, & **Reyes**, 2023).

Si en lugar de la base canónica $\{e_1, e_2, ..., e_m\}$ consideramos una base ortonormal arbitraria $\{\vartheta_1, \vartheta_2, ..., \vartheta_m\}$, entonces el nuevo operador de Dirac construido con esta base tendrá la forma

$$\mathscr{D}^\vartheta = \vartheta_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \vartheta_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + ... + \vartheta_m \frac{\partial}{\partial x_m}.$$

La consideración de conjuntos estructurales arbitrarios provoca que surjan las ecuaciones diferenciales parciales de segundo orden: $\mathscr{D}^\vartheta f \mathscr{D}^\chi = 0$ y $\mathscr{D}^\vartheta \mathscr{D}^\chi f = 0$, cuyas soluciones han sido nombradas como (ϑ, χ)-inframonogénicas y (ϑ, χ)-armónicas, respectivamente (**Ricardo**, **Reyes**, & **Blaya**, 2021; **Santiesteban**, **Blaya**, & **Alejandre**, 2022a). En este contexto, tomando en cuenta que

$$\mathscr{D}^\vartheta \bullet F_k = \frac{1}{2}(\mathscr{D}^\vartheta F_k - (-1)^k F_k \mathscr{D}^\vartheta),$$
$$\mathscr{D}^\vartheta \wedge F_k = \frac{1}{2}(\mathscr{D}^\vartheta F_k + (-1)^k F_k \mathscr{D}^\vartheta),$$

se obtiene que

$$\mathscr{D}^{\vartheta} F_k \mathscr{D}^{\chi} = (-1)^k (\mathscr{D}^{\vartheta} \bullet \mathscr{D}^{\chi} \wedge F_k - \mathscr{D}^{\vartheta} \wedge \mathscr{D}^{\chi} \bullet F_k - \mathscr{D}^{\vartheta} \bullet \mathscr{D}^{\chi} \bullet F_k + \mathscr{D}^{\vartheta} \wedge \mathscr{D}^{\chi} \wedge F_k),$$
$$\mathscr{D}^{\vartheta} \mathscr{D}^{\chi} F_k = \mathscr{D}^{\vartheta} \bullet \mathscr{D}^{\chi} \wedge F_k + \mathscr{D}^{\vartheta} \wedge \mathscr{D}^{\chi} \bullet F_k + \mathscr{D}^{\vartheta} \bullet \mathscr{D}^{\chi} \bullet F_k + \mathscr{D}^{\vartheta} \wedge \mathscr{D}^{\chi} \wedge F_k.$$

Las fórmulas anteriores nos permiten considerar problemas análogos A y B para estos sistemas más generales. Sin embargo, por lo regular, estos problemas son mal planteados porque el sistema de primer orden

$$(\mathscr{D}^{\vartheta} \wedge \psi)|_{\Omega} = 0, \tag{35}$$
$$(\mathscr{D}^{\chi} \bullet \psi)|_{\Omega} = 0, \tag{36}$$
$$\psi|_{\partial\Omega} = 0, \tag{37}$$

lo es para conjuntos estructurales no equivalentes.

Existen fundamentos para conjeturar que cuando la dimensión m es impar y si consideramos dominios particulares como la bola, el anterior sistema sí se comporta bien planteado; pero esta conjetura continúa sin ser resuelta y constituye un problema de interés aún abierto.

Discusión

El alcance de los resultados se enmarca en la resolución de problemas de frontera que tienen una gran importancia en temas de la Física-Matemática, como son las ecuaciones de Maxwell y el clásico sistema de Lamé-Navier. Los temas y resultados obtenidos abren el camino para el estudio de una amplia gama de sistemas de ecuaciones en derivadas parciales que podrían tener no solo un interés matemático, sino también físico. El estudio de la reconstrucción de campos monogénicos y el reciente descubrimiento de nuevas propiedades para las funciones inframonogénicas son de vital utilidad en áreas tan distantes como el cálculo fraccionario, teoría de las supersimetrías y descomposiciones de Almansi.

Conclusiones

El presente artículo ofrece un resumen de la contribución realizada por los autores en el estudio de la reconstrucción de campos multivectoriales a partir del salto que estos experimentan sobre una superficie de geometría suficientemente irregular. También es abordado el tratamiento a ciertos problemas de frontera para sistemas elípticos de segundo orden. Este trabajo está dirigido a facilitar, a los lectores interesados, una rápida comprensión del alcance y belleza de las herramientas del análisis de Clifford para la solución de los mismos. Los artículos (**Blaya**, 1999; **Blaya** & **Reyes**, 1999; **Blaya**, **Reyes**, & **García**, 2006, 2007, 2008; **Blaya**, **Reyes**, & **Peña**, 2007; **Blaya** ***et al.***, 2008, 2016; **Santiesteban**, 2024; **Santiesteban**, **Blaya**, & **Alejandre**, 2022a, 2022b; **Santiesteban**, **Blaya**, & **Reyes**, 2023) junto con sus referencias bibliográficas han servido de base para su redacción. Los conceptos y propiedades necesarias para la total comprensión del material pueden encontrarse en las restantes referencias consideradas.

Agradecimientos

Daniel Alfonso Santiesteban agradece la Beca Nacional para Estudios de Posgrado del Consejo Nacional de Humanidades, Ciencias y Tecnologías (CONAHCYT) (CVU: 1043969). Juan Bory Reyes estuvo soportado parcialmente por la Secretaría de Investigación y Posgrado del Instituto Politécnico Nacional a través del proyecto individual SIP20241237.

Revista de la Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales.
48(188):671-686, julio-septiembre de 2024. doi: https://doi.org/10.18257/raccefyn.2644

Contribución de los autores

Todos los autores contribuyeron por igual al estudio, leyeron y aprobaron la versión final del manuscrito enviado.

Conflicto de intereses

Los autores declaran que no tienen intereses en competencia con respecto a la publicación de este artículo.

Disponibilidad de datos y material suplementario

No aplicable.

Disponibilidad de códigos

No aplicable.

Referencias

Blaya, R. A. (1999). *Generalizaciones del Problema de Contorno de Riemann en espacios de Hölder* [Tesis Doctoral en Matemáticas, Universidad de Oriente].

Blaya, R. A., García, T. M., Reyes, J. B. (2012). The sharpness of condition for solving the jump problem. *Communications in Mathematical Analysis*, *12*(2), 26-33.

Blaya, R. A., Reyes, J. B. (1999). Boundary value problems for quaternionic monogenic functions on non-smooth surfaces. *Advances in Applied Clifford Algebras*, *9*(1), 1-22.

Blaya, R. A., Reyes, J. B., Adán, A. G., Kähler, U. (2016). On the Π-operator in Clifford analysis. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, *434*, 1138-1159.

Blaya, R. A., Reyes, J. B., García, T. M. (2006). Teodorescu transform decomposition of multivector fields on fractal hypersurfaces. En: Alpay, D., Luger, A., Woracek, H. (eds) *Wavelets, Multiscale Systems and Hypercomplex Analysis. Operator Theory: Advances and Applications 167*, 1-16.

Blaya, R. A., Reyes, J. B., García, T. M. (2007). Minkowski dimension and Cauchy transform in Clifford analysis. *Complex Analysis and Operator Theory*, *1*(3), 301-315.

Blaya, R. A., Reyes, J. B., García, T. M. (2008). Cauchy Transform on non-rectifiable surfaces in Clifford analysis. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, *339*, 31-44.

Blaya, R. A., Reyes, J. B., García, T. M., Peña, D. P. (2008). Laplacian decomposition of vector fields on fractal surfaces. *Mathematical Methods in the Applied Sciences, 31*(7), 849-857.

Blaya, R. A., Reyes, J. B., Peña, D. P. (2007). Jump problem and removable singularities for monogenic functions. *Journal of Geometric Analysis*, *17*(1), 1-14.

Brackx, F., Delanghe, R., Sommen, F. (1982). *Clifford analysis*. Pitman (Advanced Publishing Program), Boston, MA.

Clifford, W. K. (1878). Applications of Grassmann's extensive algebra. *American Journal of Mathematics*, *1*, 350-358.

Cnops, J., Malonek, H. (1997). An introduction to Clifford analysis. *Textos de Matemática, Serie B., Universidade de Coimbra. Portugal*, *7*.

Delanghe, R. (1970). On regular-analytic functions with values in a Clifford algebra. *Mathematische Annalen*, *185*, 91-111.

Delanghe, R. (2001). Clifford Analysis: History and Perspective. *Computational Methods and Function Theory*, *1*(1), 107-153.

Delanghe, R., Reyes, J. B. (2003). An invitation to Clifford Analysis. *Ciencias Matemáticas*, *21*(2), 109-137.

Delanghe, R., Sommen, F., Souček, V. (1992). *Clifford algebra and spinor-valued functions. a function theory for the Dirac operator*. Springer Dordrecht. XVII, 485 p. ISBN 978-94-011-2922-0.

Dinh, D. (2021). On structure of inframonogenic functions. *Advances in Applied Clifford Algebras*, *31*(50), 1-9.

Dzhuraev, A. (1992). *Methods of singular integral equation*. Pitman monographs and surveys in pure and applied mathematics 60. Longman Scientific & Technical, 311 p. ISBN 0-582-08373-7.

Federer, H. (1969). *Geometric measure theory*. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band, 694 p. ISBN 978-3-540-60656-7.

Fueter, R. (1934). Die funktionentheorie der differentialgleichungen $\Delta u = 0$ und $\Delta\Delta u = 0$ mit vier variablen. *Commentarii Mathematici Helvetici*, *7*, 307-330.

García, A. M., García, T. M., Blaya, R. A., Reyes, J. B. (2018). Inframonogenic functions and their applications in three-dimensional elasticity theory. *Mathematical Methods in the Applied Sciences, 41*(10), 3622-3631.

García, A. M., Santiesteban, D. A., Blaya, R. A. (2023). On the Dirichlet problem for second order elliptic systems in the ball. *Journal of Differential Equations*, *364*, 498-520.

Gilbert, J., Murray, M. (1991). *Clifford algebras and Dirac operator in Harmonic Analysis*. Cambridge University Press, Cambridge, 334 p. ISBN 978-051-161-158-2.

Gilbert, R. P., Buchanan, J. (1983). *First Order Elliptic Systems: A Function Theoretic Approach*. Academic Press, New York. ISBN 978-012-283-280-2.

Gürlebeck, K., Habetha, K., Sprössig, W. (2008). *Holomorphic functions in the plane and n-dimensional space*. Birkha¨user Verlag, Basel, 406 p. ISBN 978-3-7643-8271-1.

Gürlebeck, K., Nguyen, H. (2014). On ψ-hyperholomorphic functions and a decomposition of harmonics. En: Bernstein, S., Kähler, U., Sabadini, I., Sommen, F. (eds) *Hypercomplex Analysis: New Perspectives and Applications. Trends in Mathematics*. Birkhäuser, Cham. ISBN 978-3-319-08771-9. https://doi.org/10.1007/978-3-319-08771-9_12.

Gürlebeck, K., Nguyen, H. (2015). ψ-hyperholomorphic functions and an application to elasticity problems. *AIP Conference Proceedings*, *1648*(1), 440005.

Gürlebeck, K., Sprössig, W. (1990). *Quaternionic analysis and elliptic boundary value problems*. Birkha¨usser, Boston, 254 p. ISBN 978-3-0348-7295-9. https://doi.org/10.1007/978-3-0348-7295-9.

Gürlebeck, K., Sprössig, W. (1997). *Quaternionic and Clifford Calculus for Physicists and Engineers*. Wiley and Sons Publications, 375 p. ISBN 0-471-96200-7.

Hestenes, D. (1968). Multivector functions. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, *24*, 467-473.

Iftimie, V. (1965). Fonctions hypercomplexes. *Bulletin mathématique de la Société des Sciences Mathématiques de la République Socialiste de Roumanie*, *9*, 279-332.

Kats, B. A. (1983). The Riemann problem on a closed Jordan curve. *Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedenii. Matematika. Kazanskii Gosudarstvennyi Universitet,* 251(4), 68-80.

Krausshar, R., Malonek, H. (2001). A characterization of conformal mappings in IR^4 by a formal differentiability condition. *Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liège*, *70*(1), 35-49.

Kravchenko, V. V. (2003). *Applied quaternionic analysis*. Research and Exposition in Mathematics *28*, 136 p. ISBN 3-88538-228-8.

Kravchenko, V., Shapiro, M. (1996). *Integral representations for spatial models of mathematical physics*. Pitman Research Notes in Mathematics Series *351,* 256 p. ISBN 978-058-229-741-8.

Lávicka, R. (2011). The Fischer decomposition for the H-action and its applications. En: Sabadini, I., Sommen, F. (eds). *Hypercomplex analysis and applications. Trends in mathematics.* Springer, Basel. https://doi.org/10.1007/978-3-0346-0246-4_10.

Malonek, H., Peña, D. P., Sommen, F. (2010). Fischer decomposition by inframonogenic functions. *CUBO A Mathematical Journal, 12*(2), 189-197.

Mitrea, M. (1994). *Clifford wavelets, singular integrals, and Hardy spaces*. Lecture Notes in Mathematics, *1575*, 120 p. ISBN 978-3-540-48379-3. https://doi.org/10.1007/BFb0073556.

Moisil, G. C., Theodoresco, N. (1931). Fonctions holomorphes danslespace, Mathematica. *Cluj*, *5*, 142-159.

Nôno, K., Inenaga, Y. (1987). On the Clifford linearization of Laplacian. *Journal of the Indian Institute of Sciences*, *67*(5-6), 203-208.

Obolashvili, E. (2002). *Higher order partial differential equations in Clifford analysis: Efective solutions to problems*. Boston, Birkhäuser; Berlin. Basel, 192 p. ISBN 978-0817642860.

Reséndis, F., Shapiro, M. (2002). Recent advances in hypercomplex analysis. *Carta Informativa, Sociedad Matemática Mexicana*, 11-14.

Ricardo, J. S., Reyes, J. B., Blaya, R. A. (2021). Singular integral operators and a ∂-problem for (ϕ,ψ)-harmonic functions. *Analysis and Mathematical Physics*, *11*(155), 1-26.

Rocha-Chávez, R., Shapiro, M., Sommen, F. (2001). *Integral theorems for functions and differential forms in C^m*. Chapman and Hall, 214 p. ISBN 978-158-488-246-6.

Ryan, J. (2000). Basic Clifford analysis. *Cubo Matema´tica Educacional*, *2*, 226-256.

Ryan, J. (2004). Introductory Clifford analysis. En: Ablamowicz, Rafal and Sobczyk, Garret (Eds.) *Lectures on Clifford (geometric) a´lgebras and applications.* Boston, MA: Birkha¨user.

Santiesteban, D. A. (2024). ∂-problem for a second order elliptic system in Clifford analysis. *Mathematical Methods in the Applied Sciences, 47*(12)*,* 9718-9728. https://doi.org/10.1002/mma.10090.

Santiesteban, D. A., Blaya, R. A., Alejandre, M. Á. (2022a). On (φ , ψ)-inframonogenic functions in Clifford analysis. *Bulletin of the Brazilian Mathematical Society, New Series*, *53*, 605-621.

Santiesteban, D. A., Blaya, R. A., Alejandre, M. Á. (2022b). On a generalized Lamé-Navier system in IR^3. *Mathematica Slovaca*, *72*(6), 1527-1540.

Santiesteban, D. A., Blaya, R. A., Reyes, J. B. (2023). Boundary value problems for a second-order elliptic partial differential equation system in Euclidean space. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, *46*, 15784-15798.

Shapiro, M. (1997). On the conjugate harmonic functions of M. Riesz-E. Stein-G. Weiss. En: Dimiev, S. et al. (Eds.)*, Topics in Complex Analysis, Differential Geometry and Mathematical Physics, Third International Workshop on Complex Structures and Vector Fields*. St. Konstantin, Bulgaria, August 23-29.

Sommen, F., Sprössig, W. (2002). Introduction to Clifford analysis. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, *25*(6), 1337-1342.

Sprössig, W. (2002). Clifford analysis and its applications in Mathematical Physics. *Cubo Matemática Educacional*, *4*, 253-314.

Sudbery, A. (1979). Quaternionic analysis. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society 85,* 199-225.

Wang, L., Jia, S., Luo, L., Qiu, F. (2022). Plemelj formula of inframonogenic functions and their boundary value problems. *Complex Variables and Elliptic Equations, 68*(7), 1158-1181. https://doi.org/10.1080/17476933.2022.2040019.

Wen, G., Sha, H., Yu-Ying, Q. (2005). *Real and complex Clifford analysis*. Springer-Verlag, Berlin, 251 p. ISBN 978-0-387-24536-2.