Rev. Acad. Colomb. Cienc. Ex. Fis. Nat. 46(179):311-324, abril-junio de 2022
doi: https://doi.org/10.18257/raccefyn.1625

Ciencias Físicas

Artículo original

Lógica cuántica: enfoque reticular ortocomplementado modular y tesis de la interpretación parcial

Quantum logic: modular orthocomplemented lattice approach and partial interpretation thesis

Carlos Villacís

Facultad de Filosofía, Universidad Complutense de Madrid, Madrid, España

Resumen

En el presente artículo se propone una concepción de la lógica cuántica como forma de interpretación de la mecánica cuántica. Se establece como hipótesis metodológica la tesis metateórica de la interpretación parcial para realizar una reconstrucción del enfoque reticular ortocomplementado modular con el cual Birkhoff y von Neumann iniciaron el desarrollo de la lógica cuántica. Sobre estas bases se elabora una modelización lógica del cálculo proposicional obtenido en comparación analítica con otras estructuras lógico-algebraicas. Se discuten los resultados a partir de la propiedad distributiva y de la capacidad para retener la propiedad de la modularidad. Por último, se ponen de manifiesto problemas heurísticos y formales con respecto al éxito de la consecución de tal núcleo conceptual.

Palabras clave: Mecánica cuántica; Lógica cuántica; Interpretación parcial; Modularidad; Retículo.

Abstract

In this article, a conception of quantum logic is proposed as a way of interpreting quantum mechanics. The metatheoretical thesis of partial interpretation is established as a methodological hypothesis to carry out a reconstruction of the modular orthocomplemented lattice approach with which Birkhoff and von Neumann began the development of quantum logic. On these bases, the logical modeling of the propositional calculus obtained is elaborated via an analytical comparison with other logical-algebraic structures. The results are discussed from the distributive property and the ability to retain the property of modularity. Finally, heuristic and formal problems are revealed regarding the success of achieving such a conceptual core.

Keywords: Quantum mechanics; Quantum logic; Partial interpretation; Modularity; Lattice.

Citación: Villacís C. Lógica cuántica: enfoque reticular ortocomplementado modular y tesis de la interpretación parcial. Rev. Acad. Colomb. Cienc. Ex. Fis. Nat. 46(179):311-324, abril-junio de 2022. doi: https://doi.org/10.18257/raccefyn.1625

Editor: Román Eduardo Castañeda-Sepúlveda

Correspondencia:
Carlos Villacís; cvillaci@ucm.es

Recibido: 4 de febrero de 2022
Aceptado: 18 de abril de 2022
Publicado: 28 de junio de 2022

Introducción

El objeto de investigación del artículo reside en el modelo original elaborado por **Birkhoff & von Neumann** (1936) que dio inicio al desarrollo de la lógica cuántica y en cuyo marco se aboca el análisis de la estructura conceptual de la lógica cuántica a la luz de su composición semántico-algebraica expresada en el fragmento proposicional de una lógica no clásica.

Es menester hacer dos aclaraciones de carácter propedéutico. En primer lugar la lógica cuántica se ha convertido en un campo de estudio con diversas variantes propias de la evolución de los programas de investigación, circunstancia que obliga a distinguir entre enfoques y modelos. Los primeros hacen referencia a los tipos de sistemas lógicos que se emplean para analizar las nociones lógicas subyacentes a la mecánica cuántica y los segundos aluden a las formas matemáticas concretas dentro de los distintos enfoques. En este sentido, el enfoque original de **Birkhoff & von Neumann** (1936) es el reticular y en su marco defienden un modelo ortocomplementado modular.

Rev. Acad. Colomb. Cienc. Ex. Fis. Nat. 46(179):311-324, abril-junio de 2022
doi: https://doi.org/10.18257/raccefyn.1625

En dicho contexto se analiza aquí la propuesta del modelo ortocomplementado modular del enfoque reticular, que en adelante denominamos “R_{OM}”. No se trata esta de la única propuesta, dado que se ha investigado la lógica cuántica a partir de diversos enfoques lógicos, entre los que se destacan el algebraico (**Jordan,** 1932; **Segal,** 1947), el polivalente (**Février,** 1937; **Reichenbach,** 1944) y el axiomático (**Mackey,** 1963; **Piron,** 1964; **Jauch,** 1968), siendo este último el más próximo al enfoque inicial de **Birkhoff & von Neumann** (1936). Asimismo, cabe destacar que, ante este panorama plural, **van Fraassen** (1974) hizo uso del análisis semántico de Beth para reconstruir un enfoque unificado.

En segundo lugar, la lógica cuántica ha sido objeto de estudio de distintas áreas del conocimiento. Por este motivo deben establecerse dos restricciones en la metodología de investigación: (i) dado que el aspecto central reside en el problema de la interpretación de una teoría física, nos hallamos dentro del campo de la filosofía de la física, y (ii) empleamos herramientas formales de la lógica y recursos conceptuales de la filosofía de la ciencia para evaluar el cálculo proposicional de R_{OM} en tanto que interpretación de la mecánica cuántica.

Por consiguiente, podemos formular la pregunta que orienta la investigación del siguiente modo: ¿es el R_{OM} una interpretación adecuada de la mecánica cuántica? La evaluación del éxito del enfoque inicial propuesto por Birkhoff y von Neumann exige alcanzar previamente los siguientes objetivos: definir el concepto de interpretación de una teoría física, analizar formalmente la lógica cuántica y coordinar ambos aspectos.

La investigación se estructuró en cuatro partes: primero, adoptamos una hipótesis metodológica para aclarar la definición de interpretación de una teoría; segundo, analizamos los fundamentos heurísticos de la lógica cuántica; tercero, reconstruimos una esquematización lógica del R_{OM} en virtud de la cual se pone de manifiesto su conexión con la mecánica cuántica, y cuarto, discutimos el núcleo conceptual del R_{OM}, es decir, la modularidad, y llevamos a cabo una discusión sobre las dificultades de este enfoque para la interpretación de la mecánica cuántica. En síntesis, se sistematizó la tesis de la interpretación parcial con el enfoque lógico cuántico de Birkhoff y von Neumann mediante una modelización lógico-algebraica del cálculo proposicional.

Método

Tesis metateórica de la interpretación parcial. El primer paso de la investigación implicó aclarar la noción de interpretación de una teoría. La precisión del significado de “interpretar una teoría física” permite una resolución del problema de la lógica cuántica en tanto que interpretación de la mecánica cuántica. Nos hallamos entre dos extremos: uno general y otro restringido. El concepto general de interpretación se propone determinar “qué mundo describe una teoría”. El concepto restringido de interpretación pertenece a la teoría de modelos y en lógica se emplea para caracterizar la semántica formal. En este contexto una interpretación es un par $M := \langle D, v \rangle$ para un lenguaje L, donde $D \neq \emptyset$ es el universo y v es una aplicación cuyo dominio es el conjunto de símbolos propios de L, tal que: $v(R)$ es una relación n-ádica en D sii R es un símbolo relacional n-ádico de L y $v(f)$ es una función n-ádica en D sii f es un símbolo funcional n-ádico de L. Por consiguiente, se dice que $v(t)$ es la interpretación de t en la estructura M sii t es un símbolo de L.

El primer extremo concierne a los aspectos conceptuales y es demasiado amplio para precisar la relación específica entre el formalismo teórico y la interpretación. El segundo extremo, por su parte, es una noción técnica concerniente a las teorías matemáticas. Debemos presentar un problema añadido a tal disyuntiva: la locución “interpretación de una teoría empírica” no es unívoca. **Jammer** (1974) expresa que “*just as physicists disagree on what is the correct interpretation of quantum mechanics, philosophers of science disagree on what it means to interpret such a theory*” para poner de manifiesto que en el desarrollo tanto de la historia de las ciencias como de la filosofía de la ciencia se han propuesto y aplicado diversos conceptos de teoría científica.

Ante este panorama debemos adoptar una hipótesis metodológica. Nos apoyamos en la tesis de la interpretación parcial que emplea **Jammer** (1974) en su análisis de las interpretaciones de la mecánica cuántica. Así pues, comprendemos una teoría física como un sistema formal parcialmente interpretado. Bajo la tesis de la interpretación parcial se distinguen dos elementos de una teoría física *T*: el conjunto *F* del formalismo abstracto y el conjunto *R* de las reglas de correspondencia. Al conjunto *F* pertenecen las fórmulas primitivas y derivadas, así como con un cálculo deductivo, de modo que tanto las constantes lógicas como los términos no lógicos pertenecen a *F*. Estos últimos son específicos del campo de investigación científica correspondiente. No obstante, cabe aclarar que, atendiendo a los elementos de *F*, el significado de tales términos no es empírico, sino que depende del contexto lógico del formalismo *F*.

En *F* los términos no lógicos tales como "función de estado" carecen de contenido empírico, a pesar de sugerir una descripción física. Por este motivo se necesita el conjunto *R* de reglas de correspondencia. Con ellas podemos establecer una correlación entre determinadas observaciones físicas y los términos no lógicos del formalismo. Con *R* se dota de significado físico a *F* de tal modo que se obtiene un sistema hipotético-deductivo cuyos enunciados poseen significado empírico. En este sentido, **Jammer** (1974) explica que: "*To transform F into a hypothetic deductive system of empirical statements and to make it thus physically meaningful, some of the nonlogical terms, or some formulae in which they occur, have to be correlated with observable phenomena or empirical operations*". R hace posible tal correlación.

Los postulados que se hipotetizan son las fórmulas primitivas de *F*, el sistema deductivo permite obtener las fórmulas derivadas y *R* garantiza que el significado de los términos no lógicos de tales fórmulas sea empírico. Ahora bien, la diferencia entre términos observacionales y teóricos no debe equipararse con las fórmulas derivadas y primitivas. Los elementos de *R* pueden comprenderse como reglas semánticas de tal modo que se expresan en el metalenguaje y atribuyen su significado a los términos no lógicos del formalismo. Por consiguiente, los términos observacionales se definen como aquellos términos no lógicos a los que una regla de *R* otorga directamente su contenido empírico. Por su parte, los términos teóricos se definen como aquellos términos no lógicos que las reglas de *R* no interpretan de modo directo. En ambos casos los términos no lógicos pueden ser de fórmulas primitivas o derivadas del conjunto *F*. Esto permite dilucidar el núcleo de la tesis de la interpretación parcial: se puede hablar de una interpretación parcial de *T* debido a que los términos teóricos se definen de forma contextual. Pueden darse diversas interpretaciones válidas, dado que es posible establecer un conjunto *R'* que difiera de *R* tal que el formalismo pueda estar parcialmente interpretado por *R* o por *R'*. F_R expresa que *R* interpreta parcialmente a *F*, así pues, pueden ocurrir F_R y $F_{R'}$.

Al hablar de la interpretación de *F* por *R* nos encontramos ante interpretaciones del formalismo de una teoría. No obstante, a pesar de la distinción analítica y de la posibilidad de que diferentes conjuntos de reglas de correspondencia interpreten un mismo formalismo, para considerarla como tal, en una teoría científica no puede darse un componente de *T* sin el otro: "*F* without *R* is a meaningless game with symbols, *R* without *F* is at best an incoherent and sterile description of facts" (**Jammer,** 1974).

La tesis de la interpretación parcial es la postura metateórica que **Jammer** (1974) emplea para dar cuenta de las interpretaciones de la mecánica cuántica orientadas a resolver el problema de la medida. Sin embargo, en cuanto a la lógica cuántica, Jammer no hace uso de la interpretación de *F* por *R*, antes bien, aborda la perspectiva lógico-cuántica como interpretación en tanto que perspectiva que incide sobre la estructura formal que exige el sistema deductivo subyacente en la expresión de *T*. **Jammer** (1974) relaciona la lógica cuántica con "*the formal structure of the deductive reasoning applied in formulating T*", lo cual no es más que *"the logic underlying the formulation of T*". Esta perspectiva le permite entroncar con el objetivo manifestado por **Birkhoff & von Neumann** (1936): "El objeto del presente artículo es descubrir qué estructura lógica es dado esperar en las teorías físicas que, como la mecánica cuántica, no se ajustan a la lógica clásica" (traducción propia).

En nuestra hipótesis metodológica asumimos la comprensión de la lógica cuántica bajo la tesis de la interpretación parcial de *F* por *R*, conjuntamente con el planteamiento del sistema deductivo que ordena la formulación abstracta de la mecánica cuántica. Esta

Rev. Acad. Colomb. Cienc. Ex. Fis. Nat. 46(179):311-324, abril-junio de 2022
doi: https://doi.org/10.18257/raccefyn.1625

línea integradora contrasta con el planteamiento de **Jammer** (1974), quien entiende la lógica cuántica (en tanto que interpretación de la mecánica cuántica) exclusivamente como la modificación de las leyes deductivas que establecen la consistencia del formalismo físico teórico. Por nuestra parte, mostraremos que el modo más adecuado de comprender la lógica cuántica (en tanto que interpretación de la mecánica cuántica) es atendiendo al contenido significativo que adquieren los términos no lógicos a partir de las reglas de correspondencia, dado que tiene mayor rendimiento explicativo de acuerdo con la base heurística de la formulación original del R_{OM}. En definitiva, adoptamos la hipótesis metodológica que propone la comprensión de las leyes lógico-deductivas que estructuran formalmente la teoría mecánico-cuántica en tanto que reglas de correspondencia del conjunto R que interpreta parcialmente el formalismo F dotando de contenido significativo a los términos no lógicos de los enunciados primitivos y derivados. Defendemos que el establecimiento de la "lógica subyacente" de **Birkhoff & von Neumann** (1936) se hace a la luz de la correspondencia con las operaciones empíricas.

La razón por la que el sistema es deductivo y no inductivo tiene una doble motivación. Por un lado, los razonamientos deductivos son, por su estructura formal, inferencias conservadoras y no amplían la verdad de las premisas a la conclusión, en tanto que los razonamientos inductivos son inferencias ampliadoras, pero no conservadoras de la verdad. Así pues, en lo concerniente a la consistencia de la formulación abstracta de la teoría debemos ceñirnos a la necesaria conservación de la verdad y no a la mera verosimilitud. Por otro lado, debemos aproximarnos al método científico formulado en términos hipotético-deductivos, es decir, se conjetura una hipótesis de la cual se derivan deductivamente enunciados que deben ser experimentalmente corroborados, lo que se hace para justificar la ampliación de la verdad y, a su vez, evitar el camino inverso y no incurrir, precisamente, en el problema de la inducción.

Cabe destacar que el concepto de interpretación se encuentra intrínsecamente vinculado al problema de la naturaleza de las teorías científicas, cuyo campo de investigación es la filosofía de la ciencia. Las diferentes propuestas metateóricas se han sucedido en la evolución de esta disciplina. En este sentido, la tesis de la interpretación parcial en la que se apoya **Jammer** (1974) tiene una marcada impronta de la concepción heredada en su comprensión de las teorías empíricas como cálculos interpretados. Frente a esto debe mencionarse que nuestra asunción de dicho concepto de interpretación no es una apología de las tesis neopositivistas, antes bien, se trata de una hipótesis metodológica adoptada por su mayor capacidad explicativa en el ámbito particular de la comprensión del R_{OM} con el que comenzó el desarrollo de la lógica cuántica.

Por último, debemos aclarar que en la filosofía de la mecánica cuántica, el vocablo "interpretación" alude a dar una respuesta al problema de la medida para explicar el colapso de la función de onda. La propuesta lógico-cuántica consistiría en defender que las reglas de la lógica no se adecúan al sistema clásico en el nivel cuántico. Sin embargo, la propuesta inicial del R_{OM} no se presentó explícitamente como una posible respuesta al problema de la medida, por lo que las cuestiones específicas de dicho problema no se abordan de modo directo, es decir, su propósito se circunscribe a la indagación de la lógica subyacente a la teoría. Por consiguiente, nuestra investigación se desarrolla en el marco específico de la interpretación de una teoría física en tanto que interpretación parcial.

Fundamentos conceptuales

Cálculo de enunciados, espacio de fases y proposiciones experimentales. Dado un sistema físico X, una observación de X es una asignación numérica $x_1, \ldots, x_n$ tal que mantiene una correspondencia con cada μ_k, donde $\mu_1,\ldots, \mu_n$ denotan las mediciones. Un punto cualquiera $(x_1, \ldots, x_n)$ es determinado por cierta medida $\mu_1,\ldots, \mu_n$. Como explican **Birkhoff & von Neumann** (1936): "*an 'observation' of a physiccal system X can be described generally as a writing down of the readings from various compatible measurements*". En este contexto, las predicciones son comprendidas como aquellas circunstancias en las que cierto punto $(x_1, \ldots, x_n)$ pertenece a un subconjunto A de un espacio tipo $(x_1, \ldots, x_n)$. Un espacio de observación de X consiste en un espacio tipo (x_1, …, x_n) que se encuentra en relación con X. Así pues, se denominan proposiciones experimentales a los subconjuntos A_i de los espacios de tipo (x_1, …, x_n) que se encuentran en relación con X, es decir, sus espacios de observación. A tales espacios de observación pertenecen los puntos (x_1, …, x_n) determinados por μ_1,…, μ_n.

La representación matemática de un estado de un sistema físico es un punto p de Σ, siendo Σ un espacio de fases fijo. Se asume como hipótesis que cualquier sistema X se encuentra asociado con algún p_t en cada instante t_n. Como señalan **Birkhoff & von Neumann** (1936): "Σ *is a region of ordinary 2n-dimensional space*" en el contexto mecánico-clásico, pero en electrodinámica "Σ *is a function-space of infinitely many dimensions*" y la posibilidad de determinar los puntos del espacio de fases del sistema electrodinámico depende de la especificación previa de determinadas funciones. **Von Neumann** (1932) empleó los espacios de Hilbert para formalizar la mecánica cuántica dado que constituyen una estructura matemática en la que la mecánica de ondas de Schrödinger y la mecánica matricial de Heisenberg son equivalentes. De modo que un sistema mecánico-cuántico Σ es un espacio de función para el cual se emplean los espacios de Hilbert, en tanto que las funciones de onda constituyen los puntos de dicho espacio. Al relacionar esto último con las proposiciones experimentales, decimos que el representante matemático de algún A_i incluido en cualquier espacio de observación relacionado con X no es más que el conjunto al que pertenecen todos los puntos del espacio de fases de X.

Todo ello ofrece los elementos para el establecimiento de un cálculo proposicional mecánico-cuántico que capte las reglas de correspondencia en virtud de las cuales el formalismo adquiere contenido físico. En nuestra propuesta se trataría de las reglas de la interpretación parcial. Debemos tener en cuenta que, dada una predicción, una medida define una asignación de números que llamamos observación, la cual pertenece a una proposición experimental incluida en un espacio de observación que se encuentra asociado al sistema X. Debido a que los subconjuntos de un espacio de fases no son ontológicamente lo mismo que los subconjuntos de un espacio de observación (pues estos subconjuntos son las proposiciones experimentales), el objetivo de la lógica cuántica consiste en esclarecer la relación entre los subconjuntos de un espacio de fases y las proposiciones experimentales en mecánica cuántica.

Si se trata de un sistema clásico, es posible obtener el momento a partir de la velocidad y la posición del estado del sistema, lo cual permite definir una correspondencia entre los subconjuntos de un espacio de observación y los de un espacio de fases en la que la relación de inclusión se preserva. La definición de dicha correspondencia puede representarse con un álgebra de Boole. Un retículo de Boole permite expresar la suma, el producto y el complemento conjuntistas, ya que tienen las mismas propiedades en cualesquiera subconjuntos de espacio de fases y proposiciones experimentales. Ahora bien, no es posible mantener la misma expresión booleana en un sistema cuántico, pues sus medidas no pueden predecirse a partir de su estado. Esta condición no permite establecer una relación biyectiva entre los subconjuntos de un espacio de fases y las proposiciones experimentales. La propuesta del R_{OM} consiste en que: "*this situation has an exact algebraic analogue in the calculus of propositions*" (**Birkhoff & von Neumann**, 1936), definiendo ese análogo a través de un álgebra no booleana. Las condiciones de tal definición son las siguientes:

- La relación que guarda el espacio de fases con la realidad se expresa en la correlación que existe entre las proposiciones experimentales y los subconjuntos de un espacio de fases. Como lo plantean **Birkhoff & von Neumann** (1936), "*before a phase-space can become imbued with reality, its elements and subsets must be correlated in some way with 'experimental propositions'*".
- Las reglas de correspondencia expresadas en el álgebra no booleana deben mantener la relación de inclusión conjuntista, de tal modo que se conciban las proposiciones experimentales y los subconjuntos del espacio de fases como subconjuntos de espacios de observación.

Rev. Acad. Colomb. Cienc. Ex. Fis. Nat. 46(179):311-324, abril-junio de 2022
doi: https://doi.org/10.18257/raccefyn.1625

• En el caso cuántico no es admisible pensar las proposiciones experimentales como subconjuntos de un espacio de fases, dado que no cabe la posibilidad de instaurar una correspondencia uno-a-uno entre una proposición experimental y un subconjunto del espacio de fases. Por consiguiente, la relación de inclusión no se preserva. **Birkhoff & von Neumann** (1936) indican que el motivo se encuentra en que, "*the readings from measurements on a physical system X from a knowledge of its 'state' is denied*".

• El complemento, la suma y el producto preservan sus propiedades en términos conjuntistas al establecer las reglas de correspondencia entre las proposiciones experimentales y los subconjuntos de un espacio de fases.

Relación de las proposiciones experimentales con los subconjuntos de un espacio de fases

Para esclarecer la relación que existe entre las proposiciones experimentales y los subconjuntos de un espacio de fases, de la cual obtendremos el cálculo proposicional del R_{OM}, Birkhoff y von Neumann introdujeron una definición y un postulado de carácter heurístico.

Dada una sucesión $\alpha_1, ..., \alpha_n$ de observaciones compatibles en X, se colige que existe una clase $\Omega_i \in \Sigma$ de subespacios lineales cerrados y mutuamente ortogonales. Por consiguiente, cada $f \in \Sigma$ se expresa $\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \alpha_3 f_3 + ... f_i \in \Omega_i$. A partir de tal indicación, **Birkhoff & von Neumann** (1936) elabora la siguiente definición:

"By the 'mathematical representative' of a subset A of any observation-space (determined by compatible observations $\alpha_1, ..., \alpha_n$*) for a quantum-mechanical system X, will be meant the set of all points f of the phase-space of X, which are linearly determined by proper functions* f_k *satisfying* $\alpha_1 f_k = \lambda_1 f_k, ..., \alpha_n f_k = \lambda_n f_k$*, where* $(\lambda_1, ..., \lambda_n) \in A$".

La definición permite especificar la relación entre un subconjunto del espacio de fases y una proposición experimental. El representante matemático de cada A_i de un espacio de observación es el conjunto de todas las $f \in \Sigma$. Esto quiere decir que el representante matemático de cualquier A_i de un espacio de observación es el conjunto al que pertenecen las funciones del espacio de fases determinadas linealmente por las funciones propias que cumplen $\alpha_1 f_k = \lambda_1 f_k, \ldots, \alpha_n f_k = \lambda_n f_k$. Es menester tener en cuenta que el conjunto A_i y el concepto de proposición experimental son coextensionales y que una función propia f_k es un punto de Σ. Lo que establece la relación consiste en que para cada $\lambda_n \in S$: f_k satisface $\lambda_n f_k$, de tal modo que se preserva una igualdad con las observaciones tal que $\alpha_n f_k = \lambda_n f_k$.

De la definición se extraen dos corolarios conceptualmente relevantes. Por un lado, dado que el espacio de fases de un sistema mecánico-cuántico X es un espacio de Hilbert H, un subespacio lineal cerrado de H es un representante matemático de una proposición experimental. Por otro lado, dado que los operadores son hermíticos en un sistema mecánico-cuántico X, el complemento ortogonal de una proposición experimental es el representante matemático de la negación de dicha proposición experimental. Asimismo, siendo P y Q dos proposiciones experimentales, son equivalentes estas cláusulas:

i. El representante matemático de P está incluido en el representante matemático de Q.

ii. Si es posible predecir P, entonces es posible predecir Q. Este es el concepto de "P implica Q" en este contexto.

iii. La probabilidad de P es a lo sumo la de Q al tomar conjuntamente diversos sistemas.

Tales condiciones permiten a **Birkhoff & von Neumann** (1936) introducir el siguiente postulado necesario para definir el R_{OM}:

"*The set-theoretical product of any two mathematical representatives of experimental propositions concerning a quantum-mechanical system, is itself the mathematical representative of an experimental proposition.*"

Por consiguiente, dados cualesquiera $\Omega_1, \Omega_2 \in$ H, su suma lineal cerrada es el complemento ortogonal del producto cartesiano de los complementos ortogonales de Ω_1 y Ω_2. De lo cual se deriva que:

i. Sean $\Omega_1 \in$ H un subespacio lineal cerrado y X un sistema mecánico cuántico, si una proposición experimental de X es representada matemáticamente por Ω_1, entonces su complemento ortogonal constituye también una representación matemática de una proposición experimental de X.

ii. Sean $\Omega_1,\Omega_2 \in$ H subespacios lineales cerrados y X un sistema mecánico cuántico, si dos proposiciones experimentales de X son representadas matemáticamente por Ω_1 y Ω_2, respectivamente, la suma lineal cerrada y el producto cartesiano de Ω_1 y Ω_2 constituyen también representaciones matemáticas de proposiciones experimentales de X.

En síntesis, un subespacio cerrado de un espacio de Hilbert representa una proposición experimental de una entidad cuántica. Asimismo, es posible realizar la definición lógico-formal de una conectiva unaria, dos binarias y una relación de consecuencia lógica. Esto permite especificar un cálculo proposicional de un sistema mecánico cuántico a partir de sus proposiciones experimentales. Se trata de un cálculo proposicional "*wich is formally indistinguishable from the calculus of linear subspaces with respect to* set products, linear sums, *and* ortogonal complements *and resembles the usual calculus of propositions with respect to* and, or *and* not" (**Birkhoff & von Neumann,** 1936). No obstante, las proposiciones cuánticas que pertenecen al conjunto de los espacios cerrados de un espacio de Hilbert no satisfacen la distribución de la disyunción en la conjunción y viceversa. Por consiguiente, no pueden ser representadas mediante un álgebra de Boole.

Resultados

La lógica cuántica estándar actualmente se expresa mediante un retículo ortomodular completo (**Dalla Chiara & Giuntini,** 2008). En la presente sección mostramos el contraste entre la lógica ortomodular y el R_{OM} a partir del retículo de Hilbert. **Birkhoff & von Neumann** (1936) presentaron los elementos sintáctico-reticulares, sin embargo, nuestro objetivo es mostrar las condiciones semánticas que permitan comprender la relación de consecuencia de un sistema lógico-cuántico.

Lógica ortomodular

Usamos las siguientes constantes metalógicas: no, &, o, ⇒, sii, ∀, ∃, las cuales mantienen el sentido habitual. Partimos de las siguientes definiciones:

Def. 1. Un semirretículo es un par R≔ <D,•>, tal que

i. D≠∅

ii. El operador binario • es asociativo, conmutativo e idempotente, respectivamente:

- $\forall xyz \in$ D: $x \bullet (y \bullet z) = (x \bullet y) \bullet z$
- $\forall xy \in$ D: $x \bullet y = y \bullet x$
- $\forall x \in$ D: $x \bullet x = x$

Def. 2. Un retículo es una tripleta R≔ <D,⊔,⊓>, tal que

i. <D,⊔> es un semirretículo

ii. <D,⊓> es un semirretículo

iii. R satisface las leyes de absorción:

- $\forall xy \in$ D: $x \sqcup (x \sqcap y) = x$
- $\forall xy \in$ D: $x \sqcap (x \sqcup y) = x$

Son equivalentes la definición algebraica y la definición en tanto que orden de un retículo (prueba en **Grätzer,** 2011). Por este motivo emplearemos la relación ≤ de orden parcial.

Def. 3. Un retículo acotado es una estructura R≔ <D,≤,1,0>, tal que

i. ≤ es una relación antisimétrica, transitiva y reflexiva (orden parcial) en D

ii. $\forall xy \in$ D, x,y tienen un supremo $x \sqcup y$ y un ínfimo $x \sqcap y$ que satisfacen:

- $x \sqcap y \leq x,y$ & $\forall z \in$ D: $z \leq x,y \Rightarrow z \leq x \sqcap y$
- $x,y \leq x \sqcup y$ & $\forall z \in$ D: $x,y \leq z \Rightarrow x \sqcup y \leq z$

iii. 0 es el mínimo y 1 es el máximo. $\forall x \in$ R:

- $0 \leq x$
- $x \leq 1$

Def. 4. Un ortorretículo es una estructura R≔ <D,≤,1,0,'>, tal que

i. <D,≤,1,0> es un retículo acotado

Rev. Acad. Colomb. Cienc. Ex. Fis. Nat. 46(179):311-324, abril-junio de 2022
doi: https://doi.org/10.18257/raccefyn.1625

ii. El ortocomplemento ' es un operador monádico que cumple las reglas de la doble negación, la contraposición y la no-contradicción, $\forall xy \in$ D:

- $x'' = x$
- $x \leq y \Rightarrow y' \leq x'$
- $x \sqcap x' = 0$

Def. 5. Un retículo ortomodular es una estructura R≔ <D,≤,1,0,'>, tal que

i. R es un ortorretículo

ii. $\forall xy \in$ D: $x \sqcap (x' \sqcup (x \sqcap y)) \leq y$

Un ortorretículo no satisface las leyes distributivas:

i. $x \sqcup (y \sqcap z) = (x \sqcup y) \sqcap (x \sqcup z)$

ii. $x \sqcap (y \sqcup z) = (x \sqcap y) \sqcup (x \sqcap z)$

No obstante, sí cumple versiones más débiles:

i. $(x \sqcap y) \sqcup (x \sqcap z) \leq x \sqcap (y \sqcup z)$

ii. $x \sqcup (y \sqcap z) \leq (x \sqcup y) \sqcap (x \sqcup z)$

A continuación establecemos una definición algebraica de los modelos lógico-cuánticos que interpretan un lenguaje L≔ <F_A, C, FBF>, donde F_A es el conjunto de fórmulas atómicas, {¬, ∧} es el conjunto C de conectivas y FBF es el conjunto de fórmulas bien formadas que se generan inductivamente a partir de C y F_A del modo habitual y que expresaremos con letras griegas minúsculas. Se trata de un lenguaje simplificado debido a que la finalidad es la aclaración conceptual.

Def. 6. Un modelo M_{OL} del lenguaje L para una ortológica es un par <R,I>, donde

i. R es un ortorretículo <D,≤,1,0,'>

ii. I: FOR(L) ⟶ {⊥,⊤} es una función de interpretación tal que $\forall \varphi, \psi \in$ FOR(L):

- $v(\neg\varphi) = v(\varphi)'$
- $v(\varphi \wedge \psi) = v(\varphi) \sqcap v(\psi)$

En este contexto, ⊥ y ⊤ son los valores de verdad y se leen como "falso" y "verdadero", respectivamente.

Def. 7. Verdad en una ortológica:

i. $M_{OL} \Vdash \varphi$: φ es verdadera en la estructura M_{OL} sii I(φ)= ⊤.

ii. $\vDash_{MOL} \varphi$: φ es una verdad lógica sii para cualquier estructura M_{OL}, $M_{OL} \Vdash \varphi$.

iii. M_{OL} es un modelo de φ sii $M_{OL} \Vdash \varphi$. M_{OL} es un modelo del conjunto Γ fórmulas sii $\forall \varphi \in \Gamma$, $M_{OL} \Vdash \varphi$.

Def. 8. Relación de consecuencia de una ortológica:

$\Gamma \vDash_{MOL} \varphi$: φ es consecuencia de Γ en M_{OL} sii $\forall x \in$ D: $\forall \psi \in \Gamma (x \leq v(\psi) \Rightarrow x \leq v(\varphi))$.

Def. 9. Un modelo M_O del lenguaje L para una lógica ortomodular es la misma estructura <R,I> de M_{OL} (supra, def. 6), pero siendo R un retículo ortomodular.

Def. 10. Verdad en una lógica ortomodular: las definiciones de verdad en M_O, de verdad lógica de una lógica ortomodular y de modelo de una fórmula en una lógica ortomodular son análogas a las definiciones correspondientes de una ortológica (supra, def. 7) empleando M_O.

Def. 11. Relación de consecuencia de una lógica ortomodular: la definición es análoga a la correspondiente definición de una ortológica (supra, def. 8) empleando M_O.

Lógica ortocomplementada ortomodular

Dado el fundamento conceptual de la lógica de un sistema físico, las proposiciones experimentales P de un sistema X pueden ser representadas matemáticamente por los subconjuntos Ω_i de un espacio de fases Σ. Lo que expresa una proposición experimental consiste en que una cantidad física tiene un valor y los subconjuntos Ω_i son las cualidades físicas o eventos. Asimismo, se dice que P se encuentra asociado con Ω si en tal subconjunto de Σ están contenidos aquellos estados puros (u observaciones maximales que comprueban los estados de X) por los que P se sostiene. De este modo, si $p \in \Omega$ es un estado puro, X en p verifica a Ω y a su P asociado. La estructura de la totalidad de las cualidades físicas, es decir, el conjunto de todos los eventos, es el conjunto M(Σ), el cual denota las partes medibles del espacio de fases. Las operaciones lógicas de M(Σ) en un sistema clásico son algebraicamente esquematizadas por un álgebra de Boole, esto es, un retículo distributivo complementado.

Def. 12. Un retículo de Boole es una estructura R≔ <M(Σ),1,0,⊆,−,∪,∩>, tal que

i. 0 representa al conjunto vacío y 1 a la totalidad del espacio Σ.

ii. ⊆ es la relación conjuntista de inclusión y −,∪,∩ son los operadores conjuntistas. Si se los caracteriza semánticamente como conectivas lógicas, entonces obtenemos las siguientes condiciones. El estado *p* verifica:

- La conjunción $\Omega_1 \cap \Omega_2$ sii $p \in \Omega_1 \cap \Omega_2$ sii *p* verifica los dos conjuntos.
- La disyunción $\Omega_1 \cup \Omega_2$ sii $p \in \Omega_1 \cup \Omega_2$ sii *p* verifica uno de los disyuntos como mínimo.
- La negación $-\Omega$ sii $p \notin \Omega$ sii *p* no verifica Ω.

En los sistemas clásicos la ley del tercio excluso se satisface, por lo que en términos semánticos tenemos que los estados deciden todo evento: $\forall p \forall \Omega$: $p \in \Omega$ o $p \in -\Omega$. Por el contrario, en los sistemas cuánticos los estados puros establecen valores probabilísticos para los eventos. En este caso, los estados puros Ψ_i son funciones de onda. Tal como **Chiara & Giuntini** (2008) observan, dado el estado Ψ y la proposición experimental P, semánticamente caben tres posibilidades:

i. $\Psi(P) = \top$

ii. $\Psi(P) = \bot$

iii. $\Psi(P) \neq \top$ y $\Psi(P) \neq \bot$

Podemos interpretar tales posibilidades como la proposición experimental cuántica P siendo verdadera, falsa o ni verdadera ni falsa en el estado Ψ para el sistema X. Tal como proponen **Birkhoff & von Neumann** (1936), el representante matemático apropiado para las proposiciones experimentales cuánticas es un subespacio lineal cerrado de un espacio de Hilbert. En el caso mecánico-cuántico, C(H) es el conjunto de subespacios lineales cerrados de H. A diferencia del conjunto de eventos medibles M(Σ) del caso clásico que constituye un álgebra de Boole, el conjunto C(H) de todos los eventos de H tiene el esquema de un retículo ortomodular ortocomplementado. Esto se debe a que:

i. El complemento ortogonal de un representante matemático de una proposición experimental es el representante matemático de la negación de dicha proposición experimental. El complemento ortogonal Ω' es el conjunto de cada vector que es ortogonal para cada elemento que pertenece a Ω. Tenemos que para todo evento Ω y todo estado puro Ψ: $\Psi(\Omega) = \top$ sii $\Psi(\Omega') = \bot$ y $\Psi(\Omega') = \top$ sii $\Psi(\Omega) = \bot$. El ortocomplemento invierte los valores probabilísticos que representan los valores veritativos.

ii. La disyunción se comprende como el supremo $\Omega_1 \sqcup \Omega_2$ de dos subespacios lineales cerrados, dado que la unión conjuntista de dos subespacios lineales cerrados no es, a su vez, un subespacio lineal cerrado. No obstante, la unión de tales subespacios está incluida en el subespacio más pequeño que contenga a Ω_1 y Ω_2, esto es, su supremo.

iii. La conjunción se comprende como la intersección conjuntista.

Def. 13. Un retículo ortomodular ortocomplementado es una estructura R≔ <C(H), 1,0,',⊆,⊔,∩>, tal que

i. ⊆ es la inclusión conjuntista.

ii. La conjunción es la intersección conjuntista ∩.

iii. La disyunción es el supremo reticular ⊔.

iv. La negación es el complemento ortogonal.

v. 0 representa al conjunto vacío y 1 a la totalidad del espacio H.

Destacan dos aspectos importantes. En primer lugar, debido al teorema de proyección, existe un isomorfismo entre el conjunto C(H) y el conjunto P(H) de todas las proyecciones de H. En segundo lugar, la disyunción cuántica no es semánticamente bivalente, de tal modo que es posible que $\Psi \in \Omega_1 \sqcup \Omega_2$ pero, a la vez, $\Psi \notin \Omega_1$ & $\Psi \notin \Omega_2$, es decir, la ley distributiva falla.

Rev. Acad. Colomb. Cienc. Ex. Fis. Nat. 46(179):311-324, abril-junio de 2022
doi: https://doi.org/10.18257/raccefyn.1625

Discusión

Retener la modularidad

El retículo de Hilbert es un ortorretículo no distributivo R≔ <C(H),≤,1,0,’>, por lo que *prima facie* era la alternativa de mayor plausibilidad para el establecimiento de las reglas del sistema proposicional de la mecánica cuántica. Sin embargo, como lo señalan **Dalla Chiara *et al.*** (2007), se rechazó de forma deliberada la referencia al retículo de Hilbert para hacer efectivo el propósito de retener la modularidad. Explican **Dalla Chiara *et al.*** (2007) que el objetivo de von Neumann consistía en “*to interpret the algebraic structure representing quantum logic as the algebra of* random events *in the sense of a non-commutative probability theory*”. Ahora bien, dicha motivación no era viable si las probabilidades se comprendían como frecuencias relativas, lo cual le condujo a estudiar la interpretación lógica con el siguiente carácter:

“*Hence we conclude that the* propositional calculus of quantum mechanics has the same structure as an abstract projective geometry.

Moreover, this conclusion has been obtained purely by analyzing internal properties of the calculus, in a way which involves Hilbert space only indirectly.”

Birkhoff & von Neumann (1936) introducen heurísticamente el presupuesto de las dimensiones finitas, en virtud de lo cual se restringe finitamente la cadena de elementos de un retículo. Así pues, “(…) *the projective geometry corresponding to the complex Hilbert space represents more intrinsically the physics of the quantum world as does the Hilbert space itself*.” **(Aerts,** 2009).

Birkhoff (1935) mostró que las geometrías proyectivas son definibles en términos de operaciones combinatorias elementales dado el presupuesto de la finitud. Más aún, probó que son expresables en un sistema abstracto de geometría proyectiva tanto la identidad modular como los retículos finitos complementados. El recurso a la geometría proyectiva abstracta permite considerar estructuras algebraicas que presentan propiedades más débiles que el álgebra de Boole, no obstante, **Rédei** (2009) indica que, dentro de esa posibilidad, lo que se plantea es un cálculo proposicional formulado a partir de un retículo ortocomplementado no distributivo modular y no identificado con el retículo ortomodular no modular de todos los subespacios lineales cerrados de un espacio de Hilbert complejo de infinitas dimensiones, el cual es el retículo de Hilbert.

La ley distributiva falla en las estructuras lógicas de la mecánica cuántica. Conceptualmente, el motivo de su incumplimiento estriba en que esta ley es “*a logical consequence of the compatibility of the observables*” (**Birkhoff & von Neumann**, 1936), compatibilidad que no se cumple en un sistema cuántico. Los autores ofrecen dos justificaciones del fallo de la ley distributiva en mecánica cuántica:

i. De un modo tácito sugieren que el principio de incertidumbre de Heisenberg se vería transgredido con la conjunción de dos observables incompatibles, de modo que si se elimina la distribución, se elude la posibilidad de tal transgresión.

ii. De modo explícito exponen un experimento mental: “*if* a *denotes the experimental observation of a wave-packet Ψ on one side of a plane in ordinary space,* a’ *correspondingly the observation of Ψ on the other side, and* b *the observation of Ψ in a state symmetric about the plane, then:* $b\sqcap(a\sqcup a') = b\sqcap 1 = b \neq 0 = (b\sqcap a) = (b\sqcap a') = (b\sqcap a)\sqcup(b\sqcap a')$” (**Birkhoff & von Neumann**, 1936) (adaptamos la notación original a la nuestra). De ello se sigue que $b\sqcap(a\sqcup a') \neq (b\sqcap a)\sqcup(b\sqcap a')$, cuya validez niega la propiedad distributiva.

Para seleccionar el retículo adecuado debemos considerar las diferencias entre las siguientes tres propiedades $\forall xyz \in$ D:

i. Distribución: $x\sqcup(y\sqcap z) = (x\sqcup y)\sqcap(x\sqcup z)$

ii. Modularidad: $x\leq y \Rightarrow x\sqcup(y\sqcap z) = (x\sqcup y)\sqcap(x\sqcup z)$

iii. Ortomodularidad: $x\leq y$ & $x'\leq z \Rightarrow x\sqcup(y\sqcap z) = (x\sqcup y)\sqcap(x\sqcup z)$

La alternativa que proponen como condición suficiente para expresar las relaciones entre los subespacios cerrados de H es la modularidad. Esta propiedad es una versión débil de la ley distributiva y una forma fuerte de la ortomodularidad. **Rédei** (2009) señala dos propiedades del álgebra de Boole que pretenden ser conceptualmente análogas en el cálculo proposicional cuántico: "*it represents the propositional algebra of a classical propositional calculus and it also represents the set of random events on which probability measures are defined*". Si mantenemos el retículo de Hilbert y, por lo tanto, no tenemos la modularidad, entonces la estructura algebraica no tiene capacidad para expresar una "*event structure for a relative frequency interpreted non-commutative probability theory*" (**Rédei**, 2009, p.19). La modularidad debe conservarse para que el cálculo proposicional pueda representar algebraicamente los eventos de una teoría de la probabilidad donde la propiedad de aditividad fuerte sea fundamental para la medida probabilística. **Birkhoff & von Neumann** (1936) mencionan que la modularidad "*is closely related to the existence of an 'a priori thermo-dynamic wieght of states'*" (la justificación se puede consultar en **Dalla Chiara *et al.,*** 2007, y en **Rédei,** 2009, dado que **Birkhoff & von Neumann,** 1936, no la desarrollan). Es la conservación de la modularidad el motivo por el cual rechazaron el retículo de Hilbert, puesto que esta estructura solo es modular si H "*is* finite *dimensional as a linear space*" (**Dalla Chiara *et al.*,** 2007) dada su definición en términos de geometría proyectiva. Sin embargo, para representar un sistema cuántico, H debe ser infinitamente dimensionado. Más aun, "*von Neumann viewed this fact as a pathological property of the Hilbert space formalism. (…) von Neumann expected the standard Hilbert space formalism to be superseded by a mathematical theory that he hope would be more suitable for quantum mechanics*" (**Dalla Chiara *et al.,*** 2007).

En síntesis, tal como **Birkhoff** (1948) lo declara, "*the logic of quantum mechanics is an orthocomplemented modular lattice*". Para definir la estructura de un retículo orto-complementado modular debemos mencionar que un retículo de Dedekind es aquel cuyos elementos satisfacen la identidad modular.

Def. 14. La estructura de un retículo ortocomplementado modular es la de un retículo de Dedekin que admite un automorfismo dual $x \rightarrow x'$, tal que $\forall xy \in$ D:

i. $(x \sqcap y)' = x' \sqcup y' \& (x \sqcup y)' = x' \sqcap y'$

ii. $(x')' = x$

iii. $x \sqcap x' = 0 \& x \sqcup x' = 1$

Def. 15. Un modelo M_{OM} del lenguaje L para una lógica ortocomplementada modular es la misma estructura <R,I> de M_{OL} (supra, def. 6), donde R es un retículo ortocomplementado modular.

Def. 16. En una lógica ortocomplementada modular (M_{OM}) las definiciones de verdad lógica y de modelo son análogas a las definiciones correspondientes de una ortológica (supra, def. 7) empleando M_{OM}.

Def. 17. Relación de consecuencia de una lógica ortocomplementada modular: la definición es análoga a la correspondiente definición de una ortológica (supra, def. 8) empleando M_{OM}.

Problemas

Al coordinar el R_{OM} con la tesis de la interpretación parcial para proponerlo como enfoque exitoso de interpretación de la mecánica cuántica, nos encontramos ciertos problemas en distintos niveles. Tomando como referencia las críticas planteadas por **Popper** (1968), determinamos dos aspectos problemáticos para la discusión. En primer lugar, formalmente los propios Birkhoff y von Neumann obtuvieron resultados en la teoría de retículos posteriores a su propuesta de 1936. **Popper** (1968) destaca que tres de ellos problematizan la sostenibilidad del R_{OM}: (i) si un retículo es modular y únicamente complementado, entonces es un álgebra de Boole; (ii) si un retículo es únicamente complementado, completo y atómico, entonces es un álgebra de Boole, y (iii) si un retículo es únicamente complementado y ortocomplementado, entonces es un álgebra de Boole.

Por consiguiente, estos resultados muestran que, técnicamente, la lógica cuántica de **Birkhoff & von Neumann** (1936) es un álgebra de Boole: "*The lattice proposed by Birkhoff and von Neumann and intended to be non-Boolean is, in fact, Boolean*" (**Popper,**

Rev. Acad. Colomb. Cienc. Ex. Fis. Nat. 46(179):311-324, abril-junio de 2022
doi: https://doi.org/10.18257/raccefyn.1625

1968). Una posible réplica es la reformulación del cálculo proposicional de Birkhoff y von Neumann como "*non-Boolean and orthocomplemented, with a unique operation of orthocomplementation, but not with unique complements*" (**Popper,** 1968). Sin embargo, la contrarréplica consiste en poner de manifiesto que el retículo propuesto por Birkhoff y von Neumann es únicamente complementado, puesto que es mensurable. Al coordinar una estructura reticular con una función de medición tenemos tres reglas: (i) $\forall xy \in$ D, x=y sii para toda medición μ admisible, μ(x)=μ(y), (ii) para toda μ admisible hay dos números reales tal que k_0=μ(0) & μ(1)=k_1 y (iii) para toda μ admisible, μ(x)+μ(y)=μ(1)+μ(x⊔y). Una medición μ es "admisible" si μ(x) es una función que asigna números reales a cada elemento de su dominio, está definida en un retículo mensurable y cumple las reglas expuestas. **Popper** (1968) aclara que en la propuesta de **Birkhoff & von Neumann** (1936) están vigentes las reglas de la medición antedichas y, por consiguiente, su lógica cuántica es un retículo mensurable.

En segundo lugar, conceptualmente, Birkhoff y von Neumann plantean una doble justificación de la inadmisibilidad de la identidad distributiva. Para dar razón del carácter no distributivo del cálculo proposicional propio de la mecánica cuántica, oblicuamente hacen referencia al principio de incertidumbre de Heisenberg y directamente a un experimento mental (supra p. 320). La dificultad a la que se enfrenta la primera justificación consiste en que **Birkhoff & von Neumann** (1936) no la desarrollan argumentalmente. Simplemente sugieren que "*it is interesting that [distributive law] is also a logical consequence of the compatibility of the observables (…)*". En cuanto a la segunda justificación, **Popper** (1968) critica que, aun siendo formalmente correcto, el argumento no contiene elementos que lo enlacen de manera específica con la mecánica cuántica: "*for wave-packets, elephants, or even classical mass-points, this is perfectly compatible with the property denoted earlier by* b*; that is to say with the property 'symmetric about the plane'. It is also compatible with many other properties*". **Jammer** (1974) continúa este contraargumento mostrando la forma en que se viene abajo la desigualdad que motiva el fallo de la ley distributiva: el complemento *a*' no es la observación de Ψ en el 'otro' lado del plano, sino su observación 'no en un lado' ("*not on the one side*") del plano, siendo *a* la observación de una Ψ en un lado de un plano en espacio ordinario. De modo que *b* (la observación de Ψ en un estado simétrico sobre el plano) se puede sustituir por *a*', de lo que obtenemos b=b⊓a'. Por consiguiente, la desigualdad desaparece (debe tenerse presente el experimento mental supra p. 320). El principal argumento que desarrollan **Birkhoff & von Neumann** (1936) en favor del fallo de la ley distributiva es precisamente el comentado experimento mental. **Popper** (1968) lo consideró como "*a simple slip —one of those slips which, once in a lifetime, may happen even to the greatest mathematicians*".

La problemática reside en dificultades técnicas para eludir el álgebra de Boole y retener la modularidad. Es posible modificar la propuesta de tal modo que se redefinan los operadores del cálculo de enunciados para elaborar una adecuada interpretación. Así pues, las dificultades pueden concebirse como ambigüedades expresivas concernientes a la disyunción y la conjunción de proposiciones incompatibles en lugar de errores técnicos. En este sentido, para el caso cuántico el ínfimo y el supremo de dos proposiciones experimentales serían también proposiciones experimentales sii el caso excepcional en que las medidas fueran compatibles. **Birkhoff & von Neumann** (1936) declararon que "*in classical mechanics, one can easily define the meet or join of any two experimental propositions as an experimental proposition (…). This is true in quantum mechanics only exceptionally—only when all the measurements involved commute (are compatible)*". Para resolver la excepcionalidad es preciso modificar las reglas de las conectivas del cálculo no booleano que se proponga. Por consiguiente, las dificultades inciden en el modelo ortocomplementado modular pero no necesariamente en el enfoque general.

Conclusiones

En conclusión, obtenemos dos resultados: a) el enfoque reticular funciona como una interpretación de la mecánica cuántica, y b) el modelo ortocomplementado modular tiene problemas técnicos y conceptuales para retener determinadas propiedades de un sistema cuántico. De la conjunción de a) y b) obtenemos que el R_{OM} es una interpretación, pero presenta dificultades para ser exitosa.

La validez del resultado depende de la coordinación de resultados parciales anteriores. En primer lugar, el enfoque reticular puede funcionar como una interpretación: las condiciones del cálculo proposicional operan como las reglas de correspondencia de la tesis metateórica de la interpretación parcial entre el formalismo de los subconjuntos de H y los fenómenos observables expresados mediante las proposiciones experimentales. A partir de tales reglas podemos construir modelos para definir una lógica cuántica. No se trata de que las estructuras modelo-teóricas sean las interpretaciones metateóricas, sino de que, a partir de las reglas de la interpretación parcial, se pueden estipular las condiciones semánticas de una lógica cuántica. En este sentido, la lógica cuántica es adecuada para expresar el razonamiento presupuesto en los fundamentos matemáticos de la mecánica cuántica (**von Neumann**, 1932) y mediante la concreción de la interpretación de F por R para el caso cuántico. En segundo lugar, el modelo ortocomplementado modular que **Birkhoff & von Neumann** (1936) propusieron tiene dificultades técnicas para no ser un álgebra de Boole, lo que provoca problemas para retener la modularidad.

Ante la consideración del R_{OM} como una interpretación con dificultades para ser exitosa realizamos dos observaciones. **Rédei** (2009) explica que von Neumann no llegó a valorar satisfactoriamente sus resultados relativos a la lógica cuántica. Asimismo, la lógica ortocomplementada modular no representa un formalismo particularmente disruptivo ante el panorama actual de las lógicas no clásicas. La novedad de la lógica de **Birkhoff & von Neumann** (1936) presenta una ligera diferencia con respecto al álgebra de Boole con la propuesta de una versión débil de la identidad distributiva. Sin embargo, es indudable que "*One of the aspects of quantum theory which has attracted the most general attention, is the novelty of the logical notions which it presupposes*" (**Birkhoff & von Neumann**, 1936), lo cual mantiene abierta la investigación y ha motivado soluciones a las problemáticas discutidas dentro y fuera del enfoque reticular.

Conflicto de intereses

El autor declara que no existe conflicto de intereses en la publicación del artículo.

Referencias

Aerts, D. (2009). Quantum Axiomatics. En Engesser, K., Gabbay, D.M. y Lehmann, D. (eds.) *Handbook of Quantum Logic and Quantum Structures*. Amsterdam: North-Holland, pp. 79-126.

Birkhoff, G. (1935). Combinatorial Relations in Projective Geometries. *Annals of Mathematics*, *36*(3), 743-748.

Birkhoff, G. (1948). *Lattice Theory*. Nueva York: American Mathematical Society, pp. 1-283.

Birkhoff, G. & von Neumann, J. (1936). The Logic of Quantum Mechanics. *Annals of Mathematics*, *37*(4), 823-842.

Dalla Chiara, M.L. & Giuntini, R. (2008). *Quantum Logics*. [arXiv.org > quant-ph > arXiv: quantph/0101028v2]

Dalla Chiara, M.L., Giuntini, R., Rédei, M. (2007). The History of Quantum Logic. En Gabbay, D.M. y Woods, J. (eds.) *Handbook of the History of Logic*: Volume 8: the Many Valued and Nonmonotonic Turn in Logic. Amsterdam: North-Holland, pp. 205-283.

Février, P. (1937). Les relations d'incertitude de Heisenberg et la logique. Travaux du IXe Congrès International de Philosophie, 6, 88-94.

Grätzer, G. (2011). *Lattice Theory Foundation*. Birkhäuser. Basilea: Birkhäuser, pp. 1-613.

Jammer, M. (1974). *The Philosophy of Quantum Mechanics: The Interpretations of Quantum Mechanics in historical perspective*. Nueva York: Wiley, pp. 1-536.

Jauch, J.M. (1968). *Foundations of Quantum Mechanics*. Addison-Wesley Publishing Company. Massachusetts: Addison-Wesley Publishing Company, pp. 1-299.

Jordan, P. (1932). *Ueber eine Klasse nichtassoziativer hyperkomplexer Algebren*. Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, pp. 569-575

Rev. Acad. Colomb. Cienc. Ex. Fis. Nat. 46(179):311-324, abril-junio de 2022
doi: https://doi.org/10.18257/raccefyn.1625

Mackey, G.W. (1963). *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics*. Nueva York: Benjamin, pp. 1-148.

Piron, C. (1964). Axiomatique Quantique. *Helvetica Physica Acta*, *37*, 439-468.

Popper, K. (1968). Birkhoff and von Neumann`s Interpretation of Quantum Mechanics. *Nature, 219,* 682-685.

Rédei, M. (2009). The Birkhoff–von Neumann Concept of Quantum Logic. En Engesser, K., Gabbay, D.M. y Lehmann, D. (eds.). *Handbook of Quantum Logic and Quantum Structures*. Amsterdam: North-Holland, pp. 1-22.

Reichenbach, H. (1944). *Philosophic Foundations of Quantum Mechanics*. California: University of California Press, pp. 1-189.

Segal, I.E. (1947). Postulates for General Quantum Mechanics. *Annals of Mathematics, 48*(4), 930-948.

van Fraassen, B. (1974). *The Labyrinth of Quantum Logics*. En Cohen, R.S. y Wartofsky, M.W. (eds.) Boston Studies in the Philosophy of Science Vol. XIII. Logical and Epistemological Studies in Contemporary Physics. Dordrecht: Reidel Publishing Company, pp. 224-254.

von Neumann, J. (1932). *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik*. Berlín: Springer-Verlag, pp. 1-262.