Rev. Acad. Colomb. Cienc. Ex. Fis. Nat. 45(177):1011-1021, octubre-diciembre de 2021
doi: https://doi.org/10.18257/raccefyn.1456

Ciencias Físicas

Artículo original

Convergencia estadística en medida para sucesiones triples de funciones con valores difusos

Statistical convergence in measure for triple sequences of fuzzy-valued functions

Carlos Granados

Estudiante de Doctorado en Matemáticas, Universidad de Antioquia, Medellín, Colombia.

Resumen

En este artículo, definimos y extendemos las nociones de dos tipos de convergencia en medida, estos son interna y externa estadística convergencia para sucesiones triples de funciones medibles con valores difusos. Además, mostramos que ambas sucesiones son equivalentes en un espacio de medida finita. Adicionalmente, definimos y estudiamos la noción de estadística convergencia en medida para sucesiones triples de funciones medibles con valores difusos. En adición, mostramos y probamos la versión estadística del teorema de Egorov para sucesiones triples de funciones con valores difusos sobre un espacio de medida finita.

Palabras clave: Sucesiones triples; espacio de medida; teorema de Egorov; interna y externa estadística convergence; funciones con valores difusos.

Abstract

In this paper, we define and extend the notions of two kinds of convergence in measure, these are inner and outer statistical convergence for triple sequences of fuzzy-valued measurable functions. Besides, we show that both kinds of convergence are equivalent in a finite measurable space. Additionally, we define and study the notion of statistical convergence in measure for triple sequences of fuzzy-valued measurable functions. In addition, we show and prove the statistical version of Egorov's theorem for triple sequences of fuzzy-valued functions on a finite measure space.

Keywords: Triple sequence; Measure space; Egorov's theorem; Outer and inner statistical convergence; Fuzzy-valued function.

Citación: Granados C. Convergencia estadística en medida para sucesiones triples de funciones con valores difusos. Rev. Acad. Colomb. Cienc. Ex. Fis. Nat. 45(177):1011-1021, octubre-diciembre de 2021. doi: https://doi.org/10.18257/raccefyn.1456

Editor: Francisco José Marcellán Español

Correspondencia:
Carlos Granados;
carlosgranadosortiz@outlook.es

Recibido: 18 de abril de 2021
Aceptado: 26 de agosto de 2021
Publicado: 15 de diciembre de 2021

Introduction

La convergencia estadística, si bien se introdujo hace casi cincuenta años como una generalización de la convergencia habitual, la cual fue inicialmente introducida bajo el nombre de casi-convergencia en la publicación principal de la conocida monografía de (**Zygmund**, 1935) . Sin embargo, en un caso general, ni los límites ni los límites estadísticos pueden calcularse o medirse con absoluta precisión. Para reflejar esta imprecisión y modelarla mediante estructuras matemáticas, se han desarrollado varios enfoques en matemáticos tales

Rev. Acad. Colomb. Cienc. Ex. Fis. Nat. 45(177):1011-1021, octubre-diciembre de 2021
doi: https://doi.org/10.18257/raccefyn.1456

como la teoría de conjuntos difusos y la lógica difusa. Adicionalmente, esta convergencia fue estudiada por (**Fast**, 1951), después (**Salát**, 1980) y (**Schoenberg**, 1959) establecieron algunas de sus propiedades. En adición, en 1985 una nueva noción relacionada con este concepto fue presentada por (**Fridy**, 1985), esta noción es conocida como sucesión estadística de Cauchy; además, mostró que ambos conceptos son equivalentes. En la última decada, la convergencia estadística se ha convertido en un área de investigación activa en donde diferentes matemáticos han estudiado las propiedades de la convergencia estadística y han aplicado este concepto en diversas áreas como en la teoría de la medida, series trigonométricas, teoría de la aproximación, espacios localmente convexos, espacios de Banach y entre otros. (**Ilkhan & Kara**, 2018) introdujeron otras variantes de sucesiones estadística de Cauchy en la que presentaron su relación con la completitud de Bourbaki. Los autores (**Sahiner, Gurdal, & Duden**, 2007) definieron y estudiaron las nociones mencionadas anteriormente en triple sucesiones, mientras que la convergencia común para sucesiones triples viene dada por (**Pringsheim**, 1900). (**Balcerzak, Dems, & Komisarski**, 2007) examinaron diferentes tipos de convergencia estadística y convergencia sobre espacios de ideales para sucesiones únicas de funciones con valores en un espacio métrico o en el conjunto $\mathbb{R}$ (el conjunto de números reales), es decir, puntuales, uniformes y equi-estadísticos (o, ideal) convergencia. (**Esi & Necdet**, 2014) discutieron sobre algunos conceptos de convergencia estadística puntual y uniforme de triple sucesiones de funciones en $\mathbb{R}$. Recientemente, utilizando la noción de triple sucesiones y convergencia estadística, (**Granados**, 2021) definió la noción de sucesiones localizadas y sucesiones localizadas de Cauchy teniendo en cuenta la noción de ideal (**Kostyrko, Salat, & Wilczynski**, 2000/2001). Además, (**Das, Tripathy, Debnath, & Bhattacharya**, 2021) definieron la noción de secuencia triple incierta compleja, en la cual estudian la convergencia estadística de sucesiones complejas sobre espacios de medidas finitas.

El término "conjuntos difusos" fue planteado por el matemático (**Zadeh**, 1965). Utilizó los conceptos de intersección, inclusión, relación, unión, complemento, convexidad, y así sucesivamente, para establecer la noción de conjuntos difusos. La noción de un conjunto difuso proporciona una conveniente punto de partida para la construcción de un marco conceptual paralelo en muchos aspectos al marco utilizado en el caso de conjuntos ordinarios, pero es más general que el último y, potencialmente, puede llegar a tener un alcance mucho más amplio de aplicabilidad, particularmente en los campos de clasificación e información de patrones. Esencialmente, dicho marco proporciona una forma natural de abordar problemas en los que la fuente de imprecisión es la ausencia de criterios de pertenencia a una clase en lugar de la presencia de variables aleatorias. A partir de lo mencionado anteriormente, los conjuntos difusos y la lógica difusa conectaron de manera efectiva a los científicos de las diferentes áreas del saber, por ejemplo, la ingeniería de control y la teoría de la decisión, y además los investigadores en inteligencia artificial. La utilidad y la importancia de los límites de sucesiones de conjuntos difusos, los límites (continuidad) y las derivadas de funciones de valores difusos se han aplicado en muchas áreas, por ejemplo, análisis variacional, optimización por conjuntos difusos, teoría de la estabilidad, análisis de sensibilidad, entre otros. Durante los últimos 50 años, numerosas sucesiones de números difusos y sus propiedades de convergencia han sido estudiadas y han sido bien acogidas por la comunidad científica. (**Nuray & Savas**, 1995) discutieron sobre la convergencia estadística en la configuración de sucesiones (simples) de números difusos, y recientemente, esta noción a través de operadores de diferencia junto con la media ponderada ha sido definida y estudiada por (**Mohiuddine, Asiri, & Hazarika**, 2019). El autor (**Savas**, 1996) presentó la idea del límite de Pringsheim de sucesiones de números difusos, y luego, en 2004, (**Savas & Mursaleen**, 2004) presentaron la generalización del límite de Pringsheim en sentido estadístico. La convergencia estadística ha sido estudiada en diferentes areas del saber matemático, espacios normativos difusos intuicionistas (**Mursaleen & Mohiuddine**, 2009), espacios Riesz localmente sólidos (**Mohiuddine, Alotaibi, & Mursaleen**, 2012) y entre otros. Para estudios realizados sobre números difusos, los teoremas de Tauberian con vistas a Cesáro y la sumabilidad estadísstica de Cesáro fueron obtenidos por (**Canak, Totur, & Önder**, 2017), (**Önder, Çanak, & Totur**, 2017) y para la convergencia estadística de (**Talo & Bayazit**, 2017). (**Gong, Zhang, & Zhu**, 2015) discutieron sobre la convergencia estadística y otras nociones asociadas para sucesiones únicas de funciones con valores difusos y también obtuvieron algunas sus propiedades básicas. Recientemente, (**Hazarika, Alotaibi, & Mohiuddine**, 2020) estudiaron la convergencia estadística en medida sobre doble sucesiones para funciones con valores difusos y obtuvieron algunas propiedades importantes las cuales serán de gran utilidad para el desarrollo de este artículo.

Nociones preliminares

En esta sección mostramos algunas nociones que son de gran utilidad para el desarrollo de este artículo.

Para cualquier conjunto A diferente de vacío, (**Zadeh**, 1965) definió la noción de un conjunto difuso como: Un subconjunto no vacío de A se dice que es un conjunto difuso si $\{(\alpha_1, \bar{y}(\alpha_1)) : \alpha_1 \in A\}$ de $A \times B = [0,1]$ para alguna función $\bar{y} : A \to B = [0,1]$. Una función $\bar{y} : \mathbb{R} \to B = [0,1]$ se dice que es un número difuso si satisface las siguientes propiedades:

1. $\bar{y}$ es convexa, es decir, $\bar{y}(\alpha_1) \geq \bar{y}(\alpha_2) \wedge \bar{y}(\alpha_3) = \min\{\bar{y}(\alpha_2), \bar{y}(\alpha_3)\}$, donde $\alpha_2 < \alpha_1 < \alpha_3$.
2. $\bar{y}$ es normal, es decir, existe un $\alpha_0 \in \mathbb{R}$ tal que $\bar{y}(\alpha_0) = 1$.
3. $\bar{y}$ es semi-continua por arriba, es decir, para cada $\varepsilon > 0$, $\bar{y}^{-1}([0, b+\varepsilon))$ es abierto en la topología usual de $\mathbb{R}$ para todo $b \in [0,1]$.
4. $[\bar{y}]^0 = cl(\{\alpha_1 \in \mathbb{R} : \bar{y}(\alpha_1) > 0\})$ es compacto, (cl denota el operador clausura).

A través de este artículo, denotaremos el conjunto de todos los números difusos por $F(\mathbb{R})$. El conjunto $\mathbb{R}$ puede estar en $F(\mathbb{R})$ si $\bar{r} \in F(\mathbb{R})$ está dado por $\bar{r}(\alpha_1) = 1$ si $\alpha_1 = r$ y $\bar{r}(\alpha_1) = 0$ si $\alpha_1 \neq r$.

Para $0 < \alpha \leq 1$, α-cortado de $\bar{y}$ es un intervalo cerrado y acotado de $\mathbb{R}$ que esta dado por $[\bar{y}]_\alpha = \{\alpha_1 \in \mathbb{R} : \bar{y}(\alpha_1) \geq \alpha\} = [\bar{y}_\alpha^-, \bar{y}_\alpha^+]$. Ahora, supongamos que $\bar{y}_1$ y $\bar{y}_2$ son dos números difusos, entonces la Hausdorff distancia entre $\bar{y}_1$ y $\bar{y}_2$ (ver (**Negoita & Ralescu**, 1975)) esta definida como:

$$D(\bar{y}_1, \bar{y}_2) = \sup_{\alpha \in [0,1]} d([\bar{y}_1]_\alpha, [\bar{y}]_\alpha) = \sup_{\alpha \in [0,1]} \max\{|\bar{y}_{1_\alpha}^- - \bar{y}_{2_\alpha}^-|, |\bar{y}_{1_\alpha}^+ - \bar{y}_{2_\alpha}^+|\}$$

donde $D : F(\mathbb{R}) \times F(\mathbb{R}) \to [0, +\infty)$ y d es la métrica de Hausdorff. Además, es bien sabido que para cualquier $\bar{y}_1, \bar{y}_2, \bar{y}_3, \bar{y}_4 \in F(\mathbb{R})$:

1. $(F(\mathbb{R}), D)$ es un espacio métrico completo.
2. $D(\omega\bar{y}_1, \omega\bar{y}_2) = |\omega| D(\bar{y}_1, \bar{y}_2); \omega \in \mathbb{R}$.
3. $D(\bar{y}_1 + \bar{y}_4, \bar{y}_2 + \bar{y}_4) = D(\bar{y}_1, \bar{y}_2)$.
4. $D(\bar{y}_1 + \bar{y}_3, \bar{y}_2 + \bar{y}_4) \leq D(\bar{y}_1, \bar{y}_2) + D(\bar{y}_1, \bar{y}_4)$.

Lema 0.1 *(**Negoita & Ralescu**, 1975). Sea $\bar{y} \in F(\mathbb{R})$ y $[\bar{y}]_\alpha = [\bar{y}_\alpha^-, \bar{y}_\alpha^+]$. Entonces los siguientes enunciados se satisfacen:*

1. $\bar{y}_1^- \leq \bar{y}_1^+$.
2. *$\bar{y}_\alpha^-$ y $\bar{y}_\alpha^+$ son continuas por la derecha en $\alpha = 0$.*
3. *$\bar{y}_\alpha^-$ y $\bar{y}_\alpha^+$ son funciones continuas por la izquierda monotonas crecientes y continuas por la derecha monotonas decrecientes, respectivalemte, en $(0,1]$.*

Una sucesión triple $x = (x_{uvq})$ tiene un Pringsheim límite L (abreviado, P-$\lim x = L$, o, L es el P-límite de x) (**Pringsheim**, 1900) si para cada $\varepsilon > 0$ existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que $|x_{uvq} - L| < \varepsilon$ para cualquier $u, v, q > N$. Para $A \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ y $k, l, p \in \mathbb{N}$, $\delta_{klp}(A)$ es llamado el $klpth$ triple parcial densidad de A si,

$$\delta_{klp}(A) = \frac{|A \cap \{(1,1,1),(2,2,2),...,(k,l,p)\}|}{klp},$$

donde $|.|$ representa la cardinalidad del conjunto enmarcado. Recordemos que, δ_{klp} es un operador de medida de probabilidad sobre $P_1 = P(\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N})$ con la ayuda de $\{(1,1,1),(2,2,2),...,(k,l,p)\}$. Si

$$\delta_3(A) = \lim_{n,m,j \to \infty} \frac{1}{nmj} |\{u \leq n, v \leq m, q \leq j : (u,v,q) \in A\}|$$

en el sentido de Pringsheim, es decir,

$$\delta_3(A) = P\text{-} \lim_{k,l,p \to +\infty} \delta_{klp}(A)$$

existe, es llamada la triple natural densidad de A. Analogamente, esta noción puede ser definida de la siguiente manera: Sea $K \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ y $K(m,n,p) = \{(m,n,p) : k \leq m, j \leq n, i \leq p\}$. Entonces, la triple natural densidad de K está dada por

$$\delta(k) = P - \lim_{m,n,p \to \infty} \frac{1}{mnp} \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{p} \chi_{K(m,n,p)}(k,j,i)$$

si el límite existe. Además, $\Lambda = \{A \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \delta_3(A) = 0\}$ se dice que es conjunto de triple densidad cero. La sucesión triple $x = (x_{uvq})$ es estadísticamente convergente (ver (**Sahiner et al.**, 2007)) a L si dado $\varepsilon > 0$, el conjunto $\{(u,v,q), u \leq n, v \leq m, q \leq j : |x_{uvq} - L| \geq \varepsilon\}$ tiene triple densidad cero.

Ahora, vamos a recordar algunos conceptos definidos por (**Kumar, Kumar, & Bhatia**, 2012).

Una sucesión triple de conjuntos difusos $(\bar{y}_{uvq})$ es estadísticamente convergente al número difuso $\bar{y}_0$; esto lo denotaremos como S_3-$\lim \bar{y}_{uvq} = \bar{y}_0$, si para cualquier $\varepsilon > 0$, la triple natural densidad cero del el conjunto $B = \{(u,v,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} : D(\bar{y}_{uvq}, \bar{y}_0) \geq \varepsilon\}$ es cero, esto significa que $\delta_3(B) = 0$, en otras palabas,

$$\{(u,v,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} : D(\bar{y}_{uvq}, \bar{y}_0) \geq \varepsilon\} \in \Lambda. \tag{1}$$

De 1, podemos observar que S_3-$\lim \bar{y}_{uvq} = \bar{y}_0$ si y solo si para cada $\varepsilon > 0$, existe $T \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ que saisface $\delta_3(T) = 0$ tal que $D(\bar{y}_{uvq}, \bar{y}_0) < \varepsilon$, para todo $(u,v,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} - T$.

Resultados

Esta sección está dividida en dos partes, la primera, se discutirá sobre el Teorema de Egorov par sucesiones triples de funciones con valores difusos, y la segunda, se mostrarán los resultados obtenidos sobre convergencia estadística en medida de sucesiones triples de funciones con valores difusos.

La generalización del teorema de Egorov, un famosos y clásico resultado de la teoría de la medida, se ha presentado por varios autores en diferentes maneras. En esta sección, probamos el teorema de Egorov para sucesiones triples de funciones con valores difusos en un espacio de medida finita. Durante el desarrollo de esta sección, asumiremos que $\bar{g} : [a,b] \to F(\mathbb{R})$ y $\bar{g}_{klp} : [a,b] \to F(\mathbb{R})$ son la función de valor difuso y una sucesión triple de funciones con valores difusos para todo $k, l, p \in \mathbb{N}$, respectivamente.

Definición 0.1 *Sea $(\bar{g}_{klp})$ una sucesión triple de funciones con valores difusos. Se dice que $(\bar{g}_{klp})$ converge puntual estadísticamente a una función con valor difuso $\bar{g}$ en $[a,b]$ (en el sentido de Pringsheim), denotado por pS_3-$\lim \bar{g}_{klp}(y) = \bar{g}(y)$ o $\bar{g}_{uvq} \xrightarrow{pS_3} \bar{g}$, si para todo $y \in [a,b]$ y para todo $\varepsilon > 0$, existe $T_y \in \Lambda$ tal que para todo $(u,v,q) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N} - T_y$, tenemos que $D(\bar{g}_{uvq}(y), \bar{g}(y)) < \varepsilon$. $\bar{g}$ se llama el límite estadístico de Pringsheim (o triple) función de $(\bar{g}_{klp})$.*

Definición 0.2 *Sea $(\bar{g}_{klp})$ una sucesión triple de funciones con valores difusos. Se dice que $(\bar{g}_{klp})$ converge uniformemente en estadística a una función con valor difuso $\bar{g}$ en $[a,b]$ (en el sentido de Pringsheim), denotado por uS_3-$\lim \bar{g}_{uvq}(y) = \bar{g}(y)$ en $[a,b]$ o $\bar{g}_{uvq} \xrightarrow{uS_3} \bar{g}$, si para todo $\varepsilon > 0$, existe $T \in \Lambda$ tal que para todo $(u,v,q) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N} - T$, tenemos que $D(\bar{g}_{uvq}(y), \bar{g}(y)) < \varepsilon$ para todo $y \in [a,b]$. Podemos observar que si $\bar{g}_{uvq} \xrightarrow{uS_3} \bar{g}$ para todo $\varepsilon > 0$, $\delta_3(\{(u,v,q) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N} : D(\bar{g}_{uvq}(y), \bar{y})) \geq \varepsilon\}) = 0$, para todo $y \in [a,b]$.*

Definición 0.3 *Sea $(\bar{g}_{klp})$ una sucesión triple de funciones con valores difusos. Se dice que $(\bar{g}_{klp})$ converge equi-estadísticamente a una función con valor difuso $\bar{g}$ en $[a,b]$ (en el sentido de Pringsheim), denotado por $\bar{g}_{uvq} \xrightarrow{eS_3} \bar{g}$, si dado un $\varepsilon > 0$, $G_{klp,\varepsilon} = \delta_{klp}(\{(u,v,q) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N} : D(\bar{g}_{uvq}(y), \bar{g}(y)) \geq \varepsilon\})$ con respecto a $y \in [a,b]$ es uniformemente convergente a la función cero. Así, $\bar{g}_{uvq} \xrightarrow{eS_3} \bar{g}$ si y solo si para todo $\varepsilon, \beta > 0$, existe $m,n,j \in \mathbb{N}$, para todo $k \geq n, l \geq m, p \geq j$, para todo $y \in [a,b]$, $\delta_{klp}(\{(u,v,q) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N} : D(\bar{g}_{uvq}(y), \bar{g}(y)) \geq \varepsilon\}) < \beta$. Podemos observar que por la monotonocidad de δ_{klp}, se puede tomar $\beta = \varepsilon$.*

Observación 0.1 *Podemos observar que $\bar{g}_{uvq} \xrightarrow{pS_3} \bar{g}$ si y solo si para todo $y \in Y$ y para todo $\varepsilon, \beta > 0$, existe $m,n,j \in \mathbb{N}$, para todo $k \geq n, l \geq m$ y $p \geq j$, , $\delta_{klp}(\{(u,v,q) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N} : D(\bar{g}_{uvq}(y), \bar{g}(y)) \geq \varepsilon\}) < \beta$. En este caso, tomamos $\beta = \varepsilon$, y tenemos que $\bar{g}_{uvq} \xrightarrow{eS_3} \bar{g}$ implica $\bar{g}_{uvq} \xrightarrow{pS_3} \bar{g}$. Adicionalmente, $\bar{g}_{uvq} \xrightarrow{uS_3} \bar{g}$ implica $\bar{g}_{uvq} \xrightarrow{eS_3} \bar{g}$.*

El siguiente teorema, es una versión estadística del teorema de Erogov para sucesiones triples de funciones con valores difusos.

Teorema 0.1 *Sea $(\Omega, \mathscr{M}, \mu)$ un espacio de medida finita, y consideremos que $\bar{g}$ y $(\bar{g}_{uvq})$ son medibles y definidas en casi todas partes en Ω. Además, consideremos que $\bar{g}_{uvq} \xrightarrow{pS_3} \bar{g}$ en casi todas partes en Ω. Entonces, para todo $\varepsilon > 0$ existe un $A \subseteq \mathscr{M}$ tal que $\mu(\Omega - A) < \varepsilon$ y $\bar{g}_{uvq|A} \xrightarrow{eS_3} \bar{g}_{|A}$ en A.*

Demostración: Supongamos que las funciones con valores difusos $\bar{g}$ y $(\bar{g}_{uvq})$ están definidas en todas partes en Ω y consideremos que $\bar{g}_{uvq}(y) \xrightarrow{pS_3} \bar{g}(y)$ para todo $y \in \Omega$. Ahora, para cualquier $t,k,l,p \in \mathbb{N}$, observemos que el conjunto

$$W = \{y \in \Omega : \delta_{klp}\ (\{(u,v,q) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N} : D(\bar{g}_{uvq}(y), \bar{g}(y)) \geq \frac{1}{t}\}) < \frac{1}{t}\}$$

es medible. Entonces, la función $\sigma_{uvq}(y) = D(\bar{g}_{uvq}(y), \bar{g}(y)), y \in \Omega$ es medible. Ahora, sea $E_{uvq} = \sigma_{uvq}^{-1}([\frac{1}{t}, \infty))$. Para todo $y \in \Omega$, tenemos que $y \in W$ si y solo si $\frac{1}{klp}\sum_{u=1}^{k}\sum_{v=1}^{l}\sum_{q=1}^{p}\chi_{E_{uvq}(y)} < \frac{1}{t}$. Dado que $g = \frac{1}{klp}\sum_{u=1}^{k}\sum_{v=1}^{l}\sum_{q=1}^{p}\chi_{E_{uvq}(y)}$ es medible, tenemos que $W = g^{-1}((-\infty, \frac{1}{t}))$. Para $m,n,j \in \mathbb{N}$, denotemos $\Upsilon_{t,nmj} = \{y \in \Omega : \forall k \geq n, l \geq m, p \geq j, \delta_{klp}\ (\{(u,v,q) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N} : D(\bar{g}_{uvq}(y), \bar{g}(y)) \geq \frac{1}{t}\}) < \frac{1}{t}\}$. Así, teniendo en cuenta lo mencionado previamente, podemos decir que $\Upsilon_{t,nmj}$ es medible. Además, tenemos que $\Upsilon_{t,nmj} \subset \Upsilon_{t,n+1,m+1,j+1}$, para todo

Rev. Acad. Colomb. Cienc. Ex. Fis. Nat. 45(177):1011-1021, octubre-diciembre de 2021
doi: https://doi.org/10.18257/raccefyn.1456

$n,m,j \in \mathbb{N}$ y $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcup_{j=1}^{\infty}\Upsilon_{t,nmj}$.

En consecuencia, $\mu(\Omega) = \lim_{uvq\to\infty}\mu(\Upsilon_{t,nmj})$. Para todo $m,n,j \in \mathbb{N}$ y para todo $\varepsilon > 0$, definamos $n(t),m(t),j(t) \in \mathbb{N}$ tal que $\mu(\Omega - \Upsilon_{t,n(t)m(t)j(t)}) < \frac{\varepsilon}{2^t}$. Fijemos $A_0 = \bigcup_{t=1}^{\infty}(\Omega - \Upsilon_{t,n(t)m(t)j(t)})$. Entonces, tenemos que $\mu(A_0) \leq \sum_{t=1}^{\infty}\mu(\Omega - \Upsilon_{t,n(t)m(t)j(t)}) < \varepsilon$. Ahora, sea $A = \Omega - A_0 = \bigcap_{t=1}^{\infty}\Upsilon_{t,n(t)m(t)j(t)}$. Así, $\mu(\Omega - A) = \mu(A_0) < \varepsilon$. Por lo tanto, tenemos que para todo $t \in \mathbb{N}$, para todo $k \geq n(t), l \geq m(t), p \geq j(t)$ y para todo $y \in A$, δ_{klp} $(\{(u,v,q) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N} : D(\bar{g}_{uvq}(y),\bar{g}(y)) \geq \frac{1}{t}\}) < \frac{1}{t}$. Esto prueba que $\bar{g}_{uvq|A} \xrightarrow{eS_3} \bar{g}_{|A}$ en A.

Corolario 0.1 *Sea $(\Omega,\mathscr{M},\mu)$ un espacio de medida finita, y consideremos que $\bar{g}$ y $(\bar{g}_{uvq})$ son medibles y definidas en casi todas partes en Ω. Entonces, $\bar{g}_{uvq} \xrightarrow{pS_3} \bar{g}$ en casi todas partes en Ω si y solo si existe una sucesión (A_n) de conjuntos de $\mathscr{M}$ tal que $\bar{g}_{uvq|A_n} \xrightarrow{eS_3} \bar{g}_{|A_n}$ en A_n para todo n y $\mu(\Omega - \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = 0$.*

Demostración: Supongamos que $\bar{g}$ y $(\bar{g}_{uvq})$ son medibles y definidas en casi todas partes en Ω. Además, consideremos que $\bar{g}_{uvq} \xrightarrow{pS_3} \bar{g}$ en casi todas partes en Ω. Entonces, la prueba se sigue si consideramos $\varepsilon = \frac{1}{n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ en el Teorema 0.1 .

Ahora, supongamos que $\bar{g}_{uvq|A_n} \xrightarrow{eS_3} \bar{g}_{|A_n}$ en A_n para todo n. Entonces, tenemos que $\bar{g}_{uvq|A_n} \xrightarrow{pS_3} \bar{g}_{|A_n}$ en A_n para todo n. Por lo tanto, concluimos que $\bar{g}_{uvq} \xrightarrow{pS_3} \bar{g}$ en casi todas partes en Ω.

Teniendo en cuenta el Teorema 0.1 y el Corolario 0.1, se mostró que la clásica versión estadística del teorema de Ergovod se puede extender a sucesiones triples de funciones con valores difusos en un espacio de medida finita $(\Omega,\mathscr{M},\mu)$. Estos resultados también fueron estudiados para sucesiones dobles por (**Hazarika et al.**, 2020).

A continuación, procedemos a definir, estudiar y extender las nociones de convergencia estadística externa e interna en la medida para sucesiones triples de funciones con valores difusos. Además, se demuestra que estas dos nociones son equivalentes. Para conocer más detalles sobre la mensurabilidad de integrales de funciones con valores difusos, ver ((**Kim & Ghil**, 1997) y (**Zhang**, 2001)).

Definición 0.4 *Sea $(\Omega,\mathscr{M},\mu)$ un espacio de medida. Supongamos que $\mathscr{L}^0$ es el conjunto de todas las las funciones medibles con valor difuso definidas en casi todas partes en Ω. Consideremos que $(\bar{g}_{uvq}),\bar{g} \in \mathscr{L}^0$. La externa convergencia estadística en medida de una triple sucesión de funciones medibles con valores difusos $(\bar{g}_{uvq})$ a una función medible con valor de difuso $\bar{g}$, se define como*

$$\delta_{klp}(\{(u,v,q)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N} : \mu(\{\{y\in\Omega : D(\bar{g}_{uvq}(y),\bar{g}(y)) \geq t\} \geq \tau\}) \geq \eta\}) \to 0 \, si \, k,l,p \to \infty \quad (2)$$

para cualquier $q,\tau,\eta > 0$. Esto lo denotaremos como $\bar{g}_{uvq} \xrightarrow{\delta_3,\mu} \bar{g}$. Si le cambiamos el orden a 2 , obtenemos la interna convergencia estadística en medida de una triple sucesión de funciones medibles con valores difusos $(\bar{g}_{uvq})$ a una función medible con valor de difuso $\bar{g}$, la cual se define como

$$\mu(\{\{y\in\Omega:\delta_{klp}(\{(u,v,q)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N}:D(\bar{g}_{uvq}(y),\bar{g}(y))\geq t\}\geq\tau\})\geq\eta\})\to 0 \text{ si } k,l,p\to\infty$$

Esto lo denotaremos como $\bar{g}_{uvq}\xrightarrow{\mu,\delta_3}\bar{g}$.

Teorema 0.2 *Sea* $(\omega,\mathscr{M},\mu)$ *un espacio de medida y supongamos que* $\bar{g},(\bar{g}_{uvq})\in\mathscr{L}^0$. *Entonces, los siguientes enunciados se satisfacen:*

1. *Si* $\bar{g}_{uvq}\xrightarrow{\delta_3,\mu}\bar{g}$, *entonces* $\bar{g}_{uvq}\xrightarrow{\mu,\delta_3}\bar{g}$.
2. *Si* $\bar{g}_{uvq}\xrightarrow{\mu,\delta_3}\bar{g}$, *entonces* $\bar{g}_{uvq}\xrightarrow{\delta_3,\mu}\bar{g}$ *donde* $\mu(\Omega)<\infty$.

Demostración: Dado que $\delta_{klp}:P_1\to[0,1](k,l,p\in\mathbb{N})$ es una medida de probabilidad, $\mu\times\delta_{klp}$ es una medida producto sobre la álgebra producto $\mathscr{M}\bigotimes P_1$ de subconjuntos de $\Omega\times(\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N})$. Ahora, para un $q>0$, tenemos que $S_q=\{(y,(u,v,q))\in\Omega\times(\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N}):D(\bar{g}_{uvq}(y),\bar{y}))\geq q\}$. Definamos una función $\phi:\Omega\times(\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N})\to\mathbb{R}$ donde $\phi(((y,(u,v,q)))=D(\bar{g}_{uvq}(y),\bar{g}(y)),(y,(u,v,q))\in\Omega\times(\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N})$ es $\mathscr{M}\bigotimes P_1$-medible. Por lo tanto, $S_q\in\mathscr{M}\bigotimes P_1$. Ahora, para cualquier $B\subset\Omega\times(\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N})$, definamos $B(y)=\{(u,v,q)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N}:(y,(u,v,q))\in B\{$ si $y\in\Omega$, y $B(u,v,q)=\{y\in\Omega:(y,(u,v,q))\in B\}$ si $(u,v,q)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N}$.

1. Para probar (1), debemos probar que

$$\forall\varepsilon,\eta>0,\exists k_0,l_0,p_0\in\mathbb{N},\forall k\geq k_0,l\geq l_0,p\geq p_0,\mu(\{y\in\Omega:\delta_{klp}(S_q(y))\geq\eta\})<\varepsilon \tag{3}$$

para $\eta>0$ y $\varepsilon>0$. Dado que $\bar{g}_{uvq}\xrightarrow{\mu,\delta_3}\bar{g}$, para un $k_0,l_0,p_0\in\mathbb{N}$ y para todo $k\geq k_0,l\geq l_0$ y $p\geq p_0$, tenemos que.

$$\delta_{klp}(\{(u,v,q)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N}:\mu(S_q(u,v,q))\geq 1\})<\frac{\eta}{3} \tag{4}$$

y

$$\delta_{klp}(\{(u,v,q)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N}:\mu(S_q(u,v,q))\geq\frac{\eta\varepsilon}{6}\})<\frac{\eta\varepsilon}{6}. \tag{5}$$

Ahora, consideremos que $E=\{(u,v,q)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N}:\mu(S_q(u,v,q))<1\}$. Entonces, de (4) tenemos que $\delta_{klp}(\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N}-E)<\frac{\eta}{3}$, para todo $k\geq k_0,l\geq l_0$ y $p\geq p_0$. Por lo tanto, para todo $k\geq k_0,l\geq l_0$ y $p\geq p_0$ tenemos que

$$\begin{aligned}&\mu(\{y\in\Omega:\delta_{klp}(S_q(y))\geq\eta\})\\&\leq\mu(\{y\in\Omega:\delta_{klp}(S_q(y)\cap E)\geq\frac{\eta}{3}\})+\mu(\{y\in\Omega:\delta_{klp}(S_q(y)-E)\geq\frac{\eta}{3}\})\\&\leq\mu(\{y\in\Omega:\delta_{klp}(S_q(y)\cap E)\geq\frac{\eta}{3}\}).\end{aligned}$$

Ahora, sea $S_q^*=S_q\cap(\Omega\times E)$. De esto obtenemos que, $S_q^*(y)=S_q(y)\cap E$ (para $y\in\Omega$) y $S_q^*(u,v,q)=S_q(u,v,q)$ (para $(u,v,q)\in E$).

Para obtener la relación de (3), es suficiente si probamos que para todo $k\geq k_0,l\geq l_0$ y $p\geq p_0$,

$$\mu(\{y\in\Omega:\delta_{klp}(S_q^*(y))\geq\frac{\eta}{3}\})<\varepsilon. \tag{6}$$

Para el conjunto $S_q^*\subset\Omega\times E$ y para todo $k,l,p\in\mathbb{N}$, aplicando el teorema de Fubini para la función caracteristica de S_q^* de una medida finita $\mu\times\delta_{klp}$. En consecuencia,

Rev. Acad. Colomb. Cienc. Ex. Fis. Nat. 45(177):1011-1021, octubre-diciembre de 2021
doi: https://doi.org/10.18257/raccefyn.1456

$S_q^* = \bigcup_{(u,v,q)\in E} (\{(u,v,q)\} \times S_q(u,v,q))$, donde $\mu(S_q(u,v,q)) < 1$ para todo $(u,v,q) \in E$ y $\delta_{klp}(\{(u,v,q)\}) = 0$ para todo $u > k, v > l$ y $q > p$. Así, $\int\int\int_E \mu(S_q^*(u,v,q))dudvdq = (\mu \times \delta_{klp})(S_\eta^*) = \int_\Omega \delta_{klp}(S_\eta^*(y))dy$.

Asumiendo k_0, l_0 y p_0 tal que $k \geq k_0, l \geq l_0$ y $p \geq p_0$, tenemos que

$$
\begin{aligned}
\frac{\eta\varepsilon}{3} &> \frac{\eta\varepsilon}{6} + \delta_{klp}(\{(u,v,q) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N} : \mu(S_q(u,v,q)) \geq \frac{\eta\varepsilon}{6}\}) \\
&\geq \int\int\int_{\{(u,v,q)\in E:\mu(S_q(u,v,q))<\frac{\eta\varepsilon}{6}\}} \mu(S_q(u,v,q))dudvdq \\
&+ \int\int\int_{\{(u,v,q)\in E:\mu(S_q(u,v,q))<\frac{\eta\varepsilon}{6}\}} 1dudvdq \\
&\geq \int\int\int_E \mu(S_q(u,v,q))dudvdq \\
&= \int\int\int_E \mu(S_q^*(u,v,q))dudvdq \\
&= \int_\Omega \delta_{klp}(S_q^*(y))dy \\
&\geq \int_{\{y\Omega:\delta_{klp}(S_q^*(y))\geq\frac{\eta}{3}\}} \delta_{klp}(S_q^*(y))dy \\
&\geq \frac{\eta}{3}\mu(\{y\in\Omega : \delta_{klp}(S_q^*(y)) \geq \frac{\eta}{3}\}),
\end{aligned}
$$

y esto muestra que la estricta desigualdad (6) es verdadera.

2. Supongamos que $\mu(\Omega) < \infty$. Para $q > 0$. Para probar (2), necesitamos mostrar que para todo $\varepsilon, \eta > 0$, existe $k_0, l_0, p_0 \in \mathbb{N}$ para todo $k \geq k_0, l \geq l_0$ y $p \geq p_0$, $\delta_{klp}(\{(u,v,q) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N} : \mu(S_q(u,v,q)) \geq \eta\}) < \varepsilon$.

   Dado que $\bar{g}_{uvq} \xrightarrow{\mu,\delta_3} \bar{g}$, donde $k_0, l_0, p_0 \in \mathbb{N}$ para todo $k \geq k_0, l \geq l_0$ y $p \geq p_0$, tenemos que $\mu(\{y\in\Omega : \delta_3^{klp}(S_q(y)) \geq \frac{\eta\varepsilon}{3\mu(\Omega)}\}) < \frac{\eta\varepsilon}{3}$, para todo $\varepsilon > 0$ y $\eta > 0$ dados.

   Aplicando el teorema de Fubini para la función caracteristica de $S_q \subset \Omega \times (\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N})$, tenemos que $\int_\Omega \delta_{klp}(S_q(y))dy = (\mu\times\delta_{klp})(S_q) = \int\int\int_{\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N}} \mu(S_q(u,v,q))dudvdq$.

   Ahora, asumiendo $k_0, l_0, p_0 \in \mathbb{N}$ para todo $k \geq k_0, l \geq l_0$ y $p \geq p_0$, obtenemos que.

$$
\begin{aligned}
\eta\varepsilon &> \frac{\eta\varepsilon\mu(\Omega)}{3\mu(\Omega)} + \mu(\{y\in\Omega : \delta_{klp}(S_q(y)) \geq \frac{\eta\varepsilon}{3\mu(\Omega)}\}) \\
&\geq \int_\Omega \delta_{klp}(S_q(y))dy \\
&= \int\int\int_{\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N}} \mu(S_q(u,v,q))dudvdq \\
&\geq \int\int\int_{\{(u,v,q)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N}:\mu(S_q(u,v,q))\geq\eta\}} \mu(S_q(u,v,q))dudvdq \\
&\geq \eta\delta_{klp}(\{(u,v,q) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N} : \mu(S_q(u,v,q)) \geq \eta\}).
\end{aligned}
$$

   Esto completa la demostración.

El Teorema 0.2 muestra que las convergencias de la Definición 0.4 son equivalentes si Ω es un espacio de medida finito. Por lo tanto, considerando el espacio de medida finito Ω, definimos la convergencia en medida como lo muestra la Definición 0.5.

Definición 0.5 *Sea $(\Omega, \mathscr{M}, \mu)$ un espacio de medida finita. Consideremos que $\bar{g}_{uvq}, \bar{g} \in \mathscr{L}^0$. Una triple sucesión de funciones medibles con valores difusos $(\bar{g}_{uvq})$ es convergente en medida a una función medible con valores difusos $\bar{g}$ si $\mu(\{y \in \Omega : D(\bar{g}_{uvq}(y), \bar{g}(y)) \geq q\})$ converge a 0 para todo $q > 0$. Esto lo denotaremos como $\bar{g}_{uvq} \xrightarrow{\mu} \bar{g}$.*

Definición 0.6 *Sea $(\Omega, \mathscr{M}, \mu)$ un espacio de medida finita. Consideremos que $\bar{g}_{uvq}, \bar{g} \in \mathscr{L}^0$. Una triple sucesión de funciones medibles con valores difusos $(\bar{g}_{uvq})$ es estadísticamente convergente en medida a una función medible con valores difusos $\bar{g}$ si $\mu(\{y \in \Omega : D(\bar{g}_{uvq}(y), \bar{g}(y)) \geq q\})$ es estadísticamente convergente a cero para todo $q > 0$. Esto lo denotaremos como $\bar{g}_{uvq} \xrightarrow{\mu S_3} \bar{g}$.*

Proposición 0.1 *Sea $(\Omega, \mathscr{M}, \mu)$ un espacio de medida finita y consideremos que $\bar{g}_{uvq}, \bar{g} \in \mathscr{L}^0$. Entonces $\bar{g}_{uvq} \xrightarrow{uS_3} \bar{g}$ implica $\bar{g}_{uvq} \xrightarrow{\mu S_3} \bar{g}$.*

Demostración: Es consecuencia directa de las defininciones 0.2 y 0.6.

Teorema 0.3 *Sea $(\Omega, \mathscr{M}, \mu)$ un espacio de medida y sea $(\bar{g}_{uvq}), \bar{g} \in \mathscr{L}^0$. Si la triple sucesión de funciones con valores difusos $(\bar{g}_{uvq})$ converge puntualmente estadísticamente a una función con valores difusos $\bar{g}$ casi en todas partes sobre Ω, entonces $\bar{g}_{uvq} \xrightarrow{\mu S_3} \bar{g}$.*

Demostración: Supongamos que $\bar{g}_{uvq}(y) \xrightarrow{pS_3} \bar{g}(y)$ casi en todas partes sobre Ω. Del Teorema 0.2 podemos inferir que $\bar{g}_{uvq}(y) \xrightarrow{\mu, \delta_3} \bar{g}(y)$ es equivalente a $\bar{g}_{uvq}(y) \xrightarrow{\mu S_3} \bar{g}(y)$. Así, para probar el resultado, vamos a probar que $\bar{g}_{uvq}(y) \xrightarrow{\mu, \delta_3} \bar{g}(y)$.

Supongamos que para todo $\varepsilon > 0$ y $q > 0$. Por el Teorema 0.1 tenemos que $A \subset \mathscr{M}$ tal que $\bar{g}_{uvq|A} \xrightarrow{eS_3} \bar{g}_{|A}$ y $\mu(\Omega - A) < \varepsilon$. Ahora, para indexaciones m, n e i, tenemos que $\delta_{klp}(\{(u, v, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} : D(\bar{g}_{uvq}(y), \bar{g}(y))) \geq q\}) < q$ para todo $k \geq m, l \geq n$ y $p \geq i$, e $y \in A$. Así, para todo $k \geq m, l \geq n$ y $p \geq i$, tenemos que $\{y \in \Omega : \delta_{klp}(\{(u, v, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} : D(\bar{g}_{uvq}(y), \bar{g}(y)) \geq q\}) \geq q\} \subset \Omega - A$. Por lo tanto, para todo $k \geq m, l \geq n$ y $p \geq i$, $\mu(\{y \in \Omega : \delta_{klp}(\{(u, v, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} : D(\bar{g}_{uvq}(y), \bar{g}(y)) \geq q\}) \geq q\}) < \varepsilon$.

Teorema 0.4 *Sea $(\Omega, \mathscr{M}, \mu)$ un espacio de medida finito y consideremos que $\bar{g}_{uvq}, \bar{g} \in \mathscr{L}^0$. Si $\bar{g}_{uvq} \xrightarrow{pS_3} \bar{g}$ casi en todas partes sobre Ω, entonces $\bar{g}_{uvq}(y) \xrightarrow{\mu S_3} \bar{g}(y)$.*

Demostración: Para $q, \varepsilon > 0$ dados y por el Teorema 0.1, existe un $A \subset \Omega$ tal que ($\bar{g}_{uvq|A} \xrightarrow{eS_3} \bar{g}_{|A}$ sobre A y $\mu(\Omega - A) < \varepsilon$. Ahora, consideremos $m, n, i \in \mathbb{N}$ tal que $\delta_{klp}(\{(u, v, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} : D(\bar{g}_{uvq}(y), \bar{g}(y)) \geq q\}) < q$, para todo $k \geq m, l \geq n$ y $p \geq i$, y $y \in A$. En consecuencia, $\{y \in \Omega : \delta_{klp}(\{(u, v, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} : D(\bar{g}_{uvq}(y), \bar{g}(y)) \geq q\}) \geq q\} \subset \Omega - A$, para todo $k \geq m, l \geq n$ y $p \geq i$. Por lo tanto, concluimos que $\mu(\{y \in \Omega : \delta_{klp}(\{(u, v, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} : D(\bar{g}_{uvq}(y), \bar{g}(y)) \geq q\}) \geq q\}) < \varepsilon$.

Corolario 0.2 *Sea $(\Omega, \mathscr{M}, \mu)$ un espacio de medida finito y consideremos que $\bar{g}_{uvq}, \bar{g} \in \mathscr{L}^0$. Si $\bar{g}_{uvq}(y) \xrightarrow{\mu S_3} \bar{g}(y)$, entonces existe una sub-sucesión $(\bar{g}_{u_m v_n q_i})$ de $(\bar{g}_{uvq})$ tal que $\bar{g}_{u_m v_n q_i}(y) \xrightarrow{pS_3} \bar{g}(y)$ casi en todas partes sobre Ω.*

Demostración: Supongamos que $\bar{g}_{uvq}(y) \xrightarrow{\mu S_3} \bar{g}(y)$, así, cualquier sub-sucesión $(\bar{g}_{u_m v_n q_i})$ de $(\bar{g}_{uvq})$ converge estadísticamente en medida a $\bar{g}$. Por lo tanto, $(\bar{g}_{uvq})$ tiene una sub-sucesión que converge estadísticamente en medida a $\bar{g}$ casi en todas partes sobre Ω. Esto significa que $\bar{g}_{u_m v_n q_i}(y) \xrightarrow{pS_3} \bar{g}(y)$ casi en todas partes sobre Ω.

doi: https://doi.org/10.18257/raccefyn.1456

Conclusión

En este artículo, probamos la versión estadística del teorema de Egorov para secuencias triples de funciones con valores difusos definidas en un espacio de medida finita $(\Omega, \mathscr{M}, \mu)$. Además, definimos las nociones de convergencia estadística externa e interna para sucesiones triples de funciones medibles con valores difusos y se demostró que estos dos tipos de convergencia estadística son equivalentes si la medida es finita. Por otra parte, introdujimos una nueva noción de convergencia estadística en medida para secesiones triples de funciones medibles con valores difusos sobre espacios de medida finita y obtuvimos algunos resultados interesantes.

Por otro lado, como continuación del presente artículo, se puede definir la noción de convergencia uniformemente estadística en medida y estudiar algunas relaciones entre las nociones introducidas en este documento. Adicionalmente, se puede extender el estudio de las convergencias definidas y estudiadas en este artículo sobre la convergencia lacunary estadística (**Fridy & Orhan**, 1993), espacios de ideales teniendo en cuenta los estudios realizados sobre convergencia de ideales para sucesiones triples (ver (**Kostyrko et al.**, 2000/2001); (**Sahiner & Tripathy**, 2008)), espacios normados neutrosóficos (**Granados & Dhital**, 2021), sucesiones inciertas complejas (**Das et al.**, 2021) y como aplicación para los investigadores que estudian la teoría de aproximación y la teoría de sumabilidad estadística, pueden aplicar teoremas de aproximación de tipo de Korovkin para funciones de tres variables utilizando los métodos de convergencia definidos en este artículo.

Conflicto de intereses

El autor declara no tener conflicto de intereses con respecto al contenido de este artículo.

Agradecimientos

El autor agradece a los revisores y al editor por sus comentarios sobre el artículo que mejoraron la presentación del artículo.

References

Balcerzak, M., Dems, K., & Komisarski, A. (2007). Statistical convergence and ideal convergence for sequences of functions. *J. Math. Anal. Appl.*, ***328***(), 715–729.

Canak, I., Totur, U., & Önder, Z. (2017). A tauberian theorem for (c, 1, 1) summable double sequences of fuzzy numbers. *Iran. J. Fuzzy Syst.*, ***14***(1), 61–75.

Das, B., Tripathy, B. C., Debnath, P., & Bhattacharya, B. (2021). Statistical convergence of complex uncertain triple sequence. *Communications in Statistics - Theory and Methods*,(), .

Esi, A., & Necdet, M. (2014). Almost convergence of triple sequences. *Global Journal of Mathematical Analysis*, ***2***(1), 6–10.

Fast, H. (1951). Statistical convergence and ideal convergence for sequences of functions. *Coll. Math.*, ***2***(), 241–244.

Fridy, J. (1985). On statistical convergence. *Analysis*, ***5***(4), 301–313.

Fridy, J., & Orhan, C. (1993). Lacunary statistical convergence. *Pacific Journal of Mathematics*, ***160***(1), 43–51.

Gong, Z., Zhang, L., & Zhu, X. (2015). The statistical convergence for sequences of fuzzy-number-valued functions. *Inf. Sci.*, ***295***(), 182–195.

Granados, C. (2021). New notions of triple sequences on ideal spaces in metric spaces. *Advances in the Theory of Nonlinear Analysis and its Application*, ***5***(3), 363–368.

Granados, C., & Dhital, A. (2021). Statistical convergence of double sequences in neutrosophic normed spaces. *Neutrosophic Sets and Systems*, ***42***(), 334–344.

Hazarika, B., Alotaibi, A., & Mohiuddine, S. (2020). Statistical convergence in measure for double sequences of fuzzy valued functions. *Soft Computing*, ***24***(), 6613–6622.

Ilkhan, M., & Kara, E. (2018). A new type of statistical cauchy sequence and its relation to bourbaki completeness. *Cogent. Math. Stat.*, ***5***(1), 1–9.

Kim, Y., & Ghil, B. (1997). Integrals of fuzzy-number-valued functions. *Fuzzy Sets Syst.*, ***86***(), 213–222.

Kostyrko, P., Salat, T., & Wilczynski, W. (2000/2001). *i*-convergence. *Real Anal. Exchange*, ***26***(), 669–689.

Kumar, P., Kumar, V., & Bhatia, S. (2012). Multiple sequences of fuzzy numbers and their statistical convergence. *Mathematical Sciences*, ***6***(2), 1–7.

Mohiuddine, S., Alotaibi, A., & Mursaleen, M. (2012). Statistical convergence of double sequences in locally solid riesz spaces. *Abstr. Appl. Anal.*, ***2012***(9), 719-729.

Mohiuddine, S., Asiri, A., & Hazarika, B. (2019). Weighted statistical convergence through difference operator of sequences of fuzzy numbers with application to fuzzy approximation theorems. *Int. J. Gen. Syst.*, ***48***(5), 492–506.

Mursaleen, M., & Mohiuddine, S. (2009). Statistical convergence of double sequences in intuitionistic fuzzy normed spaces. *Chaos Solitons Fractals*, ***41***(5), 2414-2421.

Negoita, C., & Ralescu, D. (1975). *Applications of fuzzy sets to systems analysis*. Wiley, New York.

Nuray, F., & Savas, E. (1995). Statistical convergence of sequences of fuzzy numbers. *Math. Slovaca*, ***45***(3), 269-273.

Pringsheim, A. (1900). Zur theorie der zweifach unendlichen zahlenfolgen. , ***53***(), 289321.

Sahiner, A., Gurdal, A., & Duden, K. (2007). Triple sequences and their statistical convergence. *Selcuk J. Appl. Math.*, ***8***(2), 49-55.

Sahiner, A., & Tripathy, B. C. (2008). Some *i*-related properties of triple sequences. *Selcuk J. Appl. Math.*, ***9***(2), 9-18.

Salát, T. (1980). On statistically convergent sequences of real numbers. *Math. Slovaca*, ***30***(), 139–150.

Savas, E. (1996). A note on double sequences of fuzzy numbers. *Turkish J. Math.*, ***20***(2), 175-178.

Savas, E., & Mursaleen, M. (2004). On statistically convergent double sequences of fuzzy numbers. *Inf. Sci.*, ***162***(3-4), 183-192.

Schoenberg, I. (1959). The integrability of certain functions and related summability methods. *Am. Math. Monthly.*, ***66***(), 361–375.

Talo, , & Bayazit, F. (2017). Tauberian theorems for statistically convergent double sequences of fuzzy numbers. *J. Intell. Fuzzy Syst.*, ***32***(3), 2617-2624.

Zadeh, L. (1965). Fuzzy sets. *Inf. Control*, ***8***(), 338–353.

Zhang, B. (2001). On measurability of fuzzy-number-valued functions. *Fuzzy Sets Syst.*, ***120***(), 505–509.

Zygmund, A. (1935). *Trigonometrical series, vol. 5 of monografýas de matemáticas*. Warszawa-Lwow.

Önder, Z., Çanak, I., & Totur, U. (2017). Tauberian theorems for statistically (c, 1, 1) summable double sequences of fuzzy numbers. *Open Math.*, ***15***(1), 157-178.