

Artículo original

Comparación numérica de métodos tipo Newton generalizado y el algoritmo extragradiante para el problema de complementariedad no lineal

Numerical comparison of generalized Newton-type methods and the extragradient algorithm for the nonlinear complementarity problem

✉ Favián Arenas-Aparicio*, ✉ Diego Zambrano V

Departamento de Matemáticas, Universidad del Cauca, Popayán, Colombia

Resumen

En este artículo realizamos una comparación numérica de dos métodos tipo Newton generalizado, que utilizan las funciones de complementariedad mínimo y Fisher - Burmeister, respectivamente y un método que utiliza proyecciones llamado algoritmo extragradiante. Dado que el problema de complementariedad no lineal es de gran interés para muchos investigadores por sus numerosas aplicaciones en Ingeniería y Física, presentamos un estudio numérico comparativo que permita elegir uno de los métodos según la necesidad.

Palabras clave: complementariedad; método de Newton; proyecciones ortogonales.

Abstract

In this paper we carry out a numerical comparison of two generalized Newton-type methods, which use the minimum complementarity and Fisher-Burmeister functions, respectively, and a method that uses projections called the extragradient algorithm. Since the nonlinear complementarity problem is of great interest to many researchers due to its numerous applications in Engineering and Physics, we present a comparative numerical study that allows choosing one of the methods according to the need.

Keywords: Complementarity; Newton's method; orthogonal projections.

Introducción

Sea $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, donde $F(\mathbf{x}) = (F_1(\mathbf{x}), F_2(\mathbf{x}), \dots, F_n(\mathbf{x}))^T$ es una función continuamente diferenciable y no lineal. El problema de complementariedad no lineal (PCNL) consiste en hallar un vector $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$\mathbf{x} \geq 0 ; \quad F(\mathbf{x}) \geq 0 ; \quad \mathbf{x}^T F(\mathbf{x}) = 0, \quad (1)$$

en este contexto la expresión $\mathbf{y} \geq 0$ para $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ significa que $y_i \geq 0$ para $i = 1, 2, \dots, n$. De la tercera condición de (1), tenemos que $x_i F_i(\mathbf{x}) = 0$, por tanto, $x_i = 0$ o $F_i(\mathbf{x}) = 0$.

El problema de complementariedad no lineal tiene importantes aplicaciones en diferentes áreas como la economía (Ferris & Pang, 1997), ingeniería, investigación de operaciones, problemas de contacto mecánico y fricción (Anitescu *et al.*, 1997), equilibrio de tráfico

Citación: Arenas-Aparicio F, Zambrano V. D. Comparación numérica de métodos tipo Newton generalizado y el algoritmo extragradiante para el problema de complementariedad no lineal. Revista de la Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. 47(182):160-171, enero-marzo de 2023. doi: <https://doi.org/10.18257/raccefyfyn.1761>

Editor: Francisco José Marcellán

***Correspondencia:**

Favián Arenas-Aparicio;
farenas@unicauca.edu.co

Recibido: 6 de septiembre de 2022

Aceptado: 18 de enero de 2023

Publicado en línea: 7 de febrero de 2023



Este artículo está bajo una licencia de Creative Commons Reconocimiento-NoComercial-Compartir Igual 4.0 Internacional

(Chen *et al.*, 2010), lubricación elasto-electrodinámica (Kostreva, 1984). Además tiene estrecha relación con otros campos de la matemática como lo son la teoría de punto fijo, análisis no lineal, así como modelación matemática y análisis numérico.

El PCNL trae consigo implícitamente la búsqueda de un equilibrio entre la variable del problema y el valor que toma la función que define el problema en dicha variable. De ello se sigue la importancia de PCNL en la física, economía e ingeniería. La comunidad matemática ha tomado gran interés en diversos métodos que permitan dar solución al PCNL, entre ellos los métodos que utilizan proyecciones ortogonales (Xiu & Zhang, 2003) (Facchinei & Pang, 2003a) (Facchinei & Pang, 2003b).

Los métodos de proyección son conceptualmente simples. Hay dos características comunes a todos los métodos de esta clase. La primera es que su implementación requiere la capacidad de calcular eficientemente la proyección sobre un conjunto convexo cerrado. Esta característica ciertamente limita la aplicabilidad de los métodos, especialmente cuando dicha proyección es computacionalmente costosa o difícil. La segunda característica es que los métodos no requieren el uso de las derivadas de la función objetivo y no involucran ningún cálculo complejo, salvo las que podría tener lo mencionado anteriormente. En el caso particular que nos concierne, el PCNL tiene como región factible el ortante no negativo del hiperespacio, eso facilita el cálculo de la proyección y es extremadamente simple.

El métodos de proyección que utilizaremos provienen del método de proyección de gradiente de (Goldstein, 1964) y (Levitin & Polyak, 1966) para minimización restringida a una caja, y fueron estudiados en la década de los 70 por muchos investigadores. Su esquema iterativo es el siguiente, para $x_k \in X$, donde X es un conjunto no vacío y convexo,

$$x_{k+1} = P_X(x_k - \alpha F(x_k)), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2)$$

Donde $P_X(y)$ es la proyección ortogonal de y sobre X y $\alpha > 0$ es un número fijo. Al usar el teorema de punto fijo de Banach, se sigue que el método es globalmente convergente si F es fuertemente monótona y Lipschitz continua, siempre que el número $\alpha > 0$ sea suficientemente pequeño. Además, tiene convergencia lineal (Xiu & Zhang, 2003). Debido a que la elección para α no se muestra explícitamente, el método de proyección no puede ejecutarse bien, ya que debe su eficacia a encontrar un α óptimo. Por otra parte, las suposiciones utilizadas en la prueba de convergencia son bastante fuertes.

Estos inconvenientes motivan diversas modificaciones y variantes del método y, por lo tanto, una clase bastante amplia de métodos de tipo proyección para resolver (1). Claramente, este tipo de métodos utiliza poco almacenamiento. También puede eliminar y agregar muchas restricciones del conjunto activo en cada iteración. Además, este tipo de métodos tiene algunas propiedades de convergencia interesantes bajo el supuesto de que F sea continua yseudomonótona (Xiu & Zhang, 2003), por lo tanto, atrae la atención de muchos investigadores.

Entre los métodos de proyección, existe uno que ejecuta dos proyecciones por iteración, aunque esto sin duda requiere el doble de cálculos, el beneficio es significativo. Este algoritmo fue implementado por (Korpelevich, 1976) al cual llamó *algoritmo extragradiante* y fue propuesto con la intención de resolver una clase de problemas llamados Problema de desigualdades variacionales (PDV). Se ha demostrado que el algoritmo extragradiante converge con una tasa lineal.

Por otro lado, en la literatura sobre complementariedad no lineal la estrategia más utilizada para resolver el PCNL consiste en reformular el problema de complementariedad no lineal como un sistema de ecuaciones no lineales, no diferenciable (Yong, 2010). Esta reformulación se hace utilizando un tipo de funciones especiales llamadas funciones de complementariedad. De estas las más utilizadas de son: la función mínimo (Pang & Qi, 1993) y la función de Fisher - Burmaister (Fischer & Kanzow, 1996).

Posteriormente, al tener un sistema de ecuaciones no lineales, los métodos más eficientes en estos casos son los métodos tipo Newton (**Abaffy et al.**, 1984) (**Broyden et al.**, 1972); sin embargo, al no tener diferenciabilidad no podemos hablar de matriz Jacobiana, pero sí de un conjunto de matrices llamado jacobiano generalizado. Este concepto fue presentado por (**Clarke**, 1975), que extiende el de matriz jacobiana para algunas funciones no diferenciables.

Con este nuevo ingrediente se construyen los métodos tipo Newton generalizados, que han demostrado tener buenas cualidades de convergencia. Estos al igual que en los casos diferenciables, en cada iteración resuelven un sistema de ecuaciones lineales. Se ha demostrado que para algunas funciones converge con una tasa cuadrática.

Tenemos ahora en la mesa dos estrategias para resolver el PCNL que, teóricamente, una tiene ventajas marcadas, pero no se han comparado numéricamente ante una lista de problemas de prueba.

Este artículo lo organizamos de la siguiente forma: en la **Sección 2**, presentamos algunos resultados teóricos relacionados con los métodos que utilizan proyecciones. Entre dichos resultados estará cómo el PCNL es un caso particular del PDV. En la **Sección 3**, describimos el método de Newton generalizado y luego, en la **Sección 4** presentamos los resultados numéricos obtenidos al resolver el PCNL mediante el algoritmo extragradiente y mediante dos métodos de Newton generalizado. Finalmente, en la **Sección 5**, hacemos algunos comentarios finales.

Proyecciones para resolver el PCNL

En esta sección, presentamos algunas definiciones y resultados teóricos que han sido demostrados previamente por algunos autores y que serán muy útiles en el desarrollo de nuestro trabajo.

Definición 1. Proyector euclidiano (Facchinei y Pang, 2003a) Sea X un conjunto convexo, cerrado y no vacío de \mathbb{R}^n . Para cada vector $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ existe un vector único $\bar{\mathbf{x}}_k \in X$ que está más cerca de \mathbf{x} en la norma euclidiana. Este vector más cercano $\bar{\mathbf{x}}_k$ se llama la proyección (euclidiana) de \mathbf{x} sobre X y se denota como $P_X(\mathbf{x})$. La función $P_X: \mathbf{x} \mapsto P_X(\mathbf{x})$ se llama el proyector euclidiano sobre X . Por definición, $P_X(\mathbf{x})$ es la solución única del problema de minimización convexo en la variable \mathbf{x} , donde \mathbf{x} se considera fijo. Luego,

$$P_X(\mathbf{x}) = \arg \min \{ \|\mathbf{w} - \mathbf{x}\| : \mathbf{w} \in X \}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Geoméricamente, la Figura 1 ilustra el por qué de la unicidad de $P_X(\mathbf{x})$ cuando el conjunto X es convexo. En contraste, la Figura 2 nos presenta un conjunto X no convexo, por ende, dualidad de proyecciones.

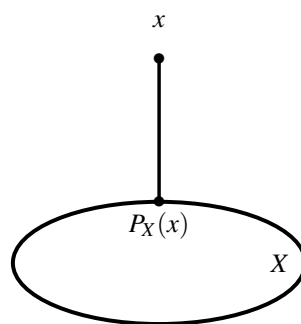


Figura 1. X convexo.

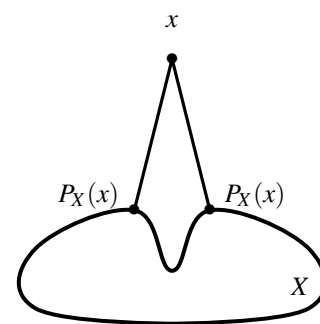


Figura 2. X no convexo.

Un caso particular, ocurre cuando $X = \{y \in \mathbb{R}^n : y_i \geq 0, i = 1, \dots, n\}$ para el cual la proyección se calcula de la siguiente forma,

$$[P_X(x)]_i = \begin{cases} x_i, & \text{si } x_i \geq 0 \\ 0, & \text{si } x_i < 0 \end{cases}$$

Definición 2. *PDV (Xiu & Zhang, 2003) Sea X un conjunto convexo, cerrado y no vacío de \mathbb{R}^n , y sea F una función continuamente diferenciable. El problema de desigualdades variacionales consiste en hallar $x \in X$ tal que*

$$F(x)^T (y - x) \geq 0, \quad \text{para todo } y \in X, \tag{3}$$

y lo notaremos por $PDV(F, X)$.

Un resultado importante, que relaciona las proyecciones ortogonales con el PDV, es el siguiente.

Teorema 1. (Facchinei & Pang, 2003a) *Sea X un conjunto convexo cerrado no vacío de \mathbb{R}^n . Las siguientes afirmaciones son válidas*

- (a) *Para cada $x \in \mathbb{R}^n$, $P_X(x)$ existe y es único.*
- (b) *Para cada $x \in \mathbb{R}^n$, $P_X(x)$ es el único vector en X que satisface la desigualdad:*

$$(y - P_X(x))^T (P_X(x) - x) \geq 0, \quad \text{para todo } y \in X. \tag{4}$$

- (c) *Para dos vectores cualesquiera $u, v \in \mathbb{R}^n$*

$$(P_X(u) - P_X(v))^T (u - v) \geq \|P_X(u) - P_X(v)\|_2^2. \tag{5}$$

Dado que implementaremos un método desarrollado para el PDV, con el fin de resolver el PCNL, a continuación demostramos que el PCNL es un caso particular de PDV.

Lema 1. *Sea $X = \mathbb{R}_+^n$, donde \mathbb{R}_+^n es el ortante no negativo de \mathbb{R}^n . x_* es una solución del PCNL si y solo si x_* es una solución del PDV(\mathbb{R}_+^n, F).*

Demostración. Sea x_* una solución del PCNL y $y \in \mathbb{R}_+^n$. Entonces,

$$F(x_*)^T (y - x_*) = F(x_*)^T y - F(x_*)^T x_* = F(x_*)^T y,$$

pero como $F(x_*) \geq 0$ (por ser x_* solución del PCNL) y $y \geq 0$ podemos inferir que $F(x_*)^T y \geq 0$ en consecuencia,

$$F(x_*)^T (y - x_*) \geq 0$$

y como $y \in \mathbb{R}_+^n$ es cualquier vector, concluimos que x_* es una solución del PDV(\mathbb{R}_+^n, F).

Recíprocamente, si x_* es una solución del PDV(\mathbb{R}_+^n, F) entonces, $x_* \geq 0$ y la hipótesis del problema de desigualdades variacionales se satisface para cualquier vector $y \in \mathbb{R}_+^n$. En particular, si $y = 0$ y si $y = 2x_*$ obtendríamos respectivamente que: $F(x_*)^T x_* \leq 0$ y que $F(x_*)^T x_* \geq 0$ por lo tanto, concluimos que

$$F(x_*)^T x_* = 0.$$

Análogamente, si suponemos que $y = x + e_i$, donde e_i es el i -ésimo vector canónico de \mathbb{R}^n entonces, por la hipótesis del problema de desigualdades variacionales, podemos concluir que $F_i(x_*) \geq 0$ para cada $i = 1, 2, \dots, n$, en consecuencia, $F(x_*) \geq 0$ y por lo tanto, x_* es una solución del PCNL. □

El **lema 1** garantiza que el conjunto solución del $PDV(\mathbb{R}_+^n, F)$ y el conjunto solución del PCNL son iguales. Por lo tanto podemos utilizar todas las propiedades de las PDV y las propiedades de convergencia de los métodos creados para resolverlo, como ocurre con el siguiente algoritmo.

Algoritmo extragradiante

En esta sección, presentamos el algoritmo extragradiante para resolver el PCNL, el cual es un algoritmo de proyección, que ejecuta dos proyecciones por iteración. Aunque, sin duda, esto requiere el doble de la cantidad de cálculos, el beneficio es significativo porque el algoritmo resultante es aplicable al problema de complementariedad no lineal, además, este tipo de métodos tiene algunas propiedades de convergencia interesantes bajo los supuestos de que F es Lipschitz continua y pseudomonótona. El algoritmo extragradiante presentado a continuación como **Algoritmo 1** debe su nombre de la evaluación adicional o “extra” de F (y la proyección adicional) que se requiere en cada iteración.

Algoritmo 1 Algoritmo extragradiante para PCNL

Entrada: $x_0 \in X$ y $\alpha > 0$, donde α es un número fijo.

Salida: solución x_*

- 1: $k \leftarrow 0$
 - 2: mientras x_k , no sea solución haga
 - 3: $\bar{x}_k \leftarrow P_X(x_k - \alpha F(x_k))$
 - 4: $x_{k+1} \leftarrow P_X(x_k - \alpha F(\bar{x}_k))$
 - 5: fin mientras.
-

El siguiente teorema garantiza la convergencia del **Algoritmo 1** (Facchinei & Pang, 2003b).

Teorema 2. Sean $X \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto convexo, cerrado y no vacío, $F: X \rightarrow \mathbb{R}^n$ pseudomonótona en X con respecto a X^* , donde X^* es el conjunto solución de PCNL, y Lipschitz continua en X con constante L . Si $\alpha < \frac{1}{L}$ entonces la sucesión $\{x_k\}_{k \geq 0}$ generada por el algoritmo extragradiante converge, y lo hace linealmente.

Métodos tipo Newton Generalizado

Como se mencionó en la sección introductoria, mediante una clase especial de funciones el PCNL se puede reformular como un sistema de ecuaciones no lineales y no diferenciable.

Una función $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\varphi(a, b) = 0 \iff a \geq 0, b \geq 0, ab = 0$, se denomina *función de complementariedad*. Por la manera en que se define, la función φ es no diferenciable en, por lo menos, $(0, 0)$.

Luego de determinar la *función de complementariedad* φ se define $\Phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ mediante,

$$\Phi(\mathbf{x}) := \begin{pmatrix} \varphi(x_1, F_1(\mathbf{x})) \\ \vdots \\ \varphi(x_n, F_n(\mathbf{x})) \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Como consecuencia de la no suavidad de φ , el sistema de ecuaciones no lineales

$$\Phi(\mathbf{x}) = 0 \quad (7)$$

tampoco es diferenciable.

Existen numerosas *funciones de complementariedad*, pero las más utilizadas han sido la *función mínimo* (Pang & Qi, 1993) y la *función de Fischer - Burmeister* (Fischer & Kanzow, 1996), definidas respectivamente por

$$\varphi(a, b) = \min \{a, b\}, \quad \varphi(a, b) = \sqrt{a^2 + b^2} - a - b. \quad (8)$$

Ahora que, el problema (1) se ha transformado en (7) la estrategia más popular es un método tipo Newton, el cual por la no diferenciabilidad usará el Jacobiano generalizado $\partial\Phi(\mathbf{x})$, este está bien determinado en (Lopes *et al.*, 1999). Para cada una de las funciones en (8) obtenemos una versión del método de Newton generalizado, el cual está descrito mediante el algoritmo (2).

Algoritmo 2 Newton generalizado

Entrada: Dados x_0 y $\lambda \in (0, 4)$, para $k = 1, 2, \dots$

Salida: solución aproximada x_k

- 1: **mientras** $\|\Phi(x_k)\| \geq \sqrt{n}10^{-5}$ y $k < N$ **hacer**
 - 2: Calculamos $F'(x_k)$ la matriz jacobiana de F en x_k
 - 3: H_k es un elemento de $\partial\Phi(\mathbf{x})$ determinado en (Lopes *et al.*, 1999), dependiendo de la función de complementariedad.
 - 4: Calculamos la iteración siguiente por $x_{k+1} \leftarrow x_k - H_k^{-1}\Phi(x)$.
 - 5: **fin mientras.**
-

Pruebas numéricas

En esta sección analizamos numéricamente el comportamiento del **Algoritmo 1** en comparación con el **Algoritmo 2** en sus dos versiones, cuando se reformula mediante la función mínimo, lo llamaremos método *Newton Mínimo*. De manera análoga llamaremos método *Newton-Fisher*, al método de *Newton* con función de complementariedad *Fisher-Burmeister*.

Para escribir los códigos de los algoritmos y de las funciones de prueba utilizamos el software `MATLAB`. Realizamos los experimentos numéricos en un computador con un procesador: Intel(R)Core(TM)i7-9700F CPU @ 3.00GHz. con memoria instalada (RAM): 16,0 GB y un sistema operativo de 64bits.

Para las pruebas numéricas, utilizamos cinco problemas de prueba para algoritmos de complementariedad no lineal, los elegimos de una lista propuesta en (Arenas *et al.*, 2016) y (Wang *et al.*, 2010). Para cada uno de estos problemas describimos a continuación la función que los define (entre paréntesis aparece la abreviatura que utilizaremos en las tablas de resultados para hacer referencia a cada problema), así como el punto inicial que utilizamos (x_0) estos son los puntos iniciales propuestos en (Arenas *et al.*, 2016) y (Wang *et al.*, 2010), respectivamente y la o las soluciones encontradas (x_*).

1. **Problema de Billups** (Billups). Sea $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida como

$$F(x) = (x - 1)^2 - 1.1,$$

$$x_0 = 0 \text{ y } x_* = 2.0488.$$

2. **Problema de Kojima-Shindo** (Koj-Shi). Sea $F: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ definida como

$$F(x) = \begin{pmatrix} 3x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 + x_3 + 3x_4 - 6 \\ 2x_1^2 + x_2^2 + x_1 + 3x_3 + 2x_4 - 2 \\ 3x_1^2 + x_1x_2 + 2x_2^2 + 2x_3 + 3x_4 - 1 \\ x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_3 + 3x_4 - 3 \end{pmatrix}$$

$$x_0 = (0, 0, 0, 0)^T \text{ y } x_* = (1.225, 0, 0, 0.499)^T.$$

3. **Problema de Kojima-Shindo modificado** (Koj-Shi-mod). Sea $F: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ definida como

$$F(x) = \begin{pmatrix} 3x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 + x_3 + 3x_4 - 6 \\ 2x_1^2 + x_2^2 + x_1 + 10x_3 + 2x_4 - 2 \\ 3x_1^2 + x_1x_2 + 2x_2^2 + 2x_3 + 9x_4 - 9 \\ x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_3 + 3x_4 - 3 \end{pmatrix}$$

$$x_0 = (0, 0, 0, 0)^T \text{ y } x_* = (1, 0, 2.99, 0)^T.$$

4. **Problema de Kojima-Josephy** (Koj-Jo). Sea $F: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ definida como

$$F(x) = \begin{pmatrix} 3x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 + x_3 + 3x_4 - 6 \\ 2x_1^2 + x_2^2 + x_1 + 3x_3 + 2x_4 - 2 \\ 3x_1^2 + x_1x_2 + 2x_2^2 + 2x_3 + 3x_4 - 9 \\ x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_3 + 3x_4 - 3 \end{pmatrix}$$

$$x_0 = (0, 0, 0, 0)^T \text{ y } x_* = (1, 0, 2.999, 0)^T.$$

5. **Problema de Mathiesen Modificado** (Mathiesen). Sea $F: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ definida como

$$F(x) = \begin{pmatrix} -x_2 + x_3 + x_4 \\ x_1 - \frac{4.5x_3 + 2.7x_4}{x_2 + 1} \\ 5 - x_1 - \frac{0.5x_3 + 0.3x_4}{x_3 + 1} \\ 3 - x_1 \end{pmatrix}$$

$$x_0 = (1, 1, 1, 1)^T \text{ y } x_* = (1.509, 0, 0, 0)^T.$$

Declaramos que hubo convergencia si $\|\Phi_\lambda(x_k)\|_2 < 10^{-4}$ y divergencia si el número de iteraciones excedió 200. Para el Algoritmo extragradiante fijamos el parámetro $\alpha = 0.1$ el cual fué el valor con el que se obtuvo mejores resultados.

A continuación se describen los dos experimentos que hicimos en esta comparativa: el primer experimento consistió en utilizar los puntos iniciales dados en los problemas anteriores y con el mismo valor inicial ejecutar cada uno de los tres algoritmos. Los datos obtenidos en este experimento aparecen en la **Tabla 1**.

Cuadro 1. Resultados del primer experimento

- Problema:** Nombre del problema de prueba.
- n:** Dimensión del problema.
- EG:** Número de iteraciones con el **Algoritmo 1**.
- NM:** Número de iteraciones con el método de Newton Mínimo.
- NF:** Número de iteraciones con el método de Newton Fisher.
- t:** Tiempo (en segundos) de ejecución de los **Algoritmos**.

Problema	n	EG	NM	NF	t_{EG}	t_{NM}	t_{NF}
<i>Billups</i>	1	75	-	-	0.019864	-	-
<i>koj-Shi</i>	4	83	-	-	0.036903	-	-
<i>koj-Shi-mod</i>	4	122	-	13	0.031071	-	0.025277
<i>koj-Jo</i>	4	118	-	-	0.051398	-	-
<i>Mathiesen</i>	4	12	2	4	0.037125	0.006681	0.028271

Notamos que el algoritmo es eficaz, pues en la mayoría de los casos alcanza la convergencia, sin embargo, es más lento, si lo comparamos con sus competidores, cuando estos convergen. Este el costo por no utilizar derivadas y solamente hacer proyecciones, pero para reducir el costo de operaciones es bastante práctico.

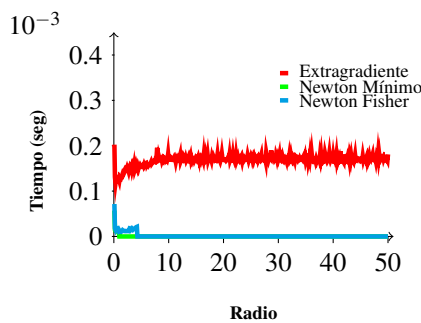
Los tres métodos son locales, pero el Teorema 2 garantiza la convergencia a una hipótesis, que no es la cercanía del punto inicial a la solución, por lo cual nos hizo pensar que el Algoritmo extragradiente tiene características globales. Con esta intención diseñamos el segundo experimento, que describimos a continuación.

A partir de la solución, empezamos a escoger puntos al azar que estuvieran separados una longitud r de la solución, esa longitud la variamos entre 0 y 50. Este radio lo fuimos variando desde 0.1 hasta 50 y escogemos 100 puntos al azar en cada órbita, así que este experimento nos muestra qué tan global pueden ser estos algoritmos, los resultados aparecen en las siguientes gráficas:

El problema de *Billups*, a pesar de estar en una sola variable es de alta exigencia. Las iteraciones y el tiempo de ejecución en el algoritmo extragradiente es, en efecto, más lento que los otros dos métodos como se puede observar en la Figura (3a).

Por otro lado, se ve compensado frente al método de *Newton Mínimo* y *Newton-Fisher* cuando el punto inicial está lejos de la solución, pues convergen en un 50% de las veces cuando el punto inicial se aleja de la solución más de 8 unidades, mientras que los demás algoritmos no convergen. Esto lo ilustra en la Figura (3b).

(a) Tiempo vs radio.



(b) Éxitos vs radio.

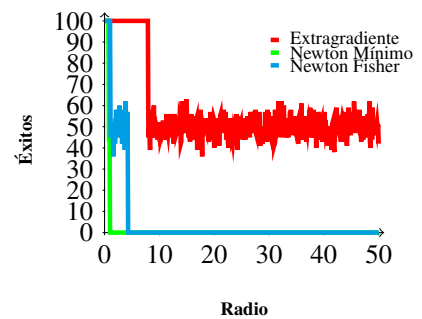


Figura 3. Problema de *Billups*

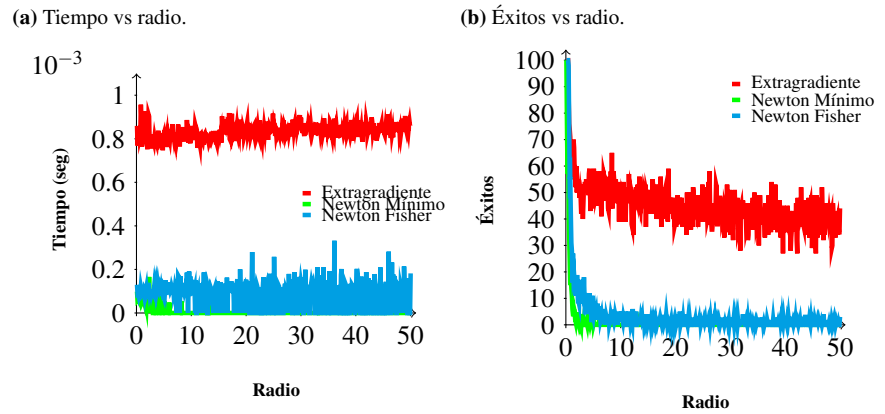


Figura 4. Problema de Kojima-Shindo

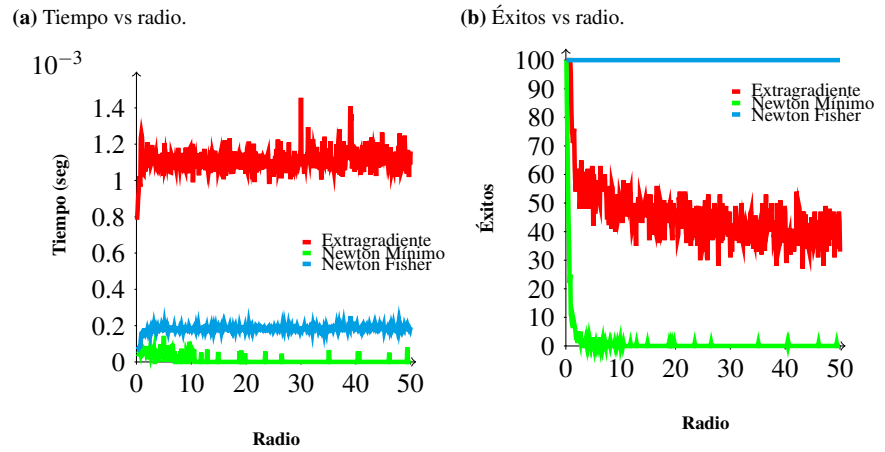


Figura 5. Problema de Kojima-Shindo modificado

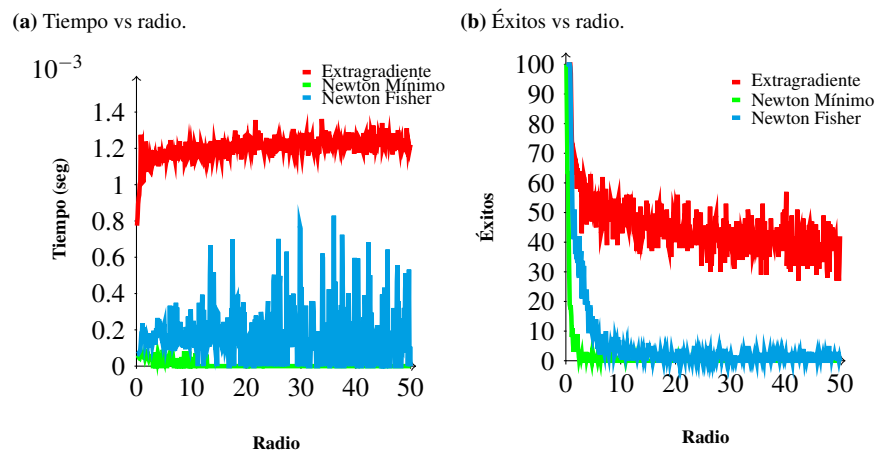


Figura 6. Problema de Kojima-Josephy

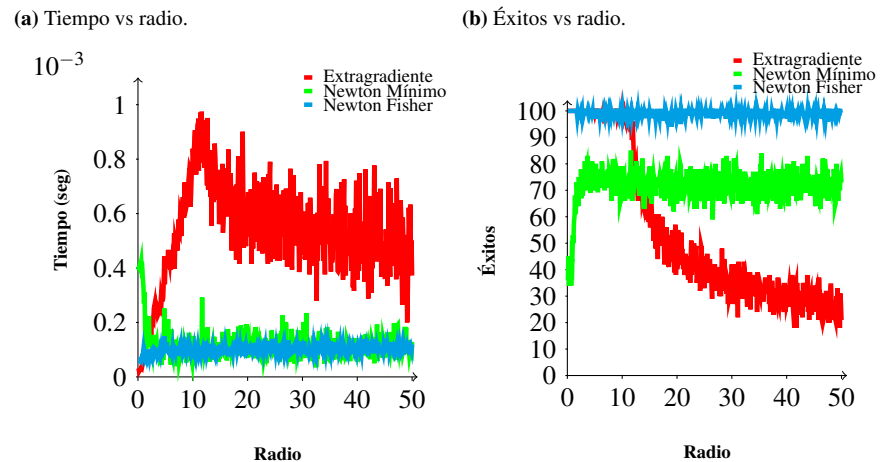


Figura 7. Problema de Mathiesen Modificado

Haciendo un análisis del segundo experimento podemos inferir lo siguiente: en los cinco problemas resueltos mediante los tres métodos podemos observar que el método extragradiente es más lento que los métodos tipo Newton generalizado lo podemos ver en las Figuras 3a, 4a, 5a, 6a y 7a. Esto era esperable pues es lo que se afirma en la teoría, Pero no teníamos constancia de que tanto sería esta diferencia.

Los métodos tipo Newton generalizado también podemos clasificarlos entre ellos, y responder ¿Cuál es más rápido entre los métodos tipo Newton? Aquel que usa la función de complementariedad mínimo es muy veloz cuando está cerca de la solución, incluso más que el método de Newton-Fisher. Por otra parte, el método de Newton-Fisher alcanza la convergencia desde puntos más lejanos de la solución que Newton Mínimo.

Podríamos decir que el método mínimo funciona más rápido, pero debemos iniciar muy cerca de la solución, sin embargo, en problemas reales, la solución es desconocida. Esto hace necesario que los métodos tipo Newton Generalizados sin globalizar no son muy recomendables.

Adicionalmente, cuando hablamos de eficacia, el algoritmo de extragradiente en la mayoría de los problemas convergen, se comportó de manera más eficaz porque alcanzó la convergencia cuando los otros no lo lograron, mostrando así unas características de un algoritmo global que no es tan robusto como otros más elaborados, pero funciona. Esto lo podemos ver en las Figuras 3b, 4b y 6b.

Encontramos una excepción a esta regla que llama la atención: el problema de Kojima-Shindo modificado, el algoritmo de Newton-Fisher converge en todos los casos obteniendo un 100 %, aunque solo ocurrió en este caso (Figura 5b).

El último problema, Mathiesen modificado, un problema realmente difícil pues hace fallar a muchos algoritmos, ocurrió algo muy interesante con estos tres algoritmos. El método extragradiente no fue tan exitoso como antes(ver Figura 7b) también el tiempo de ejecución se incrementa (ver Figura 7a), mientras que el método de Newton-Fisher tuvo un excelente comportamiento casi siempre obtuvo el entre 90 y 100 % para radios entre 0.1 y 50 unidades.

Comentarios finales

Resolver el PCNL a través de un método de proyección es una alternativa importante, ya que estamos generando nuevas técnicas de solución que traen consigo muchos beneficios, entre ellos, el no utilizar derivadas de las funciones.

En este trabajo, estudiamos numéricamente el algoritmo extragradiante, el cual es un método de proyección que permite resolver el PCNL y que puede ser útil, en primer lugar, cuando la derivada de la función que define el problema es costosa de calcular y, en segundo lugar, cuando el usuario no tiene información de la posible solución del problema ya que por las pruebas numéricas obtenidas en nuestro trabajo, se puede observar que el algoritmo funciona bien, aún estando lejos de la solución.

Un estudio numérico detallado del algoritmo extragradiante nos permitió inferir que si encontramos un α perfecto para nuestros problemas, el algoritmo sería muy prometedor.

Todo lo anterior nos permite recomendar el método del algoritmo extragradiante cuando queremos encontrar una solución y estamos lejos de la solución del problema (o se desconoce) hay más probabilidades de que encontremos una solución usando este método.

Además no requiere el cálculo de las derivadas. Por otro lado, si se requiere velocidad en la obtención de la solución necesitamos utilizar un método tipo Newton generalizado o cuasi Newton Generalizado pero que tenga incorporada una estrategia de globalización como la búsqueda lineal o región de confianza.

Agradecimientos

Expresamos nuestro agradecimiento a la Universidad del Cauca por brindar tiempo para este trabajo a través del proyecto de investigación VRI ID 5579 y a los árbitros anónimos por las sugerencias constructivas lo cual nos permitió mejorar la presentación de este artículo.

Contribución de los autores

FA: Construcción y desarrollo de la propuesta de investigación, análisis de resultados, organización de la información, análisis de resultados, revisión de forma y contenido del documento, discusión y conclusiones. DZ: Programación, diseño de experimentos, análisis de resultados, discusión y conclusiones;

Conflicto de intereses

Los autores declaran no tener conflicto de intereses con respecto al contenido de este artículo.

Referencias

- Abaffy, J., Broyden, C., Spedicato, E.** (1984). A class of direct methods for linear systems. *Numerische Mathematik*, 45(3), 361-376. doi: <https://doi.org/10.1007/BF01391414>
- Anitescu, M., Cremer, J., Potra, F.** (1997). On the existence of solutions to complementarity formulations of contact problems with friction. *SIAM Publications*, (Complementarity and Variational Problems), 12-21.
- Arenas, F., Pérez, R., Vivas, H.** (2016). Un modelo de redes neuronales para complementariedad no lineal. *Revista Integración*, 2(1), 180-181. doi: <https://doi.org/10.18273/revint.v34n2-2016005>
- Broyden, C., Dennis, J., Moré, J.** (1972). *On the local and superlinear convergence of quasi-Newton methods*. Department of Computer Science, Cornell University. doi: <https://doi.org/10.1093/imamat/12.3.223>
- Chen, A., Oh, J., Park, D., Recker, W.** (2010). Solving the bicriteria traffic equilibrium problem with variable demand and nonlinear path costs. *Applied Mathematics and Computation*, 217(7), 3020-3031. doi: <https://doi.org/10.1016/j.amc.2010.08.035>
- Clarke, F.** (1975). Generalized gradients and applications. *Transactions of the American Mathematical Society*, 205, 247-262.
- Facchinei, F., Pang, J.-S.** (2003a). Finite-dimensional variational inequalities and complementarity problems. En *Springer Series in Operations Research and Financial Engineering* (Vol. 1). Springer-Verlag, New York. doi: <https://doi.org/10.1007/b97543>

- Facchinei, F., Pang, J.-S.** (2003b). Finite-dimensional variational inequalities and complementarity problems. En *Springer Series in Operations Research and Financial Engineering* (Vol. 2). Springer-Verlag, New York. doi: <https://doi.org/10.1007/b97543>
- Ferris, M., Pang, J.** (1997). Engineering and economic applications of complementarity problems. *SIAM Review*, 39(4), 669-713. doi: <https://doi.org/10.1137/S0036144595285963>
- Fischer, A., Kanzow, C.** (1996). On finite termination of an iterative method for linear complementarity problems. *Mathematical Programming*, 74(3), 279-292. doi: <https://doi.org/10.1007/BF02592200>
- Goldstein, A.** (1964). Convex programming in hilbert space. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 70(5), 709-710. doi: <https://doi.org/10.1090/S0002-9904-1964-11178-2>
- Korpelevich, G.** (1976). The extragradient method for finding saddle points and other problems. *Ekonomika i matematicheskie metody*, 12(4), 747-756.
- Kostreva, M.** (1984). Elasto-hidrodinamic lubrication: A non-linear complementarity problem. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 4(4), 377-397. doi: <https://doi.org/10.1002/flid.1650040407>
- Levitin, E., Polyak, B.** (1966). Constrained minimization methods. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 6(5), 1-50. doi: [https://doi.org/10.1016/0041-5553\(66\)90114-5](https://doi.org/10.1016/0041-5553(66)90114-5)
- Lopes, V., Martínez, J., Pérez, R.** (1999). On the local convergence of quasi-Newton methods for nonlinear complementary problems. *Applied Numerical Mathematics*, 30(1), 3-22. doi: [https://doi.org/10.1016/S0168-9274\(98\)00080-4](https://doi.org/10.1016/S0168-9274(98)00080-4)
- Pang, J.-S., Qi, L.** (1993). Nonsmooth equations: Motivation and algorithms. *SIAM Journal on Optimization*, 3(3), 443-465.
- Wang, F., Deng, H., Gao, Y., Lei, J.** (Eds.). (2010). *Artificial intelligence and computational intelligence - international conference, AICI 2010, sanya, china, october 23-24, 2010, proceedings, part II* (Vol. 6320). Springer. doi: <https://doi.org/10.1007/978-3-642-16527-6>
- Xiu, N., Zhang, J.** (2003). Some recent advances in projection-type methods for variational inequalities. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 152(1), 559-585. (Proceedings of the International Conference on Recent Advances in Computational Mathematics) doi: [https://doi.org/10.1016/S0377-0427\(02\)00730-6](https://doi.org/10.1016/S0377-0427(02)00730-6)
- Yong, L.** (2010). Nonlinear complementarity problem and solution methods. En *Proceedings of the 2010 international conference on artificial intelligence and computational intelligence: Part i* (p. 461-469). Springer-Verlag. doi: https://doi.org/10.1007/978-3-642-16530-6_55