Revista de la Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales.
47(182):51-71, enero-marzo de 2023. doi: https://doi.org/10.18257/raccefyn.1782

Ciencias Físicas

Artículo original

Cohomologa de Cĕch y Cuantización Topológica de Parámetros Físicos

Cĕch Cohomology and Topological Quantization of Physical Parameters

Guillermo A. González

Escuela de Física, Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, Colombia

Artículo de posesión para la admisión de Guillermo A. González como miembro de Número de la Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales

Resumen

En este trabajo se revisa el procedimiento de cuantización topológica basado en la cohomología de Cĕch. Se muestra cómo el método de cuantización se fundamenta en la libertad de escogencia del Lagrangiano apropiado para una teoría de campos, a partir de una familia de Lagrangianos que difieren entre sí por un término igual a una derivada total, de tal manera que la teoría de cohomología de Cĕch proporciona el lenguaje matemático correcto con el cual catalogar la información necesaria para obtener condiciones de cuantización de parámetros físicos. Posteriormente, se aplica este método a la cuantización topológica del monopolo magnético y de la constante GN de la gravitación universal de Newton.

Palabras clave: Topología Algebraica; Teorías de Campos; Teoría Cuántica.

Abstract

In this work, the topological quantization procedure based on the cohomology of Cĕch is reviewed. It is shown how the quantization method is based on the freedom of choice of the appropriate Lagrangian for a field theory, from a family of Lagrangians that differ from each other by a term equal to a total derivative, in such a way that that the cohomology theory of Cĕch provides the correct mathematical language with which to catalog the information needed to obtain quantization conditions for physical parameters. Subsequently, this method is applied to the topological quantization of the magnetic monopole and the constant GN of Newton universal gravitation.

Keywords: Algebraic Topology; Field Theories; Quantum Theory.

Citación: González GA. Cohomologa de Cĕch y Cuantización Topológica de Parámetros Físicos. Revista de la Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. 47(182):51-71, enero-marzo de 2023. doi: https://doi.org/10.18257/raccefyn.1782

Editor: Gabriel Téllez Acosta

Correspondencia:
Guillermo Alfonso González Villegas; guillego@uis.edu.co

Recibido: 2 de octubre de 2022
Aceptado: 11 de enero de 2023
Publicado en línea: 26 de enero de 2023

Introducción

Uno de los problemas más fundamentales e importantes de la física teórica es el de la determinación de condiciones de cuantización para ciertos parámetros tales como masas, cargas y constantes de acoplamiento. Este problema se remonta a los origenes de la teoría cuántica, a comienzos del siglo pasado, cuando Planck, Bohr, Wilson y Sommerfeld formularon sus condiciones de cuantización para sistemas períodicos. En el transcurso del desarrollo de la física moderna se han utilizado diferentes clases de formalismos para llegar a la determinación de tales condiciones, incluyendo argumentos basados en teoría de grupos y otras ramas de las matemáticas. En partícular, el desarrollo de la teoría cuántica de campos ha llevado a la aplicación, cada vez más extendida, de técnicas y conceptos de geometría y topología a la solución de esta clase de problemas.

Revista de la Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales.
47(182):51-71, enero-marzo de 2023. doi: https://doi.org/10.18257/raccefyn.1782

Una de las aplicaciones más interesantes de la topología a la resolución de problemas físicos se encuentra en la cuantización de constantes de acoplamiento, cuyo primer ejemplo fue la condición de Dirac para la cuantización de la carga magnética (**Dirac**, 1931). En años recientes se han realizado numerosas investigaciones tendientes a dilucidar la relación entre la geometría, la topología y los problemas de cuantización. En partícular, se ha reconocido que los argumentos homotópicos son muy útiles en la comprensión de dichos problemas (**Deser *et al.,*** 1982b; **Jackiw**, 1985, 2004; **Deguchi & Kitsukawa**, 2006; **Nettel *et al.,*** 2009). Ahora bien, es igualmente posible emplear argumentos co-homológicos para obtener las mismas condiciones de cuantización. Es más, se puede argüir que la estructura correcta para analizar estos problemas es la teoría de cohomología de Cĕch (**Alvarez**, 1985a, 1985b; **Freed**, 2000; **Matsuyama**, 2008; **Rahimizadeh *et al.,*** 2012; **Kouneiher**, 2018). Además, este método es más general, pues existen casos en los cuales no es posible aplicar argumentos homotópicos mientras que los argumentos cohomológicos si son aplicables, obteniendose de una manera relativamente fácil condiciones topológicas de cuantización (**Grady & Sati**, 2021).

En este trabajo se revisa el procedimiento de cuantización topológica basado en la cohomología de Cĕch, de acuerdo con los trabajos de O. Alvarez (**Alvarez**, 1985a, 1985b; **González**, 2000; **Matsuyama**, 2008; **Aguilar**, 2018). Se muestra cómo el método de cuantización se fundamenta en la libertad de escogencia del Lagrangiano apropiado para una teoría de campos, a partir de una familia de Lagrangianos que difieren entre sí por un término igual a una derivada total. Posteriormente, se aplica este método a la cuantización topológica del monopolo magnético y de la constante G_N de la gravitación universal de Newton. Este trabajo se encuentra organizado de la siguiente manera. Inicialmente se presentan las ideas fundamentales del método de cuantización y su relación con la teoría de cohomología de Cĕch. A continuación, se aplica dicho procedimiento para obtener la conocida condición de Dirac para la cuantización de la carga magnética (**Dirac**, 1931), considerando la interacción de una partícula cargada con el campo magnético de un monopolo. Luego se considera una posibilidad más general para la cuantización de la carga magnética, aplicando el método de cuantización a una teoría de campos en 4 dimensiones. Posteriormente se plantea la cuantización topológica de la constante de Newton G_N considerando un modelo sigma supersimétrico acoplado a gravedad. Por último, se concluye este trabajo analizando los aspectos más importantes de los ejemplos tratados.

Cuantización Topológica y Cohomología de Cĕch

Características Topológicas de la Formulación Lagrangiana

Consideremos una teoría de campos en la cual el espacio-tiempo es una variedad M, sin frontera espacial, de dimensión d. Posibles ejemplos son $\mathbf{R}\times S^{d-1}$, S^d, $\mathbf{R}\times T^{d-1}$, etc. Los campos clásicos se interpretan como aplicaciones $\phi : M \to \Sigma$, donde Σ es una variedad de dimensión n, la cual asumiremos compacta y sin frontera. Desde el punto de vista físico, el objeto fundamental en una teoría dinámica es el Lagrangiano, el cual es una función de los campos y sus derivadas: $L(\phi,\partial_a\phi)$. Sin embargo, es de vital importancia recordar el hecho de que el Lagrangiano de una teoría no es único: una familia de Lagrangianos que difieren entre sí por una derivada total dan lugar a las mismas ecuaciones de campo y, por lo tanto, describen la misma realidad física (**Landau & Lifshitz**, 1976; **Barut**, 1980).

Ahora bien, consideraremos teorías en las cuales el Lagrangiano puede escribirse como la suma de dos términos:

$$L = L_0 + L_T \ . \tag{1}$$

En esta expresión el término L_0 está pérfectamente definido en todo punto de la variedad Σ y puede consistir de términos de energía cinética más interacciones, cuyo comportamiento bajo transformaciones de coordenadas en el espacio-tiempo M es el de una densidad tensorial o tensor relativo; esto es, la transformación de L_0 incluye el determinante del Jacobiano de las transformaciones de coordenadas (**Thomas**, 1965; **Weinberg**, 1972; **Carroll**, 2004). El segundo término en (1), al cual denominaremos Lagrangiano Topológico, presenta algunos rasgos característicos que conducen a las condiciones de cuantización. En primer lugar, L_T se comporta como una forma diferencial bajo transformaciones de coordenadas en el espacio-tiempo M y, por lo tanto, su transformación no incluye al determinante del Jacobiano sino solo al Jacobiano mismo. Es más, L_T debe interpretarse como el pull-back a M de una forma diferencial T sobre Σ (**Choquet-Bruhat, *et al.,*** 1982; **Curtis & Miller**, 1985).

Sin embargo, las propiedades más interesantes de L_T surgen cuando se observa que T no está definida globalmente sobre la variedad Σ y se explota la no-unicidad del Lagrangiano considerando una familia de formas diferenciales $\{T_A\}$, cada una definida sobre un conjunto abierto U_A perteneciente a una cubierta $\mathscr{U} = \{U_A\}$ para la variedad Σ. Con el fin de mantener invariables las ecuaciones de campo, las formas diferenciales locales T_A deben coincidir en las intersecciones, excepto por una derivada total. Esto significa que sobre cada intersección no-vacia $U_{AB} = U_A \cap U_B$ debe definirse una función de transición J_{AB} de tal manera que

$$T_A - T_B = dJ_{AB} \tag{2}$$

en dicha intersección. En el lenguaje de la teoría de cohomología de Cĕch (**Bott y Tu**, 1982; **Singer & Thorpe**, 1976; **González**, 2000; **Matsuyama**, 2008) la familia $\{T_A\}$ constituye una 0-cocadena con valores en d-formas, $\{T_A\} \in C^0(\mathscr{U}, \Omega^d)$, donde d es la dimensión del espacio-tiempo M. La colección de funciones de transición $\{J_{AB}\}$ constituye una 1-cocadena con valores en $(d-1)$-formas, $\{J_{AB}\} \in C^1(\mathscr{U}, \Omega^{d-1})$. Así mismo, la condición de invariancia de las ecuaciones de campo (2) se expresa en términos del operador cofrontera δ de la cohomología de Cĕch como

$$\delta\{T_A\} = \{T_A - T_B\} = \{dJ_{AB}\}\ . \tag{3}$$

Sin embargo, la definición de estos objetos depende de la selección de una buena cubierta $\mathscr{U}$ sobre Σ, en la cual cada conjunto abierto U_A y cada intersección finita no-vacia de abiertos $U_{AB...}$ sean difeomorfos a una bola abierta en $\mathbf{R}^n$.

Construcción de la Acción

Integrando el Lagrangiano L sobre una región R del espacio-tiempo d-dimensional M se obtiene la correspondiente integral de acción de la teoría clásica,

$$I = \int_R L = \int_R L_0 + \int_R L_T = I_0 + I_T\ , \tag{4}$$

la cual se expresa también como la suma de dos términos. Ahora bien, la contribución del término topológico I_T podría interpretarse como la integral de la d-forma T sobre la imagen $\phi(R)$ de la región R en la variedad Σ

$$I_T = \int_R L_T = \int_{\phi(R)} T\ . \tag{5}$$

Revista de la Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales.
47(182):51-71, enero-marzo de 2023. doi: https://doi.org/10.18257/raccefyn.1782

	0			
Ω^{d+1} G	$\{dT_A\}$	0		
Ω^{d}	$\{T_A\}$	$\delta\{T_A\}$	0	
Ω^{d-1}		$\{J_{AB}\}$	$\delta\{J_{AB}\}$	0

Ω^{1}				
Ω^{0}				
$d\uparrow$				
$\delta\rightarrow$	C^0	C^1	C^2	

	0		
	$\delta\{K_{AB..}\}$	0	
	$\{C_{ABC..}\}$	$\delta\{C_{ABC..}\}$	
		$\{C\}$	
	C^d	C^{d+1}	

Figura 1. Caja del Tic-Tac-Toe

Sin embargo, esto no es posible a causa de la no-unicidad de la d-forma diferencial T. El problema en la integración del término topológico T surge cuando la región de integración $\phi(R)$ atraviesa una intersección de abiertos de la cubierta $\mathscr{U}$ y, por lo tanto, la acción debe definirse de tal modo que tenga en cuenta las diferentes formas diferenciales T_A sobre cada abieto U_A de la intersección; sin embargo, esto puede llevar a que el término I_T dependa de la seleción de algún subconjunto de la intersección. No obstante es posible obviar esta dificultad generalizando un procedimiento desarrollado por Wu y Yang para el caso de un positrón en presencia del campo magnético de un monopolo (**Wu & Yang**, 1976; **Alvarez**, 1985a, 1985b).

Es posible generalizar el procedimiento de Wu y Yang al caso d-dimensional introduciendo en la acción términos apropiados que permitan definirla sin ambigüedades sobre toda la intersección, excepto por una constante adicional. Los términos necesarios para modificar la acción pueden obtenerse empleando la caja del Tic-Tac-Toe de la cohomología de Cĕch: se ubican inicialmente las cocadenas $\{T_A\}$ y $\{J_{AB}\}$ y se procede en zig-zag, a la derecha y hacia abajo, empleando los operadores d y δ, hasta obtener todos los términos que sean de la forma $C^p(\mathscr{U},\Omega^{d-p})$, en donde $0 \leq p \leq d$ y d es la dimensión del espacio-tiempo, como se muestra en la Figura 1. A partir de la caja del Tic-Tac-Toe se encuentra que existe una ambigüedad en la acción clásica cuando se consideran intersecciones de $(d+2)$ abiertos en $\mathscr{U}$. Dicha ambigüedad viene dada por un cociclo localmente constante $\{C\} \in C^{d+1}(\mathscr{U},\Omega^0)$, el cual define una clase de cohomología en $H_C^{d+1}(\Sigma,\mathbf{R})$. Desde el punto de vista clásico, la ambigüedad en la acción no presenta problemas, puesto que las ecuaciones de campo permanecen invariables. Sin embargo, dicha ambigüedad en la acción conduce a una inconsistencia en la teoría cuántica.

Consistencia Cuántica y Condiciones de Cuantización

Formulando la cuantización de la teoría en términos de integrales de camino de Feynman se encuentra que la ambigüedad en la acción clásica introduce un factor de fase ambiguo $\exp(iC_{ABC...})$ sobre cada intersección no vacia de $(d+2)$ abiertos de la cubierta. Así entonces, exigiendo que la teoría sea cuánticamente consistente se impone una condición sobre el cociclo $\{C_{ABC...}\}$: dicho cociclo debe ser un múltiplo entero de 2π para que la integral de camino de Feynman esté bien definida. Esto significa entonces que el grupo de cohomología $H_C^{d+1}(\Sigma,\mathbf{Z})$ debe contener a los enteros para así poder escoger apropiadamente a $\{C_{ABC...}\}$.

Ahora bien, procediendo hacia arriba y a la izquierda en la caja del Tic-Tac-Toe a partir de la 0-cocadena $\{T_A\}$, puede construirse una $(d+1)$-forma diferencial cerrada G definida globalmente sobre Σ, la cual define un elemento de $H_{DR}^{d+1}(\Sigma)$, como se indica en la Figura

1. Además, debido a que las teorías de cohomología de Cĕch y de De Rham son isomorfas, la información topológica contenida en el cociclo $\{C\}$ es equivalente a la contenida en la forma diferencial G. Más específicamente, el flujo de G a través de una sub-variedad sin frontera de dimensión $d+1$, es decir, la integral de G sobre un ciclo $(d+1)$-dimensional S^{d+1}, está dado por la suma de los $C_{ABC\ldots}$ que pertenecen a una cubierta de la variedad:

$$\int_{S^{d+1}} G = \sum_{ABC\ldots} C_{ABC\ldots} \, . \tag{6}$$

La condición de consistencia cuántica de la teoría impone la restricción adicional de que estos $C_{ABC\ldots}$ sean múltiplos enteros de 2π y, por lo tanto, concluimos que el flujo total de G es igual a un múltiplo entero de 2π. Así entonces, se obtiene una condición de cuantización para el flujo de G, lo que implica una condición de cuantización para la “carga” asociada con ese flujo.

La relación entre la teoría clásica y la teoría cuántica puede comprenderse mejor mediante el teorema del coeficiente universal (**Spanier**, 1966; **Patrascu**, 2014): $H_C^{d+1}(\Sigma,\mathbf{R})$, el grupo de cohomología de Cĕch real, se puede construir si se conoce $H_C^{d+1}(\Sigma,\mathbf{Z})$, el grupo de cohomología de Cĕch entero. Ahora bien, si este último es un grupo de torsión, entonces el primero se anula y no hay ambigüedad en la acción clásica. Más precisamente, una ambigüedad en el nivel $d+2$ de intersecciones es la cofrontera de alguna d-cocadena y puede así ser absorbida en la redefinición de los términos al nivel $d+1$ de intersecciones. En este caso, la teoría cuántica será igualmente trivial pues el flujo de G será igual a cero. Cuando el grupo de cohomología entero $H_C^{d+1}(\Sigma,\mathbf{Z})$ contenga a los enteros, el grupo de cohomología real $H_C^{d+1}(\Sigma,\mathbf{R})$ contendrá a los reales y, si hay una ambigüedad en la acción clásica, habrá automaticamente una condición de cuantización del flujo en la teoría cuántica. Puede verse entonces que la teoría de cohomología de Cĕch proporciona una estructura muy general y poderosa para describir la cuantización de constantes de acoplamiento físicas.

Cuantización Topológica de la Carga de un Monopolo Magnético

Dinámica de una Partícula Cargada y un Monopolo Magnético

Consideremos el movimiento de una partícula cargada en presencia del campo magnético de un monopolo. El espacio-tiempo relevante en esta teoría es de dimensión $d=1$, $M=\mathbf{R}$ (tiempo), y los campos clásicos son las coordenadas de la partícula sobre el espacio de configuración $x^a : M \to \Sigma$, con $\Sigma = S^2$. La densidad Lagrangiana correspondiente a este sistema está dada por

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}_0 + \mathscr{L}_T \ , \tag{7}$$

donde

$$\mathscr{L}_0 = \frac{m}{2}\frac{dx_a}{dt}\frac{dx^a}{dt} + \frac{1}{4e^2}F_{ab}F^{ab} \ , \tag{8}$$

$$\mathscr{L}_T = \frac{e}{c}A_a\frac{dx^a}{dt}. \tag{9}$$

El primer término corresponde a las energías cinéticas de la partícula y del campo electromagnético, mientras que el segundo término corresponde al acoplamiento del potencial vectorial A_a con la densidad de corriente de la partícula, $J^a = (e/c)(dx^a/dt)$.

La contribución del término L_T a la integral de acción viene dada por

$$I_T = \int_{t_1}^{t_2} L_T = \int_{t_1}^{t_2} \mathscr{L}_T dt = \int_{t_1}^{t_2} A_a J^a dt \tag{10}$$

la cual puede escribirse en el espacio de configuración S^2 como

$$I_T = \frac{e}{c}\int_\Gamma A_a dx^a = \frac{e}{c}\int_\Gamma A\ , \tag{11}$$

donde Γ es la trayectoria de la partícula en el espacio de configuración. Ahora bien, debido a que el potencial vectorial A_a describe el campo magnético de un monopolo puntual, la 1-forma diferencial $A = A_a dx^a$ no está definida globalmente sobre S^2, puesto que el potencial vectorial alrededor de un monopolo magnético no puede escogerse globalmente sin singularidades (**Wu & Yang**, 1976). Así entonces, debe escogerse una buena cubierta $\mathscr{U} = \{U_A\}$ para S^2 y definir sobre cada abierto U_A una 1-forma diferencial $A_A = A_{Aa} dx^a$, de tal manera que en la intersección de dos abiertos, $U_{AB} = U_A \cap U_B$, las correspondientes 1-formas satisfagan la condición

$$A_A - A_B = d\psi_{AB}\ , \tag{12}$$

donde los ψ_{AB} se denominan funciones de transición. Debido a la existencia de una 1-forma A_A para cada abierto U_A, la integral de acción (11) no estará bien definida, presentandose ambigüedades cuando la trayectoria Γ de la partícula atraviese varios abiertos de la cubierta para S^2. Esta ambigüedad no presenta problema en la teoría clásica, puesto que solo se introduce una constante adicional en la acción y, por lo tanto, las ecuaciones de movimiento permanecen inalteradas. Sin embargo, al considerar la cuantización de la teoría, esta ambigüedad produce una inconsistencia que debe ser eliminada con el fin de obtener una teoría cuántica bien definida.

Cohomología de Cĕch y Consistencia Cuántica de la Teoría

Desde el punto de vista de la cohomología de Cĕch (**Alvarez**, 1985a, 1985b; **González**, 2000; **Matsuyama**, 2008), la familia de potenciales electromagnéticos $\{A_A\}$ define una 0-cocadena con valores en 1-formas, mientras que las funciones de transición $\{\psi_{AB}\}$ definen una 1-cocadena con valores en 0-formas, las cuales están relacionadas mediante la transformación de calibración (12), que en términos del operador cofrontera δ toma la forma

$$\delta\{A_A\} = \{A_A - A_B\} = \{d\psi_{AB}\}\ . \tag{13}$$

De acuerdo con esta relación se puede construir la correspondiente caja del Tic-Tac-Toe utilizando los operadores d y δ en zig-zag, obteniendose el resultado de la Figura 2.

Si se definen F_A y C_{ABC} como

$$F_A = dA_A\ , \tag{14}$$

$$\{C_{ABC}\} = \delta\{\psi_{AB}\} = \{\psi_{AB} + \psi_{BC} + \psi_{CA}\}\ , \tag{15}$$

Ω^3	0				
Ω^2	$\{dA_A\}$	0			
Ω^1	$\{A_A\}$	$\delta\{A_A\}$	0		
Ω^0		$\{\psi_{AB}\}$	$\delta\{\psi_{AB}\}$	0	
$d\uparrow$					
$\delta\rightarrow$	C^0	C^1	C^2	C^3	

Figura 2. Caja del Tic-Tac-Toe

se puede ver que los F_A son formas diferenciales cerradas y que $\{F_A\}$ es un 0-cociclo. Por esto último, $\{F_A\}$ puede extenderse globalmente para definir una 2-forma diferencial cerrada sobre S^2, la intensidad de campo electromagnético $F = F_{ab}dx^a \wedge dx^b$. Igualmente se observa en la caja del Tic-Tac-Toe que $\{C_{ABC}\}$ define un 2-cociclo con valores en 0-formas cerradas y por lo tanto, puesto que las 0-formas localmente cerradas corresponden a constantes reales, $\{C_{ABC}\}$ define un 2-cociclo $C \in C^2(\mathscr{U}, \mathbf{R})$. Esta información se muestra en la caja del Tic-Tac-Toe ampliada de la Figura 3.

Ω^3	0	0				
Ω^2	F	$\{F_A\}$	0			
Ω^1		$\{A_A\}$	$\{d\psi_{AB}\}$	0		
Ω^0			$\{\psi_{AB}\}$	$\{C_{ABC}\}$	0	
$d\uparrow$				C	0	
$\delta\rightarrow$		C^0	C^1	C^2	C^3	

Figura 3. Caja del Tic-Tac-Toe ampliada

La principal conclusión que se extrae de la caja del Tic-Tac-Toe es la siguiente: a partir de una colección de potenciales electromagnéticos $\{A_A\}$ y funciones de transición $\{\psi_{AB}\}$, la ley de transformación de calibración $\delta\{A_A\} = \{d\psi_{AB}\}$ permite construir una cierta 2-forma cerrada global F y un 2-cociclo localmente constante C, de modo que F es un representante del segundo grupo de cohomología de De Rham de S^2, $H^2_{DR}(S^2)$, y C es un representante del segundo grupo de cohomología de Cěch de dicha variedad, $H^2_C(S^2, \mathbf{R})$. Ahora bien, pueden destacarse los siguientes aspectos:

1. Debido al isomorfismo entre las clases de cohomología de Cěch y de De Rham, el flujo magnético total a través de una superficie bidimensional cerrada, esto es, la integral de F sobre S^2, está determinada por condiciones sobre las intersecciones triples de S^2.

2. La teoría cuántica impone una condición adicional sobre el cociclo C: para que la integral de camino de Feynman,

$$\int e^{I/\hbar} dx^a(t) \;, \tag{16}$$

esté bien definida, los C_{ABC} no pueden ser números reales arbitrarios, sino que deben ser multiplos enteros de $(2\pi\hbar c/e)$.

Lo anterior impone severas restricciones sobre las clases de cohomología: puesto que los enteros $\mathbf{Z}$ son un subconjunto de los reales $\mathbf{R}$, pueden definirse objetos $\{n_{ABC}\}$ como cocacadenas con valores enteros en lugar de cocadenas con valores reales. Claramente, el conjunto de p-cocadenas con valores enteros, $C^p(\mathscr{U}, \mathbf{Z})$, es un subconjunto del conjunto de

Revista de la Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales.
47(182):51-71, enero-marzo de 2023. doi: https://doi.org/10.18257/raccefyn.1782

p-cocadenas con valores reales, $C^p(\mathscr{U},\mathbf{R})$. Sin embargo, puesto que el lema de Poincare para el operador δ no se aplica a cocadenas con valores reales, tampoco se aplicará a cocadenas con valores enteros y, por lo tanto, las clases de cohomología de $C^p(\mathscr{U},\mathbf{Z})$ serán no-triviales. Estas clases de cohomología se denominan clases de cohomología de Cĕch con coeficientes enteros, y se denotan como $H^p_C(S^2,\mathbf{Z})$.

La teoría cuántica requiere que el cociclo $\{C_{ABC}\}$ tome valores enteros, y la existencia de tal cociclo está determinada por el hecho de que la variedad S^2 admita cociclos enteros en su segundo grupo de cohomología de Cĕch. Esto es, que $\mathbf{Z} \subset H^2_C(S^2,\mathbf{Z})$, lo cual está determinado por la topología de la variedad. Así entonces, el flujo magnético estará cuantizado si la variedad S^2 admite un segundo grupo de cohomología con coeficientes enteros que contenga a los enteros. Ahora bien, dado que el segundo grupo de cohomología de la esfera es isomorfo a **Z** (**Singer & Thorpe**, 1976; **Bott & Tu**, 1982), entonces es posible escribir el cociclo $\{C_{ABC}\}$ como

$$\{C_{ABC}\} = (2\pi\hbar c/e)\{n_{ABC}\} \tag{17}$$

y el flujo total de F a través de S^2 estará cuantizado en términos de $(2\pi\hbar c/e)$.

Condición de Cuantización de Dirac

Con el fin de calcular el flujo total de F a través de S^2, seleccionemos una cubierta constituida por los seis hemisferios (**Choquet-Bruhat *et al.,*** 1982)

$$U_1 = \{x \in S^2 : x^1 < 0\} \qquad , \qquad U_2 = \{x \in S^2 : x^1 > 0\} \ ,$$

$$U_3 = \{x \in S^2 : x^2 < 0\} \qquad , \qquad U_4 = \{x \in S^2 : x^2 > 0\} \ ,$$

$$U_5 = \{x \in S^2 : x^3 < 0\} \qquad , \qquad U_6 = \{x \in S^2 : x^3 > 0\} \ ,$$

de modo que cada triple intersección no-vacia es difeomorfa a un disco abierto en $\mathbf{R}^2$. Así entonces, el flujo total de F a través de S^2 vendrá dado por

$$\int_{S^2} F = \sum_{A=1}^{6} \int_{U_A} F \ . \tag{18}$$

Sin embargo, la expresión anterior no es correcta, pues estamos contando varias veces las contribuciones de las intersecciones. Para evitar este problema redefinimos los abiertos U_A y sub-dividimos la variedad en regiones V_A, como muestra la Figura 4 (arriba), y así, puesto que sobre cada V_A la 1-forma diferencial A_A está bien definida, podemos usar el teorema de Stokes para obtener

$$\int_{S^2} F = \sum_{A=1}^{6} \int_{V_A} F = \sum_{A=1}^{6} \int_{\partial V_A} A_A, \tag{19}$$

donde ∂V_A es la frontera de la región V_A, la curva que une los vertices de V_A. Así, al calcular las integrales sobre las fronteras de las seis regiones V_A, después de agrupar términos, se obtiene

$$\int_{S^2} F = \sum \int_{E_{AB}} (A_A - A_B) = \sum \int_{P_i}^{P_j} (A_A - A_B), \tag{20}$$

donde la suma se extiende a las doce aristas o bordes E_{AB} de la sub-división, y los límites de la integral (P_i, P_j) son los ocho vertices correspondientes: A, B, C, D, E, F, G y H, como se muestra en la Figura 4 para el hemisferio frontal (centro) y el hemisferio posterior (abajo).

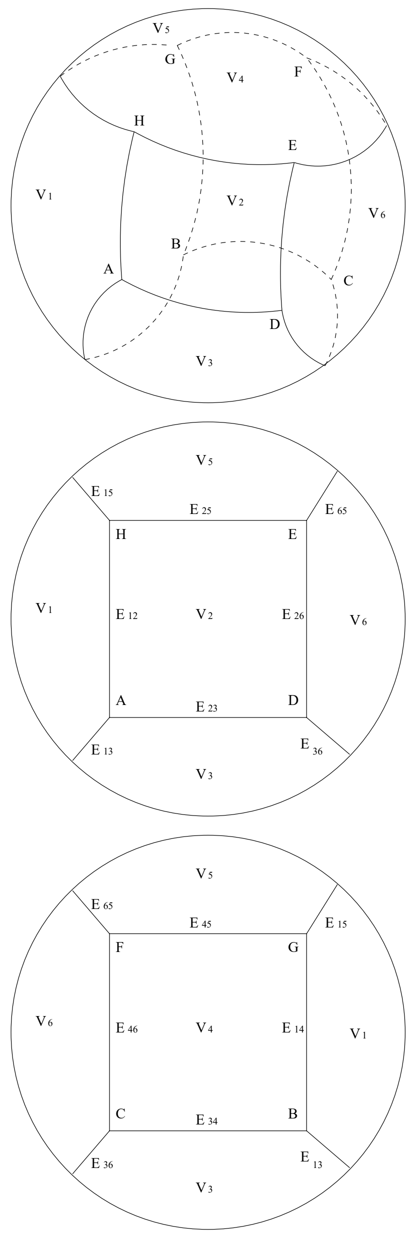

Figura 4. Subdivisión de S^2 mediante las regiones V_A (arriba), y visión esquemática de la subdivisión de S^2: hemisferio frontal (centro) y hemisferio posterior (abajo).

Utilizando las transformaciones de calibración (13) y las definiciones (14) y (15) para evaluar las integrales en la expresión anterior, se obtiene que

Revista de la Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales.
47(182):51-71, enero-marzo de 2023. doi: https://doi.org/10.18257/raccefyn.1782

$$\int_{S^2} F = \sum \int_{P_i}^{P_j} d\psi_{AB} = \sum [\psi_{AB}(P_i) - \psi_{AB}(P_j)], \tag{21}$$

lo cual, después de reagrupar los términos de cada vertice, toma la forma

$$\int_{S^2} F = \sum [\psi_{AB}(P_i) + \psi_{BC}(P_i) + \psi_{CA}(P_i)] \tag{22}$$

que, de acuerdo con (13), se expresa como

$$\int_{S^2} F = \sum_{U_{ABC}} C_{ABC}, \tag{23}$$

donde la sumatoria se extiende a los ocho intersecciones triples no-vacias $U_{ABC} = U_A \cap U_B \cap U_C$. Así entonces, de acuerdo con la prescripción (17), tenemos que

$$\int_{S^2} F = (2\pi\hbar c/e) \sum_{U_{ABC}} n_{ABC} \tag{24}$$

y, por lo tanto, que la carga magnética g debe satisfacer la relación

$$eg = (n\hbar c)/2, \tag{25}$$

donde $n = \sum n_{ABC}$, la cual es la conocida condición de Dirac para la cuantización de la carga magnética (**Dirac**, 1931).

Monopolos Magnéticos en Teoría Cuántica de Campos

Identificación del Lagrangiano topológico

Consideremos, como primera posibilidad, una partícula bosónica cargada en interacción con el campo electromagnético de un monopolo. Suponiendo que el espacio-tiempo es una variedad compacta M de dimensión $d = 4$, el campo de Klein-Gordon que describe dicha partícula es una aplicación $\phi : M \to \Sigma$, donde Σ es el espacio total de un haz líneal hermítico sobre M. Esto es, Σ es una variedad compacta de dimensión $n = 6$ localmente isomorfa al producto $M \times \mathbf{C}$, y el potencial electromagnético está dado por la 1-forma de conexión del haz principal asociado (**Daniel & Viallet**, 1980; **Choquet-Bruhat *et al.,*** 1982; **Curtis & Miller**, 1985; **Wells**, 2008).

La densidad lagrangiana clásica para este sistema está dada por (**Roman**, 1969; **Barut**, 1980):

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}\partial_a\phi\ \partial^a\phi^* - \frac{m^2}{2}\phi\phi^* - \frac{1}{4}F_{ab}F^{ab} + \frac{e^2}{2}A_aA^a\phi\phi^* - A_aJ^a, \tag{26}$$

donde J^a es la densidad de corriente de la partícula, la cual viene dada por

$$J^a = \frac{ie}{2}[(\partial^a\phi)\phi^* - \phi(\partial^a\phi^*)] \tag{27}$$

y satisface la ecuación de continuidad $\partial_a J^a = 0$. En el Lagrangiano (26), los cuatro primeros términos constituyen el término bien definido $\mathscr{L}_0$, el cual contiene términos cinéticos para la partícula y el campo, un término de masa para la partícula y un término de interacción. El término topológico $\mathscr{L}_T$ del Lagrangiano (26) está constituido por el acoplamiento entre el potencial electromagnético y la densidad de corriente (**Alvarez**, 1985a, 1985b; **González**, 2000).

Consideremos ahora el caso en el cual la partícula en interacción con el campo magnético del monopolo es un fermión. Supondremos de nuevo que el espacio-tiempo es una variedad compacta M de dimensión $d = 4$. El campo de Dirac correspondiente a la partícula es una aplicación $\psi : M \to \Sigma$, donde Σ es el espacio total de un haz espinorial sobre M. Esto es, Σ es una variedad compacta de dimensióón $n = 8$ localmente isomorfa al producto $M \times \mathbf{C}^2$. Al igual que en el caso bosónico, el potencial electromagnético está dado por la 1-forma de conexión de un haz principal sobre M con grupo estructural $U(1)$ (**Daniel & Viallet**, 1980; **Choquet-Bruhat *et al.,*** 1982; **Curtis & Miller**, 1985; **Wells**, 2008).

La densidad lagrangiana clásica que describe la dinámica de este sistema está dada por (**Roman**, 1969; **Barut**, 1980)

$$\mathscr{L} = i\bar{\psi}\gamma_a\partial_a\psi + m\bar{\psi}\psi - \frac{1}{4}F_{ab}F^{ab} - A_aJ^a, \tag{28}$$

donde J^a es la densidad de corriente de la partícula, dada por

$$J^a = e\bar{\psi}\gamma^a\psi, \tag{29}$$

que, al igual que en el caso bosónico, satisface la ecuación de continuidad $\partial_a J^a = 0$. Las γ^a son las matrices de Dirac. Nuevamente, el Lagrangiano bien definido $\mathscr{L}_0$ está dado por los tres primeros términos de (28), los cuales son términos cinéticos para la partícula y el campo y un término de masa para la partícula. El Lagrangiano topológico $\mathscr{L}_T$ está constituido, al igual que en el caso anterior, por el acoplamiento A_aJ^a entre el potencial electromagnético y la densidad de corriente de la partícula.

Así entonces, en los dos casos considerados el término topológico del Lagrangiano, al igual que en el sistema tratado en la sección anterior, está dado por el acoplamiento entre el potencial electromagnético del campo del monopolo y la densidad de corriente de la partícula cargada. Sin embargo, debido a que el potencial electromagnético describe un monopolo, no es posible definir globalmente un potencial no-singular A_a sobre el espacio-tiempo M. Para tener en cuenta el hecho de que el potencial electromagnético no está definido globalmente, seleccionamos una buena cubierta, $\mathscr{U} = \{U_A\}$, sobre M y definimos sobre cada abierto U_A una 1-forma diferencial $A_A = A_{Aa}dx^a$, de modo que en cada intersección no vacía $U_A \cap U_B$ las 1-formas correspondientes están relacionadas mediante funciones de transición Λ_{AB}, a través de una transformación de calibración de la forma

$$A_A - A_B = d\Lambda_{AB}. \tag{30}$$

Definiendo la 3-forma diferencial densidad de corriente como

$$J = J^a\varepsilon_{abcd}dx^b \wedge dx^c \wedge dx^d, \tag{31}$$

el término topológico del Lagrangiano está dado por

$$L_A = A_A \wedge J = A_{Aa}J^a dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3, \tag{32}$$

Revista de la Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales.
47(182):51-71, enero-marzo de 2023. doi: https://doi.org/10.18257/raccefyn.1782

el cual es el pull-back a M de una 4-forma diferencial T_A sobre Σ, de modo que el cambio de L_A al pasar de un abierto U_A a un abierto U_B es

$$L_A - L_B = (A_A - A_B) \wedge J = (d\Lambda_{AB}) \wedge J. \tag{33}$$

Ahora bien, debido a la ecuación de continuidad $\partial_a J^a = 0$, la forma diferencial densidad de corriente es cerrada, esto es, $dJ = 0$. Así entonces, la ecuación (33) puede escribirse como

$$L_A - L_B = d(\Lambda_{AB} J), \tag{34}$$

lo cual es el pull-back a M de la ecuación sobre Σ

$$T_A - T_B = dJ_{AB}, \tag{35}$$

donde J_{AB} es una 3-forma diferencial sobre la variedad Σ.

Condiciones de cuantización

Expresando los resultados anteriores mediante el lenguaje de la cohomología de Cĕch (**Alvarez**, 1985a, 1985b; **González**, 2000; **Matsuyama**, 2008), se pueden definir una 0-cocadena con valores en 4-formas y una 1-cocadena con valores en 3-formas, $\{T_A\}$ y $\{J_{AB}\}$ respectivamente, las cuales están relacionadas mediante la tranformación de calibración

$$\delta\{T_A\} = \{T_A - T_B\} = \{dJ_{AB}\}, \tag{36}$$

a partir de los cuales puede construirse la caja del Tic-Tac-Toe correspondiente mediante los operadores d y δ, para encontrar los términos necesarios para definir apropiadamente la integral de acción, como muestra la Figura 5.

	0						
Ω^5 G	$\{dT_A\}$	0					
Ω^4	$\{T_A\}$	$\{dJ_{AB}\}$	0				
Ω^3		$\{J_{AB}\}$	$\delta\{J_{AB}\}$	0			
Ω^2			$\{K_{ABC}\}$	$\delta\{K_{ABC}\}$	0		
Ω^1				$\{L_{ABCD}\}$	$\delta\{L_{ABCD}\}$	0	
Ω^0					$\{M_{ABCDE}\}$	$\delta\{M_{ABCDE}\}$	0
$d \uparrow$						Δ	
$\delta \rightarrow$	C^0	C^1	C^2	C^3	C^4	C^5	

Figura 5. Caja del Tic-Tac-Toe.

Observando la caja del Tic-Tac-Toe se puede apreciar que existe un 5-cociclo con valores en 0-formas cerradas, $\{\Delta_{ABCDEF}\} = \delta\{M_{ABCDE}\}$, el cual define un 5-cociclo $\Delta \in C^5(\mathscr{U}, \mathbf{R})$, debido a que las 0-formas localmente cerradas están dadas por constantes reales. Esto significa entonces que debe existir una ambigüedad en la acción clásica cuando se considere lo que sucede en las intersecciones séxtuples de abiertos de la cubierta $\mathscr{U}$, $U_{ABCDEF} = U_A \cap U_B \cap U_C \cap U_D \cap U_E \cap U_F$. Ahora bien, dicha ambigüedad en la acción clásica producirá una inconsistencia cuántica en la teoría al considerar la correspondiente integral de camino de Feynman. Con el fin de evitar esta inconsistencia, debe seleccionarse el cociclo $\Delta \in C^5(\mathscr{U}, \mathbf{R})$ de tal manera que las constantes Δ_{ABCDEF} sean multiplos enteros de 2π, lo cual exige que el grupo de cohomologa $H^5_C(\Sigma, \mathbf{R})$ contenga a los enteros.

Se observa igualmente en la caja del Tic-Tac-Toe que existe un 0-cociclo con valores en 5-formas cerradas, $\{G_A\} = \{dT_A\}$, mediante el cual se define globalmente una 5-forma diferencial cerrada $G \in H^5_{DR}(\Sigma)$. De acuerdo con esto, debido a que $G \in H^5_{DR}(\Sigma) \approx H^5_C(\Sigma, \mathbf{R})$, el "flujo" total de G a través de una sub-variedad cerrada 5-dimensional $S^5 \subset \Sigma$ debe estar dado en términos de las constantes Δ_{ABCDEF}. Así entonces, si la estructura topológica de la variedad permite que el grupo de cohomología $H^5_C(\Sigma, \mathbf{R})$ contenga a los enteros, puede redefinirse el 5-cociclo $\{\Delta_{ABCDEF}\}$ como

$$\{\Delta_{ABCDEF}\} = 2\pi\{n_{ABCDEF}\}, \tag{37}$$

donde los n_{ABCDEF} son números enteros, de modo que la teoría sea cuánticamente consistente y, además, se obtendrá el resultado de que el "flujo" total de G estará cuantizado: el flujo de G será igual a un múltiplo entero de 2π.

Teniendo en cuenta que la 4-forma diferencial T_A es, esencialmente, el producto del potencial electromagntico A y la densidad de corriente J y, además, que $dJ = 0$, puede considerarse que la 5-forma diferencial cerrada $G = dT_A$ representa el producto de la intensidad de campo electromagntico $F = dA_A$ con la densidad de corriente J. De acuerdo con esto, el flujo total de G será igual a una expresión en términos de la carga magnética g del monopolo y la carga eléctrica e de la partícula considerada, tal como en el caso de la condición de cuantización de Dirac (**Dirac,** 1931). De acuerdo con lo anterior, la condición de cuantización para el flujo total de G implica automáticamente la existencia de una condición de cuantización para una expresión que incluye la carga magnética g y la carga eléctrica e, obteniéndose de esta manera una generalización del tratamiento de Dirac para la cuantización de la carga de un monopolo magnético.

Cuantización Topológica de la Constante de Newton en Teorías de Supergravedad

Modelo sigma no-lineal supersimétrico acoplado a gravedad

Un modelo sigma no-lineal es una teoría de interacción de campos escalares en la cual dichos campos se interpretan como coordenadas de alguna variedad riemanniana. Este modelo tiene una generalización supersimétrica y puede acoplarse a supergravedad (**Bagger & Witten**, 1982; **Witten & Bagger**, 1982). Cuando se realiza el acoplamiento entre campos escalares y supergravedad, realmente se obtiene automaticamente el modelo sigma no-lineal. Es decir, se encuentran interacciones no polinomiales complicadas las cuales tienen una interpretación natural en el lenguaje del modelo sigma. Sin embargo, existen ciertas sutilezas en el acoplamiento entre el modelo sigma no-lineal y supergravedad: cuando el modelo sigma no-lineal, con base en una variedad compacta Σ, se acopla a supergravedad, la constante de Newton deja de ser un parámetro libre y debe ser un múltiplo entero del autoacoplamiento escalar (**Witten & Bagger**, 1982).

El modelo sigma no-lineal supersimétrico en 4 dimensiones tiene una interpretación natural en el lenguaje de la geometría de Kähler (**Eguchi, *et al.,*** 1980; ***Bott & Tu,*** 1982; **Chern,** 1995; **Wells,** 2008). Los campos escalares complejos $\phi^i(x)$ pueden considerarse como las coordenadas de una variedad de Kähler Σ, $\phi^i : \mathrm{M} \to \Sigma$, donde el espacio-tiempo M es una variedad compacta de dimensión d = 4. Una variedad compleja de dimensión n es una variedad riemanniana de dimensión $2n$ cuyas coordenadas reales se pueden ver como n coordenadas complejas ϕ^i junto con sus n complejas conjugadas ϕ^{*i}. Una variedad hermítica es una variedad compleja cuyo elemento de línea toma la forma

Revista de la Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales.
47(182):51-71, enero-marzo de 2023. doi: https://doi.org/10.18257/raccefyn.1782

$$ds^2 = g_{ij^*} d\phi^i d\phi^{*j}, \tag{38}$$

donde g_{ij*} es una matriz hermítica, de modo que ds^2 es real. Sobre cualquier variedad hermítica puede definirse la 2-forma fundamental Ω como (**Eguchi *et al.,*** 1980; **Bagger & Witten**, 1982; **Chern**, 1995; **Wells**, 2008)

$$\Omega = \frac{i}{2} g_{ij^*} d\phi^i \wedge d\phi^{*j}. \tag{39}$$

Una variedad de Kähler es una variedad hermítica en la cual la 2-forma fundamental es cerrada, $d\Omega = 0$.

En términos de las coordenadas ϕ^i y ϕ^{*j} la condición $d\Omega = 0$ se expresa como

$$\frac{\partial g_{ij^*}}{\partial \phi^k} - \frac{\partial g_{kj^*}}{\partial \phi^i} = 0, \tag{40}$$

$$\frac{\partial g_{ij^*}}{\partial \phi^{*k}} - \frac{\partial g_{ik^*}}{\partial \phi^{*j}} = 0. \tag{41}$$

De acuerdo con esto, localmente la métrica de Kähler g_{ij^*} puede escribirse como la segunda derivada de un potencial de Kähler $K(\phi^i, \phi^{*j})$,

$$g_{ij^*} = \frac{\partial^2 K(\phi^i, \phi^{*j})}{\partial \phi^i \partial \phi^{*j}}. \tag{42}$$

Sin embargo, esta ecuación no determina completamente al potencial K, puesto que la métrica g_{ij^*} es invariante bajo cambios del potencial de Kähler de la forma (**Witten & Bagger**, 1982; **Bagger & Witten**, 1982)

$$K(\phi^i, \phi^{*j}) \to K(\phi^i, \phi^{*j}) + F(\phi^i) + F^*(\phi^{*j}), \tag{43}$$

donde $F(\phi^i)$ es una función analítica de las coordenadas. Aún mas, es esencial tener en cuenta que, en general, K solo está definido localmente en abiertos de Σ.

Para construir un modelo supersimétrico se introducen supercampos quirales $\Phi(x, \Theta)$, correspondientes a las coordenadas ϕ^i, en términos de los cuales, cuando se realiza el acoplamiento con supergravedad, la densidad lagrangiana toma la forma

$$\mathscr{L} = -3 \int \exp\left[-\frac{1}{3} K(\Phi, \Phi^*)\right] E d^2\Theta d^2\bar{\Theta}, \tag{44}$$

donde E es el superdeterminante del vielbein del superespacio (**Witten & Bagger**, 1982; **West**, 1990; **Wess & Bagger**, 1992). Expandiendo en componentes el supercampo Φ, puede encontrarse la expresión ordinaria en componentes de la densidad lagrangianan $\mathscr{L}$, después de realizar las integrales en las variables Θ del superespacio, obteniéndose la expresión (**Witten & Bagger**, 1982; **Bagger & Witten**, 1982)

$$
\begin{aligned}
\mathscr{L} \quad = \quad & -e\lambda^2\left[\frac{R}{2}+g_{ij^*}\partial_a\phi^i\partial^a\phi^{*j}\right]-\frac{1}{2}\varepsilon^{abcd}\bar{\psi}_a\gamma_5\gamma_b\mathscr{D}_c\psi_d-\bar{\chi}^i\hat{g}_{ij^*}\gamma^a\mathscr{D}_a\chi^j \\
& +e\bar{\chi}^i\hat{g}_{ij^*}\partial_a\hat{\phi}^{*j}\gamma^a\gamma^b\psi_b+\frac{e}{8}g_{ij^*}\bar{\chi}^i[1+\gamma_5]\gamma_d\chi^j[\varepsilon^{abcd}\bar{\psi}_a\gamma_b\psi_c-\bar{\psi}_c\gamma_5\gamma^d\psi^c] \\
& -\frac{e}{16}[g_{ij^*}g_{kl^*}-2R_{ij^*kl^*}]\bar{\chi}^i[1+\gamma_5]\gamma_a\chi^j\bar{\chi}^k[1+\gamma_5]\gamma^a\chi^i \qquad (45) \\
& +\frac{e}{2}\left[\frac{\partial g_{ij^*}}{\partial\phi^k}\partial_a\phi^k-\frac{\partial g_{ij^*}}{\partial\phi^{*k}}\partial_a\phi^{*k}\right]\bar{\chi}^i(1+\gamma_5)\gamma^a\chi^i \\
& -\frac{1}{8}\left[\frac{\partial K}{\partial\phi^k}\partial_a\phi^k-\frac{\partial K}{\partial\phi^{*k}}\partial_a\phi^{*k}\right]\left[\varepsilon^{abcd}\bar{\psi}_b\gamma_c\psi_d-2eg_{ij^*}\bar{\chi}^i(1+\gamma_5)\gamma^a\chi^j\right],
\end{aligned}
$$

donde ψ_a es el campo de Rarita-Schwinger, χ^i son los compañeros supersimétricos de los campos escalares ϕ^i, $R_{ij^*kl^*}$ es el tensor de curvatura sobre la variedad Σ, e es el determinante del vierbein del espacio-tiempo M, λ es una constante de acoplamiento, $\mathscr{D}_a$ son los operadores de derivada covariante y las γ_a son las matrices de Dirac.

Cohomología de Cěch del Modelo

La densidad lagrangiana (45) puede considerarse como constituida por dos términos: un término $\mathscr{L}_0$, que incluye los términos cinéticos en los campos ϕ^i, χ^i y ψ_a y términos de interacción, el cual está definido globalmente sobre la variedad Σ, y un término topológico $\mathscr{L}_T$ correspondiente al último renglon de (45). El término topológico $\mathscr{L}_T$ puede interpretarse como el producto de la 1-forma de conexión $\omega = \omega_a dx^a$, con

$$\omega_a = \frac{i}{4}\left[\frac{\partial K}{\partial\phi^i}\partial_a\phi^i-\frac{\partial K}{\partial\phi^{*i}}\partial_a\phi^{*i}\right], \qquad (46)$$

y la 3-forma densidad de corriente

$$J = J^a\varepsilon_{abcd}dx^b\wedge dx^c\wedge dx^d, \qquad (47)$$

donde

$$J^a = \frac{i}{2}\left[\varepsilon^{eafg}\bar{\psi}_e\gamma_f\psi_g-2eg_{ij^*}\bar{\chi}^i(1+\gamma_5)\gamma^a\chi^j\right], \qquad (48)$$

la cual satisface la ecuación de continuidad $\partial_a J^a = 0$, de modo que $dJ = 0$.

Debido a que el potencial de Kähler $K(\phi,\phi^*)$ no está definido globalmente, debe escogerse una buena cubierta $\mathscr{U} = \{U_A\}$ sobre Σ y definirse sobre cada abierto U_A un potencial de Kähler K_A, y sobre cada intersección U_{AB} una función analítica F_{AB}, de tal manera que

$$K_A - K_B = F_{AB} + F^*_{AB}, \qquad (49)$$

lo que significa que las 1-formas de conexión ω_A y ω_B están relacionadas a través de la transformación de calibración

Revista de la Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales.
47(182):51-71, enero-marzo de 2023. doi: https://doi.org/10.18257/raccefyn.1782

$$\omega_A - \omega_B = d(F_{AB} - F^*_{AB}) = d\Lambda_{AB}. \tag{50}$$

Así entonces, el término topológico del Lagrangiano puede escribirse como

$$L_A = \omega_A \wedge J = \omega_{Aa} J^a dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3, \tag{51}$$

el cual es el pull-back a M de una 4-forma diferencial T_A sobre Σ, de modo que el cambio de L_A al pasar de un abierto U_A a un abierto U_B es

$$L_A - L_B = d(\Lambda_{AB} J), \tag{52}$$

que es el pull-back a M de la ecuación sobre Σ

$$T_A - T_B = dJ_{AB}, \tag{53}$$

donde J_{AB} es una 3-forma diferencial definida sobre las intersecciones U_{AB} de la cubierta para la variedad Σ.

En términos de la teoría de cohomología de Cĕch (**Alvarez**, 1985a, 1985b; **González**, 2000; **Matsuyama**, 2008), los resultados anteriores permiten definir una 0-cocadena con valores en 4-formas, $\{T_A\}$, y una 1-cocadena con valores en 3-formas, $\{J_{AB}\}$, relacionadas mediante una transformación de calibración de la forma

$$\delta\{T_A\} = \{T_A - T_B\} = \{dJ_{AB}\}, \tag{54}$$

las cuales permiten construir la caja del Tic-Tac-Toe necesaria para encontrar los términos apropiados para definir la integral de acción de manera consistente, tal como muestra la Figura 6. Al obervar la caja del Tic-Tac-Toe de la Figura 6 se pueden extraer las siguientes conclusiones: existen un 5-cociclo localmente constante $\{\Delta_{ABCDEF}\}$ y una 5-forma cerrada G definida globalmente sobre Σ. Así mismo, la integral de G a través de una sub-variedad cerrada 5-dimensional $S^5 \in \Sigma$ está dada en términos de las constantes Δ_{ABCDEF}.

	0						
Ω^5 G	$\{dT_A\}$	0					
Ω^4	$\{T_A\}$	$\{dJ_{AB}\}$	0				
Ω^3		$\{J_{AB}\}$	$\delta\{J_{AB}\}$	0			
Ω^2			$\{K_{ABC}\}$	$\delta\{K_{ABC}\}$	0		
Ω^1				$\{L_{ABCD}\}$	$\delta\{L_{ABCD}\}$	0	
Ω^0					$\{M_{ABCDE}\}$	$\delta\{M_{ABCDE}\}$	0
$d\uparrow$						Δ	
$\delta\rightarrow$	C^0	C^1	C^2	C^3	C^4	C^5	

Figura 6. Caja del Tic-Tac-Toe.

El cociclo Δ conduce a una ambigüedad en la acción clásica cuando se consideran intersecciones séxtuples de la cubierta para Σ, lo cual conduciría a una inconsistencia en la correspondiente integral de camino de Feynman en la teoría cuántica. Para poder eliminar dicha inconsistencia las constantes Δ_{ABCDEF} deben ser múltiplos enteros de 2π, lo cual tiene como consecuencia que la integral de G a través de S^5 resulta ser igual a un múltiplo entero de 2π. Ahora bien, sobre una variedad de Kähler general no siempre es posible escoger las constantes Δ_{ABCDEF} como números enteros: esto solo puede hacerse si la variedad Σ es una variedad de Kähler del tipo restringido o variedad de Hodge. Esto es, una variedad de

Kähler sobre la cual es posible definir un haz lineal complejo cuya primera forma de Chern es proporcional a la forma de Kähler Ω de la variedad (**Eguchi *et al.,*** 1980; **Bott & Tu**, 1982; **Witten & Bagger**, 1982; **Chern**, 1995; **Wells**, 2008).

Condición de Cuantización para la Constante de Newton G_N.

Es importante ahora anotar que, en supergravedad, la derivada covariante de los campos χ^i está dada por

$$\mathscr{D}_a\chi^i = \partial_a\chi^i + \frac{1}{2}W_{abc}\sigma^{bc}\chi^i + \Gamma^i_{jk}\partial_a\phi^j\chi^k + i\omega_a\gamma_5\chi^i, \tag{55}$$

donde W_{abc} es la conexión de spin, la cual es función del vierbein e_{ab} y del gravitino ψ_a, y ω_a es la conexión (46). De acuerdo con esta forma de la derivada covariente, el Lagrangiano (45) es invariante bajo las transformaciones de Kähler (49) solo si estas transformaciones están acompañadas por rotaciones quirales de los campos fermionicos χ^i de la forma (**Witten & Bagger**, 1982)

$$\chi^i_A = \exp\left\{\frac{\Lambda_{AB}}{4}\right\}\chi^i_B. \tag{56}$$

De acuerdo con esta ecuación, los campos χ^i son secciones de un haz lineal complejo $\mathscr{E}$ sobre Σ cuyas funciones de transición están dadas por los elementos $\exp\{\Lambda_{AB}/4\}$ del grupo $U(1)$. Además, la derivada covariante (55) implica que la 1-forma de conexión del haz $\mathscr{E}$ está dada por la conexión ω y que la correspondiente 2-forma de curvatura está dada por la forma de Kähler, $\Omega = d\omega$.

Ahora bien, la primera forma de Chern de cualquier haz lineal es proporcional a la curvatura Ω (**Choquet-Bruhat *et al.***, 1982; **Chern**, 1995; **Wells**, 2008). Por lo tanto, la primera forma de Chern de nuestro haz lineal es realmente la forma de Kähler y así la variedad Σ es una variedad de Hodge. Puesto que Σ es una variedad de Hodge, es posible escoger las constantes Δ_{ABCDEF} como números enteros de modo que la integral de G através de S^5 sea un múltiplo entero de 2π. Sin embargo, la ley de transformación (56) para los campos χ^i impone la condición adicional de que las constantes Δ_{ABCDEF} sean números enteros pares con el fin de que el Lagrangiano esté definido sobre toda la variedad de Kähler Σ. Así entonces, llegamos a la conclusión de que, si Σ es una variedad de Hodge, la integral de G a través de S^5 es un múltiplo entero par de 2π.

Con el fin de ver como el resultado anterior conduce a la cuantización de la constante de Newton, consideremos la parte bosónica del Lagrangiano (45). Esto es,

$$\mathscr{L}_{BOS} = -e\lambda^2\left[\frac{R}{2} + g_{ij^*}\partial_a\phi^i\partial^a\phi^{*j}\right]. \tag{57}$$

Ahora bien, la condición de cuantización para la integral de G conduce, después de integrar por partes, a que la integral de la 2-forma de curvatura Ω sobre un ciclo 2-dimensional S^2 es un múltiplo entero par de alguna expresión proporcional a la corriente J^a evaluada en S^2 y, por lo tanto, que la métrica g_{ij^*} sobre Σ puede escribirse como

$$g_{ij^*} = n\tilde{g}_{ij^*}, \tag{58}$$

donde n es un entero par y $\tilde{g}_{ij^*}$ es la expresión para la métrica en un modelo sigma convencional no supersimétrico.

Revista de la Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales.
47(182):51-71, enero-marzo de 2023. doi: https://doi.org/10.18257/raccefyn.1782

Así entonces, la parte bosónica del Lagrangiano toma la forma

$$\mathscr{L}_{BOS} = -e\lambda^2 \left[\frac{R}{2} + n\tilde{g}_{ij^*}\partial_a\phi^i\partial^a\phi^{*j}\right], \tag{59}$$

mientras que la forma convencional del Lagrangiano del modelo sigma acoplado a gravedad está dada por (**Witten & Bagger**, 1982)

$$\mathscr{L}_{CON} = -e\left[\frac{R}{8\pi G_N} + f^2\tilde{g}_{ij^*}\partial_a\phi^i\partial^a\phi^{*j}\right], \tag{60}$$

donde G_N es la constante de Newton de la gravitación universal y f es la constante de auto-acoplamiento de los campos escalares. Comparando (59) y (60) puede verse que G_N y f están relacionados por

$$G_N f^2 = \frac{n}{4\pi}, \tag{61}$$

donde n es un entero par, lo que implica que la constante de Newton debe estar cuantizada en términos del auto-acoplamiento escalar. Como podemos ver, la condición de cuantización para la constante de Newton es exactamente de la misma naturaleza que la condición de Dirac para la cuantización de la carga magnética de un monopolo (**Dirac**, 1931).

Conclusiones

Se ha presentado en este trabajo un método muy general, basado en la teoría de cohomología de Cĕch, mediante el cual pueden obtenerse condiciones topológicas de cuantización. De acuerdo con los trabajos de O. Alvarez (**Alvarez,** 1985a, 1985b; **González,** 2000; **Matsuyama,** 2008), se mostró que este método surge de considerar la relación que existe entre la formulación Lagrangiana para una teoría de campos y la teoría de cohomología de Cĕch. Como una ilustración de este método se analizarón las condiciones de cuantización para la carga magnética y para la constante gravitacional de Newton.

Es importante destacar que los argumentos basados en teorías de cohomología son más generales, pueden aplicarse en mayor número de situaciones, que los argumentos basados en teorías de homotopía (**Grady & Sati,** 2021). En general, los argumentos homotópicos se basan en considerar el grupo de homotopía $\Pi_{d+1}(\Sigma)$ de la variedad Σ (**Witten,** 1983; **Jackiw,** 1985): si $\Pi_{d+1}(\Sigma)$ contiene a los enteros, entonces es posible construir un argumento de cuantización. Sin embargo, para hacer esto es necesario asumir ciertas propiedades para la variedad Σ. Consideremos, por ejemplo, el caso del monopolo magnético. Si se supone que el espacio de configuración Σ es el toro 2-dimensional T^2 en lugar de la esfera S^2, se tendría que $\Pi_1(T^2) = \mathbf{Z}\oplus\mathbf{Z}$,, mientras que $\Pi_2(T^2) = 0$. Así entonces, los argumentos homotópicos no podrían aplicarse en este caso y no se podría concluir nada acerca de la cuantización de la carga magnética. Por otro lado, $H_C^2(T^2, \mathbf{Z}) = \mathbf{Z}$ y así se puede entonces concluir que el flujo magnético debe estar cuantizado.

De acuerdo con lo anterior, se pueden destacar los siguientes hechos:

1. En una teoría de campos en un espacio-tiempo de dimensión d existirá una ambigüedad en la acción clásica cuando se considere lo que sucede en las intersecciones de $d+2$ abiertos de una cubierta apropiada para la variedad Σ.
2. Si se exige que la teoría obtenida sea cuánticamente consistente, el término que produce la ambigüedad en la acción debe ser un múltiplo entero de 2π.

3. Sólo es posible escoger constantes enteras para el término ambiguo en la acción cuando el grupo de cohomología $H_C^{d+1}(\Sigma, \mathbf{Z})$ contiene a los enteros.

4. Cuando el grupo de cohomología $H_C^{d+1}(\Sigma, \mathbf{Z})$ contiene a los enteros, se obtiene una condición de cuantización para el flujo de una $(d+1)$-forma diferencial, en términos de las constantes enteras de dicho grupo.

5. La información contenida en el grupo de homotopía $\Pi_{d+1}(\Sigma)$ no siempre es útil para obtener argumentos de cuantización, a diferencia de lo que sucede con la información contenida en el grupo de cohomología $H_C^{d+1}(\Sigma, \mathbf{Z})$.

Los anteriores hechos permiten afirmar que el método más general para obtener condiciones de cuantización debe estar basado en argumentos originados en teorías de cohomología.

Puede verse que el formalismo desarrollado constituye un método muy general para obtener condiciones de cuantización, no solo para los ejemplos tratados, sino también para otros sistemas, entre los cuales podemos citar las condiciones de cuantización para la constante de acoplamiento para el lagrangiano de Wess y Zumino (**Wess & Zumino**, 1971; **Witten**, 1983; **Nappi & Witten**, 1993; **Gaiotto *et al.,*** 2021; **Fiorenza *et al.,*** 2021), para el término de masa en teorías de Yang-Mills en tres dimensiones (**Deser *et al.,*** 1982a; **Deser *et al.,*** 1982b), para el término topológico en modelos sigma sobre variedades de Calabi-Yau (**Li & Li**, 2016) y sobre espacios homogéneos (**Davighi & Gripaios**, 2018), la cuantización del flujo en campos diónicos (**Flores-Alfonso & Quevedo**, 2017, 2019) y en teoría F (**Collinucci & Savelli**, 2012a, 2012b), la cuantización de los coeficientes de anomalia en supergravedad 6-dimensional $\mathcal{N} = (1,0)$ (**Monnier *et al.,*** 2018), así como también en otras situaciones similares.

Conflicto de intereses

El autor declara no tener conflicto de intereses con respecto al contenido de este artículo.

Referencias

Aguilar, P. (2018). All roads lead to the dirac quantization condition. *Revista de la Escuela de Física, VI*(1), 100-125. Descargado de https://fisica.unah.edu.hn/publicaciones/revista-ref/volumenes-anteriores/volumen-vi-no-i/ref-unah-6-1-1/

Alvarez, O. (1985a). Cohomology and field theory. En *Symposium on anomalies, geometry, topology (Chicago, Ill., 1985)* (pp. 3-21). World Sci. Publishing, Singapore.

Alvarez, O. (1985b). Topological quantization and cohomology. *Communications in Mathematical Physics*, *100*(2), 279-309.

Bagger, J., Witten, E. (1982). The gauge invariant supersymmetric nonlinear sigma model. *Physics Letters B, 118*(1-3), 103-106. doi: 10.1016/0370-2693(82)90609-8

Barut, A.O. (1980). *Electrodynamics and classical theory of fields & particles.* Dover Publications, Inc., New York. (Corrected reprint of the 1964 original)

Bott, R., y Tu, L. W. (1982). Differential forms in algebraic topology. *En Graduate texts in mathematics* (Vol. 82, pp. xiv+331). Springer-Verlag, New York-Berlin.

Carroll, S. (2004). *Spacetime and geometry*. Addison Wesley, San Francisco, CA.

Chern, S. (1995). *Complex manifolds without potential theory* (second ed.). Springer-Verlag, New York.19

Choquet-Bruhat, Y., DeWitt-Morette, C., Dillard-Bleick, M. (1982). *Analysis, manifolds and physics* (Second ed.). North-Holland Publishing Co., Amsterdam-New York.

Collinucci, A., Savelli, R. (2012a). On flux quantization in F-theory. *Journal of High Energy Physics, 15*. https://doi.org/10.1007/JHEP02(2012)015

Collinucci, A., Savelli, R. (2012b). On flux quantization in F-theory II: unitary and symplectic gauge groups. *Journal of High Energy Physics*, *94* (2012). https://doi.org/10.1007/JHEP08(2012)094

Curtis, W.D., Miller, F.R. (1985). Differential manifolds and theoretical physics. En *Pure and applied mathematics,* (Vol. 116, pp. xix+394). Academic Press, Inc., Orlando, FL.

Daniel, M., Viallet, C.-M. (1980). The geometrical setting of gauge theories of the Yang- Mills type. *Review Modern Physics, 52*(1), 175-197. doi: 10.1103/RevModPhys.52.175

Davighi, J., Gripaios, B. (2018). Homological classification of topological terms in sigma models on homogeneous spaces. *Journal of High Energy Physics*, *155*. doi: 10.1007/JHEP09(2018)155

Deguchi, S., Kitsukawa, K. (2006). Charge quantization conditions based on the Atiyah-Singer index theorem. *Progress of Theoretical Physics***,** 115(6), 1137-1149. doi: 10.1143/PTP.115.1137

Deser, S., Jackiw, R., Templeton, S. (1982a). Three-dimensional massive gauge theories. *Physical Review Letters*, 48(15), 975-978. doi: 10.1103/PhysRevLett.48.975

Deser, S., Jackiw, R., Templeton, S. (1982b). Topologically massive gauge theories. *Annals of Physics, 140*(2), 372-411. doi: 10.1016/0003-4916(82)90164-6

Dirac, P.A.M. (1931). Quantised singularities in the electromagnetic field. *Proceedings of the Royal Society London, Ser. A, 133*(821), 60-72. doi: 10.1098/rspa.1931.0130

Eguchi, T., Gilkey, P.B., Hanson, A.J. (1980). Gravitation, gauge theories and differential geometry. *Physics Reports,* 66(6), 213-393. doi: 10.1016/0370-1573(80)90130-1

Fiorenza, D., Sati, H., Schreiber, U. (2021). Twisted cohomotopy implies twisted string structure on M5-branes. *Journal of Mathematical Physics*, *62*(4), Paper No. 042301, 16. doi: 10.1063/5.0037786

Flores-Alfonso, D., Quevedo, H. (2017). Topological Quantum Numbers of DyonicFields Over Taub-NUT and Taub-Bolt Spaces. *Journal of Geometry and Symmetry in Physics, 44*, 39-54. doi: 10.7546/jgsp-44-2017-39-54

Flores-Alfonso, D., Quevedo, H. (2019). Flux Quantization in Dilatonic Taub–Nut Dyons. *Reports on Mathematical Physics, 84*, 171-185. doi: 10.1016/S0034-4877(19)30081-3

Freed, D.S. (2000). Dirac charge quantization and generalized differential cohomology. En *Surveys in Differential Geometry*, *7*, 129-194. Int. Press, Somerville, MA. doi: 10.4310/SDG.2002.v7.n1.a6

Gaiotto, D., Johnson-Freyd, T., Witten, E. (2021). A note on some minimally supersymmetric models in two dimensions. En Integrability, quantization, and geometry II. *Quantum theories and algebraic geometry*, *103*, 203-221. Amer. Math. Soc., Providence, RI.

González, G.A. (2000). Topological quantization and Cĕch cohomology. *Revista de integración. Temas de Matemáticas, 18*(2), 51-64 (2005).

Grady, D., Sati, H. (2021). Differential cohomotopy versus differential cohomology for m-theory and differential lifts of postnikov towers. *Journal of Geometry and Physics,165*(104203). doi: https://doi.org/10.1016/j.geomphys.2021.104203

Jackiw, R.W. (1985). Three-cocycle in mathematics and physics. *Physical Review Letters*, *54*(3),159-162. doi: 10.1103/PhysRevLett.54.159

Jackiw, R.W. (2004). Dirac's magnetic monopoles (again*). International Journal of Modern Physics. A, 19*(suppl.), 137-143. doi: 10.1142/S0217751X04018658

Kouneiher, J. (2018). Topological foundations of physics. En S. Wuppuluri y F. A. Doria (Eds.), *The map and the territory: Exploring the foundations of science, thought and 20 reality* (pp. 245-271). Cham: Springer International Publishing. doi: 10.1007/978-3 -319-72478-2 13

Landau, L. D., Lifshitz, E. M. (1976). *Course of theoretical physics. Vol. 1* (Third ed.). Pergamon Press, Oxford-New York-Toronto, Ont. (Mechanics, Translated from the Russian by J. B. Skyes and J. S. Bell)

Li, Q., Li, S. (2016). On the B-twisted topological sigma model and Calabi–Yau geometry. *Journal of Differential Geometry, 102*(3), 409-484. doi: 10.4310/jdg/1456754015

Matsuyama, T. (2008). Anomaly, topological quantization and cohomology. *Topologica, 1*(1), 002. doi: 10.3731/topologica.1.002

Monnier, S., Moore, G.W., Park, D.S. (2018). Quantization of anomaly coefficients in 6D N = (1;0) supergravity. Journal of High Energy Physics, (2), 020, front matter+40. doi:10.1007/jhep02(2018)020

Nappi, C.R., Witten, E. (1993). Wess-Zumino-Witten model based on a nonsemisimplegroup. *Physics Review Letter, 71*(23), 3751-3753. doi: 10.1103/PhysRevLett.71.3751

Nettel, F., Quevedo, H., Rodriguez, M. (2009). Topological spectrum of mechanical systems. *Reports on Mathematical Physics, 64*(3), 355-365. doi: 10.1016/S0034-4877(10)00003-0

Patrascu, A.T. (2014). Quantization, holography, and the universal coefficient theorem. *Physics Review D, 90*, 045018. doi: 10.1103/PhysRevD.90.045018

Rahimizadeh, H., Sholar, S., Berg, M. (2012). A new topological perspective on quantization in physics. *Communications in Mathematics and Applications, 3*(2), 129-146. doi: 10.26713/cma.v3i2.151

Roman, P. (1969). *Introduction to quantum field theory.* John Wiley & Sons, Inc., New York-London-Sydney.

Singer, I.M., Thorpe, J.A. (1976). *Lecture notes on elementary topology and geometry*. Springer-Verlag, New York-Heidelberg. (Reprint of the 1967 edition) doi: 10.1007/bf01931377

Spanier, E.H. (1966). *Algebraic topology*. McGraw-Hill Book Co., New York-Toronto, Ont.-London.

Thomas, T. Y. (1965). *Concepts from tensor analysis and differential geometry* (Seconded.). Academic Press, New York-London.

Weinberg, S. (1972). *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity.* New York: John Wiley and Sons.

Wells, R. O., Jr. (2008). Differential analysis on complex manifolds. En *Graduate texts in mathematics* (Third ed., Vol. 65, pp. xiv+299). Springer, New York. doi: 10.1007/978-0-387-73892-5

Wess, J., Bagger, J. (1992). *Supersymmetry and supergravity* (Second ed.). Princeton University Press, Princeton, NJ.

Wess, J., Zumino, B. (1971). Consequences of anomalous Ward identities. *Physics Letters, 37B*, 95-97. doi: 10.1016/0370-2693(71)90582-x

West, P. (1990). *Introduction to supersymmetry and supergravity* (Second ed.). World Scientific Publishing Co., Inc., Teaneck, NJ. doi: 10.1142/1002

Witten, E. (1983). Global aspects of current algebra. *Nuclear Physics. B, 223*(2), 422-432. doi: 10.1016/0550-3213(83)90063-9

Witten, E., Bagger, J. (1982). Quantization of Newton's constant in certain supergravity theories. *Physics Letters B, 115*(3), 202-206. doi: 10.1016/0370-2693(82)90644-X

Wu, T. T., Yang, C. N. (1976). Dirac monopole without strings: monopole harmonics. *Nuclear Physics B, 107*(3), 365-380. doi: 10.1016/0550-3213(76)90143-7