REVISTA DE LA ACADEMIA
COLOMBIANA DE CIENCIAS
EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES

www.raccefyn.co

Material suplementario

Análisis matemático de un modelo metapoblacional para la dinámica del dengue

Mathematical analysis of a metapopulation model for dengue dynamics

Aarom Llanos, Heliana Arias

Aarom Llanos aarom.llanos@correounivalle.edu.co

Contenido

Material suplementario 1

Número reproductivo básico

Vector IF

dIh1[Ih1,Im1,Ih2,Im2,Sh1,Sh2]:=q11 *Bh1*Sh1*Im1 *θ1 + q12*Bh2*Sh1*Im2*θ2;

dIm1[Ih1,Im1,Ih2,Im2,Sh1,Sh2]:= Bm1*P11 *Ih1*(1-Im1) + Bm1*P21*Ih2*(1-Im1);

dIh2[Ih1,Im1,Ih2,Im2,Sh1,Sh2]:=q22 *Bh2*Sh2*Im2 *θ2 + q21*Bh1*Sh2*Im1*θ1;

dIm2[Ih1,Im1,Ih2,Im2,Sh1,Sh2]:=Bm2*P22 *Ih2*(1-Im2) + Bm2*P12*Ih1*(1-Im2);

dSh1[Ih1,Im1,Ih2,Im2,Sh1,Sh2]:= 0;

dSh2[Ih1,Im1,Ih2,Im2,Sh1,Sh2]:= 0;

$$f = \begin{pmatrix} \text{dIh1[Ih1\_, Im1\_, Ih2\_, Im2\_]} \\ \text{dIm1[Ih1\_, Im1\_, Ih2\_, Im2\_]} \\ \text{dIh2[Ih1\_, Im1\_, Ih2\_, Im2\_]} \\ \text{dIm2[Ih1\_, mI1\_, Ih2\_, Im2\_]} \\ \text{dSh1[Ih1\_, Im1\_, Ih2\_, Im2\_, Sh1\_, Sh2\_]} \\ \text{dSh2[Ih1\_, Im1\_, Ih2\_, Im2\_, Sh1\_, Sh2\_]} \end{pmatrix}$$

Matriz jacobiana F

F1={{D[dIh1[Ih1,Im1,Ih2,Im2,Sh1,Sh2],Ih1],

D[dIh1[Ih1,Im1,Ih2,Im2,Sh1,Sh2],Im1],

D[dIh1[Ih1,Im1,Ih2,Im2,Sh1,Sh2],Ih2],

D[dIh1[Ih1,Im1,Ih2,Im2,Sh1,Sh2],Im2]},

{D[dIm1[Ih1,Im1,Ih2,Im2,Sh1,Sh2],Ih1],

D[dIm1[Ih1,Im1,Ih2,Im2,Sh1,Sh2],Im1],

D[dIm1[Ih1,Im1,Ih2,Im2,Sh1,Sh2],Ih2],

D[dIm1[Ih1,Im1,Ih2,Im2,Sh1,Sh2],Im2]},

{D[dIh2[Ih1,Im1,Ih2,Im2,Sh1,Sh2],Ih1],

```
D[dIh2[Ih1,Im1,Ih2,Im2,Sh1,Sh2],Im1],

D[dIh2[Ih1,Im1,Ih2,Im2,Sh1,Sh2],Ih2],

D[dIh2[Ih1,Im1,Ih2,Im2,Sh1,Sh2],Im2]},

{D[dIm2[Ih1,Im1,Ih2,Im2,Sh1,Sh2],Ih1],

D[dIm2[Ih1,Im1,Ih2,Im2,Sh1,Sh2],Im1],

D[dIm2[Ih1,Im1,Ih2,Im2,Sh1,Sh2],Ih2],

D[dIm2[Ih1,Im1,Ih2,Im2,Sh1,Sh2],Im2]}};
```

MatrixForm[F1]

$$\begin{pmatrix} 0 & \mathrm{Bh1q11Sh1\theta1} & 0 & \mathrm{Bh2q12Sh1\theta2} \\ \mathrm{Bm1(1-Im1)P11} & -\mathrm{Bm1Ih1P11}-\mathrm{Bm1Ih2P21} & \mathrm{Bm1(1-Im1)P21} & 0 \\ 0 & \mathrm{Bh1q21Sh2\theta1} & 0 & \mathrm{Bh2q22Sh2\theta2} \\ \mathrm{Bm2(1-Im2)P12} & 0 & \mathrm{Bm2(1-Im2)P22} & -\mathrm{Bm2Ih1P12}-\mathrm{Bm2Ih2P22} \end{pmatrix}$$

```
F={{          0                ,Bh1 *q11 *θ1,              0              ,Bh2 *q12*θ2 },

   {   Bm1 * P11        ,           0            ,      Bm1 *P21       ,          0          },

   {          0                ,Bh1 *q21 *θ1 ,             0              ,Bh2 *q22 *θ2},

   {     Bm2*P12         ,           0            ,      Bm2 *P22       ,          0          }   };
```

MatrixForm[F]

$$\begin{pmatrix} 0 & \mathrm{Bh1q11\theta1} & 0 & \mathrm{Bh2q12\theta2} \\ \mathrm{Bm1P11} & 0 & \mathrm{Bm1P21} & 0 \\ 0 & \mathrm{Bh1q21\theta1} & 0 & \mathrm{Bh2q22\theta2} \\ \mathrm{Bm2P12} & 0 & \mathrm{Bm2P22} & 0 \end{pmatrix}$$

```
G={{          0                ,k1 *q11 ,               0              ,k2 *q12},

   {   Bm1 * P11        ,           0            ,      Bm1 *P21       ,          0          },

   {          0                ,k1 *q21  ,              0              ,k2 *q22 },
```

{ Bm2*P12 , 0 , Bm2 *P22 , 0 } };

MatrixForm[G]

$$\begin{pmatrix} 0 & \text{k1q11} & 0 & \text{k2q12} \\ \text{Bm1P11} & 0 & \text{Bm1P21} & 0 \\ 0 & \text{k1q21} & 0 & \text{k2q22} \\ \text{Bm2P12} & 0 & \text{Bm2P22} & 0 \end{pmatrix}$$

Vector V

```
dih1[ih1,im1,ih2,im2,sh1,sh2]:= μ*ih1 + γ*ih1;

dim1[ih1,im1,ih2,im2,sh1,sh2]:=  δ*im1;

dih2[ih1,im1,ih2,im2,sh1,sh2]:= μ*ih2 + γ*ih2;

dim2[ih1,im1,ih2,im2,sh1,sh2]:=  δ*im2;
```

Matriz jacobiana V

$S = \{\{D[\text{dih1}[\text{ih1}, \text{im1}, \text{ih2}, \text{im2}, \text{sh1}, \text{sh2}], \text{ih1}],$

$D[\text{dih1}[\text{ih1}, \text{im1}, \text{ih2}, \text{im2}, \text{sh1}, \text{sh2}], \text{im1}],$

$D[\text{dih1}[\text{ih1}, \text{im1}, \text{ih2}, \text{im2}, \text{sh1}, \text{sh2}], \text{ih2}],$

$D[\text{dih1}[\text{ih1}, \text{im1}, \text{ih2}, \text{im2}, \text{sh1}, \text{sh2}], \text{im2}]\},$

$\{D[\text{dim1}[\text{ih1}, \text{im1}, \text{ih2}, \text{im2}, \text{sh1}, \text{sh2}], \text{ih1}],$

$D[\text{dim1}[\text{ih1}, \text{im1}, \text{ih2}, \text{im2}, \text{sh1}, \text{sh2}], \text{im1}],$

$D[\text{dim1}[\text{ih1}, \text{im1}, \text{ih2}, \text{im2}, \text{sh1}, \text{sh2}], \text{ih2}],$

$D[\text{dim1}[\text{ih1}, \text{im1}, \text{ih2}, \text{im2}, \text{sh1}, \text{sh2}], \text{im2}]\},$

$\{D[\text{dih2}[\text{ih1}, \text{im1}, \text{ih2}, \text{im2}, \text{sh1}, \text{sh2}], \text{ih1}],$

$D[\text{dih2}[\text{ih1}, \text{im1}, \text{ih2}, \text{im2}, \text{sh1}, \text{sh2}], \text{im1}],$

$D[\text{dih2}[\text{ih1}, \text{im1}, \text{ih2}, \text{im2}, \text{sh1}, \text{sh2}], \text{ih2}],$

$D[\text{dih2}[\text{ih1}, \text{im1}, \text{ih2}, \text{im2}, \text{sh1}, \text{sh2}], \text{im2}]\},$

$\{D[\text{dim2}[\text{ih1}, \text{im1}, \text{ih2}, \text{im2}, \text{sh1}, \text{sh2}], \text{ih1}],$

$D[\text{dim2}[\text{ih1}, \text{im1}, \text{ih2}, \text{im2}, \text{sh1}, \text{sh2}], \text{im1}],$

$D[\text{dim2}[\text{ih1}, \text{im1}, \text{ih2}, \text{im2}, \text{sh1}, \text{sh2}], \text{ih2}],$

$D[\text{dim2}[\text{ih1}, \text{im1}, \text{ih2}, \text{im2}, \text{sh1}, \text{sh2}], \text{im2}]\}\};$

$\text{MatrixForm}[S]$

$$\begin{pmatrix} \gamma+\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma+\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta \end{pmatrix}$$

$V = \{\{\alpha, 0,0,0\}, \{0, d, 0,0\}, \{0,0, \alpha, 0\}, \{0,0,0, d\}\}$

Inversa de V

$B = \text{Inverse}[V]$

Producto entre FV^-1

H=G.B

{{0,(k1 q11)/δ,0,(k2 q12)/δ},{(Bm1 P11)/α,0,(Bm1 P21)/α,0},{0,(k1 q21)/δ,0,(k2 q22)/δ},{(Bm2 P12)/α,0,(Bm2 P22)/α,0}}

$\text{MatrixForm}[H]$

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{\text{k1q11}}{\delta} & 0 & \frac{\text{k2q12}}{\delta} \\ \frac{\text{Bm1P11}}{\alpha} & 0 & \frac{\text{Bm1P21}}{\alpha} & 0 \\ 0 & \frac{\text{k1q21}}{\delta} & 0 & \frac{\text{k2q22}}{\delta} \\ \frac{\text{Bm2P12}}{\alpha} & 0 & \frac{\text{Bm2P22}}{\alpha} & 0 \end{pmatrix}$$

$J = \text{Eigenvalues}[H]$

$$\{-\frac{1}{\sqrt{2}\alpha\delta}(\sqrt{}(\text{Bm1k1P11q11}\alpha\delta + \text{Bm2k2P12q12}\alpha\delta + \text{Bm1k1P21q21}\alpha\delta + \text{Bm2k2P22q22}\alpha\delta$$
$$- \sqrt{}((-\text{Bm1k1P11q11}\alpha\delta - \text{Bm2k2P12q12}\alpha\delta - \text{Bm1k1P21q21}\alpha\delta$$
$$- \text{Bm2k2P22q22}\alpha\delta)^2 - 4(\text{Bm1Bm2k1k2P12P21q12q21}\alpha^2\delta^2$$
$$- \text{Bm1Bm2k1k2P11P22q12q21}\alpha^2\delta^2 - \text{Bm1Bm2k1k2P12P21q11q22}\alpha^2\delta^2$$
$$+ \text{Bm1Bm2k1k2P11P22q11q22}\alpha^2\delta^2)))), \frac{1}{\sqrt{2}\alpha\delta}(\sqrt{}(\text{Bm1k1P11q11}\alpha\delta$$
$$+ \text{Bm2k2P12q12}\alpha\delta + \text{Bm1k1P21q21}\alpha\delta + \text{Bm2k2P22q22}\alpha\delta$$
$$- \sqrt{}((-\text{Bm1k1P11q11}\alpha\delta - \text{Bm2k2P12q12}\alpha\delta - \text{Bm1k1P21q21}\alpha\delta$$
$$- \text{Bm2k2P22q22}\alpha\delta)^2 - 4(\text{Bm1Bm2k1k2P12P21q12q21}\alpha^2\delta^2$$
$$- \text{Bm1Bm2k1k2P11P22q12q21}\alpha^2\delta^2 - \text{Bm1Bm2k1k2P12P21q11q22}\alpha^2\delta^2$$
$$+ \text{Bm1Bm2k1k2P11P22q11q22}\alpha^2\delta^2)))), -\frac{1}{\sqrt{2}\alpha\delta}(\sqrt{}(\text{Bm1k1P11q11}\alpha\delta$$
$$+ \text{Bm2k2P12q12}\alpha\delta + \text{Bm1k1P21q21}\alpha\delta + \text{Bm2k2P22q22}\alpha\delta$$
$$+ \sqrt{}((-\text{Bm1k1P11q11}\alpha\delta - \text{Bm2k2P12q12}\alpha\delta - \text{Bm1k1P21q21}\alpha\delta$$
$$- \text{Bm2k2P22q22}\alpha\delta)^2 - 4(\text{Bm1Bm2k1k2P12P21q12q21}\alpha^2\delta^2$$
$$- \text{Bm1Bm2k1k2P11P22q12q21}\alpha^2\delta^2 - \text{Bm1Bm2k1k2P12P21q11q22}\alpha^2\delta^2$$
$$+ \text{Bm1Bm2k1k2P11P22q11q22}\alpha^2\delta^2)))), \frac{1}{\sqrt{2}\alpha\delta}(\sqrt{}(\text{Bm1k1P11q11}\alpha\delta$$
$$+ \text{Bm2k2P12q12}\alpha\delta + \text{Bm1k1P21q21}\alpha\delta + \text{Bm2k2P22q22}\alpha\delta$$
$$+ \sqrt{}((-\text{Bm1k1P11q11}\alpha\delta - \text{Bm2k2P12q12}\alpha\delta - \text{Bm1k1P21q21}\alpha\delta$$
$$- \text{Bm2k2P22q22}\alpha\delta)^2 - 4(\text{Bm1Bm2k1k2P12P21q12q21}\alpha^2\delta^2$$
$$- \text{Bm1Bm2k1k2P11P22q12q21}\alpha^2\delta^2 - \text{Bm1Bm2k1k2P12P21q11q22}\alpha^2\delta^2$$
$$+ \text{Bm1Bm2k1k2P11P22q11q22}\alpha^2\delta^2))))\}$$

$$\eta1 := Bm1 * k1 * P11 * q11 * \alpha * \delta;$$

$$\eta2 := Bm2 * k2 * P12 * q12 * \alpha * \delta;$$

$$\eta3 := Bm1 * k1 * P21 * q21 * \alpha * \delta;$$

$$\eta4 := Bm2 * k2 * P22 * q22 * \alpha * \delta;$$

$$\eta5 := \frac{1}{\sqrt{2} * \alpha * \delta};$$

$$\lambda_1 := -\eta5(\sqrt{}(\eta1 + \eta2 + \eta3 + \eta4 - \sqrt{}((-\eta1 - \eta2 - \eta3 - \eta4)^2 - 4((q12 * q21 - q11 * q22)(\frac{\eta2 * \eta3}{q12 * q21} - \frac{\eta1 * \eta4}{q11 * q22})))));$$

$$\lambda_2 := \eta5(\sqrt{}(\eta1 + \eta2 + \eta3 + \eta4 - \sqrt{}((-\eta1 - \eta2 - \eta3 - \eta4)^2 - 4((q12 * q21 - q11 * q22)(\frac{\eta2 * \eta3}{q12 * q21} - \frac{\eta1 * \eta4}{q11 * q22})))));$$

$$\lambda_3 := -\eta5(\sqrt{}(\eta1 + \eta2 + \eta3 + \eta4 + \sqrt{}((-\eta1 - \eta2 - \eta3 - \eta4)^2 - 4((q12 * q21 - q11 * q22)(\frac{\eta2 * \eta3}{q12 * q21} - \frac{\eta1 * \eta4}{q11 * q22})))));$$

$$\lambda_4 := \eta5(\sqrt{}(\eta1 + \eta2 + \eta3 + \eta4 + \sqrt{}((-\eta1 - \eta2 - \eta3 - \eta4)^2 - 4((q12 * q21 - q11 * q22)(\frac{\eta2 * \eta3}{q12 * q21} - \frac{\eta1 * \eta4}{q11 * q22})))));$$

Análisis de sensibilidad a los parámetros

$\mathcal{R}_0[\mathrm{Bh1\_, Bh2\_, Bm1\_, Bm2\_}, \gamma\_, \mu\_, \delta\_, \mathrm{q11\_, q12\_, q22\_, q21\_}]$:

$$= \frac{1}{\sqrt{2*(\mu+\gamma)*\delta}} \surd(\mathrm{Bh1} * \mathrm{Bm1} * \frac{\mathrm{Nm1}}{\mathrm{q11} * \mathrm{Nh1} + \mathrm{q21} * \mathrm{Nh2}} * (\frac{\mathrm{q11} * \mathrm{Nh1} * \mathrm{q11}}{\mathrm{q11} * \mathrm{Nh1} + \mathrm{q21} * \mathrm{Nh2}}$$
$$+ \frac{\mathrm{q21} * \mathrm{Nh2} * \mathrm{q21}}{\mathrm{q11} * \mathrm{Nh1} + \mathrm{q21} * \mathrm{Nh2}}) + \mathrm{Bh2} * \mathrm{Bm2} * \frac{\mathrm{Nm2}}{\mathrm{q12} * \mathrm{Nh1} + \mathrm{q22} * \mathrm{Nh2}}$$
$$* (\frac{\mathrm{q12} * \mathrm{Nh1} * \mathrm{q12}}{\mathrm{q22} * \mathrm{Nh2} + \mathrm{q12} * \mathrm{Nh1}} + \frac{\mathrm{q22} * \mathrm{Nh2} * \mathrm{q22}}{\mathrm{q22} * \mathrm{Nh2} + \mathrm{q12} * \mathrm{Nh1}})$$
$$+ \surd((\mathrm{Bh1} * \mathrm{Bm1} * \frac{\mathrm{Nm1}}{\mathrm{q11} * \mathrm{Nh1} + \mathrm{q21} * \mathrm{Nh2}} * (\frac{\mathrm{q11} * \mathrm{Nh1} * \mathrm{q11}}{\mathrm{q11} * \mathrm{Nh1} + \mathrm{q21} * \mathrm{Nh2}}$$
$$+ \frac{\mathrm{q21} * \mathrm{Nh2} * \mathrm{q21}}{\mathrm{q11} * \mathrm{Nh1} + \mathrm{q21} * \mathrm{Nh2}}) + \mathrm{Bh2} * \mathrm{Bm2} * \frac{\mathrm{Nm2}}{\mathrm{q12} * \mathrm{Nh1} + \mathrm{q22} * \mathrm{Nh2}}$$
$$* (\frac{\mathrm{q12} * \mathrm{Nh1} * \mathrm{q12}}{\mathrm{q22} * \mathrm{Nh2} + \mathrm{q12} * \mathrm{Nh1}} + \frac{\mathrm{q22} * \mathrm{Nh2} * \mathrm{q22}}{\mathrm{q22} * \mathrm{Nh2} + \mathrm{q12} * \mathrm{Nh1}}))^2 - 4(\mathrm{Bh1} * \mathrm{Bm1}$$
$$* \frac{\mathrm{Nm1}}{\mathrm{q11} * \mathrm{Nh1} + \mathrm{q21} * \mathrm{Nh2}} * \mathrm{Bh2} * \mathrm{Bm2} * \frac{\mathrm{Nm2}}{\mathrm{q12} * \mathrm{Nh1} + \mathrm{q22} * \mathrm{Nh2}})(\mathrm{q11} * \mathrm{q22} + \mathrm{q12}$$
$$* \mathrm{q21}) * (\frac{\mathrm{q11} * \mathrm{Nh1}}{\mathrm{q11} * \mathrm{Nh1} + \mathrm{q21} * \mathrm{Nh2}} * \frac{\mathrm{q22} * \mathrm{Nh2}}{\mathrm{q22} * \mathrm{Nh2} + \mathrm{q12} * \mathrm{Nh1}}$$
$$- \frac{\mathrm{q12} * \mathrm{Nh1}}{\mathrm{q22} * \mathrm{Nh2} + \mathrm{q12} * \mathrm{Nh1}} * \frac{\mathrm{q21} * \mathrm{Nh2}}{\mathrm{q11} * \mathrm{Nh1} + \mathrm{q21} * \mathrm{Nh2q}})));$$

Derivada respecto a Bh1

D[$\mathcal{R}_0$[Bh1,Bh2,Bm1,Bm2,γ,μ,δ,q11,q12,q22,q21],Bh1]

((Bm1 Nm1 ((Nh1 $q11^2$)/(Nh1 q11+Nh2 q21)+(Nh2 $q21^2$)/(Nh1 q11+Nh2 q21)))/(Nh1 q11+Nh2 q21)+(-((4 Bh2 Bm1 Bm2 Nm1 Nm2 (q12 q21+q11 q22) (-((Nh1 Nh2 q12 q21)/((Nh1 q11+Nh2q q21) (Nh1 q12+Nh2 q22)))+(Nh1 Nh2 q11 q22)/((Nh1 q11+Nh2 q21) (Nh1 q12+Nh2 q22))))/((Nh1 q11+Nh2 q21) (Nh1 q12+Nh2 q22)))+(1/(Nh1 q11+Nh2 q21))2 Bm1 Nm1 ((Nh1 q11^2)/(Nh1 q11+Nh2 q21)+(Nh2 q21^2)/(Nh1 q11+Nh2 q21)) ((Bh1 Bm1 Nm1 ((Nh1 q11^2)/(Nh1 q11+Nh2 q21)+(Nh2 q21^2)/(Nh1 q11+Nh2 q21)))/(Nh1 q11+Nh2 q21)+(Bh2 Bm2 Nm2 ((Nh1 q12^2)/(Nh1 q12+Nh2 q22)+(Nh2 q22^2)/(Nh1 q12+Nh2 q22)))/(Nh1 q12+Nh2 q22)))/(2 \[Sqrt](-((4 Bh1 Bh2 Bm1 Bm2 Nm1 Nm2 (q12 q21+q11 q22) (-((Nh1 Nh2 q12 q21)/((Nh1 q11+Nh2q q21) (Nh1 q12+Nh2 q22)))+(Nh1 Nh2 q11 q22)/((Nh1 q11+Nh2 q21) (Nh1 q12+Nh2 q22))))/((Nh1 q11+Nh2 q21) (Nh1 q12+Nh2 q22)))+((Bh1 Bm1 Nm1 ((Nh1 q11^2)/(Nh1 q11+Nh2 q21)+(Nh2 q21^2)/(Nh1 q11+Nh2 q21)))/(Nh1 q11+Nh2 q21)+(Bh2 Bm2 Nm2 ((Nh1 q12^2)/(Nh1 q12+Nh2 q22)+(Nh2 q22^2)/(Nh1 q12+Nh2 q22)))/(Nh1 q12+Nh2 q22))^2)))/(2 $\sqrt{2}$ \[Sqrt]((Bh1 Bm1 Nm1 ((Nh1 q11^2)/(Nh1 q11+Nh2 q21)+(Nh2 q21^2)/(Nh1 q11+Nh2 q21)))/(Nh1 q11+Nh2 q21)+(Bh2 Bm2 Nm2 ((Nh1 q12^2)/(Nh1 q12+Nh2 q22)+(Nh2 q22^2)/(Nh1 q12+Nh2 q22)))/(Nh1 q12+Nh2 q22)+\[Sqrt](-((4 Bh1 Bh2 Bm1 Bm2 Nm1 Nm2 (q12 q21+q11 q22) (-((Nh1 Nh2 q12 q21)/((Nh1 q11+Nh2q q21) (Nh1 q12+Nh2 q22)))+(Nh1 Nh2 q11 q22)/((Nh1 q11+Nh2 q21) (Nh1 q12+Nh2 q22))))/((Nh1 q11+Nh2 q21) (Nh1 q12+Nh2 q22)))+((Bh1 Bm1 Nm1 ((Nh1 q11^2)/(Nh1 q11+Nh2 q21)+(Nh2 q21^2)/(Nh1 q11+Nh2 q21)))/(Nh1 q11+Nh2 q21)+(Bh2 Bm2 Nm2 ((Nh1 q12^2)/(Nh1 q12+Nh2 q22)+(Nh2 q22^2)/(Nh1 q12+Nh2 q22)))/(Nh1 q12+Nh2 q22))^2)) $\sqrt{\delta (\gamma + \mu)}$)

Derivada respecto a Bh2

D[$\mathcal{R}_0$[Bh1,Bh2,Bm1,Bm2,γ,μ,δ,q11,q12,q22,q21],Bh2]

((Bm2 Nm2 ((Nh1 q12^2)/(Nh1 q12+Nh2 q22)+(Nh2 q22^2)/(Nh1 q12+Nh2 q22)))/(Nh1 q12+Nh2 q22)+(-((4 Bh1 Bm1 Bm2 Nm1 Nm2 (q12 q21+q11 q22) (-((Nh1 Nh2 q12 q21)/((Nh1 q11+Nh2q q21) (Nh1 q12+Nh2 q22)))+(Nh1 Nh2 q11 q22)/((Nh1 q11+Nh2 q21) (Nh1 q12+Nh2 q22))))/((Nh1 q11+Nh2 q21) (Nh1 q12+Nh2 q22)))+(2 Bm2 Nm2 ((Nh1 q12^2)/(Nh1 q12+Nh2 q22)+(Nh2 q22^2)/(Nh1 q12+Nh2 q22)) ((Bh1 Bm1 Nm1 ((Nh1 q11^2)/(Nh1 q11+Nh2 q21)+(Nh2 q21^2)/(Nh1 q11+Nh2 q21)))/(Nh1 q11+Nh2 q21)+(Bh2 Bm2 Nm2 ((Nh1 q12^2)/(Nh1 q12+Nh2 q22)+(Nh2 q22^2)/(Nh1 q12+Nh2 q22)))/(Nh1 q12+Nh2 q22)))/(Nh1 q12+Nh2 q22))/(2 \[Sqrt](-((4 Bh1 Bh2 Bm1 Bm2 Nm1 Nm2 (q12 q21+q11 q22) (-((Nh1 Nh2 q12 q21)/((Nh1 q11+Nh2q q21) (Nh1 q12+Nh2 q22)))+(Nh1 Nh2 q11 q22)/((Nh1 q11+Nh2 q21) (Nh1 q12+Nh2 q22))))/((Nh1 q11+Nh2 q21) (Nh1 q12+Nh2 q22)))+((Bh1 Bm1 Nm1 ((Nh1 q11^2)/(Nh1 q11+Nh2 q21)+(Nh2 q21^2)/(Nh1 q11+Nh2 q21)))/(Nh1 q11+Nh2 q21)+(Bh2 Bm2 Nm2 ((Nh1 q12^2)/(Nh1 q12+Nh2 q22)+(Nh2 q22^2)/(Nh1 q12+Nh2 q22)))/(Nh1 q12+Nh2 q22))^2)))/(2 $\sqrt{2}$ \[Sqrt]((Bh1 Bm1 Nm1 ((Nh1 q11^2)/(Nh1 q11+Nh2 q21)+(Nh2 q21^2)/(Nh1 q11+Nh2 q21)))/(Nh1 q11+Nh2 q21)+(Bh2 Bm2 Nm2 ((Nh1 q12^2)/(Nh1 q12+Nh2 q22)+(Nh2 q22^2)/(Nh1 q12+Nh2 q22)))/(Nh1 q12+Nh2 q22)+\[Sqrt](-((4 Bh1 Bh2 Bm1 Bm2 Nm1 Nm2 (q12 q21+q11 q22) (-((Nh1 Nh2 q12 q21)/((Nh1 q11+Nh2q q21) (Nh1 q12+Nh2 q22)))+(Nh1 Nh2 q11 q22)/((Nh1 q11+Nh2 q21) (Nh1 q12+Nh2 q22))))/((Nh1 q11+Nh2 q21) (Nh1 q12+Nh2 q22)))+((Bh1 Bm1 Nm1 ((Nh1 q11^2)/(Nh1 q11+Nh2 q21)+(Nh2 q21^2)/(Nh1 q11+Nh2 q21)))/(Nh1 q11+Nh2 q21)+(Bh2 Bm2 Nm2 ((Nh1 q12^2)/(Nh1 q12+Nh2 q22)+(Nh2 q22^2)/(Nh1 q12+Nh2 q22)))/(Nh1 q12+Nh2 q22))^2)) $\sqrt{\delta\,(\gamma + \mu)}$)

Derivada respecto a Bm1

D[$\mathcal{R}_0$[Bh1,Bh2,Bm1,Bm2,γ,μ,δ,q11,q12,q22,q21],Bm1]

((Bh1 Nm1 ((Nh1 q11^2)/(Nh1 q11+Nh2 q21)+(Nh2 q21^2)/(Nh1 q11+Nh2q q21)))/(Nh1 q11+Nh2 q21)+(-((4 Bh1 Bh2 Bm2 Nm1 Nm2 (q12 q21+q11 q22) (-((Nh1 Nh2 q12 q21)/((Nh1 q11+Nh2q q21) (Nh1 q12+Nh2 q22)))+(Nh1 Nh2 q11 q22)/((Nh1 q11+Nh2 q21) (Nh1 q12+Nh2 q22))))/((Nh1 q11+Nh2 q21) (Nh1 q12+Nh2 q22)))+(2 Bh1 Nm1 ((Nh1 q11^2)/(Nh1 q11+Nh2 q21)+(Nh2 q21^2)/(Nh1 q11+Nh2q q21)) ((Bh1 Bm1 Nm1 ((Nh1 q11^2)/(Nh1 q11+Nh2 q21)+(Nh2 q21^2)/(Nh1 q11+Nh2q q21)))/(Nh1 q11+Nh2 q21)+(Bh2 Bm2 Nm2 ((Nh1 q12^2)/(Nh1 q12+Nh2 q22)+(Nh2 q22^2)/(Nh1 q12+Nh2 q22)))/(Nh1 q12+Nh2 q22)))/(Nh1 q11+Nh2 q21))/(2 \[Sqrt](-((4 Bh1 Bh2 Bm1 Bm2 Nm1 Nm2 (q12 q21+q11 q22) (-((Nh1 Nh2 q12 q21)/((Nh1 q11+Nh2q q21) (Nh1 q12+Nh2 q22)))+(Nh1 Nh2 q11 q22)/((Nh1 q11+Nh2 q21) (Nh1 q12+Nh2 q22))))/((Nh1 q11+Nh2 q21) (Nh1 q12+Nh2 q22)))+((Bh1 Bm1 Nm1 ((Nh1 q11^2)/(Nh1 q11+Nh2 q21)+(Nh2 q21^2)/(Nh1 q11+Nh2q q21)))/(Nh1 q11+Nh2 q21)+(Bh2 Bm2 Nm2 ((Nh1 q12^2)/(Nh1 q12+Nh2 q22)+(Nh2 q22^2)/(Nh1 q12+Nh2 q22)))/(Nh1 q12+Nh2 q22))^2)))/(2 $\sqrt{2}$ \[Sqrt]((Bh1 Bm1 Nm1 ((Nh1 q11^2)/(Nh1 q11+Nh2 q21)+(Nh2 q21^2)/(Nh1 q11+Nh2q q21)))/(Nh1 q11+Nh2 q21)+(Bh2 Bm2 Nm2 ((Nh1 q12^2)/(Nh1 q12+Nh2 q22)+(Nh2 q22^2)/(Nh1 q12+Nh2 q22)))/(Nh1 q12+Nh2 q22)+\[Sqrt](-((4 Bh1 Bh2 Bm1 Bm2 Nm1 Nm2 (q12 q21+q11 q22) (-((Nh1 Nh2 q12 q21)/((Nh1 q11+Nh2q q21) (Nh1 q12+Nh2 q22)))+(Nh1 Nh2 q11 q22)/((Nh1 q11+Nh2 q21) (Nh1 q12+Nh2 q22))))/((Nh1 q11+Nh2 q21) (Nh1 q12+Nh2 q22)))+((Bh1 Bm1 Nm1 ((Nh1 q11^2)/(Nh1 q11+Nh2 q21)+(Nh2 q21^2)/(Nh1 q11+Nh2q q21)))/(Nh1 q11+Nh2 q21)+(Bh2 Bm2 Nm2 ((Nh1 q12^2)/(Nh1 q12+Nh2 q22)+(Nh2 q22^2)/(Nh1 q12+Nh2 q22)))/(Nh1 q12+Nh2 q22))^2)) $\sqrt{\delta (\gamma + \mu)}$)

Derivada respecto a Bm2

D[$\mathcal{R}_0$[Bh1,Bh2,Bm1,Bm2,γ,μ,δ,q11,q12,q22,q21],Bm2]

((Bh2 Nm2 ((Nh1 q12^2)/(Nh1 q12+Nh2 q22)+(Nh2 q22^2)/(Nh1 q12+Nh2 q22)))/(Nh1 q12+Nh2 q22)+(-((4 Bh1 Bh2 Bm1 Nm1 Nm2 (q12 q21+q11 q22) (-((Nh1 Nh2 q12 q21)/((Nh1 q11+Nh2q q21) (Nh1 q12+Nh2 q22)))+(Nh1 Nh2 q11 q22)/((Nh1 q11+Nh2 q21) (Nh1 q12+Nh2 q22))))/((Nh1 q11+Nh2 q21) (Nh1 q12+Nh2 q22)))+(2 Bh2 Nm2 ((Nh1 q12^2)/(Nh1 q12+Nh2 q22)+(Nh2 q22^2)/(Nh1 q12+Nh2 q22)) ((Bh1 Bm1 Nm1 ((Nh1 q11^2)/(Nh1 q11+Nh2 q21)+(Nh2 q21^2)/(Nh1 q11+Nh2q q21)))/(Nh1 q11+Nh2 q21)+(Bh2 Bm2 Nm2 ((Nh1 q12^2)/(Nh1 q12+Nh2 q22)+(Nh2 q22^2)/(Nh1 q12+Nh2 q22)))/(Nh1 q12+Nh2 q22)))/(Nh1 q12+Nh2 q22))/(2 \[Sqrt](-((4 Bh1 Bh2 Bm1 Bm2 Nm1 Nm2 (q12 q21+q11 q22) (-((Nh1 Nh2 q12 q21)/((Nh1 q11+Nh2q q21) (Nh1 q12+Nh2 q22)))+(Nh1 Nh2 q11 q22)/((Nh1 q11+Nh2 q21) (Nh1 q12+Nh2 q22))))/((Nh1 q11+Nh2 q21) (Nh1 q12+Nh2 q22)))+((Bh1 Bm1 Nm1 ((Nh1 q11^2)/(Nh1 q11+Nh2 q21)+(Nh2 q21^2)/(Nh1 q11+Nh2q q21)))/(Nh1 q11+Nh2 q21)+(Bh2 Bm2 Nm2 ((Nh1 q12^2)/(Nh1 q12+Nh2 q22)+(Nh2 q22^2)/(Nh1 q12+Nh2 q22)))/(Nh1 q12+Nh2 q22))^2))/(2 $\sqrt{2}$ \[Sqrt]((Bh1 Bm1 Nm1 ((Nh1 q11^2)/(Nh1 q11+Nh2 q21)+(Nh2 q21^2)/(Nh1 q11+Nh2q q21)))/(Nh1 q11+Nh2 q21)+(Bh2 Bm2 Nm2 ((Nh1 q12^2)/(Nh1 q12+Nh2 q22)+(Nh2 q22^2)/(Nh1 q12+Nh2 q22)))/(Nh1 q12+Nh2 q22)+\[Sqrt](-((4 Bh1 Bh2 Bm1 Bm2 Nm1 Nm2 (q12 q21+q11 q22) (-((Nh1 Nh2 q12 q21)/((Nh1 q11+Nh2q q21) (Nh1 q12+Nh2 q22)))+(Nh1 Nh2 q11 q22)/((Nh1 q11+Nh2 q21) (Nh1 q12+Nh2 q22))))/((Nh1 q11+Nh2 q21) (Nh1 q12+Nh2 q22)))+((Bh1 Bm1 Nm1 ((Nh1 q11^2)/(Nh1 q11+Nh2 q21)+(Nh2 q21^2)/(Nh1 q11+Nh2q q21)))/(Nh1 q11+Nh2 q21)+(Bh2 Bm2 Nm2 ((Nh1 q12^2)/(Nh1 q12+Nh2 q22)+(Nh2 q22^2)/(Nh1 q12+Nh2 q22)))/(Nh1 q12+Nh2 q22))^2)) $\sqrt{\delta\ (\gamma + \mu)}$)

Derivada respecto a γ

D[$\mathcal{R}_0$[Bh1,Bh2,Bm1,Bm2,γ,μ,δ,q11,q12,q22,q21],γ]

-1/(2 $\sqrt{2}$ (δ (γ+μ))$^{3/2}$) \[Sqrt]((Bh1 Bm1 Nm1 ((Nh1 q11^2)/(Nh1 q11+Nh2 q21)+(Nh2 q21^2)/(Nh1 q11+Nh2q q21)))/(Nh1 q11+Nh2 q21)+(Bh2 Bm2 Nm2 ((Nh1 q12^2)/(Nh1 q12+Nh2 q22)+(Nh2 q22^2)/(Nh1 q12+Nh2 q22)))/(Nh1 q12+Nh2 q22)+\[Sqrt](-((4 Bh1 Bh2 Bm1 Bm2 Nm1 Nm2 (q12 q21+q11 q22) (-((Nh1 Nh2 q12 q21)/((Nh1 q11+Nh2q q21) (Nh1 q12+Nh2 q22)))+(Nh1 Nh2 q11 q22)/((Nh1 q11+Nh2 q21) (Nh1 q12+Nh2 q22))))/((Nh1 q11+Nh2 q21) (Nh1 q12+Nh2 q22)))+((Bh1 Bm1 Nm1 ((Nh1 q11^2)/(Nh1 q11+Nh2 q21)+(Nh2 q21^2)/(Nh1 q11+Nh2q q21)))/(Nh1 q11+Nh2 q21)+(Bh2 Bm2 Nm2 ((Nh1 q12^2)/(Nh1 q12+Nh2 q22)+(Nh2 q22^2)/(Nh1 q12+Nh2 q22)))/(Nh1 q12+Nh2 q22))^{2})) δ

Derivada respecto a μ

D[$\mathcal{R}_0$[Bh1,Bh2,Bm1,Bm2,γ,μ,δ,q11,q12,q22,q21],μ]

-1/(2 $\sqrt{2}$ (δ (γ+μ))$^{3/2}$) \[Sqrt]((Bh1 Bm1 Nm1 ((Nh1 q11^{2})/(Nh1 q11+Nh2 q21)+(Nh2 q21^{2})/(Nh1 q11+Nh2q q21)))/(Nh1 q11+Nh2 q21)+(Bh2 Bm2 Nm2 ((Nh1 q12^{2})/(Nh1 q12+Nh2 q22)+(Nh2 q22^{2})/(Nh1 q12+Nh2 q22)))/(Nh1 q12+Nh2 q22)+\[Sqrt](-((4 Bh1 Bh2 Bm1 Bm2 Nm1 Nm2 (q12 q21+q11 q22) (-((Nh1 Nh2 q12 q21)/((Nh1 q11+Nh2q q21) (Nh1 q12+Nh2 q22)))+(Nh1 Nh2 q11 q22)/((Nh1 q11+Nh2 q21) (Nh1 q12+Nh2 q22))))/((Nh1 q11+Nh2 q21) (Nh1 q12+Nh2 q22)))+((Bh1 Bm1 Nm1 ((Nh1 q11^2)/(Nh1 q11+Nh2 q21)+(Nh2 q21^2)/(Nh1 q11+Nh2q q21)))/(Nh1 q11+Nh2 q21)+(Bh2 Bm2 Nm2 ((Nh1 q12^2)/(Nh1 q12+Nh2 q22)+(Nh2 q22^2)/(Nh1 q12+Nh2 q22)))/(Nh1 q12+Nh2 q22))^{2})) δ

Derivada respecto a δ

D[$\mathcal{R}_0$ [Bh1,Bh2,Bm1,Bm2,γ,μ,δ,q11,q12,q22,q21],δ]

-1/(2 $\sqrt{2}$ (δ (γ+μ))$^{3/2}$) \[Sqrt]((Bh1 Bm1 Nm1 ((Nh1 q11^{2})/(Nh1 q11+Nh2 q21)+(Nh2 q21^{2})/(Nh1 q11+Nh2q q21)))/(Nh1 q11+Nh2 q21)+(Bh2 Bm2 Nm2 ((Nh1 q12^{2})/(Nh1 q12+Nh2 q22)+(Nh2 q22^{2})/(Nh1 q12+Nh2 q22)))/(Nh1 q12+Nh2 q22)+\[Sqrt](-((4 Bh1 Bh2 Bm1 Bm2 Nm1 Nm2 (q12 q21+q11 q22) (-((Nh1 Nh2 q12 q21)/((Nh1 q11+Nh2q q21) (Nh1 q12+Nh2 q22)))+(Nh1 Nh2 q11 q22)/((Nh1 q11+Nh2 q21) (Nh1 q12+Nh2 q22))))/((Nh1 q11+Nh2 q21) (Nh1 q12+Nh2 q22)))+((Bh1 Bm1 Nm1 ((Nh1 q11^2)/(Nh1 q11+Nh2 q21)+(Nh2 q21^2)/(Nh1 q11+Nh2q q21)))/(Nh1 q11+Nh2 q21)+(Bh2 Bm2 Nm2 ((Nh1 q12^2)/(Nh1 q12+Nh2 q22)+(Nh2 q22^2)/(Nh1 q12+Nh2 q22)))/(Nh1 q12+Nh2 q22))^{2})) (γ+μ)

Derivada respecto a q11

D[$\mathcal{R}_0$ [Bh1,Bh2,Bm1,Bm2,γ,μ,δ,q11,q12,q22,q21],q11]

((Bh1 Bm1 Nm1 (-((Nh1^{2} q11^{2})/(Nh1 q11+Nh2 q21)^{2})-(Nh1 Nh2 q21^{2})/(Nh1 q11+Nh2 q21)^{2}+(2 Nh1 q11)/(Nh1 q11+Nh2 q21)))/(Nh1 q11+Nh2 q21)-(Bh1 Bm1 Nh1 Nm1 ((Nh1 q11^{2})/(Nh1 q11+Nh2 q21)+(Nh2 q21^{2})/(Nh1 q11+Nh2 q21)))/(Nh1 q11+Nh2 q21)^{2}+(-((4 Bh1 Bh2 Bm1 Bm2 Nm1 Nm2 (q12 q21+q11 q22) ((Nh1^{2} Nh2 q12 q21)/((Nh1 q11+Nh2q q21)^{2} (Nh1 q12+Nh2 q22))-(Nh1^{2} Nh2 q11 q22)/((Nh1 q11+Nh2 q21)^{2} (Nh1 q12+Nh2 q22))+(Nh1 Nh2 q22)/((Nh1 q11+Nh2 q21) (Nh1 q12+Nh2 q22))))/((Nh1 q11+Nh2 q21) (Nh1 q12+Nh2 q22)))-(4 Bh1 Bh2 Bm1 Bm2 Nm1 Nm2 q22 (-((Nh1 Nh2 q12 q21)/((Nh1 q11+Nh2q q21) (Nh1 q12+Nh2 q22)))+(Nh1 Nh2 q11 q22)/((Nh1 q11+Nh2 q21) (Nh1 q12+Nh2 q22))))/((Nh1 q11+Nh2 q21) (Nh1 q12+Nh2 q22))+(4 Bh1 Bh2 Bm1 Bm2 Nh1 Nm1 Nm2 (q12 q21+q11 q22) (-((Nh1 Nh2 q12 q21)/((Nh1 q11+Nh2q q21) (Nh1 q12+Nh2 q22)))+(Nh1 Nh2 q11 q22)/((Nh1 q11+Nh2 q21) (Nh1 q12+Nh2 q22))))/((Nh1 q11+Nh2 q21)^{2} (Nh1 q12+Nh2 q22))+2 ((Bh1 Bm1 Nm1 (-((Nh1^{2} q11^{2})/(Nh1 q11+Nh2 q21)^{2})-(Nh1 Nh2 q21^{2})/(Nh1 q11+Nh2 q21)^{2}+(2 Nh1 q11)/(Nh1 q11+Nh2 q21)))/(Nh1 q11+Nh2 q21)-(Bh1 Bm1 Nh1 Nm1 ((Nh1 q11^{2})/(Nh1 q11+Nh2 q21)+(Nh2 q21^{2})/(Nh1 q11+Nh2 q21)))/(Nh1 q11+Nh2 q21)^{2}) ((Bh1 Bm1 Nm1 ((Nh1 q11^{2})/(Nh1 q11+Nh2 q21)+(Nh2 q21^{2})/(Nh1 q11+Nh2 q21)))/(Nh1 q11+Nh2 q21)+(Bh2

Bm2 Nm2 ((Nh1 q12^2)/(Nh1 q12+Nh2 q22)+(Nh2 q22^2)/(Nh1 q12+Nh2 q22)))/(Nh1 q12+Nh2 q22)))/(2 \[Sqrt](-((4 Bh1 Bh2 Bm1 Bm2 Nm1 Nm2 (q12 q21+q11 q22) (-((Nh1 Nh2 q12 q21)/((Nh1 q11+Nh2q q21) (Nh1 q12+Nh2 q22)))+(Nh1 Nh2 q11 q22)/((Nh1 q11+Nh2 q21) (Nh1 q12+Nh2 q22))))/((Nh1 q11+Nh2 q21) (Nh1 q12+Nh2 q22)))+((Bh1 Bm1 Nm1 ((Nh1 q11^2)/(Nh1 q11+Nh2 q21)+(Nh2 q21^2)/(Nh1 q11+Nh2 q21)))/(Nh1 q11+Nh2 q21)+(Bh2 Bm2 Nm2 ((Nh1 q12^2)/(Nh1 q12+Nh2 q22)+(Nh2 q22^2)/(Nh1 q12+Nh2 q22)))/(Nh1 q12+Nh2 q22))^2)))/(2 $\sqrt{2}$ \[Sqrt]((Bh1 Bm1 Nm1 ((Nh1 q11^2)/(Nh1 q11+Nh2 q21)+(Nh2 q21^2)/(Nh1 q11+Nh2 q21)))/(Nh1 q11+Nh2 q21)+(Bh2 Bm2 Nm2 ((Nh1 q12^2)/(Nh1 q12+Nh2 q22)+(Nh2 q22^2)/(Nh1 q12+Nh2 q22)))/(Nh1 q12+Nh2 q22)+\[Sqrt](-((4 Bh1 Bh2 Bm1 Bm2 Nm1 Nm2 (q12 q21+q11 q22) (-((Nh1 Nh2 q12 q21)/((Nh1 q11+Nh2q q21) (Nh1 q12+Nh2 q22)))+(Nh1 Nh2 q11 q22)/((Nh1 q11+Nh2 q21) (Nh1 q12+Nh2 q22))))/((Nh1 q11+Nh2 q21) (Nh1 q12+Nh2 q22)))+((Bh1 Bm1 Nm1 ((Nh1 q11^2)/(Nh1 q11+Nh2 q21)+(Nh2 q21^2)/(Nh1 q11+Nh2 q21)))/(Nh1 q11+Nh2 q21)+(Bh2 Bm2 Nm2 ((Nh1 q12^2)/(Nh1 q12+Nh2 q22)+(Nh2 q22^2)/(Nh1 q12+Nh2 q22)))/(Nh1 q12+Nh2 q22))^2)) $\sqrt{\delta (\gamma + \mu)}$)

Material suplementario 2

Demostración del Teorema 3

Sean *M* y *L* matrices tales que guardan la información de infección cruzada entre las dos zonas del modelo (3). Esto es,

$$M = \begin{pmatrix} \beta_{m_1}p_{11} & \beta_{m_1}p_{21} \\ \beta_{m_2}p_{12} & \beta_{m_2}p_{22} \end{pmatrix} \quad , \quad L = \begin{pmatrix} q_{11}\beta_{h_1}\theta_1 & q_{12}\beta_{h_2}\theta_2 \\ q_{21}\beta_{h_1}\theta_1 & q_{22}\beta_{h_2}\theta_2 \end{pmatrix}.$$

Sea la matriz $\Phi = \begin{pmatrix} 0 & L \\ M & 0 \end{pmatrix}$ tal que la red de contacto[1] del modelo (3) está fuertemente conectada. Entonces Φ es no negativa, pues las componentes de *M* y *L* son no negativas, e irreducible, ya que qué una matriz cuadrada es irreducible, si la red de contactos

está fuertemente conectada.

Teorema 3. *Suponga que la red de contacto está fuertemente conectada entonces el sistema (3) tiene un equilibrio endémico único si 1 <* $\mathcal{R}_0$. *Además, este equilibrio es localmente asintóticamente estable*.

Demostración. Sea $e^* = \left(S*_{h_1}, I*_{h_1}, I*_{m_1}, S*_{h_2}, I*_{h_2}, I*_{m_2}\right)$ un equilibrio endémico del sistema (3), entonces:

$$\mu = \left(\mu + q_{11}\beta_{h_1}I*_{m_1}\theta_1 + q_{12}\beta_{h_2}I*_{m_2}\theta_2\right)S*_{h_1}, \qquad \text{(A1)}$$

$$\mu = \left(\mu + q_{22}\beta_{h_2}I*_{m_2}\theta_2 + q_{21}\beta_{h_1}I*_{m_1}\theta_1\right)S*_{h_2}, \qquad \text{(A2)}$$

1 Por red de contacto se entenderá como la red de movilidad entre las zonas.

$$(\mu+\gamma)I*_{h_1} = S*_{h_1}\left(\mu + q_{11}\beta_{h_1} I*_{m_1}\,\theta_1 + q_{12}\beta_{h_2} I*_{m_2}\,\theta_2\right), \tag{A3}$$

$$(\mu+\gamma)I*_{h_2} = S*_{h_2}\left(\mu + q_{22}\beta_{h_2} I*_{m_2}\,\theta_2 + q_{21}\beta_{h_1} I*_{m_1}\,\theta_1\right), \tag{A4}$$

$$\delta I*_{m_1} = \left(1 - I*_{m_1}\right)\left(\beta_{m_1} p_{11} I*_{h_1} + \beta_{m_1} p_{21} I*_{h_2}\right), \tag{A5}$$

$$\delta I*_{m_2} = \left(1 - I*_{m_2}\right)\left(\beta_{m_2} p_{12} I*_{h_1} + \beta_{m_2} p_{22} I*_{h_2}\right), \tag{A6}$$

de (A1) y (A2) obtenemos

$$S*_{h_1} = (\mu + q_{11}\beta_{h_1} I*_{m_1}\,\theta_1 + q_{12}\beta_{h_2} I*_{m_2}\,\theta_2)^{-1}\mu$$

$$S*_{h_2} = (\mu + q_{22}\beta_{h_2} I*_{m_2}\,\theta_2 + q_{21}\beta_{h_1} I*_{m_1}\,\theta_1)^{-1}\mu$$

reemplazando $S*_{h_1}$ y $S*_{h_2}$ en (A3) y (A4) respectivamente, tenemos

$$I*_{h_1} = (\mu+\gamma)^{-1}\left(\mu + q_{11}\beta_{h_1} I*_{m_1}\,\theta_1 + q_{12}\beta_{h_2} I*_{m_2}\,\theta_2\right)^{-1}\left(q_{11}\beta_{h_1} I*_{m_1}\,\theta_1 + q_{12}\beta_{h_2} I*_{m_2}\,\theta_2\right)\mu$$

$$I*_{h_2} = (\mu+\gamma)^{-1}\left(\mu + q_{22}\beta_{h_2} I*_{m_2}\,\theta_2 + q_{21}\beta_{h_1} I*_{m_1}\,\theta_1\right)^{-1}\left(q_{22}\beta_{h_2} I*_{m_2}\,\theta_2 + q_{21}\beta_{h_1} I*_{m_1}\,\theta_1\right)\mu$$

de (A5) y (A6) obtenemos

$$I*_{m_1} = \left(\delta + \beta_{m_1} p_{11} I*_{h_1} + \beta_{m_1} p_{21} I*_{h_2}\right)^{-1}\left(\beta_{m_1} p_{11} I*_{h_1} + \beta_{m_1} p_{21} I*_{h_2}\right)$$

$$I*_{m_2} = \left(\delta + \beta_{m_2} p_{12} I*_{h_1} + \beta_{m_2} p_{21} I*_{h_2}\right)^{-1}\left(\beta_{m_2} p_{12} I*_{h_1} + \beta_{m_2} p_{22} I*_{h_2}\right)$$

así, $\left(I*_{h_1}, I*_{h_2}, I*_{m_1}, I*_{m_2}\right)$ es un punto fijo de la aplicación ζ dada por

$$\zeta(x_1, x_2, y_1, y_2) = \begin{pmatrix} (\mu+\gamma)^{-1}\left(\mu + \sum_{j=1}^{2} q_{1j}\beta_{h_j} y_j\,\theta_j\right)^{-1}\left(\sum_{j=1}^{2} q_{1j}\beta_{h_j} y_j\,\theta_j\right)\mu \\ (\mu+\gamma)^{-1}\left(\mu + \sum_{j=1}^{2} q_{2j}\beta_{h_j} y_j\,\theta_j\right)^{-1}\left(\sum_{j=1}^{2} q_{2j}\beta_{h_j} y_j\,\theta_j\right)\mu \\ \left(\delta + \sum_{j=1}^{2} \beta_{m_1} p_{j1}\, x_j\right)^{-1}\left(\sum_{j=1}^{2} \beta_{m_1} p_{j1}\, x_j\right) \\ \left(\delta + \sum_{j=1}^{2} \beta_{m_2} p_{j2}\, x_j\right)^{-1}\left(\sum_{j=1}^{2} \beta_{m_2} p_{j2}\, x_j\right) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} diag(\mu\mathbf{1}+\gamma\mathbf{1})^{-1}\, diag(\mu\mathbf{1}+Ly)^{-1}\, diag(Ly)\mu\mathbf{1} \\ diag(\delta\mathbf{1}+Mx)^{-1}\, diag(Mx)\mathbf{1} \end{pmatrix}$$

donde $x = \binom{x_1}{x_2}$, $y = \binom{x_1}{x_2}$ y $\mathbf{1} \in \mathbb{R}^2$

Afirmación 1. *Sea F (ω) una función continua, monótona no decreciente, estrictamente sublineal, cerrada la cual mapea el ortante no negativo* $\mathbb{R}_+^n = [0, \infty)^n$ *en sí mismo. Si* $F(0) = 0$ y $F'(0)$ *existe y es irreducible, entonces* $F(\omega)$ *no tiene un punto trivial en la frontera de* $\mathbb{R}_+^n$*. Además,* $F(\omega)$ *tiene un punto fijo positivo si* ρ $(F'(0)) > 1$*. Si lo hay es único.*

Verifiquemos las hipótesis de la afirmación 1.

- ζ es continua pues cada componente es continuo.
- ζ es cerrada, pues se mapea en el octante no negativo de $\mathbb{R}^2\ x\ \mathbb{R}^2$ en sí mismo, Se garantiza por el teorema 1.
- Para probar la monotonía de ζ, mostraremos que el jacobiano de ζ es una matriz de Metzler (**Jacquez J., Simon C.,** 1993). Efectivamente,

$$J\,(\zeta\,(x_1\,, x_2\,, y_1\,, y_2)) = \begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix}$$

donde

$A = [\alpha_{ik}]$

$$= (\mu + \gamma)^{-1}\left(\mu + \sum_{j=1}^{2} q_{ij}\beta_{h_j}y_j\,\theta_j\right)^{-1}\mu\left[1 - \frac{\sum_{j=1}^{2} q_{ij}\beta_{h_j}y_j\,\theta_j}{\mu + \sum_{j=1}^{2} q_{ij}\beta_{h_j}y_j\,\theta_j}\right]\left(q_{ik}\beta_{h_k}\theta_k\right)$$

$B = [b_{ik}]$

$$= \left(\delta + \sum_{j=1}^{2} \beta_{m_i}p_{j_i}x_j\right)^{-1}\left[1 - \frac{\sum_{j=1}^{2} \beta_{m_i}p_{j_i}x_j}{\delta + \sum_{j=1}^{2} \beta_{m_i}p_{j_i}x_j}\right]\left(\beta_i p_{k_i}\right)$$

y cada componente tanto de *A* como de *B* es mayor o igual a cero, así $J(\zeta(x_1, x_2, y_1, y_2))$, es una matriz de Metzler.

- Para mostrar que ζ es estrictamente sublineal, debe pasar que *para* $0 < \lambda < 1\ y\ \omega \gg 0,$ entonces $\lambda\zeta(\omega) \ll \zeta(\lambda\omega)$ (**Smith H.,** 1995). Como $x \gg 0$ y $y \gg 0$, ya que Φ es irreducible, entonces $\Phi\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \gg 0$ en consecuencia $Ly \gg 0$ y $Mx \gg 0$. Sea $0 < \lambda < 1$ entonces se tiene que

$$Ly \gg \lambda Ly$$

$$\mu 1 + Ly \gg \mu 1 + \lambda Ly$$

$$diag(\mu 1 + Ly) \gg diag(\mu 1 + \lambda Ly)$$

$$diag(\mu 1 + Ly)^{-1} \ll diag(\mu 1 + \lambda Ly)^{-1}$$

$$diag(\mu 1 + Ly)^{-1}\, diag(\lambda\, Ly) \ll diag(\mu 1 + \lambda Ly)^{-1}\, diag(\lambda\, Ly)$$

$$\lambda\, diag(\mu 1 + \gamma 1)^{-1}\, diag(\mu 1 + Ly)^{-1}\, diag(Ly)\mu \ll diag(\mu 1 + \lambda Ly)^{-1} diag(\mu 1 + Ly)^{-1}\, diag(\lambda\, Ly)\mu$$

Procediendo análogamente para Mx se obtiene que

$$\lambda\, diag(\delta 1 + Mx)^{-1}\, diag(Mx) \ll diag(\delta 1 + \lambda Mx)^{-1} diag(\lambda\, Mx)$$

llevándonos a concluir que $\lambda\zeta(\omega) \ll \zeta(\lambda\omega)$.

Observe que $\zeta(0) = 0$ y $J(\zeta(0)) = \begin{pmatrix} 0 & (\mu + \gamma)^{-1} L \\ \delta^{-1}M & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & L_1 \\ M_1 & 0 \end{pmatrix}$ es irreducible debido a que Φ lo es (Iggidr A., Sallet G., Souza M., 2016), ya que

$$L_1M_1 = (\mu + \gamma)^{-1}L\delta^{-1}M_1 = (\mu + \gamma)^{-1}\delta^{-1}LM,$$

$$M_1L_1 = \delta^{-1}M_1(\mu + \gamma)^{-1}L = \delta^{-1}(\mu + \gamma)^{-1}ML,$$

y *LM, ML* son irreducibles. Por otro lado, la condición dos se tiene, ya que para algún $v \gg 0$ se tiene que $Lv \gg 0$ y $Mv \gg 0$, como δ^{-1}, $(\mu + \gamma)^{-1} > 0$, entonces

$$L_{1_v} = (\mu + \gamma)^{-1} L_v \gg 0 \ ,$$

$$M_{1_v} = \delta^{-1}M_v \gg 0 \ .$$

Así, $\zeta(\omega)$ no tiene un punto fijo no trivial en la frontera. Además, $\zeta(\omega)$ tiene un punto fijo positivo si $\rho(J(\zeta(0))) > 1$ y es único, como, $\rho(J(\zeta(0))) = \mathcal{R}_0$, luego el sistema (3.3) tiene un punto de equilibrio endémico único.

Para mostrar que el punto de equilibrio endémico es asintóticamente estable, bastará verificar que la solución del sistema (3) linealizado no tiene solución de la forma $X(t) = X_0e^{zt}$ con $\mathcal{R}(z) \geq 0$, parte real de z, donde $X_0 \in \mathbb{C}^3$ el vector propio y $z \in \mathbb{C}$ el valor propio correspondiente del jacobiano en el equilibrio endémico.

Sean $U = \begin{pmatrix} S_{h_1} \\ S_{h_2} \end{pmatrix}$, $V = \begin{pmatrix} I_{h_1} \\ I_{h_2} \end{pmatrix}$ y $W = \begin{pmatrix} I_{m_1} \\ I_{m_2} \end{pmatrix}$, considerando $X_0 = (U, V, W)$ un vector propio correspondiente al valor propio z entonces, linealizando el sistema (3.3) se obtiene:

$$zU = -diag(\mu 1)U - diag(LI_m^*)U - diag(S_h^*)LW \qquad \text{(A7)}$$

$$zV = -diag(LI_m^*)U - (\mu 1 + \gamma 1)V + diag(S_h^*)LW \qquad \text{(A8)}$$

$$zW = -diag(1 - I_m^*)MV - \delta W - diag(MI_h^*)W \qquad \text{(A9)}$$

Donde $S_h^* = \begin{pmatrix} S_{h_1}^* \\ S_{h_2}^* \end{pmatrix}$, $I_h^* = \begin{pmatrix} I_{h_1}^* \\ I_{h_2}^* \end{pmatrix}$ y $S_h^* = \begin{pmatrix} I_{m_1}^* \\ I_{m_2}^* \end{pmatrix}$

Sumando las ecuaciones (A7) y (A8), se obtiene la igualdad

$$U = -diag(\mu 1 + z1)^{-1} U \, diag(\mu 1 + \gamma 1 + z1) \, V$$

reemplazando U en (A8) y (A9) y escribiendo en forma matricial, se tiene

$$\psi = \Phi * v$$

donde

$$\psi = \begin{pmatrix} diag(1+zdiag\ (\mu 1+\gamma 1)^{-1}1+\ diag(\mu 1+\gamma 1+z1)\ diag(\mu 1+z1)diag\ (\mu 1+\gamma 1)^{-1}LI_m^*)V \\ diag\left(1+zdiag(\delta 1)^{-1}1+diag(\delta 1)^{-1}MI_h^*\right)W \end{pmatrix}$$

$$\Phi^* = \begin{pmatrix} 0 & diag\ (\mu 1 + \gamma 1)^{-1} diag(S_h^*)L \\ diag\ (\delta 1)^{-1} diag(1 - I_m^*)M & 0 \end{pmatrix}, \quad v = \binom{V}{W}$$

Claramente Φ^* es una matriz no negativa e irreducible y además

$$\Phi^* \begin{pmatrix} I_h^* \\ I_m^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_h^* \\ I_m^* \end{pmatrix}$$

Supongamos que $R(z) \geq 0$ y α la mínima parte real de

$$zdiag(\mu 1 + \gamma 1)^{-1}1 + diag(\mu 1 + \gamma 1 + z1)diag(\mu 1 + z1)diag(\mu 1 + z1)^{-1}LI_m^*$$

y

$$zdiag(\delta 1)^{-1}1 + diag(\delta 1)^{-1}MI_h^*$$

como $R(z) \geq 0$, Φ es irreducible y los vectores $I_m^* \gg 0$ e $I_h^* \gg 0$, entonces α debe ser mayor a cero, así

$$[1+\alpha]\left(\frac{|V|}{|W|}\right) \leq \Phi^*\left(\frac{|V|}{|W|}\right)$$

Sea τ el mínimo número tal que

$$\left(\frac{|V|}{|W|}\right) \leq \tau\left(\frac{I_h^*}{I_m^*}\right)$$

luego,

$$[1+\alpha]\left(\frac{|V|}{|W|}\right) \leq \Phi^*\left(\frac{|V|}{|W|}\right) \leq \tau\Phi^*\left(\frac{I_h^*}{I_m^*}\right) = \tau\left(\frac{I_h^*}{I_m^*}\right)$$

$$\left(\frac{|V|}{|W|}\right) \leq \frac{\tau}{1+\alpha}\left(\frac{I_h^*}{I_m^*}\right)$$

lo cual contradice la minimalidad de τ. Por lo tanto, $\Re(z) < 0$ y el equilibrio endémico es asintóticamente estable.