Revista de la Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales.
50(194):213-233, enero-marzo de 2026. doi: https://doi.org/10.18257/raccefyn.3288

Matemáticas

Artículo original

Una variación de la Transformada Doble de Laplace No-Conformable

A variation of the Non-Conformable Double Laplace Transform

Harold David Jarrín[1], José Luis Marcillo-Parra[1], Janneth Velasco-Velasco[1,*], Miguel Vivas-Cortez[2]

[1]Departamento de Ciencias Exactas, Universidad de las Fuerzas Armadas ESPE, Sangolquí, Pichincha, Ecuador
[2]Facultad de Ciencias Exactas, Naturales y Ambientales, Pontificia Universidad Católica del Ecuador, Laboratorio FRACTAL (Fractional Research Analysis, Convexity and Their Applications Laboratory), Quito, Pichincha, Ecuador

Resumen

En este artículo se presenta la transformada doble de Laplace non-conformable, creada para resolver ecuaciones diferenciales de funciones de dos variables dentro del cálculo fraccionario local. Se demuestran sus propiedades principales y se incluyen ejemplos de la resolución de ecuaciones diferenciales parciales non-conformables.

Palabras clave: Transformada de Laplace; Cálculo fraccionario; Derivada non-conformable.

Abstract

In this paper, we introduce the non-conformable double Laplace transform, developed to solve differential equations of functions of two variables within the framework of local fractional calculus. Its main properties are established, and examples are provided to illustrate the solution of non-conformable partial differential equations.

Keywords: Laplace transform; Fractional calculus; Non-conformable derivative.

Citación: Jarrín HD, *et al*. Una variación de la transformada doble de Laplace non-conformable. Revista de la Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. 50(194):213-233, enero-marzo de 2026. doi: https://doi.org/10.18257/raccefyn.3288

Editor: Francisco José Marcellán Español

***Correspondencia:**
Janneth Velasco-Velasco;
javelasco3@espe.edu.ec

Recibido: 2 de septiembre de 2025
Aceptado: 11 de diciembre de 2025
Publicado en línea: 30 de enero de 2026

Este artículo está bajo una licencia de Creative Commons Reconocimiento-NoComercial-Compartir Igual 4.0 Internacional

1 Introducción

El desarrollo del cálculo fraccionario ha estado motivado, desde sus orígenes en el siglo XVII, G. W. Leibniz. (ver Leibniz (1692)), por un interés en extender las operaciones de derivación e integración más allá de los órdenes enteros. En sus inicios, las discusiones sobre la posibilidad de derivadas de orden no entero, como las planteadas por l'Hôpital y Leibniz, fueron en parte, la razón por que formalizaciones progresivas en el cálculo de la variabilidad, siguieron formulándose de manera sistemática a través de trabajos de Euler, Riemann, Caputo, entre otros.

En los últimos años, diversas motivaciones provenientes de fenómenos reales y modelos físicos han revelado procesos con memoria y estructuras que desafían la mecánica clásica. Tal es el caso, por ejemplo, de la biología, la dinámica automatizada, y la teoría de control.

Las contribuciones de investigadores de distintas áreas, han impulsado nuevas formulaciones tanto en la derivación fraccionaria como en la integración fraccionaria.

En los últimos años, ha cobrado relevancia una familia particular de operadores derivados, conocida como derivadas fraccionarias locales. Para profundizar en este tema, pueden consultarse diversas referencias (Abdeljawad (2015), Anastassiou (2011), Atangana and Baleanu (2015), Diethelm (2010), Gozutok and Gozutok (2018), Guzmán et al. (2020b), Kilbas et al. (2006), Mhalian et al. (2020), Miller and Ross (1993), Nápoles Valdes et al. (2020), Ross et al. (1994), Vivas-Cortez et al. (2021a), Vivas-Cortez et al. (2024), Vivas-Cortez et al. (2022), Vivas-Cortez et al. (2021b), Vivas-Cortez et al. (2025a), Vivas-Cortez

Revista de la Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales.
50(194):213-233 enero-marzo de 2026. doi: https://doi.org/10.18257/raccefyn.3288

et al. (2025b), Vivas-Cortez et al. (2023), Yang (2011b), Yang et al. (2013), Yang (2011a), Yang (2016)). En este conjunto, la derivada conformable es particularmente relevante, introducida por Khalil (Khalil et al. (2014)).

Años más tarde, Paulo Guzmán en (Guzmán et al. (2018)) introducen la derivada fraccionaria local non-conformable.

Estas últimas derivadas ofrecen un comportamiento más cercano a la derivada fraccionaria local, con ciertas ventajas como la linealidad de la derivación aditiva, al estar definidas en términos locales (ver González et al. (2020), Guzmán and Nápoles Valdes (2019), Guzmán et al. (2020a), Martínez et al. (2022), Martínez and Nápoles Valdes (2020), Nápoles Valdes et al. (2018)).

La aparición de estas derivadas ha motivado una revisión sistemática de herramientas del análisis clásico en este nuevo marco conformable y non-conformable. Entre ellas, la transformada de Laplace ocupa un lugar central, especialmente en la resolución de ecuaciones diferenciales lineales.

El objetivo de este artículo es proponer una transformada doble de Laplace adecuada al contexto de derivación non-conformable. Aunque algunas extensiones han sido desarrolladas en un contexto fraccionario local, como la propuesta dada por Sami Injrou and Iyad Hatem (2022) en Injrou and Hatem (2022), que fusiona la derivación dada por Francisco González en González et al. (2020) con la doble transformada de Laplace, no se ha estudiado una versión que combine la derivación dada en Guzmán et al. (2018) con la transformada de Laplace en más de una variable.

Este trabajo se propone: (a) establecer la doble transformada de Laplace non-conformable para Guzmán et al. (2018), (b) estudiar sus propiedades fundamentales, y (c) aplicar dicha herramienta en la resolución de ecuaciones diferenciales parciales con derivadas fraccionarias locales. Se ha obtenido los mismos resultados a los de Teorema 1, Lema 1 y Teorema 2 de Injrou and Hatem (2022), pero utilizando las definiciones de derivación, integral y transformada simple de Guzmán et al. (2018) en Teoremas 1, 2 y 3, en el Teorema 1 se han incorporado algunas propiedades adicionales, en cuanto a los ejemplos dados en Injrou and Hatem (2022), se han obtenido distintas soluciones.

2 Preliminares

Ahora, presentamos la definición de derivada fraccionaria non-conformable y algunas notaciones y propiedades importantes.

Definición 1 ver Guzmán et al. (2018)

Sea $\mathfrak{h} : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ una función. La derivada fraccionaria non-conformable $N_1^{\phi}\mathfrak{f}(\tau)$, de orden $\phi \in (0,1)$ en $\tau \in (0,\infty)$, se define como:

$$N_1^{\phi}\mathfrak{f}(\tau) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\mathfrak{h}(\tau + \varepsilon e^{\tau^{-\phi}}) - \mathfrak{h}(\tau)}{\varepsilon}$$

Se dice que $\mathfrak{h}$ es ϕ-non-conformable en un punto $\tau > 0$ cuando el limite dado existe.

La siguiente definción fue establecida por M. Vivas-Cortez en Vivas-Cortez et al. (2021b)

Definición 2 ver Vivas-Cortez et al. (2021b)

Dado $\tau \in \mathbb{R}^+$ un número real positivo, la exponencial fraccionaria $\mathfrak{E}_\phi(\tau)$ está definida como:

$$\mathfrak{E}^{N_1}_{\phi,q}(\tau) = e^{q\int_0^\tau e^{-u^{-\phi}}du}$$

Definición 3 ver Guzmán et al. (2018)

Para $\phi \in (0,1]$, y $0 \leq u \leq v$. Se dice que una función $\mathfrak{h}(\zeta) : [u,v] \to \mathbb{R}$ es *ϕ-fraccional integrable* en $[u,v]$ si la integral

$${}_{N_1}J^{\phi}_{u}\mathfrak{h}(\zeta) := \int_0^\zeta \left(e^{-u^{-\phi}}\right)\mathfrak{h}(u)\,du$$

existe y es finita.

A continuación presentamos las definiciones de la transformada doble de Laplace y transformada simple de Laplace non-conformables de una función de dos variables y mostramos algunas propiedades.

3 Transformada doble de Laplace non-conformable

Definición 4
Dada $\mathfrak{f}(\zeta,\tau)$ una función continua a trozos en $[0,\infty)\times[0,\infty)$ es de orden exponencial generalizado; es decir, existen constantes $\mathfrak{M}$, q y r tales que

$$|\mathfrak{f}(\zeta,\tau)| \leq \mathfrak{M}\,\mathfrak{E}^{N_1}_{\phi,q}(\tau)\,\mathfrak{E}^{N_1}_{\psi,r}(\zeta) = \mathfrak{M}\,e^{q\int_0^\tau e^{-u^{-\phi}}du}\,e^{r\int_0^\zeta e^{-u^{-\psi}}du}$$

Definición 5
Sean $\phi,\psi \in (0,1)$ y $q,r \in \mathbb{R}$. Sea $\mathfrak{f}$ una función continua a trozos definida para $\tau \geq 0$ y $\zeta \geq 0$, donde además se consideran $w,v \in \mathbb{C}$.

Definimos entonces la expresión

$$\mathfrak{F}(v,w) = \mathscr{L}^{\phi}_{N_1,\tau}\mathscr{L}^{\psi}_{N_1,\zeta}\left[\mathfrak{f}(\zeta,\tau)\right],$$

la cual puede expresarse como

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\tau^{-\phi}}\,e^{-\zeta^{-\psi}}\,\mathfrak{E}^{N_1}_{\phi,-w}(\tau)\,\mathfrak{E}^{N_1}_{\psi,-v}(\zeta)\,\mathfrak{f}(\zeta,\tau)\,d\zeta\,d\tau\\ =&\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\tau^{-\phi}}\,e^{-\zeta^{-\psi}}\,e^{-w\int_0^\tau e^{-u^{-\phi}}du}\,e^{-v\int_0^\zeta e^{-u^{-\psi}}du}\,\mathfrak{f}(\zeta,\tau)\,d\zeta\,d\tau\end{aligned}$$

que es la transformada doble de Laplace non-conformable de $\mathfrak{f}(\zeta,\tau)$. En este caso, las integrales que aparecen se consideran como integrales fraccionarias non-conformables, tomadas con respecto a las variables τ y ζ.

Definición 6

Sea $\mathfrak{f}(\zeta,\tau)$ una función continua a trozos definida en $(0,\infty)\times(0,\infty)$ y de orden exponencial generalizado.

Revista de la Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales.
50(194):213-233 enero-marzo de 2026. doi: https://doi.org/10.18257/raccefyn.3288

Consideremos primero la transformada de Laplace non-conformable con respecto a ζ, definida por

$$\mathfrak{F}(v,\tau) = \mathscr{L}^{\psi}_{N_1,\zeta}\left[\mathfrak{f}(\zeta,\tau)\right] = \int_0^{\infty} e^{-v\int_0^{\zeta} e^{-u^{-\psi}}\,du}\,\mathfrak{f}(\zeta,\tau)\,d\zeta.$$

Esta integral representa la transformada de Laplace non-conformable de $\mathfrak{f}(\zeta,\tau)$ respecto a la variable ζ.

De manera análoga, la transformada de Laplace non-conformable respecto a τ se escribe como

$$\mathfrak{F}(\zeta,w) = \mathscr{L}^{\phi}_{N_1,\tau}\left[\mathfrak{f}(\zeta,\tau)\right] = \int_0^{\infty} e^{-w\int_0^{\tau} e^{-u^{-\phi}}\,du}\,\mathfrak{f}(\zeta,\tau)\,d\tau.$$

Aquí, la integral corresponde a la transformada de Laplace non-conformable con respecto a la variable τ.

Propiedades de la transformada doble de Laplace non-conformable

Las transformadas de Laplace non-conformables con respecto a τ y ζ conmutan, es decir:

$$\mathscr{L}^{\phi}_{N_1,\tau}\mathscr{L}^{\psi}_{N_1,\zeta}\{\mathfrak{f}(\zeta,\tau)\} = \mathscr{L}^{\psi}_{N_1,\zeta}\mathscr{L}^{\phi}_{N_1,\tau}\{\mathfrak{f}(\zeta,\tau)\} = \mathfrak{F}(v,w).$$

Teorema 1

Consideremos dos funciones $\mathfrak{f}(\zeta,\tau)$ y $\mathfrak{g}(\zeta,\tau)$ que poseen transformada doble de Laplace non-conformable. Bajo estas condiciones, se cumplen las siguientes propiedades:

1) La linealidad de la transformada doble de Laplace non-conformable se expresa como

$$\mathscr{L}^{\phi}_{N_1,\tau}\mathscr{L}^{\psi}_{N_1,\zeta}[q_1\mathfrak{f}(\zeta,\tau)+q_2\mathfrak{g}(\zeta,\tau)] = q_1\mathscr{L}^{\phi}_{N_1,\tau}\mathscr{L}^{\psi}_{N_1,\zeta}[\mathfrak{f}(\zeta,\tau)] + q_2\mathscr{L}^{\phi}_{N_1,\tau}\mathscr{L}^{\psi}_{N_1,\zeta}[\mathfrak{g}(\zeta,\tau)].$$

2) La transformada doble de Laplace non-conformable de la función constante se da por

$$\mathscr{L}^{\phi}_{N_1,\tau}\mathscr{L}^{\psi}_{N_1,\zeta}[1] = \frac{1}{vw}.$$

De este resultado se deduce que

$$\mathscr{L}^{\phi}_{N_1,\tau}\mathscr{L}^{\psi}_{N_1,\zeta}[q] = q\,\mathscr{L}^{\phi}_{N_1,\tau}\mathscr{L}^{\psi}_{N_1,\zeta}[1] = \frac{q}{vw}.$$

3) Se cumple también que

$$\mathscr{L}^{\phi}_{N_1,\tau}\mathscr{L}^{\psi}_{N_1,\zeta}\left[\mathfrak{E}^{N_1}_{\phi,q}(\tau)\,\mathfrak{E}^{N_1}_{\psi,r}(\zeta)\right] = \frac{1}{v-r}\cdot\frac{1}{w-q}.$$

4) Para la combinación con una función $\mathfrak{f}$, se tiene

$$\mathscr{L}^{\phi}_{N_1,\tau}\mathscr{L}^{\psi}_{N_1,\zeta}\left[\mathfrak{f}(\zeta,\tau)\,\mathfrak{E}^{N_1}_{\phi,q}(\tau)\,\mathfrak{E}^{N_1}_{\psi,r}(\zeta)\right] = \mathfrak{F}(v-r,w-q),$$

con

$$\mathscr{L}^{\phi}_{N_1,\tau}\mathscr{L}^{\psi}_{N_1,\zeta}[\mathfrak{f}(\zeta,\tau)] = \mathfrak{F}(v,w), \quad q,r\in\mathbb{R}, \quad w-q>0, \quad v-r>0.$$

5) La transformada doble de Laplace non-conformable de las funciones seno se expresa como

$$\mathscr{L}^{\phi}_{N_1,\tau}\mathscr{L}^{\psi}_{N_1,\zeta}\left[\sin\left(q\int_0^{\tau}e^{-\mu^{-\phi}}d\mu\right)\sin\left(r\int_0^{\zeta}e^{-\mu^{-\psi}}d\mu\right)\right]=\frac{r}{v^2+r^2}\cdot\frac{q}{w^2+q^2}.$$

6) De manera similar, para las funciones coseno se cumple

$$\mathscr{L}^{\phi}_{N_1,\tau}\mathscr{L}^{\psi}_{N_1,\zeta}\left[\cos\left(q\int_0^{\tau}e^{-\mu^{-\phi}}d\mu\right)\cos\left(r\int_0^{\zeta}e^{-\mu^{-\psi}}d\mu\right)\right]=\frac{v}{v^2+r^2}\cdot\frac{w}{w^2+q^2}.$$

7) Para las funciones hiperbólicas seno, se tiene

$$\mathscr{L}^{\phi}_{N_1,\tau}\mathscr{L}^{\psi}_{N_1,\zeta}\left[\sinh\left(q\int_0^{\tau}e^{-\mu^{-\phi}}d\mu\right)\sinh\left(r\int_0^{\zeta}e^{-\mu^{-\psi}}d\mu\right)\right]=\frac{r}{v^2-r^2}\cdot\frac{q}{w^2-q^2}.$$

8) En el caso de las funciones hiperbólicas coseno, se tiene

$$\mathscr{L}^{\phi}_{N_1,\tau}\mathscr{L}^{\psi}_{N_1,\zeta}\left[\cosh\left(q\int_0^{\tau}e^{-\mu^{-\phi}}d\mu\right)\cosh\left(r\int_0^{\zeta}e^{-\mu^{-\psi}}d\mu\right)\right]=\frac{v}{v^2-r^2}\cdot\frac{w}{w^2-q^2}.$$

9) Finalmente, las derivadas parciales de $\mathfrak{F}(v,w)$ se expresan como

$$\frac{\partial^{m+n}\mathfrak{F}(v,w)}{\partial v^m\partial w^n}=(-1)^{m+n}\mathscr{L}^{\phi}_{N_1,\tau}\mathscr{L}^{\psi}_{N_1,\zeta}\left[\left(\int_0^{\tau}e^{-\mu^{-\phi}}d\mu\right)^n\left(\int_0^{\zeta}e^{-\mu^{-\psi}}d\mu\right)^m\mathfrak{f}(\zeta,\tau)\right].$$

Demostración.

1) Se obtiene directamente de la definición.

2) Para la demostración de la transformada doble non-conformable de la función constante, tenemos:

$$\begin{aligned}\mathscr{L}^{\phi}_{N_1,\tau}\mathscr{L}^{\psi}_{N_1,\zeta}[1]&=\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}e^{-\tau^{-\phi}}e^{-\zeta^{-\psi}}e^{-w\int_0^{\tau}e^{-\mu^{-\phi}}d\mu}e^{-v\int_0^{\zeta}e^{-\mu^{-\psi}}d\mu}\,d\zeta\,d\tau\\&=\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}e^{-wz}e^{-vw}\,dz\,dw\\&=\left(\int_0^{\infty}e^{-vw}dw\right)\left(\int_0^{\infty}e^{-wz}dz\right)=\frac{1}{v}\cdot\frac{1}{w}\end{aligned}$$

3) Para demostrar la transformada doble de Laplace non-conformable de $\mathfrak{E}^{N_1}_{\phi,q}(\tau)\,\mathfrak{E}^{N_1}_{\psi,r}(\zeta)$, se tiene que:

$$\mathscr{L}^{\phi}_{N_1,\tau}\mathscr{L}^{\psi}_{N_1,\zeta}\left[\mathfrak{E}^{N_1}_{\phi,q}(\zeta)\,\mathfrak{E}^{N_1}_{\psi,r}(\tau)\right]$$

es igual a

$$\begin{aligned}&=\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}e^{-\tau^{-\phi}}e^{-\zeta^{-\psi}}e^{-w\int_0^{\tau}e^{-\mu^{-\phi}}d\mu}e^{-v\int_0^{\zeta}e^{-\mu^{-\psi}}d\mu}e^{-q\int_0^{\tau}e^{-\mu^{-\phi}}d\mu}e^{-r\int_0^{\zeta}e^{-\mu^{-\psi}}d\mu}d\zeta\,d\tau\\&=\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}e^{-\tau^{-\phi}}e^{-\zeta^{-\psi}}e^{-(w-q)\int_0^{\tau}e^{-\mu^{-\phi}}d\mu}e^{-(v-r)\int_0^{\zeta}e^{-\mu^{-\psi}}d\mu}\,d\zeta\,d\tau\\&=\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}e^{-(w-q)z}e^{-(v-r)w}\,dz\,dw\\&=\left(\int_0^{\infty}e^{-(v-r)w}dw\right)\left(\int_0^{\infty}e^{-(w-q)z}dz\right)=\frac{1}{v-r}\cdot\frac{1}{w-q}\end{aligned}$$

Revista de la Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales.
50(194):213-233 enero-marzo de 2026. doi: https://doi.org/10.18257/raccefyn.3288

4) Para la conmbinación del literal **3)** con una función $\mathfrak{f}$.
Suponemos $\mathscr{L}^{\phi}_{N_1,\tau}\mathscr{L}^{\psi}_{N_1,\zeta}\left[\mathfrak{f}(\zeta,\tau)\right]=\mathfrak{F}(v,w)$, para $w>k$ y $v>k$, entonces se tiene que:

$$\mathscr{L}^{\phi}_{N_1,\tau}\mathscr{L}^{\psi}_{N_1,\zeta}\left[\mathfrak{f}(\zeta,\tau)\mathfrak{E}^{N_1}_{\phi,q}(\zeta)\mathfrak{E}^{N_1}_{\psi,r}(\tau)\right]$$

es igual a

$$\begin{aligned}
&=\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}e^{-\tau^{-\phi}}e^{-\zeta^{-\psi}}e^{-(w-q)\int_0^{\tau}e^{-\mu^{-\phi}}d\mu}e^{-(v-r)\int_0^{\zeta}e^{-\mu^{-\psi}}d\mu}\\
&\quad\cdot\mathfrak{f}(\zeta,\tau)\,d\zeta\,d\tau\\
&=\mathfrak{F}(v-r,w-q)
\end{aligned}$$

5) Para la demostración de $\sin\left(q\int_0^{\tau}e^{-\mu^{-\phi}}d\mu\right)\sin\left(r\int_0^{\zeta}e^{-\mu^{-\psi}}d\mu\right)$, tenemos que:

$$\mathscr{L}^{\phi}_{N_1,\tau}\mathscr{L}^{\psi}_{N_1,\zeta}\left[\sin\left(q\int_0^{\tau}e^{-\mu^{-\phi}}d\mu\right)\sin\left(r\int_0^{\zeta}e^{-\mu^{-\psi}}d\mu\right)\right]$$

por definición es igual a

$$\begin{aligned}
&=\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}e^{-\tau^{-\phi}}e^{-\zeta^{-\psi}}e^{-w\int_0^{\tau}e^{-\mu^{-\phi}}d\mu}e^{-v\int_0^{\zeta}e^{-\mu^{-\psi}}d\mu}\\
&\quad\cdot\sin\left(q\int_0^{\tau}e^{-\mu^{-\phi}}d\mu\right)\sin\left(r\int_0^{\zeta}e^{-\mu^{-\psi}}d\mu\right)d\zeta\,d\tau\\
&=\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}e^{-wz_1}e^{-vz_2}\sin(qz_1)\sin(rz_2)\,dz_1\,dz_2\\
&=\left(\int_0^{\infty}e^{-vz_2}\sin(rz_2)\,dz_2\right)\left(\int_0^{\infty}e^{-wz_1}\sin(qz_1)\,dz_1\right)\\
&=\frac{r}{v^2+r^2}\cdot\frac{q}{w^2+q^2}
\end{aligned}$$

6) Se obtiene de manera similar a **5)**.

7) Se obtiene utilizando las definiciones del sinh, y la definición 5.

8) Se obtiene utilizando las definiciones del cosh, y la definición 5.

9) Por último, se tiene que:

$$\frac{\partial^{m+n}\mathfrak{F}(v,w)}{\partial v^m\partial w^n}$$

utilizando la definición es igual a

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\partial^m}{\partial v^m}\frac{\partial^n}{\partial w^n}\left[\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\zeta^{-\psi}}e^{-v\int_0^\zeta e^{-\mu^{-\psi}}d\mu}e^{-\tau^{-\phi}}e^{-w\int_0^\tau e^{-\mu^{-\phi}}d\mu}\mathfrak{f}(\zeta,\tau)\,d\tau\,d\zeta\right]\\
&= \int_0^\infty e^{-\zeta^{-\psi}}\frac{\partial^m}{\partial v^m}\left(e^{-v\int_0^\zeta e^{-\mu^{-\psi}}d\mu}\right)\left[\int_0^\infty e^{-\tau^{-\phi}}\frac{\partial^n}{\partial w^n}\left(e^{-w\int_0^\tau e^{-\mu^{-\phi}}d\mu}\right)\mathfrak{f}(\zeta,\tau)\,d\tau\right]d\zeta\\
&= \int_0^\infty e^{-\zeta^{-\psi}}(-1)^m\left(\int_0^\zeta e^{-\mu^{-\psi}}d\mu\right)^m e^{-v\int_0^\zeta e^{-\mu^{-\psi}}d\mu}\\
&\left[\int_0^\infty e^{-\tau^{-\phi}}(-1)^n\left(\int_0^\tau e^{-\mu^{-\phi}}d\mu\right)^n e^{-w\int_0^\tau e^{-\mu^{-\phi}}d\mu}\mathfrak{f}(\zeta,\tau)\,d\tau\right]d\zeta\\
&= (-1)^{m+n}\mathscr{L}^{\phi}_{N_1,\tau}\mathscr{L}^{\psi}_{N_1,\zeta}\left[\left(\int_0^\tau e^{-\mu^{-\phi}}d\mu\right)^n\left(\int_0^\zeta e^{-\mu^{-\psi}}d\mu\right)^m\mathfrak{f}(\zeta,\tau)\right]
\end{aligned}
$$

Teorema 2

Con las condiciones de la definición de la transformada doble de Laplace non-conformable, se tiene que:

1) $\mathscr{L}^{\phi}_{N_1,\tau}\mathscr{L}^{\psi}_{N_1,\zeta}\left[{}_{\zeta}N_1^{\psi}\mathfrak{f}(\zeta,\tau)\right] = v\mathfrak{F}(v,w)-\mathfrak{F}(0,w).$

2) $\mathscr{L}^{\phi}_{N_1,\tau}\mathscr{L}^{\psi}_{N_1,\zeta}\left[{}_{\tau}N_1^{\phi}\mathfrak{f}(\zeta,\tau)\right] = w\mathfrak{F}(v,w)-\mathfrak{F}(v,0).$

3) $\mathscr{L}^{\phi}_{N_1,\tau}\mathscr{L}^{\psi}_{N_1,\zeta}\left[{}_{\zeta}N_1^{\psi}\,{}_{\tau}N_1^{\phi}\mathfrak{f}(\zeta,\tau)\right] = vw\mathfrak{F}(v,w)-v\mathfrak{F}(v,0)-w\mathfrak{F}(0,w)+\mathfrak{F}(0,0).$

donde ${}_{\zeta}N_1^{\psi}\mathfrak{f}(\zeta,\tau)$ y ${}_{\tau}N_1^{\phi}\mathfrak{f}(\zeta,\tau)$ representan las derivadas parciales fraccionarias non-conformables de orden ψ-ésimo y ϕ-ésimo respectivamente, y ${}_{\zeta}N_1^{\psi}\,{}_{\tau}N_1^{\phi}\mathfrak{f}(\zeta,\tau)$ es la derivada parcial mixta fraccionaria non-conformable de orden ψ-ésimo y ϕ-ésimo.

Demostración:

1) Utilizamos la definición de transformada doble de Laplace non-conformable y la Proposición 3 de Vivas-Cortez et al. (2021b), obteniendo que:

$$\mathscr{L}^{\phi}_{N_1,\tau}\mathscr{L}^{\psi}_{N_1,\zeta}\left[{}_{\zeta}N_1^{\psi}\mathfrak{f}(\zeta,\tau)\right]$$

es igual a

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\tau^{-\phi}}e^{-w\int_0^\tau e^{-\mu^{-\phi}}d\mu}e^{-\zeta^{-\psi}}e^{-v\int_0^\zeta e^{-\mu^{-\psi}}d\mu}\,{}_{\zeta}N_1^{\psi}\mathfrak{f}(\zeta,\tau)\,d\tau\,d\zeta\\
&= \int_0^\infty e^{-\tau^{-\phi}}e^{-w\int_0^\tau e^{-\mu^{-\phi}}d\mu}\left[\int_0^\infty e^{-\zeta^{-\psi}}e^{-v\int_0^\zeta e^{-\mu^{-\psi}}d\mu}\,{}_{\zeta}N_1^{\psi}\mathfrak{f}(\zeta,\tau)\,d\zeta\right]d\tau\\
&= \int_0^\infty e^{-\tau^{-\phi}}e^{-w\int_0^\tau e^{-\mu^{-\phi}}d\mu}\left[\mathscr{L}^{\psi}_{N_1,\zeta}\left[{}_{\zeta}N_1^{\psi}\mathfrak{f}(\zeta,\tau)\right]\right]d\tau\\
&= \int_0^\infty e^{-\tau^{-\phi}}e^{-w\int_0^\tau e^{-\mu^{-\phi}}d\mu}\left[v\mathscr{L}^{\psi}_{N_1,\zeta}\left[{}_{\zeta}\mathfrak{f}(\zeta,\tau)\right]-\mathfrak{f}(0,\tau)\right]d\tau\\
&= v\mathfrak{F}(v,w)-\mathfrak{F}(0,w).
\end{aligned}
$$

Revista de la Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales.
50(194):213-233 enero-marzo de 2026. doi: https://doi.org/10.18257/raccefyn.3288

2) Se obtiene de forma similar.

3) Para demostrar la transformada doble de Laplace non-conformable de ${}_{\zeta}N_1^{\psi}\,{}_{\tau}N_1^{\phi}\mathfrak{f}(\zeta,\tau)$, se tiene por definición que:

$$\mathscr{L}^{\phi}_{N_1,\tau}\mathscr{L}^{\psi}_{N_1,\zeta}\left[{}_{\zeta}N_1^{\psi}\,{}_{\tau}N_1^{\phi}\mathfrak{f}(\zeta,\tau)\right]$$

es igual a

$$=\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}e^{-\tau^{-\phi}}e^{-w\int_0^{\tau}e^{-\mu^{-\phi}}d\mu}e^{-\zeta^{-\psi}}e^{-v\int_0^{\zeta}e^{-\mu^{-\psi}}d\mu}\,{}_{\zeta}N_1^{\psi}\,{}_{\tau}N_1^{\phi}\mathfrak{f}(\zeta,\tau)\,d\tau\,d\zeta$$

Sustituyendo $\mathfrak{h}(\zeta,\tau)={}_{\tau}N_1^{\phi}\mathfrak{f}(\zeta,\tau)$ y aplicando el resultado del literal **1)**, se obtiene:

$$\mathscr{L}^{\phi}_{N_1,\tau}\mathscr{L}^{\psi}_{N_1,\zeta}\left[{}_{\zeta}N_1^{\psi}\mathfrak{h}(\zeta,\tau)\right]=v\mathfrak{H}(v,w)-\mathfrak{H}(0,w)$$

donde

$$\mathfrak{H}(v,w)=\mathscr{L}^{\phi}_{N_1,\tau}\mathscr{L}^{\psi}_{N_1,\zeta}\left[\mathfrak{h}(\zeta,\tau)\right]=\mathscr{L}^{\phi}_{N_1,\tau}\mathscr{L}^{\psi}_{N_1,\zeta}\left[{}_{\tau}N_1^{\phi}\mathfrak{f}(\zeta,\tau)\right]=w\mathfrak{F}(v,w)-\mathfrak{F}(v,0).$$

y

$$\mathfrak{H}(0,w)=\mathscr{L}^{\phi}_{N_1,\tau}\mathscr{L}^{\psi}_{N_1,\zeta}\left[\mathfrak{h}(0,\tau)\right]=\mathscr{L}^{\phi}_{N_1,\tau}\mathscr{L}^{\psi}_{N_1,\zeta}\left[{}_{\tau}N_1^{\phi}\mathfrak{f}(0,\tau)\right]=w\mathfrak{F}(0,w)-\mathfrak{F}(0,0).$$

Reemplazando $\mathfrak{H}(v,w)$ y $\mathfrak{H}(0,w)$ en

$$\mathscr{L}^{\phi}_{N_1,\tau}\mathscr{L}^{\psi}_{N_1,\zeta}\left[{}_{\zeta}N_1^{\psi}\mathfrak{h}(\zeta,\tau)\right]$$

se tiene:

$$\begin{aligned}\mathscr{L}^{\phi}_{N_1,\tau}\mathscr{L}^{\psi}_{N_1,\zeta}\left[{}_{\zeta}N_1^{\psi}\mathfrak{h}(\zeta,\tau)\right]&=v\left[w\mathfrak{F}(v,w)-\mathfrak{F}(v,0)\right]-\left[w\mathfrak{F}(0,w)-\mathfrak{F}(0,0)\right]\\&=vw\mathfrak{F}(v,w)-v\mathfrak{F}(v,0)-w\mathfrak{F}(0,w)+\mathfrak{F}(0,0).\end{aligned}$$

De forma similar se puede probar el siguiente Teorema.

Teorema 3
Sean $\phi,\psi\in(0,1)$ y $m,n\in\mathbb{N}$, y supongamos que $\mathfrak{f}(\zeta,\tau)\in C^{l}(\mathbb{R}^{+}\times\mathbb{R}^{+})$, donde $l=\max(m,n)$. Además, se cumple que:

$$\mathfrak{f}(\zeta,\tau),\quad {}^{(i)}_{\zeta}N_1^{\psi}\mathfrak{f}(\zeta,\tau),\quad {}^{(j)}_{\tau}N_1^{\phi}\mathfrak{f}(\zeta,\tau)\quad \text{para } i=1,\ldots,m,\ j=1,\ldots,n$$

son N_1-transformables. Entonces se tiene que:

1)

$$\begin{aligned}\mathscr{L}^{\phi}_{N_1,\tau}\mathscr{L}^{\psi}_{N_1,\zeta}\left[{}^{(m)}_{\zeta}N_1^{\psi}\mathfrak{f}(\zeta,\tau)\right]&=v^{m}\mathfrak{F}(v,w)-v^{m-1}\mathfrak{F}(0,w)\\&\quad-\sum_{i=1}^{m-1}v^{m-1-i}\mathscr{L}^{\phi}_{N_1,\tau}\left[{}^{(i)}_{\zeta}N_1^{\psi}\mathfrak{F}(0,\tau)\right]\end{aligned}$$

2)

$$\mathscr{L}^{\phi}_{N_1,\tau}\mathscr{L}^{\psi}_{N_1,\zeta}\left[{}^{(n)}_{\tau}N^{\phi}_{1}\mathfrak{f}(\zeta,\tau)\right] = w^n\mathfrak{F}(v,w) - w^{n-1}\mathfrak{F}(v,0) - \sum_{j=1}^{n-1} w^{n-1-j}\mathscr{L}^{\psi}_{N_1,\zeta}\left[{}^{(j)}_{\tau}N^{\phi}_{1}\mathfrak{F}(\zeta,0)\right]$$

3)

$$\begin{aligned}\mathscr{L}^{\phi}_{N_1,\tau}\mathscr{L}^{\psi}_{N_1,\zeta}&\left[{}^{(m)}_{\zeta}N^{\psi}_{1}\,{}^{(n)}_{\tau}N^{\phi}_{1}\mathfrak{f}(\zeta,\tau)\right]\\ &= v^m w^n\Bigg[\mathfrak{F}(v,w) - w^{-1}\mathfrak{F}(v,0) - v^{-1}\mathfrak{F}(0,w)\\ &- \sum_{i=1}^{m-1} v^{-1-i}\mathscr{L}^{\phi}_{N_1,\tau}\left[{}^{(i)}_{\zeta}N^{\psi}_{1}\mathfrak{F}(0,\tau)\right]\\ &- \sum_{j=1}^{n-1} w^{-1-j}\mathscr{L}^{\psi}_{N_1,\zeta}\left[{}^{(j)}_{\tau}N^{\phi}_{1}\mathfrak{F}(\zeta,0)\right]\\ &+ \sum_{i=1}^{m-1}\sum_{j=1}^{n-1} w^{-1-j}v^{-1-i}\,{}^{(i)}_{\zeta}N^{\psi}_{1}\,{}^{(j)}_{\tau}N^{\phi}_{1}\mathfrak{F}(0,0)\\ &+ v^{-m}w^{-n}\mathfrak{F}(0,0)\Bigg]\end{aligned}$$

donde ${}^{(m)}_{\zeta}N^{\psi}_{1}\mathfrak{f}(\zeta,\tau)$ y ${}^{(n)}_{\tau}N^{\phi}_{1}\mathfrak{f}(\zeta,\tau)$ son las m,n veces derivadas fraccionarias non-conformables de $\mathfrak{f}(\zeta,\tau)$ de orden ψ y ϕ respectivamente, y ${}^{(m)}_{\zeta}N^{\psi}_{1}\,{}^{(n)}_{\tau}N^{\phi}_{1}\mathfrak{f}(\zeta,\tau)$ es la derivada parcial mixta fraccionaria non-conformable de orden ψ y ϕ de la función $\mathfrak{f}(\zeta,\tau)$.

4 Algunas aplicaciones

A continuación, utilizamos la transformada doble de Laplace non-conformable para resolver algunas ecuaciones en derivadas parciales fraccionarias, en el sentido de la derivada fraccionaria non-conformable. Se ilustran las soluciones obtenidas en los ejemplos para distintos valores de ϕ y ψ en gráficos de dos y tres dimensiones, para ello se utilizó el software Python 3.10.

4.1 Ecuación de calor fraccionaria non-conformable.

La siguiente ecuación corresponde a la ecuación del calor non-conformable en el espacio-tiempo homogéneo:

$$_{\tau}N^{\phi}_{1}\mathfrak{f}(\zeta,\tau) = {}^{(2)}_{\zeta}N^{\psi}_{1}\mathfrak{f}(\zeta,\tau), \quad 0<\zeta,\ 0<\tau, \tag{1}$$

con las condiciones iniciales y de contorno:

$$\mathfrak{f}(0,\tau) = e^{\int_0^{\tau} e^{-\mu^{-\phi}}d\mu}, \tag{2}$$

$$\mathfrak{f}(\zeta,0) = e^{\int_0^{\zeta} e^{-\mu^{-\psi}}d\mu}, \tag{3}$$

$$_{\zeta}N^{\psi}_{1}\mathfrak{f}(0,\tau) = e^{\int_0^{\tau} e^{-\mu^{-\phi}}d\mu}. \tag{4}$$

Revista de la Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales.
50(194):213-233 enero-marzo de 2026. doi: https://doi.org/10.18257/raccefyn.3288

Utilizamos la transformada doble de Laplace non-conformable 1) del Teorema 3 en la parte derecha de la ecuación (1), se tiene que:

$$\mathscr{L}^{\phi}_{N_1,\tau}\mathscr{L}^{\psi}_{N_1,\zeta}\left[{}^{(2)}_{\zeta}N^{\psi}_{1}\mathfrak{f}(\zeta,\tau)\right]$$

es igual a

$$\begin{aligned}&v^2\mathfrak{F}(v,w)-v\mathfrak{F}(0,w)-\mathscr{L}^{\phi}_{N_1,\tau}\left[{}_{\zeta}N^{\psi}_{1}\mathfrak{f}(0,\tau)\right]\\&=v^2\mathfrak{F}(v,w)-v\mathfrak{F}(0,w)-{}_{\zeta}N^{\psi}_{1}\mathfrak{F}(0,w).\end{aligned}$$

y 2) del Teorema 2 en la parte izquierda de la ecuación (1), se tiene que

$$\mathscr{L}^{\phi}_{N_1,\tau}\mathscr{L}^{\psi}_{N_1,\zeta}\left[{}_{\tau}N^{\phi}_{1}\mathfrak{f}(\zeta,\tau)\right]$$

es igual a

$$w\mathfrak{F}(v,w)-\mathfrak{F}(v,0),$$

Luego, la ecuación (1) se convierte en:

$$(w-v^2)\mathfrak{F}(v,w)=\mathfrak{F}(v,0)-v\mathfrak{F}(0,w)-{}_{\zeta}N^{\psi}_{1}\mathfrak{F}(0,w). \tag{5}$$

Aplicando la transformada de Laplace simple non.conformable en (2), se obtiene:

$$\begin{aligned}\mathscr{L}^{\phi}_{N_1,\tau}[\mathfrak{f}(0,\tau)]&=\mathscr{L}^{\phi}_{N_1,\tau}\left[e^{\int_0^{\tau}e^{-\mu^{-\phi}}d\mu}\right]\\&=\int_0^{\infty}e^{-\tau^{-\phi}}e^{-w\int_0^{\tau}e^{-\mu^{-\phi}}d\mu}e^{\int_0^{\tau}e^{-\mu^{-\phi}}d\mu}d\tau\\&=\frac{1}{w-1}\end{aligned} \tag{6}$$

y este resultado es igual a $\mathfrak{F}(0,w)$

Cuando aplicamos la transformada de Laplace simple non-conformable en (3), se tiene:

$$\begin{aligned}\mathscr{L}^{\psi}_{N_1,\zeta}[\mathfrak{f}(\zeta,0)]&=\mathscr{L}^{\psi}_{N_1,\zeta}\left[e^{\int_0^{\zeta}e^{-\mu^{-\psi}}d\mu}\right]\\&=\int_0^{\infty}e^{-\zeta^{-\psi}}e^{-v\int_0^{\zeta}e^{-\mu^{-\psi}}d\mu}e^{\int_0^{\zeta}e^{-\mu^{-\psi}}d\mu}d\zeta\\&=\frac{1}{v-1}\end{aligned} \tag{7}$$

la última expresión es igual a $\mathfrak{F}(v,0)$

Al aplicar la transformada de Laplace simple non-conformable en (4), obtenemos:

$$\begin{aligned}\mathscr{L}^{\phi}_{N_1,\tau}\left[{}_{\zeta}N^{\psi}_{1}\mathfrak{f}(0,\tau)\right]&=\mathscr{L}^{\phi}_{N_1,\tau}\left[e^{\int_0^{\tau}e^{-\mu^{-\phi}}d\mu}\right]\\&=\frac{1}{w-1}\end{aligned} \tag{8}$$

y se tiene que ${}_{\zeta}N^{\psi}_{1}\mathfrak{F}(0,w)=\frac{1}{w-1}$

50(194):213-233, enero-marzo de 2026. doi: https://doi.org/10.18257/raccefyn.3288

Sustituyendo (6), (7) y (8) en (5), se tiene:

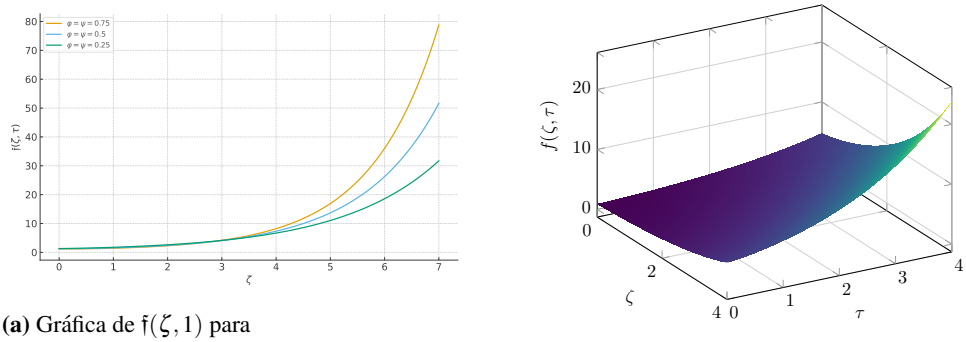
$$(w-v^2)\mathfrak{F}(v,w)=\frac{1}{v-1}-\frac{v}{w-1}-\frac{1}{w-1}$$

de donde:

$$\mathfrak{F}(v,w)=\frac{1}{(v-1)(w-1)}.$$

Por tanto, la solución del problema (1) - (4) es:

$$\mathfrak{f}(\zeta,\tau)=\left(e^{\int_0^\tau e^{-\mu^{-\phi}}d\mu}\right)\left(e^{\int_0^\zeta e^{-\mu^{-\psi}}d\mu}\right). \tag{9}$$



(a) Gráfica de $\mathfrak{f}(\zeta,1)$ para $\phi=\psi=0.25,0.5,0.75$.

(b) Superficie 3D de $\mathfrak{f}(\zeta,\tau)$ con $\phi=\psi=0.2$

Figura 1. Representación de la gráfica 2D y 3D de la función $\mathfrak{f}(\zeta,\tau)=\left(e^{\int_0^\tau e^{-\mu^{-\phi}}d\mu}\right)\left(e^{\int_0^\zeta e^{-\mu^{-\psi}}d\mu}\right)$ solución del problema (1) - (4).

De las representaciones gráficas de la función

$$\mathfrak{f}(\zeta,\tau)=\left(e^{\int_0^\tau e^{-\mu^{-\phi}}d\mu}\right)\left(e^{\int_0^\zeta e^{-\mu^{-\psi}}d\mu}\right),$$

se pueden observar que, en primer lugar, la función es estrictamente positiva y presenta un comportamiento monótonamente creciente con respecto a ambas variables, lo cual se evidencia tanto en las curvas bidimensionales como en la superficie tridimensional.

En el caso bidimensional, al fijar $\tau=1$, se aprecia que la rapidez de crecimiento depende de los parámetros ϕ y ψ: a medida que estos aumentan, las gráficas experimentan un incremento más acelerado. Por su parte, la superficie tridimensional muestra que el crecimiento conjunto en las variables ζ y τ es simétrico, puesto que la estructura de la función otorga un papel análogo a ambas variables en la construcción del producto exponencial.

4.2 Ecuación de onda fraccionaria non-conformable homogénea.

Se considera la ecuación de onda fraccionaria non-conformable homogénea en el espacio-tiempo:

$${}^{(2)}_{\tau}N_1^{\phi}\mathfrak{f}(\zeta,\tau)={}^{(2)}_{\zeta}N_1^{\psi}\mathfrak{f}(\zeta,\tau),\quad \zeta>0,\ \tau>0. \tag{10}$$

Revista de la Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales.
50(194):213-233 enero-marzo de 2026. doi: https://doi.org/10.18257/raccefyn.3288

Con condiciones iniciales y de contorno:

$$\mathfrak{f}(0,\tau) = 0, \tag{11}$$

$$\mathfrak{f}(\zeta,0) = \sin\left(\int_0^{\zeta} e^{-\mu^{-\psi}} d\mu\right), \tag{12}$$

$$_{\zeta}N_1^{\psi}\mathfrak{f}(\zeta,0) = \cos\left(\int_0^{\tau} e^{-\mu^{-\phi}} d\mu\right), \tag{13}$$

$$_{\tau}N_1^{\phi}\mathfrak{f}(\zeta,0) = 0. \tag{14}$$

Utilizamos la transformada doble de Laplace non-conformable 1) del Teorema 3 en la parte derecha de la ecuación (10), y se tiene que:

$$\mathscr{L}^{\phi}_{N_1,\tau}\mathscr{L}^{\psi}_{N_1,\zeta}\left[{}^{(2)}_{\zeta}N_1^{\psi}\mathfrak{f}(\zeta,\tau)\right]$$

es igual a

$$\begin{aligned} &v^2\mathfrak{F}(v,w) - v\mathfrak{F}(0,w) - \mathscr{L}^{\phi}_{N_1,\tau}\left[{}_{\zeta}N_1^{\psi}\mathfrak{f}(0,\tau)\right] \\ &= v^2\mathfrak{F}(v,w) - v\mathfrak{F}(0,w) - {}_{\zeta}N_1^{\psi}\mathfrak{F}(0,w). \end{aligned}$$

Y si usamos la transformada doble de Laplace non-conformable 2) del Teorema 3 en la parte izquierda de la ecuación (10), tenemos que:

$$\mathscr{L}^{\phi}_{N_1,\tau}\mathscr{L}^{\psi}_{N_1,\zeta}\left[{}^{(2)}_{\tau}N_1^{\phi}\mathfrak{f}(\zeta,\tau)\right]$$

es igual a

$$\begin{aligned} &w^2\mathfrak{F}(v,w) - w\mathfrak{F}(v,0) - \mathscr{L}^{\psi}_{N_1,\zeta}\left[{}_{\tau}N_1^{\phi}\mathfrak{f}(\zeta,0)\right] \\ &= w^2\mathfrak{F}(v,w) - w\mathfrak{F}(v,0) - {}_{\tau}N_1^{\phi}\mathfrak{F}(v,0). \end{aligned}$$

Con estos dos últimos resultados, la ecuación (10) se convierte en:

$$(w^2 - v^2)\mathfrak{F}(v,w) + v\mathfrak{F}(0,w) - w\mathfrak{F}(v,0) + {}_{\zeta}N_1^{\psi}\mathfrak{F}(0,w) - {}_{\tau}N_1^{\phi}\mathfrak{F}(v,0) = 0. \tag{15}$$

Utilizando la transformada de Laplace simple non-conformable en (11), se tiene

$$\mathfrak{F}(0,w) = \mathscr{L}^{\phi}_{N_1,\tau}\left[\mathfrak{f}(0,\tau)\right] = \mathscr{L}^{\phi}_{N_1,\tau}\left[0\right] = 0. \tag{16}$$

Al aplicar la transformada de Laplace simple non-conformable en , (12), obtenemos:

$$\begin{aligned} \mathscr{L}^{\psi}_{N_1,\zeta}\left[\mathfrak{f}(\zeta,0)\right] &= \mathscr{L}^{\psi}_{N_1,\zeta}\left[\sin\left(\int_0^{\zeta} e^{-\mu^{-\psi}} d\mu\right)\right] \\ &= \frac{1}{v^2+1}. \end{aligned} \tag{17}$$

que es igual a $\mathfrak{F}(v,0)$.

Si aplicamos la transformada de Laplace simple non-conformable en (13), tenemos:

$$\begin{aligned}\mathscr{L}^{\phi}_{N_1,\tau}\left[{}_{\zeta}N_1^{\psi}\mathfrak{f}(0,\tau)\right] &= \mathscr{L}^{\phi}_{N_1,\tau}\left[\cos\left(\int_0^{\tau} e^{-\mu^{-\phi}}d\mu\right)\right]\\ &= \frac{w}{w^2+1}.\end{aligned} \tag{18}$$

que es igual a ${}_{\zeta}N_1^{\psi}\mathfrak{F}(0,w)$.

Aplicando la transformada de Laplace simple non-conformable en (14), nos da lo siguiente:

$$\begin{aligned}{}_{\tau}N_1^{\phi}\mathfrak{F}(v,0) &= \mathscr{L}^{\psi}_{N_1,\zeta}\left[{}_{\tau}N_1^{\phi}\mathfrak{f}(\zeta,0)\right]\\ &= \mathscr{L}^{\psi}_{N_1,\zeta}[0] = 0.\end{aligned} \tag{19}$$

Al sustituir (16), (17), (18) y (19) en (15), se obtiene:

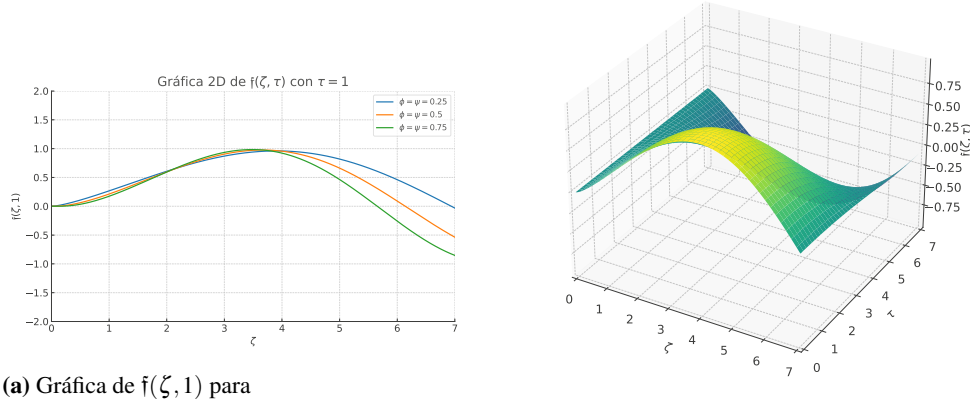
$$(w^2-v^2)\mathfrak{F}(v,w) = \frac{w(w^2-v^2)}{(w^2+1)(v^2+1)},$$

lo que implica

$$\mathfrak{F}(v,w) = \frac{w}{(w^2+1)(v^2+1)}.$$

Luego, la solución del problema (10)–(14) es:

$$\mathfrak{f}(\zeta,\tau) = \sin\left(\int_0^{\zeta} e^{-\mu^{-\psi}}d\mu\right)\cos\left(\int_0^{\tau} e^{-\mu^{-\phi}}d\mu\right). \tag{20}$$



(a) Gráfica de $\mathfrak{f}(\zeta,1)$ para $\phi=\psi=0.25, 0.5, 0.75$.

(b) Superficie 3D de $\mathfrak{f}(\zeta,\tau)$ con $\phi=\psi=0.2$

Figura 2. Representación de la gráfica 2D y la 3D de la función $\mathfrak{f}(\zeta,\tau) = \sin\left(\int_0^{\zeta} e^{-\mu^{-\psi}}d\mu\right)\cos\left(\int_0^{\tau} e^{-\mu^{-\phi}}d\mu\right)$ solución del problema (10) - (14).

En las representaciones gráficas obtenidas se observa que la función

$$\mathfrak{f}(\zeta,\tau) = \sin\left(\int_0^{\zeta} e^{-\mu^{-\psi}}d\mu\right)\cos\left(\int_0^{\tau} e^{-\mu^{-\phi}}d\mu\right)$$

Revista de la Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales.
50(194):213-233 enero-marzo de 2026. doi: https://doi.org/10.18257/raccefyn.3288

presenta un comportamiento oscilatorio con una atenuación dependiente de los parámetros fraccionarios ϕ y ψ. En la gráfica bidimensional, al considerar $\tau = 1$, se aprecia que el incremento en los valores de $\phi = \psi$ produce una disminución en la amplitud y un cambio más rápido hacia valores negativos. Por otra parte, la gráfica tridimensional muestra de manera conjunta la interacción entre ζ y τ, generando una superficie con crestas y valles que evidencian la naturaleza oscilatoria y amortiguada de la solución.

4.3 Ecuación de onda non-conformable no homogénea.

Se considera la ecuación de onda fraccionaria non-conformable no homogénea en el espacio-tiempo:

$$ {}^{(2)}_{\tau}N_1^{\phi}\,\mathfrak{f}(\zeta,\tau) - {}^{(2)}_{\zeta}N_1^{\psi}\,\mathfrak{f}(\zeta,\tau) = (\mathfrak{c}^2+1)\left(e^{c\int_0^{\tau} e^{-\mu^{-\phi}}d\mu}\right)\left(\sin\left(\int_0^{\zeta} e^{-\mu^{-\psi}}d\mu\right)\right). \tag{21} $$

con condiciones iniciales y de contorno:

$$ \mathfrak{f}(0,\tau) = 0, \tag{22} $$

$$ \mathfrak{f}(\zeta,0) = \sin\left(\int_0^{\zeta} e^{-\mu^{-\psi}}d\mu\right), \tag{23} $$

$$ {}_{\zeta}N_1^{\psi}\,\mathfrak{f}(0,\tau) = e^{c\int_0^{\tau} e^{-\mu^{-\phi}}d\mu}, \tag{24} $$

$$ {}_{\tau}N_1^{\phi}\,\mathfrak{f}(\zeta,0) = \mathfrak{c}\sin\left(\int_0^{\zeta} e^{-\mu^{-\psi}}d\mu\right). \tag{25} $$

Al aplicar la transformada doble de Laplace non-conformable 1) del Teorema 3 en ${}^{(2)}_{\zeta}N_1^{\psi}\,\mathfrak{f}(\zeta,\tau)$, 2) del Teorema 3 en ${}^{(2)}_{\tau}N_1^{\phi}\,\mathfrak{f}(\zeta,\tau)$ se tiene:

$$ \mathscr{L}^{\phi}_{N_1,\tau}\mathscr{L}^{\psi}_{N_1,\zeta}\left[{}^{(2)}_{\zeta}N_1^{\psi}\,\mathfrak{f}(\zeta,\tau)\right] = v^2\mathfrak{F}(v,w) - v\,\mathfrak{F}(0,w) - {}_{\zeta}N_1^{\psi}\,\mathfrak{F}(0,w), $$
$$ \mathscr{L}^{\phi}_{N_1,\tau}\mathscr{L}^{\psi}_{N_1,\zeta}\left[{}^{(2)}_{\tau}N_1^{\phi}\,\mathfrak{f}(\zeta,\tau)\right] = w^2\mathfrak{F}(v,w) - w\,\mathfrak{F}(v,0) - {}_{\tau}N_1^{\phi}\,\mathfrak{F}(v,0). $$

que al reemplazar en la parte izquierda de la ecuación (21), nos proporciona:

$$ (w^2-v^2)\,\mathfrak{F}(v,w) + v\,\mathfrak{F}(0,w) + {}_{\zeta}N_1^{\psi}\mathfrak{F}(0,w) - w\mathfrak{F}(v,0) - {}_{\tau}N_1^{\phi}\mathfrak{F}(v,0). $$

y al aplicar la transformada de Laplace en la parte derecha de la ecuación (21), se tiene:

$$ \frac{\mathfrak{c}^2+1}{(w-\mathfrak{c})(v^2+1)}. $$

Con los dos últimos resultados se obtiene:

$$ (w^2-v^2)\,\mathfrak{F}(v,w) + v\,\mathfrak{F}(0,w) + {}_{\zeta}N_1^{\psi}\mathfrak{F}(0,w) - w\mathfrak{F}(v,0) - {}_{\tau}N_1^{\phi}\mathfrak{F}(v,0) = \frac{\mathfrak{c}^2+1}{(w-\mathfrak{c})(v^2+1)}. \tag{26} $$

Aplicando la transformada de Laplace simple non-conformable en (22), (23), (24) y (25) se tiene:

$$\mathscr{L}^{\phi}_{N_1,\tau}\{\mathfrak{f}(0,\tau)\} = 0 = \mathfrak{F}(0,w), \tag{27}$$

$$\mathscr{L}^{\phi}_{N_1,\tau}\left\{{}_{\zeta}N_1^{\phi}\mathfrak{f}(0,\tau)\right\} = \mathscr{L}^{\phi}_{N_1,\tau}\left[e^{\mathfrak{c}\int_0^{\tau} e^{-\mu^{-\phi}}d\mu}\right] = \frac{1}{w-\mathfrak{c}} = {}_{\zeta}N_1^{\phi}\mathfrak{F}(0,w), \tag{28}$$

$$\mathscr{L}^{\psi}_{N_1,\zeta}\{\mathfrak{f}(\zeta,0)\} = \mathscr{L}^{\psi}_{N_1,\zeta}\left[\sin\left(\int_0^{\zeta} e^{-\mu^{-\psi}}d\mu\right)\right] = \frac{1}{v^2+1} = \mathfrak{F}(v,0), \tag{29}$$

$$\mathscr{L}^{\psi}_{N_1,\zeta}\left\{{}_{\tau}N_1^{\phi}\mathfrak{f}(\zeta,0)\right\} = \mathscr{L}^{\psi}_{N_1,\zeta}\left[\mathfrak{c}\sin\left(\int_0^{\zeta} e^{-\mu^{-\psi}}d\mu\right)\right] = \frac{\mathfrak{c}}{v^2+1} = {}_{\tau}N_1^{\phi}\mathfrak{F}(v,0). \tag{30}$$

Al reemplazar (27), (28), (29), (30) en (26), se tiene:

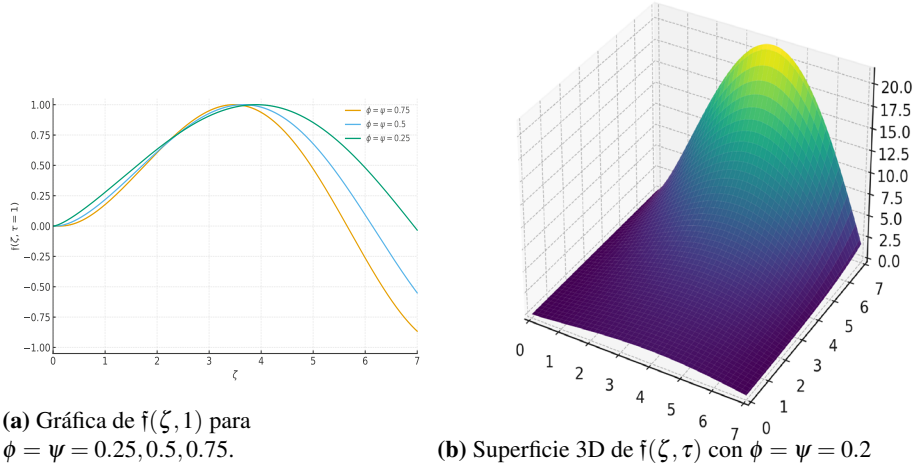
$$(w^2-v^2)\,\mathfrak{F}(v,w) + 0 + \frac{1}{w-\mathfrak{c}} - \frac{w}{v^2+1} - \frac{\mathfrak{c}}{v^2+1} = \frac{\mathfrak{c}^2+1}{(w-\mathfrak{c})(v^2+1)}.$$

luego,

$$\mathfrak{F}(v,w) = \frac{1}{(w-\mathfrak{c})(v^2+1)}.$$

cuya solución es

$$\mathfrak{f}(\zeta,\tau) = \left(e^{\mathfrak{c}\int_0^{\tau} e^{-\mu^{-\phi}}d\mu}\right)\left(\sin\left(\int_0^{\zeta} e^{-\mu^{-\psi}}d\mu\right)\right).$$



(a) Gráfica de $\mathfrak{f}(\zeta,1)$ para $\phi=\psi=0.25, 0.5, 0.75$.

(b) Superficie 3D de $\mathfrak{f}(\zeta,\tau)$ con $\phi=\psi=0.2$

Figura 3. Representación de la gráfica 2D y la 3D de la función $\mathfrak{f}(\zeta,\tau) = \left(e^{\mathfrak{c}\int_0^{\tau} e^{-\mu^{-\phi}}d\mu}\right)\left(\sin\left(\int_0^{\zeta} e^{-\mu^{-\psi}}d\mu\right)\right)$ solución del problema (21) - (25).

Revista de la Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales.
50(194):213-233 enero-marzo de 2026. doi: https://doi.org/10.18257/raccefyn.3288

En las representaciones gráficas de la Figura 3 se observa que la función

$$\mathfrak{f}(\zeta,\tau)=\left(e^{\int_0^\tau e^{-\mu^{-\phi}}\,d\mu}\right)\left(\sin\left(\int_0^\zeta e^{-\mu^{-\psi}}\,d\mu\right)\right)$$

presenta dos tipos de comportamientos. En la gráfica 2D, al considerar $\tau=1$, se aprecia un comportamiento oscilatorio cuya amplitud disminuye cuando los parámetros fraccionarios $\phi=\psi$ aumentan. Por otra parte, en la gráfica 3D se pone de manifiesto el efecto exponencial de la variable τ, que provoca un crecimiento notable de la superficie y genera máximos definidos, mientras que la variable ζ modula el carácter oscilatorio de la función.

4.4 Ecuación telegráfica fraccionaria non-conformable no-homogénea.

Consideremos la ecuación telegráfica fraccionaria non-conformable no-homogénea en el espacio tiempo:

$$\overset{(2)}{\tau}N_1^{\phi}\mathfrak{f}(\zeta,\tau)-\overset{(2)}{\zeta}N_1^{\psi}\mathfrak{f}(\zeta,\tau)-{}_{\tau}N_1^{\phi}\mathfrak{f}(\zeta,\tau)-\mathfrak{f}(\zeta,\tau)=-8\left(e^{2\int_0^\tau e^{-\mu^{-\phi}}\,d\mu}\right)\cos\left(\int_0^\zeta e^{-\mu^{-\psi}}d\mu\right). \tag{31}$$

Con condiciones iniciales y de contorno:

$$\mathfrak{f}(0,\tau)=\left(e^{2\int_0^\tau e^{-\mu^{-\phi}}\,d\mu}\right), \tag{32}$$

$$\mathfrak{f}(\zeta,0)=\cos\left(\int_0^\zeta e^{-\mu^{-\psi}}d\mu\right), \tag{33}$$

$${}_{\zeta}N_1^{\psi}\mathfrak{f}(0,\tau)=0, \tag{34}$$

$${}_{\tau}N_1^{\phi}\mathfrak{f}(\zeta,0)=2\cos\left(\int_0^\zeta e^{-\mu^{-\psi}}d\mu\right). \tag{35}$$

Al aplicar la transformada doble de Laplace non-conformable 1) del Teorema 3 en $\overset{(2)}{\zeta}N_1^{\psi}\mathfrak{f}(\zeta,\tau)$, y 2) del Teorema 3 en $\overset{(2)}{\tau}N_1^{\phi}\mathfrak{f}(\zeta,\tau)$, y 2) del Teorema 2 en ${}_{\tau}N_1^{\phi}\mathfrak{f}(\zeta,\tau)$ se obtiene:

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}^{\phi}_{N_1,\tau}\mathscr{L}^{\psi}_{N_1,\zeta}\left[\overset{(2)}{\zeta}N_1^{\psi}\mathfrak{f}(\zeta,\tau)\right]&=v^2\mathfrak{F}(v,w)-v\mathfrak{F}(0,w)-{}_{\zeta}N_1^{\psi}\mathfrak{F}(0,w),\\
\mathscr{L}^{\phi}_{N_1,\tau}\mathscr{L}^{\psi}_{N_1,\zeta}\left[\overset{(2)}{\tau}N_1^{\phi}\mathfrak{f}(\zeta,\tau)\right]&=w^2\mathfrak{F}(v,w)-w\mathfrak{F}(v,0)-{}_{\tau}N_1^{\phi}\mathfrak{F}(v,0),\\
\mathscr{L}^{\phi}_{N_1,\tau}\mathscr{L}^{\psi}_{N_1,\zeta}\left[{}_{\tau}N_1^{\phi}\mathfrak{f}(\zeta,\tau)\right]&=w\mathfrak{F}(v,w)-\mathfrak{F}(v,0).
\end{aligned}$$

que al reemplazar en la parte izquierda de la ecuación (31), nos da:

$$\begin{aligned}
&v^2\mathfrak{F}(v,w)-v\mathfrak{F}(0,w)-{}_{\zeta}N_1^{\psi}\mathfrak{F}(0,w)-w^2\mathfrak{F}(v,w)+w\mathfrak{F}(v,0)+{}_{\tau}N_1^{\phi}\mathfrak{F}(v,0)-w\mathfrak{F}(v,w)\\
&\qquad+\mathfrak{F}(v,0)-\mathfrak{F}(v,w)\\
&=\left(v^2-w^2-w-1\right)\mathfrak{F}(v,w)-v\mathfrak{F}(0,w)+(w+1)\mathfrak{F}(v,0)-{}_{\zeta}N_1^{\psi}\mathfrak{F}(0,w)+{}_{\tau}N_1^{\phi}\mathfrak{F}(v,0).
\end{aligned}$$

Y al aplicar la transformada doble de Laplace non-conformable en la parte derecha de la ecuación (31), se obtiene:

$$-\frac{8v}{(w-2)(v^2+1)}.$$

Con los dos últimos resultados, la ecuación (31) se convierte en:

$$\begin{aligned}\left(v^2-w^2-w-1\right)\mathfrak{F}(v,w)-v\mathfrak{F}(0,w)+(w+1)\mathfrak{F}(v,0)-{}_{\zeta}N_1^{\psi}\mathfrak{F}(0,w)+{}_{\tau}N_1^{\phi}\mathfrak{F}(v,0)\\ =-\frac{8v}{(w-2)(v^2+1)}.\end{aligned} \tag{36}$$

Ahora aplicamos la transformada de Laplace simple non-conformable a las condiciones iniciales y de contorno.
Aplicando la transformada de Laplace simple non-conformable en (32), se obtiene:

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_{N_1,\tau}^{\phi}\{\mathfrak{f}(0,\tau)\}&=\mathscr{L}_{N_1,\tau}^{\phi}\left\{\left(e^{2\int_0^{\tau}e^{-\mu^{-\phi}}d\mu}\right)\right\}\\&=\frac{1}{w-2}.\end{aligned} \tag{37}$$

que es igual a $\mathfrak{F}(0,w)$.

Cuando aplicamos la transformada de Laplace simple non-conformable en (33), tenemos:

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_{N_1,\zeta}^{\psi}\{\mathfrak{f}(\zeta,0)\}&=\mathscr{L}_{N_1,\zeta}^{\psi}\left\{\cos\left(\int_0^{\zeta}ve^{-\mu^{-\psi}}d\mu\right)\right\}\\&=\frac{v}{v^2+1}\end{aligned} \tag{38}$$

que es igual $\mathfrak{F}(v,0)$.

Al aplicar la transformada de Laplace simple non-conformable en (34), obtenemos:

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_{N_1,\zeta}^{\psi}\left\{{}_{\tau}N_1^{\phi}\,\mathfrak{f}(0,\tau)\right\}&=\mathscr{L}_{N_1,\tau}^{\psi}\{0\}\\&=0.\end{aligned} \tag{39}$$

este resultado es igual a ${}_{\zeta}N_1^{\psi}\,\mathfrak{F}(0,w)$.

Al aplicar la transformada de Laplace simple non-conformable en (35), obtenemos:

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_{N_1,\zeta}^{\psi}\left\{{}_{\tau}N_1^{\phi}\,\mathfrak{f}(\zeta,0)\right\}&=\mathscr{L}_{N_1,\zeta}^{\psi}\left\{2\cos\left(\int_0^{\zeta}e^{-\mu^{-\psi}}d\mu\right)\right\}\\&=\frac{2v}{v^2+1}.\end{aligned} \tag{40}$$

que es igual a ${}_{\tau}N_1^{\phi}\,\mathfrak{F}(v,0)$

Revista de la Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales.
50(194):213-233 enero-marzo de 2026. doi: https://doi.org/10.18257/raccefyn.3288

Sustituyendo (37), (38), (39), (40) en (36), se obtiene:

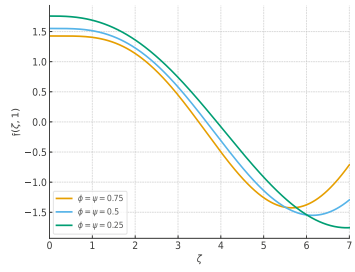
$$(v^2 - w^2 - w - 1)\,\mathfrak{F}(v,w) - v \cdot \frac{1}{w-2} + (w+1) \cdot \frac{v}{v^2+1} - 0 + \frac{2v}{v^2+1} = -\frac{8v}{(v^2+1)(w-2)}.$$

Luego,

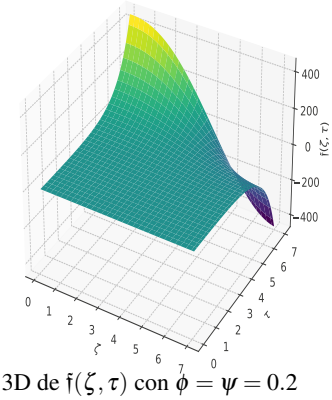
$$\mathfrak{F}(v,w) = \frac{v}{(v^2+1)(w-2)}.$$

de donde se obtiene la solución:

$$\mathfrak{f}(\zeta,\tau) = \left(e^{2\int_0^\tau e^{-\mu^{-\phi}}d\mu}\right)\left(\cos\left(\int_0^\zeta e^{-\mu^{-\psi}}d\mu\right)\right).$$



(a) Gráfica de $\mathfrak{f}(\zeta,1)$ para $\phi=\psi=0.25, 0.5, 0.75$.



(b) Superficie 3D de $\mathfrak{f}(\zeta,\tau)$ con $\phi=\psi=0.2$

Figura 4. Representación de la gráfica 2D y la 3D de la función $\mathfrak{f}(\zeta,\tau) = \left(e^{2\int_0^\tau e^{-\mu^{-\phi}}d\mu}\right)\left(\cos\left(\int_0^\zeta e^{-\mu^{-\psi}}d\mu\right)\right)$ solución del problema (31) - (35).

En las representaciones de la Figura 4 se aprecia que la función

$$\mathfrak{f}(\zeta,\tau) = \left(e^{2\int_0^\tau e^{-\mu^{-\phi}}d\mu}\right)\left(\cos\left(\int_0^\zeta e^{-\mu^{-\psi}}d\mu\right)\right)$$

combina un comportamiento oscilatorio en la variable ζ con un crecimiento exponencial en la variable τ. En la gráfica 2D, al considerar $\tau = 1$, se observa que los parámetros fraccionarios $\phi = \psi$ modifican la amplitud y el desplazamiento de los cruces de la función respecto al eje horizontal. Por otro lado, la superficie tridimensional muestra con claridad cómo la variable τ potencia la magnitud de la función, generando valores elevados tanto positivos como negativos.

Conclusión

En este trabajo se ha establecido la transformada doble de Laplace non-conformable dentro del marco del cálculo fraccionario local y se han desarrollado sus propiedades fundamentales. La aplicación de esta herramienta a ecuaciones diferenciales non-conformables del calor, de onda y telegráfica demuestra que la transformada permite abordar problemas que presentan memoria y comportamientos locales, ampliando las capacidades del método clásico. Los resultados obtenidos muestran que esta formulación ofrece un marco sólido para el análisis de modelos con estructura fraccionaria local y abre perspectivas para su uso en diversas áreas de la ciencia y la ingeniería.

Agradecimientos

Expresamos nuestro agradecimiento a la Universidad de las Fuerzas Armadas (ESPE) y a la Pontificia Universidad Católica del Ecuador (PUCE) por brindarnos el tiempo necesario para la realización de este trabajo.

Contribuciones de los autores

Harold David Jarrín, José Luis Marcillo Parra, Janneth Velasco Velasco, Miguel Vivas Cortez, los cuatro autores participaron activamente en la concepción y desarrollo del proyecto; trabajaron juntos para elaborar y revisar el manuscrito

Conflicto de intereses

Los autores declaran que no existen conflictos de intereses en la realización de este estudio. Ninguna de las instituciones relacionadas ha influido en el diseño, desarrollo, análisis o publicación de los resultados presentados en este artículo.

References

Abdeljawad, T. (2015). On conformable fractional calculus. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 279, 57-66. https://doi.org/10.1016/j.cam.2014.10.016.

Anastassiou, G. A. (2011). *Advances on Fractional Inequalities*. Springer.

Atangana, A. and Baleanu, D. (2015). New properties of conformable derivatives. *Open Mathematics*, 13, 889-898. https://doi.org/10.1515/math-2015-0081.

Diethelm, K. (2010). *The Analysis of Fractional Differential Equations*. Springer.

González, F., Mohammed, P. O., and Nápoles Valdes, J. (2020). Nonconformable fractional laplace transform. *Kragujevac Journal of Mathematics*, 46, 341-354. https://doi.org/10.46793/KgJMat2203.341M.

Gozutok, N. Y. and Gozutok, U. (2018). Multivariable conformable fractional calculus. *Filomat*, *32*(1), 45-55.

Guzmán, P., Langton, G., Lugo Motta Bittencurt, L., Medina, J., and Nápoles Valdes, J. (2018). A new definition of a fractional derivative of local type. *Journal of Mathematical Analysis*, *9*(2),88-98.

Guzmán, P. and Nápoles Valdes, J. (2019). A note on the oscillatory character of some nonconformable generalized liénard system. *Advanced Mathematical Models and Applications*, *4*(2), 127-133.

Guzmán, P. M., Lugo Motta Bittencurt, L. M., and Nápoles Valdes, J. E. (2020a). On the stability of solutions of fractional nonconformable differential equations. *Studia Universitatis Babeș-Bolyai*, *65*(4),495-502.

Guzmán, P. M., Lugo Motta Bittencurt, L. M., Nápoles Valdes, J. E., and Vivas-Cortez, M. (2020b). On a new generalized integral operator and certain operating properties. *Axioms*, *9*, 1-10.

Injrou, S. and Hatem, I. (2022). Solving some partial differential equations by using double laplace transform in the sense of nonconformable fractional calculus. *Mathematical Problems in Engineering*, 2022, 1-10. https://doi.org/10.1155/2022/5326132.

Khalil, R., Al Horani, M., Yousef, A., and Sababheh, M. (2014). A new definition of fractional derivative. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 264, 65-70. https://doi.org/10.1016/j.cam.2014.01.002.

Kilbas, A. A., Srivastava, H. M., and Trujillo, J. J. (2006). *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*. Elsevier.

Leibniz, G. W. (1692). Letter from g. w. leibniz to g. f. a. l'hôpital. *Mathematical Systems Theory*, *1*(1),1-13. Original work written in 1695.

Martínez, F., Mohammed, P. O., and Nápoles Valdes, J. E. (2022). Nonconformable fractional laplace transform. *Kragujevac Journal of Mathematics*, *46*(3), 341-354.

Martínez, F. and Nápoles Valdes, J. E. (2020). Towards a nonconformable fractional calculus of n-variables. *Mathematica Applicanda*, 43, 87-98.

Mhalian, M., Hammad, M. A., Horani, M. A., and Khalil, R. (2020). On fractional vector analysis. *Journal of Mathematics and Computer Science*, 6, 2320-2326.

Miller, K. S. and Ross, B. (1993). *An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations*. Wiley.

Nápoles Valdes, J., Guzmán, P., and Lugo, L. (2018). Some new results on nonconformable fractional calculus. *Advances in Dynamical Systems and Applications*, *13*(2),167-175.

Nápoles Valdes, J. E., Guzmán, P. M., and Lugo Motta Bittencurt, L. M. (2020). A note on the qualitative behavior of some nonlinear local improper conformable differential equations. *Journal of Fractional Calculus and Nonlinear Systems*, *1*(1), 13-20. https://doi.org/10.48185/jfcns.v1i1.48.

Ross, B., Samko, S., and Love, E. R. (1994). Functions that have no first order derivative might have fractional derivatives of all order less than one. *Real Analysis Exchange*, *20*(2),140-157.

Vivas-Cortez, M., Fleitas, A., Guzmán, P. M., Nápoles Valdes, J. E., and Rosales, J. J. (2021a). Newton's law of cooling with generalized conformable derivatives. *Symmetry*, *13*(6):1093. https://doi.org/10.3390/sym13061093.

Vivas-Cortez, M., Hernández, J. E., and Velasco, J. (2024). Some results related with n-variables nonconformable fractional derivatives. *Advances in Functional Analysis and Fixed-Point Theory*.

Vivas-Cortez, M., Lugo, L., Nápoles Valdes, J., and Samei, M. (2022). A multi-index generalized derivative: Some introductory notes. *Applied Mathematics and Information Sciences*, *16*(6), 883-890. https://doi.org/10.18576/amis/160604.

Vivas-Cortez, M., Nápoles, J. E. N., Hernández, J. E., Velasco, J., and Larreal, O. (2021b). On nonconformable fractional laplace transform. *Applied Mathematics*, *15*(4), 403-409. https://doi.org/10.18576/amis/150401.

Vivas-Cortez, M., Velasco, J., and Jarrín, H. D. (2025a). A new generalized local derivative of two parameters. *Applied Mathematics and Information Sciences*, *19*(3), 713-723. https://doi.org/10.18576/amis/190319.

Vivas-Cortez, M., Velasco-Velasco, J., and Cedeño-Mendoza, S. (2025b). Symmetric conformable derivative. *Applied Mathematics and Information Sciences*, *19*(2), 251-257. https://doi.org/10.18576/amis/190202.

Vivas-Cortez, M., Árciga, M. P., Najera, J. C., and Hernández, J. E. (2023). On some conformable boundary value problems in the setting of a new generalized conformable fractional derivative. *Demonstratio Mathematica*, *56*(1). https://doi.org/10.1515/dema-2022-0212.

Yang, X.-J. (2011a). *Local Fractional Functional Analysis and Its Applications*. Asian Academic Publisher.

Yang, X.-J. (2011b). Local fractional integral transforms. *Progress in Nonlinear Science*, *4*(1), 1-225.

Yang, X.-J. (2016). A new local fractional derivative and its application to diffusion in fractal media. *Computational Method for Complex Science*, *1*(1).

Yang, X.-J., Baleanu, D., and He, J.-H. (2013). Transport equations in fractal porous media within fractional complex transform method. *Proceedings of the Romanian Academy Series A*, **14**(4), 287-292.