

Ciencias de la Tierra

Artículo original

La fórmula de Penman y la termodinámica de procesos irreversibles

The Penman formula and the thermodynamics of irreversible processes

Joaquín Pelkowski

Ex profesor asociado de la Universidad Nacional de Colombia

Resumen

Una de las fórmulas más aplicadas en agrometeorología, hidrología y meteorología es la fórmula de Penman, propuesta en 1948. La fórmula refleja una interferencia parcial de flujos y gradientes. Una termodinámica contemporánea, la de los procesos irreversibles, en plena evolución en aquel año, se caracteriza por acoplar flujos y gradientes (fuerzas generalizadas). Basándome en esta termodinámica, ya tan clásica como la fórmula, presento un marco en el que ésta encuentra su lugar natural, tolerando incluso su generalización.

Palabras clave: fórmula de Penman; producción de entropía; ecuaciones constitutivas de tipo Onsager.

Abstract

Penman's well-known formula, also known as a combination formula, for the estimation of (potential) evaporation, was proposed in 1948. The formula reflects a partial interaction between fluxes and gradients. Contemporary thermodynamics—specifically the thermodynamics of irreversible processes, which was rapidly evolving at the time—is characterized by the coupling of fluxes and gradients (generalized forces). Drawing on this branch of thermodynamics—now as classic as the formula itself—I present a framework in which the formula finds its natural place, while also allowing for its generalization.

Keywords: Evaporation formula of Penman, entropy production rate, Onsager constitutive equations.

Introducción

Una fórmula innovadora

La protagonista de este ensayo es la exitosa fórmula de Penman publicada en 1948. En una breve presentación dicen los editores de una reimpresión de artículos clásicos, entre ellos el de Penman, sobre la evaporación y evapo-transpiración (**Gash y Shuttleworth 2007**):

Howard Penman fue un físico que trabajó en la estación de pesquisas agrícolas de Rothamsted, Gran Bretaña. La fórmula que derivó en ese artículo de 1948 ha sido a veces citada como la contribución señera más importante a la hidrología por parte de un científico británico.

Acto seguido aseguran que la fórmula ha sido adoptada por muchos profesionales hidrólogos, proporcionándoles una herramienta práctica tanto a ingenieros como a gestores de recursos hídricos. Durante dos décadas constituyó el método estándar de la FAO (*Food and Agricultural Organization* de las Naciones Unidas) para estimar la evaporación en cultivos irrigados. Muy preciada por su ingeniosa fundamentación, sigue sirviendo a una comunidad amplia (**Lee, 2017**), naturalmente con refinamientos y modificaciones que acogen factores de cultivo, con arreglo a las distintas fases de desarrollo de una siembra. Estos refinamientos van más allá del marco meteorológico original, por cuanto dependen de estructuras biológicas y de la fisiología de las plantas. También se han escrutado los

Citación: Pelkowski J. La fórmula de Penman y la termodinámica de procesos irreversibles. Revista de la Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. 2026 Oct 23. doi: <https://doi.org/10.18257/raccefyn.4173>

Editor: José Daniel Pabón Caicedo

Correspondencia:

Joaquín Pelkowski;
jo-ellen.pelkowski@t-online.de

Recibido: 21 de julio de 2026

Aceptado: 1 de octubre de 2026

Publicado en línea: 23 de octubre de 2026



Este artículo está bajo una licencia de Creative Commons Reconocimiento-NoComercial-Compartir Igual 4.0 Internacional

supuestos implícitos de la fórmula, en relación a lo que llaman el efecto aerodinámico (debido al viento) sobre la evaporación, así como las consecuencias de la omisión de un flujo de calor en el subsuelo en la estimación de la evaporación estacional. A pesar de su pedigrí empírico, la fórmula ha mostrado ser notablemente robusta. Uno de los refinamientos más exitosos se conoce como ecuación de Penman-Monteith (**Monteith**, 1973). Exposiciones recientes del tema se encuentran en **Potter y Colman** (2003), **Shelton** (2009), **Shuttleworth** (2012), **Monson y Baldocchi** (2014), **Barry y Blanken** (2016), **Collier** (2016), o **Foken** (2021). En lo que sigue me limitaré deliberadamente a la forma clásica de la fórmula, cuya derivación paso a recapitular.

La fórmula es tributaria de tres elementos: (1) Fórmula de **Dalton** (1802, memoria reimpresa en **Gash y Shuttleworth** 2007), que puede expresarse como

$$J_v = f(u)[p_{vw}(T_s) - p_v^a] \quad (1)$$

en donde $f(u)$ es una función de la celeridad del viento (cuyo efecto constató cualitativamente Dalton), p_v^a la presión parcial del vapor de agua (recién introducida hacia 1800 por él mismo) del aire húmedo en contacto con una superficie mojada, y cuyo valor de saturación, que depende de la temperatura, denotamos como $p_{vw}(T_s)$, en notación inusitada (T_s representa la temperatura absoluta de la superficie y los subíndices vw recuerdan que se trata de un equilibrio entre el vapor de agua y el agua líquida), y que constituye el segundo elemento (2) en la derivación de Penman; dicha función de la temperatura obedece a la ecuación de Clausius-Clapeyron, cuya derivada viene dada por¹¹:

$$\frac{dp_{vw}(T)}{dT} = \frac{p_{vw}l_v}{R_v T^2} \equiv p'_{vw}(T) \quad (2)$$

y como tercer elemento, (3) el balance de energía estacionario al nivel de la superficie terrestre, donde precisamente se desea estimar la evaporación:

$$F_s = l_v J_v + J_q + J_G \quad (3)$$

Esta ecuación simbólica se encuentra en innumerables libros de texto relacionados con el (micro)clima. Los símbolos tienen los siguientes significados:

l_v : calor latente (o entalpía) de evaporación [J kg^{-1}].

J_v : Tasa de evaporación del agua [$\text{kg m}^{-2}\text{s}^{-1}$].

J_q : Densidad de flujo de calor sensible [Wm^{-2}].

J_G : Densidad de flujo de calor sensible por conducción hacia el lado interior de la superficie (J_G) [Wm^{-2}].

F_s : Densidad de flujo neto de radiación en superficie [Wm^{-2}]. En notación mnemónica (**Pelkowski** 2007, 2009):

$$F_s = Q_s^\downarrow (1 - A_s) + R_s^\downarrow - R_s^\uparrow$$

donde $Q_s^\downarrow$ es la insolación en superficie (densidad de flujo de radiación de onda corta), A_s el albedo (poder reflector) de la superficie, $R_s^\downarrow$ la radiación de onda larga dirigida de la atmósfera hacia la superficie terrestre (efecto invernadero), y $R_s^\uparrow$ la densidad de flujo de energía térmica (infrarroja) emitida por la superficie (aproximadamente la de un cuerpo negro en el sentido de la termodinámica de la radiación). La insolación es la global, que suele desdoblarse en radiación solar directa, $Q_s^{\odot\downarrow}$, y radiación solar difusa, $Q_s^{*\downarrow}$. No tendremos la necesidad de aplicar las muchas fórmulas (empíricas) que se han propuesto para calcular los cuatro flujos de radiación.

La forma canónica de la fórmula de Penman combina dos causas de la evaporación en superficie (**Brutsaert**, 1982, 2020):

$$J_v = \frac{\Delta}{\Delta + \gamma} \frac{F_s}{l_v} + \frac{\gamma}{\Delta + \gamma} E_a \quad (4)$$

Los nuevos símbolos significan:

Δ : $p'_{vw}(T_a)$, que ya definimos como la derivada de la presión del vapor saturante con respecto a la temperatura [Pa K^{-1}], aquí evaluada a la temperatura absoluta del aire, T_a .

¹¹ Stevens y Siebesma, en Siebesma et al. (2020): “Si nos piden elegir una ecuación particular como la más importante para el funcionamiento del clima, sería esta ecuación”.

γ : La llamada “constante” psicrométrica, que vale $\gamma = c_p p / (\varepsilon l_v)$; aquí, c_p es el calor específico isobárico [$\text{J kg}^{-1} \text{K}^{-1}$], usualmente considerado constante en meteorología; p : la presión atmosférica (en superficie) [hPa]; $\varepsilon = R_a / R_v$, cociente entre las constantes de gas ideal del aire seco y del vapor de agua, respectivamente [$\varepsilon = 0,622$]; γ evidentemente no es constante, en el lago de Tota tiene otro valor (menor) que en Taganga.

E_a : Poder desecante del aire, definido como (Brutsaert, 2020)

$$E_a = f(u_r)[p_{vw}(T_a) - p_v^a] \quad (5)$$

siendo T_a la temperatura del aire en un nivel de referencia (v. gr., a 2 metros de la superficie), $p_{vw}(T_a)$ la presión de vapor saturante a esa temperatura (en lugar de la T_s en la fórmula de Dalton), p_v^a la presión de vapor del aire en ese nivel (que también podemos escribir como $p_{vw}(T_d)$, siendo T_d la temperatura de rocío en ese nivel), y, finalmente, u_r la velocidad del viento en un nivel de referencia. Penman, al incluir el aspecto que muchos autores rotulan de “aerodinámico”, propuso para la función $f(u_r)$ una ecuación del tipo $a + bu$, con valores calibrados en su estación inglesa: $f(u_r) = 0,26(1 + 0,54u_2)$, con u_2 designando el viento a 2 metros de la superficie.

La derivación de la fórmula (4) a menudo se describe como el método de combinación, puesto que los dos factores esenciales para la evaporación en superficie resultan de las siguientes condiciones (Penman 1948):

Dos requisitos tienen que cumplirse para que haya evaporación continua. Tiene que haber un abastecimiento de energía que suministra el calor latente de evaporación, y tiene que haber algún mecanismo para eliminar el vapor de agua, es decir, tiene que haber un sumidero de vapor.

No hace falta reproducir la derivación de la fórmula de Penman, basándonos en los tres elementos enumerados, pero no sobra recordar las cinco hipótesis subyacentes, de acuerdo con Guyot (1998): 1) Condiciones permanentes. 2) Los flujos se conservan entre la superficie y un nivel de referencia en el aire (es decir, se excluyen flujos advectivos, horizontales). 3) La superficie debe ser plana, homogénea y continua. 4) La capa adyacente de la superficie se supone estar saturada. Por lo tanto, la presión de vapor en la superficie es la presión de vapor de saturación a la temperatura de la superficie, T_s . 5) Toda la energía disponible (prácticamente, la radiativa) se absorbe en la superficie. El flujo de calor en el suelo, J_G , es desestimado, al ser relativamente pequeño frente a los demás flujos.

Como en la capa límite de la atmósfera los flujos, allende una delgadísima capa laminar, son turbulentos, arremolinados, en general se hace necesario recurrir a modelos de turbulencia de la capa límite (véase, p. ej. Kaimal y Finnigan 1994; Rotach y Holtslag 2025). Pero no será preciso que nos comprometamos con uno u otro modelo concreto para determinar los flujos de calor y vapor, puesto que aquí nos interesa la estructura *termodinámica* de la ecuación de Penman. Sin embargo, a la hora de determinar los valores de ciertos coeficientes fenomenológicos del esquema termodinámico, tendremos que recurrir a alguna de dichas teorías. La más simple y bastante difundida es el modelo de magnitudes integradas (*bulk method* en inglés), o aerodinámico, como el que le sirvió a Penman.

Utilizando este método de perfiles integrados de temperatura y densidad de vapor, método que parte de flujos y gradientes correspondientes (no acoplados), se deduce una “forma integrada” de los flujos verticales turbulentos entre la superficie y un nivel de referencia dado (altura de la garita meteorológica, altura del anemómetro). Para el calor sensible, por ejemplo, se obtiene la siguiente forma integral (Arya 1988, Lee 2017):

$$J_q = \varrho c_p C_Q U (T_s - T_a) = \frac{\varrho c_p (T_s - T_a)}{r_a} \quad (6)$$

donde ϱ es la densidad del aire (kg m^{-3}), y r_a se conoce como la resistividad o resistencia al flujo (de calor y vapor) por parte del aire, $r_a = (C_Q U)^{-1}$, preferida en gran parte de la literatura que incluye la biomasa, dado que al tratar hojas con sus estomas se hace necesario tener en cuenta una resistividad estomatal adicional (acoplada en serie). C_Q es un coeficiente de transferencia de calor sensible (convectivo/turbulento).

Para el vapor de agua se obtiene de manera análoga la siguiente expresión (Arya 1988, Lee 2017):

$$J_v = \rho C_V U [q_{vw}(T_s) - q_v^a] = \rho \frac{q_{vw}(T_s) - q_v^a}{r_a} \quad (7)$$

con el mismo r_a , puesto que se suele suponer $C_Q = C_V$. La humedad específica $q_v = \rho_v/\rho$, con ρ_v la densidad (mecánica) del vapor de agua. q_v^a denota la humedad específica en el nivel de medición de las variables meteorológicas.

Cuando se trata de la evapotranspiración de una superficie vegetal, se suele agregar a la resistencia aerodinámica la del aire en el dosel, r_c :

$$J_v = \rho \frac{q_{vw}(T_s) - q_v^a}{r_a + r_s}$$

Pero todo esto incumbe a quienes en la práctica o modelación del clima tienen que estimar la evapotranspiración, y aquí no es preciso que profundicemos o detallemos. Según Kraus y Businger (1994), el método integral era tan conveniente que mucho esfuerzo se consagró a la determinación de los coeficientes de transferencia, entre los cuales también está el de arrastre y el de la transferencia de gases traza, como por ejemplo el CO_2 . Aquí nos limitaremos a dos flujos, pero en principio en el esquema termodinámico se pueden incluir todos aquellos que intervienen en los intercambios energéticos y másicos entre la superficie y la atmósfera. Los coeficientes de transferencia son adimensionales, con valores cercanos que permiten confundirlos, por ejemplo $C_Q \approx C_V$, pero son elaboradas funciones de la estratificación atmosférica, cuyas expresiones matemáticas dependen de la estabilidad de la capa límite atmosférica, la rugosidad de la superficie y de la velocidad en el nivel de referencia, entre otras (Businger 1973, Arya 2001, Goosse 2015). Para efectos ilustrativos y eventual comparación con la fórmula de Penman concreta, nos bastarán los flujos integrales.

La fórmula (4) es la encarnación del hecho, ya prefigurado por otros, pero explicitado por Penman, de que la evaporación en superficie es debida a dos “causas”, una térmica (tasa de calentamiento) y una causa químico-aerodinámica. La térmica es debida al aporte de energía latente de evaporación, mientras que la química es debida al “déficit” de vapor en el aire, $p_v < p_{vw}(T_s)$, que corresponde a una diferencia de densidad o presión del vapor, o, en términos de una termodinámica química, a la diferencia de potenciales químicos, que son la verdadera causa de flujos netos de masa (Job y Rüffler 2025). Un rasgo interesante es que si por calentamiento, junto con la evaporación de agua, aumenta la temperatura de la superficie, el valor saturante del vapor de agua también aumenta, acarreando un mayor flujo de vapor de agua, de acuerdo con la Ec. (7). La tasa de calentamiento genera directamente un flujo de vapor J_v , y con el aumento de temperatura concomitante, refuerza el flujo de calor sensible J_q , que se genera por una diferencia de temperaturas. En este sentido se crea una suerte de acoplamiento entre un gradiente de temperatura y un flujo de vapor. Por otro lado, si aumenta el poder desecante del aire, aumentará el flujo de vapor, el cual aunque transporta entalpía, no se hace sentir necesariamente como calor sensible. Este acoplamiento es indirecto y parcial, y no hay que confundirlo con los acoplamientos termodinámicos que vamos a considerar más adelante.

Señalemos otro rasgo importante de la fórmula de Penman. En ella no aparece la temperatura de la superficie, como en la Ec. (1), de la cual partió Penman. Éste la quiso eliminar de su estimación de la evaporación, porque le resultaba difícil conseguir esa temperatura mediante mediciones *in situ*, lo cual sigue siendo cierto en muchos casos. Penman logra eliminarla ingeniosamente, aproximando la ecuación de Clausius-Clapeyron, dentro de un dominio pequeño de temperaturas, por la pendiente en un punto (en T_a).

Los flujos de calor sensible y latente (ambos son flujos de entalpía) son procesos irreversibles, que suelen expresarse mediante *ecuaciones constitutivas*, bajo distintas formas según las teorías (termomecánicas) subyacentes. Pero antes de establecer las formas apropiadas en nuestro contexto, basándonos en la termodinámica clásica de los

procesos irreversibles, no estaría de más recapitularla, pero por razones de espacio me tendré que limitar a un brochazo fugitivo, introduciendo al mismo tiempo la notación que utilizaremos más adelante.

Fundamento termodinámico

Breve repaso de la termodinámica clásica de procesos irreversibles

La magnitud central de esta teoría termodinámica es la *producción de entropía*. Establecerla es esencial para comprender los procesos irreversibles que tienen lugar en el sistema climático.

La siguiente forma emblemática de representar el segundo principio de la termodinámica de procesos irreversibles (**Prigogine y Kondepudi, 1998**),

$$dS = d_e S + d_i S \quad (8)$$

representa un balance, en el cual la entropía S del sistema cambia por comercio de entropía con el mundo exterior ($d_e S$) y en virtud de la producción en su interior ($d_i S \geq 0$). En termostática, $d_i S \equiv 0$ idénticamente. Si el sistema es *cerrado*, es decir, que no intercambia masa con el medio externo, el comercio de entropía se limita al de la energía, y entonces $d_e S = dQ/T$, donde dQ es el “calor” recibido o cedido. Si el sistema intercambia masa con su entorno (sistema *abierto*), se tiene (**Dufour y Van Mieghem, 1975**).

$$d_e S = \frac{dQ}{T} + \sum_i s_i d_e m_i$$

en donde $d_e m_i$ es el intercambio de masa del componente i de la mezcla que conforma el aire húmedo, y cuya entropía específica es s_i . Si el aire húmedo se considera cerrado para el componente “aire seco” (que en sí es una mezcla de distintos componentes), pero abierto para el vapor de agua, se tiene $\sum_i s_i d_e m_i = s_v d_e m_v$.

Los procesos irreversibles en el seno del sistema se distinguen por su “producción” de entropía, que muchos autores expresan como el cociente de un “calor no compensado”, dQ' , introducido originalmente por Clausius, y la temperatura absoluta del sistema: $d_i S = dQ'/T$. La termodinámica clásica de los procesos irreversibles (TPI) introduce un elemento dinámico al aceptar que el balance (8) es válido en cada instante, de modo que al estudiar los procesos en función del tiempo, los tres términos del balance (8) se expresan como tasas de cambio temporales ($dX/dt \equiv \dot{X}$), y el balance (8) es uno de las tasas:

$$\dot{S} = \frac{\dot{Q}}{T} + \frac{\dot{Q}'}{T} = \frac{d_e S}{dt} + P \quad (9)$$

con la definición $P \equiv d_i S/dt \geq 0$. Si pasamos de las parcelas de aire húmedo de la termostática atmosférica a los campos de la dinámica meteorológica, este balance se convierte en una expresión local, en la cual la producción de entropía es un campo: $\sigma_s(t, x, y, z)$; la entropía producida en todo el continuo se calcula como la integral sobre el volumen que ocupa:

$$P = \int_M \sigma_s dM = \int_V \varrho \sigma_s dV$$

donde ϱ representa la densidad material del medio continuo. La teoría clásica de los procesos irreversibles se basa justamente en la producción de la entropía local con el fin de obtener las llamadas *ecuaciones constitutivas* de dichos procesos. Un ejemplo clásico de ecuación constitutiva es la ley de Fourier, que establece la proporcionalidad entre la conducción (flujo) de calor, $\mathbf{J}_q$, y el gradiente de temperatura en el mismo punto, ∇T , según la ecuación constitutiva $\mathbf{J}_q \propto -\nabla T$, proceso irreversible que produce entropía, igual a $\sigma_s = \mathbf{J}_q \cdot \nabla(T^{-1}) \geq 0$.

De manera similar se propusieron en el siglo XIX leyes “fenomenológicas” para otros procesos irreversibles (disipativos), que expresan la proporcionalidad entre la causa de un proceso, X , y su efecto J , siendo un ejemplo importante la ley de Fick, que relaciona el gradiente de concentración de una sustancia con la difusión de la misma. También se descubrió que cuando dos flujos tienen lugar simultáneamente, pueden interferir mutuamente y dar lugar a nuevas “leyes” fenomenológicas (ecuaciones constitutivas). Entre estos fenómenos *acoplados* cabe citar el ejemplo afamado de interferencia por

acoplamiento de la difusión de una masa y la conducción calorífica, que da lugar a la difusión térmica o *efecto Soret*, y su fenómeno inverso: el *efecto Dufour* (diferencia de temperatura como consecuencia de un gradiente de concentración).

Tales efectos acoplados inspiraron el desarrollo de la termodinámica de los procesos irreversibles. “En el caso más general la producción de entropía viene dada por una expresión del tipo”:

$$\sigma_s = \sum_{i=1}^{n_0} J_i X_i + \sum_{i=1}^{n_1} \mathbf{J}_i \cdot \mathbf{X}_i + \sum_{i=1}^{n_2} \mathbb{J}_i : \mathbb{X}_i \geq 0$$

(Criado-Sancho y Casas-Vázquez, 2004) con flujos escalares J_i (ejemplo: condensación de vapor de agua), vectoriales $\mathbf{J}_i$ (ejemplo: conducción de calor) y tensoriales $\mathbb{J}_i$ (ejemplo: tensor de presión viscosa), y sus correspondientes fuerzas termodinámicas conjugadas, X_i (ejemplo: afinidad de evaporación), $\mathbf{X}_i$ (ejemplo: gradiente de temperatura) y $\mathbb{X}_i$ (ejemplo: gradiente de velocidad). (A esta forma de σ_s yo agregaría un término escalar $\sigma_s^* = \iint J_v X_v dw dv$ debido a la absorción y emisión de energía electromagnética en la atmósfera, véase Pelkowski, 2012.)

En el contexto de la fórmula de Penman intervienen, además de flujos escalares radiativos, flujos vectoriales de calor y vapor de agua, que al suponerse horizontalmente homogéneos se reducen a sus componentes verticales $J_q = \mathbf{J}_q \cdot \mathbf{k}$ y $J_v = \mathbf{J}_v \cdot \mathbf{k}$, donde, como veremos enseguida, $\mathbf{J}_v$ es el flujo difusivo de vapor de agua, y la producción de entropía local se reduce a $\sigma_s = J_q X_q + J_v X_v$. La posibilidad de acoplar estos flujos es una de las consecuencias principales de la teoría clásica de la TPI (De Groot, 1968). Limitándonos a las dos fuerzas X_q y X_v , la teoría postula que una de estas fuerzas puede dar lugar a un flujo no debido a la causa directa. Por ejemplo, la ecuación constitutiva para el flujo de calor se expresaría como una relación fenomenológica del siguiente tipo lineal:

$$J_q = L_{qq} X_q + L_{vq} X_v$$

y análogamente para el flujo del vapor de agua. Esto se traduce diciendo que cualquier flujo es “causado” por todas las fuerzas (del mismo carácter tensorial) operando en el sistema. Los coeficientes L_{ij} se conocen como coeficientes fenomenológicos; tales son, por ejemplo, la conductividad térmica, el coeficiente de difusión ordinaria, la conductividad eléctrica y los coeficientes estequiométricos de las reacciones químicas. Un resultado fundamental es el “teorema” de Onsager (Kjelstrup y Bedeaux 2020): si se eligen de manera apropiada los “flujos” J_i y las “fuerzas” X_j , la matriz de los coeficientes fenomenológicos L_{ij} es simétrica, es decir, $L_{ij} = L_{ji}$ ($i, j = q, v$).

Los libros de texto de termodinámica atmosférica oficiales generalmente se limitan a procesos reversibles, para los cuales $\sigma_s = 0$. El único texto que se basa sistemáticamente en la TPI es el de Zdunkowski y Bott (2004). No tenemos espacio para resumir la derivación del balance de entropía (véase, por ejemplo, Kuiken 1994); bástenos citarlo para una atmósfera en reposo:

$$\begin{aligned} \varrho \frac{ds}{dt} = & -\nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{J}_q}{T} + \sum s_k \mathbf{J}_k \right) - \sum \frac{\mu_k}{T} \sigma_k \\ & - \frac{\mathbf{J}_h}{T^2} \cdot \nabla T - \sum \mathbf{J}_k \cdot \nabla \left(\frac{\mu_k}{T} \right) \end{aligned}$$

Aquí, $\mathbf{J}_k = \varrho_k (\mathbf{v}_k - \mathbf{v})$ son los flujos difusivos de los componentes aéreos y de las fases condensadas (que corresponden al $d_e m_i$ de más arriba, como $\mathbf{J}_q$ corresponde a dQ). $\mathbf{J}_h = \mathbf{J}_q + \sum h_k \mathbf{J}_k$ es lo que llamo el flujo de entalpía (al igual que Zdunkowski y Bott), mientras que Kjelstrup y Bedeaux (2008) prefieren el término de flujo de calor total. Hay quienes denominan flujo de calor reducido al cociente $\mathbf{J}_q/T$. μ_k y h_k son el potencial químico y la entalpía específica del componente k-ésimo, respectivamente. σ_k es la fuente en la ecuación de balance para la concentración másica de dicho componente (por ejemplo, en el balance del vapor de agua representa un cambio de fase).

El flujo conductivo de entropía, cuya divergencia corresponde a $d_e S$, viene definido por

$$\mathbf{J}_s = \frac{\mathbf{J}_q}{T} + \sum s_k \mathbf{J}_k$$

en el que se incluye el flujo difusivo de entropía, $\sum s_k \mathbf{J}_k$, si el continuo es tratado como un sistema abierto. Queda patente que la producción de entropía está plasmada en los demás términos a la derecha del balance:

$$T\sigma_s = -\sum \mu_k \sigma_k - \frac{\mathbf{J}_h}{T} \cdot \nabla T - T \sum \mathbf{J}_k \cdot \nabla \left(\frac{\mu_k}{T} \right) \geq 0 \quad (10)$$

con una densidad de producción $\sigma_s = \rho \sigma_s$ (nótese el ligero cambio de tipografía).

Para nuestros propósitos será expediente expresar esta ecuación en función de afinidades químicas a_k ; en aras de mayor concisión, incluimos solo el cambio de fase vapor/agua líquida, y no consideramos otra difusión que la del vapor de agua ($\mathbf{J}_k = \mathbf{J}_v$). El mejor texto para describir los cambios de fase en el aire como procesos irreversibles es, sin titubeos, el de **Dufour y Van Mieghem** (1975). Se define la afinidad de evaporación, a_v , como la diferencia de potenciales químicos del agua y su vapor (**Pelkowski** 2002): $\mu_w - \mu_v = a_v$, definición que aprovecharemos en la deducción de la fórmula de Penman. En el cambio de fase entre el vapor de agua (subíndice v) y el agua líquida (subíndice w), basta una sola fuente σ_v en el término $\sum \mu_j \sigma_j$ de la (10) (no hay fuentes de aire seco, $\sigma_a = 0$), y la conservación de masa implica $\sigma_v = -\sigma_w$; por tanto,

$$T\sigma_s = -a_v \sigma_w - \frac{\mathbf{J}_h}{T} \cdot \nabla T - T \mathbf{J}_v \cdot \nabla \left(\frac{\mu_v}{T} \right) \geq 0 \quad (11)$$

Considerando de ahora en adelante el caso que nos acerca a la geometría que subyace a la fórmula de Penman, los vectores constan de componentes verticales en dirección $\mathbf{k}$, con la coordenada z como altura (o profundidad $d = -z$ debajo de la superficie), y esta ecuación reza entonces:

$$\sigma_s = -\sigma_w \frac{a_v}{T} + J_h \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{T} \right) - J_v \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\mu_v}{T} \right) \quad (12)$$

La formulación de ecuaciones constitutivas para un volumen de aire en el que se pueda presentar la condensación (o evaporación) del agua, al mismo tiempo que en él tengan lugar flujos de calor y vapor de agua, ha de partir de esta expresión. Repasemos brevemente el procedimiento en el contexto de un lisímetro o estanque de agua, sin formación de neblina o rocío en superficie, en cuyo caso $\sigma_w = 0$. Pensemos solamente en la parte gaseosa del sistema, un volumen de aire húmedo en contacto con el cuerpo de agua; siendo $J_h = J_q + h_v J_v$ la componente vertical de $\mathbf{J}_h$, la producción de entropía restante se expresa a menudo de otra forma, la preferida por **Kjelstrup y Bedeaux** (2008) y **Zdunkowski y Bott** (2004), a saber:

$$\sigma_s = J_q \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{T} \right) - \frac{J_v}{T} \frac{\partial \mu_{v,T}}{\partial z} \quad (13)$$

en la que se ha de mantener constante la temperatura al diferenciar el potencial químico, lo cual se indica agregando otro subíndice (T) a μ_v (los detalles habrá que consultarlos en las obras citadas). La producción de entropía queda entonces expresada en función del calor sensible J_q , que es la forma que permite establecer ecuaciones constitutivas para este calor y el flujo de vapor J_v (tanto en el agua como en el aire húmedo del sistema termodinámico que define el contexto de la fórmula de Penman). Para el flujo de vapor, por ejemplo, la TPI asume la siguiente relación entre una de las fuerzas y los flujos:

$$-\frac{1}{T} \frac{\partial \mu_{v,T}}{\partial z} = r_{mq} J_q + r_{mv} J_v$$

en las que los coeficientes fenomenológicos r_{ij} son “resistencias” (inversas de las conductividades). En lugar de estas ecuaciones constitutivas que acoplan los dos flujos en las fases químicamente homogéneas, seguiré el desarrollo relativamente reciente de **Kjelstrup y Bedeaux** (2008, 2ª edición 2020), quienes incluyen, como elemento nuevo,

una interfase (no la llaman así) para modelar termodinámicamente la interfaz que separa un líquido o sólido de su vapor. En meteorología, **Dufour y Defay** (1963) ya habían incluido la termodinámica de una fase sui generis entre dos estados de agregación del agua, con sus propias magnitudes termodinámicas (llamadas de “exceso”), pero para nuestro propósito actual resultó idóneo el procedimiento de Kjelstrup y Bedeaux. Ellos se basan en la TPI clásica, desarrollándola con gran lujo de detalle para sistemas con interfaces separadoras, que son las mediadoras de distintos flujos en sistemas heterogéneos, en los que además de los flujos de calor y de masa tienen en cuenta el transporte de cargas eléctricas. La teoría es válida en circunstancias más generales, pero la de interés aquí es el caso de flujos estacionarios. No desarrollaré las ecuaciones necesarias, ni las resumiré como lo hice más arriba con la entropía volumétrica, porque en este caso es posible remitir a una sola obra, la citada. En la segunda edición se incluyen los efectos de la tensión superficial en superficies curvas, lo cual serviría como base para tratar los flujos de calor y masa en el caso del crecimiento de una gota de agua en una nube, tema que dejo para un artículo posterior.

La producción de entropía debida a una interfaz

Una interfaz, interpretada como una delgadísima interfase entre dos fases químicamente homogéneas, puede tratarse en el marco de la TPI, como un subsistema con su propia temperatura T^s , su entalpía H^s , su energía libre F^s (tensión superficial en caso de que se trate de una sustancia pura), y sobre todo una entropía, S^s , por unidad de área. Al hacer el balance de la entropía, Kjelstrup y Bedeaux establecen, según el esquema ya esbozado, una producción de entropía, conocida como entropía de exceso de la superficie (la interfaz). En el desarrollo general, importa distinguir entre los flujos dirigidos hacia la superficie y los que se alejan de ella, pero en nuestro caso, que deliberadamente restringimos a la evaporación estacionaria, no es necesaria la distinción.

La expresión a la que desembocan Kjelstrup y Bedeaux se parece estructuralmente a las de las ecuaciones (12) y (13), pero en lugar de cambios continuos en una fase químicamente homogénea, la interfaz implica saltos en los valores de la temperatura y del potencial químico (agrego otra s a la fuente de entropía, para indicar que se refiere a la superficie):

$$\begin{aligned}\sigma_s^s &= J_q^a \Delta_s^a \left(\frac{1}{T} \right) - J_v \Delta_s^a \left[\frac{\mu(T_s)}{T_s} \right] \\ &= J_q^a \left(\frac{1}{T_a} - \frac{1}{T_s} \right) + J_v \frac{a_v(T_s)}{T_s}\end{aligned}\quad (14)$$

en donde T_s es la temperatura del agua (o del suelo saturado) y J_q^a es el flujo de calor sensible *en el aire*. La temperatura de la interfase como subsistema termodinámico, T^s , no interviene en la evaporación estacionaria. Los saltos en las variables se simbolizan como una diferencia finita, $\Delta_s^a(\cdot)$, de valores que se refieren al aire y a la superficie, en ese orden. Así, $\Delta_s^a[\mu(T_s)/T_s] = [\mu_v(T_s) - \mu_w(T_s)]/T_s$. Como se explicó más arriba, $a_v(T_s) = \mu_w(T_s) - \mu_v(T_s)$ es la afinidad de evaporación, a la temperatura de la superficie (temperatura del líquido adyacente, aquí el agua). Queda claro que se tienen en esta producción de entropía dos fuerzas impulsoras autónomas, una “térmica” y la otra “química”.

En cada fase fluye calor sensible y masa de agua, asociados con los gradientes correspondientes, pero al atravesar la superficie, sufren cambios bruscos de temperatura y estado de agregación. Para formular ecuaciones constitutivas, se parte de la producción de entropía en cada fase, según la Ec. (13), y la debida a la superficie, según la Ec. (14). Dufour y van Mieghem (1975), en la sección de sistemas bitérmicos, también establecen ecuaciones constitutivas, basándose en la producción de entropía, pero no tuvieron en cuenta la termodinámica de una interfase, lo que suscita dudas acerca de la elección de temperaturas en la producción de entropía².

² Estas dudas también prevalecieron en Feistel y Ebeling (2011), que postularon $\mu_w T_s^{-1} - \mu_v T_a^{-1}$.

Kjelstrup y Bedeaux afirman que los efectos Soret y Dufour no son importantes en las fases químicamente homogéneas (**Olbers et al.** (2012) los desprecian en los flujos en el mar), mientras que en presencia de una interfaz se vuelven relevantes. Pero antes de aprovechar la forma (14), busquemos una expresión más específica de la afinidad de evaporación en aire húmedo, a diferencia de nuestros dos autores, que excluyen el aire seco en la fase gaseosa, por considerar la evaporación en el caso más sencillo de un laboratorio. Aunque incluyo el aire seco en la fase gaseosa, tampoco deseo complicar innecesariamente las ecuaciones, por lo que excluyo el hecho de que en la naturaleza el agua es una solución, cuyo potencial químico es más general que el del agua pura. Incluir el potencial químico correspondiente no presentaría dificultades de principio. Tampoco generalizo el potencial del vapor de agua introduciendo una *fugacidad* del vapor de agua (como gas no ideal), en lugar de la familiar presión parcial p_v del vapor de agua.

Con estas restricciones, el potencial químico del vapor de agua tiene por expresión (Dufour y Van Mieghem 1975):

$$\mu_v = \eta_v(T) + R_v T \ln p_v$$

con dependencia logarítmica de la presión, mientras que el potencial del agua líquida pura depende linealmente de ella (aunque no apreciablemente, si las diferencias de presión no son enormes):

$$\mu_w = \eta_w(T) + v_w(p - p_o) \approx \eta_w(T)$$

v_w representa el volumen específico del agua líquida. No hace falta reproducir la forma explícita de las dos funciones $\eta_v(T)$ y $\eta_w(T)$, como veremos enseguida. Para la afinidad $a_v = \mu_w - \mu_v$ obtenemos:

$$a_v = \eta_w(T) - \eta_v(T) - R_v T \ln p_v$$

En equilibrio químico, cuando el valor de la masa saturante del vapor de agua no padece cambios netos, se anula la afinidad, y la presión saturante no es otra que la de la ecuación de Clausius-Clapeyron (2), es decir que para $a_v = 0$, $p_v \rightarrow p_{vw}(T)$:

$$R_v T \ln p_{vw} = \eta_w(T) - \eta_v(T)$$

De esta manera la algo enigmática afinidad se reduce a una función de variables meteorológicas familiares:

$$a_v = R_v T \ln \left(\frac{p_{vw}}{p_v} \right)$$

Con esta simple expresión, la producción de entropía (14) debida a la interfaz se transforma en

$$\sigma_s^s = J_q^a \left(\frac{1}{T_a} - \frac{1}{T_s} \right) + J_v R_v \ln \left[\frac{p_{vw}(T_s)}{p_v} \right] \quad (15)$$

Kjelstrup y Bedeaux tratan las dos fases a uno y otro lado de la interfaz de manera simétrica, en virtud de lo cual pueden expresar la producción en la forma alternativa:

$$\sigma_s^s = J_q^w \left(\frac{1}{T_a} - \frac{1}{T_s} \right) + J_v R_v \ln \left[\frac{p_{vw}(T_a)}{p_v} \right] \quad (16)$$

en la que ahora aparece el flujo de calor sensible *en el agua* (o suelo), J_q^w , mientras que la presión saturante se toma a la temperatura del aire, T_a . Ambas formas sirven por igual en el contexto de la fórmula de Penman. No sobra llamar la atención sobre el hecho de que los flujos de calor J_q^v y J_q^w no son iguales, al no existir una ley de conservación del calor (como a principios del siglo XIX).

Pasemos ahora a formular las ecuaciones constitutivas a partir de estas producciones de entropía, tal como se bosquejó en la sección anterior, donde se recalcó que Kjelstrup y Bedeaux prefieren relacionar fuerzas con flujos, antes que al revés, en cuyo caso los coeficientes fenomenológicos se mudan en resistencias r_{qq} etc. (las inversas de las conductancias L_{qq} etc.); las resistencias es justo lo favorecido en el contexto de la ecuación de Penman y Penman-Monteith.

Las ecuaciones constitutivas que se siguen de la expresión (15) son:

$$\begin{aligned}\Delta_s^a \left(\frac{1}{T} \right) &= r_{qq}^{s,a} J_q^a + r_{qm}^{s,a} J_v \\ R_v \ln \left[\frac{p_{vw}(T_s)}{p_v} \right] &= r_{mq}^{s,a} J_q^a + r_{mm}^{s,a} J_v\end{aligned}\quad (17)$$

y las gemelas, si se parte de las Ecs. (16), pero con J_q^w y $p_{vw}(T_a)$. Mantengo la notación algo recargada de Kjelstrup y Bedeaux, en la que los subíndices inferiores se refieren a los coeficientes principales y de acoplamiento (por ejemplo, $r_{qm}^{s,a}$) y los superiores remiten a las resistividades del lado superior (s, a) de la interfaz (o inferior (s, w) si se parte de (16)).

En circunstancias estacionarias de evaporación, los flujos de entalpía J_h y de agua J_v son constantes, mas no lo es el flujo de calor sensible, como precisábamos hace un momento, un hecho que raramente se enfatiza, y en el que insisten **Kjelstrup y Bedeaux** (2008), y **Dufour y Van Mieghem** (1975). Esto implica que $J_h = J_q^a + h_v J_v = J_q^w + h_w J_v$; gracias a la identidad termostática

$$\frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{\mu_j}{T} \right) = -\frac{h_j}{T^2}$$

no es difícil demostrar las relaciones siguientes entre las resistencias a uno y otro lado de la interfaz superficial:

$$\begin{aligned}r_{qq}^{s,w} &= r_{qq}^{s,a} \equiv r_{qq}^s \\ r_{qm}^{s,w} &= r_{mq}^{s,w} = r_{qm}^{s,a} - r_{qq}^s l_v = r_{mq}^{s,a} - r_{qq}^s l_v \\ r_{mm}^{s,w} &= r_{mm}^{s,a} - 2r_{mq}^{s,a} l_v + r_{qq}^s l_v^2\end{aligned}$$

En esta demostración se aplicaron las famosas relaciones de simetría de Onsager, $r_{qm}^{s,a} = r_{mq}^{s,a}$ y $r_{qm}^{s,w} = r_{mq}^{s,w}$.

Reemplazando ahora el flujo J_v en la primera ecuación constitutiva de (17) por medio de la segunda ecuación, y despejando acto seguido a J_q^a , conduce a:

$$J_q^a = \frac{r_{mm}^{s,a}}{\Gamma_a} \Delta_s^a \left(\frac{1}{T} \right) - \frac{r_{mq}^{s,a}}{\Gamma_a} R_v \ln \left[\frac{p_{vw}(T_s)}{p_v} \right] \quad (18)$$

con la abreviación:

$$\Gamma_a = r_{qq}^{s,a} r_{mm}^{s,a} - r_{qm}^{s,a2} \geq 0$$

(el signo es consecuencia del segundo principio de la termodinámica). Esta ecuación constitutiva pone de manifiesto que el flujo de calor sensible no solamente resulta de una diferencia de temperaturas, sino también de una diferencia de presiones parciales o, lo que es equivalente, de densidades de vapor en superficie y en el aire.

Si ahora reemplazamos en la segunda ecuación de (17) a J_q^a , y despejamos J_v , obtenemos

$$J_v = \frac{r_{qq}^{s,a}}{\Gamma_a} R_v \ln \left[\frac{p_{vw}(T_s)}{p_v} \right] - \frac{r_{mq}^{s,a}}{\Gamma_a} \Delta_s^a \left(\frac{1}{T} \right) \quad (19)$$

ecuación constitutiva para el flujo de vapor de agua (evaporación) con dependencia explícita de las fuerzas térmica y química.

Si uno se basa en ecuaciones constitutivas deducidas de (16), procediendo de manera análoga, se tienen las siguientes ecuaciones constitutivas:

$$J_q^w = \frac{r_{mm}^{s,w}}{\Gamma_w} \Delta_s^a \left(\frac{1}{T} \right) - \frac{r_{qm}^{s,w}}{\Gamma_w} R_v \ln \left[\frac{p_{vw}(T_a)}{p_v} \right] \quad (20)$$

$$J_v = \frac{r_{qq}^{s,w}}{\Gamma_w} R_v \ln \left[\frac{p_{vw}(T_a)}{p_v} \right] - \frac{r_{mq}^{s,w}}{\Gamma_w} \Delta_s^a \left(\frac{1}{T} \right) \quad (21)$$

con $\Gamma_w = r_{qq}^{s,w} r_{mm}^{s,w} - r_{qm}^{s,w2}$. La evaporación es causada ahora por el déficit de humedad en el aire, además de la diferencia de temperaturas entre el aire y la superficie.

Cabe resaltar que si se ignora el acoplamiento termodinámico entre las fuerzas, es decir, si $r_{qm}^{s,a} = r_{mq}^{s,a} = 0$ y $r_{qm}^{s,w} = r_{mq}^{s,w} = 0$, estas ecuaciones se simplifican; por ende, las Ecs. (18) y (19) se reducen a:

$$J_q^a = \frac{1}{r_{qq}^{s,a}} \Delta_s^a \left(\frac{1}{T} \right)$$

$$J_v = \frac{R_v}{r_{mm}^{s,a}} \ln \left[\frac{p_{vw}(T_s)}{p_v} \right]$$

que corresponden a las ecuaciones de transferencia de calor (Fourier) y de vapor (Dalton, Fick); si $T_s > T_a$, habrá un flujo de calor de la superficie hacia el aire, y si la presión del vapor en el aire es menor que la presión saturante en superficie, habrá flujo de vapor de la superficie a la atmósfera. De este tipo son las ecuaciones individuales que se emplean en el método integral y en las consideraciones acerca de los flujos turbulentos en la capa superficial. No hay rastro en la vasta literatura sobre la capa límite atmosférica que se hayan contemplado flujos acoplados.³

Con estas bases termodinámicas, estamos preparados para abordar la fórmula de Penman desde otra perspectiva.

Raíces termodinámicas de la fórmula de Penman

No hace falta concretar un modelo del “sistema del lisímetro”, porque nos limitaremos solamente a lo que ocurre en la interfaz, aunque en un estudio completo se deberían contemplar los gradientes dentro del agua y en el aire, el cual pesa sobre un área de la superficie del estanque cilíndrico lleno de agua (evaporímetro). Para efectos de la teoría, cabe imaginarnos una porción cilíndrica debajo de la superficie del mar o de un lago, con una profundidad d_b , y una porción cilíndrica de aire sobre esa superficie, cuyo nivel medio coincide con $z = 0$, mientras que el fondo de nuestro cilindro imaginario estaría en $z = -d_b$, y el tope del cilindro con aire húmedo estaría en $z = d_t$. La fase líquida consta de agua pura (para no complicar la expresión de la afinidad en presencia de sales), y el sistema gaseoso consta de aire húmedo (con dos componentes, “aire seco” y vapor de agua). Las dos fases están divididas por la interfaz (superficie matemática) en $z = 0$, que de hecho debería ser tratada como una interfase (muy delgada, por cierto). En términos termodinámicos, hay tres subsistemas de un sistema termodinámico entero químicamente heterogéneo. Al limitarnos al caso de evaporación estacionaria (como Penman), los subsistemas necesariamente tienen que ser abiertos, en la profundidad d_b el suministro de agua es permanente, y en la altura d_t hay un flujo vertical de vapor de agua constante, nuestro J_v anterior, el mismo que atraviesa la interfaz.

No vamos a tratar explícitamente los flujos en las fases líquida y de vapor, cuyas ecuaciones constitutivas se derivan de la Ec. (13), y que, sin efectos de interferencia (de acoplamiento), se reducen a la ecuación de Fourier y de Fick, que son las empleadas en las formulaciones de ecuaciones integrales (“bulk”) (6) y (7), como ya hemos señalado. Aquí nos planteamos incluir los efectos de interferencia suscitados por la presencia de una interfaz.

Nuestro punto de partida es la ecuación constitutiva (19), en la que aparece la presión saturante del vapor de agua a la temperatura de la superficie, T_s . Penman, al no disponer de mediciones de T_s , buscó deshacerse de ella. Vimos en la recapitulación de su fórmula cómo la eliminó, haciendo intervenir la pendiente de la curva de saturación, con el popular símbolo $\Delta = dp_{vw}/dT$, evaluada para alguna temperatura intermedia (no T_s , ya que es la que

³ Esto me parece ser cierto en ciencias atmosféricas. Por casualidad, buscando información sobre el tema de este ensayo, en mi biblioteca encontré la monografía de Csanady (2001), oceanógrafo que incluye unos apartes sobre la TPI y que considera el acoplamiento de *tres* flujos, el de momento lineal, calor sensible y vapor de agua, pero de manera asaz críptica. También encontré una monografía de Kamenkovich (1977), traducida del ruso, y en la que otro oceanógrafo discute más a fondo la TPI, en el contexto de la termodinámica marina, con un acoplamiento del tipo (13) entre flujos de calor sensible y de difusividad de sales marinas. Finalmente detecté la monografía de Olbers et al. (2012), quienes se basan en Kamenkovich, pero puntualizan que los efectos Soret y Dufour son muy pequeños en aguas marinas, razón por la cual los desprecian.

no se mide). Este es el paso crucial según **Garratt** (1992). En todo caso, su Δ es un valor aproximativo. Veremos que esta aproximación se puede obviar, y que la pendiente se ha de tomar a la temperatura usualmente medida, la del aire, T_a .

Eliminemos, pues, la temperatura de superficie, T_s . En (19), la fuerza química contiene el logaritmo del cociente $p_{vw}(T_s)/p_v$, que transformamos mediante un ardid nada misterioso:

$$\begin{aligned}\ln \left[\frac{p_{vw}(T_s)}{p_v} \right] &= \ln \left[\frac{p_{vw}(T_s)}{p_{vw}(T_a)} \frac{p_{vw}(T_a)}{p_v} \right] \\ &= \ln \left[\frac{p_{vw}(T_s)}{p_{vw}(T_a)} \right] + \ln \left[\frac{p_{vw}(T_a)}{p_v} \right]\end{aligned}$$

Integrando la ecuación de Clausius-Clapeyron (2) entre las dos temperaturas de nuestro problema, obtenemos:

$$\ln \left[\frac{p_{vw}(T_s)}{p_{vw}(T_a)} \right] = \frac{l_v}{R_v} \left(\frac{1}{T_a} - \frac{1}{T_s} \right) = \frac{l_v}{R_v} \Delta_s \left(\frac{1}{T} \right)$$

y como consecuencia,

$$\ln \left[\frac{p_{vw}(T_s)}{p_v} \right] = \ln \left[\frac{p_{vw}(T_a)}{p_v} \right] + \frac{l_v}{R_v} \Delta_s \left(\frac{1}{T} \right)$$

Al insertar esta modificación en nuestras ecuaciones constitutivas (18) y (19), cambian de aspecto:

$$J_q^a = (r_{mm}^{s,a} - r_{qm}^{s,a} l_v) \frac{1}{\Gamma_a} \Delta_s \left(\frac{1}{T} \right) - \frac{r_{qm}^{s,a}}{\Gamma_a} R_v \ln \left[\frac{p_{vw}(T_a)}{p_v} \right] \quad (22)$$

y

$$J_v = \frac{r_{qq}^{s,a}}{\Gamma_a} R_v \ln \left[\frac{p_{vw}(T_a)}{p_v} \right] + (r_{qq}^{s,a} l_v - r_{mq}^{s,a}) \frac{1}{\Gamma_a} \Delta_s \left(\frac{1}{T} \right) \quad (23)$$

Vemos que un flujo de calor obedece a una diferencia de temperaturas, así como (simultáneamente) al poder desecante del aire.

En la ecuación (23) podemos reemplazar las diferencias de temperatura, tomadas de la (22). El resultado es:

$$\begin{aligned}J_v &= \left(\frac{r_{qq}^{s,a} r_{mm}^{s,a} - r_{mq}^{s,a} l_v}{r_{mm}^{s,a} - r_{qm}^{s,a} l_v} \right) \frac{R_v}{\Gamma_a} \ln \left[\frac{p_{vw}(T_a)}{p_v} \right] + \\ &\quad + \frac{r_{qq}^{s,a} l_v - r_{mq}^{s,a}}{r_{mm}^{s,a} - r_{qm}^{s,a} l_v} J_q^a\end{aligned}$$

Procediendo ahora conforme a la gran idea de Penman (propuesta en previos trabajos de otros), sustituimos en esta expresión el flujo de calor J_q^a del balance estacionario de energía en superficie, Ec. (3)⁴ (conservando el flujo subterráneo J_G , a diferencia de lo que hizo Penman), y así establecemos una ecuación solamente para el flujo de vapor J_v (con las relaciones de simetría de Onsager):

$$\begin{aligned}J_v &= \frac{r_{qq}^{s,a} l_v^2 - r_{qm}^{s,a} l_v}{r_{mm}^{s,a} - 2r_{qm}^{s,a} l_v + r_{qq}^{s,a} l_v^2} \left(\frac{F_s - J_G}{l_v} \right) + \\ &\quad \frac{R_v}{r_{mm}^{s,a} - 2r_{qm}^{s,a} l_v + r_{qq}^{s,a} l_v^2} \ln \left[\frac{p_{vw}(T_a)}{p_v} \right]\end{aligned} \quad (24)$$

Al contener un coeficiente adicional, y en vista del término no lineal en cuanto a las presiones parciales, nos encontramos ante una ecuación de Penman generalizada. Se hubiese obtenido igualmente partiendo de las Ec. (20) y (21).

⁴ No puedo reprimir una confesión personal, el que su forma universalmente adoptada, sin distinción de J_q^s y J_q^v , no me convence. Pero la puedo justificar, aunque de manera enojosa, considerando el balance energético de un volumen de superficie. Aquí la aceptaremos sin más, como lo hace todo el mundo sin vacilaciones.

Si definimos:

$$\begin{aligned}\Delta_g &\equiv r_{qq}^{s,a} l_v^2 - r_{qm}^{s,a} l_v \\ \gamma_g &\equiv r_{mm}^{s,a} - r_{qm}^{s,a} l_v\end{aligned}$$

la Ec. (24) asume la forma sucinta:

$$J_v = \frac{\Delta_g}{\Delta_g + \gamma_g} (\mathcal{F}_s - \mathcal{J}_G) - \frac{R_v}{\Delta_g + \gamma_g} \ln r_h^a$$

donde hemos introducido la relación de saturación (al nivel de la garita), $r_h^a \in (0, 1]$ (multiplicada por 100 se conoce como humedad relativa), y donde expresamos los flujos radiativos y del subsuelo en unidades de J_v ($\text{kg m}^{-2} \text{s}^{-1}$), $\mathcal{F}_s = F_s/l_v$ y $\mathcal{J}_G = J_G/l_v$.

Δ_g y γ_g contienen el coeficiente fenomenológico de acoplamiento, ante el cual la termodinámica queda muda (más allá de sus signos), y sobre el cual no disponemos de información empírica, dado que las mediciones de campo de los flujos en cuestión no se realizan pensando en un acoplamiento entre ellos. Aunque lográsemos determinar el cociente $r_{mm}^{s,a}/r_{qq}^{s,a}$, como en el caso desacoplado que trataremos más abajo, quedaría por determinar el cociente de acoplamiento, a partir del cociente $r_{qm}^{s,a}/r_{qq}^{s,a}$. En todo caso, la forma generalizada, con una nueva resistividad $r_{qm}^{s,a}$, parece brindar la posibilidad de ampliar la estimación de la evaporación (y evapotranspiración con las modificaciones acostumbradas debidas a la presencia de vegetación). Su identificación con resistividades que se han propuesto, o su elaboración dentro de alguna teoría particular de flujos, redundaría en nuevas oportunidades de medición.

Nuestra derivación termodinámica de la fórmula de Penman no requiere linealizar la Ec. (2). El resultado, que carece de aproximaciones, es consecuencia de una termodinámica que postula *ab ovo* flujos irreversibles acoplados. Para poder aplicar en la práctica la presente fórmula inédita, además de estimar los flujos del primer término, y medir la humedad relativa a cierto nivel por encima de la superficie, se han de conocer los valores de los coeficientes fenomenológicos. En el laboratorio parece ser posible medir los coeficientes $r_{qq}^{s,a}$, $r_{mm}^{s,a}$ y $r_{qm}^{s,a}$, para lo cual **Kjelstrup y Bedeaux** (2008) ofrecen algunas instrucciones.

En el ámbito de la meteorología de la capa límite (peplosfera), las mediciones tendrían que realizarse al aire libre. Desde hace varias décadas vienen realizándose campañas de observación, en distintas latitudes y condiciones de estabilidad atmosférica, incluyendo la peplosfera nocturna, que presenta dificultades peculiares (**Nappo**, 2023). De noche -despreciando el flujo en el suelo- tendríamos la forma particular

$$J_v = - \frac{R_v}{r_{qq}^{s,a} l_v^2 - 2r_{qm}^{s,a} l_v + r_{mm}^{s,a}} \ln r_h^a$$

pero no bastarían las mediciones de la evaporación en función de la humedad relativa para obtener las resistencias. En todo caso se tendrían que medir los flujos de calor sensible y de vapor simultáneamente. En algunas teorías de la turbulencia en la capa límite se emplea un método de covarianzas para estimar los flujos, que se pueden expresar, para el de vapor de agua (la barra significa promedio temporal y las primas son desviaciones de la media correspondiente):

$$\overline{w'q'} \equiv \frac{J_v}{\varrho} = \frac{q_{vw}(T_s) - q_v^a}{r_{aV}}$$

y para el de calor sensible:

$$\overline{w'T'} = \frac{J_q}{\varrho c_p} = \frac{T_s - T_a}{r_{aQ}}$$

con las resistencias aerodinámicas $r_{aV} = (C_V U)^{-1}$ y $r_{aQ} = (C_Q U)^{-1}$; el miembro de la derecha es la relación integral que conocemos. En nuestro caso más general, se tendrían las dos ecuaciones (18) y (19), y si se miden las diferencias de las magnitudes que representan las fuerzas, junto con las covarianzas, se podrían determinar dos de los coeficientes, y quizá los tres mediante una ingeniosa combinación de fuerzas y flujos medidos.

Pero no es el propósito de este ensayo señalar una vía empírica que permita la determinación de los tres coeficientes fenomenológicos mediante medidas de campo apropiadas. Tampoco parece ser posible aprovechar el material empírico y semiempírico que se ha acumulado, puesto que las mediciones se refieren a sendos flujos junto con sus fuerzas conjugadas.

No obstante, para dar una idea de cómo se puede proceder para obtener información sobre los coeficientes fenomenológicos con base en alguna teoría especializada, vamos a contemplar el caso particular de flujos desacoplados, el tradicional, que de golpe pone a nuestra disposición mucho material empírico. Sea, pues, de ahora en adelante $r_{qm}^{s,a} \equiv 0$.

Desacoplando la fórmula de Penman generalizada

En este caso, especial desde nuestro punto de vista más general, se tiene $r_{qm}^{s,a} = r_{mq}^{s,a} = 0$.

Con esto, la ecuación (24) conserva su forma estructural, pero ahora con solo dos coeficientes fenomenológicos:

$$\begin{aligned}\Delta_g &= r_{qq}^{s,a} l_v^2 \\ \gamma_g &\equiv r_{mm}^{s,a}\end{aligned}$$

Para facilitar la comparación con las formas “penmanianas”, clásicas, que abundan en la literatura, es preciso linealizar el logaritmo en la Ec. (24), lo cual está justificado siempre y cuando $p'_v / p_{vw}(T_a) < 1$, donde $p'_v = p_v - p_{vw}(T_a)$ es la desviación de la presión parcial del vapor de agua de la curva de Clausius-Clapeyron; si $p'_v > 0$, el aire húmedo estaría sobresaturado (lo cual es posible en lugares sin contaminación o impurezas aéreas); si $p'_v < 0$, el aire húmedo está subsaturado, y se presenta el déficit necesario para la evaporación por cuenta de la fuerza química. Linealicemos entonces:

$$\ln \left[\frac{p_{vw}(T_a)}{p_{vw}(T_a) + p'_v} \right] \approx -\frac{p'_v}{p_{vw}(T_a)} = \frac{p_{vw}(T_a) - p_v}{p_{vw}(T_a)}$$

con lo cual se obtiene una de las formas familiares de la fórmula de Penman. A menudo se prefiere el empleo de la humedad específica q_v , definida como ϱ_v / ϱ (ϱ_v : densidad (mecánica) del vapor de agua y ϱ la densidad del aire húmedo). Aplicando la ecuación de los gases ideales (ϱ_{vw} : densidad del vapor saturado) da:

$$\begin{aligned}\frac{p_{vw}(T_a) - p_v}{p_{vw}(T_a)} &= \\ \frac{\varrho_{vw} R_v T_a - \varrho_v R_v T_a}{\varrho_{vw} R_v T_a} &= \frac{q_{vw}(T_a) - q_v}{q_{vw}(T_a)}\end{aligned}$$

y así el resultado general se convierte, al multiplicar en el segundo término numerador y denominador por γ_g , en:

$$\begin{aligned}J_v &= \frac{\Delta_g}{\Delta_g + \gamma_g} (\mathcal{F}_s - \mathcal{J}_G) + \\ &+ \frac{\gamma_g}{\Delta_g + \gamma_g} \frac{R_v}{\gamma_g q_{vw}(T_a)} [q_{vw}(T_a) - q_v]\end{aligned}\quad (25)$$

Esta forma nos permitirá identificar los coeficientes fenomenológicos $r_{qq}^{s,a}$ y $r_{mm}^{s,a}$.

En Arya (1988) y Brutsaert (2020), la fórmula de Penman toma la forma elegante (4), con $F_s = l_v \mathcal{F}_s$, $J_G = l_v \mathcal{J}_G$ y en la cual

$$E_a = \varrho C_V U [q_{vw}(T_a) - q_v] \quad (26)$$

es el poder desecante del aire, una expresión más concreta que la fórmula (5). Ahora podemos proceder a comparar los coeficientes de nuestra teoría con los de las observaciones de flujos turbulentos. Despejando en esta última ecuación la diferencia $q_{vw}(T_a) - q_v$ y reemplazándola en la Ec. (25), se obtiene concordancia estructural con la Ec. (4) si

$$\gamma_g = r_{mm}^{s,a} = \frac{R_v}{q_{vw}(T_a) \varrho C_V U} \quad (27)$$

En cuanto al coeficiente $r_{qq}^{s,a}$, lo identificamos gracias a la relación integral (6)

$$J_q = \varrho c_p C_Q U (T_s - T_a) = \varrho c_p C_Q U T_a T_s \left(\frac{1}{T_a} - \frac{1}{T_s} \right)$$

que comparamos con el flujo desacoplado (22)

$$J_q^a = \frac{r_{mm}^{s,a}}{r_{qq}^{s,a} r_{mm}^{s,a}} \Delta_s^a \left(\frac{1}{T} \right) = \frac{1}{r_{qq}^{s,a}} \left(\frac{1}{T_a} - \frac{1}{T_s} \right)$$

revelando así que el coeficiente fenomenológico $r_{qq}^{s,a}$ resulta ser

$$r_{qq}^{s,a} = \frac{1}{\varrho c_p C_Q U T_a T_s}$$

Reescribiendo la Ec. (25), gracias a la identificación (27), como

$$J_v = \frac{\Delta_g (\mathcal{F}_s - \mathcal{J}_G)}{\Delta_g + \gamma_g} + \frac{\gamma_g \varrho C_V U [q_{vw}(T_a) - q_v]}{\Delta_g + \gamma_g}$$

queda manifiesta la dependencia de la evaporación de la velocidad del viento cerca de la superficie (“efecto aerodinámico”).

Formemos a continuación el cociente de nuestros dos coeficientes fenomenológicos principales:

$$\begin{aligned} \frac{r_{mm}^{s,a}}{r_{qq}^{s,a}} &= \frac{\frac{R_v}{q_{vw} \varrho C_V U}}{\frac{1}{\varrho c_p C_Q U T_a T_s}} = \frac{\varrho R_v c_p C_Q T_a T_s}{\varrho_{vw} C_V} \\ &= \frac{\varrho R_v c_p T_a T_s}{\varrho_{vw}} = \frac{c_p R_v T_s}{\varrho_{vw}} \frac{p^a}{R_a} \\ &= \frac{c_p p^a}{\varepsilon \cdot \varrho_{vw}} \frac{T_s}{T_a} = \gamma_\zeta \frac{l_v T_s}{\varrho_{vw}} \end{aligned}$$

Habiendo confundido dos densidades ligeramente distintas, aparece aquí la “constante” psicrométrica que citábamos en la introducción ($\gamma_\zeta = c_p p^a / \varepsilon \cdot l_v$). p^a es la presión atmosférica en el nivel del anemómetro. Si en lugar de p^a elegimos p_s , con p_s la presión atmosférica en superficie, el cociente

$$\frac{r_{mm}^{s,a}}{r_{qq}^{s,a}} = \gamma_\zeta^s \frac{l_v T_a}{\varrho_{vw}} \quad (29)$$

se evalúa con la “constante” psicrométrica $\gamma_\zeta^s = \gamma_\zeta / (1 + 0.61 q_v)$, la dependencia de q_v debiéndose a que la ecuación de estado del aire húmedo es $\varrho = p/RT$, con $R = R_a (1 + 0.61 q_v)$, dependencia que modifica la temperatura (definiendo la temperatura virtual), pero que incorporamos en la “constante” psicrométrica. Ahora, si en la fórmula (28) con sus coeficientes explícitos,

$$\begin{aligned} J_v &= \frac{l_v^2 r_{qq}^{s,a}}{l_v^2 r_{qq}^{s,a} + r_{mm}^{s,a}} (\mathcal{F}_s - \mathcal{J}_G) + \\ &+ \frac{r_{mm}^{s,a}}{l_v^2 r_{qq}^{s,a} + r_{mm}^{s,a}} \varrho C_V U [q_{vw}(T_a) - q_v] \end{aligned}$$

dividimos numeradores y denominadores por $l_v^2 r_{qq}^{s,a}$, obtenemos, gracias a (29):

$$\begin{aligned} J_v &= \frac{1}{1 + \gamma_\zeta \frac{T_a}{l_v \varrho_{vw}}} (\mathcal{F}_s - \mathcal{J}_G) + \\ &+ \frac{\gamma_\zeta \frac{T_a}{l_v \varrho_{vw}}}{1 + \gamma_\zeta \frac{T_a}{l_v \varrho_{vw}}} \varrho C_V U [q_{vw}(T_a) - q_v] \end{aligned}$$

y si acto seguido multiplicamos numeradores y denominadores por

$$\frac{\varrho_{vw} l_v}{T_a} \equiv \Delta_\pi$$

se insinúa la forma clásica, que emerge idénticamente si transformamos este coeficiente mediante la ecuación de un gas ideal para el vapor de agua saturado:

$$\Delta_{\pi} = \frac{\rho_{vw} l_v}{T_a} = \frac{p_{vw}(T_a) l_v}{R_v T_a^2}$$

Invocando la ecuación de Clausius-Clapeyron (2) súbitamente introduce su pendiente,

$$\Delta_{\pi} = \frac{dp_{vw}(T_a)}{dT} = \Delta$$

Para un desenlace feliz no hace falta sino aproximar γ_s^s por γ_s , con lo que se obtiene la archiconocida fórmula de Penman:

$$J_v = \frac{\Delta}{\Delta + \gamma_s} (\mathcal{F}_s - \mathcal{J}_G) + \frac{\gamma_s}{\Delta + \gamma_s} \rho C_V U [q_{vw}(T_a) - q_v]$$

Nuestro proceder puntual pone de manifiesto que la tangente a la curva de saturación se calcula para la temperatura del aire (en el nivel de la garita), y no para otra temperatura, como lo hacen, por ejemplo, **Businger** (1973), **Garratt** (1994) o **Guyot** (1998), quienes instan a calcular la pendiente para una temperatura media $(T_a + T_s)/2$, es decir, no nos eximen de conocer la temperatura de la superficie T_s . Penman optó por la pendiente en T_a , pero en rigor su aproximación representa la pendiente de la secante entre T_a y T_s , que no coincide con la tangente en T_a o T_s .

Antes de finalizar esta exposición, cabe preguntarnos qué tanta entropía se produce globalmente y en promedio anual por evaporación en superficie, con el fin de comparar su valor con la tasa de producción total del sistema climático. La evaporación es el segundo proceso más importante en el balance de energía del clima, con 82 Wm^{-2} de calor latente que fluyen hacia la atmósfera (más de cuatro veces la densidad de flujo de calor sensible J_q^s), en cuyo seno se depositan por condensación, calentando así la atmósfera, y compensando en gran parte su pérdida por enfriamiento radiativo (**Trenberth**, 2022). La producción de entropía por cuenta de la evaporación se estima de acuerdo con la Ec. (15)

$$\sigma_s^s = J_v R_v \ln \left[\frac{p_{vw}(T_s)}{p_v} \right] = -J_v R_v \ln r_h^s$$

en la que insertamos el flujo (19) (desacoplado)

$$J_v = q_{vw}(T_a) \rho C_V U \ln \left(\frac{1}{r_h^s} \right)$$

resultando como tasa de producción

$$\sigma_s^s = \frac{p_{vw}(T_a)}{T_a} C_V U \ln^2 r_h^s \quad (30)$$

El promedio multianual y global de la humedad relativa es de 80 %, y por tanto $r_h^s = 0,8$; la temperatura global de la garita es un tris menor que la global de la superficie, en el caso adiabático, por ejemplo, $0,02^\circ$ menor que el promedio climatológico $T_s = 288 \text{ K}$; **Arya** (1988) menciona valores de C_v para superficies de agua lisas, entre 1 y 2×10^{-3} ; tomemos el promedio, $C_v = 1,5 \times 10^{-3}$; y para el viento en la altura del anemómetro, en lugar de buscar un valor climatológico en la literatura, lo inferimos de $l_v J_v = 82 \text{ Wm}^{-2}$, y empleando los demás valores que conocemos se obtiene como valor promedio global $\bar{U} = 0,5126 \text{ ms}^{-1}$. Con todos estos valores medios, calculamos una tasa de $\sigma_s^s = 0,0045 \text{ Wm}^{-2}\text{K}^{-1}$, un valor que concuerda con el que estimaron **Feistel y Ebeling** (2011), en una obra que, dicho sea de paso, también se basa en la termodinámica de procesos irreversibles de impronta onseriana. Comparada esta tasa con la total del sistema climático en estado estacionario, a saber, $1,983 \text{ Wm}^{-2}\text{K}^{-1}$ (**Pelkowski**, 2012), la producción de entropía por evaporación representa apenas un 0.38 %.

Terminemos con algunos comentarios casquivanos. La producción de entropía coloquialmente tiene connotaciones negativas, desde que el inmortal físico vienés, Ludwig Boltzmann (1844-1906), demostró que en el ámbito microscópico de las moléculas el “desorden” aumenta a medida que crece la entropía (en un sistema aislado). Al público decimonónico la aforística sentencia de Clausius, según la cual la entropía del universo aspiraba a un valor máximo, causaba espanto. ¿Cuál es el aporte de la evaporación? Una ley empírica del clima es que la humedad relativa “globoanual” parece mantenerse constante en las vicisitudes del clima (en un 80 %, según Feistel y Hellmuth 2020). De la Ec. (30) podemos concluir que, a igual humedad relativa, el calentamiento global conlleva un aumento (exponencial) del valor saturante del vapor, $p_{\text{vs}}(T_a)$, no compensado por el denominador lineal en T_a , y por consiguiente un aumento de la producción de entropía global (que se exporta hacia el espacio en estado estacionario). Sin pensar en la precipitación global, mayor evaporación implica más vapor de agua en el sistema climático, provocando un mayor efecto de invernadero (mayor R_i^+), lo que a su vez refuerza la retroalimentación. Si a ello agregamos el rumor de que los vientos en tal mundo recalentado también se intensifican, pensando por ejemplo en la “velocidad potencial” de los “huracanes de Emanuel” (2026), la evaporación se incrementaría al mismo ritmo que la entropía.

Más que asustarnos, la producción de entropía nos invita a crear ecuaciones constitutivas *acopladas*, como se demostró en este ensayo para dos procesos energéticos de suma importancia en el contexto de la energética del clima.

Agradecimientos

Un colega, Francisco Boshell, y una de los estudiantes del Posgrado de Meteorología de la Universidad Nacional de Colombia, la ingeniera Martha Cadena, actualmente investigadora en el Instituto de Estudios Ambientales (IDEAM), en épocas añoradas solían hablar de cultivos y sus condiciones meteorológicas, y especialmente de la fórmula de Penman como algo sagrado en la meteorología del agro, con lo que me inculcaron una persistente curiosidad por conocerla y entenderla; cuando apareció el libro de **Guyot** (1998, ed. francesa 1997), en el que se demuestra con torpeza notacional la susodicha fórmula, quedé intrigado por los distintos elementos meteorológicos que reúne, todo lo cual nutrió mi deseo de cimentarla en la termodinámica de la atmósfera, rama esencial de la asignatura *Meteorología Física* que enseñé durante varios años en aquel posgrado.

Referencias

- [**Abreviaturas:** CUP: Cambridge University Press; OUF: Oxford University Press.]
- Arya, S. Pal** (1988) (2ª 2001): Introduction to Micrometeorology. Academic Press.
- Barry, Roger G. & Peter D. Blaken** (2016). Microclimate and Local Climate. CUP.
- Bechtel, Stephen E.** (with Robert L. Lowe) (2015). Fundamentals of Continuum Mechanics. Academic Press (Elsevier).
- Brutsaert, Wilfried** (2020) (2ª ed.): Hydrology. An Introduction. CUP.
- Businger, Joost A.** (1973). Turbulent transfer in the atmospheric surface layer. En: Workshop on Micrometeorology. (Haugen, Duane, ed.). American Meteorological Society.
- Collier, Christopher G.** (2016). Hydrometeorology. Wiley-Blackwell. Oxford.
- Criado-Sancho, Manuel & José Casas-Vázquez.** (2004). Termodinámica química y de los procesos irreversibles. Pearson Educación, S. A.
- Csanady, Gabriel T.** (2001). Air-Sea Interaction. Laws and Mechanisms. CUP.
- De Groot, S.R.** (1968). Termodinámica de los procesos irreversibles. Editorial Alhambra, S.A., Madrid, 268 pp.
- Dufour, L. & R. Defay.** (1963). Thermodynamics of Clouds. Academic Press, New York, 255 pp.
- Dufour, L. & J. van Mieghem.** (1975). Thermodynamique de l'atmosphère. Institut Royal Météorologique de Belgique, J.Duculot, Gembloux, Bélgica, 278 pp.
- Emanuel, Kerry** (2026). Physics of the Tropical Atmosphere and Tropical Cyclones. Princeton University Press.
- Feistel, Rainer & Werner Ebeling** (2011). Physics of Self-Organization and Evolution. Wiley-VCH Verlag, Weinheim.

- Feistel, Rainer & Olaf Hellmuth:** Zur Rolle des Wassers in der Energiebilanz des Klimasystems (El papel del agua en el balance energético del clima). *Sitzungsberichte der Leibniz-Sozietät*, Berlin, 144, 51-139.
- Foken, Thomas** (2021). Handbook of Atmospheric Measurements. Springer.
- Garratt, J. R.** (1992). The Atmospheric Boundary Layer. CUP.
- Gash, John H. C. & James Shuttleworth (eds.)** (2007). Evaporation. Benchmark Papers in Hydrology. IAHS, UK.
- Goosse, Hugues** (2015). Climate System Dynamics and Modelling. CUP.
- Guyot, Gérard** (1998). Physics of the Environment and Climate. Wiley, Chichester.
- Job, Georg & Regina Rüffler** (2025). Termodinámica química. Una introducción con un nuevo concepto y numerosos experimentos. Universidad Nacional de Colombia.
- Kaimal, J. C. y John J. Finnigan** (1994). Atmospheric Boundary Layer Flows. Their Structure and Measurement. OUP.
- Kamenkovich, Vladimir Moiseevich** (1977). Fundamentals of Ocean Dynamics. Elsevier.
- Kjelstrup, Signe & Dick Bedeaux** (2008) (2ª ed. 2020): Non-Equilibrium Thermodynamics of Heterogeneous Systems. World Scientific.
- Kondepudi, D. y I. Prigogine.** (1998). Modern Thermodynamics. Wiley & Sons, Chichester, 486 pp.
- Kuiken, Gerard S. C.** (1994). Thermodynamics of Irreversible Processes. Applications to Diffusion and Rheology. John Wiley & Sons.
- Lee, Xuhui** (2017). Fundamentals of Boundary-Layer Meteorology. Springer.
- Monson, Russell, Dennis Baldocchi** (2014). Terrestrial Biosphere-Atmosphere Fluxes. CUP.
- Monteith, John L.** (1973). Principles of Environmental Physics. Edward Arnold.
- Nappo, Carmen J.** (2023). Who is afraid of the dark? The not so stable stable boundary layer. En: Conceptual Boundary Layer Meteorology (April L. Hiscox, ed.). Academic Press.
- Olbers, Dirk, Jürgen Willebrand, Carsten Eden** (2012). Ocean Dynamics. Springer.
- Peixoto, José P. & Abraham H. Oort** (1992). Physics of Climate. American Institute of Physics.
- Pelkowski, Joaquín** (1907). El albedo terrestre. *Revista De La Academia Colombiana De Ciencias Exactas, Físicas Y Naturales*, 31(121), 499-520.
- Pelkowski, Joaquín** (1909). Cimentación de la fórmula empírica de Ångström referente a la radiación atmosférica en superficie. *Revista De La Academia Colombiana De Ciencias Exactas, Físicas Y Naturales*, 33(129), 513-528.
- Pelkowski, Joaquín** (2012). Of entropy production by radiative processes in a conceptual climate model. *Meteorologische Zeitschrift*, 21 (5), 439-457.
- Rotach, Mathias W. & Albert A. M. Holtslag** (2025). Ideal and Real Atmospheric Boundary Layers. Academic Press, Elsevir.
- Shelton, Marlyn L.** (2009). Hydroclimatology. CUP.
- Siebesma, A. Pier, Sandrine Bony, Christian Jakob, Bjorn Stevens (editores)** (2020). Clouds and Climate: Climate Science's Greatest Challenge. CUP.
- Shuttleworth, James** (2012). Terrestrial Hydroclimatology. Wiley-Blackwell. OUP.
- Trenberth, Kevin E.** (2022). The Changing Flow of Energy Through the Climate System. CUP.