

Matemáticas

Artículo original

Transformada doble de Laplace *non-conformable* generalizada

Generalized *non-conformable* double Laplace transform

Simón Cedeño-Mendoza¹, Harold David Jarrín¹, Janneth Velasco-Velasco^{1,*},
Miguel Vivas-Cortez²

¹Departamento de Ciencias Exactas, Universidad de las Fuerzas Armadas ESPE, Sangolquí, Pichincha, Ecuador

²Facultad de Ciencias Exactas, Naturales y Ambientales, Pontificia Universidad Católica del Ecuador, Laboratorio FRACTAL (Fractional Research Analysis, Convexity and Their Applications Laboratory), Quito, Pichincha, Ecuador

Resumen

En este trabajo se introduce una nueva transformada de Laplace fraccionaria denominada transformada doble de Laplace *non-conformable* generalizada. Esta propuesta extiende las transformadas dobles de Laplace *non-conformable* mediante la inclusión de funciones moduladoras generalizadas $\phi(u)$ y $\psi(v)$. Se establecen las propiedades básicas de la transformada, incluida la linealidad, las condiciones de existencia, las propiedades derivativas y los teoremas de convolución. Por último, la transformada doble de Laplace *non-conformable* generalizada (*Generalized Non-Conformable Double Laplace Transform - NCGDT*) se aplica a la resolución de diferentes tipos de ecuaciones diferenciales parciales fraccionarias *non-conformables*.

Palabras clave: Transformada doble de Laplace *non-conformable*; derivada *non-conformable*.

Abstract

In this work, a new fractional Laplace transform called the generalized non-conformable double Laplace transform is introduced. This proposal extends the non-conformable double Laplace transforms by including generalized modulating functions $\phi(u)$ and $\psi(v)$. The basic properties of the transform are established, including linearity, existence conditions, derivative properties, and convolution theorems. Finally, the generalized non-conformable double Laplace transform (NCGDT) is applied to the solution of different types of non-conformable fractional partial differential equations.

Keywords: Non-conformable double Laplace transform; non-conformable derivative.

1. Introducción

En los últimos años, el cálculo fraccionario ha desempeñado un papel esencial en la modelización de sistemas complejos en ingeniería, física, biología y otras ciencias aplicadas. Las ecuaciones diferenciales parciales fraccionarias han surgido como herramientas eficaces para describir fenómenos del mundo real con efectos de memoria o comportamiento no local, siendo útiles en biología matemática, dinámica de fluidos, óptica, circuitos eléctricos y física cuántica [Kilbas et al., 2006], [Diethelm, 2010], [Avci et al., 2017]. Diversas definiciones de derivadas e integrales fraccionarias, entre ellas las propuestas por Riesz, Weyl, Riemann-Liouville, Caputo y Hadamard, han sido ampliamente estudiadas en la literatura matemática [Ross et al., 1994], [Anastassiou, 2011], [Yang et al., 2013].

Muchas de estas definiciones presentan ciertas limitaciones, como el incumplimiento de reglas básicas, por ejemplo, las del producto o del cociente, lo que dificulta su aplicación en áreas como la ingeniería y la física. En este contexto, [Khalil et al., 2014] propusieron la derivada fraccionaria local conformable. Este tipo de derivadas ha despertado un interés creciente debido a su capacidad para conservar propiedades fundamentales de la derivada clásica, al tiempo que incorporan características de memoria y localidad adecuadas para describir fenómenos anómalos. Para profundizar en el estudio

Citación: Cedeño-Mendoza S, et al. Transformada doble de Laplace *non-conformable* generalizada. Revista de la Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. 50(196):873-895, julio-septiembre de 2026. doi: <https://doi.org/10.18257/raccefyn.4097>

Editor: Francisco Marcellan

***Correspondencia:**

Janneth Velasco Velasco;
javelasco3@espe.edu.ec

Recibido: 5 de mayo de 2026

Aceptado: 20 de mayo de 2026

Publicado en línea: 2 de julio de 2026



Este artículo está bajo una licencia de Creative Commons Reconocimiento-NoComercial-Compartir Igual 4.0 Internacional

de las derivadas conformables y generalizadas, se pueden consultar [Abdeljawad, 2015], [Atangana and Baleanu, 2015], [Hashemi, 2018], [Gozutok and Gozutok, 2018] y [Vivas-Cortez et al., 2025].

En este contexto, la derivada fraccionaria non-conformable, definida por [Guzmán et al., 2018] como

$$N_1^\alpha f(u) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(u + \varepsilon e^{u-r}) - f(u)}{\varepsilon} = e^{u-r} f'(u),$$

ha despertado particular interés, ya que mantiene la linealidad y la regla del producto, introduciendo a su vez una escala exponencial no uniforme que refleja un comportamiento local non-conformable. Esta propiedad la hace especialmente apropiada para describir procesos no lineales de crecimiento, difusión y relajación en sistemas biológicos, físicos y químicos, se puede estudiar más acerca de la derivada non-conformable en [Nápoles Valdes et al., 2018], [González et al., 2020], [Martínez et al., 2022], [Injrou and Hatem, 2022].

A partir de este concepto se desarrollaron la transformada de Laplace non-conformable [Vivas-Cortez et al., 2021] y su versión doble [Jarrín et al., 2026], las cuales son herramientas eficaces para la resolución de ecuaciones diferenciales parciales fraccionarias locales. Diversos resultados sobre la transformada de Laplace se recogen en [Watugala, 1993], [Doetsch, 2012], [Alawad et al., 2013], [Sedeeg, 2016], [Özkan and Kurt, 2018], [Alfaeih and Misirli, 2021], [Alfaeih et al., 2021], [Honggang and Yanmin, 2022], [Deresse, 2022], [Al-Rab'a et al., 2022], [Abdeljawad et al., 2023], [Mohamed et al., 2023]. Sin embargo, muchos fenómenos reales presentan heterogeneidad estructural y dependencia paramétrica que no pueden ser descritas adecuadamente mediante la transformada non-conformable estándar. Esto motiva la formulación de una Transformada Doble de Laplace Non-Conformable Generalizada (NCGDT), la que se construyó tomando como referencia [Meddahi et al., 2021] y [Sedeeg and Alhamad, 2025], es capaz de generar diversas transformadas conocidas como casos particulares mediante la variación de sus funciones núcleo.

En este trabajo se introduce una nueva definición denominada Transformada Doble de Laplace Non-Conformable Generalizada, denotada por

$$\mathcal{L}_x^r \mathcal{L}_y^t \left[h \left(\int_0^x e^{-u-r} du, \int_0^y e^{-v-t} dv \right) \right] = \mu_{D_{r,t}}(m, n)$$

La transformada propuesta extiende las versión non-conformable de la transformada doble de Laplace, incorporando núcleos exponenciales locales del tipo e^{-x-r} y e^{-t-t} , junto con funciones generadoras generalizadas $\varphi(m)$ y $\omega(n)$. Mediante la elección adecuada de dichas funciones, la nueva transformada puede reproducir como casos particulares las versiones non-conformable de la transformada doble de Laplace.

Notación

Resumimos a continuación la notación principal utilizada en este trabajo.

Símbolo	Descripción
x, y	Variables independientes reales.
$r, t \in (0, 1)$	Órdenes de las derivadas parciales fraccionarias non-conformables.
$h(x, y)$	Función real o compleja de dos variables.
$\varphi(m), \omega(n)$	Funciones transformadoras asociadas a x y y .
$\eta(m), \rho(n)$	Funciones de normalización asociadas a la transformada doble de Laplace generalizada non-conformable.

Cuadro 1. Notación utilizada a lo largo del manuscrito.

2. Definiciones básicas

En esta sección, establecemos las definiciones y propiedades de la doble transformada de Laplace generalizada.

Definición 2.1. [Meddahi et al., 2021]

Sea $g(x, y)$ una función integrable de dos variables, con $x, y > 0$. Entonces, la doble transformada de Laplace generalizada, denotada por $\Psi_D(u, v)$, se define como

$$\mathcal{L}_x \mathcal{L}_y [g(x, y); m, n] = \Psi_D(m, n) = \eta(m) \rho(n) \int_0^\infty \int_0^\infty g(x, y) e^{-(\varphi(m)x + \omega(n)y)} dx dy \quad (2.1)$$

donde $\varphi(m)$ y $\omega(n)$ representan las funciones transformadoras asociadas a x y y , respectivamente.

Asimismo,

$$(\mathcal{L}_x \mathcal{L}_y)^{-1} [\Psi_D(m, n)] = g(x, y) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{e^{\varphi(m)x}}{\eta(m)} dm \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} \frac{e^{\omega(n)y}}{\rho(n)} dn \quad (2.2)$$

Definición 2.2. [Meddahi et al., 2021]

Sea $g(x, y)$ una función definida en $[0, X] \times [0, Y]$ que satisface la condición

$$|g(x, y)| \leq K e^{\alpha x + \delta y} \quad \exists K > 0, \quad \forall x > X \text{ y } \forall y > Y.$$

En tal caso, se dice que $g(x, y)$ es una función de órdenes exponenciales α y δ cuando $x, y \rightarrow \infty$.

Teorema 2.1. [Meddahi et al., 2021]

La condición de existencia de la doble transformada de Laplace generalizada de la función continua $g(x, y)$ definida en $[0, X] \times [0, Y]$ debe ser de órdenes exponenciales α y δ , para $\text{Re}[\varphi(m)] > \alpha$ y $\text{Re}[\omega(n)] > \delta$ y además se tiene

$$|\Psi_D(m, n)| \leq \frac{\eta(m) \rho(n) K}{(\varphi(m) - \alpha)(\omega(n) - \delta)}.$$

En el siguiente teorema, anotamos algunas propiedades básicas de la transformada doble de Laplace generalizada

Teorema 2.2. [Meddahi et al., 2021]

Sean $g(x, y)$ y $h(x, y)$ funciones de órdenes exponenciales. Si

$$\Psi_D(m, n) = \mathcal{L}_x \mathcal{L}_y [g(x, y)], \quad \mu_D(m, n) = \mathcal{L}_x \mathcal{L}_y [h(x, y)],$$

y $a, b \in \mathbb{R}$, entonces:

1.

$$\mathcal{L}_x \mathcal{L}_y [a g(x, y) + b h(x, y)] = a \mathcal{L}_x \mathcal{L}_y [g(x, y)] + b \mathcal{L}_x \mathcal{L}_y [h(x, y)] \quad (2.4)$$

2.

$$(\mathcal{L}_x \mathcal{L}_y)^{-1} [a \Psi_D(m, n) + b \mu_D(m, n)] = a (\mathcal{L}_x \mathcal{L}_y)^{-1} [\Psi_D(m, n)] + b (\mathcal{L}_x \mathcal{L}_y)^{-1} [\mu_D(m, n)] \quad (2.5)$$

3.

$$\mathcal{L}_x \mathcal{L}_y [x^a y^b] = \eta(m) \rho(n) \frac{\Gamma(a+1) \Gamma(b+1)}{\varphi(m)^{a+1} \omega(n)^{b+1}}, \quad a, b \geq 0. \quad (2.6)$$

4.

$$\mathcal{L}_x \mathcal{L}_y [e^{ax+by}] = \frac{\eta(m) \rho(n)}{(\varphi(m) - a)(\omega(n) - b)}, \quad \Re[\varphi(m)] > a, \quad \Re[\omega(n)] > b. \quad (2.7)$$

5.

$$\mathcal{L}_x \mathcal{L}_y [\cos(ax) \cos(by)] = \frac{\eta(m) \varphi(m)}{\varphi^2(m) + a^2} \cdot \frac{\rho(n) \omega(n)}{\omega^2(n) + b^2}, \quad a, b \in \mathbb{R}. \quad (2.8)$$

$$6. \quad \mathcal{L}_x \mathcal{L}_y [\sin(ax) \sin(by)] = \frac{a \eta(m)}{\varphi^2(m) + a^2} \cdot \frac{b \rho(n)}{w^2(n) + b^2}, \quad a, b \in \mathbb{R}. \quad (2.9)$$

$$7. \quad \mathcal{L}_x \mathcal{L}_y \left[\frac{\partial^n h(x, y)}{\partial x^n} \right] = \varphi^n(u) \mu_D(u, v) - \eta(u) \sum_{s=1}^{n-1} \varphi^{n-1-s}(u) \frac{d^s \mathcal{L}_I(0, v)}{dx^s}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (2.10)$$

donde $\mathcal{L}_I(0, v)$ es la transformada integral generalizada de $h(0, y)$, definida como

$$\mathcal{L}_I(0, v) = \eta(u) \rho(v) \int_0^\infty h(0, y) e^{-w(v)y} dy.$$

3. Derivada fraccionaria non-conformable

En esta sección introducimos las definiciones de derivadas parciales fraccionarias non-conformables.

Definición 3.1.

Sea

$$h \left(\int_0^x e^{-u^{-r}} du, \int_0^y e^{-v^{-t}} dv \right) : \mathbb{R} \times (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R},$$

entonces:

I) La derivada parcial fraccionaria espacial non-conformable de

$$h \left(\int_0^x e^{-u^{-r}} du, \int_0^y e^{-v^{-t}} dv \right)$$

de orden r está definida como

$${}_x N_1^r h \left(\int_0^x e^{-u^{-r}} du, \int_0^y e^{-v^{-t}} dv \right) = \lim_{\beta \rightarrow 0} \frac{h \left(\int_0^x e^{-u^{-r}} du + \beta e^{x^{-r}}, \int_0^y e^{-v^{-t}} dv \right)}{\beta} - \frac{h \left(\int_0^x e^{-u^{-r}} du, \int_0^y e^{-v^{-t}} dv \right)}{\beta}. \quad (3.1)$$

II) La derivada parcial fraccionaria espacial non-conformable de

$$h \left(\int_0^x e^{-u^{-r}} du, \int_0^y e^{-v^{-t}} dv \right)$$

de orden t está definida como

$${}_y N_1^t h \left(\int_0^x e^{-u^{-r}} du, \int_0^y e^{-v^{-t}} dv \right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{h \left(\int_0^x e^{-u^{-r}} du, \int_0^y e^{-v^{-t}} dv + \varepsilon e^{y^{-t}} \right)}{\varepsilon} - \frac{h \left(\int_0^x e^{-u^{-r}} du, \int_0^y e^{-v^{-t}} dv \right)}{\varepsilon}. \quad (3.2)$$

donde

$$\int_0^x e^{-u^{-r}} du, \int_0^y e^{-v^{-t}} dv > 0, \quad 0 < r, t \leq 1.$$

Derivadas parciales fraccionarias non-conformables de algunas funciones

En lo que sigue, daremos las derivadas parciales fraccionarias non-conformables de algunas funciones.

1) Sea

$$h\left(\int_0^x e^{-u-r} du, \int_0^y e^{-v-t} dv\right) = \int_0^x e^{-u-r} du \cdot \int_0^y e^{-v-t} dv,$$

entonces, al aplicar los operadores correspondientes, se obtiene:

$$\begin{aligned} {}_x N_1^r \left(\int_0^x e^{-u-r} du \cdot \int_0^y e^{-v-t} dv \right) &= \int_0^y e^{-v-t} dv, \\ {}_y N_1^t \left(\int_0^x e^{-u-r} du \cdot \int_0^y e^{-v-t} dv \right) &= \int_0^x e^{-u-r} du. \end{aligned}$$

2) Sea

$$h\left(\int_0^x e^{-u-r} du, \int_0^y e^{-v-t} dv\right) = \left(\int_0^x e^{-u-r} du\right)^n,$$

entonces, se tiene que:

$$\begin{aligned} {}_x N_1^r \left(\left(\int_0^x e^{-u-r} du \right)^n \right) &= n \left(\int_0^x e^{-u-r} du \right)^{n-1}, \\ {}_y N_1^t \left(\left(\int_0^x e^{-u-r} du \right)^n \right) &= 0. \end{aligned}$$

3) Sea

$$h\left(\int_0^x e^{-u-r} du, \int_0^y e^{-v-t} dv\right) = \left(\int_0^x e^{-u-r} du\right)^j \left(\int_0^y e^{-v-t} dv\right)^i,$$

entonces, se obtiene:

$$\begin{aligned} {}_x N_1^r \left(\left(\int_0^x e^{-u-r} du \right)^j \left(\int_0^y e^{-v-t} dv \right)^i \right) &= j \left(\int_0^x e^{-u-r} du \right)^{j-1} \left(\int_0^y e^{-v-t} dv \right)^i, \\ {}_y N_1^t \left(\left(\int_0^x e^{-u-r} du \right)^j \left(\int_0^y e^{-v-t} dv \right)^i \right) &= i \left(\int_0^x e^{-u-r} du \right)^j \left(\int_0^y e^{-v-t} dv \right)^{i-1}. \end{aligned}$$

4) Sea

$$h\left(\int_0^x e^{-u-r} du, \int_0^y e^{-v-t} dv\right) = \sin\left(\lambda \int_0^x e^{-u-r} du\right) \sin\left(\beta \int_0^y e^{-v-t} dv\right),$$

entonces, se tiene:

$$\begin{aligned} {}_x N_1^r \left(\sin\left(\lambda \int_0^x e^{-u-r} du\right) \sin\left(\beta \int_0^y e^{-v-t} dv\right) \right) &= \lambda \cos\left(\lambda \int_0^x e^{-u-r} du\right) \sin\left(\beta \int_0^y e^{-v-t} dv\right), \\ {}_y N_1^t \left(\sin\left(\lambda \int_0^x e^{-u-r} du\right) \sin\left(\beta \int_0^y e^{-v-t} dv\right) \right) &= \beta \sin\left(\lambda \int_0^x e^{-u-r} du\right) \cos\left(\beta \int_0^y e^{-v-t} dv\right). \end{aligned}$$

5) Sea

$$h\left(\int_0^x e^{-u-r} du, \int_0^y e^{-v-t} dv\right) = e^{\lambda \int_0^x e^{-u-r} du + \beta \int_0^y e^{-v-t} dv},$$

entonces, se obtiene:

$$\begin{aligned} {}_x N_1^r \left(e^{\lambda \int_0^x e^{-u-r} du + \beta \int_0^y e^{-v-t} dv} \right) &= \lambda e^{\lambda \int_0^x e^{-u-r} du + \beta \int_0^y e^{-v-t} dv}, \\ {}_y N_1^t \left(e^{\lambda \int_0^x e^{-u-r} du + \beta \int_0^y e^{-v-t} dv} \right) &= \beta e^{\lambda \int_0^x e^{-u-r} du + \beta \int_0^y e^{-v-t} dv}. \end{aligned}$$

Teorema 3.1.

Sean $r, t \in (0, 1]$ y sea $h\left(\int_0^x e^{-u^{-r}} du, \int_0^y e^{-v^{-t}} dv\right)$ una función diferenciable de orden r y t en los puntos $x, y > 0$, respectivamente. Entonces, se cumple que:

$${}_x N_1^r h\left(\int_0^x e^{-u^{-r}} du, \int_0^y e^{-v^{-t}} dv\right) = e^{x^{-r}} \frac{\partial}{\partial x} h\left(\int_0^x e^{-u^{-r}} du, \int_0^y e^{-v^{-t}} dv\right),$$

$${}_y N_1^t h\left(\int_0^x e^{-u^{-r}} du, \int_0^y e^{-v^{-t}} dv\right) = e^{y^{-t}} \frac{\partial}{\partial y} h\left(\int_0^x e^{-u^{-r}} du, \int_0^y e^{-v^{-t}} dv\right).$$

Demostración.

Para demostrar el resultado, hacemos el cambio $j = \beta e^{x^{-r}}$ y, utilizando la definición 3.1, se obtiene:

$${}_x N_1^r h\left(\int_0^x e^{-u^{-r}} du, \int_0^y e^{-v^{-t}} dv\right) = \lim_{j \rightarrow 0} \frac{h\left(\int_0^x e^{-u^{-r}} du + j, \int_0^y e^{-v^{-t}} dv\right)}{j e^{-x^{-r}}} \quad (1)$$

$$= \frac{h\left(\int_0^x e^{-u^{-r}} du, \int_0^y e^{-v^{-t}} dv\right)}{j e^{-x^{-r}}} \quad (2)$$

$$= \lim_{j \rightarrow 0} \frac{e^{x^{-r}} h\left(\int_0^x e^{-u^{-r}} du + j, \int_0^y e^{-v^{-t}} dv\right)}{j} \quad (3)$$

$$= \frac{e^{x^{-r}} h\left(\int_0^x e^{-u^{-r}} du, \int_0^y e^{-v^{-t}} dv\right)}{j}. \quad (4)$$

De donde se deduce que

$${}_x N_1^r h\left(\int_0^x e^{-u^{-r}} du, \int_0^y e^{-v^{-t}} dv\right) = e^{x^{-r}} \frac{\partial}{\partial x} h\left(\int_0^x e^{-u^{-r}} du, \int_0^y e^{-v^{-t}} dv\right).$$

De manera análoga, se obtiene que:

$${}_y N_1^t h\left(\int_0^x e^{-u^{-r}} du, \int_0^y e^{-v^{-t}} dv\right) = e^{y^{-t}} \frac{\partial}{\partial y} h\left(\int_0^x e^{-u^{-r}} du, \int_0^y e^{-v^{-t}} dv\right).$$

□

Observación.

Cuando la función h no es diferenciable en el sentido clásico, las derivadas parciales ordinarias pueden no existir. En consecuencia, las igualdades del Teorema 3.1 dejan de estar bien definidas en el marco clásico y el teorema no puede aplicarse directamente.

4. Transformada doble de Laplace generalizada non-conformable

En esta sección, definimos la transformada doble de Laplace generalizada non-conformable y probaremos algunos teoremas.

Definición 4.1.

Sea $h\left(\int_0^x e^{-u^{-r}} du, \int_0^y e^{-v^{-t}} dv\right)$ una función continua por partes en $(0, \infty) \times (0, \infty)$. Se dice que es de orden exponencial generalizado si existen constantes $M, a, b \in \mathbb{R}$ tales que

$$\left| h\left(\int_0^x e^{-u^{-r}} du, \int_0^y e^{-v^{-t}} dv\right) \right| \leq M e^{a \int_0^x e^{-u^{-r}} du + b \int_0^y e^{-v^{-t}} dv}.$$

Esta condición permite describir el crecimiento de la función mediante una cota de tipo exponencial en las variables transformadas.

Definición 4.2.

Sean $r, t \in (0, 1]$ y sea $h\left(\int_0^x e^{-u^{-r}} du, \int_0^y e^{-v^{-t}} dv\right)$ una función continua por partes en el intervalo $[0, \infty) \times [0, \infty)$ de orden exponencial generalizado.

Entonces, la transformada doble de Laplace generalizada *non-conformable* está dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_x^r \mathcal{L}_y^t \left[h\left(\int_0^x e^{-u^{-r}} du, \int_0^y e^{-v^{-t}} dv\right) \right] &= \mu_{D_{rt}}(m, n) \\ \eta(m) \rho(n) \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\varphi(m) \int_0^x e^{-u^{-r}} du - \omega(n) \int_0^y e^{-v^{-t}} dv} h\left(\int_0^x e^{-u^{-r}} du, \int_0^y e^{-v^{-t}} dv\right) e^{-x^{-r}} e^{-y^{-t}} dx dy, \end{aligned}$$

donde $m, n \in \mathbb{C}$ y las integrales se efectúan en el sentido fraccionario *non-conformable* con respecto a $\int_0^x e^{-u^{-r}} du$ y $\int_0^y e^{-v^{-t}} dv$.

Corolario 4.1

Si $\eta(m) = \rho(n) = 1$ y $\varphi(m) = m$, $\omega(n) = n$, entonces se obtiene la transformada doble de Laplace *non-conformable*:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_x^r \mathcal{L}_y^t \left[h\left(\int_0^x e^{-u^{-r}} du, \int_0^y e^{-v^{-t}} dv\right) \right] \\ = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-m \int_0^x e^{-u^{-r}} du - n \int_0^y e^{-v^{-t}} dv} h\left(\int_0^x e^{-u^{-r}} du, \int_0^y e^{-v^{-t}} dv\right) e^{-x^{-r}} e^{-y^{-t}} dx dy. \end{aligned}$$

Definición 4.3.

Sea $h\left(\int_0^x e^{-u^{-r}} du, \int_0^y e^{-v^{-t}} dv\right)$ una función continua por tramos definida en $(0, \infty) \times (0, \infty)$ y de orden exponencial generalizado.

Consideremos la transformada de Laplace generalizada *non-conformable* con respecto a x , definida por

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_x^r \left[h\left(\int_0^x e^{-u^{-r}} du, \int_0^y e^{-v^{-t}} dv\right) \right] \\ = \eta(m) \int_0^\infty e^{-x^{-r}} e^{-\varphi(m) \int_0^x e^{-u^{-r}} du} h\left(\int_0^x e^{-u^{-r}} du, \int_0^y e^{-v^{-t}} dv\right) dx. \end{aligned}$$

Esta integral corresponde a la transformada de Laplace generalizada *non-conformable* de

$h\left(\int_0^x e^{-u^{-r}} du, \int_0^y e^{-v^{-t}} dv\right)$ con respecto a la variable x .

De forma similar, la transformada de Laplace generalizada *non-conformable* con respecto a la variable y está dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_y^t \left[h\left(\int_0^x e^{-u^{-r}} du, \int_0^y e^{-v^{-t}} dv\right) \right] \\ = \rho(n) \int_0^\infty e^{-y^{-t}} e^{-\omega(n) \int_0^y e^{-v^{-t}} dv} h\left(\int_0^x e^{-u^{-r}} du, \int_0^y e^{-v^{-t}} dv\right) dy. \end{aligned}$$

En este caso, la expresión integral anterior representa la transformada de Laplace generalizada *non-conformable* respecto a la variable y .

Teorema 4.1.

Sean $r, t > 0$, $\varphi(m)$, $\omega(n)$, $\eta(m)$, $\rho(n) \in \mathbb{C}$ tales que $\Re(\varphi(m)) > 0$, $\Re(\omega(n)) > 0$.

Si la función h puede escribirse como:

$$h\left(\int_0^x e^{-u^{-r}} du, \int_0^y e^{-v^{-t}} dv\right) = f\left(\int_0^x e^{-u^{-r}} du\right) g\left(\int_0^y e^{-v^{-t}} dv\right),$$

donde $f, g : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ son continuas por partes y de orden exponencial, entonces

$$\mathcal{L}_x^r \mathcal{L}_y^t \left[f \left(\int_0^x e^{-u-r} du \right) g \left(\int_0^y e^{-v-t} dv \right) \right] = \mathcal{L}_p \mathcal{L}_q [f(p)g(q)],$$

donde $p = \int_0^x e^{-u-r} du$ y $q = \int_0^y e^{-v-t} dv$.

Demostración.

Utilizando la definición de NCGDT, se tiene:

$$\begin{aligned} & \mathcal{L}_x^r \mathcal{L}_y^t \left[f \left(\int_0^x e^{-u-r} du \right) g \left(\int_0^y e^{-v-t} dv \right) \right] \\ &= \eta(m) \rho(n) \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\varphi(m) \int_0^x e^{-u-r} du - \omega(n) \int_0^y e^{-v-t} dv} f \left(\int_0^x e^{-u-r} d\mu \right) g \left(\int_0^y e^{-v-t} dv \right) \\ & \quad e^{-x-r} e^{-y-t} dx dy. \end{aligned}$$

Cuando se sustituye:

$$p = \int_0^x e^{-u-r} du, \quad q = \int_0^y e^{-v-t} dv, \quad dp = e^{-x-r} dx, \quad dq = e^{-y-t} dy,$$

se logra obtener

$$\begin{aligned} & \mathcal{L}_x^r \mathcal{L}_y^t \left[f \left(\int_0^x e^{-u-r} du \right) g \left(\int_0^y e^{-v-t} dv \right) \right] \\ &= \eta(m) \rho(n) \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\varphi(m)p - \omega(n)q} f(p)g(q) dp dq \\ &= \mathcal{L}_p \mathcal{L}_q [f(p)g(q)], \end{aligned}$$

donde $\mathcal{L}_p \mathcal{L}_q$ es la transformada doble de Laplace generalizada de $f(p)g(q)$. □

Teorema 4.2.

Sean $r, t > 0$, $\varphi(m)$, $\omega(n)$, $\eta(m)$, $\rho(n) \in \mathbb{C}$ tales que $\Re(\varphi(m)) > 0$, $\Re(\omega(n)) > 0$, se tiene que:

1. Si

$$h \left(\int_0^x e^{-u-r} du, \int_0^y e^{-v-t} dv \right) = 1,$$

entonces

$$\mathcal{L}_x^r \mathcal{L}_y^t [1] = \frac{\eta(m) \rho(n)}{\varphi(m) \omega(n)}.$$

2. Si

$$h \left(\int_0^x e^{-u-r} du, \int_0^y e^{-v-t} dv \right) = \left(\int_0^x e^{-u-r} du \right)^i \left(\int_0^y e^{-v-t} dv \right)^j,$$

entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_x^r \mathcal{L}_y^t \left[\left(\int_0^x e^{-u-r} du \right)^i \left(\int_0^y e^{-v-t} dv \right)^j \right] &= \mathcal{L}_p \mathcal{L}_q [p^i q^j] \\ &= \frac{\eta(m) \rho(n) \Gamma(i+1) \Gamma(j+1)}{\varphi(m)^{i+1} \omega(n)^{j+1}}. \end{aligned}$$

3. Si

$$h \left(\int_0^x e^{-u-r} du, \int_0^y e^{-v-t} dv \right) = e^{\lambda \int_0^x e^{-u-r} du + \beta \int_0^y e^{-v-t} dv},$$

entonces

$$\mathcal{L}_x^r \mathcal{L}_y^t \left[e^{\lambda \int_0^x e^{-u-r} du + \beta \int_0^y e^{-v-t} dv} \right] = \frac{\eta(m) \rho(n)}{(\varphi(m) - \lambda)(\omega(n) - \beta)}.$$

4. Si

$$h\left(\int_0^x e^{-u-r} du, \int_0^y e^{-v-t} dv\right) = \sin\left(\lambda \int_0^x e^{-u-r} du\right) \sin\left(\beta \int_0^y e^{-v-t} dv\right),$$

entonces

$$\mathcal{L}_x^r \mathcal{L}_y^t \left[\sin\left(\lambda \int_0^x e^{-u-r} du\right) \sin\left(\beta \int_0^y e^{-v-t} dv\right) \right] = \frac{\eta(m)\rho(n)\lambda\beta}{(\varphi(m)^2 + \lambda^2)(\omega(n)^2 + \beta^2)}.$$

Demostración.

Los ítems 1, 2, 3 y 4 se obtienen directamente del Teorema 4.1 y la ecuación 2.6. $\square$

Teorema 4.3.

Si $h\left(\int_0^x e^{-u-r} du, \int_0^y e^{-v-t} dv\right)$ es una función continua por partes en la región $(0, X) \times (0, T)$, de órdenes exponenciales a y b , entonces la transformada doble de Laplace generalizada *non-conformable* de $h\left(\int_0^x e^{-u-r} du, \int_0^y e^{-v-t} dv\right)$ existe para todo $\Re[\varphi(m)] > a$ y $\Re[\omega(n)] > b$, además

$$|\mu_{D_{rt}}(m, n)| \leq M \frac{\eta(m)\rho(n)}{(\varphi(m) - a)(\omega(n) - b)},$$

con $M \in \mathbb{R}^+$, $M > 0$.

Demostración.

Utilizando la definición de NCGDT. de

$$h\left(\int_0^x e^{-u-r} du, \int_0^y e^{-v-t} dv\right),$$

se tiene:

$$\begin{aligned} |\mu_{D_{rt}}(m, n)| &= \left| \eta(m)\rho(n) \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\varphi(m)\int_0^x e^{-u-r} du - \omega(n)\int_0^y e^{-v-t} dv} h\left(\int_0^x e^{-u-r} du, \int_0^y e^{-v-t} dv\right) \right. \\ &\quad \left. e^{-x-r} e^{-y-t} dx dy \right| \\ &\leq \eta(m)\rho(n) \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\varphi(m)\int_0^x e^{-u-r} du - \omega(n)\int_0^y e^{-v-t} dv} \left| h\left(\int_0^x e^{-u-r} du, \int_0^y e^{-v-t} dv\right) \right| \\ &\quad e^{-x-r} e^{-y-t} dx dy \\ &\leq M \eta(m)\rho(n) \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(\varphi(m)-a)\int_0^x e^{-u-r} du - (\omega(n)-b)\int_0^y e^{-v-t} dv} e^{-x-r} e^{-y-t} dx dy \\ &= M \frac{\eta(m)\rho(n)}{(\varphi(m) - a)(\omega(n) - b)}. \end{aligned}$$

$\square$

Teorema 4.4.

Si $\mathcal{L}_x^r \mathcal{L}_y^t [h(\int_0^x e^{-u-r} du, \int_0^y e^{-v-t} dv)]$ existe, entonces la transformada doble de Laplace generalizada *non-conformable* de las funciones puede representarse como sigue:

1.

$$\begin{aligned} &\mathcal{L}_x^r \mathcal{L}_y^t \left[\left(\int_0^x e^{-u-r} du \right) h\left(\int_0^x e^{-u-r} du, \int_0^y e^{-v-t} dv\right) \right] \\ &= -\frac{\eta(m)}{\varphi'(m)} \frac{\partial}{\partial m} \left[\frac{1}{\eta(m)} \mathcal{L}_x^r \mathcal{L}_y^t \left[h\left(\int_0^x e^{-u-r} du, \int_0^y e^{-v-t} dv\right) \right] \right]. \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} & \mathcal{L}_x^r \mathcal{L}_y^t \left[\left(\int_0^y e^{-v^{-t}} dv \right) h \left(\int_0^x e^{-u^{-r}} du, \int_0^y e^{-v^{-t}} dv \right) \right] \\ &= -\frac{\rho(n)}{\omega'(n)} \frac{\partial}{\partial n} \left[\frac{1}{\rho(n)} \mathcal{L}_x^r \mathcal{L}_y^t \left[h \left(\int_0^x e^{-u^{-r}} du, \int_0^y e^{-v^{-t}} dv \right) \right] \right]. \end{aligned}$$

Demostración.

Utilizando la definición de NCGDT de $h \left(\int_0^x e^{-u^{-r}} du, \int_0^y e^{-v^{-t}} dv \right)$ y derivando con respecto a m , en los dos lados de la ecuación, se tiene:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial m} \mathcal{L}_x^r \mathcal{L}_y^t \left[h \left(\int_0^x e^{-u^{-r}} du, \int_0^y e^{-v^{-t}} dv \right) \right] \\ &= \rho(n) \eta'(m) \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\varphi(m) \int_0^x e^{-u^{-r}} du - \omega(n) \int_0^y e^{-v^{-t}} dv} h \left(\int_0^x e^{-u^{-r}} du, \int_0^y e^{-v^{-t}} dv \right) \\ & \quad \cdot e^{-x^{-r}} e^{-y^{-t}} dx dy \\ &+ \rho(n) \eta(m) \frac{\partial}{\partial m} \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\varphi(m) \int_0^x e^{-u^{-r}} du - \omega(n) \int_0^y e^{-v^{-t}} dv} h \left(\int_0^x e^{-u^{-r}} du, \int_0^y e^{-v^{-t}} dv \right) \\ & \quad \cdot e^{-x^{-r}} e^{-y^{-t}} dx dy \\ &= \rho(n) \eta'(m) \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\varphi(m) \int_0^x e^{-u^{-r}} du - \omega(n) \int_0^y e^{-v^{-t}} dv} h \left(\int_0^x e^{-u^{-r}} du, \int_0^y e^{-v^{-t}} dv \right) \\ & \quad \cdot e^{-x^{-r}} e^{-y^{-t}} dx dy \\ &- \rho(n) \eta'(m) \varphi'(m) \int_0^\infty \int_0^\infty \left(\int_0^x e^{-u^{-r}} du \right) e^{-\varphi(m) \int_0^x e^{-u^{-r}} du - \omega(n) \int_0^y e^{-v^{-t}} dv} \\ & \quad h \left(\int_0^x e^{-u^{-r}} du, \int_0^y e^{-v^{-t}} dv \right) e^{-x^{-r}} e^{-y^{-t}} dx dy. \\ &= \frac{\eta'(m)}{\eta(m)} \mathcal{L}_x^r \mathcal{L}_y^t \left[h \left(\int_0^x e^{-u^{-r}} du, \int_0^y e^{-v^{-t}} dv \right) \right] \\ &- \varphi'(m) \mathcal{L}_x^r \mathcal{L}_y^t \left[\left(\int_0^x e^{-u^{-r}} du \right) h \left(\int_0^x e^{-u^{-r}} du, \int_0^y e^{-v^{-t}} dv \right) \right] \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned} & \mathcal{L}_x^r \mathcal{L}_y^t \left[\left(\int_0^x e^{-u^{-r}} du \right) h \left(\int_0^x e^{-u^{-r}} du, \int_0^y e^{-v^{-t}} dv \right) \right] \\ &= \frac{\eta'(m)}{\eta(m) \varphi'(m)} \mathcal{L}_x^r \mathcal{L}_y^t \left[h \left(\int_0^x e^{-u^{-r}} du, \int_0^y e^{-v^{-t}} dv \right) \right] \\ &- \frac{1}{\varphi'(m)} \frac{\partial}{\partial m} \mathcal{L}_x^r \mathcal{L}_y^t \left[h \left(\int_0^x e^{-u^{-r}} du, \int_0^y e^{-v^{-t}} dv \right) \right]. \\ &= -\frac{\eta(m)}{\varphi'(m)} \frac{\partial}{\partial m} \left(\frac{1}{\eta(m)} \mathcal{L}_x^r \mathcal{L}_y^t \left[h \left(\int_0^x e^{-u^{-r}} du, \int_0^y e^{-v^{-t}} dv \right) \right] \right). \end{aligned}$$

De manera similar se puede demostrar $\mathcal{L}_x^r \mathcal{L}_y^t \left[\left(\int_0^y e^{-v^{-t}} dv \right) h \left(\int_0^x e^{-u^{-r}} du, \int_0^y e^{-v^{-t}} dv \right) \right]$ de similar forma.

□

Podemos ampliar los resultados anteriores de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} & \mathcal{L}_x^r \mathcal{L}_y^t \left[\left(\int_0^x e^{-u^{-r}} du \right)^i h \left(\int_0^x e^{-u^{-r}} du, \int_0^y e^{-v^{-t}} dv \right) \right] \\ &= (-1)^i \frac{\eta(m)}{[\varphi'(m)]^i} \frac{\partial^i}{\partial m^i} \left[\frac{1}{\eta(m)} \mathcal{L}_x^r \mathcal{L}_y^t \left[h \left(\int_0^x e^{-u^{-r}} du, \int_0^y e^{-v^{-t}} dv \right) \right] \right] \\ & \mathcal{L}_x^r \mathcal{L}_y^t \left[\left(\int_0^y e^{-v^{-t}} dv \right)^i h \left(\int_0^x e^{-u^{-r}} du, \int_0^y e^{-v^{-t}} dv \right) \right] \\ &= (-1)^i \frac{\rho(n)}{[\omega'(n)]^i} \frac{\partial^i}{\partial n^i} \left[\frac{1}{\rho(n)} \mathcal{L}_x^r \mathcal{L}_y^t \left[h \left(\int_0^x e^{-u^{-r}} du, \int_0^y e^{-v^{-t}} dv \right) \right] \right]. \end{aligned}$$

Teorema 4.5.

Si $\mathcal{L}_x^r \mathcal{L}_y^t \left[h \left(\int_0^x e^{-u^{-r}} du, \int_0^y e^{-v^{-t}} dv \right) \right]$ existe, entonces la transformada doble de Laplace generalizada *non-conformable* de las derivadas fraccionarias de orden r y t , para $r, t \in (0, 1)$ se pueden representar como sigue:

$$\begin{aligned} 1) \quad & \mathcal{L}_x^r \mathcal{L}_y^t \left[{}_x N_1^r h \left(\int_0^x e^{-u^{-r}} du, \int_0^y e^{-v^{-t}} dv \right) \right] \\ &= \varphi(m) \mathcal{L}_x^r \mathcal{L}_y^t \left[h \left(\int_0^x e^{-u^{-r}} du, \int_0^y e^{-v^{-t}} dv \right) \right] \\ &\quad - \eta(m) \rho(n) \int_0^\infty e^{-\omega(n) \int_0^y e^{-v^{-t}} dv} \cdot e^{-y^{-t}} h \left(0, \int_0^y e^{-v^{-t}} dv \right) dy. \\ &= \varphi(m) \mathcal{L}_x^r \mathcal{L}_y^t \left[h \left(\int_0^x e^{-u^{-r}} du, \int_0^y e^{-v^{-t}} dv \right) \right] \\ &\quad - \eta(m) \mathcal{L}_y^t \left[h \left(0, \int_0^y e^{-v^{-t}} dv \right) \right] \\ 2) \quad & \mathcal{L}_x^r \mathcal{L}_y^t \left[{}_x N_1^{2r} h \left(\int_0^x e^{-u^{-r}} du, \int_0^y e^{-v^{-t}} dv \right) \right] \\ &= \varphi(m)^2 \mathcal{L}_x^r \mathcal{L}_y^t \left[h \left(\int_0^x e^{-u^{-r}} du, \int_0^y e^{-v^{-t}} dv \right) \right] \\ &\quad - \eta(m) \varphi(m) \mathcal{L}_y^t \left[h \left(0, \int_0^y e^{-v^{-t}} dv \right) \right] \\ &\quad - \eta(m) \mathcal{L}_y^t \left[{}_x N_1^r h \left(0, \int_0^y e^{-v^{-t}} dv \right) \right]. \\ 3) \quad & \mathcal{L}_x^r \mathcal{L}_y^t \left[{}_y N_1^t h \left(\int_0^x e^{-u^{-r}} du, \int_0^y e^{-v^{-t}} dv \right) \right] \\ &= \omega(n) \mathcal{L}_x^r \mathcal{L}_y^t \left[h \left(\int_0^x e^{-u^{-r}} du, \int_0^y e^{-v^{-t}} dv \right) \right] \\ &\quad - \rho(n) \mathcal{L}_x^r \left[h \left(\int_0^x e^{-u^{-r}} du, 0 \right) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
4) \quad & \mathcal{L}_x^r \mathcal{L}_y^t \left[{}_y N_1^t h \left(\int_0^x e^{-u^{-r}} du, \int_0^y e^{-v^{-t}} dv \right) \right] \\
&= \omega(n)^2 \mathcal{L}_x^r \mathcal{L}_y^t \left[h \left(\int_0^x e^{-u^{-r}} du, \int_0^y e^{-v^{-t}} dv \right) \right] \\
&\quad - \rho(n) \omega(n) \mathcal{L}_x^r \left[h \left(\int_0^x e^{-u^{-r}} du, 0 \right) \right] \\
&\quad - \rho(n) \mathcal{L}_x^r \left[{}_y N_1^t h \left(\int_0^x e^{-u^{-r}} du, 0 \right) \right]
\end{aligned}$$

donde ${}_x N_1^r h \left(\int_0^x e^{-u^{-r}} du, \int_0^y e^{-v^{-t}} dv \right)$ y ${}_y N_1^t h \left(\int_0^x e^{-u^{-r}} du, \int_0^y e^{-v^{-t}} dv \right)$ representan las derivadas parciales fraccionarias non-conformables de orden r -ésimo y t -ésimo respectivamente

Demostración.

1) Utilizamos la definición de NCGDT en ${}_x N_1^r h \left(\int_0^x e^{-u^{-r}} du, \int_0^y e^{-v^{-t}} dv \right)$, así se tiene

$$\begin{aligned}
& \mathcal{L}_x^r \mathcal{L}_y^t \left[{}_x N_1^r h \left(\int_0^x e^{-u^{-r}} du, \int_0^y e^{-v^{-t}} dv \right) \right] \\
&= \eta(m) \rho(n) \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\varphi(m) \int_0^x e^{-u^{-r}} du - \omega(n) \int_0^y e^{-v^{-t}} dv} \\
& \quad {}_x N_1^r h \left(\int_0^x e^{-u^{-r}} du, \int_0^y e^{-v^{-t}} dv \right) e^{-x^{-r}} e^{-y^{-t}} dx dy \\
&= \rho(n) \int_0^\infty e^{-\omega(n) \int_0^y e^{-v^{-t}} dv} e^{-y^{-t}} \eta(m) \int_0^\infty e^{-\varphi(m) \int_0^x e^{-u^{-r}} du} \\
& \quad e^{x^{-r}} \frac{\partial}{\partial x} h \left(\int_0^x e^{-u^{-r}} du, \int_0^y e^{-v^{-t}} dv \right) e^{-x^{-r}} dx dy \\
&= \rho(n) \int_0^\infty e^{-\omega(n) \int_0^y e^{-v^{-t}} dv} e^{-y^{-t}} \eta(m) \left[-h \left(0, \int_0^y e^{-v^{-t}} dv \right) \right. \\
& \quad \left. + \varphi(m) \int_0^\infty e^{-\varphi(m) \int_0^x e^{-u^{-r}} du} h \left(\int_0^x e^{-u^{-r}} du, \int_0^y e^{-v^{-t}} dv \right) e^{-x^{-r}} dx \right] dy. \\
&= \varphi(m) \eta(m) \rho(n) \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\varphi(m) \int_0^x e^{-u^{-r}} du - \omega(n) \int_0^y e^{-v^{-t}} dv} h \left(\int_0^x e^{-u^{-r}} du, \int_0^y e^{-v^{-t}} dv \right) \\
& \quad e^{-x^{-r}} e^{-y^{-t}} dx dy - \eta(m) \rho(n) \int_0^\infty e^{-\omega(n) \int_0^y e^{-v^{-t}} dv} e^{-y^{-t}} h \left(0, \int_0^y e^{-v^{-t}} dv \right) dy. \\
&= \varphi(m) \mathcal{L}_x^r \mathcal{L}_y^t \left[h \left(\int_0^x e^{-u^{-r}} du, \int_0^y e^{-v^{-t}} dv \right) \right] \\
&\quad - \eta(m) \rho(n) \int_0^\infty e^{-\omega(n) \int_0^y e^{-v^{-t}} dv} e^{-y^{-t}} h \left(0, \int_0^y e^{-v^{-t}} dv \right) dy. \\
&= \varphi(m) \mathcal{L}_x^r \mathcal{L}_y^t \left[h \left(\int_0^x e^{-u^{-r}} du, \int_0^y e^{-v^{-t}} dv \right) \right] \\
&\quad - \eta(m) \mathcal{L}_y^t \left[h \left(0, \int_0^y e^{-v^{-t}} dv \right) \right]
\end{aligned}$$

3) Al utilizar nuevamente la definición de NCGDT, pero en ${}_y N_1^t h \left(\int_0^x e^{-u^{-r}} du, \int_0^y e^{-v^{-t}} dv \right)$, obtenemos

$$\begin{aligned}
 & \mathcal{L}_x^r \mathcal{L}_y^t \left[{}_y N_1^t h \left(\int_0^x e^{-u-r} du, \int_0^y e^{-v-t} dv \right) \right] \\
 &= \eta(m) \rho(n) \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\varphi(m) \int_0^x e^{-u-r} du - \omega(n) \int_0^y e^{-v-t} dv} \\
 & {}_y N_1^t h \left(\int_0^x e^{-u-r} du, \int_0^y e^{-v-t} dv \right) e^{-x-r} e^{-y-t} dx dy \\
 &= \eta(m) \int_0^\infty e^{-\varphi(m) \int_0^x e^{-u-r} du} e^{-x-r} \rho(n) \int_0^\infty e^{-\omega(n) \int_0^y e^{-v-t} dv} \\
 & e^{y-t} \frac{\partial}{\partial y} h \left(\int_0^x e^{-u-r} du, \int_0^y e^{-v-t} dv \right) e^{-y-t} dy dx \\
 &= \eta(m) \int_0^\infty e^{-\varphi(m) \int_0^x e^{-u-r} du} e^{-x-r} \rho(n) \left[-h \left(\int_0^x e^{-u-r} du, 0 \right) \right. \\
 & \left. + \omega(n) \int_0^\infty e^{-\omega(n) \int_0^y e^{-v-t} dv} h \left(\int_0^x e^{-u-r} du, \int_0^y e^{-v-t} dv \right) e^{-y-t} dy \right] dx. \\
 &= \omega(n) \eta(m) \rho(n) \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\varphi(m) \int_0^x e^{-u-r} du - \omega(n) \int_0^y e^{-v-t} dv} h \left(\int_0^x e^{-u-r} du, \int_0^y e^{-v-t} dv \right) \\
 & e^{-x-r} e^{-y-t} dx dy - \eta(m) \rho(n) \int_0^\infty e^{-\varphi(m) \int_0^x e^{-u-r} du} e^{-x-r} h \left(\int_0^x e^{-u-r} du, 0 \right) dx. \\
 &= \omega(n) \mathcal{L}_x^r \mathcal{L}_y^t \left[h \left(\int_0^x e^{-u-r} du, \int_0^y e^{-v-t} dv \right) \right] \\
 & - \eta(m) \rho(n) \int_0^\infty e^{-\varphi(m) \int_0^x e^{-u-r} du} e^{-x-r} h \left(\int_0^x e^{-u-r} du, 0 \right) dx. \\
 &= \omega(n) \mathcal{L}_x^r \mathcal{L}_y^t \left[h \left(\int_0^x e^{-u-r} du, \int_0^y e^{-v-t} dv \right) \right] \\
 & - \rho(n) \mathcal{L}_x^r \left[h \left(\int_0^x e^{-u-r} du, 0 \right) \right]
 \end{aligned}$$

De similar manera se puede obtener,

$$\mathcal{L}_x^r \mathcal{L}_y^t \left[{}_x N_1^{2r} h \left(\int_0^x e^{-u-r} du, \int_0^y e^{-v-t} dv \right) \right] \text{ y } \mathcal{L}_x^r \mathcal{L}_y^t \left[{}_y N_1^{2t} h \left(\int_0^x e^{-u-r} du, \int_0^y e^{-v-t} dv \right) \right]$$

Observamos que los resultados anteriores pueden extenderse de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 & \mathcal{L}_x^r \mathcal{L}_y^t \left[{}_x N_1^{ir} h \left(\int_0^x e^{-u-r} du, \int_0^y e^{-v-t} dv \right) \right] \\
 &= \varphi(m)^i \mathcal{L}_x^r \mathcal{L}_y^t \left[h \left(\int_0^x e^{-u-r} du, \int_0^y e^{-v-t} dv \right) \right] \\
 & - \eta(m) \rho(n) \sum_{k=0}^{i-1} \varphi(m)^{i-1-k} \int_0^\infty e^{-\omega(n) \int_0^y e^{-v-t} dv} e^{-y-t} {}_x N_1^{kr} h \left(0, \int_0^y e^{-v-t} dv \right) dy. \\
 &= \varphi(m)^i \mathcal{L}_x^r \mathcal{L}_y^t \left[h \left(\int_0^x e^{-u-r} du, \int_0^y e^{-v-t} dv \right) \right] \\
 & - \eta(m) \sum_{k=0}^{i-1} \varphi(m)^{i-1-k} \mathcal{L}_y^t \left[{}_x N_1^{kr} h \left(0, \int_0^y e^{-v-t} dv \right) \right]
 \end{aligned}$$

□

Teorema 4.6.

Si $\mathcal{L}_x^r \mathcal{L}_y^t \left[h \left(\int_0^x e^{-u-r} du, \int_0^y e^{-v-t} dv \right) \right]$ existe, entonces:

1.

$$\begin{aligned} & \mathcal{L}_x^r \mathcal{L}_y^t \left[\int_0^x e^{-u-r} du {}_y N_1^t h \left(\int_0^x e^{-u-r} du, \int_0^y e^{-v-t} dv \right) \right] \\ &= -\frac{\eta(m)\omega(n)}{\varphi'(m)} \frac{\partial}{\partial m} \left(\frac{1}{\eta(m)} \left[\mathcal{L}_x^r \mathcal{L}_y^t \left[h \left(\int_0^x e^{-u-r} du, \int_0^y e^{-v-t} dv \right) \right] \right] \right) \\ &+ \frac{\eta(m)\rho(n)}{\varphi'(m)} \frac{d}{dm} \left(\mathcal{L}_x^r \left[h \left(\int_0^x e^{-u-r} du, 0 \right) \right] \right). \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} & \mathcal{L}_x^r \mathcal{L}_y^t \left[\int_0^y e^{-v-t} dv {}_x N_1^r h \left(\int_0^x e^{-u-r} du, \int_0^y e^{-v-t} dv \right) \right] \\ &= -\frac{\rho(n)\varphi(m)}{\omega'(n)} \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{\rho(n)} \left[\mathcal{L}_x^r \mathcal{L}_y^t \left[h \left(\int_0^x e^{-u-r} du, \int_0^y e^{-v-t} dv \right) \right] \right] \right) \\ &+ \frac{\eta(m)\rho(n)}{\omega'(n)} \frac{d}{dn} \left(\mathcal{L}_y^t \left[h \left(0, \int_0^y e^{-v-t} dv \right) \right] \right). \end{aligned}$$

Demostración.

Utilizando la definición de NCGDT de ${}_y N_1^t h \left(\int_0^x e^{-u-r} du, \int_0^y e^{-v-t} dv \right)$, se tiene:

$$\begin{aligned} & \mathcal{L}_x^r \mathcal{L}_y^t \left[{}_y N_1^t h \left(\int_0^x e^{-u-r} du, \int_0^y e^{-v-t} dv \right) \right] \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty \eta(m)\rho(n) e^{-\varphi(m)\int_0^x e^{-u-r} du - \omega(n)\int_0^y e^{-v-t} dv} \\ & \left({}_y N_1^t h \left(\int_0^x e^{-u-r} du, \int_0^y e^{-v-t} dv \right) \right) e^{-x-r} e^{-y-t} dx dy. \end{aligned}$$

Derivando a los dos lados de la expresión con respecto a m , se tiene:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial m} \left(\mathcal{L}_x^r \mathcal{L}_y^t \left[{}_y N_1^t h \left(\int_0^x e^{-u-r} du, \int_0^y e^{-v-t} dv \right) \right] \right) \\ &= \rho(n) \int_0^\infty e^{-\omega(n)\int_0^y e^{-v-t} dv} e^{-y-t} \left({}_y N_1^t h \left(\int_0^x e^{-u-r} du, \int_0^y e^{-v-t} dv \right) \right) \\ & \left[\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial m} (\eta(m) e^{-\varphi(m)\int_0^x e^{-u-r} du} e^{-x-r}) dx \right] dy. \end{aligned}$$

Puesto que,

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial m} (\eta(m) e^{-\varphi(m)\int_0^x e^{-u-r} du} e^{-x-r}) dx \\ &= \eta'(m) \int_0^\infty e^{-\varphi(m)\int_0^x e^{-u-r} du} e^{-x-r} dx + \eta(m) \int_0^\infty \frac{d}{dm} (e^{-\varphi(m)\int_0^x e^{-u-r} du}) e^{-x-r} dx \\ &= \eta'(m) \int_0^\infty e^{-\varphi(m)\int_0^x e^{-u-r} du} e^{-x-r} dx \\ &- \eta(m) \varphi'(m) \int_0^\infty e^{-\varphi(m)\int_0^x e^{-u-r} du} \left(\int_0^x e^{-u-r} du \right) e^{-x-r} dx. \end{aligned}$$

Ahora se tiene.

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial m} \left(\mathcal{L}_x^r \mathcal{L}_y^t \left[{}_y N_1^t h \left(\int_0^x e^{-u-r} du, \int_0^y e^{-v-t} dv \right) \right] \right) \\ &= \rho(n) \eta'(m) \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\varphi(m) \int_0^x e^{-u-r} du - \omega(n) \int_0^y e^{-v-t} dv} \\ & \quad \left({}_y N_1^t h \left(\int_0^x e^{-u-r} du, \int_0^y e^{-v-t} dv \right) \right) e^{-x-r} e^{-y-t} dx dy \\ & - \rho(n) \eta(m) \varphi'(m) \int_0^\infty \int_0^\infty \left(\int_0^x e^{-u-r} du \right) e^{-\varphi(m) \int_0^x e^{-u-r} du - \omega(n) \int_0^y e^{-v-t} dv} \\ & \quad {}_y N_1^t h \left(\int_0^x e^{-u-r} du, \int_0^y e^{-v-t} dv \right) e^{-x-r} e^{-y-t} dx dy, \end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned} & \mathcal{L}_x^r \mathcal{L}_y^t \left[\left(\int_0^x e^{-u-r} du \right) {}_y N_1^t h \left(\int_0^x e^{-u-r} du, \int_0^y e^{-v-t} dv \right) \right] \\ &= -\frac{1}{\varphi'(m)} \left[\frac{\partial}{\partial m} \left(\mathcal{L}_x^r \mathcal{L}_y^t \left[{}_y N_1^t h \left(\int_0^x e^{-u-r} du, \int_0^y e^{-v-t} dv \right) \right] \right) \right] \\ & \quad + \frac{\eta'(m)}{\varphi'(m) \eta(m)} \mathcal{L}_x^r \mathcal{L}_y^t \left[{}_y N_1^t h \left(\int_0^x e^{-u-r} du, \int_0^y e^{-v-t} dv \right) \right] \\ &= -\frac{\eta(m)}{\varphi'(m)} \frac{\partial}{\partial m} \left(\frac{1}{\eta(m)} \mathcal{L}_x^r \mathcal{L}_y^t \left[{}_y N_1^t h \left(\int_0^x e^{-u-r} du, \int_0^y e^{-v-t} dv \right) \right] \right). \end{aligned}$$

Utilizando el Teorema 4.5, se tiene que:

$$\begin{aligned} & \mathcal{L}_x^r \mathcal{L}_y^t \left[\int_0^x e^{-u-r} du {}_y N_1^t h \left(\int_0^x e^{-u-r} du, \int_0^y e^{-v-t} dv \right) \right] \\ &= -\frac{\eta(m)}{\varphi'(m)} \frac{\partial}{\partial m} \left(\frac{1}{\eta(m)} \left\{ \omega(n) \mathcal{L}_x^r \mathcal{L}_y^t \left[h \left(\int_0^x e^{-u-r} du, \int_0^y e^{-v-t} dv \right) \right] \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \rho(n) \eta(m) \int_0^\infty e^{-\varphi(m) \int_0^x e^{-u-r} du}, h \left(\int_0^x e^{-u-r} du, 0 \right) e^{-x-r} dx \right\} \right) \\ &= -\frac{\eta(m) \omega(n)}{\varphi'(m)} \frac{\partial}{\partial m} \left(\frac{1}{\eta(m)} \mathcal{L}_x^r \mathcal{L}_y^t \left[h \left(\int_0^x e^{-u-r} du, \int_0^y e^{-v-t} dv \right) \right] \right) \\ & \quad + \frac{\eta(m) \rho(n)}{\varphi'(m)} \frac{d}{dm} \left(\int_0^\infty e^{-\varphi(m) \int_0^x e^{-u-r} du}, h \left(\int_0^x e^{-u-r} du, 0 \right) e^{-x-r} dx \right) \\ &= -\frac{\eta(m) \omega(n)}{\varphi'(m)} \frac{\partial}{\partial m} \left(\frac{1}{\eta(m)} \left[\mathcal{L}_x^r \mathcal{L}_y^t \left[h \left(\int_0^x e^{-u-r} du, \int_0^y e^{-v-t} dv \right) \right] \right] \right) \\ & \quad + \frac{\eta(m) \rho(n)}{\varphi'(m)} \frac{d}{dm} \left(\mathcal{L}_x^r \left[h \left(\int_0^x e^{-u-r} du, 0 \right) \right] \right). \end{aligned}$$

□

5. Aplicaciones

5.1. Ejemplo 5.1

Considere la siguiente ecuación fraccional non-conformable homogénea, de la forma

$${}_x N_1^{2r} \left(h \left(\int_0^x e^{-u^{-r}} du, \int_0^y e^{-v^{-t}} dv \right) \right) = {}_y N_1^t \left(h \left(\int_0^x e^{-u^{-r}} du, \int_0^y e^{-v^{-t}} dv \right) \right). \quad (5.1)$$

con condiciones iniciales

$$h \left(\int_0^x e^{-u^{-r}} du, 0 \right) = e^{\int_0^x e^{-u^{-r}} du}, \quad (5.2)$$

$$h \left(0, \int_0^y e^{-v^{-t}} dv \right) = e^{\int_0^y e^{-v^{-t}} dv}, \quad (5.3)$$

$${}_x N_1^r h \left(0, \int_0^y e^{-v^{-t}} dv \right) = e^{\int_0^y e^{-v^{-t}} dv}. \quad (5.4)$$

Solución.

Aplicamos la transformada doble de Laplace non-conformable generalizada a los dos lados de la ecuación (5.1), obteniendo

$$\mathcal{L}_x^r \mathcal{L}_y^t \left[{}_x N_1^{2r} \left(h \left(\int_0^x e^{-u^{-r}} du, \int_0^y e^{-v^{-t}} dv \right) \right) \right] = \mathcal{L}_x^r \mathcal{L}_y^t \left[{}_y N_1^t \left(h \left(\int_0^x e^{-u^{-r}} du, \int_0^y e^{-v^{-t}} dv \right) \right) \right]. \quad (5.5)$$

Por las propiedades de las derivadas parciales de NCGDT, se tiene.

$$\begin{aligned} & \varphi^2(m) \mathcal{L}_x^r \mathcal{L}_y^t \left[h \left(\int_0^x e^{-u^{-r}} du, \int_0^y e^{-v^{-t}} dv \right) \right] - \eta(m) \varphi(m) \mathcal{L}_y^t \left[h \left(0, \int_0^y e^{-v^{-t}} dv \right) \right] \\ & - \eta(m) \mathcal{L}_y^t \left[{}_x N_1^r h \left(0, \int_0^y e^{-v^{-t}} dv \right) \right] \\ & = \omega(n) \mathcal{L}_x^r \mathcal{L}_y^t \left[h \left(\int_0^x e^{-u^{-r}} du, \int_0^y e^{-v^{-t}} dv \right) \right] - \rho(n) \mathcal{L}_x^r \left[h \left(\int_0^x e^{-u^{-r}} du, 0 \right) \right] \end{aligned} \quad (5.6)$$

Se tiene que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_y^t \left[h \left(0, \int_0^y e^{-v^{-t}} dv \right) \right] &= \rho(n) \int_0^\infty e^{-\omega(n) \int_0^y e^{-v^{-t}} dv} e^{\int_0^y e^{-v^{-t}} dv} e^{-y^{-t}} dy \\ &= \rho(n) \int_0^\infty e^{-(\omega(n)-1)u} du \\ &= \frac{\rho(n)}{\omega(n)-1} \end{aligned} \quad (5.7)$$

De similar manera se obtienen

$$\mathcal{L}_y^t \left[{}_x N_1^r h \left(0, \int_0^y e^{-v^{-t}} dv \right) \right] = \frac{\rho(n)}{\omega(n)-1} \quad (5.8)$$

$$\mathcal{L}_x^r \left[h \left(\int_0^x e^{-u^{-r}} d\mu, 0 \right) \right] = \frac{\eta(m)}{\varphi(m)-1} \quad (5.9)$$

Reemplazando (5.7), (5.8), (5.9) en (5.6) se obtiene

$$\begin{aligned} & ((\varphi(m))^2 - \omega(n)) \mathcal{L}_x^r \mathcal{L}_y^t \left[h \left(\int_0^x e^{-u-r} du, \int_0^y e^{-v-t} dv \right) \right] \\ &= \frac{\rho(n)\eta(m)\varphi(m) + \rho(n)\eta(m)}{\omega(n) - 1} - \frac{\rho(n)\eta(m)}{\varphi(m) - 1}. \end{aligned}$$

factorizamos $\rho(n)\eta(m)$ en el lado derecho, obteniendo

$$\begin{aligned} & ((\varphi(m))^2 - \omega(n)) \mathcal{L}_x^r \mathcal{L}_y^t \left[h \left(\int_0^x e^{-u-r} du, \int_0^y e^{-v-t} dv \right) \right] \\ &= \rho(n)\eta(m) \left[\frac{\varphi(m) + 1}{\omega(n) - 1} - \frac{1}{\varphi(m) - 1} \right] \\ &= \rho(n)\eta(m) \left[\frac{(\varphi(m) + 1)(\varphi(m) - 1) - (\omega(n) - 1)}{(\omega(n) - 1)(\varphi(m) - 1)} \right] \\ &= \rho(n)\eta(m) \left[\frac{(\varphi(m))^2 - 1 - \omega(n) + 1}{(\omega(n) - 1)(\varphi(m) - 1)} \right] \\ &= \rho(n)\eta(m) \left[\frac{(\varphi(m))^2 - \omega(n)}{(\omega(n) - 1)(\varphi(m) - 1)} \right] \end{aligned}$$

Finalmente, cancelando el factor $((\varphi(m))^2 - \omega(n))$ en ambos lados, resulta

$$\mathcal{L}_x^r \mathcal{L}_y^t \left[h \left(\int_0^x e^{-u-r} du, \int_0^y e^{-v-t} dv \right) \right] = \frac{\eta(m)\rho(n)}{(\varphi(m) - 1)(\omega(n) - 1)}.$$

Luego, la solución es

$$h \left(\int_0^x e^{-u-r} du, \int_0^y e^{-v-t} dv \right) = C e^{\int_0^x e^{-u-r} du + \int_0^y e^{-v-t} dv}. \quad (5.10)$$

Si $r = t = 0$, entonces se tiene

$$h \left(\frac{x}{e}, \frac{y}{e} \right) = e^{\frac{x}{e} + \frac{y}{e}}.$$

Esta expresión coincide con la solución clásica de tipo exponencial asociada a la ecuación diferencial homogénea correspondiente, lo cual confirma que el modelo *non-conformable* generalizado recupera adecuadamente los resultados clásicos como caso particular.

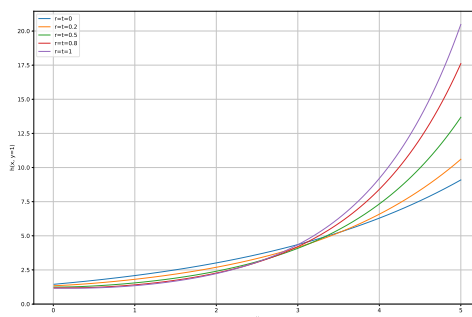


Figura 1. Representación gráfica de la transformación $s(x) = \int_0^x e^{-u-r} du$ para diferentes valores del parámetro r , con $y = 1$

La figura muestra el comportamiento de la función

$$h \left(\int_0^x e^{-u-r} du, \int_0^1 e^{-v-t} dv \right) = C e^{\int_0^x e^{-u-r} du + \int_0^1 e^{-v-t} dv},$$

para distintos valores de $r = t$, con $y = 1$.

Se observa que todas las curvas presentan crecimiento exponencial; sin embargo, este depende de la transformación

$$s(x) = \int_0^x e^{-u-r} du.$$

Se puede ver que si el valor de r aumenta, la función crece más lento en las cercanías del origen y más rápido para valores elevados de x .

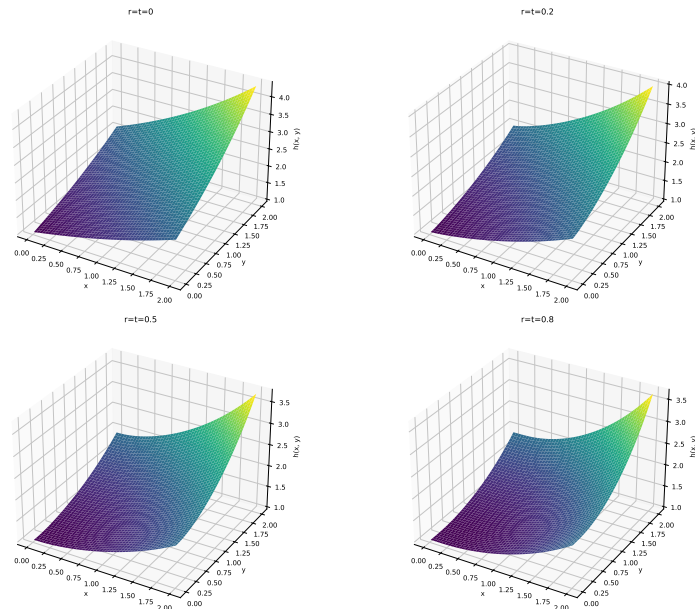


Figura 2. Superficie de la solución $h\left(\int_0^x e^{-u-r} du, \int_0^y e^{-v-t} dv\right) = e^{\int_0^x e^{-u-r} du + \int_0^y e^{-v-t} dv}$ para diferentes valores de $r = t$. El caso $r = t = 0$ corresponde a una escala lineal del dominio, que produce $h(x, y) = e^{(x+y)/e}$, para $r, t > 0$ se observa una deformación no lineal.

En la figura se muestran las superficies de

$$h\left(\int_0^x e^{-u-r} du, \int_0^y e^{-v-t} dv\right) = C e^{\int_0^x e^{-u-r} du + \int_0^y e^{-v-t} dv},$$

para distintos valores de $r = t$. La función mantiene su estructura exponencial, pero depende de las variables transformadas

$$s(x) = \int_0^x e^{-u-r} du, \quad w(y) = \int_0^y e^{-v-t} dv.$$

Si $r = t = 0$, el crecimiento es uniforme y suave. Al medida que r y t aumentan, la superficie tiende a aplanarse en las proximidades del origen, debido a que $s(x)$ y $w(y)$ presentan un crecimiento más lento en dicha región, retomando un comportamiento más acelerado al alejarse de ella.

5.2. Ejemplo 5.2

Considere la ecuación de advección-difusión de la forma

$$\begin{aligned} yN_1^t h\left(\int_0^x e^{-u-r} du, \int_0^y e^{-v-t} dv\right) - xN_1^{2r} h\left(\int_0^x e^{-u-r} du, \int_0^y e^{-v-t} dv\right) \\ + xN_1^r h\left(\int_0^x e^{-u-r} du, \int_0^y e^{-v-t} dv\right) = 0 \end{aligned} \quad (5.11)$$

con condiciones iniciales,

$$h\left(\int_0^x e^{-u^{-r}} du, 0\right) = e^{\int_0^x e^{-u^{-r}} du} - \int_0^x e^{-u^{-r}} du \quad (5.12)$$

$$h\left(0, \int_0^y e^{-v^{-t}} dv\right) = 1 + \int_0^y e^{-v^{-t}} dv \quad (5.13)$$

$${}_x N_1^r h\left(0, \int_0^y e^{-v^{-t}} dv\right) = 0 \quad (5.14)$$

Solución

Aplicamos la transformada doble de Laplace generalizada *non-conformable* y se obtiene

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_x^r \mathcal{L}_y^t \left[{}_y N_1^t h\left(\int_0^x e^{-u^{-r}} du, \int_0^y e^{-v^{-t}} dv\right) - {}_x N_1^{2r} h\left(\int_0^x e^{-u^{-r}} du, \int_0^y e^{-v^{-t}} dv\right) \right. \\ \left. + {}_x N_1^r h\left(\int_0^x e^{-u^{-r}} du, \int_0^y e^{-v^{-t}} dv\right) \right] = 0 \end{aligned} \quad (5.15)$$

Por las propiedades de las derivadas parciales de NCGDT, se tiene.

$$\begin{aligned} \omega(n) \mathcal{L}_x^r \mathcal{L}_y^t \left[h\left(\int_0^x e^{-u^{-r}} du, \int_0^y e^{-v^{-t}} dv\right) \right] - \rho(n) \mathcal{L}_x^r \left[h\left(\int_0^x e^{-u^{-r}} du, 0\right) \right] \\ - \varphi^2(m) \mathcal{L}_x^r \mathcal{L}_y^t \left[h\left(\int_0^x e^{-u^{-r}} du, \int_0^y e^{-v^{-t}} dv\right) \right] + \varphi(m) \eta(m) \mathcal{L}_y^t \left[h\left(0, \int_0^y e^{-v^{-t}} dv\right) \right] \\ + \eta(m) \mathcal{L}_y^t \left[{}_x N_1^r h\left(0, \int_0^y e^{-v^{-t}} dv\right) \right] + \varphi(m) \mathcal{L}_x^r \mathcal{L}_y^t \left[h\left(\int_0^x e^{-u^{-r}} d\mu, \int_0^y e^{-v^{-t}} dv\right) \right] \\ - \eta(m) \mathcal{L}_y^t \left[h\left(0, \int_0^y e^{-v^{-t}} dv\right) \right] = 0 \end{aligned} \quad (5.16)$$

Realizando el cambio de variable $u = \int_0^y e^{-v^{-t}} dv$, $du = e^{-y^{-t}} dy$, se tiene que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_y^t \left[h\left(0, \int_0^y e^{-v^{-t}} dv\right) \right] &= \rho(n) \int_0^\infty e^{-y^{-t}} e^{-\omega(n) \int_0^y e^{-v^{-t}} dv} \left(1 + \int_0^y e^{-v^{-t}} dv\right) dy \\ &= \rho(n) \int_0^\infty e^{-\omega(n)u} (1+u) du \\ &= \rho(n) \left(\frac{1}{\omega(n)} + \frac{1}{\omega^2(n)} \right) \end{aligned} \quad (5.17)$$

De similar manera se obtiene.

$$\mathcal{L}_y^t \left[{}_x N_1^r h\left(0, \int_0^y e^{-v^{-t}} dv\right) \right] = 0 \quad (5.18)$$

$$\mathcal{L}_x^r \left[h\left(\int_0^x e^{-u^{-r}} d\mu, 0\right) \right] = \eta(m) \left(\frac{1}{\varphi(m)-1} - \frac{1}{\varphi^2(m)} \right) \quad (5.19)$$

Reemplazando 5.17, 5.18, 5.19 en 5.16 se tiene

Reemplazando 5.17, 5.18, 5.19 en 5.16 se tiene

$$\begin{aligned} & [\omega(n) - \varphi^2(m) + \varphi(m)] \mathcal{L}_x^r \mathcal{L}_y^t \left[h \left(\int_0^x e^{-u-r} d\mu, \int_0^y e^{-v-t} dv \right) \right] \\ &= \rho(n) \eta(m) \left(\frac{1}{\varphi(m) - 1} - \frac{1}{\varphi^2(m)} \right) - \varphi(m) \eta(m) \rho(n) \left(\frac{1}{\omega(n)} + \frac{1}{\omega^2(n)} \right) \\ &+ \eta(m) \rho(n) \left(\frac{1}{\omega(n)} + \frac{1}{\omega^2(n)} \right) \end{aligned}$$

De donde se obtiene.

$$\begin{aligned} & \mathcal{L}_x^r \mathcal{L}_y^t \left[h \left(\int_0^x e^{-u-r} d\mu, \int_0^y e^{-v-t} dv \right) \right] \\ &= \frac{\eta(m) \rho(n)}{\omega(n) (\varphi(m) - 1)} - \frac{\eta(m) \rho(n)}{\varphi^2(m) \omega(n)} + \frac{\eta(m) \rho(n)}{\varphi(m) \omega^2(n)} \end{aligned}$$

Luego, la solución es.

$$h \left(\int_0^x e^{-u-r} d\mu, \int_0^y e^{-v-t} dv \right) = e^{\int_0^x e^{-u-r} du} - \int_0^x e^{-u-r} du + \int_0^y e^{-v-t} dv. \quad (5.20)$$

si $r = t = 0$, se tiene $h\left(\frac{x}{e}, \frac{y}{e}\right) = e^{\frac{x}{e}} - \frac{x}{e} + \frac{y}{e}$.

Esta solución recupera la forma característica del modelo clásico correspondiente, lo cual evidencia que el enfoque non-conformable preserva los resultados tradicionales como un caso particular.

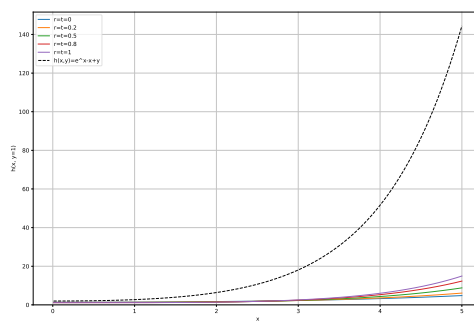


Figura 3. Comparación de la función

$h\left(\int_0^x e^{-u-r} du, \int_0^1 e^{-v-t} dv\right) = e^{\int_0^x e^{-u-r} du} - \int_0^x e^{-u-r} du + \int_0^1 e^{-v-t} dv$ para diferentes valores de $r = t$, con $y = 1$. La línea discontinua negra corresponde a $h(x, y) = e^x - x + y$.

En la gráfica de

$$h \left(\int_0^x e^{-u-r} du, \int_0^1 e^{-v-t} dv \right)$$

al fijar $y = 1$ se pone de manifiesto el efecto de la transformación integral sobre la variable x y su incidencia en el crecimiento de la función. Cuando $r = t$ toman valores mayores, el crecimiento se vuelve más pronunciado; en cambio, para valores pequeños, este se atenúa.

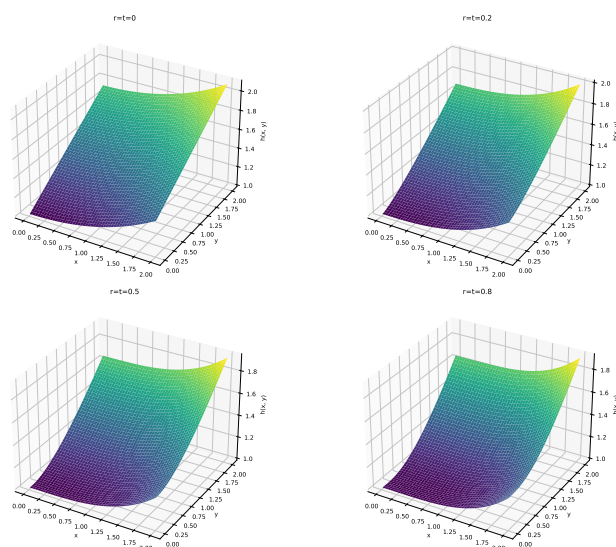


Figura 4. Superficies correspondientes a la función $h\left(\int_0^x e^{-u^{-r}} d\mu, \int_0^y e^{-v^{-t}} dv\right) = e^{\int_0^x e^{-u^{-r}} du} - \int_0^x e^{-u^{-r}} du + \int_0^y e^{-v^{-t}} dv$ para diferentes valores de $r = t$.

Las superficies asociadas a la función

$$h\left(\int_0^x e^{-u^{-r}} d\mu, \int_0^y e^{-v^{-t}} dv\right) = e^{\int_0^x e^{-u^{-r}} du} - \int_0^x e^{-u^{-r}} du + \int_0^y e^{-v^{-t}} dv,$$

permiten observar que el parámetro $r = t$ influye de manera notable en la forma de la función. Cuando $r = t$ toma valores pequeños, el crecimiento respecto a x y y es casi lineal. En cambio, al aumentar $r = t$, el crecimiento en la variable x resulta más gradual cerca del origen y se acelera para valores mayores, mientras que la dependencia en y se mantiene aproximadamente lineal.

6. Conclusión

En este trabajo se introduce la Transformada Doble de Laplace Non-Conformable Generalizada, que puede entenderse como una extensión natural de la transformada doble clásica y de sus versiones fraccionarias locales, al incorporar núcleos exponenciales no uniformes junto con funciones generadoras más generales. Este planteamiento permite reunir distintos tipos de transformadas dentro de un mismo marco, recuperándolas como casos particulares.

Además, se examinaron algunas de sus propiedades más importantes, entre ellas las condiciones de existencia y ciertas relaciones derivativas, lo que permite verificar su coherencia teórica y su compatibilidad con las derivadas fraccionarias no conformables. Además, los ejemplos considerados muestran que el método resulta adecuado para la resolución de ecuaciones diferenciales parciales, facilitando la obtención sistemática de soluciones analíticas.

En conjunto, la transformada propuesta ofrece una herramienta flexible para el estudio de este tipo de problemas. Como trabajo futuro, se pretende extender la aplicación de la NCGDT al análisis de ecuaciones diferenciales parciales fraccionarias non-conformables no lineales, como modelos de reacción-difusión.

Agradecimientos

Agradecen a la Universidad de las Fuerzas Armadas (ESPE) y a la Pontificia Universidad Católica del Ecuador (PUCE) por el apoyo brindado y por facilitar las condiciones necesarias para la realización

de este trabajo, los autores Simón Adrián Cedeño Mendoza, Harold David Jarrín, Janneth Velasco Velasco y Miguel Vivas Cortez.

Contribuciones de los autores

Los autores Simón Adrián Cedeño Mendoza, Harold David Jarrín, Janneth Velasco Velasco y Miguel Vivas Cortez participaron conjuntamente en la concepción y desarrollo del proyecto, así como en la redacción y revisión del manuscrito.

Conflicto de intereses

Los autores Simón Adrián Cedeño Mendoza, Harold David Jarrín, Janneth Velasco Velasco y Miguel Vivas Cortez declaran no tener conflictos de interés. Las instituciones vinculadas no influyeron en el diseño, desarrollo, análisis ni en la publicación de los resultados de este estudio.

Referencias

- Abdeljawad, T. (2015). On conformable fractional calculus. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 279:57–66. <https://doi.org/10.1016/j.cam.2014.10.016>.
- Abdeljawad, T., Younus, A., Alqudah, M. A., and Atta, U. (2023). On fuzzy conformable double laplace transform with applications to partial differential equations. *Computer Modeling in Engineering and Sciences*, 134:2163–2191. <https://doi.org/10.32604/cmescs.2022.020915>.
- Al-Rab'a, A., Al-Sharif, S., and Al-Khaleel, M. (2022). Double conformable sumudu transform. *Symmetry*, 14:2249. <https://doi.org/10.3390/sym14112249>.
- Alawad, F. A., Yousif, E. A., and Arbab, A. I. (2013). A new technique of laplace variational iteration method for solving space time fractional telegraph equations. *International Journal of Differential Equations*, pages 256593–256603. <https://doi.org/10.1155/2013/256593>.
- Alfaeih, S., Bakcioglu, G., and Misirli, E. (2021). Conformable double sumudu transform with applications. *Journal of Applied and Computational Mechanics*, 7(2):578–586. <https://doi.org/10.22055/JACM.2020.35315.2625>.
- Alfaeih, S. and Misirli, E. (2021). Conformable double laplace transform method for solving conformable fractional partial differential equations. *Computational Methods for Differential Equations*, 9(3):908–918. <https://doi.org/10.22034/cmde.2020.38135.1678>.
- Anastassiou, G. A. (2011). *Advances on Fractional Inequalities*. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-1-4614-0703-4>.
- Atangana, A. and Baleanu, D. (2015). New properties of conformable derivatives. *Open Mathematics*, 13:889–898. <https://doi.org/10.1515/math-2015-0081>.
- Avci, J. D., Iskender, E., and Ozdemir, N. (2017). Conformable heat equation on a radial symmetric plate. *Thermal Science*, 21:819–826. <https://doi.org/10.2298/TSCI160427302A>.
- Deresse, A. T. (2022). Analytical solutions to two-dimensional nonlinear telegraph equations using the conformable triple laplace transform iterative method. *Advances in Mathematical Physics*, 1:4552179. <https://doi.org/10.1155/2022/4552179>.
- Diethelm, K. (2010). *The Analysis of Fractional Differential Equations*. Springer. <https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-642-14574-2>.
- Doetsch, G. (2012). *Introduction to the Theory and Application of the Laplace Transformation*. Springer Science and Business Media. <https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-642-65690-3>.
- González, F., Mohammed, P. O., and Nápoles Valdes, J. (2020). Nonconformable fractional laplace transform. *Kragujevac Journal of Mathematics*, 46:341–354. <https://doi.org/10.46793/KgJMat2203.341M>.
- Gozutok, N. Y. and Gozutok, U. (2018). Multivariable conformable fractional calculus. *Filomat*, 32(1):45–55. <https://doi.org/10.2298/FIL1801045G>.
- Guzmán, P., Langton, G., Lugo Motta Bittencurt, L., Medina, J., and Nápoles Valdes, J. (2018). A new definition of a fractional derivative of local type. *Journal of Mathematical Analysis*, 9(2):88–98. <http://www.ilirias.com/jma/repository/docs/JMA9-2-9.pdf>.

- Hashemi, M. S. (2018). Invariant subspaces admitted by fractional differential equations with conformable derivatives. *Chaos, Solitons & Fractals*, 107:161–169. <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2018.01.002>.
- Honggang, J. and Yanmin, Z. (2022). Conformable double laplace–sumudu transform decomposition method for fractional partial differential equations. *Complexity*, 1:7602254. <https://doi.org/10.1155/2022/7602254>.
- Injrou, S. and Hatem, I. (2022). Solving some partial differential equations by using double laplace transform in the sense of nonconformable fractional calculus. *Mathematical Problems in Engineering*, 2022:1–10. <https://doi.org/10.1155/2022/5326132>.
- Jarrín, H. D., Marcillo-Parra, J. L., Velasco-Velasco, J., and Vivas-Cortez, M. (2026). Una variación de la transformada doble de laplace non-conformable. *Revista de la Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales*, 50(194):213–233. <https://doi.org/10.18257/raccefyn.3288>.
- Khalil, R., Al Horani, M., Yousef, A., and Sababheh, M. (2014). A new definition of fractional derivative. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 264:65–70. <https://doi.org/10.1016/j.cam.2014.01.002>.
- Kilbas, A. A., Srivastava, H. M., and Trujillo, J. J. (2006). *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*. Elsevier. <https://shop.elsevier.com/books/theory-and-applications-of-fractional-differential-equations/kilbas/978-0-444-51832-3>.
- Martínez, F., Mohammed, P. O., and Nápoles Valdes, J. E. (2022). Nonconformable fractional laplace transform. *Kragujevac Journal of Mathematics*, 46(3):341–354. <https://doi.org/10.46793/KgJMat2203.341M>.
- Meddahi, M., Jafari, H., and Yang, X.-J. (2021). Towards new general double integral transform and its applications to differential equations. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*. <https://doi.org/10.1002/mma.7898>.
- Mohamed, M. Z., Hamza, A. E., and Sedeeg, A. K. H. (2023). Conformable double sumudu transformations and efficient approximate solutions to the fractional coupled burger’s equation. *Ain Shams Engineering Journal*, 14(3):101879. <https://doi.org/10.1016/j.asej.2022.101879>.
- Nápoles Valdes, J., Guzmán, P., and Lugo, L. (2018). Some new results on nonconformable fractional calculus. *Advances in Dynamical Systems and Applications*, 13(2):167–175. <https://www.ripublication.com/adsa18/v13n2p5.pdf>.
- Ross, B., Samko, S., and Love, E. R. (1994). Functions that have no first order derivative might have fractional derivatives of all order less than one. *Real Analysis Exchange*, 20(2):140–157. <https://es.scribd.com/document/698712785/44152475>.
- Sedeeg, A. H. (2016). The new integral transform “kamal transform”. *Advances in Theoretical and Applied Mathematics*, 11:451–458. https://www.ripublication.com/atam16/atamv11n4_14.pdf.
- Sedeeg, A. K. H. and Alhamad, A. (2025). Conformable general double transform and its applications for solving conformable partial differential equations. *Sohag Journal of Mathematics*, 12(2):1–17. <http://dx.doi.org/10.18576/sjm/120201>.
- Vivas-Cortez, M., Nápoles, J. E. N., Hernández, J. E., Velasco, J., and Larreal, O. (2021). On nonconformable fractional laplace transform. *Applied Mathematics*, 15(4):403–409. <https://doi.org/10.18576/amis/150401>.
- Vivas-Cortez, M., Velasco, J., and Jarrín, H. D. (2025). A new generalized local derivative of two parameters. *Applied Mathematics and Information Sciences*, 19(3):713–723. <https://doi.org/10.18576/amis/190319>.
- Watugala, G. K. (1993). Sumudu transform: A new integral transform to solve differential equations and control engineering problems. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 24:35–43. <https://doi.org/10.1080/0020739930240105>.
- Yang, X.-J., Baleanu, D., and He, J.-H. (2013). Transport equations in fractal porous media within fractional complex transform method. *Proceedings of the Romanian Academy Series A*, 14(4):287–292. <https://acad.ro/sectii2002/proceedings/doc2013-4/04-Baleanu.pdf>.
- Özkan, O. and Kurt, A. (2018). On conformable double laplace transform. *Optical and Quantum Electronics*, 50:1–9. <https://doi.org/10.1007/s11082-018-1372-9>.