

Artículo original

Influencia del Sol en la clasificación orbital del sistema Tierra-Luna-satélite

Effect of the Sun on the orbital classification of the Earth-Moon-satellite system

● Fredy L. Dubeibe^{1,*}, Saira F. Mesa¹, Karen D. Arias-Sandoval^{1,2}

¹Grupo de Investigación Cavendish, Facultad de Ciencias Humanas y de la Educación, Universidad de los Llanos, Villavicencio, Colombia

²Laboratorio Nacional de Computação Científica, Petrópolis, RJ, Brasil

Resumen

En este trabajo se examina hasta qué punto el problema restringido y circular de los tres cuerpos proporciona un marco fiable para la clasificación orbital en el sistema Tierra-Luna-satélite sin incorporar explícitamente la influencia gravitacional del Sol. Con este objetivo, se compararon tres modelos dinámicos: el problema restringido y circular de los tres cuerpos (P3CRC), el problema restringido y bicircular de los cuatro cuerpos (P4CRB) y una formulación aproximada de este último, denominada P4CRB-A. Las trayectorias se clasificaron mediante métodos numéricos cualitativos y cuantitativos de acuerdo con su comportamiento asintótico, incluidos el escape al infinito, el movimiento acotado y la colisión con un cuerpo primario. Los resultados numéricos revelaron diferencias sustanciales entre los modelos en los resultados orbitales, lo que demuestra que las perturbaciones solares pueden modificar de manera significativa el comportamiento dinámico previsto. Aunque el P4CRB-A reprodujo las características principales del P4CRB completo en la vecindad de la región Tierra-Luna, los efectos solares se tornaron dominantes para las órbitas circumbinarias que se extienden más allá de dos distancias lunares aproximadamente. El análisis comparativo de un rango de valores de la constante de Jacobi mostró que, por fuera de la distancia umbral, el P3CRC sobreestimó de forma sistemática la persistencia del movimiento acotado, mientras que el P4CRB-A proporcionó una descripción más precisa de las dinámicas de escape y colisión.

Palabras clave: problema restringido de cuatro cuerpos; problema restringido de tres cuerpos restringido; dinámica no lineal; clasificación orbital.

Abstract

In this paper, we examine the extent to which the circular restricted three-body problem provides a reliable framework for the orbital classification in the Earth-Moon-satellite system without explicitly integrating the gravitational influence of the Sun. To this end, we compared three dynamical models: the circular restricted three-body problem (CR3BP), the bicircular restricted four-body problem (BCR4BP), and an approximate formulation of the latter, denoted as BCR4BP-A. Trajectories were classified using qualitative and quantitative numerical methods according to their asymptotic behavior, including escape to infinity, bounded motion, and collision with a primary. The numerical results revealed substantial differences in orbital outcomes among the models, demonstrating that solar perturbations can significantly alter the predicted dynamical behavior. While the BCR4BP-A reproduced the main features of the full BCR4BP in the vicinity of the Earth-Moon region, solar effects became dominant for circumbinary orbits extending beyond approximately two lunar distances. A comparative analysis over a range of Jacobi constant values showed that, beyond this threshold distance, the CR3BP systematically overestimated the persistence of bounded motion, whereas the BCR4BP-A provided a more accurate description of escape and collision dynamics.

Keywords: Restricted 4-body problem; Restricted 3-body problem; Nonlinear dynamics; Orbital classification.

Citación: Dubeibe FL, et al. Influencia del Sol en la clasificación orbital del sistema Tierra-Luna-satélite. Revista de la Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. 50(196):594-609, julio-septiembre de 2026. doi: <https://doi.org/10.18257/raccefyn.4049>

Editor: Santiago Vargas Dominguez

***Correspondencia:**

Fredy Leonardo Dubeibe;
fdubeibe@unillanos.edu.co

Recibido: 17 de febrero de 2026

Aceptado: 24 de marzo de 2026

Publicado en línea: 24 de julio de 2026



Este artículo está bajo una licencia de Creative Commons Reconocimiento-NoComercial-Compartir Igual 4.0 Internacional

Introduction

El problema de los tres cuerpos restringido y circular (P3CRC) constituye uno de los pilares de la mecánica celeste, cuyos orígenes que se remontan a las teorías lunares de Euler. Las contribuciones de Jacobi, Levi-Civita, Birkhoff, Delaunay y Hill permitieron consolidar y ampliar este marco teórico, el cual es hoy ampliamente utilizado en teorías lunares y planetarias, así como en aplicaciones de la astronáutica (**Wintner**, 2014; **Broucke**, 1968). En este modelo, dos cuerpos masivos denominados primarios se mueven en órbitas circulares alrededor de su baricentro, mientras que un tercer cuerpo de masa despreciable (en comparación con la de los cuerpos primarios) evoluciona bajo su influencia gravitacional sin afectar su movimiento. A pesar de su larga historia, la dinámica del problema restringido de tres cuerpos sigue siendo un área activa de investigación, con numerosos estudios dedicados al análisis de variantes y extensiones del problema original (véase, por ejemplo, **Murray** (1994); **Albers, Frauenfelder, Koert, and Paternain** (2012); **Dubeibe, Lora-Clavijo, and González** (2017); **Zotos and Dubeibe** (2018); **Suraj, Aggarwal, Asique, and Mittal** (2021); **Elife** (2024)).

Al considerar problemas de cuatro cuerpos, surgen modelos simplificados diseñados para capturar algunas de las particularidades de este tipo de sistemas. Entre ellos se encuentra el problema de los cuatro cuerpos restringido (P4CR), que contempla configuraciones colineales y triangulares, como las configuraciones de Euler y Lagrange, así como el problema de los cuatro cuerpos restringido tipo Hill (véase, por ejemplo, **Scheeres** (1998); **Leandro** (2006); **Hamilton** (2016)). No obstante, estos modelos excesivamente simplificados no logran siempre describir con precisión el movimiento real de los cuerpos. Un enfoque más refinado es el problema de los cuatro cuerpos restringido y bicircular (P4CRB), propuesto originalmente por **Huang** (1960), en el cual un tercer primario se mueve en una órbita circular alrededor de otros dos primarios que, a su vez, orbitan en círculos alrededor de su baricentro. Aunque sigue siendo una idealización, el P4CRB proporciona una aproximación más realista y ofrece información valiosa sobre configuraciones específicas de sistemas de cuatro cuerpos (**de Almeida Junior & de Almeida Prado**, 2022).

Una parte considerable de la literatura se ha centrado en las configuraciones de Euler y Lagrange del P4CR, abarcando desde el cálculo de puntos de equilibrio hasta el estudio detallado de la dinámica orbital (**Simo**, 1978; **Michalodimitrakis**, 1981; **Maranhão & Llibre**, 1998; **Medvedev & Perov**, 2008; **Baltagiannis & Papadakis**, 2011a, 2011b; **Burgos-García & Delgado**, 2013a, 2013b; **Alvarez-Ramírez & Barrabés**, 2015; **Zotos**, 2016). Sin embargo, el P4CRB ha recibido una atención relativamente menor. En este contexto, **Abouelmagd and Ansari** (2019) estudiaron las propiedades del movimiento en el sistema Tierra-Luna perturbado por el Sol, con énfasis en los puntos de equilibrio y su estabilidad, mientras que **Singh and Omale** (2020) incorporaron fuerzas disipativas en el marco del P4CRB. Asimismo, **de Almeida Junior and de Almeida Prado** (2022) compararon el P3CRC y el P4CRB en términos de costos de transferencia entre primarios secundarios, evidenciando efectos perturbativos significativos, en particular en sistemas como Sol-Tierra-Luna y Sol-Marte-Fobos. Más recientemente, **Qian, Yang, Yang, and Zhang** (2018) introdujeron una versión aproximada del modelo P4CRB, analizando condiciones de estabilidad asociadas a resonancias paramétricas principales y validando sus resultados mediante simulaciones numéricas.

En el presente trabajo, nos proponemos examinar la precisión de modelos aproximados en el contexto de problemas de pocos cuerpos. En particular, investigamos la relevancia de

despreciar la influencia del Sol en el sistema Tierra-Luna-satélite (véase, por ejemplo, **Zotos** (2015a); **Heiligers, Hiddink, Noomen, and McInnes** (2015)) y evaluamos la capacidad de estos modelos para clasificar órbitas de manera fiable, destacando las diferencias observadas entre ellos. Siguiendo estudios similares realizados en otros sistemas planetarios (véase, por ejemplo, **Zotos** (2015b, 2015c)), nuestro análisis se apoya en el P3CRC (**Szebehely**, 1967), el P4CRB (**de Almeida Junior & de Almeida Prado**, 2022) y el P4CRB aproximado (**Qian et al.**, 2018).

El artículo está organizado de la siguiente manera. En la siguiente sección se presenta una formulación concisa del problema y se introducen las ecuaciones de movimiento correspondientes a los tres modelos considerados. Posteriormente, se describe la metodología numérica empleada para la clasificación y el análisis de trayectorias. Con esta información, se muestran los resultados de la clasificación orbital en el sistema Sol-Tierra-Luna mediante mapas bidimensionales codificados por color para los tres modelos. Finalmente, se resumen las conclusiones principales de este estudio.

Formulación del problema y ecuaciones de movimiento

Se estudia la dinámica de una partícula de prueba (satélite) en presencia del sistema Tierra-Luna utilizando tres modelos: el P3CRC, el P4CRB y el P4CRB-A. En los párrafos siguientes se introducen los modelos matemáticos empleados en nuestro análisis de manera detallada.

Movimiento del satélite en el P3CRC

En el primer escenario se considera que la influencia del Sol sobre el satélite dentro del sistema Tierra-Luna-Satélite es despreciable. En consecuencia, se emplea el P3CRC para examinar el movimiento del satélite (**Szebehely**, 1967). La Figura 1 muestra la configuración de este problema, donde m_1 , m_2 y m representan las masas de la Tierra, la Luna y el satélite, respectivamente. Además, $\vec{r}_1$ y $\vec{r}_2$ denotan los vectores de posición de m con respecto a m_1 y m_2 , respectivamente, mientras que $\vec{r}$ representa el vector de posición de m con respecto al origen O . En esta configuración, m_1 y m_2 describen un movimiento orbital circular con velocidad angular constante alrededor del baricentro.

En este y en los modelos subsecuentes, se asume que el movimiento del satélite se desarrolla en el plano xy , el cual coincide con el plano orbital de los primarios. En consecuencia, se impone la restricción $z = \dot{z} = \ddot{z} = 0$, lo que elimina el grado de libertad asociado a la coordenada vertical y reduce el sistema dinámico a dos grados de libertad. Bajo esta hipótesis, las ecuaciones de movimiento pueden expresarse únicamente en términos de las coordenadas (x, y) del sistema de referencia sinódico.

Las ecuaciones de movimiento del P3CRC en forma vectorial están dadas por

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} + 2\vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = - \sum_{i=1}^2 \frac{m_i}{r_i^3} \vec{r}_i. \quad (1)$$

En este trabajo se emplean unidades canónicas. En particular, la constante de gravitación universal se fija como $G = 1$, la distancia entre los dos primarios se adopta como unidad de longitud y la masa total del sistema se normaliza a la unidad, $m_1 + m_2 = 1$. Bajo esta normalización, la velocidad angular del sistema de referencia sinódico se toma como $\omega = 1$, lo que permite expresar las coordenadas de los primarios únicamente en términos del parámetro de masa μ , como se indica a continuación: $m_1 = 1 - \mu$, $m_2 = \mu$, $x_1 = -\mu$ y

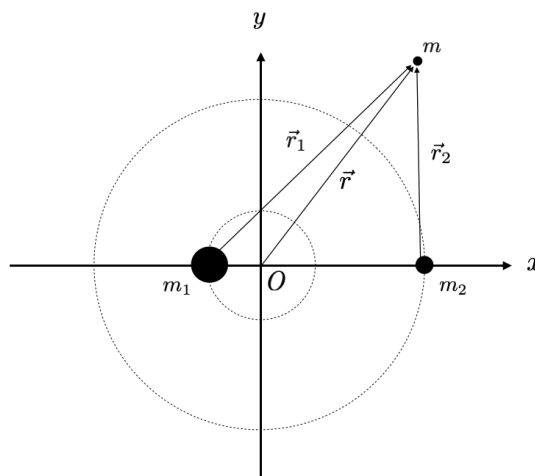


Figura 1. Representación esquemática del problema de los tres cuerpos restringido y circular que involucra a la Tierra (m_1), la Luna (m_2) y un satélite (m).

$x_2 = 1 - \mu$, con $\mu = m_2/(m_1 + m_2)$, garantizando que el baricentro coincida con el origen. Esta elección de unidades conduce a la forma adimensional estándar de las ecuaciones del problema de los tres cuerpos restringido y circular.

La condición de $G = \omega = 1$ implica que la unidad de tiempo canónica corresponde al inverso de la velocidad angular media de la Luna. En unidades físicas, una unidad de tiempo canónica equivale aproximadamente a 4.34 días.

La posición del satélite m con respecto a m_1 (Tierra) y m_2 (Luna) puede expresarse como

$$r_1 = \sqrt{(x + \mu)^2 + y^2}, \quad r_2 = \sqrt{(x + \mu - 1)^2 + y^2}. \quad (2)$$

De este modo, las ecuaciones de movimiento para la partícula de prueba (satélite) en el sistema de referencia sinódico son

$$\ddot{x} - 2\dot{y} = \frac{\partial U_1}{\partial x}, \quad (3)$$

$$\ddot{y} + 2\dot{x} = \frac{\partial U_1}{\partial y}, \quad (4)$$

donde la función potencial efectivo $U_1(x, y)$ está dada por

$$U_1(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2}. \quad (5)$$

El sistema dinámico (3)-(4) admite una integral de movimiento conocida como la constante de Jacobi, denotada por C_1 :

$$C_1 = 2U_1 - (\dot{x}^2 + \dot{y}^2). \quad (6)$$

Esta constante restringe el movimiento de la partícula de prueba a la región donde $C_1 \leq 2U_1$.

Movimiento del satélite en el P4CRB

El P4CRB incorpora la presencia de un tercer primario, m_3 , al P3CRC (ver **de Almeida Junior and de Almeida Prado (2022)**). Se asume que m_3 se mueve a lo largo de una órbita circular alrededor del baricentro O del sistema Tierra-Luna con una velocidad angular constante ω' . La Figura 2 muestra la configuración correspondiente al problema P4CRB, ilustrando las órbitas de los cuerpos y su disposición dentro del sistema. Aquí, m_1 , m_2 , m_3 y m representan las masas de la Tierra, la Luna, el Sol y el satélite, respectivamente, mientras que $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$, $\vec{r}_3$ y $\vec{r}$ denotan los vectores de posición de m con respecto a m_1 , m_2 , m_3 y al origen O , respectivamente.

Las ecuaciones de movimiento del P4CRB en forma vectorial están dadas por

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} + 2\vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = -\sum_{i=1}^3 \frac{m_i}{r_i^3} \vec{r}_i - \frac{m_3}{\rho^2} \vec{h}, \quad (7)$$

donde $\vec{h} = (\cos \theta, \sin \theta, 0)$, ρ representa la distancia desde el origen de coordenadas O hasta el tercer primario m_3 , mientras que θ denota el ángulo entre ρ y el eje x del sistema sinódico. Este ángulo varía con el tiempo y está directamente relacionado con la velocidad angular de m_3 alrededor del baricentro de m_1 y m_2 .

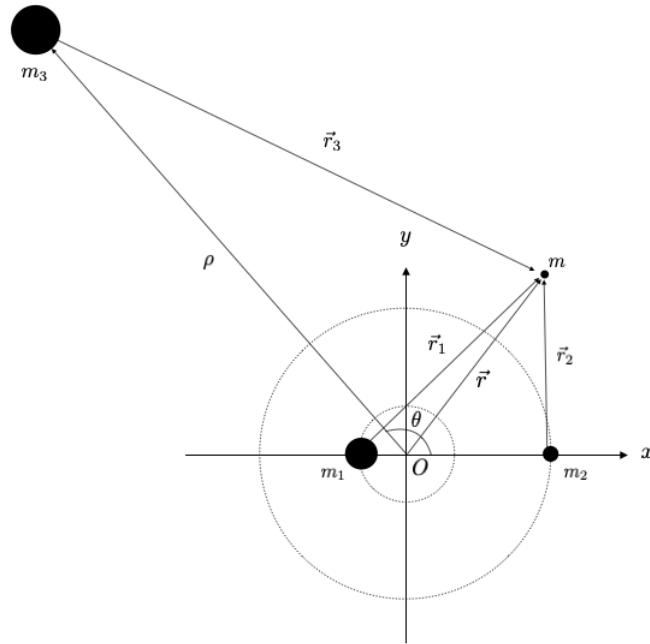


Figura 2. Representación esquemática del problema de los cuatro cuerpos restringido y bicircular que involucra al Sol (m_3), la Tierra (m_1), la Luna (m_2) y un satélite (m).

La posición del satélite m con respecto a m_1 y m_2 está dada por la Ec. (2), mientras que la posición de m con respecto a m_3 puede expresarse como

$$r_3 = \sqrt{(x - \rho \cos \theta)^2 + (y - \rho \sin \theta)^2}. \quad (8)$$

Con esta información, el nuevo sistema de ecuaciones de movimiento puede escribirse en

forma compacta como

$$\ddot{x} - 2\dot{y} = \frac{\partial U_2}{\partial x}, \quad (9)$$

$$\ddot{y} + 2\dot{x} = \frac{\partial U_2}{\partial y}, \quad (10)$$

donde el potencial dependiente del tiempo $U_2(x, y, t)$ está dado en términos de la función de potencial efectivo $U_1(x, y)$ como

$$U_2(x, y, t) = U_1(x, y) + \frac{m_3}{r_3} - \frac{m_3}{\rho^2} (x \cos \theta + y \sin \theta), \quad (11)$$

con $\theta = \omega' t$, donde ω' denota la velocidad angular media del Sol alrededor del baricentro Tierra-Luna en coordenadas sinódicas.

El sistema de ecuaciones (9-10) posee una cuasi-integral de movimiento, denotada por C_2 , la cual puede expresarse en términos de la constante de Jacobi del P3CRC clásico (véase la Ec. (11) en **Abouelmagd and Ansari** (2019))

$$C_2 = 2U_2 - (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - 2 \int_{t_0}^t \frac{\partial (U_2 - U_1)}{\partial t} dt. \quad (12)$$

Movimiento del satélite en el P4CRB-A

Las ecuaciones de movimiento del P4CRB pueden simplificarse utilizando el enfoque propuesto por **Qian et al.** (2018). Este método emplea un desarrollo en serie de potencias, asumiendo que la distancia entre el Sol y el baricentro del sistema Tierra-Luna es mucho mayor que la escala característica de longitud del sistema ($\rho \gg 1$). Usando la Ec. (8), se aproxima el recíproco de r_3^3 de la siguiente manera

$$\frac{1}{r_3^3} \approx \frac{1}{\rho^3} \left[\frac{r^2}{\rho^2} - 2 \left(\frac{x \cos(\omega' t) + y \sin(\omega' t)}{\rho} \right) + 1 \right]^{-3/2}, \quad (13)$$

donde $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ representa la distancia de m al baricentro de m_1 y m_2 . Dado que $x, y \ll \rho$, los dos primeros términos entre corchetes constituyen una pequeña perturbación

$$\frac{r^2}{\rho^2} - 2 \frac{(x \cos(\omega' t) + y \sin(\omega' t))}{\rho} \ll 1, \quad (14)$$

lo que permite emplear una expansión en series de Taylor de primer orden

$$\frac{1}{r_3^3} \approx \frac{1}{\rho^3} \left[1 + \frac{3(x \cos(\omega' t) + y \sin(\omega' t))}{\rho} \right]. \quad (15)$$

Introduciendo el parámetro $k = m_3/\rho^3$, el cual depende de la masa del tercer primario y de su distancia relativa, las ecuaciones de movimiento del P4CRB pueden reescribirse en una forma aproximada e independiente del tiempo, como¹

$$\ddot{x} - 2\dot{y} = \frac{\partial U_3}{\partial x}, \quad (16)$$

$$\ddot{y} + 2\dot{x} = \frac{\partial U_3}{\partial y}, \quad (17)$$

¹Para una derivación detallada de las ecuaciones de movimiento independientes del tiempo (aproximadas) del P4CRB, remitimos al lector a **Qian et al.** (2018).

donde el potencial independiente del tiempo $U_3(x,y)$ está dado, en términos del nuevo parámetro, por

$$U_3(x,y) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{k}{2} \right) (x^2 + y^2) + \frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2}. \quad (18)$$

Por lo tanto, el sistema de ecuaciones (16-17) admite la integral de movimiento

$$C_3 = 2U_3 - (\dot{x}^2 + \dot{y}^2). \quad (19)$$

Cabe mencionar que las ecuaciones de movimiento y la integral de movimiento del modelo P4CRB-A se reducen directamente a las del P3CRC cuando el parámetro k tiende a cero, dando como resultado $U_3(x,y) \rightarrow U_1(x,y)$ y $C_3 \rightarrow C_1$.

Parámetros físicos del sistema Tierra-Luna-Sol

Los parámetros físicos empleados en este estudio se obtienen siguiendo la metodología de normalización descrita en **Simó, Gómez, Jorba, and Masdemont** (1995). El parámetro de masa del sistema Tierra-Luna, denotado por μ , toma el valor $\mu = 1.21506683 \times 10^{-2}$. Dado que en este sistema de unidades la masa combinada de la Tierra y la Luna es igual a la unidad, la masa del Sol resulta $m_3 = 3.28900541 \times 10^5$. La distancia entre el Sol y el baricentro del sistema Tierra-Luna, denotada por ρ , se establece como $\rho = 3.88811143 \times 10^2$, considerando que la distancia Tierra-Luna es la unidad de longitud. Además, al tomar como unidad la velocidad angular media de la Luna alrededor de la Tierra, la velocidad angular media del Sol alrededor del baricentro Tierra-Luna en coordenadas sinódicas es $\omega' = -9.25195985 \times 10^{-1}$. Finalmente, la constante k toma el valor $k = 5.59562341 \times 10^{-3}$.

Metodología

Con el fin de comparar las estructuras orbitales en distintos escenarios, empleamos un enfoque numérico para clasificar trayectorias y estudiar su comportamiento. Como se indicó previamente, consideramos tres casos principales:

Caso 1: En ausencia de la influencia del Sol, analizamos el movimiento del satélite utilizando el P3CRC. Este escenario sirve como referencia para comparar cómo la ausencia del Sol modifica la dinámica orbital del satélite.

Caso 2: Para incorporar la influencia del Sol manteniendo la eficiencia computacional, utilizamos el P4CRB-A independiente del tiempo. Este modelo captura el efecto del Sol de manera simplificada, facilitando el análisis de la estructura orbital.

Caso 3: Mediante el uso del P4CRB, se tiene en cuenta el efecto completo del Sol sobre el movimiento del satélite. Las trayectorias se clasifican en función del comportamiento del satélite bajo los campos gravitacionales combinados de la Tierra, la Luna y el Sol.

Nuestro estudio tiene como objetivo clasificar las trayectorias en categorías distintas según su comportamiento dentro del sistema dinámico:

1. **Escape al infinito:** Trayectorias en las que el satélite eventualmente escapa al infinito. Esto se determina mediante el seguimiento del comportamiento del satélite durante un tiempo de integración determinado. Si el satélite sale de una región de interés predefinida (un círculo centrado en el origen del sistema sinódico con radio $R_{\text{esc}} =$

10^4) sin regresar dentro del tiempo de integración $t_{\max} = 10^4$, se clasifica como una trayectoria de escape.²

2. **Movimiento acotado:** El movimiento acotado ocurre cuando el satélite permanece dentro de una región espacial predefinida (R_{esc}) durante todo el tiempo de integración ($t_{\max}$), sin escapar ni colisionar con los primarios.
3. **Colisión con los primarios:** Las trayectorias que resultan colisionando con alguno de los primarios se identifican mediante el monitoreo de la proximidad del satélite a cada primario. Definimos una colisión como el cruce por parte del satélite de una frontera predefinida ($R_{\text{col}} = 10^{-4}$) alrededor de cada primario, con dirección radial entrante, durante la integración ($t < t_{\max}$).

Las simulaciones numéricas se realizan utilizando técnicas de integración apropiadas para cada caso. Para órbitas de colisión y de escape, empleamos un algoritmo adaptativo de Bulirsch-Stoer en doble precisión. Las órbitas acotadas se integran mediante un método de Runge-Kutta Prince-Dormand 8(7). Además, se emplea la técnica de regularización de Levi-Civita para mitigar las singularidades que surgen en las ecuaciones de movimiento, particularmente cuando la partícula de prueba atraviesa la región de radio $r < R_{\text{col}}$ alrededor de cada uno de los primarios. Estas singularidades, que ocurren cuando la partícula de prueba se aproxima excesivamente a uno de los cuerpos primarios, pueden dar lugar a inestabilidades numéricas e imprecisiones en el proceso de integración (véase **Benest and Froeschlé** (2002) para más detalles). La regularización de Levi-Civita transforma las ecuaciones de movimiento para suavizar las singularidades cuando la partícula de prueba se aproxima a un primario, garantizando la estabilidad numérica durante la integración.

Las ecuaciones de movimiento (Ecs. (3-4), (9-10) y (16-17)) se integran numéricamente utilizando una malla de 1000×1000 condiciones iniciales para la integral de movimiento (C_i , con $i = 1, 2, 3$) y una coordenada de posición, x o y . Cada parámetro se discretiza dentro de rangos e intervalos predefinidos, lo que permite una exploración sistemática de las configuraciones orbitales. Esto garantiza la cobertura del espacio de parámetros relevante manteniendo la viabilidad computacional. Los diagramas en el espacio de configuración (x, y) se omiten debido a su especificidad para cada caso particular.

Para mantener la consistencia, las integrales de movimiento C_1 , C_2 y C_3 se denotan mediante un único parámetro, J , en todas las figuras. En los diagramas (x, J), el valor inicial de la coordenada y se fija como $y_0 = 0$, y el valor inicial del momento en la coordenada x se establece como $p_{x0} = 0.1$. El valor inicial del momento en la coordenada y se determina a partir de la correspondiente integral de movimiento. Para los diagramas (y, J), el valor inicial de la coordenada x se fija como $x_0 = 0$, el valor inicial del momento en la coordenada x se mantiene como $p_{x0} = 0.1$, y el valor inicial del momento en la coordenada y se determina a partir de la integral de movimiento correspondiente.

Es importante resaltar que los criterios de clasificación y los parámetros de integración, incluyendo $t_{\max}$, R_{esc} y R_{col} , se mantienen constantes en todos los escenarios con el fin de garantizar la comparabilidad entre los modelos. Además, se utilizan diagramas codificados por colores para representar visualmente las estructuras orbitales en cada caso. Los distintos colores corresponden a diferentes tipos de trayectorias, lo que facilita la comparación: blanco $\rightarrow$ región prohibida; verde $\rightarrow$ colisión con m_1 (Tierra); amarillo $\rightarrow$ colisión con m_2 (Luna); rojo $\rightarrow$ escape al infinito; azul $\rightarrow$ órbita acotada.

²Un tiempo máximo $t_{\max} = 10^4$ en unidades canónicas, corresponde aproximadamente a 4.34×10^4 días, es decir, ≈ 119 años en unidades físicas.

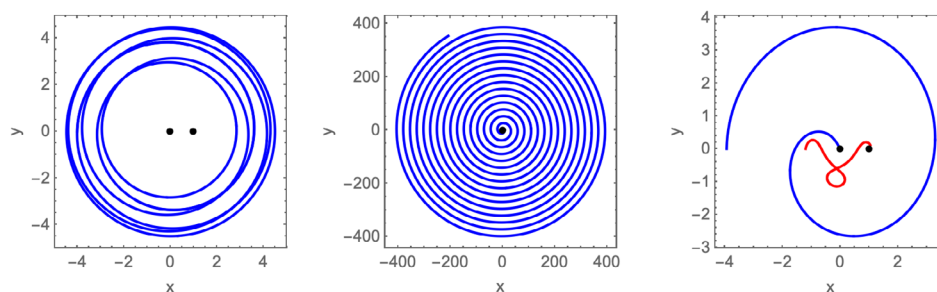


Figura 3. (Color en línea). Órbitas representativas en el plano (x, y) : movimiento acotado (izquierda), escape al infinito (centro) y colisión con los primarios (derecha). La figura resalta las posiciones de los primarios (Tierra y Luna), indicadas por puntos negros en $x_1 = -\mu$ y $x_2 = 1 - \mu$, respectivamente.

Resultados

Una vez establecidos los criterios de clasificación para los distintos tipos de trayectorias, presentamos ejemplos de órbitas integradas numéricamente para ilustrar dichas categorías. Como referencia, la Figura 3 muestra órbitas representativas en el espacio de configuración (x, y) dentro del marco del P3CRC. En esta figura se exhiben los tres posibles resultados: movimiento acotado (izquierda), escape al infinito (centro) y colisión con los primarios (derecha). Estos ejemplos proporcionan una visualización directa de los distintos desenlaces orbitales, facilitando la interpretación de los resultados de clasificación posteriores.

La Figura 4 ilustra la clasificación orbital del satélite en el plano (x, J) para los tres modelos considerados: P3CRC (izquierda), P4CRB-A (centro) y P4CRB (derecha). Cada panel muestra la distribución de los distintos tipos de trayectorias, incluyendo colisiones con m_1 (Tierra) y m_2 (Luna), escape al infinito y órbitas acotadas. Las líneas verticales discontinuas indican las posiciones de la Tierra (m_1) y la Luna (m_2), y sirven como puntos de referencia para el análisis de trayectorias. Como se mencionó previamente, el esquema de colores diferencia los diversos resultados orbitales.

El análisis de la Figura 4 revela que las colisiones con la Luna (amarillo) son poco frecuentes en comparación con las colisiones con la Tierra (verde). En los paneles izquierdo y central, correspondientes a los modelos P3CRC y P4CRB-A, estas órbitas se concentran principalmente en la región $J \in [-3, 3]$. Sin embargo, para valores mayores fuera de este intervalo, solo se observan órbitas acotadas y de escape (azul y rojo, respectivamente). Dado que el modelo P4CRB-A es válido bajo la suposición $\rho \gg 1$, se esperan desviaciones con respecto al modelo P4CRB a mayores distancias del origen del sistema de referencia sinódico, mientras que cerca del origen se anticipa una mejor concordancia entre los modelos.

Una vista ampliada de la clasificación orbital cerca de m_1 y m_2 se presenta en la Figura 5, proporcionando información detallada del comportamiento de las trayectorias en las cercanías de estos cuerpos primarios. Cabe destacar que, aunque la Figura 4 pone de manifiesto diferencias significativas entre los modelos P3CRC y P4CRB-A frente al P4CRB, en la región cercana al origen ($x \in [-1, 2]$) los diagramas de clasificación orbital son bastante similares. En particular, las regiones más grandes correspondientes al escape, la colisión con la Tierra y el movimiento acotado muestran una fuerte concordancia, con discrepancias menores que se manifiestan como pequeños conglomerados de condiciones iniciales que conducen a órbitas acotadas en el P3CRC. Estas discrepancias disminuyen en el modelo P4CRB-A.

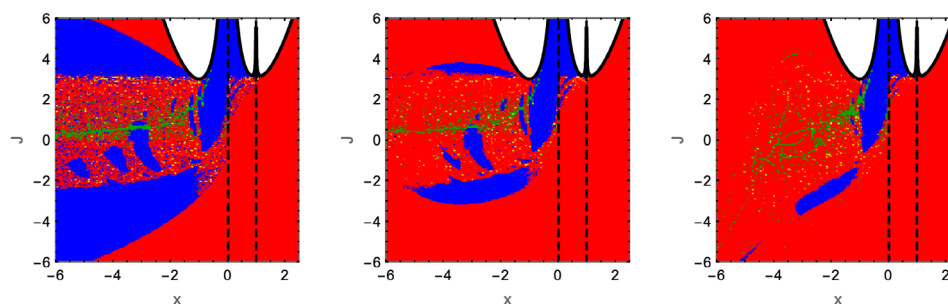


Figura 4. (Color en línea). Clasificación orbital del satélite en el plano (x, J) usando tres modelos: P3CRC (izquierda), P4CRB-A (centro) y P4CRB (derecha). Las líneas verticales discontinuas indican las posiciones de m_1 y m_2 . El código de colores es el siguiente: verde $\rightarrow$ colisión con m_1 ; amarillo $\rightarrow$ colisión con m_2 ; rojo $\rightarrow$ escape al infinito; azul $\rightarrow$ órbita acotada; blanco $\rightarrow$ región prohibida.

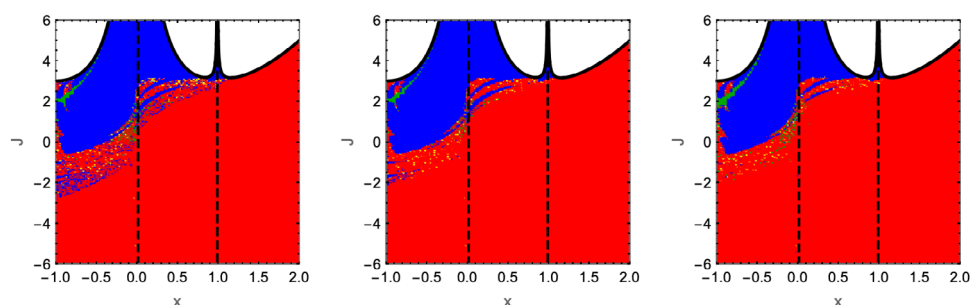


Figura 5. (Color en línea). Vista ampliada de la clasificación orbital del satélite en el plano (x, J) mostrada en la Fig. 4, enfocada en la región cercana a las líneas verticales discontinuas que representan las posiciones de m_1 y m_2 . El código de colores es el mismo que en la Fig. 4.

Extendiendo este análisis al plano (y, J) , la Figura 6 presenta la clasificación orbital del satélite bajo los mismos tres modelos: P3CRC (izquierda), P4CRB-A (centro) y P4CRB (derecha). El esquema de colores para la clasificación de trayectorias se mantiene consistente con las Figuras 4 y 5, garantizando una interpretación uniforme en los distintos planos orbitales.

Los resultados de la Figura 6 indican que en los intervalos $J \in [4, 6]$ y $J \in [-2, 0]$ las configuraciones orbitales permanecen en gran medida consistentes entre los tres modelos. No obstante, surgen discrepancias entre el P3CRC (izquierda) y el P4CRB (derecha) en el intervalo $J \in [0, 4]$, particularmente cerca de $y = 0$. La principal diferencia es la presencia de una región más amplia de condiciones iniciales que conducen a colisiones con la Tierra en el modelo P4CRB, región que está ausente en el P3CRC. Las discrepancias entre los modelos P3CRC y P4CRB en el intervalo $J \in [0, 4]$, especialmente cerca de $y = 0$, pueden atribuirse a diferencias en las condiciones iniciales. En particular, la distribución de condiciones iniciales que conducen a órbitas acotadas en el P3CRC difiere de la del P4CRB, donde influencias gravitacionales adicionales modifican los resultados de las trayectorias. La similitud entre los modelos P4CRB-A y P4CRB sugiere que el P4CRB-A captura de manera efectiva aspectos clave de la dinámica completa del P4CRB. Para cuantificar estas diferencias, se calculó el porcentaje de cada tipo de trayectoria (escape al infinito, movimiento acotado y colisiones con la Tierra o la Luna) en los tres modelos considerados: P3CRC, P4CRB-A y P4CRB. Los resultados se basan en las clasificaciones presentadas en las Figuras 4, 5 y 6.

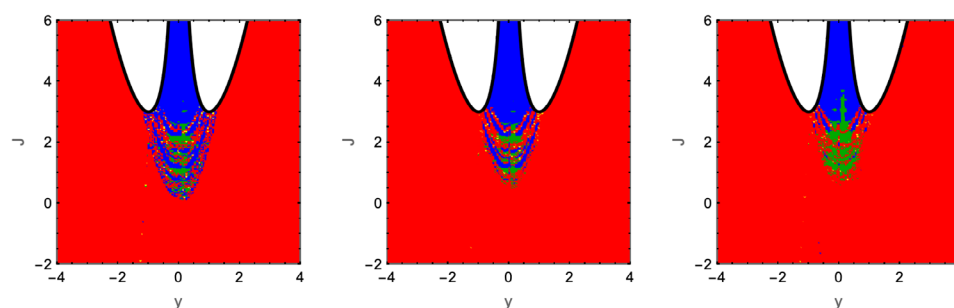


Figura 6. (Color en línea). Clasificación orbital del satélite en el plano (y, J) usando tres modelos: P3CRC (izquierda), P4CRB-A (centro) y P4CRB (derecha). El código de colores es el mismo que en la Fig. 4.

La Figura 7 presenta los porcentajes de órbitas de la clasificación en el plano (x, J) correspondientes a la Figura 4. En el modelo P3CRC (panel izquierdo), el 38.4% de las órbitas se clasifica como movimiento acotado, el 2.8% corresponde a colisiones con la Tierra, el 1.2% a colisiones con la Luna y el 57.6% escapa al infinito. En el modelo P4CRB-A (panel central), la fracción de órbitas acotadas disminuye de manera significativa hasta el 13.9%, mientras que las colisiones con la Tierra y la Luna se reducen ligeramente al 1.7% y 0.8%, respectivamente. En este caso, las órbitas de escape dominan la dinámica, representando el 83.6%. Finalmente, en el modelo P4CRB (panel derecho), las órbitas acotadas se reducen aún más hasta el 7.8%, las colisiones con la Tierra permanecen relativamente similares en el 2.5% y las órbitas de escape aumentan hasta el 89%. Estos resultados indican que el modelo P4CRB muestra una tendencia aún mayor a la fuga orbital frente al movimiento acotado, lo que pone de manifiesto el efecto desestabilizador del Sol en esta configuración.

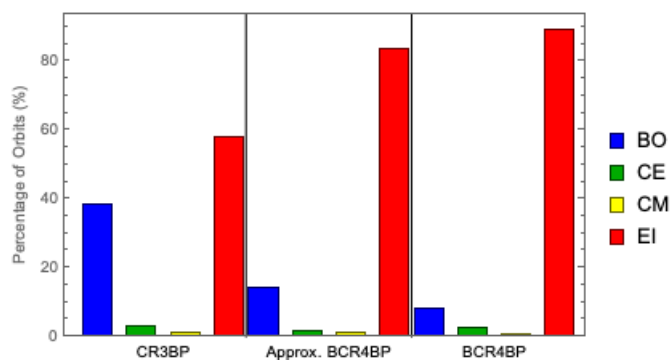


Figura 7. (Color en línea). Porcentaje de órbitas acotadas (BO), colisiones con la Tierra (CE), colisiones con la Luna (CM) y órbitas de escape al infinito (EI) para la clasificación orbital en el plano (x, J) mostrada en la Fig. 4. Las barras del panel izquierdo corresponden al modelo P3CRC, el panel central representa el P4CRB-A y el panel derecho muestra los resultados del modelo P4CRB.

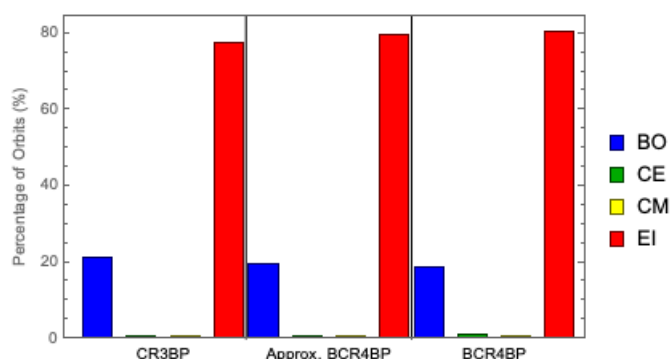


Figura 8. (Color en línea). Porcentaje de órbitas para la clasificación orbital en el plano (x, J) en las cercanías de los cuerpos primarios, mostrada en la Fig. 5. El código de colores y la disposición de los paneles son los mismos que en la Fig. 7.

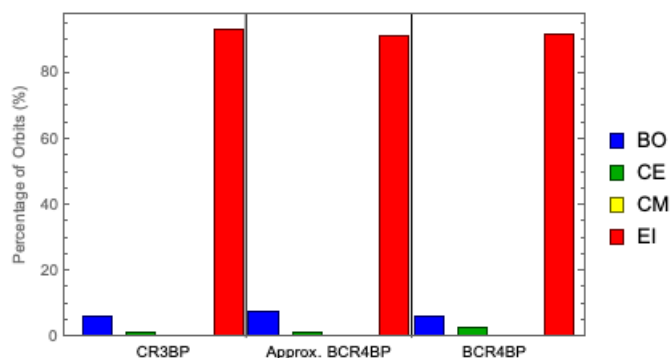


Figura 9. (Color en línea). Porcentaje de órbitas para la clasificación orbital en el plano (y, J) mostrada en la Fig. 6. El código de colores y la disposición de los paneles son los mismos que en la Fig. 7.

La Figura 8 muestra los resultados de la clasificación orbital en el plano (x, J) en las cercanías de los cuerpos primarios (Tierra y Luna). En el modelo P3CRC (panel izquierdo), se observa una fracción moderada de órbitas acotadas (21.2%), junto con una baja incidencia de colisiones con la Tierra (0.7%) y con la Luna (0.6%). No obstante, las órbitas de escape dominan el conjunto, representando el 77.5% del total. El modelo P4CRB-A (panel central) muestra una ligera reducción de las órbitas acotadas hasta el 19.6%, con una disminución de las colisiones con la Tierra al 0.5%, mientras que las órbitas de escape aumentan hasta el 79.5%. Finalmente, el modelo P4CRB (panel derecho) presenta una tendencia similar, con una reducción de las órbitas acotadas al 18.4%, un ligero incremento de las colisiones con la Tierra hasta el 0.9% y un aumento de las órbitas de escape hasta el 80.3%. Por lo tanto, en las proximidades de los cuerpos primarios, la inclusión de la perturbación gravitacional del Sol en los modelos P4CRB-A y P4CRB reduce la estabilidad del movimiento acotado en comparación con el modelo P3CRC. Las diferencias mínimas observadas entre los modelos P4CRB-A y P4CRB en esta región sugieren que el P4CRB-A captura adecuadamente los efectos solares en las cercanías de la Tierra y la Luna.

La Figura 9 presenta los resultados de la clasificación orbital en el plano (y, J) . En el modelo P3CRC (panel izquierdo), las órbitas de escape dominan claramente (93.1%), con una pequeña fracción de órbitas acotadas (5.8%) y colisiones mínimas con la Tierra (0.9%) y la Luna (0.2%). El modelo P4CRB-A (panel central) presenta un ligero aumento en las órbitas

acotadas (7.4%) y en las colisiones con la Tierra (1.1%), mientras que las órbitas de escape disminuyen marginalmente hasta el 91.3%. En el modelo P4CRB (panel derecho), las colisiones con la Tierra aumentan aún más hasta el 2.3%, mientras que las órbitas de escape se mantienen dominantes con un 91.6%, y la tasa de colisiones con la Luna permanece muy baja (0.1%). Los resultados de la Figura 9 sugieren que las tendencias generales de clasificación se mantienen consistentes, siendo las órbitas de escape el resultado predominante en todos los casos.

Modelo	Tiempo promedio de ejecución (s)
P3CRC	41.3042
P4CRB-A	43.5858
P4CRB	64.1519

Table 1. Comparación de los tiempos promedio de ejecución para los tres modelos.

Como análisis final, se cuantificó el costo computacional de los tres modelos mediante la comparación de sus tiempos medios de ejecución para una trayectoria individual, considerando 100 órbitas acotadas por modelo. La integración se realizó durante $t = 10^4$ unidades de tiempo en un computador MacBook Air (chip Apple M2, CPU de 8 núcleos, GPU de 8 núcleos y 8 GB de memoria RAM).

Las simulaciones numéricas se implementaron en Wolfram Mathematica 12.0.0 utilizando la función NDSolve. En este trabajo, se definieron e implementaron métodos de integración personalizados dentro del entorno de NDSolve, siguiendo su arquitectura de extensión basada en la inicialización del método y la definición explícita de procedimientos de avance (Sofroniou & Knapp, 2008).

Los resultados se presentan en la Tabla 1 y muestran que el modelo P3CRC es el más eficiente desde el punto de vista computacional debido a su formulación simplificada, mientras que el P4CRB-A introduce solo un incremento marginal en el tiempo de ejecución. Por su parte, el modelo P4CRB completo, que incorpora explícitamente la influencia gravitacional del Sol, requiere aproximadamente un 55% más de recursos computacionales que el P3CRC. Este balance entre precisión y eficiencia debe considerarse al realizar análisis de trayectorias a gran escala.

Conclusiones

Este estudio presenta un análisis numérico de la dinámica orbital en el sistema Tierra-Luna-satélite utilizando tres modelos: el problema de los tres cuerpos restringido y circular (P3CRC), el problema de los cuatro cuerpos restringido y bicircular (P4CRB) y una versión aproximada del P4CRB. Se examinó cómo la presencia del Sol afecta la clasificación de órbitas y se evaluó el costo computacional de cada modelo.

Nuestros resultados muestran diferencias claras en los resultados de las trayectorias entre estos modelos. El P3CRC y el P4CRB-A producen clasificaciones similares en algunas regiones, especialmente para órbitas acotadas y trayectorias que colisionan con la Tierra. Sin embargo, a medida que las trayectorias se extienden más lejos de los cuerpos primarios, las perturbaciones solares se vuelven más significativas, dando lugar a diferencias notables. Estos hallazgos permiten delimitar los rangos de validez de cada modelo y determinar el umbral a partir del cual la influencia del Sol comienza a dominar la clasificación orbital.

La clasificación comparativa en los planos (x, J) y (y, J) revela patrones consistentes. El P3CRC tiende a sobreestimar la estabilidad de las órbitas acotadas debido a que ignora el

efecto gravitacional del Sol. En contraste, tanto el P4CRB-A como el P4CRB completo capturan los efectos desestabilizadores de las perturbaciones solares, lo que conduce a un mayor número de trayectorias de escape. El P4CRB-A reproduce adecuadamente estas tendencias, aunque subestima ligeramente las trayectorias que colisionan con la Tierra cerca del eje x en el plano (y, J) .

A pesar de estas diferencias, una comparación detallada de los porcentajes de trayectorias muestra que, en la mayoría de los casos, las variaciones entre los modelos son pequeñas. La diferencia más significativa se observa en las trayectorias que colisionan con la Tierra, donde el P4CRB completo predice una frecuencia aproximadamente 1.2% mayor que el P4CRB-A. Aunque este último subestima ligeramente las colisiones, proporciona una aproximación razonable del comportamiento del modelo completo en las cercanías de los cuerpos primarios.

Desde el punto de vista computacional, el análisis muestra que el P4CRB completo, aunque es el más preciso, también es el más costoso, con un tiempo de ejecución promedio aproximadamente 55% mayor que el del P3CRC. El P4CRB-A representa un punto medio adecuado, ya que conserva las características dinámicas esenciales introducidas por las perturbaciones solares, manteniendo tiempos de cómputo cercanos a los del P3CRC. Este balance lo convierte en una opción práctica para aplicaciones que requieren eficiencia y precisión en la clasificación orbital.

En resumen, el estudio numérico realizado conduce a dos conclusiones principales sobre el papel de las perturbaciones solares en las órbitas de satélites en el sistema Tierra-Luna:

- A pesar de su formulación simplificada, el modelo P4CRB-A propuesto por **Qian et al.** (2018) muestra una estrecha concordancia con los resultados del P4CRB completo, particularmente en regiones del sistema Tierra-Luna de aproximadamente dos distancias lunares medidas desde el baricentro del sistema.
- Para órbitas circumbinarias, la influencia del Sol altera significativamente la estabilidad orbital, lo que hace necesario el uso del modelo P4CRB en lugar del P3CRC para obtener predicciones de trayectorias precisas.

Trabajos futuros podrían extender este análisis incorporando efectos perturbativos adicionales, como la presión de radiación solar y términos gravitacionales no esféricos, con el fin de refinar aún más las evaluaciones de estabilidad.

Agradecimientos

FLD agradece el apoyo financiero otorgado por la Dirección General de Investigaciones de la Universidad de los Llanos (Colombia) en el marco del proyecto C07-04-2026-033. Los autores agradecen a los revisores anónimos por la lectura cuidadosa del manuscrito y por sus valiosas sugerencias y comentarios, los cuales contribuyeron de manera significativa a mejorar la calidad y la claridad del trabajo.

Contribución de los autores

Todos los autores realizaron contribuciones sustanciales a la concepción, diseño, análisis e interpretación de los datos. Todos participaron en la redacción del artículo y revisaron la versión final del manuscrito.

Conflicto de intereses

Los autores declaran que no existe conflicto de intereses.

References

- Abouelmagd, E. I., & Ansari, A. A.** (2019). The motion properties of the infinitesimal body in the framework of bicircular sun perturbed earth-moon system. *New Astronomy*, **73**(1), 101282.
- Albers, P., Frauenfelder, U., Koert, O. V., & Paternain, G. P.** (2012). Contact geometry of the restricted three-body problem. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, **65**(2), 229-263.
- Alvarez-Ramírez, M., & Barrabés, E.** (2015). Transport orbits in an equilateral restricted four-body problem. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, **121**(2), 191-210.
- Baltagiannis, A., & Papadakis, K.** (2011b). Families of periodic orbits in the restricted four-body problem. *Astrophysics and Space Science*, **336**(2), 357-367.
- Baltagiannis, A., & Papadakis, K. E.** (2011a). Equilibrium points and their stability in the restricted four-body problem. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, **21**(8), 2179-2193.
- Benest, D., & Froeschlé, C.** (2002). *Singularities in gravitational systems: applications to chaotic transport in the solar system* (Vol. 590). Springer Science & Business Media.
- Broucke, R. A.** (1968). *Periodic orbits in the restricted three body problem with earth-moon masses* (Tech. Rep. No. JPL-TR-32-1168). Pasadena, CA: Jet Propulsion Laboratory.
- Burgos-García, J., & Delgado, J.** (2013a). On the “blue sky catastrophe” termination in the restricted four-body problem. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, **117**(2), 113-136.
- Burgos-García, J., & Delgado, J.** (2013b). Periodic orbits in the restricted four-body problem with two equal masses. *Astrophysics and Space Science*, **345**(2), 247-263.
- de Almeida Junior, A. K., & de Almeida Prado, A. F. B.** (2022). Comparisons between the circular restricted three-body and bi-circular four body problems for transfers between the two smaller primaries. *Scientific Reports*, **12**(1), 4148.
- Dubeibe, F., Lora-Clavijo, F., & González, G. A.** (2017). Pseudo-newtonian planar circular restricted 3-body problem. *Physics Letters A*, **381**(6), 563-567.
- Elipe, A.** (2024). Wrong hypotheses in the generalized RTBP. *Astrophysics and Space Science*, **369**(2), 22.
- Hamilton, D. P.** (2016). Fresh solutions to the four-body problem. *Nature*, **533**(7602), 187-188.
- Heiligers, J., Hiddink, S., Noomen, R., & McInnes, C. R.** (2015). Solar sail lyapunov and halo orbits in the earth-moon three-body problem. *Acta Astronautica*, **116**(), 25-35.
- Huang, S.** (1960). *Very restricted four-body problem*. Publications of Goddard Space Flight Center.
- Leandro, E. S.** (2006). On the central configurations of the planar restricted four-body problem. *Journal of Differential Equations*, **226**(1), 323-351.
- Maranhão, D. L., & Llibre, J.** (1998). Ejection-collision orbits and invariant punctured tori in a restricted four-body problem. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, **71**(1), 1-14.
- Medvedev, Y. D., & Perov, N. I.** (2008). Restricted four-body problem. the case of a central configuration: libration points and their stability. *Astronomy Letters*, **34**(5), 357-365.

- Michalodimitrakis, M.** (1981). The circular restricted four-body problem. *Astrophysics and Space Science*, **75**(2), 289–305.
- Murray, C. D.** (1994). Dynamical effects of drag in the circular restricted three-body problem: I. location and stability of the lagrangian equilibrium points. *Icarus*, **112**(2), 465–484.
- Qian, Y.-J., Yang, L.-Y., Yang, X.-D., & Zhang, W.** (2018). Parametric stability analysis for planar bicircular restricted four-body problem. *Astrodynamic*, **2**(2), 147–159.
- Scheeres, D. J.** (1998). The restricted hill four-body problem with applications to the earth–moon–sun system. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, **70**(2), 75–98.
- Simo, C.** (1978). Relative equilibrium solutions in the four body problem. *Celestial Mechanics*, **18**(2), 165–184.
- Simó, C., Gómez, G., Jorba, Á., & Masdemont, J.** (1995). The bicircular model near the triangular libration points of the rtbp. In *From newton to chaos: modern techniques for understanding and coping with chaos in n-body dynamical systems* (pp. 343–370). Springer.
- Singh, J., & Omale, S. O.** (2020). A study on bi-circular R4BP with dissipative forces: Motion of a spacecraft in the earth-moon-focused view. *Few-Body Systems*, **61**(2), 15.
- Sofroniou, M., & Knapp, R.** (2008). Advanced numerical differential equation solving in mathematica. wolfram mathematica tutorial collection. wolfram research. *Inc.: Champaign, IL, USA*(), .
- Suraj, M. S., Aggarwal, R., Asique, M. C., & Mittal, A.** (2021). On the modified circular restricted three-body problem with variable mass. *New Astronomy*, **84**(1), 101510.
- Szebehely, V.** (1967). *Theory of orbit: The restricted problem of three bodies*. Academic Press.
- Wintner, A.** (2014). *The analytical foundations of celestial mechanics*. Courier Corporation.
- Zotos, E. E.** (2015a). Classifying orbits in the restricted three-body problem. *Nonlinear Dynamics*, **82**(3), 1233–1250.
- Zotos, E. E.** (2015b). Orbital dynamics in the planar Saturn-Titan system. *Astrophysics and Space Science*, **358**(1), 4.
- Zotos, E. E.** (2015c). Orbit classification in the planar circular pluto-charon system. *Astrophysics and Space Science*, **360**(1), 7.
- Zotos, E. E.** (2016). Escape and collision dynamics in the planar equilateral restricted four-body problem. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, **86**(), 66–82.
- Zotos, E. E., & Dubeibe, F. L.** (2018). Orbital dynamics in the post-newtonian planar circular restricted sun–jupiter system. *International Journal of Modern Physics D*, **27**(4), 1850036.