

CONJUNTOS, ESTRUCTURAS Y SISTEMAS

por

Carlos E. Vasco U.*

Resumen

Vasco, C.E.: Conjuntos, estructuras y sistemas. Rev. Acad. Colomb. Cienc. 18 (69): 211-223, 1991. ISSN 0370-3908.

Tras un breve recorrido histórico, se intenta caracterizar las matemáticas del Siglo XX por la primacía de las estructuras sobre los objetos matemáticos. Se discute la conceptualización usual de "estructura", "sistema" y "conjunto", para mostrar las inconsecuencias que se deslizan en el uso de "estructura", y las ventajas de utilizar una versión de la teoría general de sistemas adecuada a las matemáticas actuales. Se precisa el concepto de sistema matemático, señalando sus aspectos material, activo y teórico, a los cuales corresponden el sustrato (conjunto subyacente), la dinámica (conjunto de transformaciones), y la estática (conjunto de relaciones) o sea la estructura del sistema matemático. Se estudian los distintos tipos de sistemas matemáticos actualmente utilizados, desde los sistemas de números naturales hasta las categorías, para mostrar la pertinencia de la teoría desarrollada en el trabajo y su potencia descriptiva.

Abstract

After a brief historical overview, 20th-Century Mathematics is characterized by the priority of structures over mathematical objects. The usual ways of conceptualizing "structure", "system", and "set" are discussed, in order to show the way inconsistencies appear in the use of "structure", and to show the advantages of using a version of general systems theory adapted to modern mathematics. The concept of mathematical system is worked out, deploying its material, active, and theoretical aspects, to which there correspond the substratum (set of objects), the dynamics (set of transformations), and the statics (set of relations), i. e., the structure of the mathematical system. The paper develops the different types of mathematical systems currently in use, from natural number systems to categories, to show the appropriateness of the theory developed in it, and its descriptive power.

Introducción

Si se quisiera dar una caracterización de las matemáticas del siglo XX como diferentes de las de

los siglos anteriores, me atrevería a proponer la siguiente: en el siglo XX se dio el paso de los objetos a las estructuras.

* Universidad Nacional de Colombia, Santafé de Bogotá, D.C.

Podríamos decir que hasta fines del siglo pasado cada rama de las matemáticas tomaba su propia

caracterización de la naturaleza de los objetos con los que trabajaba:

- La aritmética y la teoría de los números trataba de los números naturales y de los enteros, de las fracciones con numerador y denominador enteros, y de los números algebraicos y los enteros módulo n . Los reales y los complejos aparecen en la teoría de números más como herramientas que como objetos de estudio.
- La geometría trataba de los puntos, rectas, curvas, planos, superficies, variedades y otros tipos de espacios.
- El análisis se dividía muy claramente según los objetos de estudio: el análisis real para las funciones sobre los reales, el análisis complejo para las funciones sobre los complejos, y el análisis funcional para los operadores diferenciales, integrales y variacionales que actuaban sobre esas funciones.
- El álgebra era apenas una rama inicial del análisis que trataba de las ecuaciones con números desconocidos ("incógnitas"), pero de los cuales se sabía con seguridad que eran reales o complejos. Era —y sigue siéndolo en los libros de bachillerato y primeros semestres de la universidad— más bien una herramienta para resolver ecuaciones y expresar funciones, que una disciplina en sí misma.
- La trigonometría y el cálculo diferencial e integral eran ramas un poco más avanzadas del análisis real, en las que se estudiaban funciones no tratadas en el álgebra, sus relaciones de tipo ecuacional, y las derivadas e integrales de las funciones elementales del álgebra y de la trigonometría.
- Las ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales eran apenas una rama intermedia del análisis, de tipo enciclopédico, cuyas soluciones se consideraban siempre como funciones reales o complejas.

La naturaleza de los objetos matemáticos con los que trataba cada rama puede pues caracterizar las matemáticas clásicas hasta los comienzos del último cuarto del siglo pasado.

Ambientación histórica

El cambio vino de múltiples fuentes. Enumeremos someramente algunas de ellas. En el estudio de las ecuaciones polinómicas de grados superiores al cuarto se fue imponiendo desde el siglo XVIII la necesidad de estudiar las permutaciones de las raíces de esas ecuaciones, o equivalentemente de las variables de los polinomios en varias variables. A comienzos del siglo XIX Evaristo Galois estudió ciertas "agrupaciones" o "grupos" de permutaciones, entendiendo la palabra "grupo" en el sentido

usual de "agregado" o "colección", y estudió las propiedades de ciertos "subgrupos" que permanecían invariantes bajo ciertas transformaciones. Esto le permitió probar la imposibilidad de resolver las ecuaciones de grado mayor que 4 por medio de radicales. El estudio de esos "grupos" de permutaciones de números o símbolos se adelantó durante todo el siglo XIX, pero sólo al final, en los trabajos de W. van Dyck, (1882); E. Netto, (1882) y H. Weber (1882), se llegó a formular en abstracto la estructura de esos grupos, y a proponer los axiomas mínimos que deberían cumplir esos sistemas de transformaciones. (Ver Wüßing, 1984, pp. 235-251; Van der Waerden, 1985, pp. 151-154).

La aparición de las geometrías no euclidianas en el primer cuarto del siglo XIX pasó más por ser una curiosidad inútil y molesta que un descubrimiento importante, hasta que hacia 1870 Beltrami y Klein presentaron modelos bidimensionales de esas geometrías que se podían considerar como al menos parcialmente insertados en el espacio euclidiano tridimensional, y por medio de ellos mostraron que las tres geometrías se sostenían o caían por igual. Klein estudió las distintas geometrías conocidas entonces, y encontró que entre todas ellas había una jerarquía que se podía expresar elegantemente a través de los grupos de transformaciones: nació así el "Programa de Erlangen" de 1872.

La lógica simbólica empezó a desarrollarse hacia 1840 en Inglaterra con Boole y De Morgan. En Alemania Frege publica su "Begriffsschrift" en 1879, y Dedekind su libro sobre los números en 1888. Al año siguiente, Peano publica sus "Principios de la aritmética" en Italia, y comienza la publicación de los cinco fascículos de su "Formulario" (1895—1905). Estos autores en Europa y Charles Sanders Peirce en los Estados Unidos empezaron a introducir lenguajes simbólicos artificiales más apropiados para el estudio de la lógica que los simbolismos prestados al álgebra utilizados por sus antecesores. Pero sólo con los trabajos de Russell y Whitehead en 1910 adquirió carta de ciudadanía la lógica simbólica, y se propagó el simbolismo de los "Principia Mathematica" adaptado del propuesto por Peano.

Fue tal vez Hilbert quien contribuyó más al cambio radical al que me refiero en este artículo. Hilbert trató de formalizar rigurosamente la geometría euclidiana, y al tratar de hacerlo empezó a captar la necesidad de "olvidar" la naturaleza de los objetos geométricos básicos, como los puntos, rectas y planos. Su famosa broma sobre hacer geometría con mesas, sillas y jarros de cerveza es muy indicativa de la nueva tendencia que se empezó a extender desde Göttingen a fines del siglo XIX.

El formalismo hilbertiano buscaba retroceder desde las definiciones iniciales de una teoría hasta los términos no definidos que aparecían en ellas; retroceder desde los resultados de la investigación matemática en un área hasta los supuestos implíci-

tos o explícitos que conformarían los axiomas iniciales de esa teoría, y finalmente retroceder desde las pruebas informales de la práctica matemática hasta las formas rigurosas de argumentación.

Por otro lado, hacia 1874 Georg Cantor empezó tímidamente a estudiar los agregados o "multitudes" ("Mengen") de puntos de discontinuidad de ciertas funciones, y poco a poco fue cayendo en la cuenta de que se podían estudiar muchas de las propiedades de esos conjuntos independientemente de si sus elementos eran puntos, números u otros objetos matemáticos. La teoría de conjuntos se desarrolló en los escritos de Cantor de 1874 a 1897, pero sólo en el Congreso Mundial de Matemáticas de 1900 adquirió carta de ciudadanía, gracias precisamente al mismo Hilbert. Este proclamó que nadie nos podría sacar ya del paraíso creado por Cantor. Pero esta referencia a los ángeles del Génesis no tenía en cuenta los demonios que surgían en forma de paradojas insolubles en el interior del mismo paraíso.

Se podría también señalar que la invención de los cuaternios por parte de Hamilton en 1843 (publicados en sus "Lectures on Quaternions", Dublín, 1853) y los trabajos de Grassmann sobre álgebra exterior publicados en su "Ausdehnungslehre" de 1844 (aunque no reconocidos hasta que Hankel los difundió en 1867) representan hitos en la formulación de objetos y sistemas matemáticos que cumplían propiedades que parecían paradójicas a los ojos de los matemáticos clásicos. Los trabajos de Sylvester, Cayley y Frobenius con los determinantes y las matrices prepararon el terreno para nuevos sistemas algebraicos, nuevas operaciones y nuevas propiedades.

En Francia fueron tal vez los trabajos de Henri Poincaré los que empezaron a desarrollar las herramientas conceptuales necesarias para tratar de olvidar la naturaleza de los elementos espaciales intuitivos en los espacios de dos y tres dimensiones, y estudiar más bien propiedades de sus descomposiciones en trozos simples y la manera de trazar y deformar curvas en ellos. Los grupos de homología y de homotopía mostraron que era posible estudiar propiedades de los espacios con herramientas algebraicas tomadas de la teoría de grupos.

La aparición de los grupos en teorías matemáticas tan disímiles como las ecuaciones polinómicas, las ecuaciones diferenciales parciales de la mecánica, las matrices, los espacios de la geometría, etc., impulsó el aislamiento y el estudio no sólo de la estructura de grupo sino de otras relacionadas con él, como las estructuras de semigrupo, de anillo, de cuerpo, de espacio vectorial, de módulo y de retículo. La llamada "álgebra moderna" o "álgebra abstracta" había nacido.

Podría decirse que el álgebra abstracta es al álgebra de bachillerato como el álgebra de bachillerato es a la aritmética elemental, con tal de que se

aprecie que el abismo de abstracción de la aritmética elemental al álgebra de bachillerato es mucho menor que el que separa al álgebra de bachillerato del álgebra abstracta.

A comienzos de este siglo, los estudios de Fréchet en Francia y de la escuela polaca (ver Arbolea, 1980; 1982) abrieron las puertas a los estudios de espacios de funciones y luego de espacios cada vez más abstractos y patológicos. Las distancias, normas, uniformidades, vecindades abiertas y cerradas aparecieron como más importantes que la naturaleza de los "puntos" de esos espacios, y por eso no importaba ya si eran puntos geométricos clásicos, o números, conjuntos, líneas, funciones, triángulos móviles o planos tangentes.

El escenario estaba listo para que después de la segunda guerra mundial empezaran a avanzar en muchos frentes los esfuerzos de abstracción y de unificación de las disciplinas matemáticas a través del olvido de la naturaleza de los objetos y del tratamiento abstracto de los sistemas y las estructuras. Estos ensayos se concretaron en las publicaciones del grupo que escribía en Francia bajo el seudónimo de "Nicolás Bourbaki", ya desde los años treinta de nuestro siglo.

Las estructuras bourbakistas

Los Bourbaki intentaron aislar las estructuras matemáticas atendiendo a conjuntos abstractos de objetos no identificados, con sus leyes de composición, sus relaciones de orden o sus sistemas de vecindades.

Identificaron así tres tipos de estructuras, las "estructuras madres" de todas las matemáticas:

- Las estructuras algebraicas, como las de grupo, anillo, cuerpo, módulo y espacio vectorial.
- Las estructuras de orden, como los conjuntos preordenados, los ordenados, los totalmente ordenados, los bien ordenados, etc.
- Las estructuras topológicas conformadas por colecciones de vecindades abiertas de un espacio, que permitieron unificar el estudio de los fenómenos tratados por Fréchet y la escuela polaca, y los que aparecieron en la base de las geometrías más débiles del Programa de Erlangen, en los subconjuntos del plano real y complejo, en los espacios funcionales, etc.

Para los bourbakistas, las antiguas matemáticas plurales quedaban así unificadas en una única disciplina formal en singular y con mayúscula: la Matemática.

Los componentes del grupo Bourbaki intentaron generalizar lo que era un tipo de estructura, y propusieron la necesidad de que estuvieran disponibles uno o varios conjuntos subyacentes, algunos

de sus productos cartesianos y sus conjuntos de partes, para seleccionar de ellos los subconjuntos que correspondieran a los grafos de las leyes de composición y de las relaciones. Ese fino análisis bourbakista fue tal vez el paso más importante en la aceptación de la primacía de las estructuras sobre la naturaleza de los objetos.

Pero el desprecio por la lógica, el rechazo al intuicionismo, el silencio sobre el teorema de incompletez de Gödel, y la simplificación de la teoría de conjuntos por la introducción del operador tau de Hilbert (que supone el axioma de elección), hizo que la teoría de conjuntos y la lógica se desarrollaran en forma independiente de la escuela Bourbaki. Y fueron precisamente los trabajos sobre fundamentos de la teoría de conjuntos de Zermelo (1908), Fraenkel (1922) y von Neumann (1925) los que impulsaron el desarrollo de esa teoría en forma divergente, y los trabajos de Löwenheim (1915), Skolem (1922), Herbrand (1930) y Gödel (1931) los que llevaron a la necesidad de precisar el lenguaje en el que se formulaba una teoría matemática, su sintaxis, sus interpretaciones en sistemas concretos o modelos de esas teorías, y a precisar así lo que eran los conjuntos subyacentes, las operaciones entre ellos, los operadores internos y externos de los sistemas, las relaciones y las constantes que señalaban los objetos que tenían nombre propio en esos sistemas.

Entre 1933 y 1936 Tarski y Carnap, desarrollaron la teoría de la verdad en los lenguajes formales, y se estableció la semántica como disciplina de las interpretaciones de las teorías simbólicas.

Se empezó entonces a utilizar indistintamente "sistema" y "estructura" para referirse a esos modelos de las teorías en sus distintos grados de abstracción, aunque la palabra "estructura" obtuvo la primacía en los libros de lógica y teoría de modelos.

Pero en los círculos científicos y filosóficos franceses la palabra "estructura" tenía una connotación más abstracta: era más bien aquello que tenían en común sistemas superficialmente diferentes. En ese sentido es correcto decir que "dos sistemas tienen la misma estructura", pero no sería inteligible decir que "dos estructuras tienen el mismo sistema".

Por lo tanto, es necesario precisar el sentido de las palabras "sistema" y "estructura". La solución más usual después de Bourbaki es confundir "sistema" con "estructura" y hablar del aspecto más abstracto como un "tipo de estructura". Parece sin embargo muy extraño decir que "una estructura tiene estructura de grupo". Por eso me atrevo a proponer una precisión ulterior en el uso de las palabras "sistema" y "estructura".

Bourbaki hace también a su manera una breve historia del camino de la abstracción en las matemáticas del siglo XIX. Señalan los Bourbaki que la

noción de estructura estaba potencialmente lista "en substancia" hacia 1900, pero que necesitó unos treinta años más para aparecer a plena luz (Bourbaki, 1960, p. 34).

Las categorías

Pero al mismo tiempo que el grupo Bourbaki redactaba sus fascículos básicos (1936-1957) se empezó a desarrollar la teoría de categorías por parte de Ehresmann, Cartan, Eilenberg y MacLane. Los Bourbaki estuvieron a las puertas de la teoría de categorías al final del capítulo IV de la teoría de conjuntos, al tratar en las dos últimas secciones los temas de los morfismos y de las aplicaciones universales. Pero se detuvieron en el umbral, tal vez por el rechazo que producía todavía el oscuro lenguaje Ehresmanniano. Se necesitaba todavía el trabajo de Leray, Kan, Artin, Grothendieck, Godement, Serre, Buchsbaum, Stone, Freyd y Lawvere para que la difusión de las categorías como lenguaje universal de las matemáticas y la lógica fuera una realidad.

En el mundo de las categorías se puede pensar más fácilmente que los objetos de la categoría son los sistemas, y que el nombre de la categoría denota la estructura mínima que deben tener todos los sistemas que viven en ella: la categoría de grupos abelianos, o la categoría de conjuntos bien ordenados o la categoría de espacios topológicos. Los morfismos entre sistemas son las flechas de la categoría respectiva, y las aplicaciones universales son más bien las soluciones de los problemas universales en las categorías.

Así parece más conveniente reservar la palabra "sistema" para un objeto concreto de la categoría (por abstracto que sea), la palabra "morfismo" para una flecha de la categoría, y la palabra "estructura" para la red de relaciones que caracteriza a los sistemas de cada categoría. Más adelante precisaré esta noción inicial de "red de relaciones", y distinguiré entre sus aspectos interno y externo.

Sistemas, estructuras y lenguajes formales

Al analizar desde el punto de vista lógico las teorías sobre cada uno de los sistemas matemáticos, se vio muy pronto que los símbolos con los que se escriben las fórmulas bien formadas de esas teorías son de naturaleza muy diferente unos de otros. Hay unos símbolos lógicos que se requieren para escribir cualquier teoría matemática, como la negación, las conectivas binarias, los cuantificadores y los separadores (comas, paréntesis, etc). Pero hay otros tipos de símbolos, llamados términos, que sólo nombran elementos del sistema (así estos elementos sean a la vez conjuntos); los términos pueden ser a su vez simples, como las constantes y las variables, o compuestos de esos símbolos pasivos y otros activos como los símbolos de operadores de uno, dos . . . , n puestos, que al ser saturados con términos producen otros términos. Finalmente, hay una serie de símbolos de predicados de uno,

dos, . . . , n puestos, que al ser saturados con términos producen las fórmulas bien formadas.

La diferencia básica entre operadores u operaciones por un lado, y predicados o relaciones por el otro puede resumirse en este aforismo:

**Los operadores corresponden a la práctica;
los predicados corresponden a la teoría.**

Para aclarar pues lo que es un sistema matemático por medio de fórmulas de un lenguaje formal, desde el punto de vista sintáctico tendríamos que tener al menos símbolos de operadores activos, símbolos de predicados o relatores, variables y constantes. Pero desde el punto de vista semántico, si queremos tener interpretaciones de esas fórmulas en el sistema que estudiamos, necesitamos uno o varios conjuntos a cuyos elementos se refieran las variables y las constantes, y por medio de sustituciones y cuantificaciones podemos lograr que no quede ninguna variable libre en las fórmulas de la teoría respectiva. Así podemos aspirar a tener candidatos a axiomas y teoremas de la teoría interpretada.

Una primera propuesta podría pues ser la presentación simbólica de un sistema matemático a través de cuatro tipos de símbolos:

- Símbolos para su conjunto o conjuntos subyacentes.
- Símbolos para sus operadores u operaciones unarias, binarias, etc.
- Símbolos para sus predicados o relaciones unarias, binarias, etc., y
- Símbolos para las constantes que tengan nombre propio en el sistema respectivo.

Sin embargo, en una primera simplificación —que representa ya un alto grado de abstracción pero que es coherente con la primacía de los aspectos activos y prácticos en el estudio de los sistemas— propongo considerar las constantes como operadores que seleccionan el elemento designado por el nombre propio respectivo; así podemos incorporar las constantes dentro de los operadores activos, y llamarlas “operadores ceroarios”, pues escogen el elemento respectivo sin necesidad de ser aplicados a un argumento específico. Así podemos llegar a una primera simplificación de la presentación de los sistemas matemáticos.

- Presentar su conjunto o conjuntos subyacentes.
- Presentar sus operadores u operaciones.
- Presentar sus predicados o relaciones.

Pero por supuesto que tampoco habría problema en presentar al final las constantes después

de las relaciones, como se hace ordinariamente. Por ejemplo, el sistema de los números naturales con las “cuatro operaciones” y las relaciones de orden se suele presentar así:

$$(\mathbb{N}, +, -, \times, \div, \leq, <, \geq, >, 0, 1)$$

Para no separar las constantes, éstas se pueden poner simplemente al lado de los cuatro operadores binarios que ya tenemos. Para tener operadores binarios, unarios y ceroarios, agreguemos un conocido operador unario o de un solo puesto: “el siguiente de”, introducido por Peano, que notamos ‘s’ o ‘s()’; coloquemos en seguida los dos operadores ceroarios que notamos ‘0’, ‘1’ y que seleccionan esos números. Tendríamos así:

$$(\mathbb{N}, +, -, \times, \div, s, 0, 1, \leq, <, \geq, >).$$

Agrupando más claramente las operaciones y relaciones tendríamos:

$$(\mathbb{N}, \{+, -, \times, \div, s, 0, 1\}, \{\leq, <, \geq, >\}).$$

Pero no sólo queremos presentar simbólicamente el sistema. Tenemos ante todo que pensar en lo que esos símbolos significan. Propongo pues en seguida lo que podría ser un sistema desde el punto de vista conceptual.

Pero antes hay que hablar acerca de ciertas construcciones primitivas, que hemos estado utilizando sin pensar explícitamente acerca de ellas: las palabras, las parejas y ternas ordenadas, etc.

Las construcciones básicas

Al emitir sonidos articulados o escribir palabras de nuestro lenguaje natural, estamos efectuando una construcción serial, una sarta o tira de sonidos, en la que “ab” y “ba” son esencialmente diferentes. Al construir un artefacto o pintar un grafismo complejo, coordinamos y subordinamos unos objetos a otros, o unos trazos a otros. A estos arreglos ordenados los podemos llamar “sartas” si son lineales, o “árboles” si son ramificados, o podemos llamarlos “árboles” a todos y considerar las sartas como un tipo especial de árbol muy simplificado.

Es difícil precisar en qué consiste la sarta más elemental: una pareja en la que importa mucho el orden de los componentes (“pareja ordenada”), que escribamos ‘ab’, ‘(a, b)’, ‘< a, b >’ o ‘[a, b]’, y en qué consiste una pareja en la que no importa el orden (“pareja desordenada”), que escribamos ‘{a, b}’, y que vamos a considerar igual a ‘{b, a}’. Es posible pensar que la pareja ordenada es anterior y más primitiva que la desordenada, por el hecho de la sucesión temporal. Pero también es posible considerar la desordenada como más primitiva, y tratar de reconstruir la pareja ordenada a partir de parejas desordenadas. Wiener y Kuratovsky propusieron una manera de hacerlo:

$$(a, b) = \{\{a, a\}, \{a, b\}\} = \{\{a\}, \{a, b\}\}.$$

O puede también considerarse como más primitiva la pareja ordenada, y considerar la desordenada como producto del olvido activo del orden. Esa es mi propuesta. Podríamos caracterizarla con un aforismo que recuerda cierto tipo de cosmogonías:

En el principio era el orden.
Luego vino el caos.

Parecería que también pudiéramos declarar que la pareja ordenada, (a, b) es equivalente para algunos propósitos con la pareja ordenada (b, a) , y que así podríamos llamar $\{a, b\}$ a la clase de equivalencia a la que sólo pertenecen (a, b) y (b, a) . Pero para ello tendríamos que saber que esa clase de equivalencia es una pareja desordenada $\{(a, b), (b, a)\}$.

Las parejas ordenadas pueden extenderse a ternas o triplas ordenadas (a, b, c) por medio de una pareja ordenada, uno de cuyos elementos es ya una pareja ordenada:

$$(a, b, c) = ((a, b), c).$$

Pero también se podría haber definido la terna o tripla ordenada como $(a), (b, c))$, o simplemente postular la terna o tripla ordenada (a, b, c) como una construcción básica inicial. Así podrían postularse cuaternas o cuádruplas ordenadas, quinas o quíntuplas ordenadas, y en general n -plas o n -uplas ordenadas como construcciones básicas: las sucesiones finitas elementales.

De cualquier manera, las construcciones primitivas como sartas, tiras o listas lineales, o los árboles, arreglos y colecciones, no pueden reducirse a sistemas matemáticos más primitivos, pues los sistemas matemáticos están compuestos por ellas. Ya se sabe que al final de una serie de definiciones es necesario llegar a términos, operaciones y relaciones no definidos, que en matemáticas pueden estar limitados únicamente por sus propiedades explícitamente postuladas. Pero los objetos iniciales también pueden ser artefactos producidos física o mentalmente, y sobre esas construcciones básicas puede también hacerse el montaje de muchos sistemas matemáticos.

Por eso cuando presentamos anteriormente el sistema de los números naturales con las cuatro operaciones y las relaciones de orden usuales, escribimos con toda naturalidad:

$$(\mathbb{N}, +, -, \times, \div, \leq, <, \geq, >, 0, 1).$$

Pero no nos dábamos cuenta de que estábamos formulando una 11-pla ordenada.

Algo parecido sucedió al agrupar los operadores binarios, el unario y los ceroarios en un sólo

conjunto de operadores, y las cuatro relaciones de orden usuales en otro. Entonces escribimos:

$$(\mathbb{N}, \{+, -, \times, \div, s, 0, 1\}, \{\leq, <, \geq, >\}).$$

No nos dábamos cuenta de que estábamos proponiendo una tripla ordenada de conjuntos, ni de que el segundo conjunto era una séptupla desordenada, y el tercero una cuádrupla desordenada. Lo que sucede es que no podemos seguir retrocediendo a construcciones más elementales, pues estas son las construcciones básicas. No podemos ir más atrás.

Utilizaré este ejemplo del sistema de los números naturales usuales para generalizar la descripción de lo que propongo que entendamos por sistema, y luego intentaré precisar en qué sentido se podría interpretar la palabra estructura.

Pasemos ahora de los símbolos con los que he presentado este sistema usual de los naturales al sistema conceptual en el que espero que tanto el autor como el lector estemos pensando, y de allí a la descripción general de lo que es un sistema matemático.

No hay otra alternativa que utilizar un lenguaje que por más preciso que intente ser, no puede dejar de ser relativamente informal.

Supongamos que sabemos qué son (porque sabemos cómo se hacen) las construcciones básicas de parejas, ternas, . . . , n -plas o n -uplas ordenadas (sucesiones finitas) y las desordenadas (colecciones finitas). En la siguiente sección intentaré precisar qué es lo que propongo que concibamos como un sistema matemático general.

Los sistemas matemáticos

Un sistema matemático es un constructo mental complejo que tiene al menos tres aspectos internos:

- Uno "material", el sustrato del sistema.
- Uno "activo" o "práctico", la dinámica o actividad interna del sistema.
- Uno "teórico", la estática o estructura interna del sistema.

(Recuérdese que podríamos haber presentado cuatro aspectos diferentes, si hubiéramos separado las operaciones de selección u operadores ceroarios que seleccionan las constantes que tienen nombre propio en el sistema, y que se suelen presentar después de las operaciones y relaciones. Pero al considerar nosotros las constantes como operadores activos, los vamos a incluir dentro del segundo aspecto, la dinámica del sistema).

Estos tres aspectos se pueden representar a través de una terna o tripla ordenada de coleccio-

nes: una de clases o conjuntos, Conj, otra de operaciones o transformaciones, Transf, y otra de correspondencia o relaciones, Rel.

No es que un sistema S sea propiamente una terna ordenada de colecciones, pues ya hemos visto que las parejas, ternas, . . . , n -plas ordenadas son construcciones matemáticas básicas y los sistemas son constructos mentales complejos. Pero por conveniencia podemos representar el sistema como una terna ordenada:

$$\text{Sist} = (\text{Conj}, \text{Transf}, \text{Rel}),$$

o más abreviadamente,

$$S = (C, T, R).$$

Estudiemos cada uno de estos tres aspectos:

a. El sustrato

Conj es de suyo una colección de conjuntos, o tal vez clases propias: los universos o conjuntos subyacentes al sistema. Esta colección no puede ser vacía: debe haber al menos un conjunto en ella (así ese conjunto sea el conjunto vacío $\emptyset$). Decimos intercambiamente que Conj, o que el conjunto o conjuntos de Conj forman el sustrato del sistema.

En caso de que haya un sólo universo o conjunto subyacente U , o sea: $\text{Conj} = \{U\}$, se puede decir de una vez que Conj es ese único conjunto subyacente U , para evitar escribir $\{U\}$, y decimos que el sistema es $(U, \text{Transf}, \text{Rel})^1$.

b. La dinámica

Transf es una colección de transformaciones, operaciones o funciones (transformadores, operadores o funtores). Esta colección sí puede ser vacía: ese es el caso de los sistemas puramente relacionales. Ej.: el sistema ordenado $(\{\mathbb{Z}\}, \emptyset, \{\leq\})$, o simplemente $(\mathbb{Z}, \leq)$. (Recuérdese de nuevo que dentro de la dinámica, o sea de la colección de transformaciones, operaciones o funciones, estamos incluyendo las operaciones ceroarias que seleccionan las constantes que tienen nombre propio en el sistema. En este caso serían 0, 1, que seleccionarían el cero y el uno; pero las omitimos de propósito para que el conjunto Transf quede vacío).

c. La estática

Rel es una colección de relaciones o predicados unarios, binarios, . . . , n -arios, que puede estar vacía si Transf no lo está. El caso $\text{Transf} \neq \emptyset$, $\text{Rel} = \emptyset$ es el caso de los sistemas puramente transformacionales u operacionales, llamados también sistemas algebraicos.

Ej.: el anillo usual de los enteros sin el orden, se presenta así: $(\mathbb{Z}, +, \times)$, que podemos escribir $(\{\mathbb{Z}\}, \{+, \times\})$.

Agregando el cero y el uno, como en el ejemplo de los naturales, podíamos haber escrito:

$$(\{\mathbb{Z}\}, \{+, \times, 0, 1\}), \text{ o simplemente } (\mathbb{Z}, +, \times, 0, 1).$$

Pero aún en estos casos en que en la presentación del sistema se tiene $\text{Rel} = \emptyset$, cada operación n -aria de Transf genera una relación $(n+1)$ -aria de Rel, que no se escribe explícitamente, pero que está allí para generar la estructura interna (o "estática") del sistema. Por ejemplo, los operadores ceroarios generan predicados unarios (unívocos en el sentido que se verifican sólo cuando se aplican a la constante respectiva); los operadores unarios generan relaciones binarias (unívocas o funcionales en el sentido usual); las operaciones binarias generan relaciones ternarias (unívocas o funcionales con respecto a la tercera componente), etc.

Por lo tanto, podemos decir que cualquier sistema que no sea un mero conjunto siempre tiene estructura interna o "estática": tiene una red de relaciones que lo arman como este tipo de sistema y no otro.

Si se recuerda que consideramos ya un primer grado de abstracción el incluir las constantes como operaciones ceroarias, un segundo grado de abstracción sería considerar las operaciones n -arias como relaciones $(n+1)$ -arias, y considerar sólo sistemas puramente relacionales. Esta manera de presentar los sistemas tiene importantes usos en la teoría de modelos, pues simplifica el vocabulario de símbolos y no exige verificar en cada instancia si se trata de un símbolo de operación o de un símbolo relacional. Pero oculta la distinción fundamental entre los operadores activos que corresponden a la práctica (pues a partir de objetos producen objetos), y las relaciones que corresponden a la teoría (pues a partir de objetos producen enunciados acerca de ellos). Por eso no elegí pasar a este segundo grado de abstracción en la presentación de los sistemas, sino conservar el nivel anterior en donde se distinguen los aspectos teóricos de los prácticos. De todas maneras, esta presentación ya hace suficientes exigencias de abstracción al considerar las constantes como operadores ceroarios.

Pero aunque hubiéramos elegido pasar al segundo grado de abstracción y considerar sólo los conjuntos subyacentes y los predicados, habría un tercer grado de abstracción. Este consiste en considerar que también los conjuntos referenciales del sistema que constituyen el sustrato del mismo, o sea los que se encuentran en Conj, son simplemente predicados unarios que se agregarían a la estática o estructura interna del sistema. Así sólo quedaría activa la colección Rel, en la cual se encontrarían todos los elementos de las demás colecciones. No habría pues en este sentido sino sistemas puramente relacionales.

En cierto sentido este es el nivel al que se presentan las especies de estructura en Bourbaki: se reúnen todos los conjuntos subyacentes, ciertos productos cartesianos y ciertos conjuntos de partes en un gran conjunto, y se selecciona de él un subconjunto que corresponde al grafo combinado de todas las operaciones y relaciones².

Pero esta presentación puramente relacional de los sistemas también puede considerarse como una presentación puramente operacional, si se considera que también las relaciones pueden pensarse como operadores que van de cierto conjunto o producto cartesiano de conjuntos a un clasificador, Ω .

Desde este punto de vista se habla más bien de "operadores relacionales" que de relaciones. Esto es muy conveniente en teoría de la computación, pues en los computadores y calculadoras las relaciones deben ser programadas como operaciones que retornan un valor "Verdadero" (que puede ser también "V", "T", "1"), o "Falso" ("F", "0", "I"), llamados "valores booleanos", que forman un tipo especial de datos ("Boolean data type"). En los casos usuales, el clasificador tiene sólo dos elementos, Verdadero y Falso: $\Omega = \{V, F\}$, o también $\Omega = \{T, F\}$, $\Omega = \{0, 1\}$. Pero en teoría de categorías se suelen considerar clasificadores más finos³.

El caso de que el sistema sea un mero conjunto es un caso límite de un sistema con $\text{Conj} = \{U\}$ o simplemente $\text{Conj} = U$; $\text{Transf} = \emptyset$, $\text{Rel} = \emptyset$.

Por eso un mero conjunto sería un "sistema impropio", sin dinámica y sin estructura internas, o sea que no lo consideramos propiamente como un sistema, sino como el "cadáver de algún sistema"⁴.

Pero nótese que aun el sólo conjunto dado U sería inmanejable a menos que se considere como ubicado dentro de un sistema. El sistema más "natural" en el que se puede manejar un conjunto tiene al menos dos universos subyacentes: el mismo conjunto U , y el de sus partes $P(U)$. La colección de transformaciones Transf tiene al menos la operación binaria c sobre U que forma parejas ordenadas, la operación binaria d sobre U que forma parejas desordenadas, la unaria s sobre U que forma singletons o conjuntos unitarios, y la ceroaria en $P(U)$ que selecciona el conjunto vacío $\emptyset$. La colección de relaciones Rel tiene al menos la relación de pertenencia de $P(U)$ a U y su inversa, y las cuatro relaciones de contención en $P(U)$:

$$\{(\{U, P(U)\}, \{c, d, s, \emptyset\}), \\ \{\epsilon, \exists, \subseteq, \subset, \supseteq, \supset\}\}.$$

Estructura y dinámica externas

Hasta ahora hemos hablado sólo de los tres aspectos internos de los sistemas: su substrato, sus transformaciones internas y sus relaciones internas. Pero también podemos analizar los aspectos internos de un sistema.

La red de relaciones que hemos llamado "la estructura interna del sistema", conformada por las relaciones que pueden estar explícitas en Rel o implícitas en las operaciones de Transf , cumple una serie de propiedades; dicho de otra manera, el sistema tiene también relaciones externas, o sea no representables como n -plas ordenadas de elementos del conjunto subyacente. Esas propiedades conforman la estructura externa, formulada en la teoría del sistema.

La justificación de esta denominación es que los axiomas y teoremas de una teoría se refieren propiamente a predicados de orden superior que cumplen las operaciones (por ejemplo que una operación es conmutativa, otra asociativa, etc.) o que cumplen las relaciones (que una es simétrica, la otra transitiva, etc.), y a relaciones entre las operaciones, las relaciones, y las constantes (por ejemplo que una operación es distributiva con respecto a otra, que una constante es el módulo de una operación, que una operación es monótona con respecto a una relación de orden, etc.). Son pues relaciones de orden superior, y por eso se justifica decir que conforman la estructura externa del sistema.

En esas teorías o estructuras externas de los sistemas hay algunas colecciones de propiedades que aparecen muchas veces, y por eso se usa un nombre general que denomina la estructura del sistema, nombre que es muy útil para no tener que repetir toda la lista cada vez. Por ejemplo, se dice que "el sistema G tiene estructura de grupo abeliano" para resumir una serie de propiedades de las operaciones binaria, unaria y ceroaria del sistema $(G, +, -, \cdot, 0)$, que se suele escribir simplemente $(G, +)$.

Evidentemente, el sistema del que se habla podría satisfacer también muchos otros predicados, o sea tener muchas otras fórmulas verdaderas en la teoría respectiva. Por lo tanto, cuando se habla de que el sistema "tiene estructura de X ", se entiende algo así como: "tiene como mínimo estructura de X ", o "tiene al menos estructura de X ". Cumple pues todos los teoremas de la teoría de aquellos sistemas que tienen la estructura de X , pero satisface probablemente otras muchas fórmulas más (a menos que se trate del llamado "sistema libre" de la categoría respectiva que por definición no cumple ninguna otra relación).

La teoría de modelos juega con la dualidad entre los modelos de la teoría dada T , que son los sistemas que como mínimo satisfacen todas las fórmulas de T , y la teoría de un sistema dado S , que son todas las fórmulas del lenguaje del tipo respectivo satisfechas por S .

También puede hablarse de operaciones o transformaciones externas, que conforman la dinámica externa del sistema, como serían los morfismos, homomorfismos, isomorfismos, etc.), las dualizaciones, la formación de productos y coproductos, la exponenciación, etc.

El aspecto externo que correspondería al sustrato, que podríamos llamar “superestrato” o “ambiente externo”, o simplemente “ambiente” del sistema serían los objetos de una categoría de sistemas que tengan tipos compatibles⁵.

Pasemos ahora a dar ejemplos de cada una de estas variantes de los sistemas generales. Comencemos por aquellos en los que $\text{Transf} = \emptyset$, o sea los puramente relacionales.

Sistemas puramente relacionales

(C, O, R) o (C, R) : sistemas con una sola relación R , generalmente binaria. Según las propiedades que cumpla R , hay:

- sistemas estrictamente ordenados
- sistemas parcialmente ordenados (POSets) (¿“Parcialmente” se opone a “estrictamente”, o a “totalmente” ordenados?)
- sistemas bien ordenados
- retículos
- sistemas preordenados
- sistemas equivalenciales, ej: rectas con el paralelismo
- otros sistemas relacionales, ej.: rectas con la perpendicularidad.

En el caso de estos sistemas con una sola relación, se dice que (C, R) tiene estructura de POSet, etc.

Hay también sistemas puramente relacionales con dos (o más relaciones, generalmente binarias, a veces binarias y unarias): $(C, R, S \dots)$.

Pueden enunciarse propiedades de R , de S , etc. y propiedades de una relación con otra, que enuncian la compatibilidad de una con otra.

Sistemas puramente operacionales o algebraicos

$(\{C\}, \{*\}, \emptyset)$ o $(C, *)$: sistemas con una sola operación, que puede ser unaria, como en el caso de los naturales de Peano con el sucesor, $(N, s(\))$, pero que generalmente es binaria. En ese caso se suelen llamar “sistemas binarios”. Según las propiedades que cumpla la operación binaria que notamos “*” hay:

- grupoides (sólo se exige la clausurativa unívoca)
- cuasigrupos (con solución única a ecuaciones “lineales”)

- semigrupos (grupoides totales en los que se exige la asociativa)
- monoides (semigrupos en los que se exige la modulativa)
- grupos (monoides en los que se exige la invertiva)
- lazos (que informalmente se llamarían “grupos no asociativos”), etc.

En cada caso, el sistema binario puede ser abeliano o no.

Según el caso, se dice que el sistema $(C, *)$ tiene estructura de grupo, de grupo abeliano, etc.

Pero en realidad el monoide requiere un operador ceroario, e , que selecciona el módulo o elemento neutro. El grupo y el lazo requieren además un operador unario, $(\)^{-1}$, que saca el inverso: $(G, *, (\)^{-1}, e)$.

$(\{C\}, \{*, \&\}, \emptyset)$, o $(C, *, \&)$: sistemas con dos operaciones binarias. Según las propiedades que cumplan las operaciones $*$, $\&$ hay:

- semianillos (como los naturales con la adición y multiplicación)
- anillos (como los enteros con la adición y multiplicación). En realidad, los anillos requieren un operador ceroario, 0 , que selecciona el módulo de la primera operación $*$, y un operador unario, $-(\)$, que saca el inverso aditivo u opuesto respecto a la primera operación $*$.
- anillos unitarios (requieren además otro operador ceroario, 1 , que selecciona el módulo de la segunda operación $\&$)
- cuerpos o anillos de división (requieren otro operador unario, $(\)^{-1}$, que saca el inverso multiplicativo o recíproco respecto a la segunda operación $\&$)
- campos o cuerpos conmutativos.

$(\{C\}, \{*, \&, '\}, \emptyset)$, o $(C, *, \&, ')$: sistemas con tres operaciones, dos binarias y una unaria. Según las propiedades de estas operaciones hay:

- álgebras de Boole (con “copa”, “capa” y “complemento”)
- álgebras de Heyting (con “seudocomplemento”).

$(\{C\}, \{+\} \cup A, \emptyset)$, o $(C, +, A)$: sistemas con una operación binaria y un conjunto de operadores unarios. Según las propiedades, hay:

- módulos sobre A o A -módulos

- espacios vectoriales sobre A o A -espacios vectoriales.

(Más adelante veremos otra presentación posible de estos sistemas).

$(\{C\}, \{+, *\} \cup A, \emptyset)$, o $(C, +, *, A)$: sistemas con dos operaciones binarias y un conjunto de operadores unarios. Según las propiedades hay:

- álgebras (lineales) sobre A , o A -álgebras.

(Más adelante veremos otra presentación posible de estos sistemas).

Sistemas con operaciones y relaciones

$(\{C\}, \{*\}, \leq)$, o $(C, *, \leq)$: sistemas con una operación binaria y una relación de orden (o cuatro). Según las propiedades hay:

- semigrupos ordenados
- monoides ordenados
- grupos ordenados, etc.

(Pero la relación no tiene que ser necesariamente de orden. Por ejemplo, los enteros $\mathbb{Z}$ con la multiplicación y la relación “es divisor de”, que notamos ‘|’, no es un semigrupo ordenado).

$(\{C\}, \{*, \&\}, \{\leq\})$, o $(C, *, \&, \leq)$: sistemas con dos operaciones binarias y una relación de orden (o cuatro). Según las propiedades hay:

- anillos ordenados
- cuerpos ordenados
- campos ordenados o cuerpos conmutativos ordenados.

$(\{C\}, \{*, \&, '\}, \{\leq\})$, o $(C, *, \&, ', \leq)$: sistemas con dos operaciones binarias, una unaria y una relación de orden (o cuatro). Según las propiedades hay:

- retículos complementados.

Sistemas con varios conjuntos subyacentes

$(\{V, K\}, \{+, \bullet\}, \emptyset)$, o $(V, K, +, \bullet)$: sistemas con dos conjuntos subyacentes y dos operaciones binarias, una interna y otra externa. Según las propiedades hay:

- espacios vectoriales sobre K , con $+$ como la adición de vectores y $\bullet$ como producto de escalar por vector o “multiplicación externa” de $K \times V$ en V .

$(\{A, K\}, \{+, \bullet, \odot\}, \emptyset)$, o $(A, K, +, \bullet, \odot)$: sistemas con dos conjuntos subyacentes y tres operaciones

binarias, dos internas y otra externa. Según las propiedades hay:

- álgebras (lineales sobre K) con $+$ como adición de $A \times A$ en A , con $*$ como multiplicación de $A \times A$ en A , (distinta del posible producto escalar o producto interno que va de $A \times A$ en K), y con $\bullet$ como “multiplicación externa” de $K \times A$ en A . Tómese por ejemplo para $*$ el producto vectorial o producto cruz en un espacio vectorial real de dimensión 3.

(Nótese que esa multiplicación, aunque se llame “producto externo”, es una ley de composición interna, y que el llamado “producto interno” es una ley de composición externa, con un tipo de externalidad ($A \times A$ en K) diferente del tipo de externalidad de la multiplicación de escalar por vector ($K \times A$ en A). Hay que desconfiar de la terminología ...).

$(\{\Sigma, E, S\}, \{t, s, q_0\}, \emptyset)$, o

$(\Sigma, E, S, t, s, q_0)$:

sistemas con tres conjuntos subyacentes, dos operaciones binarias y una unaria. Según las propiedades hay:

- máquinas de estado finito o máquinas de Mealy, en donde Σ es el conjunto de estados; E es el alfabeto de entrada y S el alfabeto de salida; t es la función de transición de $\Sigma \times E$ en Σ y s la función de salida de $\Sigma \times E$ en S ; q_0 es una operación ceroaria que selecciona el estado inicial. Las dos funciones t, s , también pueden remplazarse por una sola función μ de $\Sigma \times E$ en $\Sigma \times S$. Tendríamos entonces la presentación:

$(\{\Sigma, E, S\}, \{\mu, q_0\}, \emptyset)$, o (Σ, E, S, μ, q_0) .

En los autómatas finitos también suele omitirse el alfabeto de salida e introducir una relación unaria o predicado unario $F(\)$ que selecciona los estados finales distinguidos o estados de aceptación:

$(\{\Sigma, E\}, \{t, q_0\}, \{F(\dots)\})$, o

$(\Sigma, E, t, q_0, F(\dots))$.

Sistemas topológicos o espacios topológicos

Hay varias maneras de presentarlos:

$(\{C\}, \emptyset, \text{Top})$, o (C, Top) :

- espacio topológico con Top como conjunto de relaciones unarias $V(\dots)$: V es una vecindad (abierto) de ... , que corresponde a lo que se llama ordinariamente la topología del espacio topológico.

Se puede también introducir como universo adicional el conjunto de partes de C , $P(C)$:

$$(\{C, P(C)\}, \{u, n, '\}, \{\subseteq, A(\dots)\}), \text{ o } \\ (C, P(C), A(\dots)):$$

En esta forma se presenta el espacio topológico con tres operaciones sobre $P(C)$, la relación binaria de inclusión también sobre $P(C)$, y una relación unaria o predicado adicional sobre $P(C)$, $A(\dots)$, que indica que un subconjunto es un abierto (o sea una vecindad abierta) de la respectiva topología sobre el espacio C : para un V de $P(C)$, $A(V)$ significa que V es un abierto (o sea una vecindad abierta).

También puede introducirse un operador j sobre $P(C)$:

$$(\{C, P(C)\}, \{u, n, ', j\}, \emptyset), \text{ o } (C, P(C), j):$$

En esta forma se presenta el espacio topológico con j como operador unario de clausura o cierre en $P(C)$; en este caso j resulta ser un operador idempotente ($jj = j$), y los cerrados del espacio topológico son los conjuntos que permanecen invariantes bajo la acción del operador j ; equivalentemente, los abiertos del espacio topológico son los conjuntos cuyos complementos permanecen invariantes bajo la acción del mismo operador j .

También puede interpretarse j como operador de apertura o de interior; en este caso, los abiertos del espacio topológico son los conjuntos que permanecen invariantes bajo la acción del operador j .

Pueden también introducirse de una vez dos operadores unarios idempotentes: el operador unario de apertura o interior, $()^\circ$, distinto del de clausura o cierre, $()$. Pero uno de los dos es superfluo en el sentido de que cualquiera de los dos puede definirse por medio del otro y el operador de complementación, $()'$:

$$A^\circ = A'^{-}, A^{-} = A'^{\circ}$$

Categorías

También hay varias maneras de presentar una categoría C como sistema. La más usual es con dos universos subyacentes: el de los objetos, $Ob C$, y el de las flechas, $Fl C$, y con una operación binaria asociativa $\circ$ para la composición de flechas.

Para no introducir un conjunto o clase propia de operadores ceroarios que seleccionen la flecha identidad 1_A para cada objeto A de $Ob C$, es más elegante introducir un solo operador unario id : $Ob C \rightarrow Fl C$, que asigna a cada objeto su identidad: $id(A) = 1_A$.

$$(\{Ob C, Fl C\}, \{\circ, id\}, \emptyset) \text{ o } (Ob C, Fl C, \circ, id)$$

Aunque un poco artificialmente, también es posible presentar la misma categoría con un solo universo subyacente, el de las flechas, identificando cada objeto con su flecha identidad. Así basta sólo el universo $Fl C$, la composición, y dos operadores unarios: el de fuente, f , y el de meta, m , para seleccionar la salida y la llegada de cada flecha (estos operadores resultan idempotentes: $ff = f$, $mm = m$):

$$(\{Fl C\}, \{\circ, f, m\}, \emptyset) \text{ o } (Fl C, \circ, f, m).$$

Así una categoría sería un sistema algebraico muy sencillo de tipo operatorio $\langle 2, 1, 1 \rangle$. Si la categoría tiene un objeto final o uno inicial, o ambos, se agregarían uno o dos operadores ceroarios para ellos: $0, 1$. (Es posible que ambos operadores ceroarios seleccionen el mismo objeto, como en la categoría de grupos, Gr).

Así como tienen dinámica y estructura internas, las categorías también tienen dinámica y estructura externas como las tiene todo sistema. En este caso en la dinámica externa podría haber operaciones unarias como los funtores, o binarias como formar categorías producto, etc., con la respectiva estructura externa.

Las categorías tienen la peculiaridad de que si se trata de formar un sistema mayor con ellas como objetos, resulta de nuevo una categoría, en la que las flechas son los funtores, y la estructura externa se vuelve interna en la nueva categoría Cat . Parece pues que se ha llegado a un tope "natural" en el estudio de los sistemas matemáticos.

Por eso es equivocado decir que los sistemas representan un punto de vista "analítico" y las categorías un punto de vista "sintético", pues las categorías no son sino un tipo, y relativamente sencillo, de sistemas.

Lo que sí es apropiado decir es que la teoría general de sistemas es precisamente la que permite precisar en qué consiste esa intuición de que hay un "punto de vista analítico" (inclusive para mirar las categorías): es desglosar los universos subyacentes, los operadores y los relatores, o sea el aspecto interno de los sistemas respectivos; el "punto de vista sintético" es el estudio del aspecto externo del sistema como subsistema de otro macrosistema mayor.

Por ejemplo se puede tomar un segmento como un sistema, y mirar su aspecto interno: un universo de puntos, unas relaciones de orden, unos operadores de deformación continua que conserven fijos los extremos y preserven el orden, etc. Pero se puede también mirar su aspecto externo, considerando los segmentos como los objetos del universo de un nuevo sistema, con operaciones como translaciones, rotaciones, homotecias, etc., con relaciones como incidencia, colinealidad, paralelismo, perpendicularidad, contigüidad, translação, etc. En este sistema no se "ven" los puntos de los cuales dicen.

los profesores de geometría que están compuestos los segmentos.

Todo sistema tiene esos dos aspectos: interno y externo, y es correcto decir que se ha descuidado el aspecto externo para mirar sólo el interno. Esto tiene que ver con lo que dicen Piaget y García respecto a la historia de las matemáticas: parece que primero se estudia cada sistema por dentro (intra-); luego se comparan parejas de sistemas y se estudian las relaciones entre ellos (inter-), y sólo con la familiaridad con estos dos puntos de vista se llega a uno nuevo que trasciende los dos primeros (trans-): al estudio del macrosistema cuyos objetos son los sistemas anteriores con sus transformaciones y relaciones (ver: Piaget, J., & García, R. 1982).

Estas consideraciones muestran también las limitaciones que tiene la presentación bourbakista de "la Matemática formal", en la que se consideran como "estructuras madres" las algebraicas, las de orden y las topológicas. Como se ha visto arriba, todas esas "estructuras" son más bien sistemas de distinto tipo, y hay muchos otros sistemas que no caben en esas tres familias matriarcales.

La teoría general de sistemas permite pues delinear el panorama completo de las matemáticas actuales.

Notas

1. Si $\text{Conj} = \{U\}$, el universo U puede ser vacío en casos límites, como en el caso patológico del sistema vacío con la única relación R que va del vacío al vacío. Considérese el grafo vacío, el único subconjunto de $\emptyset \times \emptyset$, y compruébese que la relación R definida por ese grafo cumple todas las propiedades de definición total, sobreyectividad, funcionalidad e injectividad.

$(\{\emptyset\}, \emptyset, \{R\})$ o $(\emptyset, R)$, con $R: \emptyset \rightarrow \emptyset$.

2. Pero no basta la operación que envía el conjunto complejo compuesto por el producto cartesiano del conjunto de salida y el de llegada de la relación respectiva al clasificador Ω , ni basta tomar conjuntos de partes y seleccionar una flecha hacia el clasificador Ω . Se necesita la teoría de categorías para especificar con cuidado que no se trata simplemente de una flecha del conjunto complejo de productos cartesianos y partes hacia el clasificador Ω , sino que se trata de seleccionar un subobjeto de ese resultado de efectuar operaciones externas sobre los conjuntos subyacentes.
3. Hay al menos otras cuatro maneras de considerar las relaciones como operaciones, dos covariantes y dos contravariantes:
 - a. Considerando la relación como una operación covariante de las partes del conjunto subyacente de salida a las partes del de llegada. Dado un subconjunto del conjunto de salida, la operación inducida por la relación produce el conjunto de imágenes de los elementos de ese subconjunto.
 - b. Como una operación contravariante con esa misma salida y llegada. Dado un subconjunto del conjunto de llegada, la operación inducida produce el conjunto de preimágenes de sus elementos.
 - c. Considerando la relación como una operación covariante del conjunto subyacente de salida hacia el con-

junto de partes del conjunto de llegada. Dado un elemento del conjunto de salida, la operación inducida produce el subconjunto de sus imágenes.

- d. Como una operación contravariante del conjunto de llegada hacia el conjunto de las partes del conjunto de salida. Dado un elemento del conjunto de llegada, la operación inducida produce el subconjunto de sus preimágenes.

Las dos últimas se pueden considerar como variantes de las dos primeras, cuando se toman sólo conjuntos unitarios como argumentos de las operaciones inducidas. Basta entonces identificar el conjunto unitario con su único elemento para definir las operaciones respectivas sobre el conjunto de salida o el de llegada.

Cualquiera de estas operaciones inducidas requiere agregar a Conj el conjunto de partes respectivo si no estaba ya en esa colección. Igualmente, la redefinición de las relaciones como operadores relacionales sobre el clasificador Ω requiere agregar este conjunto Ω a los conjuntos subyacentes respectivos si no estaba ya en esa colección.

4. En teoría de categorías existe un "functor de olvido" o "functor olvidadizo" que borra la dinámica y la estática de un sistema, y deja sólo el conjunto subyacente como cadáver del sistema original. Construirle a ese functor de olvido un adjunto que regrese a la categoría original es un problema importante.
5. Habría pues tres clases de tipo:
 - el tipo material o subyacente, que es una sucesión que indica la cardinalidad de los conjuntos o clases de Conj ;
 - El tipo operatorio o algebraico, que es una sucesión que indica la ariedad de las operaciones de Transf ;
 - el tipo relacional o estructural, que es una sucesión que indica la ariedad de las relaciones de Rel .

Estrictamente hablando, para que el tipo como sucesión de cardinales pueda hacerse coincidir con la lista de conjuntos subyacentes, la lista de transformaciones y la lista de relaciones de un sistema dado, sería necesario que esas tres listas también fueran ordenadas, y no meros conjuntos en los que no importa el orden.

Esto haría cambiar la descripción general de un sistema de una tripla de conjuntos" a "una tripla de n -plas ordenadas". Pero pueden dejarse esos tres conjuntos como están, y definir el tipo respectivo no como una sucesión, sino como una función del conjunto respectivo al de los cardinales.

Bibliografía

- Arboleda, L.C. 1980. Contributions à l'étude des premières recherches topologiques, d'après les correspondances et les publications de Maurice Fréchet: 1904-1928. Thèse. École des Hautes Études en Sciences Sociales, Paris.
- . 1982. Consideraciones metodológicas sobre el aporte de M. Fréchet a la topología general. En: Actes du 6e. Congrès du G. M. E. L. Gauthier Villars, Paris.
- Bastide, R. (éd.). 1972. Sens et usages du terme structure dans les sciences humaines et sociales (2e. éd.). Mouton, The Hague-Paris.
- Boudon, R. 1972. Para qué sirve la noción de estructura. Aguilar, Madrid.
- Bourbaki, N. 1950. The architecture of mathematics. American Mathematical Monthly, 57: 221-232.

- . 1954-1956. *Éléments de Mathématique. Livre I: Théorie des Ensembles*, Chapitres 1-3. Hermann, Paris.
- . 1957. *Éléments de Mathématique. Livre I: Théorie des Ensembles*, Chapitre 4. Structures. Hermann, Paris.
- . 1960. *Éléments d'histoire des mathématiques*. Hermann, Paris.
- . 1968. *Elements of mathematics: Theory of sets*. Hermann/Addison-Wesley, Paris / Reading, MA.
- Dyck, W. van. 1882. *Gruppentheoretische Studien*. Math. Ann., 20: 1-44.
- Dieudonné, J. 1982. *A panorama of pure mathematics*. Academic Press, New York.
- Federici, C. 1957. *Elementos de lógica y metodología*. Imprenta Universidad Nacional de Colombia, Medellín.
- Ministerio de Educación Nacional. 1983. *Marcos Generales de los Programas Curriculares*. MEN-DGC, Bogotá, D.E.
- Netto, E. 1882. *Die Substitutionentheorie und ihre Anwendung auf die Algebra*. Leipzig.
- Piaget, J. 1971. *El estructuralismo* (3a. ed.). Proteo, Buenos Aires.
- Piaget, J. & García, R. 1982. *Psicogénesis e historia de la ciencia*. Siglo XXI, México, etc.
- Vasco, C.E. 1980. *El concepto de sistema como clave del currículo de matemática*. Notas de Matemática, n. 10: 1-14.
- Waerden, B.L. van der. 1985. *A history of algebra: From al-Khwarizmi to Emmy Noether*. Springer-Verlag, Berlin, etc.
- Weber, H. 1882. *Beweis des Satzes, dass jede eigentlich primitive quadratische Form unendlich viele Primzahlen darstellen*. Math. Ann., 20: 301-329.
- Wüßing, H. 1984. *The genesis of the abstract group concept*. Cambridge, MA: MIT Press, 1984. (Original alemán: V. E. B. D. V.W.) Berlin, 1969.