SOBRE LA DETERMINACION DE LA PERTENENCIA DE ESTRELLAS A CUMULOS ABIERTOS A PARTIR DE MOVIMIENTOS PROPIOS*

por

Eduardo Brieva Bustillo* y Antonio Uribe Botero**

Resumen

Brieva, E. & A. Uribe: Sobre la determinación de la pertenencia de estrellas a cúmulos abiertos a partir de movimientos propios. Rev. Acad. Colomb. Cienc. 17 (66): 461-466, 1990. ISSN 0370-3908.

Se describe un procedimiento por el cual se pueden asignar probabilidades de pertenencia a estrellas de la región de un cúmulo galáctico, resolviendo un sistema no lineal de nueve ecuaciones obtenido por el método de máxima verosimilitud, sin eliminar el coeficiente de correlación del modelo bivariado mixto propuesto por **Vasilevskis** et al. (1958). Este enfoque elimina la necesidad de hacer suposiciones subjetivas que justifican de ordinario la rotación de ejes usual. El método se aplica a los cúmulos NGC 2420, NGC 6823 y NGC 654.

Summary

A procedure is described whereby proper motion membership probabilities can be assigned to stars in the region of a galactic cluster by solving a nine non-linear equations system obtained by the maximum likelihood method, without eliminating the correlation coefficient from the mixed bivariate normal model proposed by **Vasilevskis** et al. (1958). This approach removes the subjective and a priori assumption that justify the usual axis rotation. The method is applied to the clusters NGC 2420, NGC 6823 and NGC 654.

1. Introducción

Es bien conocido que en la determinación de pertenencia de estrellas a cúmulos abiertos, basada en los movimientos propios, se adscriben al cúmulo ciertas estrellas de la región con un criterio probabilístico. Para ello se introduce un modelo de función de densidad bivariada mixta ("contagious") de los movimientos propios μ_x, μ_y, dada por:

$$\phi(\mu_x,\mu_y) = \alpha\ \phi_1(\mu_x,\mu_y) + (1-\alpha)\ \phi_2(\mu_x,\mu_y), \quad (1)$$

siendo α y $1-\alpha$ las ponderaciones de las componentes. Este modelo ha sido ampliamente utilizado y está formado por la superposición de 2 distribuciones, ϕ_1 y ϕ_2, que se suponen normales bivariadas, una elíptica para las estrellas del campo y otra circular para las del cúmulo (Vasilevskis et al. 1958; **Sanders** 1971; **Slovak** 1977).

Sanders (1971) utilizó por primera vez el método de máxima verosimilitud para estimar los pa-

* Observatorio Astronómico Nacional, Facultad de Ciencias Universidad Nacional de Colombia, Apartado Aéreo 2584, Bogotá, Colombia.

** Departamento de Matemáticas y Estadística, Facultad de Ciencias, Universidad Nacional de Colombia. Apartado Aéreo 59171, Bogotá, Colombia.

rámetros de las 2 distribuciones, refiriendo los movimientos propios a un sistema de coordenadas en donde el coeficiente de correlación, ρ, de la distribución elíptica se hace cero. Para ello hay que efectuar una rotación de ejes. En **Trumpler y Weaver** (1953) puede verse que el ángulo de rotación, α , viene dado por

$$cotg\ \alpha = - \frac{\sigma_y^2 - \sigma_{x1}^2}{\rho\ \sigma_x \sigma_y} , \qquad (2)$$

en donde σ_x , σ_y son las desviaciones estándar de la distribución del campo y σ_{x1} es la desviación estándar con respecto al eje rotado x^1 . Se pueden utilizar diferentes procedimientos para calcular un estimador $\hat{\alpha}$ a partir de la muestra, esto es, de los movimientos propios de las estrellas de la región considerada. $\hat{\alpha}$ estimará mejor el α adecuado cuanto mayor sea la superposición de las dos distribuciones (**Slovak** 1977).

Sanders (1971) calcula el ángulo utilizando la técnica descrita por **Vasilevskis** et al. (1965) a partir de todas las estrellas de la muestra. **Zhao** et al. (1981), sin utilizar la hipótesis de superposición, logran separar las estrellas del campo con las cuales calculan un $\hat{\alpha}$ definitivo, usando un proceso de aproximaciones sucesivas que alterna depuración, rotación y solución de las ecuaciones normales. Una aplicación del método de **Sanders**, en donde se utiliza la depuración de Zhao et al, puede verse en **Brieva y Uribe** (1985).

Recientemente **Cabrera y Alfaro** (1985) han diseñado y desarrollado una técnica de detección de "outliers" apoyados en **Hand** (1981). Después de la depuración estiman los parámetros por medio del proceso iterativo de **Wolfe** (1970) en el cual se calculan primero las probabilidades de pertenencia y luego se actualizan los parámetros de la distribución mixta.

Siguiendo lo propuesto por **De Graeve, Elizabeth Green** ha incluido en el modelo los errores individuales de los movimientos propios (**Cudworth** 1984). La distribución espacial ha sido también utilizada para mejorar la determinación de las probabilidades (**De Graeve** 1979, **King** 1983).

En este trabajo presentamos las ecuaciones clásicas de máxima verosimilitud, obtenidas sin rotar y sin necesidad de formular la hipótesis de superposición. Se ha elaborado el programa CLUSTER, que depura los datos según una variante de la técnica de **Zhao** et al. (1982), resuelve las ecuaciones de máxima verosimilitud por un procedimiento numérico y calcula las probabilidades de pertenencia. El método se aplica a los cúmulos NGC 654, NGC 2420 y NGC 6823.

2. Sistema de ecuaciones de máxima verosimilitud

Suponemos que los movimientos propios, μ_{x_i}, μ_{y_i}, se pueden representar, en un sistema de coordenadas μ_x, μ_y, por la distribución bivariada mixta de la forma

$$\phi(\mu_{x_i}, \mu_{y_i}) = \frac{n_c}{2\pi\ \sigma^2}\ exp\{-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\mu_{x_i} - \mu_{xc}}{\sigma}\right)^2 + \left(\frac{\mu_{y_i} - \mu_{yc}}{\sigma}\right)^2 \right] \} +$$

$$+ \frac{(1 - n_c)}{2\pi\ \sigma_x\ \sigma_y \sqrt{1-\rho^2}}\ exp\{ \frac{-1}{2(1-\rho^2)^2} \left[\left(\frac{\mu_{x_i} - \mu_{xf}}{\sigma_x}\right)^2 + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\mu_{y_i} - \mu_{yf}}{\sigma_y}\right)^2 - 2\rho \left(\frac{\mu_{x_i} - \mu_{xf}}{\sigma_x}\right) \cdot \left(\frac{\mu_{y_i} - \mu_{yf}}{\sigma_y}\right) \right] \} . \qquad (3)$$

Esta distribución mixta depende de 9 parámetros,

n_c : porcentaje de estrellas pertenecientes al cúmulo.

(μ_{xc}, μ_{yc}) : coordenadas del centro de la distribución del cúmulo.

σ : desviación estándar de la distribución del cúmulo.

(μ_{xf}, μ_{yf}) : coordenadas del centro de la distribución del campo.

(σ_x, σ_y) : desviaciones estándar de la distribución del campo.

ρ : coeficiente de correlación de la distribución del campo.

Además, $n_f = 1 - n_c$ es el porcentaje de estrellas pertenecientes al campo, N es el número total de estrellas de la región con movimiento propio conocido y μ_{x_i}, μ_{y_i} son los componentes del movimiento propio, por siglos, para la estrella i–ésima.

Usando el método de máxima verosimilitud estimamos los parámetros de la distribución bivariada mixta. La función de verosimilitud viene dada por:

$$L(\mu_{xf}, \mu_{yf}, \sigma_x, \sigma_y, \mu_{xc}, \mu_{yc}, \sigma, \rho, \mu_{x_1}, \mu_{y_1}, \ldots, \mu_{x_N}, \mu_{y_N}) = \prod_{i=1}^{N} \phi(\mu_{x_i}, \mu_{y_i}). \tag{4}$$

Como es usual, se toma el logaritmo natural de L:

$$Log\ L = \sum_{i=1}^{N} \ell og \phi(\mu_{x_i}, \mu_{y_i}) , \tag{5}$$

y se calcula

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_i} [\ell og \prod_{i=1}^{N} \phi (\mu_{x_i}, \mu_{y_i})], \tag{6}$$

en donde θ_i es uno cualquiera de los elementos del vector de parámetros

$$\vec{\theta} = (\mu_{xf}, \mu_{yf}, \sigma_x, \sigma_y, \mu_{xc}, \mu_{yc}, \sigma, \rho, n_c).$$

Igualando a cero cada una de las funciones (6) se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones de verosimilitud, en el cual figura a la izquierda el parámetro asociado con cada ecuación:

$$\mu_{xf} \qquad \sum_{i=1}^{N} F_{A_i} \left[(\mu_{x_i} - \mu_{xf}) - \rho \frac{\sigma_y}{\sigma_x} (\mu_{y_i} - \mu_{yf}) \right] = 0$$

$$\mu_{yf} \qquad \sum_{i=1}^{N} F_{A_i} \left[(\mu_{y_i} - \mu_{yf}) - \rho \frac{\sigma_y}{\sigma_x} (\mu_{x_i} - \mu_{xf}) \right] = 0$$

$$\sigma_x \qquad \sum_{i=1}^{N} F_{A_i} \left[\frac{1}{(1-\rho^2)} \left(\frac{\mu_{x_i} - \mu_{xf}}{\sigma_x}\right)^2 - \frac{\rho}{(1-\rho^2)} \frac{(\mu_{x_i} - \mu_{xf})(\mu_{y_i} - \mu_{yf})}{\sigma_x \sigma_y} - 1 \right] = 0$$

$$\sigma_y \qquad \sum_{i=1}^{N} F_{A_i} \left[\frac{1}{(1-\sigma^2)} \left(\frac{\mu_{y_i} - \mu_{yf}}{\sigma_y}\right)^2 - \frac{\rho}{(1-\rho^2)} \frac{(\mu_{x_i} - \mu_{xf})(\mu_{y_i} - \mu_{yf})}{\sigma_x \sigma_y} - 1 \right] = 0$$

$$\mu_{xc} \qquad \sum_{i=1}^{N} F_{B_i} \left[\mu_{x_i} - \mu_{xc} \right] = 0$$

$$\mu_{yc} \qquad \sum_{i=1}^{N} F_{B_i} \left[\mu_{y_i} - \mu_{yc} \right] = 0$$

$$\sigma \qquad \sum_{i=1}^{N} F_{B_i} \left[\left(\frac{\mu_{x_i} - \mu_{xc}}{\sigma} \right)^2 + \left(\frac{\mu_{y_i} - \mu_{yc}}{\sigma} \right)^2 - 2 \right] = 0$$

$$\rho \qquad \sum_{i=1}^{N} F_{A_i}\left[\rho(1-\rho^2) + (1+\rho^2)\,\frac{(\mu_{x_i}-\mu_{x_f})(\mu_{y_i}-\mu_{y_f})}{\sigma_x\,\sigma_y} - \rho\left\{\left(\frac{\mu_{x_i}-\mu_{x_f}}{\sigma_x}\right)^2 + \left(\frac{\mu_{y_i}-\mu_{y_f}}{\sigma_y}\right)^2\right\}\right] = 0$$

$$n_c \qquad \sum_{i=1}^{N}\left[\frac{F_{B_i}}{\sigma^2} - \frac{F_{A_i}}{(1-\rho^2)^{1/2}\,\sigma_x\sigma_y}\right] = 0 \qquad (7)$$

En las ecuaciones anteriores,

$$F_{A_i} = 2\pi\left[\frac{1-n_c}{\sigma_x\sigma_y}(1-\rho^2)^{-1/2} + \frac{n_c}{\sigma^2}F_i\right]^{-1} \qquad (8)$$

$$F_{B_i} = F_{A_i}\,F_i, \qquad (9)$$

$$F_i = \exp\left[\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{\mu_{x_i}-\mu_{x_f}}{\sigma_x}\right)^2 + \left(\frac{\mu_{y_i}-\mu_{y_f}}{\sigma_y}\right)^2 - \frac{2\rho(\mu_{x_i}-\mu_{x_f})(\mu_{y_i}-\mu_{y_f})}{\sigma_x\,\sigma_y}\right] - \left(\frac{\mu_{x_i}-\mu_{xc}}{\sigma}\right)^2 - \left(\frac{\mu_{y_i}-\mu_{yc}}{\sigma}\right)^2\right\}\right] \qquad (10)$$

Anotemos, de paso, que las ecuaciones de máxima verosimilitud usuales del caso rotado pueden obtenerse de las ecuaciones más generales (7), haciendo $\rho = 0$. Puede observarse, sin embargo, que la ecuación asociada a ρ se reduce a:

$$\sum_{i=1}^{N} F_{A_i}\,\frac{(\mu_{x_i}-\mu_{x_f})(\mu_{y_i}-\mu_{y_f})}{\sigma_x\,\sigma_y} = 0 \qquad (11)$$

lo cual indica que la covarianza ponderada es cero en el caso rotado $(\rho = 0)$.

El vector de parámetros, $\vec{\theta}$, que satisfaga simultáneamente las ecuaciones (7) es solución del sistema y nos da estimadores para los parámetros de la función de distribución mixta.

En la práctica el vector solución se estima por un proceso numérico iterativo, para lo cual se pueden emplear las conocidas subrutinas que resuelven sistemas no lineales ZSYSTM, NSO1A, etc. (Giebert 1982).

Para cada estrella cuyo movimiento propio tenga componentes μ_{x_i}, μ_{y_i}, su probabilidad de pertenencia al cúmulo se calcula mediante la expresión:

$$p_i = \frac{\hat{n}_c\ \hat{\phi}_2}{\hat{n}_c\ \hat{\phi}_2 + (1-\hat{n}_c)\ \hat{\phi}_1}, \qquad (12)$$

en donde el símbolo "ˆ" indica que se trata de valores estimados. Aquellas estrellas con probabilidades calculadas $p_i \geq 0{,}50$ se consideran en principio como pertenecientes al cúmulo.

3. Aplicaciones

Se ha elaborado en FORTRAN el programa CLUSTER que depura los datos según una variante de la técnica de Zhao et al. (1982), resuelve las ecuaciones de máxima verosimilitud mediante la subrutina ZSYSTM facilitada gentilmente por el Dr. Mark Slovak (1985), y calcula las probabilidades de pertenencia.

El programa se aplicó a los cúmulos NGC 2420, NGC 6823 y NGC 654, utilizando un computador Texas Business 300. Los movimientos propios se tomaron de **Van Altena y Jones (1970), Erickson (1971) y Stone (1977).**

El proceso de depuración consta de 2 etapas. En la primera se eliminan aquellas estrellas con $|\mu_{x_i}|$ o $|\mu_{y_i}| \geqslant 1,5$ segundos de arco por siglo, y se resuelve una primera vez el sistema de ecuaciones normales (7). En la segunda se eliminan las estrellas con

$$\hat{\mu}_{x_i} \leqslant \hat{\mu}_{x_f} - 2\,\hat{\sigma}_x \quad \text{o} \quad \mu_{x_i} \geqslant \hat{\mu}_{x_f} + 2\,\hat{\sigma}_x \quad \text{ó}$$

$$\mu_{y_i} \leqslant \mu_{y_f} - 2\,\hat{\sigma}_y \quad \text{o} \quad \mu_{y_i} \geqslant \mu_{y_f} + 2\,\hat{\sigma}_y \;. \tag{13}$$

Con las estrellas que pasan el segundo filtro se resuelve una vez más el sistema (7), tomando como valores iniciales los obtenidos en la primera etapa, y se determinan los estimadores definitivos de los parámetros y las probabilidades de pertenencia.

Se ha probado la estabilidad y unicidad de la solución variando razonablemente los valores iniciales de los parámetros.

Los resultados para los cúmulos mencionados se muestran en la Tabla 1, en donde se incluyen además los valores obtenidos por otros autores. Se indica también el número de estrellas depuradas en cada caso y el número de iteraciones necesario para obtener convergencia, tanto en la primera como en la segunda etapa del proceso.

Las pequeñas discrepancias que pueden observarse eran de esperar ya que en este cálculo no se ha rotado, como es usual, lo cual elimina la necesidad de las consideraciones a priori que tal rotación implica. Además, hay diferencias en la forma de depurar.

El buen acuerdo que la Tabla presenta hace pensar que, en los ejemplos trabajados, la hipótesis de translape se cumple satisfactoriamente y la rotación introduce una simplificación válida.

4. Conclusiones

Sobre la base del modelo de **Vasilevskis** et al. (1958) presentamos las 9 ecuaciones normales de máxima verosimilitud, obtenidas sin eliminar el coeficiente de correlación ρ, las cuales se reducen a las 8 empleadas de ordinario por otros autores que realizan rotación de ejes ($\rho = 0$).

Como no es necesario rotar, se prescinde de suposiciones innecesarias como la hipótesis de superposición de las dos componentes del modelo; por tanto las ecuaciones obtenidas son de validez general y conducen a resultados satisfactorios y analíticamente más precisos, al prescindir de consideraciones subjetivas. Consideramos este trabajo complementario del de **Cabrera y Alfaro** (1985), ya que aquí se estiman los parámetros por el método clásico de máxima verosimilitud y ellos utilizan el método de **Wolfe** que también conduce a una solución máximo verosímil.

5. Agradecimientos

Agradecemos a los Doctores **Kyle Cudworth** y **Mark Slovak** su interés en este trabajo y su gentil colaboración. Este trabajo ha sido financiado por el CINDEC de la Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, a través del proyecto PI 272.

TABLA 1

Parámetros estimados para los cúmulos galácticos NGC 2420, NGC 6823 Y NGC 654
Se incluyen además los resultados obtenidos por otros autores.
El significado de los símbolos se explica en el texto

Cúmulo		Nn_c	Nn_f	μ_{x_f}	μ_{y_f}	μ_{xc}	μ_{yc}	σ_x	σ_y	σ	θ	N	ρ	Estrellas eliminadas paso 1	Estrellas eliminadas paso 2	No. de iteraciones paso 1	No. de iteraciones paso 2
NGC2420	Zhao et al. (1982)	18	67	0.05	−0.17	0.03	0.00	0.47	0.38	0.05	44.9	85	—				
	Sanders (1971)	20	65	0.08	−0.13	0.03	−0.01	0.54	0.43	0.06	44.4	85	—				
	Este estudio	18	67	0.14	0.05	0.02	0.02	0.39	0.46	0.05	—	85	0.07	9	8	7	7
NGC6823	Zhao et al. (1982)	36	56	0.21	0.04	−0.03	0.00	0.54	0.38	0.08	44.7	92	—				
	Sanders (1971)	35	57	−0.03	0.18	0.00	−0.37	0.56	0.56	0.08	−42.6	92	—				
	Este estudio	39	107	0.05	0.07	−0.03	−0.03	0.38	0.44	0.09	—	146	0.06	16	9	4	5
NGC654	Stone (1977)	56	130	0.10	−0.05	0.00	0.00	0.47	0.33	0.07	−15.8	186	—				
	Este estudio	55	131	0.12	−0.07	0.00	0.00	0.48	0.32	0.06	—	186	−0.02	13	10	4	8

BIBLIOGRAFIA

BRIEVA, E. & A. URIBE. 1985, *Revista Colombiana de Estadística*, **12**, 1.

CABRERA-CAÑO, J. & F.J. ALFARO, 1985, *Astron. Astrophys.* **150**, 298.

CUDWORTH, K. 1984, comunicación personal.

DE GRAEVE, E. 1979, *Vatican Observatory Publications* **1**, 283.

ERICKSON, R.R. 1971, *Astron. Astrophys.* **10**, 170.

GIEBERT, K.L. 1982. ACM *Transactions on Mathematical Software* **8**, 5.

HAND, D.J. 1981. *Discrimination and Classification*, John Wiley and Sons, Chichester, p. 16-31.

KING, D.S. 1983 *Journal and Proceedings*, Royal Society of New South Wales **116**, 33.

SANDERS, W.L. 1971, *Astron. Astrophys.* **14**, 226.

SLOVAK, M.H. 1977. *Astron. J.* **82**, 818.

STONE, R.C. 1977. *Astron. Astrophys.* **54**, 803.

TRUMPLER, R.J. & H.F. WEAVER. 1953. *Statistical Astronomy*, Dover, New York, p. 49-56.

VAN ALTENA, W.F., & B.F. JONES, 1970. *Astron. Astrophys.* **8**, 112.

VASILEVSKIS, S., A. KLEMOLA & G. PRESTON. 1958, *Astron. J.* **69**, 387.

WOLFE, J.H. 1970, *Multivariate Behavioral Research*, July, 329.

ZHAO, J., TIAN, K., SU, Z, & YIN, M. 1982. *Chin. Astron. Astrophys.* **6**, 293.