TERMINOS DE PERIODO CORTO EN EL MOVIMIENTO DE UN SATELITE ARTIFICIAL BAJO LA ACCION DE LOS ARMONICOS J_5 Y J_6 DEL POTENCIAL TERRESTRE INTEGRACION ANALITICA MEDIANTE EL USO DE LA TRANSFORMACION KS

por

José Gregorio Portilla*

Resumen

Portilla, J. G.: Términos de período corto en el movimiento de un satélite artifical bajo la acción de los armónicos J_5 y J_6 del potencial terrestre integración analítica mediante el uso de la transformación KS. Rev. Acad. Colomb. Cienc. 19 (73): 317-335, 1994. ISSN 0370-3908.

Se desarrolla la solución analítica de corto período del movimiento del satélite artificial con los armónicos zonales J_5 y J_6 en términos de los elementos KS. A causa de la simetría de las ecuaciones de los elementos, sólo es necesario integrar analíticamente dos de las nueve ecuaciones. Las expansiones en serie incluyen términos hasta en la tercera potencia en la excentricidad.

Summary

Short-term analytical theory is developed for the motion of a satellite of an oblate planet whose gravitational potential includes the fifth and sixth zonal harmonics. Due to symmetry in KS elements equations, only two of the nine equations are integrated analytically. The series expansions include terms to third power in the eccentricity.

1. Introducción

En mecánica celeste los métodos de integración numérica permiten obtener efemérides muy precisas de órbitas de satélites cuando se incluyen modelos de fuerzas complejos. Sin embargo, es conocido que las soluciones analíticas poseen una aplicación fundamental para el planeamiento de misiones y elaboración de análisis cualittativos ya que éstas son bastante flexibles a la hora de considerar una gran gama de condiciones iniciales.

* Observatorio Astronómico Nacional, Facultad de Ciencias, Universidad Nacional de Colombia, Apartado Aéreo 2584, Bogotá, Colombia.

Por otra parte, las ecuaciones clásicas newtonianas no son apropiadas para la integración numérica o el desarrollo de teorías analíticas a causa de su inherente inestabilidad. Por ello se han desarrollado transformaciones que han permitido su estabilización, esto es, la disminución de los errores numéricos acumulados y el uso de grandes pasos de integración.

La transformación KS de sistemas gravitacionales introducida por Kustaanheimo y Steifel (1965), regulariza el movimiento kepleriano no lineal y lo reduce a un conjunto de ecuaciones diferenciales lineales del tipo oscilador armónico con frecuencia constante. Así mismo se ha encontrado que la obtención de soluciones numéricas con respecto a cualquier tipo de fuerza perturbatriz, mucho menos sensible a errores de truncado y redondeo (Stiefel y Scheifele 1971). Las ecuaciones son apropiadas para estudiar el movimiento en cualquier tipo de órbita; en particular se evitan los problemas de las excentricidades e inclinaciones casi nulas (como en los satélites geoestacionarios) en fuerte contraste con las ecuaciones de Lagrange en donde e y seni están presentes en el denominador.

Se han realizado estudios que comprenden integraciones numéricas de las ecuaciones diferenciales de los elementos KS (Sharma y Mani, 1985) incluyendo los armónicos zonales J^2 hasta el J^6 y la resistencia que opone la atmósfera. Sharma y Roy (1988= integraron numéricamente otra forma de las ecuaciones diferenciales llamadas ecuaciones KS canónicamente regulares en las cuales se incluyeron los armónicos J^2 y J^{36}.

A causa de la dificultad inherente en integrar analíticamente las ecuaciones de los elementos KS, aún para modelos de fuerzas muy simplificados, los estudios a este respecto son escasos. Sharma (1989) obtuvo expresiones de corto período considerando únicamente el armónico J^2. Mediante el método de expansión en serie incluyó términos hasta la cuarta potencia en la excentricidad. Dichos resultados fueron aplicados al estudio del movimiento de satélites indúes en órbitas bajas. Posteriormente Sharma (1993) obtuvo expresiones para el movimiento de corto período adicionando los armónicos de segundo orden J^3 y J^4. Así mismo, las expansiones en serie fueron llevadas hasta la tercera potencia en la excentricidad.

2. Las Ecuaciones Diferenciales de Movimiento

Las ecuaciones diferenciales de los elementos KS cuando sólo se considera un potencial perturbador son (Stiefel & Scheifele, 1971):

$$\frac{d\omega}{dE} = 0 \,, \qquad (1)$$

$$\frac{d\tau}{dE} = \frac{1}{8\omega^3}\left[K^2 - 2rV - \frac{r}{2}\left\langle u, \frac{\partial V}{\partial u}\right\rangle\right] \,, \qquad (2)$$

$$\frac{d\alpha}{dE} = \frac{1}{2\omega^2}\left[\frac{V}{2}u + \frac{r}{4}\frac{\partial V}{\partial u}\right]\operatorname{sen}\frac{E}{2} \,, \qquad (3)$$

$$\frac{d\beta}{dE} = -\frac{1}{2\omega^2}\left[\frac{V}{2}u + \frac{r}{4}\frac{\partial V}{\partial u}\right]\cos\frac{E}{2} \,, \qquad (4)$$

en donde:

$$u = (u_1, u_2, u_3, u_4) = \alpha\cos\frac{E}{2} + \beta\sin\frac{E}{2}\ , \quad (5)$$

$$u* = \frac{du}{dE} = -\frac{1}{2}\alpha\mathrm{sen}\frac{E}{2} + \frac{1}{2}\beta\cos\frac{E}{2}\ , \quad (6)$$

$$\tau = t + \frac{1}{w}(u, u*)\ , \quad (7)$$

$$\omega = \left[\frac{1}{2}\left(\frac{K^2}{r} - \frac{1}{2}\,|\dot{x}|^2 - V\right)\right]^{1/2} \quad (8)$$

$$r = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2\ ,$$

$$x = (x_1, x_2, x_3) = L(u)u\ ,$$

donde E es la anomalía excéntrica generalizada, ω es la frecuencia angular, τ el tiempo ficticio, r el radio vector y K^2 es la constante de gravitación.

Introduciendo la matriz KS

$$L(u)u = \begin{pmatrix} u_1 & -u_2 & -u_3 & u_4 \\ u_2 & u_1 & -u_4 & -u_3 \\ u_3 & u_4 & u_1 & u_2 \\ u_4 & -u_3 & u_2 & -u_1 \end{pmatrix}$$

$$\dot{x}_1 = \frac{4\omega}{r}(u_1u_1^* - u_2u_2^* - u_3u_3^* - u_4u_4^*)\ ,$$

$$\dot{x}_2 = \frac{4w}{r}(u_2u_1^* + u_1u_2^* - u_4u_3^* - u_3u_4^*)\ ,$$

$$\dot{x}_3 = \frac{4w}{r}(u_3u_1^* + u_4u_2^* + u_1u_3^* + u_2u_4^*)\ , \quad (9)$$

de la ecuación (1) notamos inmediatamente que el negativo de la energía total es constante:

$$h = 2\omega^2\ .$$

Cuando se considera el achatamiento terrestre tendremos como potencial

$$V = \frac{K^2}{r} \sum_{n=2}^{\infty} J_n \left[\frac{R}{r} \right]^n P_n \; (\cos\nu) \; , \qquad (10)$$

en donde

$$\cos\nu = x_3/r \; ,$$

R es el radio ecuatorial terrestre, J_ns son los armónicos zonales y P_n es el polinomio de Legendre de grado n.

Cuando sólo se considera un término J_n en (2) obtenemos

$$\left[u, \frac{\partial V_n}{\partial u}\right] = -\,2\,(n+1)\,V_n$$

En el presente trabajo consideraremos:

$$V_5 = J_5 \frac{K^2}{r} \left[\frac{R}{r} \right]^5 \left[\frac{63}{8} \cos^5\nu - \frac{35}{4} \cos^3\nu + \right.$$

$$\left. + \frac{15}{8} \cos \nu \right]$$

$$V_6 = J_6 \frac{K^2}{r} \left[\frac{R}{r} \right]^6 \left[\frac{231}{16} \cos^6\nu - \frac{315}{16} \cos^4\nu + \right.$$

$$\left. + \frac{105}{16} \cos^2\nu - \frac{5}{16} \right]$$

Las ecuaciones (2), (3) y (4) pueden escribirse de la siguiente forma:

$$\frac{d\tau}{dE} = \frac{1}{8\omega^3} [K^2 + (n-1) r V_n] \qquad (11)$$

$$\frac{d\alpha_i}{dE} = Q_i^{(n)} \operatorname{sen} \frac{E}{2} \qquad (12)$$

$$\frac{d\beta_i}{dE} = -\, Q_i^{(n)} \cos \frac{E}{2} \qquad (13)$$

donde

$$Q_i^{(5)} = \frac{5K^2 J_5 R^5}{32\omega^2}\left[3\frac{u_k}{r^6} - 18\frac{x_3 u_i}{r^7} - 42\frac{x_3^2 u_k}{r^8} + 112\frac{x_3^3 u_i}{r^9} + 63\frac{x_3^4 u_k}{r^{10}} - 126\frac{x_3^5 u_i}{r^{11}}\right] \quad (14)$$

$$Q_i^{(6)} = \frac{K^2 J_6 R^6}{32\omega^2}\left[15\frac{u_i}{r^7} + 105\frac{x_3 u_k}{r^8} - 420\frac{x_3^2 u_i}{r^9} - 630\frac{x_3^3 u_k}{r^{10}} + 1575\frac{x_3^4 u_i}{r^{11}} + 693\frac{x_3^5 u_k}{r^{12}} - 1386\frac{x_3^6 u_i}{r^{13}}\right] \quad (15)$$

$(i=1,2,3,4)$ con $u_{j+4} = u_j$, $(j=1,2)$.

3. La Integración Analítica

Para poder integrar de una manera analítica las ecuaciones (11), (12), y (13) utilizamos la conocida relación entre la anomalía excéntrica y el radio vector, a saber $r = a(1 - e\cos E)$, siendo a y e el semieje mayor y la excentricidad respectivamente. Se expande hasta la tercera potencia en e con ayuda del teorema del binomio para determinar las expresiones del tipo $1/r^n$ donde $n = 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13$, por ejemplo:

$$\frac{1}{r^{13}} = \frac{1}{a^{13}}[1 + 13e\cos E + 91e^2\cos^2 E + 455e^3\cos^3 E + \ldots]$$

Los valores de x_3, x_3^2, x_3^3, x_3^4, x_3^5 y x_3^6 en términos de α_i y β_i son

$$x_3 = a_o + a_1\cos E + a_2 \operatorname{sen} E ,$$

$$x_3^2 = b_o + b_1\cos E + b_2\cos^2 E + b_3 \operatorname{sen} E +$$
$$+ b_4 \operatorname{sen} E\cos E ,$$

$$x_3^3 = c_o + c_1\cos E + c_2\cos^2 E + c_3\cos^3 E +$$
$$+ c_4 \operatorname{sen} E + c_5 \operatorname{sen} E\cos E + c_6 \operatorname{sen} E\cos^2 E ,$$

$$x_3^4 = d_o + d_1\cos E + d_2\cos^2 E + d_3\cos^3 E +$$
$$+ d_4\cos^4 E + d_5 \operatorname{sen} E + d_6 \operatorname{sen} E\cos E +$$
$$+ d_7 \operatorname{sen} E\cos^2 E + d_8 \operatorname{sen} E\cos^3 E ,$$

$$x_3^5 = m_o + m_1\cos E + m_2\cos^2 E + m_3\cos^3 E +$$
$$+ m_4\cos^4 E + m_5\cos^5 E + m_6 \operatorname{sen} E + m_7 \operatorname{sen} E\cos E +$$
$$+ m_8 \operatorname{sen} E\cos^2 E + m_9 \operatorname{sen} E\cos^3 E + m_{10} \operatorname{sen} E\cos^4 E ,$$

$$x_3^6 = f_o + f_1\cos E + f_2\cos^2 E + f_3\cos^3 E +$$
$$+ f_4\cos^4 E + f_5\cos^5 E + f_6\cos^6 E + f_7 \operatorname{sen} E +$$
$$+ f_8 \operatorname{sen} E\cos E + f_9 \operatorname{sen} E\cos^2 E + f_{10} \operatorname{sen} E\cos^3 E +$$
$$+ f_{11} \operatorname{sen} E\cos^4 E + f_{12} \operatorname{sen} E\cos^5 E ,$$

donde:

$$a_o = \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_4 + \beta_1\beta_3 + \beta_2\beta_4 ,$$
$$a_1 = \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_4 - \beta_1\beta_3 - \beta_2\beta_4 ,$$
$$a_2 = \alpha_1\beta_3 + \beta_1\alpha_3 + \alpha_2\beta_4 + \beta_2\alpha_4 ,$$
$$b_o = a_o^2 + a_2^2 ,$$
$$b_1 = 2a_oa_1 ,$$
$$b_2 = a_1^2 - a_2^2 ,$$
$$b_3 = 2a_oa_2 ,$$
$$b_4 = 2a_1a_2 ,$$
$$c_o = a_ob_o + a_2b_3 ,$$
$$c_1 = a_ob_1 + a_1b_o + a_2b_4 ,$$
$$c_2 = a_ob_2 + a_1b_1 - a_2b_3 ,$$
$$c_3 = a_1b_2 - a_2b_4 ,$$

$$c_4 = a_0b_3 + a_2b_0 \ ,$$

$$c_5 = a_0b_4 + a_1b_3 + a_2b_1 \ ,$$

$$c_6 = a_1b_4 + a_2b_2 \ ,$$

$$d_0 = b_0^2 + b_3^2 \ ,$$

$$d_1 = 2(b_0b_1 + b_3b_4) \ ,$$

$$d_2 = b_1^2 - b_3^2 + b_4^2 + 2b_0b_2 \ ,$$

$$d_3 = 2(b_1b_2 - b_3b_4) \ ,$$

$$d_4 = b_2^2 - b_4^2 \ ,$$

$$d_5 = 2b_0b_3 \ ,$$

$$d_6 = 2(b_0b_4 + b_1b_3) \ ,$$

$$d_7 = 2(b_1b_4 + b_2b_3) \ ,$$

$$d_8 = 2b_2b_4 \ ,$$

$$m_0 = a_0d_0 + a_2d_5 \ ,$$

$$m_1 = a_0d_1 + a_1d_0 + a_2d_6 \ ,$$

$$m_2 = a_0d_2 + a_1d_1 + a_2d_7 - a_2d_5 \ ,$$

$$m_3 = a_0d_3 + a_1d_2 - a_2d_6 + a_2d_8 \ ,$$

$$m_4 = a_0d_4 + a_1d_3 - a_2d_7 \ ,$$

$$m_5 = a_1d_4 - a_2d_8 \ ,$$

$$m_6 = a_0d_5 + a_2d_0 \ ,$$

$$m_7 = a_0d_6 + a_1d_5 + a_2d_1 \ ,$$

$$m_8 = a_0d_7 + a_1d_6 + a_2d_2 \ ,$$

$$m_9 = a_0d_8 + a_1d_7 + a_2d_3 \ ,$$

$$m_{10} = a_1d_8 + a_2d_4 \ ,$$

$$f_0 = c_0^2 + c_4^2 \ ,$$

$$f_1 = 2(c_0c_1 + c_4c_5) \ ,$$

$$f_2 = c_1^2 - c_4^2 + c_5^2 + 2(c_0c_2 + c_4c_6) \ ,$$

$$f_3 = 2(c_0c_3 + c_1c_2 - c_4c_5 + c_5c_6) \ ,$$

$$f_4 = c_2^2 - c_5^2 + c_6^2 + 2(c_1c_3 - c_4c_6) \ ,$$

$$f_5 = 2(c_2c_3 - c_5c_6) \ ,$$

$$f_6 = c_3^2 - c_6^2 \ ,$$

$$f_7 = 2c_0c_4 \ ,$$

$$f_8 = 2(c_0c_5 + c_1c_4)\ ,$$

$$f_9 = 2(c_0c_6 + c_1c_5 + c_2c_4)\ ,$$

$$f_{10} = 2(c_1c_6 + c_2c_5 + c_3c_4)\ ,$$

$$f_{11} = 2(c_2c_6 + c_3c_5)\ ,$$

$$f_{12} = 2c_3c_6\ .$$

Substituyendo los valores requeridos en la ecuación (11), integrando y simplificando obtenemos:

$$\begin{aligned}
\tau = \frac{K^2}{8\omega^3}\Bigg\{ & E + J_n\left[\frac{R}{a}\right]^n \Bigg[(w_0 + \frac{1}{4}w_1 + \frac{1}{3}w_2 + \frac{5}{32}w_3 + \\
& + \frac{1}{5}w_4 + \frac{11}{96}w_5 + \frac{1}{7}w_6 + \frac{93}{1024}w_7 + \frac{1}{9}w_8) + (v_0 + \frac{1}{2}v_2 + \\
& + \frac{3}{8}v_4 + \frac{5}{16}v_6 + \frac{35}{128}v_8)E + (v_1 + \frac{3}{4}v_3 + \frac{5}{8}v_5 + \\
& + \frac{35}{64}v_7 + \frac{63}{128}v_9)\,\mathrm{sen}E + (\frac{1}{4}v_2 + \frac{1}{4}v_4 + \frac{15}{64}v_6 + \\
& + \frac{7}{32}v_8)\,\mathrm{sen}2E + (\frac{1}{2}v_3 + \frac{5}{48}v_5 + \frac{7}{64}v_7 + \frac{49}{384}v_9)\,\mathrm{sen}3E + \\
& + (\frac{1}{32}v_4 + \frac{3}{64}v_6 + \frac{7}{128}v_8)\,\mathrm{sen}\ 4E + (\frac{1}{80}v_5 + \frac{7}{320}v_7 + \\
& + (\frac{9}{320}v_9)\,\mathrm{sen}\ 5E + (\frac{1}{192}v_6 + \frac{1}{96}v_8)\,\mathrm{sen}\ 6E + (\frac{1}{448}v_7 + \\
& + \frac{9}{1792}v_9)\,\mathrm{sen}7E + \frac{1}{1024}v_8\,\mathrm{sen}8E + \frac{1}{2304}v_9\mathrm{sen}9E - \\
& - \Big[(w_0 + \frac{1}{4}w_2 + \frac{1}{8}w_4 + \frac{5}{64}w_6 + \frac{7}{128}w_8)\cos E + (\frac{1}{4}w_1 + \\
& + \frac{1}{8}w_3 + \frac{5}{64}w_5 + \frac{7}{128}w_7)\cos 2E + (\frac{1}{12}w_2 + \frac{3}{48}w_4 + \\
& + \frac{3}{64}w_6 + \frac{7}{192}w_8)\cos 3E + (\frac{1}{32}w_3 + \frac{1}{32}w_5 + \frac{7}{256}w_7)\cos 4E + \\
& + (\frac{1}{80}w_4 + \frac{1}{64}w_6 + \frac{1}{64}w_8)\cos 5E + (\frac{1}{192}w_5 + \frac{1}{128}w_7)\cos 6E + \\
& + (\frac{1}{448}w_6 + \frac{1}{256}w_8)\cos 7E + \frac{1}{1024}w_7\cos 8E + \frac{1}{2304}w_8\cos 9E\Big]\Bigg]\Bigg\}\ , \qquad (16)
\end{aligned}$$

con $\tau = 0$ para $t = 0$.

Para $n = 5$ tenemos:

$$v_0 = \rho_1 m_0 - \rho_2 c_0 + \rho_3 a_0\ ,$$

$$v_1 = \rho_1(m_1 + 10m_0 e) - \rho_2(c_1 + 8c_0 e) + \rho_3(a_1 + 6a_0 e) ,$$

$$v_2 = \rho_1(m_2 + 10m_1 e + 55m_0 e^2) - \rho_2(c_2 + 8c_1 e + 36c_0 e^2) +$$
$$+ 3\rho_3 e(2a_1 + 7a_0 e) ,$$

$$v_3 = \rho_1(m_3 + 10m_2 e + 55m_1 e^2 + 220m_0 e^3) - \rho_2(c_3 + 8c_2 e +$$
$$+ 36c_1 e^2 + 120c_0 e^3) + 7\rho_3 e^2(3a_1 + 8a_0 e) ,$$

$$v_4 = \rho_1(m_4 + 10m_3 e + 55m_2 e^2 + 220m_1 e^3) - 4\rho_2 e(2c_3 + 9c_2 e +$$
$$+ 30c_1 e^2) + 56\rho_3 a_1 e^3 ,$$

$$v_5 = \rho_1(m_5 + 10m_4 e + 55m_3 e^2 + 220m_2 e^3) - 12\rho_2 e^2(3c_3 + 10c_2 e) ,$$

$$v_6 = 5\rho_1 e(2m_5 + 11m_4 e + 44m_3 e^2) - 120\rho_2 c_3 e^3 ,$$

$$v_7 = 55\rho_1 e^2(m_5 + 4m_4 e) , \quad v_8 = 220\rho_1 m_5 e^3 , \quad v_9 = 0$$

$$w_0 = \rho_1 m_6 - \rho_2 c_4 + \rho_3 a_2 ,$$

$$w_1 = \rho_1(m_7 + 10m_6 e) - \rho_2(c_5 + 8c_4 e) + 6\rho_3 a_2 e ,$$

$$w_2 = \rho_1(m_8 + 10m_7 e + 55m_6 e^2) - \rho_2(c_6 + 8c_5 e + 36c_4 e^2) + 21\rho_3 a_2 e^2$$

$$w_3 = \rho_1(m_9 + 10m_8 e + 55m_7 e^2 + 220m_6 e^3) - 4\rho_2 e(2c_6 + 9c_5 e +$$
$$+ 30c_4 e^2) + 56\rho_3 a_2 e^3 ,$$

$$w_4 = \rho_1(m_{10} + 10m_9 e + 55m_8 e^2 + 220m_7 e^3) - 12\rho_2 e^2(3c_6 + 10c_5 e) ,$$

$$w_5 = 5\rho_1 e(2m_{10} + 11m_9 e + 44m_8 e^2) - 120\rho_2 c_6 e^3 ,$$

$$w_6 = 55\rho_1 e^2(m_{10} + 4m_9 e) , \quad w_7 = 220\rho_1 m_{10} e^3 , \quad w_8 = 0 ,$$

donde:

$$\rho_1 = \frac{63}{2a^5} , \quad \rho_2 = \frac{35}{a^3} , \quad \rho_3 = \frac{15}{2a} .$$

Para n = 6 tenemos:

$$v_0 = \rho_4 f_0 - \rho_5 d_0 + \rho_6 f_0 - \rho_7 \ ,$$

$$v_1 = \rho_4(f_1 + 12f_0 e) - \rho_5(d_1 + 10d_0 e) + \rho_6(b_1 + 8b_0 e) - 6\rho_7 e \ ,$$

$$v_2 = \rho_4(f_2 + 12f_1 e + 78f_0 e^2) - \rho_5(d_2 + 10d_1 e + 55d_0 e^2) +$$

$$+ \rho_6(b_2 + 8b_1 e + 36b_0 e^2) - 21\rho_7 e^2 \ ,$$

$$v_3 = \rho_4(f_3 + 12f_2 e + 78f_1 e^2 + 364f_0 e^3) - \rho_5(d_3 + 10d_2 e +$$

$$+ 55d_1 e^2 + 220d_0 e^3) + 4e\rho_6(2b_2 + 9b_1 e + 30b_0 e^2) - 56\rho_7 e^3 \ ,$$

$$v_4 = \rho_4(f_4 + 12f_3 e + 78f_2 e^2 + 364f_1 e^3) - \rho_5(d_4 + 10d_3 e +$$

$$+ 55d_2 e^2 + 220d_1 e^3) + 4e^2\rho_6(9b_2 + 30b_1 e) \ ,$$

$$v_5 = \rho_4(f_5 + 12f_4 e + 78f_3 e^2 + 364f_2 e^3) - 5e\rho_5(2d_4 + 11d_3 e +$$

$$+ 44d_2 e^2) + 120\rho_6 b_2 e^3 \ ,$$

$$v_6 = \rho_4(f_6 + 12f_5 e + 78f_4 e^2 + 364f_3 e^3) - 55e^2\rho_5(d_4 + 4d_3 e) \ ,$$

$$v_7 = 2e\rho_4(6f_6 + 39f_5 e + 182f_4 e^2) - 220\rho_5 d_4 e^3 \ ,$$

$$v_8 = 2e^2\rho_4(39f_6 + 182f_5 e) \ , \quad v_9 = 364\rho_4 f_6 e^3 \ ,$$

$$w_0 = \rho_4 f_7 - \rho_5 d_5 + \rho_6 b_3 \ ,$$

$$w_1 = \rho_4(f_8 + 12f_7 e) - \rho_5(d_6 + 10d_5 e) + \rho_6(b_4 + 8b_3 e) \ ,$$

$$w_2 = \rho_4(f_9 + 12f_8 e + 78f_7 e^2) - \rho_5(d_7 + 10d_6 e + 55d_5 e^2) +$$

$$+ 4e\rho_6(2b_4 + 9b_3 e) \ ,$$

$$w_3 = \rho_4(f_{10} + 12f_9 e + 78f_8 e^2 + 364f_7 e^3) - \rho_5(d_8 + 10d_7 e +$$
$$+ 55d_6 e^2 + 220d_5 e^3) + 4e^2\rho_6(9b_4 + 30b_3 e) \ ,$$

$$w_4 = \rho_4(f_{11} + 12f_{10} e + 78f_9 e^2 + 364f_8 e^3) - 5e\rho_5(2d_8 + 11d_7 e +$$

$$+ 45d_6 e^2) + 120\rho_6 b_4 e^3 \ ,$$

$$w_5 = \rho_4(f_{12} + 12f_{11}e + 78f_{10}e^2 + 364f_9e^3) - 55e^2\rho_5(d_8 + 4d_7e) ,$$

$$w_6 = 2e\rho_4(6f_{12} + 39f_{11}e + 182f_{10}e^2) - 220\rho_5 d_8 e^3 ,$$

$$w_7 = 2e^2\rho_4(39f_{12} + 182f_{11}e) , \quad w_8 = 364\rho_4 f_{12} e^3 ,$$

donde:

$$\rho_4 = \frac{1155}{16a^6}, \qquad \rho_5 = \frac{1575}{16a^4}, \qquad \rho_6 = \frac{525}{16a^2} , \qquad \rho_7 = \frac{25}{16}.$$

Dado que $u_i sen(E/2)$ y $u_i cos(E/2)$ aparecen en cada término de las ecuaciones (12) y (13) pueden escribirse así:

$$u_i sen(E/2) = \frac{1}{2}\left[q_0^{(i)} + q_1^{(i)} \cos E + q_2^{(i)} sen E\right] ,$$

$$u_i cos(E/2) = \frac{1}{2}\left[q_0^{(i)} + q_1^{(i)} \cos E + q_2^{(i)} sen E\right] ,$$

con

$$q_0^{(i)} = \beta_i , \qquad q_1^{(i)} = -\beta_i , \qquad q_2^{(i)} = \alpha_i , \tag{17}$$

en el primer caso, y

$$q_0^{(i)} = \alpha_i , \qquad q_1^{(i)} = \alpha_i , \qquad q_2^{(i)} = \beta_i , \tag{18}$$

en el segundo.

Podemos calcular ahora analíticamente las ocho ecuaciones (12) y (13) simplemente resolviendo una sóla ecuación (13) a causa de la simetría existente entre ellas.

Sustituyendo la ecuación (17) en la (12), integrando y simplificando obtenemos:

$$\Delta\alpha_i = \frac{K^2 J_n R^n}{32\omega^2 a^{n+1}} \Big\{ (t_0^{(i)} + \frac{1}{4} t_1^{(i)} + \frac{1}{3} t_2^{(i)} + \frac{5}{32} t_3^{(i)} +$$

$$+ \frac{1}{5} t_4^{(i)} + \frac{11}{96} t_5^{(i)} + \frac{1}{7} t_6^{(i)} + \frac{93}{1024} t_7^{(i)} + \frac{1}{9} t_8^{(i)} +$$

$$+ \frac{193}{2560} t_9^{(i)}) + (k_0^{(i)} + \frac{1}{4} k_2^{(i)} + \frac{3}{8} k_4^{(i)} + \frac{5}{16} k_6^{(i)} +$$

$$+ \frac{35}{128} k_8^{(i)} + \frac{63}{256} k_{10}^{(i)})E + (k_1^{(i)} + \frac{3}{4} k_3^{(i)} + \frac{5}{8} k_5^{(i)} +$$

$$+\ \frac{35}{64}k_7^{(i)} + \frac{63}{128}k_9^{(i)})\mathrm{sen}E + (\frac{1}{4}k_2^{(i)} + \frac{1}{4}k_4^{(i)} + \frac{15}{64}k_6^{(i)} +$$

$$+\ \frac{7}{32}k_8^{(i)} + \frac{105}{512}k_{10}^{(i)})\mathrm{sen}2E + (\frac{1}{12}k_3^{(i)} + \frac{5}{48}k_5^{(i)} + \frac{7}{64}k_7^{(i)} +$$

$$+\ \frac{49}{384}k_9^{(i)})\mathrm{sen}3E + (\frac{1}{32}k_4^{(i)} + \frac{3}{64}k_6^{(i)} + \frac{7}{128}k_8^{(i)} +$$

$$+\ \frac{15}{256}k_{10}^{(i)})\mathrm{sen}4E + (\frac{1}{80}k_5^{(i)} + \frac{7}{320}k_7^{(i)} + \frac{9}{320}k_9^{(i)})\mathrm{sen}5E +$$

$$+\ (\frac{1}{192}k_6^{(i)} + \frac{1}{96}k_8^{(i)} + \frac{45}{3072}k_{10}^{(i)})\mathrm{sen}6E + (\frac{1}{448}k_7^{(i)} +$$

$$+\ \frac{9}{1792}k_9^{(i)})\mathrm{sen}7E + (\frac{1}{1024}k_8^{(i)} + \frac{5}{2048}k_{10}^{(i)})\mathrm{sen}8E +$$

$$+\ \frac{1}{2304}k_9^{(i)}\mathrm{sen}9E + \frac{1}{5120}k_{10}^{(i)}\mathrm{sen}10E - \Big[(t_0^{(i)} + \frac{1}{4}t_2^{(i)} +$$

$$+\ \frac{1}{8}t_4^{(i)} + \frac{5}{64}t_6^{(i)} + \frac{7}{128}t_8^{(i)})\cos E + (\frac{1}{4}t_1^{(i)} + \frac{1}{8}t_3^{(i)} +$$

$$+\ \frac{5}{64}t_5^{(i)} + \frac{7}{128}t_7^{(i)} + \frac{21}{512}t_9^{(i)})\cos 2E + (\frac{1}{12}t_2^{(i)} + \frac{1}{16}t_4^{(i)} +$$

$$+\ \frac{3}{64}t_6^{(i)} + \frac{7}{192}t_8^{(i)})\cos 3E + (\frac{1}{32}t_3^{(i)} + \frac{1}{32}t_5^{(i)} + \frac{7}{256}t_7^{(i)} +$$

$$+\ \frac{3}{128}t_9^{(i)})\cos 4E + (\frac{1}{80}t_4^{(i)} + \frac{1}{64}t_6^{(i)} + \frac{1}{64}t_8^{(i)})\cos 5E +$$

$$+\ (\frac{1}{192}t_5^{(i)} + \frac{1}{128}t_7^{(i)} + \frac{9}{1024}t_9^{(i)})\cos 6E + (\frac{1}{448}t_6^{(i)} +$$

$$+\ \frac{1}{256}t_8^{(i)})\cos 7E + (\frac{1}{1024}t_7^{(i)} + \frac{1}{512}t_9^{(i)})\cos 8E +$$

$$+\ \frac{1}{2304}t_8^{(i)}\cos 9E + \frac{1}{5120}t_9^{(i)}\cos 10E \Big]\Big\} \ , \quad (19)$$

en la cual, para n = 5 tenemos:

$$k_0^{(i)} = \lambda_1 q_0^{(k)} + \lambda_2 g_0^{(i)} + \lambda_3 s_0^{(k)} + \lambda_4 h_0^{(i)} + \lambda_5 l_0^{(k)} + \lambda_6 n_0^{(i)} \ ,$$

$$k_1^{(i)} = \lambda_1 (q_1^{(k)} + 6eq_0^{(k)}) + \lambda_2 (g_1^{(i)} + 7eg_0^{(i)}) + \lambda_3 (s_1^{(k)} + 8es_0^{(k)}) +$$

$$+\ \lambda_4 (h_1^{(i)} + 9eh_0^{(i)}) + \lambda_5 (l_1^{(k)} + 10el_0^{(k)}) + \lambda_6 (n_1^{(i)} + 11en_0^{(i)}) \ ,$$

$$k_2^{(i)} = 3e\lambda_1 (2q_1^{(k)} + 7e\ q_0^{(k)}) + \lambda_2 (g_2^{(i)} + 7eg_1^{(i)} + 28e^2 g_0^{(i)}) +$$

$$+\ \lambda_3 (s_2^{(k)} + 8es_1^{(k)} + 36e^2 s_0^{(k)}) + \lambda_4 (h_2^{(i)} + 9eh_1^{(i)} + 45e^2 h_0^{(i)}) +$$

$$+\ \lambda_5 (l_2^{(k)} + 10el_1^{(k)} + 55e^2 l_0^{(k)}) + \lambda_6 (n_2^{(i)} + 11en_1^{(i)} + 66e^2 n_0^{(i)}) \ ,$$

$$k_3^{(i)} = 7e^2\lambda_1(3q_1^{(k)} + 8eq_0^{(k)}) + 7e\lambda_2(g_2^{(i)} + 4eg_1^{(i)} + 12e^2g_0^{(i)}) +$$

$$+ \lambda_3(s_3^{(k)} + 8es_2^{(k)} + 36e^2s_1^{(k)} + 120e^3s_0^{(k)}) + \lambda_4(h_3^{(i)} + 9eh_2^{(i)} +$$

$$+ 45e^2h_1^{(i)} + 165e^3h_0^{(i)}) + \lambda_5(l_3^{(k)} + 10el_2^{(k)} + 55e^2l_1^{(k)} + 220e^3l_0^{(k)}) +$$

$$+ \lambda_6(n_3^{(i)} + 11en_2^{(i)} + 66e^2n_1^{(i)} + 286e^3n_0^{(i)}) \; ,$$

$$k_4^{(i)} = 56\lambda_1q_1^{(k)}e^3 + 28e^2\lambda_2(g_2^{(i)} + 3eg_1^{(i)}) + 4e\lambda_3(2s_3^{(k)} + 9es_2^{(k)} +$$

$$+ 30e^2s_1^{(k)}) + \lambda_4(h_4^{(i)} + 9eh_3^{(i)} + 45e^2h_2^{(i)} + 165e^3h_1^{(i)}) + \lambda_5(l_4^{(k)} +$$

$$+ 10el_3^{(k)} + 55e^2l_2^{(k)} + 220e^3l_1^{(k)}) + \lambda_6(n_4^{(i)} + 11en_3^{(i)} + 66e^2n_2^{(i)} +$$

$$+ 286e^3n_1^{(i)}) \; ,$$

$$k_5^{(i)} = 84\lambda_2e^3g_2^{(i)} + 12\lambda_3e^2(10es_2^{(k)} + 3s_3^{(k)}) + 3e\lambda_4(3h_4^{(i)} +$$

$$+ 15eh_3^{(i)} + 55e^2h_2^{(i)}) + \lambda_5(l_5^{(k)} + 10el_4^{(k)} + 55e^2l_3^{(k)} + 220e^3l_2^{(k)}) +$$

$$+ \lambda_6(n_5^{(i)} + 11en_4^{(i)} + 66e^2n_3^{(i)} + 286e^3n_2^{(i)}) \; ,$$

$$k_6^{(i)} = 120\lambda_3e^3s_3^{(k)} + 15e^2\lambda_4(3h_4^{(i)} + 11eh_3^{(i)}) + 5e\lambda_5(2l_5^{(k)} +$$

$$+ 11el_4^{(k)} + 44e^2l_3^{(k)}) + \lambda_6(n_6^{(i)} + 11en_5^{(i)} + 66e^2n_4^{(i)} + 286e^3n_3^{(i)}) \; ,$$

$$k_7^{(i)} = 165\lambda_4e^3h_4^{(i)} + 55e^2\lambda_5(l_5^{(k)} + 4el_4^{(k)}) + 11e\lambda_6(n_6^{(i)} +$$

$$+ 6en_5^{(i)} + 26e^2n_4^{(i)}) \; ,$$

$$k_8^{(i)} = 220\lambda_5e^3l_5^{(k)} + 11e^2\lambda_6(6n_6^{(i)} + 26en_5^{(i)}) \; ,$$

$$k_9^{(i)} = 286\lambda_6e^3n_6^{(i)} \; , \quad k_{10}^{(i)} = 0 \quad ; \qquad (20)$$

$$t_0^{(i)} = \lambda_1q_2^{(k)} + \lambda_2g_3^{(i)} + \lambda_3s_4^{(k)} + \lambda_4h_5^{(i)} + \lambda_5l_6^{(k)} + \lambda_6n_7^{(i)} \; ,$$

$$t_1^{(i)} = 6\lambda_1eq_2^{(k)} + \lambda_2(7eg_3^{(i)} + g_4^{(i)}) + \lambda_3(8es_4^{(k)} + s_5^{(k)}) +$$

$$+ \lambda_4(9eh_5^{(i)} + h_6^{(i)}) + \lambda_5(10el_6^{(k)} + l_7^{(k)}) + \lambda_6(11en_7^{(i)} + n_8^{(i)}) \; ,$$

$$t_2^{(i)} = 21\lambda_1e^2q_2^{(k)} + 7e\lambda_2(4eg_3^{(i)} + g_4^{(i)}) + \lambda_3(36e^2s_4^{(k)} + 8es_5^{(k)} +$$

$$+ s_6^{(k)}) + \lambda_4(45e^2h_5^{(i)} + 9eh_6^{(i)} + h_7^{(i)}) + \lambda_5(55e^2 l_6^{(k)} + 10e l_7^{(k)} +$$

$$+ l_8^{(k)}) + \lambda_6(66e^2 n_7^{(i)} + 11en_8^{(i)} + n_9^{(i)}) \; ,$$

$$t_3^{(i)} = 56\lambda_1 e^3 q_2^{(k)} + 28e^2\lambda_2(3eg_3^{(i)} + g_4^{(i)}) + 4e\lambda_3(30e^2 s_4^{(k)} +$$

$$+ 9es_5^{(k)} + 2s_6^{(k)}) + \lambda_4(165e^3h_5^{(i)} + 45e^2h_6^{(i)} + 9eh_7^{(i)} + h_8^{(i)}) +$$

$$+ \lambda_5(220e^3 l_6^{(k)} + 55e^2 l_7^{(k)} + 10el_8^{(k)} + l_9^{(k)}) + \lambda_6(286e^3 n_7^{(i)} +$$

$$+ 66e^2 n_8^{(i)} + 11en_9^{(i)} + n_{10}^{(i)}) \; ,$$

$$t_4^{(i)} = 84\lambda_2 e^3 g_4^{(i)} + 12e^2\lambda_3(10es_5^{(k)} + 3s_6^{(k)}) + 3e\lambda_4(55e^2h_6^{(i)} +$$

$$+ 15eh_7^{(i)} + 3h_8^{(i)}) + \lambda_5(220e^3 l_7^{(k)} + 55e^2 l_8^{(k)} + 10el_9^{(k)} + l_{10}^{(k)}) +$$

$$+ \lambda_6(286e^3 n_8^{(i)} + 66e^2 n_9^{(i)} + 11en_{10}^{(i)} + n_{11}^{(i)}) \; ,$$

$$t_5^{(i)} = 120\lambda_3 e^3 s_6^{(k)} + 15\lambda_4 e^2(11eh_7^{(i)} + 3h_8^{(i)}) + 5\lambda_5 e(44e^2 l_8^{(k)} +$$

$$+ 11el_9^{(k)} + 2l_{10}^{(k)}) + \lambda_6(286e^3 n_9^{(i)} + 66e^2 n_{10}^{(i)} + 11en_{11}^{(i)} + n_{12}^{(i)}) \; ,$$

$$t_6^{(i)} = 165\lambda_4 e^3 h_8^{(i)} + 55e^2\lambda_5(4el_9^{(k)} + l_{10}^{(k)}) + 11e\lambda_6(26e^2 n_{10}^{(i)} +$$

$$+ 6en_{11}^{(i)} + n_{12}^{(i)}) \; ,$$

$$t_7^{(i)} = 220\lambda_5 e^3 l_{10}^{(k)} + 11e^2\lambda_6(26en_{11}^{(i)} + 6n_{12}^{(i)}) \; ,$$

$$t_8^{(i)} = 286\lambda_6 e^3 n_{12}^{(i)} \; , \qquad t_9^{(i)} = 0 \; . \qquad (21)$$

Donde:

$$\lambda_1 = \frac{15}{2}, \qquad \lambda_2 = -\frac{45}{a}, \qquad \lambda_3 = -\frac{105}{a^2}, \qquad \lambda_4 = \frac{280}{a^3}$$

$$\lambda_5 = \frac{315}{2a^4}, \qquad \lambda_6 = -\frac{315}{a^5}.$$

Para n = 6 tenemos:

$$k_0^{(i)} = \psi_1 q_0^{(i)} + \psi_2 g_0^{(k)} + \psi_3 s_0^{(i)} + \psi_4 h_0^{(k)} + \psi_5 l_0^{(i)} + \psi_6 n_0^{(k)} + \psi_7 r_0^{(i)}$$

$$k_1^{(i)} = \psi_1(7q_0^{(i)} e + q_1^{(i)}) + \psi_2(8eg_0^{(k)} + g_1^{(k)}) + \psi_3(9es_0^{(i)} +$$

$$+ s_1^{(i)}) + \psi_4(10eh_0^{(k)} + h_1^{(k)}) + \psi_5(11el_0^{(i)} + l_1^{(i)}) + \psi_6(12en_0^{(k)} +$$

$$+ n_1^{(k)}) + \psi_7(13er_0^{(i)} + r_1^{(i)}) \ ,$$

$$k_2^{(i)} = 7\psi_1 e(q_1^{(i)} + 4eq_0^{(i)}) + \psi_2(36e^2 g_0^{(k)} + 8eg_1^{(k)} + g_2^{(k)}) +$$

$$+ \psi_3(45e^2 s_0^{(i)} + 9es_1^{(i)} + s_2^{(i)}) + \psi_4(55e^2 h_0^{(k)} + 10eh_1^{(k)} + h_2^{(k)}) +$$

$$+ \psi_5(66e^2 l_0^{(i)} + 11el_1^{(i)} + l_2^{(i)}) + \psi_6(78e^2 n_0^{(k)} + 12en_1^{(k)} + n_2^{(k)}) +$$

$$+ \psi_7(91e^2 r_0^{(i)} + 13er_1^{(i)} + r_2^{(i)}) \ ,$$

$$k_3^{(i)} = 28e^2\psi_1(q_1^{(i)} + 3eq_0^{(i)}) + 4e\psi_2(30e^2 g_0^{(k)} + 9eg_1^{(k)} + 2g_2^{(k)}) +$$

$$+ \psi_3(165e^3 s_0^{(i)} + 45e^2 s_1^{(i)} + 9es_2^{(i)} + s_3^{(i)}) + \psi_4(220e^3 h_0^{(k)} + 55e^2 h_1^{(k)} +$$

$$+ 10eh_2^{(k)} + h_3^{(k)}) + \psi_5(286e^3 l_0^{(i)} + 66e^2 l_1^{(i)} + 11el_2^{(i)} + l_3^{(i)}) +$$

$$+ \psi_6(364e^3 n_0^{(k)} + 78e^2 n_1^{(k)} + 12en_2^{(k)} + n_3^{(k)}) + \psi_7(455e^3 r_0^{(i)} +$$

$$+ 91e^2 r_1^{(i)} + 13er_2^{(i)} + r_3^{(i)}) \ ,$$

$$k_4^{(i)} = 84e^3\psi_1 q_1^{(i)} + 12e^2\psi_2(10eg_1^{(k)} + 3g_2^{(k)}) + 3e\psi_3(55e^2 s_1^{(i)} +$$

$$+ 15es_2^{(i)} + 3s_3^{(i)}) + \psi_4(220e^3 h_1^{(k)} + 55e^2 h_2^{(k)} + 10eh_3^{(k)} + h_4^{(k)}) +$$

$$+ \psi_5(286e^3 l_1^{(i)} + 66e^2 l_2^{(i)} + 11el_3^{(i)} + l_4^{(i)}) + \psi_6(364e^3 n_1^{(k)} +$$

$$+ 78e^2 n_2^{(k)} + 12en_3^{(k)} + n_4^{(k)}) + \psi_7(455e^3 r_1^{(i)} + 91e^2 r_2^{(i)} + 13er_3^{(i)} + r_4^{(i)}) \ ,$$

$$k_5^{(i)} = 120e^3\psi_2 g_2^{(k)} + 15e^2\psi_3(11es_2^{(i)} + 3s_3^{(i)}) + 5e\psi_4(44e^2 h_2^{(k)} +$$

$$+ 11eh_3^{(k)} + 2h_4^{(k)}) + \psi_5(286e^3 l_2^{(i)} + 66e^2 l_3^{(i)} + 11el_4^{(i)} + l_5^{(i)}) +$$

$$+ \psi_6(364e^3 n_2^{(k)} + 78e^2 n_3^{(k)} + 12en_4^{(k)} + n_5^{(k)}) + \psi_7(455e^3 r_2^{(i)} +$$

$$+ 91e^2 r_3^{(i)} + 13er_4^{(i)} + r_5^{(i)}) \ ,$$

$$k_6^{(i)} = 165e^3\psi_3 s_3^{(i)} + 55\psi_4 e^2(4eh_3^{(k)} + h_4^{(k)}) + 11e\psi_5(26e^2 l_3^{(i)} +$$

$$+ 6el_4^{(i)} + l_5^{(i)}) + \psi_6(364e^3 n_3^{(k)} + 78e^2 n_4^{(k)} + 12en_5^{(k)} + n_6^{(k)}) +$$

$$+ \psi_7(455e^3r_3^{(i)} + 91e^2r_4^{(i)} + 13er_5^{(i)} + r_6^{(i)}) ,$$

$$k_7^{(i)} = 220e^3\psi_4 n_4^{(k)} + 11e^2\psi_5(26el_4^{(i)} + 6l_5^{(i)}) + 2e\psi_6(182e^2n_4^{(k)} +$$

$$+ 39en_5^{(k)} + 6n_6^{(k)}) + \psi_7(455e^3r_4^{(i)} + 91e^2r_5^{(i)} + 13er_6^{(i)} + r_7^{(i)}) ,$$

$$k_8^{(i)} = 286e^3\psi_5 l_5^{(i)} + 2e^2\psi_6(182en_5^{(k)} + 39n_6^{(k)}) + 13e\psi_7(35e^2r_5^{(i)} +$$

$$+ 7er_6^{(i)} + r_7^{(i)}) ,$$

$$k_9^{(i)} = 364e^3\psi_6 n_6^{(k)} + 91e^2\psi_7(5er_6^{(i)} + r_7^{(i)}) , \quad k_{10}^{(i)} = 455e^3\psi_7 r_7^{(i)}; \qquad (22)$$

$$t_0^{(i)} = q_2^{(i)}\psi_1 + \psi_2 g_3^{(k)} + \psi_3 s_4^{(i)} + \psi_4 h_5^{(k)} + \psi_5 l_6^{(i)} + \psi_6 n_7^{(k)} + \psi_7 r_8^{(i)}$$

$$t_1^{(i)} = 7e\psi_1 q_2^{(i)} + \psi_2(8eg_3^{(k)} + g_4^{(k)}) + \psi_3(9es_4^{(i)} + s_5^{(i)}) +$$

$$+ \psi_4(10eh_5^{(k)} + h_6^{(k)}) + \psi_5(11el_6^{(i)} + l_7^{(i)}) + \psi_6(12en_7^{(k)} + n_8^{(k)}) +$$

$$+ \psi_7(13er_8^{(i)} + r_9^{(i)}) ,$$

$$t_2^{(i)} = 28e^2\psi_1 q_2^{(i)} + 4e\psi_2(9eg_3^{(k)} + 2g_4^{(k)}) + \psi_3(45e^2s_4^{(i)} + 9es_5^{(i)} +$$

$$+ s_6^{(i)}) + \psi_4(55e^2h_5^{(k)} + 10eh_6^{(k)} + h_7^{(k)}) + \psi_5(66e^2l_6^{(i)} + 11el_7^{(i)} +$$

$$+ l_8^{(i)}) + \psi_6(78e^2n_7^{(k)} + 12en_8^{(k)} + n_9^{(k)}) + \psi_7(91e^2r_8^{(i)} + 13er_9^{(i)} + r_{10}^{(i)}) ,$$

$$t_3^{(i)} = 84e^3\psi_1 q_2^{(i)} + 12e^2\psi_2(10eg_3^{(k)} + 3g_4^{(k)}) + 3e\psi_3(55e^2s_4^{(i)} +$$

$$+ 15es_5^{(i)} + 3s_6^{(i)}) + \psi_4(220e^3h_5^{(k)} + 55e^2h_6^{(k)} + 10eh_7^{(k)} + h_8^{(k)})$$

$$+ \psi_5(286e^3l_6^{(i)} + 66e^2l_7^{(i)} + 11el_8^{(i)} + l_9^{(i)}) + \psi_6(364e^3n_7^{(k)} +$$

$$+ 78e^2n_8^{(k)} + 12en_9^{(k)} + n_{10}^{(k)}) + \psi_7(455e^3r_8^{(i)} + 91e^2r_9^{(i)} + 13er_{10}^{(i)} + r_{11}^{(i)}) ,$$

$$t_4^{(i)} = 120e^3\psi_2 g_4^{(k)} + 15e^2\psi_3(11es_5^{(i)} + 3s_6^{(i)}) + 5e\psi_4(44e^2h_6^{(k)} +$$

$$+ 11eh_7^{(k)} + 2h_8^{(k)}) + \psi_5(286e^3l_7^{(i)} + 66e^2l_8^{(i)} + 11el_9^{(i)} + l_{10}^{(i)}) +$$

$$+ \psi_6(364e^3n_8^{(k)} + 78e^2n_9^{(k)} + 12en_{10}^{(k)} + n_{11}^{(k)}) + \psi_7(455e^3r_9^{(i)} +$$

$$+ 91e^2r_{10}^{(i)} + 13er_{11}^{(i)} + r_{12}^{(i)}) ,$$

$$t_5^{(i)} = 165e^3\psi_3 s_6^{(i)} + 55e^2\psi_4(4eh_7^{(k)} + h_8^{(k)}) + 11e\psi_5(26e^2 l_8^{(i)} +$$

$$+ 6el_9^{(i)} + l_{10}^{(i)}) + \psi_6(364e^3 n_9^{(k)} + 78e^2 n_{10}^{(k)} + 12en_{11}^{(k)} + n_{12}^{(k)}) +$$

$$+ \psi_7(455e^3 r_{10}^{(i)} + 91e^2 r_{11}^{(i)} + 13er_{12}^{(i)} + r_{13}^{(i)}) \ ,$$

$$t_6^{(i)} = 220e^3\psi_4 h_8^{(k)} + 11e^2\psi_5(26el_9^{(i)} + 6l_{10}^{(i)}) + 2e\psi_6(182e^2 n_{10}^{(k)} +$$

$$+ 39en_{11}^{(k)} + 6n_{12}^{(k)}) + \psi_7(455e^3 r_{11}^{(i)} + 91e^2 r_{12}^{(i)} + 13er_{13}^{(i)} + r_{14}^{(i)}) \ ,$$

$$t_7^{(i)} = 286e^3\psi_5 l_{10}^{(i)} + 2e^2\psi_6(182en_{11}^{(k)} + 39n_{12}^{(k)}) + 13e\psi_7(35e^2 r_{12}^{(i)} +$$

$$+ 7er_{13}^{(i)} + r_{14}^{(i)}) \ ,$$

$$t_8^{(i)} = 364e^3\psi_6 n_{12}^{(k)} + 91e^2\psi_7(5er_{13}^{(i)} + r_{14}^{(i)}) \ , \qquad t_9^{(i)} = 455e^3\psi_7 r_{14}^{(i)} \ , \qquad (23)$$

en donde:

$$\psi_1 = \frac{15}{2} \ , \quad \psi_2 = \frac{105}{2a} \ , \quad \psi_3 = -\frac{210}{a^2} \ , \quad \psi_4 = -\frac{315}{a^3} \ ,$$

$$\psi_5 = \frac{1575}{2a^4} \ , \quad \psi_6 = \frac{693}{2a^5} \ , \quad \psi_7 = -\frac{693}{a^6} \ ,$$

y además:

$k = i + 2$,

$q_m^{(j+4)} = q_m^{(j)}, \quad (j = 1,2;\ m = 0,1,2)$,

$g_m^{(j+4)} = g_m^{(j)}, \quad (j = 1,2;\ m = 1,2,3,4)$,

$s_m^{(j+4)} = s_m^{(j)}, \quad (j = 1,2;\ m = 1,2,3,4,5,6)$,

$h_m^{(j+4)} = h_m^{(j)}, \quad (j = 1,2;\ m = 1,2,3,4,5,6,7,8)$,

$l_m^{(j+4)} = l_m^{(j)}, \quad (j = 1,2;\ m = 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10)$,

$n_m^{(j+4)} = n_m^{(j)}, \quad (j = 1,2;\ m = 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12)$,

$r_m^{(j+4)} = r_m^{(j)}, \quad (j = 1,2;\ m = 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14)$,

$g_0^{(i)} = a_0 q_0^{(i)} + a_2 q_2^{(i)}$,

$g_1^{(i)} = a_1 q_0^{(i)} + a_0 q_1^{(i)}$,

$g_2^{(i)} = a_1 q_1^{(i)} - a_2 q_2^{(i)}$,

$$g_3^{(i)} = a_2 q_0^{(i)} + a_0 q_2^{(i)} ,$$

$$g_4^{(i)} = a_2 q_1^{(i)} + a_1 q_2^{(i)} ; \qquad (24)$$

$$s_0^{(i)} = b_0 q_0^{(i)} + b_3 q_2^{(i)} ,$$

$$s_1^{(i)} = b_0 q_1^{(i)} + b_1 q_0^{(i)} + b_4 q_2^{(i)} ,$$

$$s_2^{(i)} = b_2 q_0^{(i)} + b_1 q_1^{(i)} - b_3 q_2^{(i)} ,$$

$$s_3^{(i)} = b_2 q_1^{(i)} - b_4 q_2^{(i)} ,$$

$$s_4^{(i)} = b_3 q_0^{(i)} + b_0 q_2^{(i)} ,$$

$$s_5^{(i)} = b_4 q_0^{(i)} + b_3 q_1^{(i)} + b_1 q_2^{(i)} ,$$

$$s_6^{(i)} = b_4 q_1^{(i)} + b_2 q_2^{(i)} ; \qquad (25)$$

$$h_0^{(i)} = c_0 q_0^{(i)} + c_4 q_2^{(i)} ,$$

$$h_1^{(i)} = c_1 q_0^{(i)} + c_0 q_1^{(i)} + c_5 q_2^{(i)} ,$$

$$h_2^{(i)} = c_2 q_0^{(i)} + c_1 q_1^{(i)} + (c_6 - c_4) q_2^{(i)} ,$$

$$h_3^{(i)} = c_3 q_0^{(i)} + c_2 q_1^{(i)} - c_5 q_2^{(i)} ,$$

$$h_4^{(i)} = c_3 q_1^{(i)} - c_6 q_2^{(i)} ,$$

$$h_5^{(i)} = c_4 q_0^{(i)} + c_0 q_2^{(i)} ,$$

$$h_6^{(i)} = c_5 q_0^{(i)} + c_4 q_1^{(i)} + c_1 q_2^{(i)} ,$$

$$h_7^{(i)} = c_6 q_0^{(i)} + c_5 q_1^{(i)} + c_2 q_2^{(i)} ,$$

$$h_8^{(i)} = c_6 q_1^{(i)} + c_3 q_2^{(i)} ; \qquad (26)$$

$$l_0^{(i)} = d_0 q_0^{(i)} + d_5 q_2^{(i)} ,$$

$$l_1^{(i)} = d_1 q_0^{(i)} + d_0 q_1^{(i)} + d_6 q_2^{(i)} ,$$

$$l_2^{(i)} = d_2 q_0^{(i)} + d_1 q_1^{(i)} + (d_7 - d_5) q_2^{(i)} ,$$

$$l_3^{(i)} = d_3 q_0^{(i)} + d_2 q_1^{(i)} + (d_8 - d_6) q_2^{(i)} ,$$

$$l_4^{(i)} = d_4 q_0^{(i)} + d_3 q_1^{(i)} - d_7 q_2^{(i)} ,$$

$$l_5^{(i)} = d_4 q_1^{(i)} - d_8 q_2^{(i)} ,$$

$$l_6^{(i)} = d_5 q_0^{(i)} + d_0 q_2^{(i)} ,$$

$$l_7^{(i)} = d_6 q_0^{(i)} + d_5 q_1^{(i)} + d_1 q_2^{(i)} ,$$

$$l_8^{(i)} = d_7 q_0^{(i)} + d_6 q_1^{(i)} + d_2 q_2^{(i)} ,$$

$$l_9^{(i)} = d_8 q_0^{(i)} + d_7 q_1^{(i)} + d_3 q_2^{(i)} ,$$

$$l_{10}^{(i)} = d_8 q_1^{(i)} + d_4 q_2^{(i)} ; \qquad (27)$$

$$n_0^{(i)} = m_0 q_0^{(i)} + m_6 q_2^{(i)} ,$$

$$n_1^{(i)} = m_1 q_0^{(i)} + m_0 q_1^{(i)} + m_7 q_2^{(i)} ,$$

$$n_2^{(i)} = m_2 q_0^{(i)} + m_1 q_1^{(i)} + (m_8 - m_6) q_2^{(i)} ,$$
$$n_3^{(i)} = m_3 q_0^{(i)} + m_2 q_1^{(i)} + (m_9 - m_7) q_2^{(i)} ,$$
$$n_4^{(i)} = m_4 q_0^{(i)} + m_3 q_1^{(i)} + (m_{10} - m_8) q_2^{(i)} ,$$
$$n_5^{(i)} = m_5 q_0^{(i)} + m_4 q_1^{(i)} - m_9 q_2^{(i)} ,$$
$$n_6^{(i)} = m_5 q_1^{(i)} - m_{10} q_2^{(i)} ,$$
$$n_7^{(i)} = m_6 q_0^{(i)} + m_0 q_2^{(i)} ,$$
$$n_8^{(i)} = m_7 q_0^{(i)} + m_6 q_1^{(i)} + m_1 q_2^{(i)} ,$$
$$n_9^{(i)} = m_8 q_0^{(i)} + m_7 q_1^{(i)} + m_2 q_2^{(i)} ,$$
$$n_{10}^{(i)} = m_9 q_0^{(i)} + m_8 q_1^{(i)} + m_3 q_2^{(i)} ,$$
$$n_{11}^{(i)} = m_{10} q_0^{(i)} + m_9 q_1^{(i)} + m_4 q_2^{(i)} ,$$
$$n_{12}^{(i)} = m_{10} q_1^{(i)} + m_5 q_2^{(i)} ; \tag{28}$$

$$r_0^{(i)} = f_0 q_0^{(i)} + f_7 q_2^{(i)} ,$$
$$r_1^{(i)} = f_1 q_0^{(i)} + f_0 q_1^{(i)} + f_8 q_2^{(i)} ,$$
$$r_2^{(i)} = f_2 q_0^{(i)} + f_1 q_1^{(i)} + (f_9 - f_7) q_2^{(i)} ,$$
$$r_3^{(i)} = f_3 q_0^{(i)} + f_2 q_1^{(i)} + (f_{10} - f_8) q_2^{(i)} ,$$
$$r_4^{(i)} = f_4 q_0^{(i)} + f_3 q_1^{(i)} + (f_{11} - f_9) q_2^{(i)} ,$$
$$r_5^{(i)} = f_5 q_0^{(i)} + f_4 q_1^{(i)} + (f_{12} - f_{10}) q_2^{(i)} ,$$
$$r_6^{(i)} = f_6 q_0^{(i)} + f_5 q_1^{(i)} - f_{11} q_2^{(i)} ,$$
$$r_7^{(i)} = f_6 q_1^{(i)} - f_{12} q_2^{(i)} ,$$
$$r_8^{(i)} = f_7 q_0^{(i)} + f_0 q_2^{(i)} ,$$
$$r_9^{(i)} = f_8 q_0^{(i)} + f_7 q_1^{(i)} + f_1 q_2^{(i)} ,$$
$$r_{10}^{(i)} = f_9 q_0^{(i)} + f_8 q_1^{(i)} + f_2 q_2^{(i)} ,$$
$$r_{11}^{(i)} = f_{10} q_0^{(i)} + f_9 q_1^{(i)} + f_3 q_2^{(i)} ,$$
$$r_{12}^{(i)} = f_{11} q_0^{(i)} + f_{10} q_1^{(i)} + f_4 q_2^{(i)} ,$$
$$r_{13}^{(i)} = f_{12} q_0^{(i)} + f_{11} q_1^{(i)} + f_5 q_2^{(i)} ,$$
$$r_{14}^{(i)} = f_{12} q_1^{(i)} + f_6 q_2^{(i)} . \tag{29}$$

Al reemplazar los valores de $q_m^{(i)}$, $m = 0, 1, 2$ que aparecen en las ecuaciones (24), (25), (26), (27), (28) y (29) por los valores de (17), insertar los valores resultantes en (20), (21), (22), y (23), y tener en cuenta el signo de la ecuación (19), obtenemos $\Delta\beta_i$ para J_5 y J_6.

Al tomar $E=0$ como valor inicial de la anomalía excéntrica obtenemos en las ecuaciones (5), (6) y (7) para $t=0$,

$$\tau = \frac{1}{\omega}(u,u*) ,$$

$$\alpha = u, \qquad \beta = 2u* .$$

Con esto, las ecuaciones (16) y (19) pueden ser utilizarse para computar τ y $\Delta\alpha_i$, $\Delta\beta_i$ respectivamente para $E = E_1$.

Entonces para $E = E_1$, tendremos:

$$\alpha_{iE_1} = \alpha_{i0} + \Delta\alpha_{iE_1} ,$$

$$\beta_{iE_1} = \beta_{i0} + \Delta\beta_{iE_1} ,$$

los cuales se convierten en las condiciones iniciales para el cálculo de τ, α, β para el siguiente paso. Estos valores pueden ser utilizados en (7), (8) y (9) para obtener t, x y x en E=E1.

4. Conclusiones

Con ayuda de expansiones en series de potencias que permiten expresar términos de la forma $1/r^n$ en función de la anomalía excéntrica, presentamos las expresiones analíticas que permiten calcular el movimiento de un satélite artificial considerando los armónicos zonales J^5 y J^6 en términos de los elementos KS. La inclusión de estos desarrollos a los calculados por Sharma (1993) permite obtener una teoría enteramente adecuada para describir el movimiento de un satélite que se mueve, como la gran mayoría, en una órbita poco excéntrica, a alturas superiores a los 600 Km.

5. Agradecimientos

El autor desea expresar su gratitud al profesor Eduardo Brieva por sus comentarios y útiles sugerencias, y a Colciencias por la financiación parcial de una pasantía en la Universidad de Sao Paulo, en donde se discutieron algunas ideas sobre los desarrollos aquí presentados. Este trabajo ha sido financiado por el CINDEC de la Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, a través del proyecto 803116.

6. Bibliografía

Kustaanheimo, P. & Stiefel, E. 1965, J. Reine Angew. Math. **218**, 204.

Sharma, R.K. 1989, Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy, **46**, 321.

——— 1991, VSSC/TR/154/91.

——— 1993, Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy, **56**, 505.

——— & **Mani, L.** 1985, Indian J. Pure Appl. Math. **16**, 833.

Stiefel, E.L. & Scheifele, G. 1971, Linear and Regular Celestial Mechanics, Spronger-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York.