LOGICA DE LOS HACES DE ESTRUCTURAS

por

Xavier Caicedo F.*

Resumen

Caicedo, X.: Lógica de los haces de estructuras. Rev. Acad. Colomb. Cienc. **19** (74): 569-586, 1995. ISSN 0370-3908.

Se exponen los principios de una lógica de estructuras e individuos variables o extendidos utilizando como modelos naturales los haces fibrados sobre espacios topológicos. La teoría de modelos resultante, caso particular de la lógica de los topoi, revela interesantes conecciones entre lógica y geometría. En este contexto, se presenta una noción de estructura genérica sobre un haz que ilumina las relaciones entre la lógica intuicionista y la clásica, y unifica los resultados fundamentales acerca de la construcción de modelos de la lógica de primer orden, la lógica infinitaria y la teoría de conjuntos.

Abstract

Utilizing sheaves over topological spaces as natural models, we expose the principles of a logic of extended and variable structures. The resulting model theory, particular case of the logic of topoi, reveals interesting connections between logic and geometry. In this context, we present a notion of generic structure over a sheaf which iluminates the relations between intuitionistic and classical logic, and unifies the fundamental results of first order logic, infinitary logic, and set theory on model construction.

No se da algo así como
la naturaleza en un instante...

A. N. Whitehead. El concepto de Naturaleza.

Introducción

La noción de haz sobre un espacio topológico ha jugado un papel fundamental en el Análisis Complejo, la Geometría Diferencial y la Geometría Algebraica desde su introducción en los años cuarenta por Leray, Cartan y Lazard. En el contexto de los trabajos de la escuela francesa de Geometría Algebraica de la postguerra dedicados a demostrar las conjeturas aritméticas de Weil, generalizó Grothendieck la noción de haz y nos enseño que es posible rehacer en la categoría de todos los haces sobre un *sitio* (hoy un *topos de Grothendieck*) las construcciones familiares de la categoría de los conjuntos clásicos. Motivado en gran parte por las ideas de Grothendieck, y gracias a la visión de Lawvere, Tierney, Joyal, Freyd, Reyes, y otros categoristas formados en la escuela norteamericana de Eilenberg y Mac Lane, ha salido a la luz el hecho fundamen-

* Departamento de Matemáticas y Estadística, Facultad de Ciencias, Universidad Nacional de colombia.

Departamento de Matemáticas, Universidad de los Andes, Bogotá, Colombia

tal de que los haces pueden verse como "conjuntos variables" los cuales obedecen una lógica intrínseca propia, y que las categorías de haces constituyen universos alternos cada uno de los cuales permite hacer una matemática heterodoxa que ilumina y enriquece a la clásica. La lógica binaria del universo de los conjuntos clásicos se reduce al caso especial en que la variación es nula. La leyes formales de esta lógica coinciden con las de la Lógica Intuicionista, propuesta por los matemáticos holandeses Brouwer y Heyting en el primer tercio de este siglo como alternativa crítica a la lógica Fregeana y a los fundamentos Cantorianos de las matemáticas hoy imperantes. Cada espacio topológico o, más generalmente, cada "sitio" induce en sus haces una lógica intermedia entre el intuicionismo y la lógica clásica cuyas leyes reflejan sus propiedades geométricas. La introducción del concepto de *topos elemental* por Lawvere y Tierney permite generalizar estos fenómenos a universos más abstractos. En este contexto, los resultados de consistencia e independencia de Cohen en teoría de conjuntos han sido reinterpretados como la construcción de ciertos topos que "colapsan" luego a universos clásicos por medio de operaciones lógico-geométricas. Los modelos booleanos de la teoría de conjuntos y los modelos Heyting-valuados de Fourman y Scott son haces sobre álgebras booleanas y de Heyting, respectivamente. Macintyre y otros han utilizado en forma muy limitada los haces sobre espacios booleanos en la teoría clásica de modelos.

Quizás el abstruso aparato categórico con que se han presentado generalmente estas ideas en la literatura ha hecho que matemáticos y lógicos no les hayan prestado la atención debida, y que sus posibles aplicaciones permanezcan en gran parte inexploradas. Exponemos en este trabajo los fundamentos de la lógica de los haces sobre espacios topológicos sin suponer conocimientos preliminares acerca de teoría de categorias, intentando justificarla desde una perspectiva epistemológica. El caso de los haces topológicos es ya suficientemente rico como para permitir las aplicaciones lógicas y matemáticas más interesantes, y para que el lector pueda adentrarse en posteriores generalizaciones categóricas a los topos de Grothendieck y los topos elementales. Introducimos en este contexto una teoría de modelos genéricos sobre haces que ilumina las conecciones entre lógica intuicionista y lógica clásica, y unifica los resultados fundamentales de la teoría de modelos (completitud, compacidad, omisión de tipos, propiedades de ultraproductos) y las diversas aplicaciones del método de "forcing" dispersas en la literatura (independencia en teoría de conjuntos, forzamiento de Robinson, etc.)

§ 1. Objetos variables y extendidos.

Los objetos y acontecimientos del mundo se presentan extendidos en el tiempo y el espacio. Esta observación es evidente con respecto a los objetos macroscópicos de la experiencia cotidiana, pero vale igualmente para los objetos de las teorías físicas incluyendo las partículas subatómicas cuya vida y dimensiones pueden ser muy cortas pero no reducirse a un solo punto espacio-temporal. Podría discutirse de ciertas partículas como el fotón o el neutrino si poseen una extensión espacial o no, pero toda partícula considerada por la Física posee una extensión temporal, su "vida", que es inmensa para las mencionadas partículas o del orden de 10^{-20} segundos para ciertos mesones, pero nunca se reduce a un solo instante. Obsérvese que aun los acontecimientos mentales, sin clara extensión espacial, parecen poseer un extensión temporal positiva.

De la misma manera, las propiedades y atributos de los objetos deben estar presentes en toda una región de su extensión espacio-temporal para poder ser detectados. Los acontecimientos puntuales e instantáneos de nuestros modelos físico-matemáticos del mundo parecen ser límites ideales de acontecimientos extensos y no verdaderos fenómenos naturales, como bien ha observado **Withehead** (1920) en su reconstrucción conceptual de la naturaleza. Sin embargo, no parecen haber advertido los filósofos de la física que al llevarse a sus últimas consecuencias esta localización puntual de los fenómenos, las leyes lógicas clásicas pueden perder su validez. Consideremos como ilustración de lo dicho las propiedades de una hoja de papel dividida en dos regiones complementarias, una totalmente blanca y otra totalmente negra, un típico objeto extendido (fig. 1):

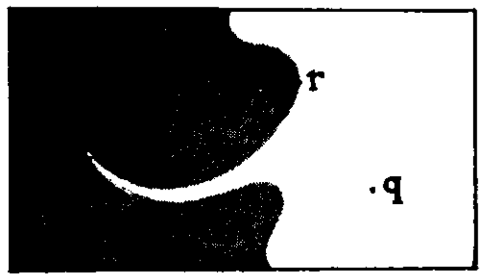


Figura 1

Ante las preguntas: *¿es negra o nó la hoja en el punto p? ¿en el punto q? ¿en el punto r?* responderemos sin vacilar que lo es en el punto p interior a la región negra y no lo es en el punto q totalmente externo a la misma, pero no es claro cual será nuestra respuesta para el punto r, acaballado entre las dos regiones. A pesar de que la negritud o ausencia de negritud parece estar totalmente determinada en cada uno de los puntos de nuestro modelo lógico-matemático de la hoja, razones de simetría conceptual nos impiden tomar partido, y no parece valer en este caso el "tercio excluso", una de las leyes fundamentales de la lógica tradicional. El problema se hace más inquietante al preguntarnos si es más negra la hoja en el punto r que en el punto s, o si corresponde a alguna percepción posible que la hoja sea blanca en un punto matemático aislado en medio de la región negra.

La respuesta convencional a las anteriores inquietudes dice que el color de la hoja (o del modelo matemático de la hoja) en los puntos de frontera como r depende de si la región oscura es *cerrada* o no, según las definiciones del Análisis Matemático (vése por ejemplo Rudin, 1976). Pero esta solución no tiene correlato perceptible: es imposible distinguir sensorialmente o experimentalmente una hoja en donde la región negra es matemáticamente cerrada de una hoja idénticamente coloreada en donde no lo es. Si la región negra incluyera su frontera, la región blanca no incluiría la suya, ¿por qué tal asimetría? Suponer que una región coloreada incluye o no sus puntos de frontera es una idealización matemática que no corresponde a ninguna intuición física pero salva las leyes de la lógica clásica.

La noción de color parece ser aplicable *prima facie* solamente a "regiones" y no a "puntos". Cualquier observación, tan fina como se quiera, que se haga de un punto lo será realmente de una región o *vecindad* del punto (matemáticamente hablando, de un conjunto que contiene un disco de radio positivo alrededor del mismo). Como alrededor de p existe una vecindad plenamente negra, no tenemos dificultad en atribuir la negritud a p. Lo análogo vale para el punto q interior a la región blanca. Sin embargo, cualquier observación de r lo será de una vecindad que resulta siempre en parte negra y en parte blanca, independientemente de que las regiones coloreadas sean o no matemáticamente cerradas, y como el punto mismo no es individualmente perceptible parece imposible asignarlo a una de las dos regiones.

Problemas similares se presentan cuando atribuimos propiedades instantáneas a objetos extendidos en el tiempo. En Física se acostumbra identificar a una partícula con la función o "curva temporal" que le asocia a cada instante sus atributos. Supongamos que uno de esos atributos es la velocidad y la partícula se mueve aceleradamente. ¿Qué significa que su velocidad en un instante dado t_0 sea de 1 *metro por segundo,* cuando sucede que en ningún intervalo de tiempo que se observe alrededor de t_0 se mide dicha proporción entre el espacio recorrido y el tiempo empleado?

Desde Newton, sabemos responder esta pregunta: la *velocidad instantánea* es el *límite matemático* de las proporciones que efectivamente podríamos medir en intervalos temporales alrededor de t_0 si dispusiesemos de mecanismos de medición arbitrariamente finos. Los escrúpulos que sobre la realidad y significado de la velocidad instantánea pudimos haber tenido al aprender la Física en la escuela han sido reprimidos por la coherencia e indiscutible efectividad de la noción de límite. Sin embargo, el contenido epistemológico de la velocidad instantánea sigue siendo una ficción análoga a la del color de un punto. La proposición: *la velocidad en el intante* t_0 *es* 1 *m/s* significa matemáticamente que para cada ϵ positivo se cumple la aserción:

existe un intervalo temporal abierto alrededor de t_0 *tal que todas las velocidades medidas en períodos contenidos en dicho intervalo que incluyan a* t_0 *están entre* $1+\epsilon$ *y* $1-\epsilon$ *m/s.*

La validez de esta afirmación en toda una vecindad abierta nos induce a atribuir idealmente la propiedad al instante t_0 y afirmar:

en el punto t_0 *la velocidad está entre* $1+\epsilon$ *y* $1-\epsilon$ *m/s.* (1)

Aplicando la propiedad arquimediana a esta velocidad ideal localizada en t_0, concluimos que es exactamente de 1 m/s. Volviendo a la aserción crítica (1), parece que aceptamos su validez en el instante t_0 porque se observa para todas las mediciones relevantes dentro de una vecindad temporal alrededor de t_0. Esto es análogo a declarar que la hoja de nuestro primer ejemplo es negra en un punto p porque hay una vecindad alrededor de p que se observa totalmente negra.

Si en cualquier vecindad abierta alrededor de t_0 se midiesen velocidades tanto dentro como fuera del intervalo numérico $E = [1+\epsilon, 1-\epsilon]$, no podríamos afirmar la proposición (1), pero tampoco podríamos afirmar su negación:

en el punto t_0 *la velocidad* ***no*** *está entre* $1+\epsilon$ *y* $1-\epsilon$,

pues para ello sería necesario que en cierto intervalo alrededor de t_0 las mediciones diesen todas fuera del intervalo E. Clásicamente, este último fenómeno no se describe como una falla del tercio excluso, más bien se afirma que en tal caso "la velocidad no existe en t_0" y que por tanto ni (1) ni su negación tienen sentido. Pero esta es una situación similar a la del punto r en la frontera de la región negra de nuestro primer ejemplo. ¿Podriamos afirmar, consecuentemente, que "en r el color no existe" y por lo tanto no tienen sentido la aserción: *la hoja es negra en el punto r,* ni su negación?

Las nociones de *punto geométrico* e *instante temporal* son idealizaciones límite gracias a las cuales podemos construir nuestros modelos matemáticos del mundo. No es claro que podamos prescindir de las mismas o que ganásemos algo de poder hacerlo, aparte de complicar los modelos inmensamente. Sin embargo, las anteriores observaciones apuntan a la conveniencia de revisar la lógica que gobierna a las propiedades puntuales o instantáneas, las cuales deben ser también un límite de propiedades extensas. Precisamos una lógica adecuada para individuos extendidos, digamos sobre abiertos de un espacio topológico X (que podemos imaginar como el espacio-tiempo), cuyas propiedades puntuales cumplan el siguiente paradigma de continuidad veritativa:

Si una propiedad vale de un individuo en un punto de su dominio de extensión, entonces debe valer en toda una vecindad de dicho punto.

Ejemplo de una propiedad matemática que ya cumple dicho paradigma es la analiticidad de una función compleja en un punto z_0. Utilizando los haces de estructuras sobre espacios topológicos como estructuras extendidas es posible lograr tal objetivo con respecto a todas las propiedades matemáticamente predicables. Se obtiene con ésto una lógica que no se opone a la clásica sino que la enriquece e incorpora en varias formas al proporcionarle poderosos métodos para la construcción de modelos, y la cual constituye además un interpretación natural de la lógica intuicionista, que se deja generalizar a estructuras aún más abstractas que los haces: a los haces sobre sitios de Grothendieck o a los objetos de un topos elemental. Esperamos que el potencial lógico-matemático de estas ideas resulte claro para el lector de lo aquí expuesto. Por otra parte, creemos que el estudio de la lógica natural de los objetos variables y extendidos podría quizás contribuir a la formulación de modelos más finos de la realidad, o al mejor entendimiento de aquellos afectados por extrañas paradojas como la física cuántica.

§ 2. Haces sobre espacios topológicos.

La idea de los haces sobre espacios topológicos aparece por por primera vez en el trabajo de **H. Weyl** (1913) acerca de superficies de Riemann. Su definición moderna fue introducida en los seminarios de **H. Cartan** (1948-52). La escuela francesa de Geometría Algebraica de la postguerra, liderada por **J.P. Serre** (1953), **M. Artin** (1962) y **A. Grothendieck** (1960-1967), una de las maś brillantes pléyades de matemáticos del siglo, generalizó la cohomología de espacios con coeficientes en grupos, módulos o anillos, a la cohomología de *esquemas* (es decir ciertos *haces*) con coeficientes en *haces* de grupos, módulos o anillos. En este contexto, Grothendieck introdujo los haces sobre *sitios* en lugar de espacios topológicos puntuales, es decir sobre categorías pequeñas dotadas de los que hoy llamamos una *topología de Grothendieck*. El trabajo de este grupo se realizó principalmente en el famoso *Seminarie de Géométrie Algébrique* del I.H.E.S (Instituto de Altos Estudios Científicos de París). La motivación para tal empresa eran las conjeturas de **A. Weil** (1949) sobre la función Zeta asociada al número de soluciones de sistemas de ecuaciones algebraicas sobre cuerpos finitos. El mismo Weil había observado que las propiedades de tal cohomología podrían llevar a demostrar sus conjeturas, lo cual fue confirmado parcialmente por Grothendieck y luego demostrado plenamente por **P. Deligne** (1974).

Es típico del trabajo matemático del siglo XX que problemas de teoría de números como las conjeturas de Weil fuesen atacados por métodos geométricos, y que los problemas geométricos se atacasen a su vez con una formidable maquinaria abstracta. La teoría creada para tal propósito, obra de Grothendieck principalmente, es uno de los más complejos y hermosos edificios de la matemática. Va mucho más allá de su propósito inicial, y sus posibles consecuencias y aplicaciones no han sido todavía suficientemente exploradas. Lo que más adelante exponemos sobre lógica está inspirado en último término en el espíritu que anima el trabajo de Grothendieck, aunque él nunca llegó a ocuparse explícitamente de asuntos lógicos.

I. Haces. Aunque existen magníficas presentaciones de la teoría de haces, por ejemplo **Godement** (1958), **Tennison** (1975) o **Harsthorne** (1977), entre otros, damos una somera introducción a sus conceptos fundamentales para ponerlos en el contexto lógico que nos interesa. En primera instancia consideraremos a los haces como espacios fibrados más bien que funtores de secciones.

Definición 2.1. Dado un espacio topológico X, un *haz (espace étale, sheaf, sheaf-space) sobre* X es un par $\mathcal{H} = (E, p)$, donde E es un espacio topológico y $p: E \to X$ es un *homeomorfismo local*, es decir una función tal que cada punto $e \in E$ tiene una vecindad abierta S para la cual se cumple:

i) $p(S)$ es abierto en X.
ii) $p|S: S \to p(S)$ es un homeomorfismo.

(En algunos trabajos se reserva el nombre de *haz* para el caso en que p es sobreyectiva, y se utiliza *espacio fibrado* en el caso general (**Dedecker**, 1969), en otros se llama haz al funtor de secciones y a nuestro haz se le llama *espacio-haz)*.

Se sigue inmediatamente de la definición que p debe ser continua y abierta, y que los abiertos para los cuales se cumple (i) y (ii) forman una base para la topología de E. Para cada elemento x en X, el conjunto $E_x = p^{-1}(x) = \{ e \in E \mid p(e) = x\}$ se llama la *fibra de*

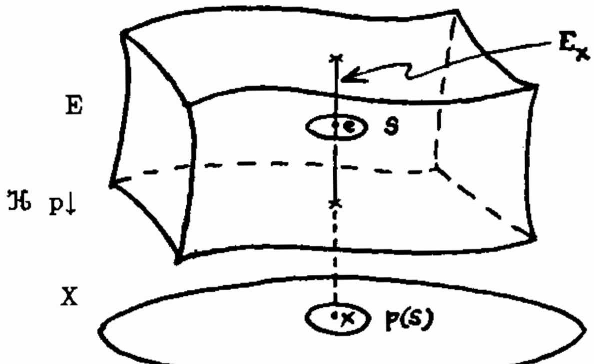


Figura 2

$\mathcal{H}$ sobre X. Una fibra puede ser vacía en caso de que p no sea sobreyectiva. Cada fibra tiene la topología discreta como subespacio de E, pues si $e \in p^{-1}(x)$ y S es una vecindad abierta de e que cumple la condición (ii) de la definición de haz, entonces $p^{-1}(x) \cap S = \{e\}$ por inyectividad de p en S. Podemos visualizar a E como lo unión disyunta de sus fibras, de ahí el nombre de *espacio fibrado* o de *haz* (un haz de fibras). Sin embargo un haz matemático es más que una colección de fibras, pues las vecindades abiertas que aparecen en la definición establecen conecciones continuas "horizontales" entre fibras cercanas. Un haz es pues un haz de fibras "atadas" por ciertos abiertos.

Una *sección* de $\mathcal{H}$ es una función continua $\sigma: U \to E$, donde U es algún abierto de X, tal que $p \circ \sigma = Id_U$, es decir una *inversa local a derecha* de p.

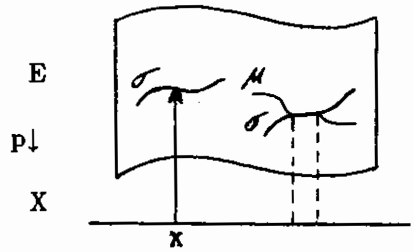
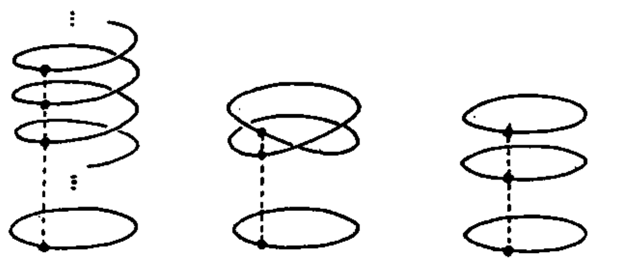


Figura 3

Una sección se dice *global* si su dominio es todo X; de lo contrario se llama *local*. Un fibrado puede no poseer secciones globales, aún cuando p sea sobreyectiva. Evidentemente una sección $\sigma : U \rightarrow \sigma(U)$ es un homeomorfismo y está completamente determinada por su *imagen* $\mathrm{Im}(\sigma) = \sigma(U)$, pues tiene a $p|\sigma(U)$ por inversa continua. Además $\mathrm{Im}(\sigma)$ es abierta en E ya que si $e \in \sigma(U)$ y S es una vecindad de e que satisface (i) y (ii), entonces $S \cap \sigma(U) = p^{-1}(p(S) \cap U)$ es una vecindad abierta de e contenida en $\sigma(U)$. Por tanto podemos identificar a las secciones con los abiertos de E que cumplen (i) y (ii) en la definición de haz.

Ejemplo 2.1. Los *espacios recubridores* de la Topología Algebraica (ver **Massey**, 1967) son haces; tenemos, por ejemplo, los siguientes haces sobre el círculo $S^1 = \{z : |z| = 1\}$:



i) $p: \mathbb{R} \rightarrow S^1$, $p(x) = e^{ix}$ ii) $p: S^1 \rightarrow S^1$, $p(z) = z^2$ iii) $\pi_2: \{0,1\} \times S^1 \rightarrow S^1$

Figura 4

Los haces (i) y (ii) no poseen secciones globales. Los haces (ii) y (iii) muestran que la estructura de las fibras no determina la estructura global del haz.

Ejemplo 2.2. Podemos construir un haz de anillos sobre el plano complejo $\mathbb{C}$ tomando por fibras los anillos locales $E_a = \mathbb{C}[[z - a]]$ de series de potencias complejas con centro $a \in \mathbb{C}$ y radio de convergencia positivo. A la unión disyunta $E = \bigcup_{a \in \mathbb{C}} E_a$ se la dota de la topología generada por los siguientes abiertos básicos:

$$S_{U,h} = \{ \sum a_n(z\text{-}a)^n : a \in U \text{ y } \sum a_n(z\text{-}a)^n \text{ representa a h en una vecindad de a} \},$$

donde U es abierto en $\mathbb{C}$ y h una función holomorfa en U. La proyección $p: E \rightarrow \mathbb{C}$ está definida de la manera obvia. Puede verse que este haz no es un espacio recubridor de $\mathbb{C}$. Sus secciones están en correspondencia biunívoca con las funciones holomorfas.

II. Haces como estructuras variables. Consideraremos en este trabajo a un haz sobre un espacio X como un conjunto que se extiende o desarrolla sobre X. Los "elementos" de este conjunto no serán los puntos de E, sino las secciones del haz, *individuos que se extienden sobre abiertos* de X. El valor $\sigma(x)$ será solamente la descripción puntual (tal vez ideal) de la sección σ en x. Desde esta perspectiva, la siguiente observación indica que la relación de igualdad entre secciones de un haz satisface el paradigma lógico propuesto en la sección anterior.

LEMA 2.1. *Si dos secciones coinciden en un punto $x \in X$, entonces coinciden en toda una vecindad de* x.

Demostración. Suponga $\sigma(x) = \mu(x)$; como $S = \mathrm{Im}(\sigma) \cap \mathrm{Im}(\tau)$ es abierta y p es una función abierta, entonces $V = p(S)$ es una vecindad abierta de x; además $\sigma|V = \mu|V$, ya que $p \circ (\sigma|V) = \mathrm{Id}_V = p \circ (\mu|V)$ y p es inyectiva en $S = \sigma(V) = \mu(U)$. □

Como en el ejemplo 2.2, las fibras de un haz pueden ser anillos, grupos, conjuntos ordenados, o cualquier otro tipo de estructuras matemáticas. Si la estructura de las fibras "cambia continuamente" al movernos de fibra a fibra a "lo largo" de las secciones se dice que tenemos un *haz de estructuras*. Este es el caso de las operaciones de anillo en el mencionado ejemplo 2.2. Nos restringiremos en este trabajo a los haces de estructuras de primer orden, aunque es posible trabajar con estructuras de orden superior. Fijemos un tipo de estructuras $\tau = <R^n,.., f^m,.., c,..>$, donde R es un símbolo típico de predicado n-ario, f un símbolo de operación m-aria y c un símbolo de constante.

Definición 2.2. Un *haz de estructuras* $\mathfrak{A}$ *de tipo* τ *sobre* X consta de:

1) Un haz (E, p) sobre X.

2) P ara cada $x \in X$, una estructura $\mathfrak{A}_x = (E_x, R_x, f_x, c_x)$ de tipo τ con la fibra E_x por dominio (es decir $R_x \subseteq E_x{}^n$, $f_x: E_x{}^m \rightarrow E_x$ y $c_x \in E_x$), sujeta a las condiciones siguientes:

i) el conjunto $R^{\mathfrak{A}} = \cup_x R_x$ es abierto en $\cup_x E_x{}^n$ (como subespacio del espacio producto E^n),

ii) la función $f^{\mathfrak{A}} = \cup_x f_x: \cup_x E_x{}^m \rightarrow \cup_x E_x$ es continua,

iii) la función $c^{\mathfrak{A}}: X \rightarrow A$ dada por $c^{\mathfrak{A}}(x) = c_x$ es una sección global continua.

El espacio $E \underset{X}{\times} ... \underset{X}{\times} E = \cup_x E_x{}^n$ es el *producto fibrado de* E *por* E (n *veces*). Se verifica fácilmente que el par $(E \underset{X}{\times} ... \underset{X}{\times} E, p^*)$, donde p^* envía $E_x{}^n$ a x, es un haz sobre X cuyas secciones tienen la forma $<\sigma_1,..,\sigma_n>(x) = (\sigma_1(x),.., \sigma_n(x))$, con σ_i sección de $\mathfrak{A}$. Además se demuestra fácilmente que la continuidad de la función $f^{\mathfrak{A}}$ equivale a la de todas las funciones parciales $f^{\mathfrak{A}} \circ <\sigma_1,..,\sigma_m>(x) = f_x(\sigma_1(x),..,\sigma_m(x))$, las cuales son por lo tanto secciones de $\mathfrak{A}$.

Cada fibra $\mathfrak{A}_x$ es una estructura en el sentido clásico, con la salvedad de que puede ser vacía. Los predicados y funciones extendidas o variables denotados por los símbolos R y f satisfacen también el paradigma de continuidad veritativa cuando se aplican a secciones del haz. En realidad, éste paradigma vale para cualquier propiedad o relación *positiva* entre secciones, lo cual generaliza el Lema 2.1:

LEMA 2.2. *Si $\varphi(v_1,...,v_n)$ es una fórmula de primer orden que contiene solamente los operadores lógicos* $=, \wedge, \vee, \exists$, *además de los predicados y funciones atómicas, y $\varphi[\sigma_1(x),...,\sigma_n(x)]$ es verdadera en $\mathfrak{A}_x$, entonces existe una vecindad abierta U de x tal que $\varphi[\sigma_1(y),...,\sigma_n(y)]$ es verdadera en $\mathfrak{A}_y$ para toda $y \in U$.*

Demostración. Que $R[\sigma_1(x),..,\sigma_n(x)]$ sea verdadero en $\mathfrak{A}_x$ significa que $(\sigma_1(x),..,\sigma_n(x)) \in R^{\mathfrak{A}}$; tome como vecindad de x a $U = p(\mathrm{Im}(<\sigma_1,..,\sigma_n>) \cap R^{\mathfrak{A}})$, que es abierto por serlo $R^{\mathfrak{A}}$ y por ser $<\sigma_1,..,\sigma_n>$ una sección, entonces $(\sigma_1(y),..,\sigma_n(y)) \in R^{\mathfrak{A}}$ para toda $y \in U$. Si $f^{\mathfrak{A}}((\sigma_1(x),..,\sigma_m(x)) = \mu(x)$, entonces por continuidad de $f^{\mathfrak{A}} \circ <\sigma_1,..,\sigma_m>$ existe una vecindad abierta U de x tal que $f^{\mathfrak{A}} \circ <\sigma_1,..,\sigma_m>(U) \subseteq \mathrm{Im}(\mu)$; se verifica fácilmente que $f^{\mathfrak{A}}(\sigma_1(y),..,\sigma_m(y) = \mu(y)$ para toda $y \in U$, ya que las secciones están determinadas por su imagen. Esto demuestra el caso atómico de la afirmación, el resto se obtiene por inducción en términos y fórmulas. □

III. Prehaces y germinación. Es común presentar a los haces funtorialmente, en términos de sus *prehaces de secciones*. Dado un haz $\mathfrak{A}$ de estructuras sobre X y un abierto U de X, el conjunto de *secciones sobre* U:

$$\mathfrak{A}(U) = \{ \sigma : \mathrm{dom}(\sigma) = U \}$$

hereda una estructura del mismo tipo que $\mathfrak{A}$, pues es una subestructura natural del producto directo de las fibras $\prod_{x \in U} \mathfrak{A}_x$. Además, para cada inclusión $U \supseteq V$ entre abiertos , la *restricción*

$$\rho_{UV}: \mathfrak{A}(U) \to \mathfrak{A}(V), \quad \rho_{UV}(\sigma) = \sigma|V$$

es un homomorfismo entre las correspondientes estructuras. El sistema de estructuras $\mathfrak{A}(U)$ y homomorfismos ρ_{UV} permite reconstruir a $\mathfrak{A}$, como explicamos en seguida en un contexto más general.

Definición 2.3. Un *prehaz de estructuras de tipo* τ sobre X es una asignación Γ de una estructura $\Gamma(U)$ de tipo τ a cada abierto U de X, y de un homomorfismo $\Gamma_{UV}: \Gamma(U) \to \Gamma(V)$ a cada inclusión $U \supseteq V$, de manera que $\Gamma_{UU} = \mathrm{Id}_U$, y $\Gamma_{VW} \circ \Gamma_{UV} = \Gamma_{UW}$ cuando $U \supseteq V \supseteq W$.

En el lenguaje de categorías, un prehaz de estucturas de tipo τ es un funtor contravariante Γ: $\mathrm{Ab}(X) \to \mathrm{Estr}_\tau$, donde Ab(X) es la categoría de abiertos de X con las inclusiones por morfismos, y Estr_τ es la categoría de estructuras y homomorfisimos de tipo τ. En particular, el *prehaz de secciones* de un haz $\mathfrak{A}$ es el funtor $\Gamma_{\mathfrak{A}}$ que asigna $\Gamma_{\mathfrak{A}}(U) = \mathfrak{A}(U)$ a cada abierto U de X y $(\Gamma_{\mathfrak{A}})_{UV} = \rho_{UV}$ a cada inclusión $U \supseteq V$.

Definición 2.4. Todo prehaz Γ puede transformarse en un haz $\mathfrak{G}\Gamma$ de *gérmenes*. Para cada $x \in X$, $\mathfrak{G}\Gamma$ tiene por fibra $(\mathfrak{G}\Gamma)_x$ sobre x al límite directo de la familia dirigida de estructuras y homomorfismos constituida por el prehaz restringido al filtro $\mathcal{V}(x)$ de vecindades abiertas de x. Es decir,

$$(\mathfrak{G}\Gamma)_x = \varinjlim_{U \in \mathcal{V}(x)} \Gamma(U) = \dot{\bigcup}_{U \in \mathcal{V}(x)} \Gamma(U) / \sim_x$$

donde, si $a \in \Gamma(U)$ y $b \in \Gamma(V)$:

$$a \sim_x b \Leftrightarrow \exists\, W \in \mathcal{V}(x),\ W \subseteq U \cap V \text{ tal que } f_{UW}(a) = f_{VW}(b);$$

y si denotamos por $a/_x$ a la clase de equivalencia de a en x, llamada el *gérmen de* a *en* x, tenemos:

$$(a_1/_x,\dots,a_n/_x) \in R_x \Leftrightarrow \exists U \in \mathcal{V}(x) \text{ tal que } (a_1,\dots,a_n) \in R^{\mathfrak{A}(U)}.$$

$$f_x(a_1/_x,\dots,a_n/_x) = f^{\mathfrak{A}(U)}(a_1,\dots,a_n)/_x .$$

El espacio de fibras $E^* = \dot{\bigcup}_x \Gamma_x$ tiene la topología inducida por las imágenes de las secciones: σ_a: $U \to E$, $\sigma_a(x) = a/_x$, para cada $a \in \Gamma(U)$, $U \in \mathrm{Ab}(X)$.

Ejemplo 2.3. El haz de *gérmenes de funciones holomorfas* es el que se obtiene al germinar el siguiente prehaz de anillos:

$$\Gamma(U) = (\{ h: U \to \mathbb{C} \mid h \text{ holomorfa en } U \}, +, \bullet)$$
$$U \subseteq \mathbb{C}$$
$$f_{UV}(h) = h|V,$$

donde la suma y el producto se definen por componentes. Ahora bien, dos funciones holomorfas representan el mismo gérmen en z_0 si coinciden en una vecindad de z_0. Pero esto significa que tienen desarrollos en serie de potencias idénticos alrededor de z_0; se ve entonces que la fibra Γ_{z_0} de gérmenes sobre z_0 está en correspondencia biunívoca con la fibra del haz de series de potencias del Ejemplo 2.2. En efecto, estos dos haces de son topológicamente y algebraicamente isomorfos.

Lema 2.3. *Si* $\Gamma_{\mathfrak{A}}$ *es el prehaz de secciones de un haz* $\mathfrak{A}$, *entonces* $\mathfrak{G}\Gamma_{\mathfrak{A}}$ *es homeomorfo-isomorfo al haz original* $\mathfrak{A}$. *Es decir existe un homeomorfismo* H: $E^* \to E$ *que envía isomórfamente cada fibra de gérmenes* $(\mathfrak{G}\Gamma_{\mathfrak{A}})_x$ *a la fibra* $\mathfrak{A}_x$ *del haz original.*

Demostración. Defina $H(\sigma/_x) = \sigma(x)$. □

Definición 2.5. Diremos que un prehaz de estructuras Γ es *exacto* si, dado $U = \cup_i U_i$ y $\sigma_i \in \Gamma(U_i)$ tales que $\Gamma_{U_i,U_i \cap U_j}(\sigma_i) = \Gamma_{U_j,U_i \cap U_j}(\sigma_j)$ para todo i, j, existe un único $\sigma \in \Gamma(U)$ tal que $\Gamma_{U,U_i}(\sigma) = \sigma_i$ para todo i; y lo mismo se cumple para las relaciones $R^{\Gamma(U)}$ de $\Gamma(U)$, vistas como prehaces.

El prehaz de *funciones holomorfas* del Ejemplo 2.3 es exacto. Lo mismo es cierto del prehaz de funciones complejas continuas en abiertos de $\mathbb{C}$. Más generalmente, dados un espacio topológico X y una estructura topológica $\mathfrak{B}$, el prehaz de estructuras de funciones continuas $\Gamma(U) = \mathcal{C}(U,\mathfrak{B})$, con U abierto en X y con las restricciones como homomorfismos de transición, es exacto.

Un prehaz exacto Γ resulta siempre naturalmente isomorfo al prehaz de secciones de su haz de gérmenes (véase **Tennison**, 1975 para prehaces de conjuntos o de grupos), y por lo tanto a un prehaz de funciones continuas. Más precisamente,

Lema 2.4. *Si* Γ *es un prehaz exacto, entonces* $\Gamma_{\mathfrak{G}\Gamma}(U) \approx \Gamma(U)$ *de manera que las restricciones* ρ_{UV} *de* $\Gamma_{\mathfrak{G}\Gamma}$ *se transforman en los homomorfismos* Γ_{UV} *de* Γ.

Ejemplo 2.5. Dada una variedad diferencial **M**, el prehaz de funciones diferenciables en abiertos **de M**: $\mathfrak{D}(U) = \mathcal{C}^1(U,M)$ es un prehaz exacto de **álgebras**, de manera que da lugar a un haz de gérmenes $\mathfrak{G}\mathfrak{D}$ cuya álgebra de secciones continuas sobre cada abierto U es isomorfa a $C^1(U,M)$. Un *vector tangente de* M *en* x es una transformación lineal v de la fibra $(\mathfrak{G}\mathfrak{D})_x$ en si misma que satisface la regla de Leibniz: $v(ab) = av(b) + v(a)b$. El *espacio tangente* T_x es por definición el espacio vectorial de todos los vectores tangentes en x. Este cambia continuamente de punto a punto, lo cual puede hacerse explícito uniendo disyuntamente todos los espacios tangentes para formar un nuevo espacio topológico (de hecho otra variedad diferencial) que, junto con la proyección que envía T_x a x, constituye el *fibrado tangente* TM. Podemos visualizar el fibrado tangente del círculo, cuyos espacios tangentes son rectas, como la superficie del tubo a la derecha de la figura 5:

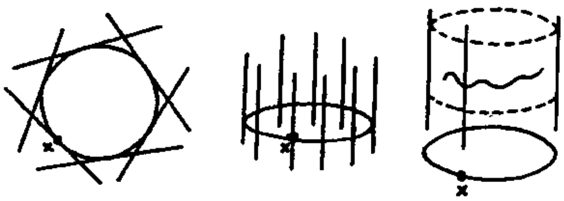


Figura 5

TM no es un haz ya que las fibras T_x no son discretas. Sin embargo, sus secciones locales diferenciables, los llamados *campos vectoriales*, forman un prehaz exacto de álgebras de Lie:

$$\mathbf{V}(U) = \{ V: U \to TM \mid V \text{ diferenciable}, V(x) \in T_x\},$$
$$U \subseteq M$$
$$f_{UV}(V) = h|^{\backprime}V,$$

de manera que para cada $U \in Ab(M)$ la estructura de secciones de $\mathfrak{G}\mathbf{V}$ sobre U es naturalmente isomorfa a $\mathbf{V}(U)$, y los campos vectoriales de M sobre U pueden verse como las secciones continuas de cierto haz.

De los lemas 2.3 y 2.4 se desprende que podemos considerar indistintamente a los haces como ciertos espacios fibrados, o como ciertos prehaces. La equivalencia de los dos puntos de vista se expresa con precisión en el lenguaje de las categorías. Sea $\mathbf{H}_\tau(X)$ la categoría de haces de estructuras de tipo τ sobre X que tiene por morfismos entre (E,p) y (E',p') a las funciones continuas m: E $\to$ E' que envían isomorfamente E_x a E'_x, y sea $\mathbf{PE}_\tau(X)$ la categoría de prehaces exactos de estructuras de tipo τ sobre X, con las *transformaciones naturales* entre funtores por morfismos, entonces los funtores $\Gamma_{(\ )}$: $\mathbf{H}_\tau(X) \to \mathbf{PE}_\tau(X)$ y $\mathfrak{G}$: $\mathbf{PE}_\tau(X) \to \mathbf{H}_\tau(X)$ establecen una equivalencia entre categorías (es decir, un isomorfismo de categorías "módulo isomorfismo de objetos").

Es la noción de prehaz exacto la que puede generalizarse a la de haz sobre un *sitio*, y lleva a los topos de Grothendieck. Las categorías de haces, de prehaces, o de prehaces exactos de tipo $\tau = \emptyset$ sobre un espacio X, son todas topos de Grothendieck; y los haces, prehaces y prehaces exactos de estructuras de tipo τ no vacío pueden verse como "objetos o diagramas de tipo τ" en los correspondientes topos.

§ 3. Lógica de los haces.

A partir de la creación de la Teoría de Categorías por **Eilenberg y MacLane** (1945) y sus aplicaciones a la homología y la cohomología, se hizo cada vez más evidente que algunas categorías constituyen universos matemáticos alternativos de riqueza análoga a la de la Categoría de Conjuntos. Esto se manifiesta de una manera evidente en las categorías de haces generalizados introducidas por **Grothendieck** (1960) en su nueva fundamentación de la Geometría Algebraica, hoy llamados *topos de Grothendieck*. Lo anterior motivó a varios miembros de la escuela norteamericana de categoristas formada por MacLane y Eilenberg: **Lawvere, Tierney, Joyal, Freyd**, y **Reyes** (1960-70), entre otros a intentar fundamentar las matemáticas en la teoría pura de categorías. Las propiedades esenciales de los topos de Grothendieck dieron lugar a la noción más general de *topos elemental* (**Lawvere**, 1971). Lawvere impulsó la idea de que los haces constituyen "estructuras variables". Así un haz de grupos debe verse como un solo grupo que varía sobre el espacio base, más bien que una gavilla de grupos distintos. Estas motivaciones y los resultados técnicos sobre la lógica interna de los topos, como la construcción de los conectivos y cuantificadores en un topos debida a **Freyd** (1972) confluyen en la misma lógica, la llamada *semántica de Kripke-Joyal*. La definición usual de la semántica de Kripke-Joyal puede resultar misteriosa y ad-hoc para quien no sea experto en categorías; sin embargo, ella puede "deducirse" de nuestros puntos de vista sobre la verdad puntual. Presentamos aquí la semántica de los haces de estructuras sobre espacios topológicos como una noción de verdad localizada en los puntos del espacio de base que cumple el paradigma de continuidad veritativa propuesto en nuestras discusiones preliminares. La semántica de Kripke-Joyal puede interpretarse entonces como la *validez* en todos los puntos de un abierto, de donde resultan inmediatamente todas sus propiedades.

I. Semántica puntual. Como hemos indicado en la sección anterior, consideramos a un haz como una estructura extendida sobre el espacio base, y a las fibras como meras descripciones puntuales o instantáneas de la estructura en su variación. La estructura está constituida por el objeto global y no por sus descripciones puntuales. De esta manera, los "elementos" de la estructura serán las secciones continuas, individuos que varían sobre su dominio en el espacio base. El valor $\sigma(x)$ de una sección en un punto x no será un individuo sino la descripción puntual o instantánea de un individuo. Lo anterior corresponde a nuestra noción ordinaria de individuo; una *amiba*, por ejemplo, puede considerarse como una sección sobre un abierto del espacio tridimensional, o mejor del espacio-tiempo cuatridimensional, con valores en un espacio E de descripciones fisico-químicas puntuales. Si el espacio de base es lineal, podemos imaginar que la estructura es un universo en evolución y que las secciones locales representan las *curvas temporales* de las partículas materiales, la duración de cuyas vidas es su domino.

En consecuencia, interpretaremos el lenguaje lógico de manera que los sujetos de las proposiciones sean las secciones y no los puntos geométricos del espacio de fibras. Por otra parte, las propiedades de las secciones podrán variar de punto a punto de su dominio de extensión de modo que las proposiciones lógicas tendrán la forma:

> *las secciones* $\sigma_1,\ldots,\sigma_n$ *tienen la propiedad* P *en el punto* x.

Damos un sentido preciso a esta idea para el lenguaje predicativo de primer orden, sintácticamente el mismo de la lógica clásica. En adelante, *sección definida en x* (respectivamente, *en* U) significará *sección definida al menos en* x (respectivamente, *al menos en* U).

Definición 3.1. Sea L_τ el conjunto de fórmulas de primer orden de tipo τ. Dado un haz de estructuras $\mathfrak{A}$ de tipo τ sobre X, definimos inductivamente en fórmulas $\varphi(v_1,\ldots,v_n) \in L_\tau$ la relación: $\mathfrak{A}$ *fuerza* $\varphi[\sigma_1,\ldots,\sigma_n]$ *en* x, para secciones $\sigma_1,\ldots,\sigma_n$ de $\mathfrak{A}$ definidas en $x \in X$; en símbolos:

$$\mathfrak{A} \Vdash_x \varphi[\sigma_1,\ldots,\sigma_n].$$

1) Si φ es atómica y $t_1,\ldots, t_k$ son términos de tipo τ:
$\mathfrak{A} \Vdash_x (t_1=t_2)[\sigma_1,\ldots,\sigma_n] \Leftrightarrow$
$t_1^{\mathfrak{A}_x}[\sigma_1(x),\ldots,\sigma_n(x)] = t_1^{\mathfrak{A}_x}[\sigma_1(x),\ldots,\sigma_n(x)]$

$\mathfrak{A} \Vdash_x R(t_1,\ldots,t_k)[\sigma_1,\ldots,\sigma_n] \Leftrightarrow$
$(t_1^{\mathfrak{A}_x}[\sigma_1(x),\ldots,\sigma_n(x)],\ldots,t_k^{\mathfrak{A}_x}[\sigma_1(x),\ldots,\sigma_n(x)]) \in R_x$.

2) $\mathfrak{A} \Vdash_x (\varphi \wedge \psi)[\sigma_1\ldots \sigma_n] \Leftrightarrow$
$\mathfrak{A} \Vdash_x \varphi[\sigma_1\ldots \sigma_n]$ y $\mathfrak{A} \Vdash_x \psi[\sigma_1\ldots \sigma_n]$.

3) $\mathfrak{A} \Vdash_x (\varphi \vee \psi)[\sigma_1\ldots \sigma_n] \Leftrightarrow$
$\mathfrak{A} \Vdash_x \varphi[\sigma_1\ldots \sigma_n]$ o $\mathfrak{A} \Vdash_x \psi[\sigma_1\ldots \sigma_n]$.

4) $\mathfrak{A} \Vdash_x \neg\varphi[\sigma_1\ldots \sigma_n] \Leftrightarrow$ existe una vecindad abierta U de x tal que para toda $y \in U$: $\mathfrak{A} \nVdash_y \varphi[\sigma_1,\ldots,\sigma_n]$.

5) $\mathfrak{A} \Vdash_x (\varphi\rightarrow\psi)[\sigma_1\ldots \sigma_n] \Leftrightarrow$ existe una vecindad abierta de x tal que para toda $y \in U$:
si $\mathfrak{A} \Vdash_y \varphi[\sigma_1\ldots \sigma_n]$ entonces $\mathfrak{A} \Vdash_y \psi[\sigma_1\ldots \sigma_n]$.

6) $\mathfrak{A} \Vdash_x \exists v\, \varphi(v, \sigma_1\ldots \sigma_n] \Leftrightarrow$ existe σ definida en x tal que $\mathfrak{A} \Vdash_x \varphi[\sigma, \sigma_1,\ldots, \sigma_n]$.

7) $\mathfrak{A} \Vdash_x \forall v\, \varphi(v, \sigma_1\ldots \sigma_n] \Leftrightarrow$ existe vecindad abierta U de x tal que para toda $y \in U$ y toda σ definida en y: $\mathfrak{A} \Vdash_y \varphi[\sigma, \sigma_1\ldots \sigma_n]$.

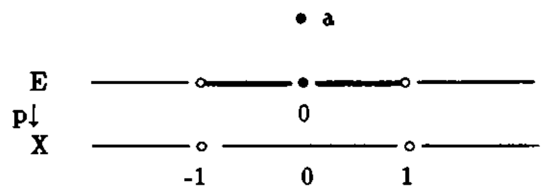
(Por supuesto, en la cláusulas (4), (5) y (7) el abierto U debe estar contenido en $\cap_i \mathrm{dom}\, \sigma_i$).

La anterior definición coincide con la semántica clásica de la fibra $\mathfrak{A}_x$ para fórmulas que utilizan solamente los operadores $\wedge, \vee, \exists$, pero es más exigente que la clásica para $\neg$, $\rightarrow$ y $\forall$. Por ejemplo, en la cláusula (7) para el cuantificador universal se exige no solamente que la propiedad φ valga para todas las secciones definidas en x, sino también para las definidas en puntos cercanos a x cuyo dominio puede no incluir a x. En todo caso, el forzamiento puntual cumple el paradigma de continuidad semántica:

TEOREMA 3.1. $\mathfrak{A} \Vdash_x \varphi[\sigma_1,\ldots, \sigma_n] \Leftrightarrow$ *existe una vecindad abierta* U *de* x *tal que* $\mathfrak{A} \Vdash_y \varphi[\sigma_1,\ldots,\sigma_n]$ *para toda* $y \in U$.

Demostración. Para las fórmulas atómicas se sigue de los Lemas 2.1, 2.2., y para las fórmulas más complejas se demuestra por inducción. Los pasos inductivos para $\wedge, \vee, \exists$ son triviales, y para $\neg$, $\rightarrow$ y $\forall$ resultan de que la vecindad U que aparece en las correspondientes cláusulas de la definición de forzamiento es vecindad de todos sus puntos. □

Ejemplo 3.1. Un conocido ejemplo de una variedad diferencial E que no es de Hausdorff consiste de la recta real **R** con un punto adicional a cuyas vecindades abiertas tienen la forma $(U - \{0\}) \cup \{a\}$ donde U es vecindad abierta de 0.



Esta variedad puede verse naturalmente como un haz $\mathcal{H}$ sobre **R** cuyas fibras tiene todas un elemento, excepto la fibra sobre 0 que tiene dos elemento. Sean σ y μ las dos secciones que "viven" en el abierto (-1, 1) de X: una pasa derecho por 0 y la otra "salta hasta a" en 0, entonces:

$$\mathcal{H} \nVdash_0 (\sigma = \mu \vee \neg\, \sigma = \mu) .$$

No se cumple $\mathcal{H} \Vdash_0 \sigma = \mu$ pues $\sigma(0) \neq \mu(0)$, ni se cumple $\mathcal{H} \Vdash_0 \neg(\sigma = \mu)$ pues en toda vecindad de 0 existe $x \in \mathbf{R}$ tal que $\sigma(x) = \mu(x)$. En los demás puntos de (-1, 1) vale $\Vdash_x \sigma = \mu$. De hecho, se puede demostrar que el tercio excluso para la igualdad:

$$\forall u \forall v(u=v \vee \neg u=v),$$

vale en un haz $\mathcal{H}$ sobre **R** si y solamente si el espacio de fibras E es de Hausdorff. Más precisamente:

$\mathfrak{A} \Vdash_x \forall u \forall v\, (u=v \;\vee \neg\, u=v) \Leftrightarrow$
$\exists\, U \in \mathcal{V}(x)$ tal que $p^{-1}(U)$ es de Hausdorff. □

El anterior ejemplo muestra cómo la lógica que hemos introducido es capaz de expresar propiedades geométricas del espacio de fibras del haz. El siguiente resultado ilustra cómo ésta se relaciona fuertemente con la topología del espacio base.

TEOREMA 3.2. $\mathfrak{A} \Vdash_x \neg\neg\varphi[\sigma_1,\ldots, \sigma_n] \Leftrightarrow$ *existe una vecindad abierta* U *de* x *tal que* $\{\, y \in U\colon \mathfrak{A} \Vdash_y \varphi[\sigma_1,\ldots\sigma_n]\,\}$ *es denso en* U.

Demostración. $\mathfrak{A} \Vdash_x \neg\neg\varphi[\sigma_1,\ldots, \sigma_n]$
$\Leftrightarrow \exists U \in \mathcal{V}(x)\ \forall y \in U\colon\ \mathfrak{A} \nVdash_y \neg\varphi[\sigma_1,\ldots, \sigma_n]$
$\Leftrightarrow \exists U \in \mathcal{V}(x)\ \forall y \in U\ \forall W\ \mathcal{V}(y)\ \exists z \in W\colon \mathfrak{A} \Vdash_z \varphi[\sigma_1,\ldots,\sigma_n]$
$\Leftrightarrow \exists U \in \mathcal{V}(x)\ \{\, z \in U\colon \mathfrak{A} \Vdash_z \varphi[\sigma_1,\ldots\sigma_n]\,\}$ *es denso en* U.
□

Ejemplo 3.2. En el último ejemplo considerado, $\mathfrak{A} \nVdash_0 \sigma = \mu$; sin embargo, se tiene $\mathfrak{A} \Vdash_x \neg\neg\, \sigma = \mu$ pues $\mathfrak{A} \Vdash_x \sigma = \mu$ para todo $x \in (-1,0) \cup (0,1)$ que es denso en la vecindad (-1, 1) de 0. Podemos concluir que $\mathfrak{A} \not\Vdash_0 (\neg\neg\, \sigma = \mu \to \sigma = \mu)$.

Ejemplo 3.3. La lógica de haces incluye a la clásica como caso especial: si X = {x}, los haces sobre X son estructuras clásicas individuales, y el forzamiento coincide con la semántica clásica. Más generalmente, si x es un punto aislado de X se cumple para toda fórmula φ y haz $\mathfrak{A}$ sobre X:

$$\mathfrak{A} \Vdash_x \varphi \;\Leftrightarrow\; \mathfrak{A}_x \models \varphi.$$

Resulta del Lema 2.2 que la equivalencia vale también en cualquier punto de un espacio arbitrario si la fórmula $\varphi(v_1,...,v_n)$ utiliza solamente los operadores lógicos $\wedge, \vee, \exists$.

II. Semántica local. Dado un abierto $U \subseteq X$ y secciones σ_i definidas en U, se define naturalmente el *forzamiento en abiertos:*

$$\mathfrak{A} \Vdash_U \varphi[\sigma_1...\sigma_n] \;\Leftrightarrow\; \forall x \in U\colon\; \mathfrak{A} \Vdash_x \varphi[\sigma_1...\sigma_n],$$

el cual cumple trivialmente las leyes siguientes:

(A) $\mathfrak{A} \Vdash_U \varphi$ y $W \subseteq U \;\Rightarrow\; \mathfrak{A} \Vdash_W \varphi$

(B) $\mathfrak{A} \Vdash_{W_i} \varphi[\sigma|\text{`}W_i]\;\; \forall i \in I \;\Rightarrow\; \mathfrak{A} \Vdash_{\cup_i W_i} \varphi[\sigma]$.

Además, satisface reglas para cada operador lógico que permiten definir inductivamente el forzamiento en abiertos sin hacer referencia a puntos. Tal vez la más significativa es la siguiente,

$\mathfrak{A} \Vdash_U \exists v\, \varphi(v, \sigma_1... \sigma_n] \;\Leftrightarrow\;$ existe una familia $\{\mu_i\}_i$ de secciones cuyos dominios U_i cubren a U tal que $\mathfrak{A} \Vdash_{U_i} \varphi[\mu_i, \sigma_1,..., \sigma_n]$ para todo i.

La implicación "$\Rightarrow$" vale por el Teorema 3.1, pues para cada punto $x \in U$ existe μ_x y una vecindad $U_x \subseteq \text{dom}\sigma_x$ tal que

$$\mathfrak{A} \Vdash_{U_x} \varphi[\mu_x, \sigma_1... \sigma_n].$$

y los U_x obviamente cubren a X. La otra dirección es inmediata. Esta equivalencia dice que la validez de un existencial en un abierto U no garantiza la existencia de una sección global sobre U que lo satisfaga, sino solamente la de una familia de secciones no necesariamente compatibles que lo satisfacen localmente. Sin embargo, el siguiente principio cuya demostración requiere el axioma de elección afirma que tal familia de secciones puede reemplazarse por una sección "casi" global.

TEOREMA 3.3 (Principio del máximo). *Si* $\mathfrak{A} \Vdash_U \exists v\varphi(v)$, *entonces existe* σ *definida en un abierto* W *denso en* U *tal que* $\mathfrak{A} \Vdash_W \varphi[\sigma]$.

Demostración. Si $\mathfrak{A} \Vdash_U \exists u\varphi(u)$ existe un recubrimiento abierto $(U_\alpha)_\alpha$ de U y una familia $(\sigma_\alpha)_\alpha$ de secciones, σ_α definida en U_α, tales que $\mathfrak{A} \Vdash_{U_\alpha} \varphi[\sigma_\alpha]$ para todo α. Entonces el conjunto

$$\Gamma = \{\sigma :\; \text{dom}(\sigma) \subseteq U \text{ y } \mathfrak{A} \Vdash_{\text{dom}(\sigma)} \varphi[\sigma]\}$$

es no vacío. Si $(\sigma_i)_{i \in I}$ es una cadena por inclusión en Γ, entonces $\sigma = \bigcup_{i \in I} \sigma_i$ es una sección que extiende a todas las σ_i y además $\mathfrak{A} \Vdash_{\text{dom}(\sigma)} \varphi[\sigma]$ por el principio (B). Por lo tanto σ es una acota superior de la cadena. Por el Lema de Zorn, existe $\hat{\sigma}$ maximal en Γ. Si $W = \text{dom}(\hat{\sigma})$ no fuera denso en U, existirá $V \subseteq U$ abierto no vacío tal que $V \cap W = \emptyset$, y como los U_α cubren a U existiría β tal que $V \cap U_\beta \neq \emptyset$. Entonces $\sigma' = \hat{\sigma} \cup \sigma_\beta|\text{`}(V \cap U_\beta)$ sería una sección que extiende propiamente a $\hat{\sigma}$, y $\mathfrak{A} \Vdash_{\text{dom}(\sigma')} \varphi[\sigma']$ por los principios (A) y (B), lo que implicaría $\sigma' \in \Gamma$, contradiciendo la maximalidad de $\hat{\sigma}$. □

El siguiente resultado lista las reglas sobre los conectivos que caracterizan el forzamiento en abiertos. La importancia de esta definición "sintética" es que puede generalizarse a haces sobre un *sitio* en el sentido de Grothendieck (véase **Mac Lane & Moerdijk**, 1992).

LEMA 3.1 (Semántica de Kripke-Joyal). *La relación* $\mathfrak{A} \Vdash_U \varphi[\sigma_1,...,\sigma_n]$ *está completamente definida por las propiedades siguientes:*

1) Si φ es atómica:

$\mathfrak{A} \Vdash_U \sigma_1 = \sigma_2 \;\Leftrightarrow\; \sigma_1|\text{`}U = \sigma_2|\text{`}U.$
$\mathfrak{A} \Vdash_U R[\sigma_1,.., \sigma_n] \;\Leftrightarrow\; <\sigma_1,.., \sigma_n>(U) \subseteq R^{\mathfrak{A}}.$

2) $\mathfrak{A} \Vdash_U (\varphi \wedge \psi)[\sigma_1... \sigma_n] \;\Leftrightarrow$
$\mathfrak{A} \Vdash_U \varphi[\sigma_1... \sigma_n]$ y $\mathfrak{A} \Vdash_U \psi[\sigma_1... \sigma_n]$.

3) $\mathfrak{A} \Vdash_U (\varphi \vee \psi)[\sigma_1... \sigma_n] \;\Leftrightarrow$ existen abiertos V, W tales que $U = V \cup W$,
$\mathfrak{A} \Vdash_V \varphi[\sigma_1... \sigma_n]$ y $\mathfrak{A} \Vdash_W \psi[\sigma_1... \sigma_n]$.

4) $\mathfrak{A} \Vdash_U \neg\varphi[\sigma_1... \sigma_n] \;\Leftrightarrow$
$\forall\, W \subseteq U,\; W \neq \emptyset\colon \mathfrak{A} \not\Vdash_W \varphi[\sigma_1,...,\sigma_n]$.

5) $\mathfrak{A} \Vdash_U (\varphi \to \psi)[\sigma_1... \sigma_n] \;\Leftrightarrow \forall\, W \subseteq U$:
$\mathfrak{A} \Vdash_W \varphi[\sigma_1... \sigma_n] \;\Rightarrow \mathfrak{A} \Vdash_W \psi[\sigma_1... \sigma_n]$.

6) $\mathfrak{A} \Vdash_U \exists v\, \varphi(v, \sigma_1... \sigma_n] \;\Leftrightarrow\;$ existe un recubrimiento abierto $\{U_i\}_i$ de U y secciones $\mu_i \in \mathfrak{A}(U_i)$ tales que $\mathfrak{A} \Vdash_{U_i} \varphi[\mu_i, \sigma_1,..., \sigma_n]$, para todo i.

7) $\mathfrak{A} \Vdash_U \forall v\, \varphi(v, \sigma_1... \sigma_n] \;\Leftrightarrow\; \forall\, W \subseteq U, \forall\mu$ definida en W: $\mathfrak{A} \Vdash_W \varphi[\mu, \sigma_1... \sigma_n]$.

Demostración. Es suficiente demostrar que la relación $\Vdash_U$ satisface las equivalencias (1)-(7), pues éstas constituyen una definición inductiva que solamente puede ser satisfecha por una única relación. Las equivalencias (1) y (2) son inmediatas y la (6) ya fue discutida. Explicamos la dirección menos trivial de las restantes:

3) "$\Rightarrow$", tome $V = \{x \in U : \mathfrak{A} \Vdash_x \varphi[\sigma_1... \sigma_n]\}$, $W = \{x \in U\colon \mathfrak{A} \Vdash_x \psi[\sigma_1... \sigma_n]\}$ que son abiertos por el Teorema 3.1.

4) "$\Leftarrow$", si $\mathfrak{A} \not\Vdash_U \neg\, \varphi[\sigma_1... \sigma_n]$, hay un punto $x \in U$ tal que $\mathfrak{A} \not\Vdash_x \neg\varphi[\sigma_1... \sigma_n]$, y por tanto toda vecindad de x, en particular U, contiene y tal que $\mathfrak{A} \Vdash_y \varphi[\sigma_1,...,\sigma_n]$; por el Teorema 3.1, existe W vecindad de y tal que $\mathfrak{A} \Vdash_W \varphi[\sigma_1...\sigma_n]$ y podemos suponer $W \subseteq U$.

5) "$\Rightarrow$" Si $\mathfrak{A} \Vdash_U (\varphi \to \psi)$ entonces se tiene en particular

que: $\mathfrak{A} \Vdash_x \varphi \Rightarrow \mathfrak{A} \Vdash_x \psi$, para todo $x \in U$, el resto es trivial.
"$\Leftarrow$" Si $\mathfrak{A} \not\Vdash_U (\varphi \to \psi)$, existe $x \in U$ tal que $\mathfrak{A} \not\Vdash_x (\varphi \to \psi)$ y por tanto en existe $y \in U$ tal que $\mathfrak{A} \Vdash_y \varphi$, $\mathfrak{A} \not\Vdash_y \psi$. Entonces existe W vecindad de y tal que $\mathfrak{A} \Vdash_W \varphi$ y evidentemente $\mathfrak{A} \not\Vdash_W \psi$. Tome $W \subseteq U$.
7) "$\Rightarrow$", suponga que $\mathfrak{A} \not\Vdash_x \forall v \varphi(v, ...]$ par algún x de U, entonces existe $y \in U$ y μ definida en y tal que $\mathfrak{A} \not\Vdash_y \varphi(\mu, ...]$. Sea $W = U \cap \mathrm{dom}(\mu)$, entonces $\mathfrak{A} \not\Vdash_W \varphi(\mu, ...]$. □

Las leyes lógicas satisfechas por un haz pueden expresar también propiedades estructurales de su prehaz de secciones. El siguiente resultado al respecto parece no haber sido observado hasta ahora.

TEOREMA 3.4. *Sea* U *un abierto conexo, entonces:*

a) $\mathfrak{A} \Vdash_U (\sigma=\tau \vee \neg\, \sigma=\tau)$ *para todo para todo par de secciones* σ,τ *definidas en U si y solamente si para todo abierto* V *no vacío la restricción* ρ_{UV}: $\mathfrak{A}(U) \to \mathfrak{A}(V)$ *es inyectiva.*

b) $\mathfrak{A} \Vdash_U (\phi \vee \neg\phi)[\sigma_1,..,\sigma_n]$ *para toda fórmula atómica* ϕ *y secciones* $\sigma_1,..,\sigma_n$ *si y solamente si para todo abierto no vacío* V *la restricción* ρ_{UV}: $\mathfrak{A}(U) \to \mathfrak{A}(V)$ *es un sumersión isomórfica.*

c) $\mathfrak{A} \Vdash_U (\phi \vee \neg\phi)[\sigma_1,..,\sigma_n]$ *para toda fórmula* ϕ *y secciones* $\sigma_1,..,\sigma_n$ *si y solamente si para todo abierto no vacío* V *la restricción* ρ_{UV}: $\mathfrak{A}(U) \to \mathfrak{A}(V)$ *es un sumersión elemental (clásica); equivalentemente, para toda* φ *y secciones* $\sigma_1 ... \sigma_n$ *se tiene* $\mathfrak{A} \Vdash_U \varphi[\sigma_1 ... \sigma_n] \Leftrightarrow \mathfrak{A} \Vdash_V \varphi[\sigma_1 ... \sigma_n]$. □

El caso (c) del teorema implica que para todo $x \in U$ el forzamiento en x coincide con la satisfacción clásica en $\mathfrak{A}_x$, y que las fibras sobre U son todas elementalmente equivalentes. Más precisamente, si $\sigma_i \in \mathfrak{A}(U)$, $x, y \in U$, entonces $(\mathfrak{A}_x, \sigma_1(x),...) \equiv (\mathfrak{A}_y, \sigma_1(y),...)$.

EJEMPLO 3.4. Se demuestra en el Análisis Complejo que si dos funciones holomorfas coinciden en un subconjunto abierto V de un abierto conexo U entonces son idénticas en todo U. Esto significa que las restrición ρ_{UV} es una sumersión isomórfica, y por el teorema anterior *vale la ley del tercio excluso para las fórmulas atómicas en el haz de gérmenes de funciones holomorfas de* $\mathbb{C}$. Puede comprobarse que lo anterior no es cierto para el haz de gérmenes de funciones complejas continuas, por ejemplo no vale el tercio excluso para la igualdad entre la función identidad y la función conjugado, secciones globales de este haz.

EJEMPLO 3.5. *La lógica de cualquier espacio recubridor de un espacio localmente conexo es clásica en cada fibra,* pues cada $x \in X$ tiene una vecindad abierta conexa U para la cual $p^{-1}(U) \approx U \times p^{-1}(x)$. Por conexidad, secciones distintas sobre U deben tener imágenes disyuntas y por tanto las restricciones son inyectivas. Además las restricciones a abiertos conexos son isomorfismos lo cual implica la condición (c) del Teorema, por la conexidad local.

§ 4. Validez de la lógica intuicionista en los haces

¿Podemos dar cuenta de las leyes lógicas generales satisfechas por todos los haces? Sorprendentemente, las leyes formales de la lógica de los haces coinciden con las de la *Lógica Intuicionista*, la alternativa más importante que se ha planteado a la lógica clásica, propuesta por el matemático **Brouwer** (1908, 1913) a quien movían principios filosóficos acerca de los fundamentos de la matemática totalmente ajenos a los que hemos expuesto en este trabajo. La filosofía del intuicionismo exige que las demostraciones sean constructivas y que exhiban explícitamente los objetos matemáticos cuya existencia demuestran, o al menos las instrucciones para construirlos. Las construcciones y objetos infinitos son aceptables para el intuicionismo solamente cuando están determinadas por procesos inductivos. No se aceptan las pruebas por contradicción en su forma fuerte, donde se deduce una afirmación de la inconsistencia de su negación. En esta lógica fallan leyes como el "tercio excluso": $\varphi \vee \neg\varphi$, y la ley de doble negación: $\neg\neg\varphi \to \varphi$. **Heyting** (1930) propuso un sistema formal deductivo que captura fielmente las leyes deductivas aceptadas por Brouwer, sistema llamado hoy día *Cálculo de Heyting*. Por mucho tiempo, el Cálculo de Heyting careció de una interpretación semántica matemáticamente satisfactoria, hasta que **Kripke** (1965) introdujo una semántica estructural para la cual el Cálculo de Heyting es válido y completo, los hoy llamados *modelos de Kripke*. Para referencias más detalladas sobre la lógica intuicionista y el Cálculo de Heyting puede verse el texto introductorio de **van Dalen** (1983).

En adelante, $\vdash_H \varphi$ indicará que la fórmula φ se puede deducir formalmente en el Cálculo de Heyting. Como las leyes de $\vdash_H$ forman un susbsistema del Cálculo de Predicados Clásico $\vdash_C$, se tiene que

$$\vdash_H \varphi \;\Rightarrow\; \vdash_C \varphi.$$

Evidentemente no vale el recíproco; sin embargo, la traducción introducida por Gödel (1933) para demostrar la interpretabilidad de la aritmética clásica en la intuicionista proporciona una especie de recíproco, mostrando que ambas lógicas tienen la misma fuerza deductiva. Independientemente y anteriormente a Gödel habia descubierto **Kolmogorov** (1925) una interpretación equivalente basada en la iteración de la doble negación. Esta traducción tendrá un papel importante en la sección siguiente.

Definición 4.1 (Interpretación de Gödel). A càda fórmula φ se asocia φ^G como sigue:

$\varphi^G = \neg\neg\, \varphi$ si es atómica φ

$(\varphi \wedge \psi)^G = (\varphi^G \wedge \psi^G)$

$(\varphi \vee \psi)^G = \neg(\neg\varphi^G \wedge \neg\psi^G)$

$(\varphi \to \psi)^G = \neg\, (\varphi^G \wedge \neg\psi^G)$

$(\neg\, \varphi)^G = \neg\, (\varphi^G)$

$(\forall v\; \varphi)^G = \forall v\; (\varphi^G)$

$(\exists v\ \varphi)^G = \neg\forall v\ \neg\varphi^G$.

Se tiene entonces:

$$\vdash_C \varphi \Leftrightarrow \vdash_H \varphi^G$$

(para una demostración sintáctica véase **van Dalen**). Si φ no contiene a $\forall$ puede demostrarse que $\varphi^G \equiv_H \neg\neg\varphi$, de donde resulta el conocido *Teorema de Glivenko* para el calculo proposicional: $\vdash_C \varphi \Leftrightarrow \vdash_H \neg\neg\varphi$.

I. Modelos de Kripke como haces. Un *modelo de Kripke* de tipo τ, consiste de una cuádrupla $\mathbb{K} = (\Sigma, \leq, (\mathbb{K}_i)_{i \in \Sigma}, (f_{ij})_{(i,j) \in \leq})$ sujeta a las condiciones:

i) $(\Sigma, \leq)$ es un conjunto parcialmente ordenado.
ii) Para cada $i \in \Sigma$, $\mathbb{K}_i$ es una estructura de tipo τ.
iii) Dados $i, j \in \Sigma$ con $i \leq j$, $f_{ij}: \mathbb{K}_i \to \mathbb{K}_j$ es un homomorfismo de estructuras; f_{ii} es la identidad.
iv) Si $i,j,k \in \Sigma$ con $i < j < k$, entonces $f_{jk} \circ f_{ij} = f_{ik}$.

El *forzamiento de Kripke:* $\mathbb{K} \Vdash_i \varphi[a_1,\ldots, a_n]$, donde $a_1,\ldots, a_n \in \mathbb{K}_i$, se define inductivamente:

$\mathbb{K} \Vdash_i a_1=a_2 \Leftrightarrow a_1 = a_2$

$\mathbb{K} \Vdash_i R[a_1,\ldots, a_n] \Leftrightarrow (a_1,\ldots, a_n) \in R^{\mathbb{K}(p)}$

$\mathbb{K} \Vdash_i (\varphi \to \psi) \Leftrightarrow \forall j \geq i \Big(\mathbb{K} \Vdash_j \varphi[f_{pq}(a_1)\ldots f_{pq}(a_n)] \Rightarrow \mathbb{K} \Vdash_i \psi[f_{rq}(a_1),\ldots, f_{pq}(a_n)]\Big)$

$\mathbb{K} \Vdash_i \neg\varphi \Leftrightarrow \forall j \geq i$: $\mathbb{K} \nVdash_j \varphi[f_{pq}(a_1) \ldots f_{pq}(a_n)]$)

$\mathbb{K} \Vdash_i \exists v\ \varphi(v)[a_1,\ldots, a_n] \Leftrightarrow$ para algún $a \in \mathbb{K}_i$: $\mathbb{K} \Vdash_i \varphi[a, a_1,\ldots, a_n]$

$\mathbb{K} \Vdash_i \forall v\ \varphi[v,..)[a_1,\ldots, a_n] \Leftrightarrow \forall j \geq i\ \forall b \in \mathbb{K}_j$: $\mathbb{K} \Vdash_j \varphi[a, f_{pq}(a_1)\ldots f_{pq}(a_n)]$.

Todo modelo de Kripke puede verse como un haz de estructuras como veremos en seguida.

Definición 4.2. Un conjunto parcialmente ordenado Σ está dotado de una topología natural $\Sigma^+ = \{S \subseteq \Sigma : \forall i \in S\ \forall j \geq i\ (j \in S)\}$, que tiene por base de abiertos a los conjuntos de la forma $[i) = \{j \in \Sigma : j \geq i\}$. Dado un modelo de Kripke $\mathbb{K}$ sobre Σ, tomemos como fibra sobre i a la estructura $\mathbb{K}_i$, y dotemos a la unión disyunta $E = \bigcup_{i \in \Sigma} \mathbb{K}_i$ con la topología generada por las secciones:

$$\sigma = (a_i)_{i \in U} \text{ con } a_i \in \mathbb{K}_i \text{ y } f_{ij}(a_i) = a_j \text{ para } i \leq j.$$

De esta manera $\mathbb{K}$ se transforma en un haz $\mathbb{K}^*$ de estructuras de tipo τ sobre el espacio $X = (\Sigma, \Sigma^+)$.

A cada individuo $a \in \mathbb{K}_i$ se le puede asociar la sección σ_a: $[i) \to E$ que consiste de $\sigma(i) = a$ y todas sus imágenes futuras $\sigma_a(j) = f_{ij}(a)$, $j \geq i$. Esta asociación define un isomorfismo entre la fibra $\mathbb{K}_i$ y la estructura de secciones $\mathbb{K}^*([i))$, por el cual f_{ij} corresponde a la restricción $\rho_{[i)[j)}$. Además se tiene:

LEMA 4.1. *Sea $\mathbb{K}$ un modelo de Kripke y $\mathbb{K}^*$ el haz correspondiente; entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

a) $\mathbb{K} \Vdash_i \varphi[a_1,\ldots, a_n]$ *à la Kripke,*

b) $\mathbb{K}^* \Vdash_i \varphi[\sigma_{a_1},\ldots,\sigma_{a_n}]$ *en el sentido de la semántica puntual de haces,*

c) $\mathbb{K}^* \Vdash_{[i)} \varphi[\sigma_{a_1},\ldots,\sigma_{a_n}]$ *en el sentido de la semántica de Kripke Joyal.*

Demostración. Una obvia induccción en fórmulas. En el caso atómico debe utilizarse que las funciones de transición son homomorfismos. La útima equivalencia vale porque [i) es el mínimo abierto que contiene a i. □

Las leyes intuicionistas son forzadas en todos los puntos del espacio base de un haz, pues se puede verificar que el forzamiento es preservado por Modus Ponens, y que cada axioma del cálculo de Heyting es forzado en todos los haces, una tediosa pero fácil tarea. También vale el recíproco por el lema anterior, pues si una fórmula es forzada en todos los haces lo será en todo modelo de Kripke, y por el teorema de completitud de **Kripke** (1965) será deducible en el calculo de Heyting. Tenemos entonces:

TEOREMA 4.1. $\vdash_H \varphi \Leftrightarrow$ *para todo X y todo haz de estructuras $\mathfrak{A}$ sobre X:* $\mathfrak{A} \Vdash_X \varphi$.

Se desprende que las fórmulas forzadas en todos los haces sobre un espacio fijo X constituyen una *lógica intermedia entre la intucionista* y la clásica, la cual depende exclusivamente de la topología de X.

Como los abiertos [i) son conexos, tenemos el siguiente corolario al Teorema 3.4 y Lema 4.1.

TEOREMA 4.2. *Sea $\mathbb{K}$ un modelo de Kripke, entonces:*

a) $\mathbb{K} \Vdash_i (a=b \vee \neg\, a=b)$ para todo $a, b \in \mathbb{K}_i \Leftrightarrow \forall j \geq i$: f_{ij} *es inyectiva.*

b) $\mathbb{K} \Vdash_i (\phi \vee \neg\phi)[a_1,..,a_n]$ *para toda fórmula atómica ϕ y $a_1,..,a_n \in \mathbb{K}_i \Leftrightarrow \forall j \geq i$: f_{ji} es un isomorfismo inyectivo.*

c) $\mathbb{K} \Vdash_i (\phi \vee \neg\phi)[a_1,..,a_n]$ *para toda fórmula ϕ y $a_1,..,a_n \in \mathbb{K}_i \Leftrightarrow \forall j \geq i$: f_{ji} es un monomorfismo elemental.*

Ejemplo 4.1 (Forzamiento de Robinson). Si se toma una clase $\forall\exists$ de estructuras $\mathfrak{C}$ ordenada por la relación de subestructura, el forzamiento de **Robinson** (1970) en $\mathfrak{C}$ correponde a forzamiento en el modelo de Kripke que tiene a $\mathfrak{A}$ por fibra sobre $\mathfrak{A}$, y por transiciones las inclusiones. Utilizando la clausura de $\mathfrak{C}$ bajo unión de cadenas, puede extenderse cualquier nodo de $\mathfrak{C}$ a uno que satisfaga el tercio excluso para todas las fórmulas. Por (c) del Teorema anterior, tales modelos deben ser *modelo completos* en $\mathfrak{C}$.

II. Logica multivaluada en los haces. La lógica intermedia asociada a un espacio X puede verse como una lógica multivaluada con valores en el álgebra de Heyting Ab(X). Si $\sigma_1,\ldots,\sigma_n$ son secciones de un haz $\mathfrak{A}$, definidas en U, es razonable introducir la *extensión veritativa* de una proposición en U:

$$[\![\varphi[\sigma_1,\ldots, \sigma_n]]\!]_U \underset{\text{Def}}{=} \{x \in U : \mathfrak{A} \Vdash_x \varphi[\sigma_1,\ldots, \sigma_n]\}.$$

aunque todas ellas pueden considerarse como la construcción de estructuras clásicas (los modelo genéricos) a partir de un modelo de Kripke, de manera que la semańtica del modelo clasico está conectada con la del modelo de Kripke por via de un filtro genérico del orden parcial (teorema del modelo genérico). En la mayoría de las aplicaciones en la literatura la existencia de estos filtros y modelos requiere de fuertes condiciones de enumerabilidad.

Introducimos aquí una noción más general de filtros y modelos genéricos en haces de estructuras sobre espacios topológicos cuya existencia no precisa condiciones de enumerabilidad. Veremos en la sección siguiente que las condiciones de enumerabilidad son necesarias solamente cuando se desea que los modelos sean genéricos con respecto a lógicas infinitarias.

Sea X un espacio topológico y Ab(X) su familia de subconjuntos abiertos, una subfamilia $\mathfrak{F} \subseteq \mathrm{Ab}(X)$ es un *filtro de abiertos* sobre X si cumple:

$$X \in \mathfrak{F}$$
$$U, V \in \mathfrak{F} \;\Rightarrow\; U \cap V \in \mathfrak{F}$$
$$U \supseteq V \in \mathfrak{F} \;\Rightarrow\; U \in \mathfrak{F}.$$

Un filtro de abiertos $\mathfrak{F}$ es *no trivial* si no es todo Ab(X) o equivalentemente $\emptyset \notin \mathfrak{F}$; es *maximal* si lo es con respecto a inclusión entre todos los filtros no triviales de abiertos sobre X. En lo que sigue, todos los filtros mencionados serán de abiertos aunque no se lo diga explícitamente.

LEMA 5.1. *Si $\mathfrak{F}$ es un filtro maximal de abiertos sobre X entonces:*
a) *W abierto denso en* $U \in \mathfrak{F} \Rightarrow W \in \mathfrak{F}$.
b) $U \in \mathrm{Ab}(X) \Rightarrow U \in \mathfrak{F}$ *o* $-U = \mathrm{Int}(X - U) \in \mathfrak{F}$.

Demostración. a) Si $V \in \mathfrak{F}$ entonces $V \cap U$ es un abierto no vacío contenido en U, luego $W \cap (V \cap U) \neq \emptyset$ por densidad de W y a fortiori $W \cap V \neq \emptyset$; entonces existe un filtro no trivial que contiene a $\mathfrak{F}$ y a W, que por maximalidad deberá ser el mismo $\mathfrak{F}$, así que $W \in \mathfrak{F}$.
b) Si $U \notin \mathfrak{F}$ entonces por maximalidad existe $W \in \mathfrak{F}$ disyunto de U; evidentemente $\mathrm{Int}(X - U) \supseteq W$. □

Definición 5.1. Sea $\mathfrak{A}$ un haz de estructuras de tipo τ sobre un espacio topológico X. Un filtro $\mathfrak{F}$ no trivial sobre X *es genérico para* $\mathfrak{A}$, si para cualquier fórmula $\varphi(v_1,\ldots, v_n)$ de primer orden de tipo τ y cualesquier secciones $\sigma_1,\ldots, \sigma_n$ de $\mathfrak{A}$ definidas en $U \in \mathfrak{F}$, se tiene:

1) $\exists\, W \in \mathfrak{F}$: $\mathfrak{A} \Vdash_W \varphi[\sigma_1,\ldots, \sigma_n]$ o
$\mathfrak{A} \Vdash_W \neg\varphi[\sigma_1,\ldots,\sigma_n]$.

2) Para cualesquier secciones $\sigma_1,\ldots, \sigma_n$ de $\mathfrak{A}$ definidas en $U \in \mathfrak{F}$ y fórmula $\varphi(u,v_1,\ldots,v_n)$:

$\mathfrak{A} \Vdash_U \exists u\, \varphi(u,\sigma_1,\ldots, \sigma_n] \Rightarrow \exists\, W \in G$ y σ definida en W, tales que $\mathfrak{A} \Vdash_W \varphi[\sigma, \sigma_1,\ldots, \sigma_n]$.

TEOREMA 5.1 (Existencia de filtros genéricos). *Un filtro maximal de abiertos sobre X es genérico para cualquier haz de estructuras sobre X.*

Demostración. Sea $\mathfrak{F}$ un filtro maximal de abiertos sobre X, $\varphi(v_1,\ldots,v_n)$ cualquier fórmula, $U \in \mathfrak{F}$ y $\sigma_1,\ldots, \sigma_n$ secciones en un haz $\mathfrak{A}$, definidas en U. Si $B = \{x \in U : \mathfrak{A} \Vdash_x \varphi[\sigma_1,\ldots,\sigma_n]\} \notin \mathfrak{F}$ entonces $C = \mathrm{Int}(X - B) = \mathrm{Int}(\{x \in U : \mathfrak{A} \not\Vdash_x \varphi[\sigma_1,\ldots,\sigma_n]\} \cup (X - U)) \in \mathfrak{F}$. Intersectando C con U nos da que $D = \mathrm{Int}(\{x \in U : \mathfrak{A} \not\Vdash_x \varphi[\sigma_1,\ldots,\sigma_n] \}) \in \mathfrak{F}$. Por definición, D es tal que $\mathfrak{A} \Vdash_D \neg\varphi[\sigma_1,\ldots,\sigma_n]$. Esto prueba la condición (1). Supongamos ahora que $\mathfrak{A} \Vdash_U \exists u\varphi(u, \sigma_1,\ldots,\sigma_n)$ con $U \in \mathfrak{F}$. Por el principio del máximo, existen un abierto W denso en U y una sección σ sobre W tales que $\mathfrak{A} \Vdash_W \varphi[\sigma,\sigma_1,\ldots,\sigma_n]$. Por el Lema 5.1, $W \in \mathfrak{F}$. Esto demuestra la propiedad (2). □

Vale el recíproco del teorema anterior. En realidad, un filtro sobre X es maximal si y solamente si es genérico para el haz de *gérmenes de abiertos* que resulta de germinar el prehaz de álgebras de Heyting $\Gamma(U) = (\mathrm{Ab}(U), \subseteq)$.

Definición 5.2. Dado un haz de estructuras $\mathfrak{A}$ sobre X y un filtro $\mathfrak{F}$ sobre X sea $\mathfrak{A}[\mathfrak{F}] = \varinjlim_{U \in \mathfrak{F}} \mathfrak{A}(U)$, límite que se construye de la misma manera que una fibra de gérmenes, utilizando el filtro $\mathfrak{F}$ en lugar del filtro de vecindades de un punto, es decir:

$$\mathfrak{A}[\mathfrak{F}] = \dot{\bigcup}_{U \in \mathfrak{F}} \mathfrak{A}(U) \,/ \sim_{\mathfrak{F}},$$

donde dados $\sigma \in \mathfrak{A}(U)$, $\mu \in \mathfrak{A}(V)$:

$$\sigma \sim_{\mathfrak{F}} \mu \Leftrightarrow \exists\, W \in \mathfrak{F}, \text{ tal que } \sigma{\restriction}W = \mu{\restriction}W,$$

y si llamamos $[\sigma]$ a la clase de equivalencia de σ, entonces las relaciones y funciones se definen:

$$([\sigma_1],\ldots,[\sigma_n]) \in R^{\mathfrak{A}[\mathfrak{F}]} \Leftrightarrow \exists U \in \mathfrak{F}: (\sigma_1,\ldots,\sigma_n) \in R^{\mathfrak{A}(U)}.$$

$$f^{\mathfrak{A}[\mathfrak{F}]}([\sigma_1],\ldots,[\sigma_n]) = [f^{\mathfrak{A}(U)}(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)].$$

Si $\mathfrak{F}$ es genérico para $\mathfrak{A}$, diremos que $\mathfrak{A}[\mathfrak{F}]$ es un *modelo genérico.*

Consideramos al siguiente como el *Teorema Fundamental de la Teoría de Modelos,* ya que tiene por corolarios inmediatos los teoremas principales de la teoría de modelos clásica, como mostramos más adelante. Su demostración resulta de una cuidadosa inducción en fórmulas. Recuérdese que ϕ^G denota la traducción de Gödel de la fórmula ϕ.

TEOREMA 5.2 (Teorema del modelo genérico). *Sea $\mathfrak{F}$ un filtro sobre X genérico para $\mathfrak{A}$, entonces ,*

$$\mathfrak{A}[\mathfrak{F}] \models \phi([\sigma_1], \ldots, [\sigma_n])$$
$$\Leftrightarrow \textit{existe } U \in \mathfrak{F} \textit{ tal que: } \mathfrak{A} \Vdash_U \phi^G(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$$
$$\Leftrightarrow \{x \in X : \mathfrak{A} \Vdash_x \phi^G(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) \} \in \mathfrak{F}.$$

Si ϕ no contiene $\forall$, hemos dicho que $\varphi^G \equiv \neg\neg\varphi$ intuicionístamente; esto implica, por defincíón de filtro genérico que podemos evitar la traducción de Gödel en el teorema anterior y concluir:

$$\mathfrak{A}[\mathfrak{F}] \models \phi([\sigma_1], \ldots, [\sigma_n])$$

$\Leftrightarrow$ *existe* $U \in \mathfrak{F}$ *tal que:* $\mathfrak{A} \Vdash_U \phi(\sigma_1, ..., \sigma_n)$.

$\Leftrightarrow$ $\{x \in X : \mathfrak{A} \Vdash_x \phi(\sigma_1, ..., \sigma_n) \} \in \mathfrak{F}$.

El "ultrastalk theorem" de **Ellerman** (1976) es el enunciado anterior para el caso de filtros maximales. **Miraglia** (1989) demuestra un resultado análogo para filtros maximales en estructuras Heyting-valuadas. Puede considerarse al modelo $\mathfrak{A}[\mathfrak{F}]$ como una nueva fibra que se añade al haz $\mathfrak{A}$. Más precisamente, sea $X \cup \{\infty\}$ el espacio que resulta de añadir a X un nuevo punto ∞ con las vecindades abiertas: $U \cup \{\infty\}$, $U \in \mathfrak{F}$, y mantener la topología original en X. Tómese a $\mathfrak{A}_\infty = \mathfrak{A}[\mathfrak{F}]$ por fibra sobre ∞, y por nuevas secciones definidas en ∞ las de la forma $\sigma^* = \sigma \cup \{(\infty,[\sigma])$, donde σ es una sección de $\mathfrak{A}$ sobre $U \in \mathfrak{F}$. Entonces, el teorema del modelo genérico significa que en el nuevo haz $\mathfrak{A}^*$ esta fibra es clásica, es decir:

$$\mathfrak{A}^* \Vdash_\infty \phi(\sigma^*_1,..,\sigma^*_n) \Leftrightarrow \mathfrak{A}[\mathfrak{F}] \models \phi([\sigma_1],.., [\sigma_n]).$$

Los teoremas fundamentales de la teoría de modelos pueden interpretarse como la construcción de estructuras genéricas en haces adecuados, como lo ilustramos con los siguientes ejemplos.

I. Teorema de Loz para ultraproductos. Una familia de estructuras $\{\mathfrak{A}_i : i \in I\}$ puede verse como un haz $\mathfrak{A}$ sobre el espacio discreto I. Para cada $S \subseteq I$, $\mathfrak{A}(S) = \prod_{i \in S}\mathfrak{A}_i$ y así las secciones globales son los elementos del producto $\prod_{i \in I}\mathfrak{A}_i$. Un ultrafiltro $\mathfrak{F}$ sobre I es genérico por ser maximal. Es fácil ver, además, que $\mathfrak{A}[\mathfrak{F}]$ coincide con el ultraproducto de la familia $\{\mathfrak{A}_i : i \in I\}$ con respecto a $\mathfrak{F}$:

$$\mathfrak{A}[\mathfrak{F}] = \varinjlim_{S \in \mathfrak{F}} \mathfrak{A}(S) = \varinjlim_{S \in \mathfrak{F}} \prod_{i \in S}\mathfrak{A}_i \approx \prod_i \mathfrak{A}_i/_{\mathfrak{F}}.$$

El último isomorfismo se debe a que toda sección con dominio $S \in \mathfrak{F}$ puede extenderse a una global. Tomando secciones globales $f_1, ..., f_n$, que tienen su dominio en $\mathfrak{F}$, se tiene por el Teorema del Modelo Genérico:

$$\prod_i \mathfrak{A}_i/_{\mathfrak{F}} \models \phi([f_1], ..., [f_n])$$
$$\Leftrightarrow \{ i \in I: \mathfrak{A} \Vdash_i \phi^G(f_1, ..., f_n) \} \in \mathfrak{F}$$
$$\Leftrightarrow \{ i \in I: \mathfrak{A}_i \models \phi(f_1(i), ..., f_n(i)) \} \in \mathfrak{F}$$

donde la última equivalencia se debe a que en este caso toda fibra es clásica, y $\phi^G \equiv \phi$ clásicamente.

II. Completitud de la lógica de primer orden. Utilizando modelos genéricos à la Cohen, **Dahn** (1979) ha demostrado el teorema de completitud para teorías enumerables de primer orden en la forma de existencia de modelos de teorías consistentes. Solamente para teorías enumerables ya que utiliza los teoremas clásicos de existencia de filtros genéricos sobre órdenes parciales. Damos aquí una demostración de dicho teorema para teorías de cualquier cardinalidad utilizando nuestra noción de filtro genérico.

Sea T una teoría consistente de primer orden de tipo τ, C un conjunto infinito enumerable de constantes, disyunto de τ, y $\tau' = \tau \cup C$. Se define un modelo de Kripke de tipo τ:

$$\mathbb{K}_T = (\Sigma, \leq, \mathfrak{A}_p, f_{pq})_{p, q \in \Sigma, p \leq q}$$

como sigue:

- $\Sigma = \{ p : p$ es un subconjunto finito de $L_{\omega\omega}(\tau')$ y $T \cup p$ es consistente $\}$
- $p \leq q \Leftrightarrow p \subseteq q$
- $\mathfrak{A}_p = (D/\sim_p, R^p, ..., f^p, ..., c^p, ...)$, donde

  $D = \{ t : t$ término cerrado sobre $\tau'\}$

  $t_1 \sim_p t_2 \Leftrightarrow T \cup p \vdash t_1 = t_2$

  $(t_1/\sim_p,..., t_n/\sim_p) \in R^p \Leftrightarrow T \cup p \vdash R(t_1, ..., t_n)$

  $f(t_1/\sim_p,..., t_n/\sim_p) = f(t_1, ..., t_n)/\sim_p$
- $f_{pq}: \mathfrak{A}_p \to \mathfrak{A}_q$ se define como $f_{pq}(t/\sim_p) = t/\sim_q$.

LEMA 5.2. *Sean* $t_1, ..., t_n$ *términos cerrados y* $\phi(u_1,...,u_n) \in L_{\tau'}$, *entonces:*

$$T \cup p \vdash \phi(t_1,...,t_n) \Leftrightarrow \mathbb{K}_T \Vdash_p \phi^G(t_1/\sim_p,...,t_n/\sim_p).$$

Demostración. Por inducción en fórmulas. Solamente se necesita del sistema deductivo que tenga reducción al absurdo (débil) y generalización universal. Se utiliza que ϕ^Gsolamente contiene los operadores $\neg$, $\wedge$, $\forall$, y clásicamente, $\phi(t_1,..., t_n) \equiv \phi^G(t_1,. .., t_n)$. □

Corolario. *Sea* T *una teoría consistente de primer orden, si* $\mathfrak{F}$ *es un filtro genérico para* $\mathbb{K}_T$, *entonces* $\mathbb{K}_T[\mathfrak{F}] \models T$.

Demostración. Si $T \vdash \phi$, esto implica por el lema anterior que $\mathbb{K}_T \Vdash_\Sigma \phi^G$ y por el teorema del modelo genérico, $\mathbb{K}_T[\mathfrak{F}] \models \phi$.

III. El universo cumulativo de los conjuntos variables. El método de forzamiento de Cohen (1963) para demostrar la independencia del Axioma de Elección y la Hipótesis del Continuo se presenta en la literatura como una construcción técnica ad-hoc cuya efectividad parece a veces milagrosa. Puede reinterpretarse, sin embargo, como la construcción de modelos genéricos en ciertos modelo de Kripke sobre órdenes parciales cuidadosamente escogidos cuyas fibras son universos de la teoría de conjuntos (**Fitting**, 1969), o como la construcción de *universos de valores booleanos* (Scott , 1967). Ambas ideas son casos especiales de la construcción del *universo cumulativo de conjuntos extendidos* sobre un espacio topológico arbitrario. Presentamos aquí una versión de esta construcción que simplifica y justifica intuitivamente la definición clásica de "forcing", aun en el caso de forzamiento sobre órdenes parciales. Por ejemplo, los elementos de nuestro modelo de Krikpe no son "constantes" o "nombres", ni el forzamiento de la pertenencia se define por medio de una inducción en rango, como en las presentaciones tradicionales (**Fitting**, 1969; **Kunen**, 1980) sino que resulta ser genuina pertenencia entre conjuntos extendidos.

Tierney (1972), **Bunge** (1974) y otros autores han interpretado categóricamente el forzamiento de Cohen tomando todo un topos como modelo de la teoría, mientras que aquí trabajamos con un solo haz, lo cual corresponde a construir la jerarquía cumulativa dentro de un topos.

Presentamos el universo cumulativo de conjuntos extendidos sobre un espacio arbitrario X como un prehaz exacto, pues describir directamente el fibrado resulta artificial y complicado. En el caso de modelos de Kripke, en cambio, será más sencillo y natural describir directamente el haz fibrado.

Defnición 5.3. Sea X un espacio topológico. Para cada ordinal α definimos un conjunto $\mathbb{V}_\alpha(U)$ de funciones definidas en Ab(U), cuyos valores en $W \in$ Ab(U) son conjuntos de funciones en Ab(W) cuyos valores, a su vez, en $V \in$ Ab(W) son conjuntos de funciones en Ab(V), etc.:

$$\mathbb{V}_0(U) = \emptyset$$

$$\mathbb{V}_{\alpha+1}(U) = \{ \sigma \in \prod_{W \in Ab(U)} P(\mathbb{V}_\alpha(W)) \colon \sigma \text{ con las restricciones } \rho_{Ab(W)Ab(T)} \text{ para} W \supseteq T \text{ constituye un sub-prehaz exacto}\}$$

$$\mathbb{V}_\alpha(U) = \bigcup_{\gamma<\alpha} \mathbb{V}_\gamma(U)$$

Finalmente defínase

$$\mathbb{V}(U) = \bigcup_{\alpha \in Ord} \mathbb{V}_\alpha(U),$$

y dados $\sigma, \mu \in \mathbb{V}(U)$, la relación de pertenencia:

$$\sigma \in^U \mu \Leftrightarrow \sigma \in \mu(U).$$

Escribimos $\mathbb{V}^X$ para hacer explícito el espacio topológico.

Se tiene $\mathbb{V}_\alpha(U) \subseteq \mathbb{V}\gamma(U)$ si $\alpha < \gamma$. Además se verifica que $\mathbb{V}_\alpha$ con las restricciones $\rho_{Ab(U)Ab(W)}$ es un prehaz exacto sobre X, por tanto $\mathbb{V}_\alpha \in \mathbb{V}_{\alpha+1}(X)$ y así $\mathbb{V}_\alpha \in^X \mathbb{V}_{\alpha+1}$. Más generalmente $\mathbb{V}_\alpha|`Ab(U) \in^U \mathbb{V}_{\alpha+1}$. También $\mathbb{V}$ con las restricciones es un prehaz exacto cuyas estructuras de secciones $\mathbb{V}(U)$ son clases propias. No intentamos calcular el haz $\mathfrak{G}\mathbb{V}$ de gérmenes, pero sabemos que los elementos de $\mathbb{V}(U)$ pueden considerarse como las secciones en $\mathfrak{G}\mathbb{V}(U)$; en particular $\mathbb{V}_\alpha$ y $\mathbb{V}_{\alpha+1}$ son secciones globales y tenemos

$$\mathfrak{G}\mathbb{V} \Vdash_X \mathbb{V}_\alpha \in \mathbb{V}_{\alpha+1}.$$

En el caso de modelos de Kripke, podemos describir directamente el haz de gérmenes, ya que en general un prehaz exacto está completamente determinado por sus valores en una base, y en modelos de Kripke vale $\mathbb{K}_p \approx \mathbb{K}([p))$. Si interpretamos el orden parcial Σ como la estructura del tiempo, entonces tenemos una genuina jerarquía cumulativa de conjuntos variables sobre Σ:

$$\mathbb{K}^\alpha{}_p = \emptyset$$

$$\mathbb{K}^{\alpha+1}{}_p = \{ f\colon [p) \to \bigcup_{q \geq p} P(\mathbb{K}_{\alpha,q})\colon f(q) \subseteq \mathbb{K}_{\alpha,q},\ \forall\, r \geq q \geq p\colon g \in f(q) \Rightarrow g|`[r) \in f(r)\}$$

$$\mathbb{K}^\alpha{}_p = \bigcup_{\gamma<\alpha} \mathbb{K}^\gamma{}_p \quad \text{si } \alpha \text{ es un ordinal límite.}$$

$$\mathbb{K}_p = \bigcup_{\alpha \in Ord} \mathbb{K}^\alpha{}_p, \quad g \in^{p} f \Leftrightarrow g \in f(p)\ .$$

Los elementos de $\mathbb{K}_p$ son funciones definidas en [p), de hecho secciones del haz $\mathbb{K}|`[p)$, cuyos valor en q es a su vez un conjunto de funciones definidas en [q), $q \geq p$, etc. Un conjunto variable g pertence en el momento p al conjunto variable f si g pertenece a la descripción instantánea f(p) de f en p. Los homomorfismos de transición son las restricciones que, por construcción, respetan la relación de pertenencia del modelo.

TEOREMA 5.3. *Para todo espacio topológico* X, $\mathfrak{G}\mathbb{V}^X \Vdash_X ZF^G$.

Demostración. Para mayores detalles sobre esta construcción y la verificación de que los axiomas de ZF (Teoría axiomática de conjuntos de Zermelo-Fraenkel) son forzados en estos haces conjuntistas véase la tesis de Magister de **A. Villaveces** (1991). □

Se tiene como corolario inmediato que $\mathbb{V}^X[\mathfrak{F}] \models ZF$ para cualquier filtro genérico $\mathfrak{F}$. Los axiomas de ZF no son necesariamente forzados en su formulación corriente, por ello se necesita la traducción de Gödel; por ejemplo, en el universo conjuntista sobre el espacio de Sierpinski no se fuerza la formulación corriente del *axioma de fundamentación* AF:

$$\forall u \exists v\ (v \in u\ \wedge\ \forall w(w \in v \to \neg\, w \in u)),$$

sino más bien su negación $\neg$AF, pero se fuerza AF^G (que contradice a $\neg$AF clásicamente, pero no intuicionistamente).

§ 6. Genericidad en lógica infinitaria

La semántica puntual de haces puede extenderse al lenguaje $L_{\infty\omega}$ que admite conjunciones y disyunciones infinitas (para la lógica infinitaria clásica véase **Dickmann,** 1975), adicionando a las cláusulas de la Definición 3.1 las reglas:

$$\mathfrak{A} \Vdash_x \bigvee_{i \in I} \varphi_i[\sigma_1 ... \sigma_n] \Leftrightarrow \exists\, i \in I\colon \mathfrak{A} \Vdash_x \varphi_i[\sigma_1 ... \sigma_n],$$

$$\mathfrak{A} \Vdash_x \bigwedge_{i \in I} \varphi_i[\sigma_1 ... \sigma_n] \Leftrightarrow \exists\, U \in \mathcal{V}(x) \text{ tal que } \forall y \in U,\ \forall i \in I\colon \mathfrak{A} \Vdash_y \varphi_i[\sigma_1 ... \sigma_n].$$

se tiene entonces la siguiente extensión de la semántica de Kripke-Joyal:

$$\mathfrak{A} \Vdash_U \bigvee_{i \in I} \varphi_i[\sigma_1 ..., \sigma_n] \Leftrightarrow \exists \text{ recubrimiento } \{U_i\}_i \text{ de } U \text{ tal que } \forall i\colon \mathfrak{A} \Vdash_{U_i} \varphi_i[\sigma_1, ... \sigma_n],$$

$$\mathfrak{A} \Vdash_U \bigwedge_{i \in I} \varphi_i[\sigma_1, ..., \sigma_n] \Leftrightarrow \exists\, U \in \mathcal{V}(x) \text{ tal que } \mathfrak{A} \Vdash_U \varphi_i[\sigma_1, ... \sigma_n] \text{ para todo i.}$$

Es posible generalizar también la teoría de modelos genéricos a fragmentos de $L_{\infty\omega}$, lo cual permite demostrar completitud y omisión de tipos para fragmentos enumerables, unificando las demostraciones por medio de condiciones de consistencia de **Barwise** (1970) y **Keisler** (1973), y la de **Dahn** (1979) para la lógica de primer orden $L_{\omega\omega}$ por medio de modelos de

Kripke.

Un sublenguaje L de $L_{\infty\omega}$ será un *fragmento* si es cerrado bajo subfórmulas y los operadores: $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\forall$ y $\exists$.

Definición 6.1. G es L-*genérico* para $\mathfrak{A}$ (L un fragmento de $L_{\infty\omega}$) si cumple las condiciones de la definición original para todas las fórmulas de L, y además la cláusula:

$$3)\ \mathfrak{A} \Vdash_U \vee \Phi \text{ con } U \in \mathcal{F} \Rightarrow \exists W \in \mathcal{F}\ \exists \varphi \in \Phi \text{ tales que } \mathfrak{A} \Vdash_W \varphi.$$

Para disyunciones finitas, esta propiedad se sigue de las otras dos, de manera que genericidad a secas es $L_{\omega\omega}$-genericidad. El análogo del *teorema del modelo genérico* 5.2 sigue valiendo para fórmulas de un fragmento L y un filtro L-genérico, si extendemos la traducción de Gödel a la lógica infinitaria con las reglas:

$$(\wedge_{i \in I}\phi_i)^G = \wedge_{i \in I}\phi_i^G$$
$$(\vee_{i \in I}\phi_i)^G = \neg(\wedge_{i \in I}\neg\phi_i^G).$$

No podemos asegurar en general la existencia de filtros L-genéricos, pues un filtro maximal no tiene por qué cumplir la condición (3); sin embargo, podemos garantizarla bajo condiciones de enumerabilidad para L y el haz.

TEOREMA 6.1. *Sean* L *un fragmento enumerable de* $L_{\infty\omega}$ *(y por lo tanto de* $L_{\omega_1\omega}$*),* X *un espacio topológico con una base enumerable* B, *y* $\mathfrak{A}$ *un haz de estructuras sobre* X *tal que* $\mathfrak{A}(U)$ *es enumerable para toda* $U \in B$; *entonces existe un filtro* L-*genérico para* $\mathfrak{A}$. *Además puede escogerse el filtro de manera que tenga una base de filtro formada por elementos de* B.

Bajo condiciones fuertes de intersección en el espacio de base es posible probar también la existencia de filtros L-genéricos para fragmentos no enumerables.

Llamaremos *filtro de Cohen* a un filtro sobre un modelo de Kripke que sea generado por básicos de la forma [p). Por la última condición del Teorema 6.1, existen filtros de Cohen genéricos en modelos de Kripke enumerable. En tal caso el conjunto $C = \{ p : [p) \in \mathcal{F} \}$ es un filtro genérico sobre el orden parcial del modelo en el sentido corriente de la teoría de conjuntos (véase **Kunen**, 1980). Sea L un fragmento enumerable y $\vdash_L$ el sistema deductivo resultante de adjuntar al sistema $\vdash$ para la lógica de primer orden con las reglas infinitarias naturales para las conjunciones infinitas de L. Es decir para cada $\wedge_{i \in \omega}\phi_i \in L$ las dos reglas:

$$\wedge_{i \in \omega}\phi_i \vdash_L \phi_j\ ; \qquad \phi_1,\phi_2,\dots \vdash_L \wedge_{i \in \omega}\phi_i$$

Si construimos como antes el modelo $\mathbb{K}_T$ asociado a una teoría consistente $T \subseteq L$ y al sistema deductivo $\vdash_L$, puede demostrarse el análogo del Lema 5.2, y como se cumplen las condiciones del Teorema 6.2, puede demostrarse el teorema de completitud:

TEOREMA 6.2 (Completitud para fragmentos enumerables). *Sea* L *un fragmento enumerable y* $T \subseteq L$ *un teoría consistente para el sistema* $\vdash_L$ *entonces* $\mathbb{K}_T[\mathcal{F}]$ *es modelo de* T, *para cualquier filtro* L-*genérico* $\mathcal{F}$ *de* $\mathbb{K}_T$.

Si $\mathcal{F}$ es de Cohen, el límite $\mathbb{K}_T[\mathcal{F}]$ resulta enumerable, pues puede calcularse ultilizando solamente las estructuras $\mathbb{K}_T([p))$ que son enumerables por construcción. Por otra parte, ecogiendo con cuidado el fragmento y utilizando el mismo haz $\mathbb{K}_T$ puede demostrarse el teorema de omisión de tipos.

TEOREMA 6.3 (Omisión de tipos para fragmentos enumerables). *Sea* L *un fragmento enumerable. Si* $\Phi(v)$ *es un tipo no principal sobre* $T \subseteq L$, *existe un modelo enumerable que omite a* $\Phi(v)$.

Demostración. Suponemos sin perder generalidad que el fragmento es cerrado bajo la traducción de Gödel. Para cada $t \in D$ y $p \in \Sigma$ se tiene en $\mathbb{K}_T$:

$$\mathbb{K}_T \Vdash_p \neg\wedge_{\phi(v) \in \Phi(v)} \phi^G(t/\sim_p),$$

de lo contrario $\mathbb{K}_T \Vdash_p \phi^G(t/\sim_q))$ para toda $\phi(v) \in \Phi(v)$, y por el análogo del Lema 5.2: $T \cup p \vdash_L \phi^G(t)$, es decir, $T \vdash_L \wedge p(t) \rightarrow \phi(t)$; pero podemos suponer que existe $c \in C$ tal que $(t = c) \in p(t)$, entonces $T \vdash_L \wedge p(c) \rightarrow \phi(c)$ así que $T \vdash_L \forall v(\wedge p(v) \rightarrow \phi(v))$ para todo $\phi(v) \in \Phi(v)$, una contradicción. En conclusión,

$$\mathbb{K}_T \Vdash_\Sigma \neg\wedge_{\phi(v) \in \Phi(v)} \phi^G(\sigma_t),$$

donde σ_t es la sección global $\sigma_t(p) = t/\sim_p$. Ahora, el mínimo fragmento L^* que contiene a L y a la fórmula $\neg\wedge_{\phi(v) \in \Phi(v)} \phi^G(v)$ sigue siendo enumerable y podemos hallar un filtro de Cohen L^*-genérico $\mathcal{F}$ para $\mathbb{K}_T$. Como $\Sigma \in \mathcal{F}$:

$$\mathbb{K}[\mathcal{F}] \models \neg\wedge_{\phi(v) \in \Phi(v)} \phi([\sigma_t]);$$

pero todo elemento de $\mathbb{K}[\mathcal{F}]$ tiene la forma $a = [\sigma_t]$, ya que si μ está definida sobre $U \in \mathcal{F}$, que es de Cohen, existe $[q) \in \mathcal{F}$ con $q \in U$ y por lo tanto $\mu \sim_{\mathcal{F}} \mu|[q) \sim_{\mathcal{F}} \sigma_t$, donde $t = \mu(q)$, pues para toda $p \geq q$, $\sigma_t(p) = \mu(p) = t_{\sim p}$. Por tanto, a no realiza a $\Phi(v)$. □

Reconocimiento. Este trabajo se enmarca dentro de un proyecto apoyado por COLCIENCIAS sobre el tiempo en la lógica que actualmente adelantamos con el Profesor José M. Muñoz de la Universidad Nacional de Colombia.

Bibliografía

Artin, M. 1962, *Grothendieck topologies.* Harvard Math. Dept. Lect. Notes.

———. **& A. Grothendieck** 1963-1964, *Cohomologie étale des schemas,* fascicule 1, S.G.A., I.H. E.S., París.

Barwise, J. 1970, "Notes in forcing and countable fragments". Preprint.

Bell, J. L. & A. B. **Slomnson** 1971, *Models and ultraproducts*. North Holland, Amsterdam.

Brouwer, L. E. J. 1908, *De onbetrouwbaarheid der logische principes*. Tijdschrift voor wijsbegeerte, vol. 2: 12-158.

———. 1913, *Intuitionism and Formalism*. Bulletin of the A. M. S. 20 : 81-86.

Bunge, M. 1974, *Topos theory and the continuum hypothesis*. J. Pure and Appl. Alg. 4: 159-187.

Caicedo, X. 1988, *Introducción a los topos de Grothendieck, I*. Apuntes Matemáticos No. 8, Universidad de los Andes, Bogotá.

———. 1991, *Investigaciones sobe nuevos conectivos intuicionistas*. Apuntes Matemáticos No. 14, Universidad de los Andes, Bogotá.

Cartan, H. (editor) 1967, *Seminaire H. Cartan, 1948 -51*, Benjamin, San Francisco.

Cohen, P. J. 1963, 1964, *The independence of the continuum hypothesis*, Proc. Nat. Acad. Sc. 50: 1143-1148; 51: 105-110.

Dahn, B. 1979, *Constructions of classical models by means of Kripke models*. Studia Logica 38, No. 4

Dedecker, P. 1969, *Variedades diferenciables y espacios fibrados*, Universidad Central de Venezuela, Ediciones de la Biblioteca, Caracas.

van Dalen, D. 1983, *Logic and structure*, 2nd ed. Springer Verlag, Berlin.

Deligne, P. 1974, *La conjecture de Weil I*, Publ. Math. I.H.E.S. 43: 273-307.

Dickmann, M. A. 1975, *Large infinitary languages*, North Holland, Amsterdam.

Ebbinghauss, H. D., J. **Flum** & W. **Thomas** 1984, *Mathematical Logic*, UTM Springer Verlag, New York.

Eilenberg, S. & S. **Mac Lane** 1945, *General theory of natural equivalence*. Trans. Am. Math. Soc. 58: 231-294.

Ellerman, D. P. 1974, *Sheaves of structures and generalized products*. Ann. of Math. Logic 7: 163-195.

Freyd, P. J. 1972, *Aspects of Topoi*. Bull. Austral. Math. Soc. 7: 1-76.

Fitting, M. C. 1978, *Intucionistic logic model theory and forcing*, Studies in Logic. North Holland, Amsterdam.

Fourman, M. P. & D. **Scott** 1979, *Sheaves and logic*. In *Applications of sheaves* (ed. M.P. Fourman). Springer Verlag LNM 753: 230-301.

Gödel, K. 1933, *Zur intuitionistischen Aritmetik und Zalentheorie*. Ergebnisse eines mathematischen Kolloquium, Heft 4: 34-38. Traducción: *Sobre la teoría de números y la aritmética intuicionista*, en *Obras completas de Gödel*, Alianza Editorial, Madrid, 1981.

Godement, R. 1958, *Topologie algébrique et théorie des Faisceaux*. Hermann, Paris.

Grothendieck, A. 1960-1967, *Eléments de Géométrie Algébrique*, Vol I-IV. Publications Mathematiques I.H. E.S., Paris.

Goldblatt, R. 1984, *Topoi, the categorical analysis of logic*. North Holland, Amsterdam.

Hartstorn, R., 1977, *Algebraic Geometry*. GTM 52, Springer Verlag, Berlin.

Heyting, A. 1930, *Die formalen Regeln der intuitionistischen Logik*. Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften, Physikalisch-mathematische Klass: 42-56.

Keisler, J. 1973, *Forcing and the omitting types theorem*. In MAA Studies in Mathematics (ed. M. D. Morley) 8: 96-133.

Kripke, S. 1965, *Semantical Analysis of Intuitionistic Logic*. In *Formal Systems and Recursive Functions* (eds. J. Crossley and M. Dummett), North Holland, Amsterdam: 92-130.

Kolmogorov, A. N. 1925, *On the principle of the excluded middle*. Traducción del ruso en: *From Frege to Gödel* (ed. J. van Heijenoort). Harvard University Press, Cambridge, Mass., 1967.

Kunen, K., 1980, *Set theory, An introduction to independence proofs*. North Holland, Amsterdam.

Lawvere, F. W. 1971, *Quantifiers and sheaves*. Actes Congrès intern. math. 1970, Tome 1. Gauthier-Villars, Paris: 329-334.

———. 1975, *Continuously variable sets: algebraic geometry = geometric logic*. In Proceed. Logic Colloqium, Bristol, 1973, North Holland, Amster dam: 135-153.

———. 1986, *Categories of spaces may not be generalized spaces as exemplified by directed graphs*. Rev. Colombiana de Mat. Vol. XX: 179-185.

Macintyre, A. 1973, *Model completeness for sheaves of structures*. Fund. Math. 81: 73-89.

Makkai, M. & G. **Reyes** 1977, *First order categorical logic*. LNM 611, Springer Verlag, Amsterdam.

Massey, W. S. 1967, *Algebraic topology, an introduction*. Harcourt, Brace & World, Inc., New York.

Mac Lane, S. & I. **Moerdijk** 1992, *Sheaves in Geometry and Logic*, Springer Verlag, New York.

Miraglia, F. 1989, "Generalized ultraproducts for first order structures in Ω-sets. Preprint, U. de São Paulo.

Munkres, J. R. 1975, *Topolgy, a first course*. Prentice Hall, Inc., New Jersey.

Reyes, G. 1974, *From sheaves to logic*. MAA Studies in Mathematics (ed. A. Daigneault) 9: 143-204 .

Robinson, A. 1970, *Forcing in model theory*. 1st. Nat. Alta Math. Symposia Math. 5: 69-82. También en: Actes Congrès intern. math. 1970, Tome 1. Gau thier-Villars (1971): 245-250.

Rudin, W. 1976, *Principles of Mathematical Analysis*, 3rd. ed., McGraw Hill.

Scott, D. 1967, *Lectures on Boolean-valued models for set theory*. Notes for AMS-ASL Summer Institute, UCLA.

Seeback, S. 1979, *What is a Sheaf?* Amer. Math. Montly 77: 681-703.

Serre, J. P. 1953, *Faisceaux algébriques coherénts*. Ann. Math. 61: 197-278.

Sette A. M. & X. Caicedo, 1993, *Equivalencia elementar entre feixes*. Proc. of the IX Latin American Symposium on Mathematical Logic. Notas de Lógica Matemática 38: 129-141.

Tennison, B. R. 1975, *Sheaf Theory*, London math. Soc. Lect. Notes 20. Cambridge Univ. Press.

Tierney, M. 1972, *Sheaf theory and the continuum hypothesis*. Springer Verlag LNM 274: 13-42.

Villaveces, A. 1991, *Modelos-fibrados y modelos-haces para la Teoría de Conjuntos*. Tesis de Magister, Universidad de los Andes, Bogotá.

Weil, A. 1949, *Numbers of solutions of equations in finite fields*. Bull. Amer. Math. Soc. 60: 497-508.

Weyl, H. 1913, *Die Idee der Riemannschen Fläche*. Teubner, Leipzig.

Whitehead, A. N. 1920, *The concept of nature*. Cambridge University Press. (Traducción: *El concepto de Naturaleza*. Gredos, Madrid, 1968).