

EL ORIGEN DE LA INERCIA

Una nota sobre la hipótesis de Mach, a la luz de la astrofísica contemporánea

Por JOSE FERNANDO ISAZA DELGADO

... Pero la gravedad cero, que hace que las paredes, el piso y el techo sean intercambiables, modifica todas las reglas de la vida...

(Arthur C. Clark - 2010 Odisea 2)

INTRODUCCION

Hace pocos meses la NASA hizo público su proyecto de construir, en la década del 90, una plataforma en el espacio, la cual orbitaría alrededor de la Tierra. Con el fin de hacer más confortables las actividades de la tripulación, se creará en la plataforma una gravedad artificial, imprimiéndole un movimiento de rotación adicional al de traslación de su órbita.

A primera vista, la solución de crear un campo gravitatorio por el efecto de una aceleración por rotación, parece obvia. En efecto, todos hemos experimentado en una u otra forma la "fuerza centrífuga" cuando viajamos en una carretera con curvas o cuando en algunas diversiones mecánicas se "anula" durante algunos instantes la aceleración gravitatoria mediante la aceleración centrífuga.

Sin embargo, esta interpretación de "sentido común" no encuentra apoyo en un análisis más profundo. En efecto, si una plataforma sigue una trayectoria orbital, desde el punto de vista del "principio de equivalencia" la plataforma está en caída libre, anulándose en esta forma el efecto del campo gravitatorio de la Tierra.

Los objetos en la plataforma tienen una inercia nula. En rigor, existe una pequeñísima gravedad diferencial creada por el hecho de la dimensión finita de la plataforma, que hace que la parte más cercana a la Tierra tenga mayor gravedad que la más alejada, pero este efecto es infinitesimal.

Un objeto en órbita constituye pues, un sistema inercial de referencia, en el cual se ha anulado el tensor de gravedad.

En estas circunstancias, se comprende el porqué de la expresión "la plataforma tiene un movimiento de rotación", no permite deducir que se genere un campo gravitacional, pues surge la pregunta: ¿rotación con respecto a qué? No con relación a la Tierra pues el campo gravitacional está "anulado", ni tampoco con respecto al eje de la plataforma, pues ésta no tiene una masa lo suficientemente grande para crear un campo gravitatorio perceptible. Un newtoniano moderno respondería: la plataforma rota con respecto al espacio absoluto y esa aceleración (absoluta) crea un campo de fuerzas. En efecto, para Newton el concepto de rotación es absoluto.

Sin embargo, la noción de espacio absoluto ha sido necesario abandonarla, no sólo por ser una noción vacía sino que crea una serie de paradojas en el campo de la mecánica y del electromagnetismo.

Podría aceptarse la hipótesis de Mach sobre la creación de la inercia por el efecto de las estrellas distantes y afirmar que la nave tiene un movimiento rotacional relativo a las estrellas distantes (fijas en la astronomía clásica) o con respecto a la masa total del universo.

En efecto, la plataforma al rotar tiene una aceleración con respecto a campos gravitatorios (muy débiles) creados por la masa total del universo pero no anulados por la "caída libre" hacia la Tierra. Si la inercia generada por la "masa del universo" es del orden de magnitud de la inercia creada en la Tierra sobre un cuerpo en reposo, se tiene que un movimiento rotatorio en un cuerpo en caída libre, puede generar una aceleración gravitatoria.

El ejemplo más accesible de la "eliminación"

del campo gravitacional por efecto del movimiento orbital (caída libre) lo constituye la traslación de la Tierra alrededor del Sol, no obstante la gran intensidad del campo gravitacional del Sol; éste es casi imperceptible, pues la Tierra (y nosotros) estamos en caída libre hacia él. El pequeño efecto gravitatorio residual se debe a que la Tierra no es un objeto puntual; ésta es la explicación de las mareas solares¹. En estas condiciones, aunque no es posible sentir el campo de gravedad solar, la existencia de las marcas permitirá medir su inhomogeneidad y de ahí deducir su intensidad. En el caso hipotético de que no se pudiera determinar la distancia y la masa del Sol, la inhomogeneidad del campo permite determinar la intensidad total gravitatoria.

La aceleración centrífuga que se experimenta en la Tierra es generada por la masa del planeta y la forma ovalada se explica por la rotación con respecto a las estrellas fijas.

Las notas que siguen, tienen por objeto presentar a la luz de la astrofísica actual, la hipótesis de Mach sobre la creación de la inercia y el abandono del espacio absoluto².

EL ESPACIO ABSOLUTO DE NEWTON

Uno de los mayores aportes a las ciencias físicas, lo constituyó indudablemente la teoría de la gravitación formulada por Newton en el siglo XVII. No solamente permitía explicar el movimiento planetario mediante leyes matemáticas, sino que constituyó una de las más audaces teorías unificadoras al aplicar exitosamente las teorías de la mecánica terrestre a la mecánica celeste, encontrándose que el cosmos estaba regido por las mismas leyes que gobernaban la física terrestre. Aunque esto suena hoy apenas natural, no hay que olvidar que pocos siglos antes de Newton, la "ciencia oficial" consideraba que los cuerpos diferentes a nuestro planeta que formaban el cosmos, estaban regidos por leyes sobrenaturales y metafísicas, diferentes a las que explicaban la mecánica terrestre. No era de extrañar que las observaciones astronómicas europeas anteriores a Tycho de Brahe, no hubieran registrado ninguna explosión de super novae, como si lo hicieran los astrónomos chinos, quienes les daban el nombre de "estrellas visitantes". Por el contrario, la "ciencia" europea consideraba los cielos como absolutamente "perfectos" e inmutables y la aparición o desaparición de una estrella no sólo rompía esta concepción, sino que podía constituirse en un anuncio del fin del mundo.

La mecánica celeste de Newton, sirve aún para realizar la mayor parte de los cálculos astronómicos. La relatividad generalizada, aunque conceptualmente diferente de la mecánica newtoniana

desde el punto de vista cuantitativo, para la mayor parte de los objetos celestes clásicos sólo introduce correcciones pequeñas del orden de 10^{-4} o menos. Para los objetos celestes "nuevos" como los Quasars o los agujeros negros, la mecánica newtoniana ya no es aplicable, como no lo es al considerar globalmente al universo.

Las primeras objeciones a la concepción cosmológica de Newton, surgen al analizar el universo como un todo, en el cual la homogeneidad e isotropía predominan sobre las "anomalías locales" como son los sistemas individuales de galaxias.

La mecánica celeste de Newton, tiene como una de sus hipótesis fundamentales, la existencia del "espacio absoluto" que forma un sistema de referencia real, con relación al cual pueden definirse las velocidades relativas y las aceleraciones absolutas. El mismo Newton comprendió las dificultades filosóficas y técnicas del concepto del espacio absoluto; por ejemplo, si el espacio es finito, colapsaría por la fuerza de gravedad, lo cual no ocurriría si fuera infinito, pues no tiene centro sobre el cual colapsar. Es interesante mencionar que de acuerdo con la concepción del espacio absoluto, una rotación de un universo finito con relación a dicho espacio, impediría el colapso; pero a su vez el espacio absoluto infinito crea paradojas como la conocida de Olber, según la cual en un universo infinito y homogéneo, cualquier porción del espacio es tan brillante como el sol y la noche tan clara como el día. Como la noche es oscura, hay que concluir que el universo o no es finito o no es homogéneo.

Otra objeción relevante a la teoría gravitacional de Newton consiste en presentar la inconsistencia que tienen las soluciones a la ecuación de Poisson, en un espacio homogéneo y estático. Como la ecuación de Poisson es deducida de la mecánica celeste newtoniana, se concluye la inconsistencia de ésta.

En efecto, la ecuación de Poisson $\Delta^2 \phi = 4 \pi \rho G$ en donde

ϕ = potencial gravitatorio

G = constante gravitatoria

ρ = densidad media

$$\Delta^2 \phi = \text{Laplaciano de } \phi = \frac{\delta^2 \phi}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 \phi}{\delta y^2} + \frac{\delta^2 \phi}{\delta z^2}$$

No admite solución global $\phi = \text{constante}$ (por solución global se entiende aquí, aplicada al universo como un todo).

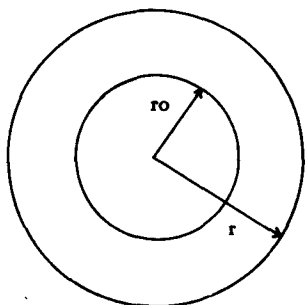
Si el universo es homogéneo y estático en gran escala (es decir si no colapsa), el potencial gravitatorio en dos puntos A y B, cualquiera debe ser igual; en caso contrario, la mesa se desplazaría hacia el punto de menor potencial. Esto implica que $\phi = \text{constante}$ y por tanto $\Delta^2 \phi = 0$ es decir $4 \pi G \rho = 0$ con lo cual se tiene $\rho = 0$ y es claro que la densidad media de un universo homogéneo no es cero. La solución local del potencial newtoniano $\Delta^2 \phi = 0$, admite como solución $\phi = \frac{-k}{r}$, que es compatible con la ley inversa de atracción gravitatoria.

1. Estas mareas son inferiores a las mareas lunares.

2. Las referencias a naves espaciales y objetos parecidos, sólo se hicieron en los párrafos anteriores.

Es bueno mencionar que la conclusión de que no existe un espacio homogéneo (con materia) con densidad media $\rho = 0$, no implica que no pueda concebirse un espacio (no homogéneo) con densidad $\rho = 0$, y con materia. Un ejemplo sencillo es el siguiente:

Consideremos un universo infinito en el cual la densidad varía inversamente proporcional a la distancia a un punto 0, si $\rho_r = \rho_o/r$ para valores de $r = r_o$ y es constante $\rho = \rho_o$ si $r < r_o$, la masa de la esfera de radio R es por tanto:



$$\rho_r = \frac{\rho_o}{r^2}$$

$$M = \frac{4}{3} \pi \rho_o r_o^3 + \int_{r_o}^R 4 \pi \frac{r^2 \rho_o}{r} dr =$$

$$4 \pi \rho_o \left(r_o^3 + \frac{R^2}{2} - \frac{r_o^2}{2} \right)$$

Por lo tanto la densidad media es

$$\rho = \frac{M}{\frac{4}{3} \pi R^3} = 3 \rho_o \left(\frac{(r_o)^3}{R^3} + \frac{1}{2R} - \frac{(r_o)^2}{2R^3} \right)$$

Claramente $\rho \rightarrow 0$ cuando $R \rightarrow \infty$

En el campo de la relatividad generalizada, una solución a las ecuaciones de campo de Sitter, corresponde a un universo de densidad $\rho = 0$.

Para los filósofos de la ciencia, el concepto de "espacio absoluto" (E.A.) de Newton, tenía entre otras las siguientes objeciones:

- No existe una forma única de localizar el E.A. en la clase infinita de sistemas inerciales de referencia.
- Entra en conflicto con la concepción científica al concebir un objeto (E.A.) que tiene influencia sobre otros objetos pero éstos no actúan sobre él.

Los experimentos de Michelsen y Morley realizados a principios del siglo XX, comprobaron que el concepto de espacio absoluto no es compatible ni con las leyes de la mecánica ni con las del electromagnetismo; la nueva teoría gravitatoria formulada por Einstein en 1915, abandona el concepto de "espacio absoluto" y el de propagación instantánea del campo gravitacional.

El desarrollo realizado por Einstein de una teoría consistente (teórica y hasta ahora experimental) con la hipótesis que las leyes de la física son invariantes, cualquiera que sea el sistema de referencia (acelerado o no) en que se formulen, dejó sin

peso una de las principales propiedades deducidas del E.A.: que si la velocidad es relativa, la aceleración (con respecto al E.A.) es absoluta. En efecto, la teoría de la relatividad generalizada lleva a concluir la imposibilidad de definir si un objeto está en movimiento acelerado o en "reposo" en un campo gravitacional.

EL PRINCIPIO DE MACH

En 1883, en su "Ciencia de la Mecánica", Mach plantea la necesidad de abandonar la teoría del "espacio absoluto", razonando que no tiene sentido hablar de la aceleración de una masa relativa al espacio absoluto; añadía que cualquier científico que quiera despojar la física de ideas metafísicas, debe referir la aceleración de una masa con relación a las estrellas distantes. De acuerdo con su pensamiento, son las masas en el espacio las que determinan las propiedades de éste y toda la materia del universo la que origina la inercia, es decir, la resistencia de un cuerpo a ser acelerado.

Los principales postulados de la mecánica de Mach son los siguientes:

- El espacio no es un "objeto"; es sólo una abstracción de la totalidad de las relaciones de distancia entre la materia.
- La inercia de una partícula se debe a una interacción de esa partícula con todas las otras masas del universo.
- Los sistemas de referencia no acelerados (galileanos en términos modernos), están determinados por un cierto promedio (no especificado) de los movimientos de todas las masas del universo.
- La única relación importante en mecánica es el movimiento relativo de todas las masas. En estas condiciones, se tienen los mismos resultados (hoy diríamos, las leyes de la física son covariantes) si se considera que la Tierra gira alrededor de su eje y las estrellas distantes son fijas, o está en reposo y son las estrellas distantes las que giran a su alrededor³.

Inicialmente las ideas de Mach tuvieron poca acogida en el mundo científico, pues no es fácil aceptar por ejemplo que una estrella a más de 10^9 años luz, tenga influencia sobre la inercia de una masa. No se aceptaba fácilmente que la estrella distante (o la masa del universo), pueda producir efectos tan palpables como la destrucción de un volante que gira a alta velocidad, la estabilidad del plano de oscilación del péndulo de Foucault, o la forma parabólica que adopta el agua en un recipiente que gira en un eje vertical. Evidentemente la ciencia clásica no tiene respuesta para explicar el efecto dinámico atribuido a las estrellas⁴.

3. No puede dejar de señalarse que el principio de Mach implica la equivalencia mecánica entre los sistemas de Ptolomeo y Copérnico.

4. D'Abro "The Evolution Scientific Thought from Newton to Einstein". Dover Publications, New York, 1950.

Algunos cálculos señalaban que para que la masa del universo tuviera efecto sobre la inercia de un cuerpo, la densidad promedio del universo debería ser trillones de veces la estimada.

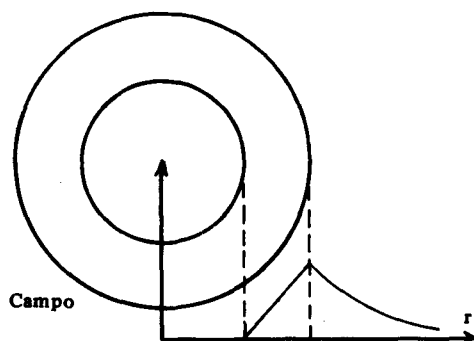
En efecto, de acuerdo con la mecánica newtoniana, la acción de las estrellas distantes es nula en un universo homogéneo, pues la fuerza gravitatoria

$$F = \frac{G M m}{r^2}$$

es independiente del estado de reposo o de aceleración de los cuerpos, sólo intervienen sus masas y sus distancias; por homogeneidad, el efecto de una galaxia se anula por otra simétrica radial con respecto a la masa considerada.

En el caso de un universo finito y homogéneo, la acción gravitatoria sobre un cuerpo de masa total del universo, es también nula.

Basta recordar que la intensidad del campo gravitacional de una "concha esférica" es cero al interior de ella y es $\frac{G M}{r^2}$ al exterior⁵.



La distribución del campo explica el porqué, de acuerdo con la mecánica clásica, el efecto de la masa distante del universo debe ser casi nula y la pequeña influencia que podría tener, sería consecuencia de ligeras desviaciones de la isotropía. Sin embargo, como se verá más adelante, al considerar el efecto de la aceleración sobre la fuerza gravitatoria, se comprende que la masa distante sí contribuya a crear la inercia.

La acción de las aceleraciones relativas, permitiría dirimir una disputa entre los newtonianos y los machianos. Consiste en el siguiente experimento "pensado": Se considera un universo en el cual sólo existen dos cuerpos esféricos elásticos y uno de ellos está en rotación. ¿Cómo se sabe cuál está rotando?

De acuerdo con Newton, la esfera que gira con relación al espacio absoluto, presentará un achatamiento y la otra conservará la forma esférica. De acuerdo con Mach, las dos esferas determinan la estructura del espacio, y por lo tanto, cada esfera rota con relación a la otra y es imposible (o carece

de sentido), determinar cuál gira y cuál permanece estática; cada una es afectada por la acción de la otra y ambas se achatarán pues es totalmente simétrica la situación para ambas. Obsérvese que de acuerdo con Newton, la existencia de un sistema de referencia inercial, permite definir una rotación absoluta, por lo tanto no es simétrica la situación de las dos esferas.

INFLUENCIA DE MACH SOBRE LA TEORÍA DE LA RELATIVIDAD

La concepción del espacio de Mach, tuvo una considerable influencia sobre Einstein, quien conoció los trabajos a través de un amigo común, Michele Besso; Einstein en las notas autobiográficas escribe: "... La ciencia de la mecánica de Mach hizo tambalear la fe dogmática en la mecánica como base última de todo pensamiento físico... Este libro ejerció una poderosa influencia sobre mí en relación con esto cuando yo era estudiante. Pienso que la grandeza de Mach radica en su escepticismo e independencia a toda prueba; en mis años jóvenes, sin embargo, la posición epistemológica de Mach también influyó mucho sobre mí..."⁶.

En una carta dirigida por Einstein a Mach en 1913, le escribe: "...Sus brillantes concepciones sobre los fundamentos de la mecánica pronto tendrán una brillante confirmación...⁷. Necesariamente se deduce que la inercia se origina en la interacción entre los cuerpos en el sentido en que usted analiza el experimento del balde de Newton, los siguientes puntos adicionales se concluyen:

1. Si se acelera una concha esférica, entonces una masa colocada en su interior, experimenta una fuerza de aceleración.
2. Si se rota una concha esférica con relación a las estrellas fijas alrededor de un eje central, se produce una fuerza de Coriolis en el interior de la concha, esto explica por qué el plano de oscilación del péndulo de Foucault es arrastrado con una pequeñísima velocidad angular...⁸.

Dos años después de esta comunicación, Einstein publicaba la culminación de su trabajo científico "Los Fundamentos de la Teoría General de la Relatividad"⁹ y al poco tiempo Mach moría. Mach, a lo largo de su obra, buscaba demostrar como los conceptos deben surgir de la experiencia y subordina en esta forma el elemento constructivo libre de la elaboración de una teoría, "Toda la información

6. Citado por Gerald Holton en "Ensayo sobre el Pensamiento Científico en la Época de Einstein" Alianza Universidad Madrid, 1982.

7. Einstein hace referencia a la comprobación cuantitativa que aportarán a la teoría de la relatividad, las mediciones que se efectuarán en el próximo eclipse solar.

8. Citado por Misner, Thorne y Wheeler en "Gravitation" Freeman and Company San Francisco, 1973.

9. "Die Grundlage der Allgemeinen Relativitätstheorie" Annalen der Physik 49, 1916.

5. Este resultado está lejos de ser evidente para un punto excéntrico: Véase en el apéndice una demostración.

del mundo proviene de las sensaciones, deben ser éstas los elementos básicos en que se levanten las teorías científicas”.

Einstein compartía con Mach la conveniencia de eliminar el concepto de fuerza en física y buscaba la forma de hacer depender la gravitación utilizando únicamente conceptos geométricos, sin recurrir a la explicación clásica basada en la noción de fuerza. Igualmente orientó parte de sus trabajos a la búsqueda de una dependencia funcional de la masa inercial dependiente de la atracción de todas las estrellas del universo¹⁰

En esta forma se había conseguido una explicación “Machiana” de la inercia.¹¹ Fue Mach el primer físico que reconoció la igualdad entre la masa inercial y la masa gravitatoria; lejos de ser un resultado fortuito, representaba un problema que requería una teoría que lo resolviera. Einstein lo resuelve postulando la igualdad y como los resultados obtenidos (Teoría de la Relatividad Generalizada) coinciden con las observaciones realizadas, se mantiene la validez de dichos postulados.

La amistad intelectual entre Einstein y Mach se mantuvo hasta la muerte de éste, así en el obituario que escribió Einstein en 1916 decía: “...No es improbable que Mach hubiera llegado a la teoría de la relatividad si, cuando su mente estaba todavía joven y fresca, la constancia de la velocidad de la luz hubiese atraído a los físicos... Sus pensamientos relativos al experimento del cubo de Newton demuestran lo cerca que estuvo su espíritu de exigir la relatividad en general (relatividad de aceleraciones)”.

Las relaciones se enturbian 5 años después de la muerte de Mach. En 1913, Mach escribe sus “Principios de Óptica Física”, obra publicada póstumamente en 1921, allí Mach critica acremente la teoría de la relatividad, afirmando que la encuentra cada vez más dogmática y apartada de su concepción epistemológica y positivista. En sus palabras “Me veo obligado, en lo que puede tal vez ser mi última oportunidad, a retirar mis opiniones sobre la teoría de la relatividad. Me doy cuenta por las publicaciones que me llegan, y especialmente por mi correspondencia, que gradualmente se me empieza a considerar como el precursor de la relatividad. Soy capaz incluso de, aproximadamente, imaginarme qué nuevas exposiciones e interpretaciones recibirán, desde este punto de vista, en el futuro, muchas de las ideas expresadas en mi libro de mecánica... Debo sin embargo, rechazar el ser el precursor de la relatividad tan firmemente como rechazo la doctrina atomista de la actual escuela o iglesia. La razón por la que, y el grado en que, rechazo la actual teoría de la relatividad, que encuentro va siendo cada vez más dogmática, junto a las razones que me han conducido a tal opinión —consideraciones basadas

en la fisiología de los sentidos, dudas epistemológicas, y sobre todo las enseñanzas resultantes de mis experimentos— deben esperar para ser tratadas en la continuación (de este tratado)”.

No es pues de extrañar que en 1922, en un ciclo de conferencias en París¹², en la discusión con el filósofo Emile Meyerson, Einstein afirmaba que Mach era “un buen mecanicista” pero un “deplorable filósofo”. Sin embargo, un año antes presentaba unas ideas cuantitativas del aporte de Mach a la creación de la inercia.

Un año antes de su muerte, Einstein escribía a Félix Pirani: “En mi opinión no se debería hablar más acerca del principio de Mach. Este data de una época en la que se pensaba que los “cuerpos ponderomotrices” eran la única realidad física, y que todos aquellos elementos de una teoría que no viniesen determinados completamente por ellos debían ser evitados conscientemente. (Me doy perfecta cuenta del hecho de que yo también estuve influenciado durante mucho tiempo por esta idea fija)”.

La verdad era que también Einstein iba modificando su concepción de la filosofía de la ciencia; si en sus primeros años era un positivista (como Mach) y aún podríamos decir, un experimentalista, poco a poco va adoptando una posición con respecto a la filosofía de la ciencia, en la cual le da mayor peso a la abstracción lógica. Así por ejemplo, en su conferencia pronunciada en Oxford en junio de 1933¹³, afirmaba que la simple deducción de los postulados de la mecánica a partir de algunas experiencias estaba condenada al fracaso, en su opinión consideraba necesario guiarse por un principio (¿metafísico?) según el cual la naturaleza es la realización más simple de las ideas matemáticas, la experiencia puede sugerir los más apropiados conceptos matemáticos pero éstos no pueden deducirse de aquellos.

La experimentación sirve para comprobar o no un principio, pero la concepción creativa de ese principio reside en las matemáticas. Consideraba que el pensamiento abstracto puede llevar a conocer (aprehender) la realidad, como lo soñaban los antiguos (Pitagóricos, añadimos).

Un largo camino recorrió el genio de Einstein desde su juventud experimentalista “Entré en el Instituto Politécnico de Zurich como un estudiante de matemáticas y física. Allí tenía excelentes maestros (por ejemplo, Hurwitz, Minkowski) de manera que podría ciertamente haber obtenido una esmerada educación de matemáticas. Sin embargo, trabajé la mayor parte del tiempo en el laboratorio de física, fascinado por el contacto directo con la experiencia. El resto del tiempo lo dediqué a estudiar en casa los trabajos de Kirchhoff, Helmholtz, Hertz, etc.”. Llegó a ser un profundo filósofo de la ciencia,

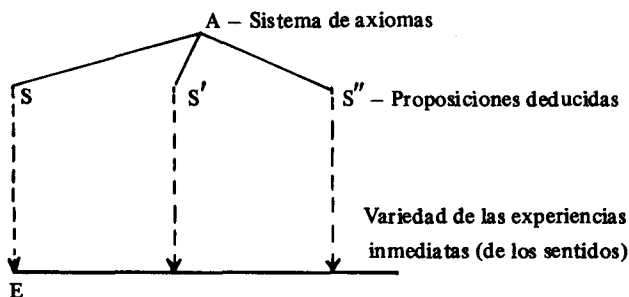
10. José Manuel Sánchez Ron “El Origen y Desarrollo de la Relatividad”.

11. Los siguientes acápites tienen por objeto proponer una relación funcional.

12. Albert Einstein “Quatre Conférences sur la Théorie de la Relativité” Gauthier - Villars, 1976.

13. Albert Einstein “On the Method of Theoretical Physics” publicado en “Ideas and Opinions” Dell Publishing Co. Inc. New York, 1954.

que en su carta a Solovine en 1952, afirmaba que no existe ningún camino lógico que lleve de las experiencias al sistema de axiomas: "En lo relativo a la cuestión epistemológica no me has comprendido en absoluto; probablemente me expresé mal. Esquemáticamente veo el asunto de la forma siguiente



1. Las E (experiencias inmediatas) no son dadas.
2. A son los axiomas, de donde extraemos conclusiones. Psicológicamente los A reposan sobre las E. Pero no existe ningún camino lógico que lleve de las E a los A, sino únicamente una conexión intuitiva (psicológica) que es siempre "hasta nueva orden".
3. De los A se deducen por vía lógica afirmaciones particulares S que pueden pretender ser exactas.
4. Las S se ponen en relación con las E (verificaciones mediante la experiencia). Este procedimiento, si se mira de cerca, pertenece igualmente a la esfera extralógica (intuitiva), puesto que la relación (que existe) entre las nociones que se presentan en S y las experiencias inmediatas E no son de naturaleza lógica.

Pero esta relación entre las S y las E es (pragmáticamente) mucho menos incierta que la relación entre los A y las E. (Por ejemplo, la noción perro y las experiencias inmediatas correspondientes). Si no se pudiese obtener con una gran seguridad tal correspondencia (y a pesar de que no se pueda obtener lógicamente), la maquinaria lógica no tendría ningún valor para la "comprensión de la realidad" (por ejemplo, la teología).

La quinta esencia de todo esto es la conexión eternamente problemática entre el mundo de las ideas y (todo) lo que pueda ser experimental (experiencias inmediatas de los sentidos)".

RELACION FUNCIONAL ENTRE LA MASA INERCIAL Y LA MASA DEL UNIVERSO

La relatividad especial permite integrar las leyes del electromagnetismo y de la mecánica. Con el objeto de hacer compatible la relatividad generalizada con la especial, sus leyes deben ser, en el límite, similares a las del electromagnetismo. Así, la ley de la atracción (o repulsión) de cargas eléctricas estáticas —Ley de Coulomb—:

$$F = \frac{q_1 q_2}{4 \epsilon_0 r^2}$$

es similar a la ley de atracción gravitatoria. Por otra parte, cuando se produce una aceleración a entre las cargas, se crea una onda electromagnética —Ley de Maxwell— y una fuerza cuya magnitud está dada por:

$$\vec{F}_{acc} = \frac{q_1 q_2 a}{4 \epsilon_0 c^2 r} \text{ en donde}$$

r = distancia entre q_1 y q_2

c = velocidad de la luz

ϵ_0 = constante dieléctrica

En forma similar, cuando dos masas están aceleradas relativamente, se crea una onda gravitatoria y adicional a la fuerza estática de atracción (Newtoniana en el caso de campos gravitatorios débiles), se produce otro campo gravitatorio cuya componente de fuerza dada por:

$$\vec{F}' = \frac{G M \vec{m} a}{c^2 r} \quad (1)$$

El problema consiste en analizar si esta componente \vec{F}' permite explicar la creación de la inercia por la masa total del universo, pues a diferencia de \vec{F} (campo estático), \vec{F}' no se anula en un universo homogéneo. Desde el punto de vista conceptual, la fuerza \vec{F}' en el caso de la gravitación, juega el papel de la fuerza electromagnética predicha por Maxwell, y no deducible de la ley de Coulomb. En la misma forma, \vec{F}' predicha por Einstein, y generadora de ondas gravitacionales, no es deducible de la ley de Newton.

La hipótesis de modificar la fuerza de atracción newtoniana, añadiendo términos para tener en cuenta las velocidades y aceleraciones de los cuerpos, se remonta al siglo pasado. Así, por ejemplo, en 1870 Holzmüller propuso la siguiente expresión¹⁴

$$F = \frac{G m_1 m_2}{r^2} \left[1 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{d r}{d t} \right)^2 + \frac{2 r}{c^2} \left(\frac{d^2 r}{d t^2} \right) \right] \quad (2)$$

por su parte Riemann había sugerido

$$F = \frac{G m_1 m_2}{r^2} \left[1 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{d \vec{r}_1}{d t} - \frac{d \vec{r}_2}{d t} \right)^2 \right] \quad (3)$$

fórmulas que explicaban en buena parte el avance del perihelio de Mercurio, con mayor precisión que la ley de Newton no modificada.

Volviendo a la fórmula (1) $\vec{F}' = \frac{G M \vec{m} a}{c^2 r}$

consideramos¹⁵ un cuerpo de masa m , que se mueve con una aceleración a con respecto a un sistema inercial de referencia L . La fuerza F que debe ejercerse sobre él es $\vec{F}' = \vec{m} a$, llamando L' un sistema

14. José Manuel Sánchez Ron "El origen y desarrollo de la relatividad" Alianza Editorial Madrid, 1983.

15. Michael Berry "Principles of Cosmology and Gravitation" Cambridge University Press, Cambridge 1976.

de coordenadas L' fijo con respecto al cuerpo m , es claro que la aceleración \vec{a}' de m con respecto a L' es cero, sin embargo la fuerza F se sigue ejerciendo sobre m , por lo tanto debe existir una fuerza tal que $F = -F'$; en esta forma se tiene $O = \vec{m} a' =$ fuerza total $= \vec{F}' + \vec{F}'$, de acuerdo con Mach, la fuerza \vec{F}' proviene de la aceleración del resto del universo con respecto a la masa m .

Sobre una masa m , otra masa M (por ejemplo una galaxia) ejerce dos fuerzas. La primera es la gravitacional estática $\frac{G M m}{r^2}$ como se ha mencionado atrás, la contribución total estática de todas las galaxias es cero, pues el efecto de una galaxia es contrarrestado por otra galaxia igual y opuesta (hipótesis de un universo homogéneo). De todas formas, la ley de atracción es independiente de la aceleración y no puede por tanto explicar \vec{F}' .

La segunda fuerza corresponde a la creada por efecto de la aceleración relativa, determinada en la fórmula (1).

Resta ver si la fuerza de la fórmula (1) explica F' . Consideremos tres casos, el más sencillo no tiene en cuenta ni el efecto de la velocidad sobre la masa ni la curvatura del universo, luego se tiene en cuenta la corrección relativista de la masa y finalmente se incorpora al modelo tanto la corrección relativista de cambio de masa, como de curvatura espacial; los tres casos corresponden a:

- Un universo euclídeo sin efecto relativista.
- Un universo euclídeo con corrección de masa por efecto de velocidad (relatividad especial).
- Un universo curvo (relatividad general).

a. Universo Euclídeo.

En este modelo de universo, el elemento de masa dM , de una concha esférica de espesor $d r$ y de radio r , es igual a:

$$dM = 4 \pi r^2 \rho_0 dr$$

en donde $\rho_0 =$ densidad media del universo.

El elemento de fuerza $d\vec{F}'$ (por efecto de la aceleración) de la masa dM sobre la masa m es:

$$d\vec{F}' = \frac{G m}{c^2 r} \vec{a} dM = \frac{4 \pi r m}{c^2} \rho_0 \vec{a} dr$$

De acuerdo con la ley de Hubbe, las galaxias se alejan de un observador situado en cualquier punto del universo, con una velocidad que es proporcional a la distancia del observador,

$$V \text{ alejamiento} = H d$$

En donde $H =$ constante de proporcionalidad y $d =$ distancia al observador.

El radio de fuerza que puede interactuar sobre la masa m , está dado por la distancia d que hace que la velocidad de alejamiento de las galaxias iguale la velocidad de la luz.

$$r_{\text{universo}} = \frac{c}{H}$$

Integrando df sobre el universo observable, se tiene

$$\vec{F}' = \frac{4 \pi \rho_0 \vec{a}}{c^2} \int_0^{c/H} r dr = m a \left[\frac{2 \pi G \rho_0}{H^2} \right]$$

Si la expresión $\left[\frac{2 \pi G \rho_0}{H^2} \right]$ (2) es del orden de

magnitud de la unidad (y no trillones de veces mayor o menor) la hipótesis de Mach tiene un sustento cuantitativo y no sólo lógico.

Es interesante mencionar que aunque la proporcionalidad de la Ley de Hubbe corresponde a la explicación de un fenómeno empírico —el corrimiento hacia el rojo del espectro de las galaxias— puede deducirse como una consecuencia de la hipótesis de homogeneidad del universo.

ρ_0 determinada por medios ópticos, es del orden de $3 \times 10^{-28} \text{ Kg/m}^3$ H es del orden de $15 \text{ km/seg/ Millón de años luz}$

$$= 1.58 \times 10^{-18} (\text{seg})^{-1}$$

$$G = 6.67 \times 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{seg}}$$

Reemplazando estos valores en la expresión (2), se tiene:

$$(2) = 0.0504$$

Si la densidad media del universo, tuviera un valor del orden de 20 veces la densidad ρ_0 , determinada por métodos lumínicos, se tendría una buena comprobación funcional del principio de Mach.¹⁶

A continuación se realizan las dos correcciones mencionadas a la fórmula anterior; la primera toma en cuenta que la masa relativa (y por tanto la densidad) crece al aumentar la velocidad; esta corrección tiende a afianzar la hipótesis de Mach. La segunda corrección tiene en cuenta la curvatura del espacio, el resultado disminuye el efecto de la masa distante del universo.

Efecto de la velocidad.

Una galaxia situada a una distancia r del objeto m , se aleja de él con una velocidad $v = H r$, por tanto la densidad relativa (al objeto m) será:

$$\rho = \frac{\rho_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \frac{\rho_0}{\sqrt{1 - \frac{H^2 R^2}{c^2}}}$$

en donde $\rho_0 =$ densidad en reposo.

16. Este punto se desarrolla en el aparte "Materia oscura en el universo".

En estas condiciones se tiene:

$$F' = \frac{4 \pi G m a \rho_0}{c^2} \int_0^{c/H} \frac{r dr}{\sqrt{1 - \frac{H^2 R^2}{c^2}}}$$

(Debe observarse que en el límite $R = c/H$, el denominador es igual a cero y que la función no es acotada cuando $r \rightarrow c/H$. Sin embargo es integrable, pues se comporta como

$$\frac{1}{\sqrt{1 - X}}$$

que es integrable entre $[0, 1)$, por lo tanto

$$F' = \frac{4 G m a \rho_0}{c^2} (c/H)^2 = m a \left[\frac{4 G \rho_0}{H^2} \right]$$

La expresión $\left[\frac{4 G \rho_0}{H^2} \right]$ (3) es el doble de (2)

Por lo tanto con la corrección del aumento de la densidad con relación a la velocidad, sería suficiente que la relación

Masa Total / Masa Lumínica

sea del orden de 10, para tener una más adecuada comprobación de la hipótesis de Mach.

Efecto de la curvatura del espacio sobre la determinación de la inercia.

Se desarrolla el caso más sencillo de un universo (tridimensional) curvo, cuya curvatura es constante y positiva.

Para calcular el efecto de la masa del universo sobre la inercia, se requieren algunos resultados geométricos, que permitan la determinación de la métrica, el elemento de volumen y el de masa.

Se toma inicialmente como guía, la geometría de un espacio curvo bidimensional de curvatura constante k , cuyo modelo es precisamente una esfera ($k = 1/a$ donde $a =$ radio de la esfera)

La métrica dl^2 está dada por

$$dl^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2$$

eliminando la variable ficticia x_3 (lo cual es posible pues el espacio es bidimensional), con base en la relación

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = a^2$$

se tiene:

$$dx_3^2 = \frac{(x_1 dx_1 + x_2 dx_2)^2}{a^2 - (x_1^2 + x_2^2)}$$

$$dl^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + \frac{(x_1 dx_1 + x_2 dx_2)^2}{a^2 - (x_1^2 + x_2^2)}$$

haciendo

$$x_1 = r \cos \phi$$

$$x_2 = r \sin \phi$$

$$\text{se tiene: } dx_1^2 + dx_2^2 = r^2 d\phi^2 + dr^2$$

$$\text{se deduce } r dr = x_1 dx_1 + x_2 dx_2$$

$$dl^2 = r^2 d\phi^2 + dr^2 + \frac{r^2 dr^2}{a^2 - r^2}$$

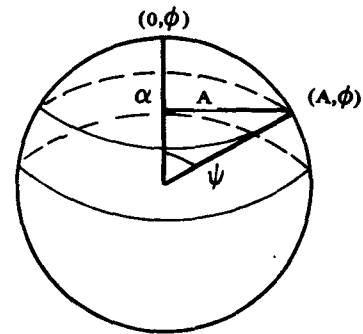
$$dl^2 = \frac{dr^2}{1 - \frac{r^2}{a^2}} + r^2 d\phi^2$$

La distancia entre los puntos $(0, \phi)$ y (A, ϕ) está dada por

$$l = \int_0^A \frac{dr}{\sqrt{1 - \frac{r^2}{a^2}}} = a \text{ arc sen } (A/a)$$

$$\text{arc sen } (A/a) = \Psi$$

$l = a \Psi$ que coincide con el resultado obtenido por métodos elementales.



Haciendo $r = a \text{ sen } \Psi$

$$dl^2 = a^2 [d\Psi^2 + \text{sen}^2 \Psi d\phi^2]$$

La longitud de la circunferencia de radio $a \Psi_0$ es $dl = a \text{ sen } \Psi_0 d\phi$

$$l = 2\pi a \text{ sen } \Psi_0 < 2\pi a \Psi_0$$

Por lo tanto la relación circunferencia / diámetro $< \pi$.

El área del espacio de radio $a \Psi_0$ es

$$A = \int_0^{\Psi_0} 1 \cdot a d\Psi = \int_0^{\Psi_0} 2\pi a^2 \text{ sen } \Psi d\Psi = 2\pi a^2 (1 - \cos \Psi_0)$$

La métrica del espacio de curvatura constante de dimensión 3, se calcula siguiendo el razonamiento anterior así:

$$dl^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2$$

eliminando la variable adicional x_4 , por medio de la relación $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = a^2$ (obsérvese que se acepta sin demostración el resultado que una hiperesfera de ecuación $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = a^2$ tiene curvatura (gaussiana) $= 1/a^2$)

$$\text{se tiene } x_4 dx_4 = -(x_1 dx_1 + x_2 dx_2 + x_3 dx_3)$$

por lo tanto

$$dx_4^2 = \frac{(x_1 dx_1 + x_2 dx_2 + x_3 dx_3)^2}{a^2 - (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)}$$

$$dl^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 +$$

$$\frac{(x_1 dx_1 + x_2 dx_2 + x_3 dx_3)^2}{a^2 - (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)}$$

Realizando el cambio de variables:

$$x_1 = r \cos \theta \sin \phi$$

$$x_2 = r \sin \theta \sin \phi$$

$$x_3 = r \cos \phi$$

$$dx_1 = r \cos \theta \cos \phi d\phi - r \sin \theta \sin \phi d\theta + \cos \theta \sin \phi dr$$

$$dx_2 = r \sin \theta \cos \phi d\phi + r \cos \theta \sin \phi d\theta + \sin \theta \sin \phi dr$$

$$dx_3 = -r \sin \phi d\phi + \cos \phi dr$$

se obtiene:

$$dl^2 = r^2 d\phi^2 + r^2 \sin^2 \phi d\theta^2 + dr^2 + \frac{r^2 dr^2}{a^2 - r^2}$$

$$= \frac{dr^2}{1 - \frac{r^2}{a^2}} + r^2 (d\phi^2 + \sin^2 \phi d\theta^2)$$

La distancia del origen (0, 0, 0) al punto (A, 0, 0) está dado por

$$\int_0^A \frac{dr}{\sqrt{1 - \frac{r^2}{a^2}}} = a \arcsin (A/a)$$

Si en lugar de la coordenada r se hace el cambio $r = a \sin \Psi$ la métrica toma la siguiente forma:

$$dl^2 = a^2 d\Psi^2 + \sin^2 \Psi (d\phi^2 + r^2 \sin^2 \phi d\theta^2)$$

La superficie de una esfera de "radio" a Ψ está dada por $4\pi a^2 \sin^2 \Psi$

El volumen del espacio de curvatura a está dado por

$$V = \int_0^{\Psi} 4\pi a^2 \sin^2 \Psi \cdot a d\Psi = 2\pi a^3$$

Alternativamente puede deducirse la geometría del espacio curvo tridimensional, recurriendo directamente a la estructura gaussiana de la superficie, relacionando la métrica directamente con la curvatura.

La distancia entre dos puntos de coordenadas (r, θ , ϕ) y (r + dr, θ + d θ , ϕ + d ϕ) es

$$ds^2 = f(r) dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2$$

$\int \sqrt{f(r)} dr$ es la distancia propia entre dos puntos.

(r, θ , ϕ) y (r + dr, θ , ϕ).

Considerando una superficie "ecuatorial" $\theta = \pi/2$, se tiene $(ds^2) = f(r) dr^2 + r^2 d\phi^2$ se hace x'

= r; $x^2 = \phi$ en estas condiciones el tensor métrico q_{ij} corresponde a la matriz:

$$q_{ij} = \begin{pmatrix} f(x') & 0 \\ 0 & (x')^2 \end{pmatrix}$$

$$q_{11} = f(x') \quad q_{22} = (x')^2 \quad q_{21} = q_{12} = 0$$

La fórmula de Gauss (Theorema Egregium), que relaciona la curvatura con el tensor métrico es

$$k = \frac{1}{2 q_{11} q_{22}} \left\{ \frac{-\delta^2 q_{11}}{\delta (x^2)^2} - \frac{\delta^2 q_{12}}{\delta (x')^2} + \frac{1}{2 q_{11}} \left[\frac{\delta q_{11}}{\delta x'} \frac{\delta q_{22}}{\delta x'} + \left(\frac{\delta q_{11}}{\delta x^2} \right)^2 \right] + \frac{1}{2 q_{22}} \left[\frac{\delta q_{11}}{\delta x^2} \frac{\delta q_{22}}{\delta x^2} + \left(\frac{\delta q_{22}}{\delta x'} \right)^2 \right] \right\}$$

se tiene

$$k = \frac{df(x')/dx'}{2 (f(x'))^2 (x')} = \frac{1}{2x'} \frac{d}{dx'} \left(\frac{-1}{f(x')} \right) - \frac{d}{dx'} \left(\frac{1}{f(x')} \right) = 2kx'$$

$$\frac{1}{f(x')} = A - k(x')^2$$

$$f(x') = \frac{1}{A - k(x')^2}$$

Para determinar la constante A de integración, basta observar que un universo plano ($k = 0$), la distancia ds es:

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2; \text{ es decir } f(x') = 1 \text{ por lo tanto } A = 1.$$

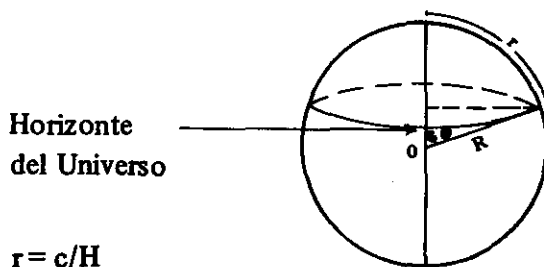
La métrica del espacio de curvatura constante es:

$$ds^2 = \frac{1}{1 - kr^2} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2$$

De acuerdo con la métrica hallada, la distancia entre dos puntos (0, θ , ϕ) y (r, θ , ϕ) es decir el radio propio es:

$$\delta(r) = \int_0^r \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}} = \frac{1}{\sqrt{k}} \arcsin(r\sqrt{k}) \quad (k > 0)$$

Por lo tanto $r = \frac{1}{k} \sin(\delta k)$. Teniendo en cuenta que $\sqrt{k} = 1/a$ se obtienen las mismas expresiones que por el anterior procedimiento.



En el caso de un espacio curvo homogéneo de tres dimensiones (espaciales) se busca inicialmente la relación entre la métrica espacial, la curvatura y la masa.

En estas condiciones el elemento de masa dM de una "concha esférica" de espesor dr es:

$$dM = 4 \pi \rho r^2 dr = 4 \pi \rho \frac{1}{k} \text{sen}^2 (\delta \sqrt{k}) d\delta$$

Por lo tanto:

$$F' = 4 \pi G m a \rho_0 \int_0^{c/H} \frac{1 \text{sen}^2 (\delta \sqrt{k}) d\delta}{k \delta \sqrt{1 - \frac{H^2 \delta^2}{c^2}}}$$

$$\text{Llamemos } I(k) = \int_0^{c/H} \frac{\text{sen}^2 (\delta \sqrt{k}) d\delta}{k \delta \sqrt{1 - \frac{H^2 \delta^2}{c^2}}} \quad (4)$$

Como el integrando no está definido en los extremos de la integral, debe comprobarse la existencia de ésta. Teniendo en cuenta que $|\text{sen } x| \leq |x|$ y

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1$, se tiene para un valor fijo de k :

$$\frac{|\text{sen}^2 (\delta \sqrt{k})|}{k \delta \sqrt{1 - \frac{H^2 \delta^2}{c^2}}} = |\sqrt{k} \text{sen} (\delta \sqrt{k})|$$

$$\frac{|\text{sen} (\delta \sqrt{k})|}{k} \left| \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{H^2 \delta^2}{c^2}}} \right|$$

$$\text{y como } \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{|\text{sen} (\delta \sqrt{k})|}{\delta \sqrt{k}} = 1$$

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} |\sqrt{k} \text{sen} (\delta \sqrt{k})| = 0$$

es decir, la función es acotada en las vecindades de $\delta = 0$. Un argumento similar muestra que en la vecindad

$\left[\frac{c}{H} - \epsilon, \frac{c}{H} \right]$ el integrando se comporta como la función $\frac{1}{\sqrt{1-x}}$ cuya integral converge en las vecindades $(1 - \epsilon, 1)$

La fórmula (4) tampoco está definida si $k = 0$ (universo plano), por lo tanto debe comprobarse que $\lim_{k \rightarrow 0} I(k)$ existe y que el elemento de masa coincide con el caso anterior.

Se tiene, ya que $|\text{sen}^2 x| \leq |x^2|$

$$\left| \frac{\text{sen}^2 (\delta \sqrt{k})}{k \delta \sqrt{1 - \frac{H^2 \delta^2}{c^2}}} \right| \leq \frac{\delta^2 k}{k \delta \sqrt{1 - \frac{H^2 \delta^2}{c^2}}}$$

$$| \leq \frac{\delta}{\sqrt{1 - \frac{H^2 \delta^2}{c^2}}}$$

Por lo tanto $\lim_{k \rightarrow 0} I(k)$ existe y es menor que la integral

$$\frac{\delta}{\sqrt{1 - \frac{H^2 \delta^2}{c^2}}}$$

Por otra parte se tiene:

$$\lim_{k \rightarrow 0} \frac{\text{sen}^2 (\delta \sqrt{k})}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{(\delta \sqrt{k} - \frac{\delta^3 k^{3/2}}{3!} + \dots)^2}{k}$$

$$= \lim_{k \rightarrow 0} \left(\frac{\delta^2 k - \frac{\delta^6 k^3}{3!} + \dots}{k} \right) = \delta^2$$

y como el integrando es mayor o igual a cero, se tiene (por el teorema de Lebesgue)

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow 0} I(k) &= \int_0^{c/H} \lim_{k \rightarrow 0} \left(\frac{\text{sen}^2 \delta k}{k \delta \sqrt{1 - \frac{H^2 \delta^2}{c^2}}} \right) d\delta = \\ &= \int_0^{c/H} \frac{\delta}{\sqrt{1 - \frac{H^2 \delta^2}{c^2}}} d\delta \end{aligned}$$

que coincide con el caso del espacio plano, con corrección relativista de densidad.

Pasamos ahora a calcular $I(k)$. Consideramos que el radio de curvatura del universo R , es B veces el radio del universo observable. $R = B r$

$$\text{Se tiene } k = \frac{1}{r^2 \beta^2}$$

$$I(k) = \int_0^{c/H} \frac{r^2 \beta^2 \text{sen}^2 \left(\frac{\delta}{R \beta} \right) d\delta}{\delta \sqrt{1 - \frac{H^2 \delta^2}{c^2}}}$$

$$F' = \frac{4 \pi G m a \rho_0}{c^2} (c/H)^2 \int_0^1 \frac{\beta^2 \text{sen}^2 (u/\beta) du}{u \sqrt{1 - u^2}}$$

$$= ma \left[\frac{4 \pi G \rho_0 m a}{H^2} \int_0^1 \frac{\beta^2 \text{sen}^2 (u/\beta) du}{u \sqrt{1 - u^2}} \right]$$

(se ha efectuado el cambio de variable $u = \frac{H}{c}$)

Esta integral difiere de la del caso anterior en el factor

$$\int_0^1 \frac{\beta^2 \operatorname{sen}^2(u/\beta) du}{u \sqrt{1-u^2}} = M(\beta)$$

El valor $M(\beta)$ para algunos valores de β , obtenidos por métodos numéricos de aproximación es:

β	$M(\beta)$
2	0,9330
5	0,946
10	0,950
100	0.8604
	1 (caso euclideo)

La corrección por curvatura del espacio no modifica sustancialmente los resultados, sigue teniendo validez la conclusión anteriormente mencionada, si la masa no lumínica es superior 10 ó 15 veces a la lumínica, la masa total del universo explica la inercia.

ALGUNOS RESULTADOS EXPERIMENTALES

En los últimos años se han realizado importantes experimentos que buscan detectar la existencia de ondas gravitacionales; su pequeñísima longitud de onda y su bajo contenido energético hace que su detección sea más viable al observar fenómenos estelares altamente productores de ondas gravitacionales, como son por ejemplo los agujeros negros y los colapsos gravitacionales. Uno de estos fenómenos los constituye GEMINGA, una estrella en colapso, fuertemente emisora de ondas gravitacionales.

Como se ha mencionado, el principio de Mach adaptado a la cosmología contemporánea, explicita una de las más interesantes hipótesis de la relatividad general, la emisión de ondas gravitacionales. La analogía gravitatoria y electromagnética en la producción del campo (eléctrico, magnético o gravitacional) cuando dos cargas (o dos masas) se desplazan con una aceleración relativa y se crea el campo de fuerzas

$$F = \frac{q_1 q_2 a}{4 \pi \epsilon_0 c^2 r} \quad \left(\text{o } F = \frac{G M m a}{c^2 r^2} \right)$$

lo cual permitió a la física relativista plantear la hipótesis de que si en el primer caso, el campo es creado por ondas electromagnéticas, en el segundo corresponde a las ondas gravitacionales.

Las observaciones realizadas por el satélite europeo en 1975 y por el americano denominado "Einstein" en 1979, han permitido comprobar con un alto grado de certeza la existencia de la "radiación gravitacional".

Resumamos los resultados:

En 1975 se descubrió un objeto (no luminoso) situado en la constelación de los Gemelos¹⁷; este cuerpo es un poderoso emisor de radiación. Como no estaba registrado en ningún atlas de estrellas, se le dio el nombre de Geminga, que quiere decir "no hay nada" en dialecto milanés. En 1979 el satélite Einstein permitió precisar su localización con un margen de 6 segundos de arco.

La energía lumínica que emite, es sólo una milésima de su emisión como radiación X y Gamma. Puede tratarse de una estrella de neutrones o de una estrella que colapsa como agujero negro.

Se ha encontrado que el período de oscilación de Geminga es 160 minutos¹⁸. Este período coincide con una oscilación de la atmósfera solar.

Los cálculos teóricos muestran que a pesar de estar localizado el objeto a 300 años-luz del sol, la oscilación afecta al sol en la forma encontrada experimentalmente, es decir, "el sol vibra al ritmo de Geminga".

Nada de esto es predecible en la mecánica de Newton, pues la vibración esférica del objeto no modifica el centro de masa del sistema sol-Geminga, y la fuerza (tan débil como puede ser la atracción gravitatoria a 300 años-luz) gravitacional es constante, pues repetamos, ésta no depende de la aceleración relativa sino sólo de la distancia.

Por el contrario, la hipótesis relativista o Machiana, permite predecir que una oscilación al crear una aceleración relativa, tiene efecto sobre otro objeto celeste.

Debe mencionarse que no todos los astrofísicos aceptan que el efecto de Geminga explique la vibración solar encontrada, pues consideran que un campo gravitatorio de esta intensidad deberá afectar la órbita de algunos satélites artificiales. Sin embargo, casi todos coinciden en señalar que Geminga, a solo 300 años-luz, constituye el cuerpo celeste colapsado (estrella de neutrones o agujero negro) más cercano al sistema solar.

Materia "oscura" en el Universo

Uno de los problemas al cual se enfrentan los astrofísicos, consiste en que la densidad (lumínica) del universo es insuficiente para explicar la velocidad de rotación de las galaxias y aún la misma estructura aislada de los conjuntos galácticos. Casi todas las observaciones permiten concluir que los conjuntos galácticos son estables y sin embargo la densidad asumida es insuficiente para evitar su dispersión. Los modernos sistemas espectrales han permitido medir con muy buena aproximación la velocidad de rotación de un alto número de galaxias

17. Posteriormente, mediante sofisticados métodos se ha podido observar que Geminga puede ser una estrella de magnitud tan pequeña que su luminosidad no puede detectarse con los telescopios hoy existentes.

18. En realidad 160.01 minutos.

espirales y los resultados muestran que es necesario asumir una densidad mucho mayor para poder explicarlos¹⁹, (por supuesto podría adoptarse la hipótesis ad-hoc que G no es una constante universal y que su valor depende de la posición en el espacio, con lo cual además de anular la hipótesis de homogeneidad cósmica, tiene el problema de toda hipótesis ad-hoc que no permite analizar ninguna investigación científica).

Fue necesario esperar un refinamiento en los métodos de espectrografía para poder determinar las velocidades de rotación galáctica, por ejemplo, la galaxia más próxima es Andrómeda, con una velocidad de rotación de 200 km/seg, la cual tardaría 20.000 años para rotar segundo de arco y esta es la separación mínima óptica que puede detectarse en la tierra. El sistema empleado ha sido la determinación del diferencial del corrimiento hacia el rojo de los brazos de la galaxia (efecto Doppler). El sistema rota alejándose del observador, su corrimiento hacia el rojo está determinado por la velocidad resultante, de la adición de la velocidad de alejamiento galáctico y la componente de la velocidad tangencial y por otra parte, el brazo cuya rotación lo acerca al observador, tiene un corrimiento hacia el rojo, determinado por la diferencia de las velocidades.

Como se mencionó atrás, las densidades requeridas para explicar las velocidades halladas, son del orden de 10 - 40 veces la densidad media deducida por medios ópticos. Estos hechos tienden a comprobar la hipótesis de Mach, pues recordemos que al asumir una densidad del universo 12 - 18 veces mayor, la fuerza creada por ondas gravitacionales es igual a ma

Es claro que la "materia faltante" no puede estar en forma de "polvo cósmico" pues éste recibiría la radiación de las estrellas, absorbería una parte, y al cabo de millones de años emitiría también radiación lumínica.

La materia "oscura" del universo puede estar presente en dos formas: bariónica y no bariónica²⁰. La bariónica corresponde a las partículas elementales pesadas (protones, neutrones), la no bariónica corresponde a partículas predichas (y algunas veces descubiertas) por la física de alta energía, como los neutrinos, monopolos magnéticos, gravitinos etc. La materia "oscura" bariónica corresponde a planetas masivos, estrellas de neutrones, agujeros negros, enanas blancas etc. Estos pueden explicar buena parte de la materia faltante. La no bariónica correspondería a una serie de partículas creadas en la primerísima etapa que sigue al Big-Bang antes del denominado tiempo de Plank (10^{-43} segundos después de la "creación"). El problema consiste en que di-

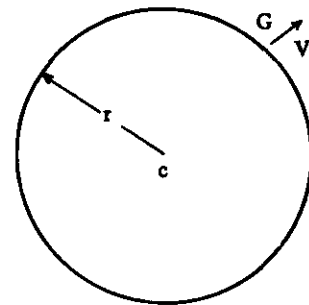
chas partículas son muy difíciles de detectar porque interactúan muy débilmente con la materia. Las "grandes teorías unificadoras" postulan la formación de neutrinos masivos en la fase cálida del "Big-Bang".

La densidad media del universo determina en última instancia el futuro de él. En efecto, si es inferior a un valor (densidad crítica), el universo continuará su expansión y la geometría resultante corresponde a un espacio de curvatura negativa. Por el contrario, si es superior, la expansión llegará hasta un máximo y luego comenzará un proceso de contracción (corrimiento hacia el azul), la geometría corresponde a un espacio de curvatura positiva. Si la densidad es igual a la densidad crítica, la expansión continúa pero desacelerándose y la geometría es la euclidiana.

Sin efectuar corrección relativística, el valor de la densidad crítica (ρ_c) puede determinarse así:

Considérese una galaxia G de masa m situada a una distancia r de un punto c asumido como centro.

Cualquier punto sirve como centro en el caso de un universo infinito y en el caso de uno curvo simétrico finito pero ilimitado.



La galaxia se aleja del punto C, con una velocidad relativa a C igual a $V = Hr$

La energía cinética es por lo tanto:

$$E_1 = \frac{1}{2} m H^2 r^2. \text{ La energía potencial es:}$$

$$E_2 = - \frac{G/M_r m}{r}$$

en donde M_r es la masa contenida en la esfera de radio r.

Si $E_t = E_1 + E_2 > 0$, la expansión continuará; es decir, si $1/2 m H^2 r^2$

$$\text{es decir, si } 1/2 m H^2 r^2 - \frac{G M_r m}{r} > 0$$

Teniendo en cuenta que $M_r = 4/3 \pi \rho r^3$, se deduce que si

$$\rho < \frac{3 H^2}{8 \pi G} = 4.47 \times 10^{-27} \text{ kg/m}^3 = \rho_c$$

la expansión continúa, pues la atracción gravitatoria es insuficiente para anular la energía cinética de las galaxias.

19. Vera C. Rubin "Dark Matter in Spiral Galaxies" Scientific American, June 1983.

"Where can the matter be" Science and Technology, The Economist, August 25 1984.

20. Jack O Burns "University of New Mexico", Sky and Telescope November 1984.

La relación entre la densidad crítica ρ_c antes obtenida y la ρ media, deducida por métodos ópticos es:

$$\frac{\rho_c}{\rho_{med}} = 15$$

cifra del mismo orden de magnitud que las relaciones entre masa total y masa lumínica que permiten explicar la rotación de algunas galaxias al igual que la relación entre la masa necesaria para crear la inercia y masa lumínica.

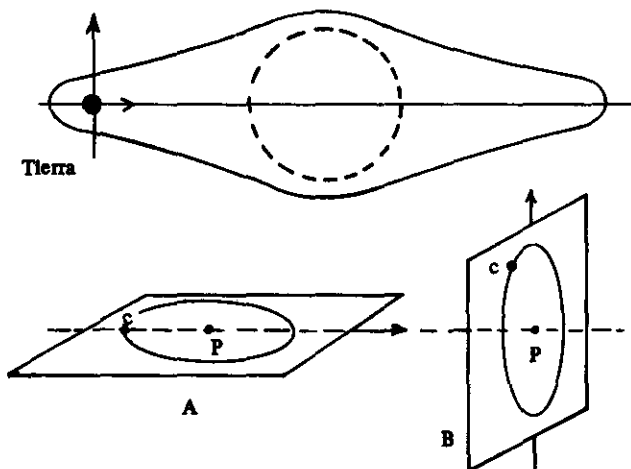
Una Nota Final

Cuando Mach formuló su hipótesis, no explicitó ningún método cuantitativo que permitiera confirmarla. De haberlo hecho, posiblemente la razón hubiera estado del lado de sus oponentes, en razón a que el efecto sobre la inercia por la acción de las estrellas distantes (sin considerar las aceleraciones relativas), es trillones de veces inferior al necesario para crearla. Sólo al introducir el efecto de la aceleración relativa, puede comprenderse el papel que sobre la inercia tiene la masa distante del universo.

Entre 1958 y 1960 un grupo de investigadores (Coeconi, Salpeter, Huges Robinson, Drever y Beltrán López), se propusieron medir el efecto de una posible anisotropía del universo sobre la masa de las partículas elementales. Trataban de medir si la posición fuertemente excéntrica de la tierra en nuestra galaxia introducía un efecto significativo en la inercia. Los resultados mostraron que en caso de existir efectos por anisotropía, éstos son inferiores a 10^{-20} , concluyéndose en esta forma que la conjetura de Mach al no considerar las aceleraciones relativas, no puede probarse. El efecto estático aún de las estrellas cercanas sobre la inercia es insensible por la homogeneidad e isotropía del universo²¹.

La gráfica siguiente esquematiza el experimento realizado utilizando núcleos de litio orientados por medio de un campo magnético. Se concluyó que el

Posición de la Tierra en la Galaxia



21. Phillippe Tourenco y Pierre Teyssandier "La Gravitación Experimental" Mundo Científico No. 35, 1984.

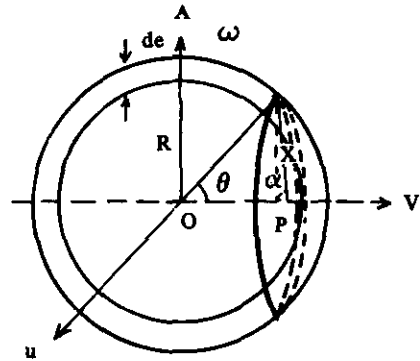
efecto de la orientación de los planos de rotación sobre la masa inercial del protón, es insignificante en el orden antes mencionado²².

APENDICE

Campo Gravitatorio en el Interior de una Concha Esférica

Sea P un punto de masa m en el interior de una concha esférica, se elige el origen O de coordenadas en el centro de la esfera y se hace coincidir el eje X con la recta OP.

Se demuestra que el campo creado por una concha de espesor de, es igual a cero, por lo tanto el campo originado por una concha de espesor finito es cero.



Se considera el elemento de volumen, una de cuyas caras está determinada por la intersección de un plano paralelo al plano u, con la concha esférica.

Sea $OP = d$

Se tiene $dV = (2 \int R \sin \theta) R d\theta = 2 \int R^2 \sin \theta d\theta$

$$dF = \frac{m d M \cos \alpha}{X^2} = \frac{2 m}{X^2} \int \rho R^2 \sin \theta \cos \alpha d\theta$$

en donde

$\rho =$ densidad.

(Obsérvese que la componente vertical de la fuerza = 0)

$$\text{Se tiene } X^2 = R^2 + d^2 - 2Rd \cos \theta$$

$$\text{Diferenciando } 2 X d X = 2 R d \sin \theta d\theta$$

$$\text{Por otra parte } \cos \alpha = \frac{X^2 + d^2 - R^2}{2Xd}$$

$$\text{Reemplazando: } dF = \int m \rho R \left(1 - \frac{d^2 - R^2}{X^2}\right) dX$$

$$F = \frac{\int m \rho R}{d^2} \int_{R-d}^{R+d} \left(1 + \frac{d^2 - R^2}{X^2}\right) dX = 0$$

22. Op. Cit.

- BERRY Michael, "Principles of Cosmology and Gravitation" Cambridge University Press, Cambridge 1978.
- CASSIRER Ernst, "Substance and Function and Einstein's Theory of Relativity" Dover Publications, Inc. New York 1953.
- D'ABRO A. "The Evolution of Scientific Thought from Newton to Einstein" Dover Publications, Inc. New York 1950.
- EINSTEIN Albert, "Quatre Conférences sur la Théorie de la Relativité" Gauthier-Villars, Paris 1980.
- EINSTEIN Albert, "The Principle of Relativity" Dover Publications, Inc. New York 1952.
- EINSTEIN Albert, "Sobre la Teoría de la Relatividad" Ed. Sarpe Madrid 1983.
- EINSTEIN Albert, "Ideas and Opinions" Dell Publishing Co. New York 1954.
- HOLTON Gerald, "Ensayos sobre el Pensamiento Científico en la Epoca de Einstein" Alianza Universidad, Madrid 1982.
- LANDSBERG Peter and EVANS David, "Mathematical Cosmology" Oxford Science Publications, Oxford 1979.
- MISNER Charles, THORNE Kip and WHEELER John, "Gravitation" W.H. Freeman and Company San Francisco 1973.
- MORA Luciano, "El Problema de la Comprensión Unitaria" Rev. ALEPH No. 48 Enero/Marzo 1984.
- MARTINE Castelo, "Les Ondes Gravitationelles venues du soleil noir" Science et Avenir Janvier 1984.
- NEWTON Isaac, "El Sistema del Mundo" Alianza Editorial, Madrid 1983.
- RINDLER Wolfgang, "Essential Relativity, Special, General and Cosmological" Springer-Verlag, New York 1977.
- RUBIN Vera, "Dark Matter in Spiral Galaxies" Scientific American June 1983.
- SKY AND TELESCOPE, New Notes, July 1984.
- SKY AND TELESCOPE, November 1984 "Hidden Matter in the Universe".
- SANCHEZ RON José Manuel, "El origen y desarrollo de la relatividad" Alianza Universidad Madrid 1983.
- THE ECONOMIST, August 25, 1984.
- TOURRENC Phillipe y TEYSSANDIER Pierre, "La Gravitación Experimental" Mundo Científico No. 35, 1984.
- WEINBERG Steven, "Los Tres Primeros Minutos del Universo" Alianza Universidad, Madrid 1982.