CRITERIO GENERAL DE APLICABILIDAD DE LOS METODOS VARIACIONALES EN FISICA

Por Guillermo Castillo Torres

Departamento de Física
Universidad Nacional de Colombia

1. LA ESTETICA Y LA ECONOMIA EN LA FISICA

La estética y la economía han tenido mucha importancia en la historia de la Física y de la ciencia en general y, como veremos aún la siguen teniendo.

De ahí la tendencia a reducir las leyes de la ciencia a un mínimo.

Los pitagóricos, por ejemplo, pensaban que el número gobernaba el Universo. En particular el número 4 era importante en su Cosmología. Por ejemplo, el grupo de los 4 números enteros 1, 2, 3 y 4 tenían la importantísima propiedad de que su suma es 10 un "número perfecto". Otros grupos de 4 integrantes o "tetractis" eran los formados por el punto, la línea, la superficie y el sólido o los famosos 4 elementos, tierra, aire, agua y fuego o el no menos famosos grupo de 4 disciplinas, aritmética, geometría, astronomía y música (Yourgrav, Mandelstam, 1956).

Los pitagóricos encontraron también una relación notable entre la música y los números enteros. En efecto, los intervalos musicales "consonantes" estaban caracterizados por relaciones simples de frecuencias, es decir, quebrados que tuvieran por numeradores o denominadores los famosos números 1, 2, 3, y 4. Esas relaciones serían tales como 1: 2, 2:3, 3:4 llamados intervalos de octava, de quinta, de cuarta, etc. (Helm. 1967). Famosa es también la expresión "música de las esferas". Parece que Pitágoras asoció los intervalos de quinta, cuarta y octava a los radios de los anillos descritos por la luna, el sol y las estrellas al girar alrededor de la tierra. Estos cuerpos celestes, de forma esférica, producían al girar una música celestial, que los mortales, decían los pitagóricos, no podíamos oír.

En la teoría completa de los planetas iniciada por Pitágoras, vuelve a aparecer el número perfecto 10. En efecto los cuerpos celestes móviles, de forma esférica y describiendo círculos, eran 10, sin incluir las estrellas: la tierra, la luna, el sol, 5 planetas visibles, Hestia (el fuego central distinto del sol) y para completar 10, la contra-tierra. Todo el sistema giraba alrededor del fuego central (Hestia) pero éste y la contra-tierra no eran visibles al ojo humano.

Al contrario de Pitágoras, que aceptaba la observación como medio de comprobar las conclusiones de sus axiomas, Platón era inflexible en rechazar la experiencia por imprecisa y aceptar sólo la lógica y las matemáticas como únicas fuentes del conocimiento. Según Platón el Demiurgo o Arquitecto del Universo sacó del caos original un conjunto ordenado, donde predominaba la figura perfecta, la esfera. En sus diálogos siempre le atribuye al Universo las características de simplicidad, orden y perfección, que existen antes de cualquiera de nuestras imperfectas observaciones. (Yourgrav, Mandelstam, 1956).

En la lenta transición que sufrió la ciencia, Aristóteles dio un paso notable: de acuerdo con sus ideas sólo eran posibles dos movimientos simples, el rectilíneo y el circular, siendo todos los demás combinaciones de estos dos. Sobre el movimiento circular hizo la importante observación de que la circunferencia es la curva que tiene menor perímetro entre las que encierran un área dada. Esta fue aparentemente la primera vez que se usó un principio de mínimo. Pero fue Herón de Alejandría quien usó uno de tales principios de manera científica: demostró que cuando un rayo de luz es reflejado por un espejo, la trayectoria realmente seguida por la luz es más corta que cualquiera otra donde también haya reflexión. Se basó en la consideración de que entre dos puntos dados, la trayectoria directa (sin reflexión) más corta posible es la línea recta. Esta trayectoria mínima descubierta por Herón es la que produce ángulos de incidencia y reflexión iguales, tal como sa sabe hoy día. (Mach, 1942).

A estas alturas podemos ver ya dos facetas de la economía en la Física. La una se refiere a la simplicidad de la naturaleza en que pensaban Pitágoras y Platón y está muy relacionada con la estética; también tiene que ver con la economía del pensamiento, que debe practicar el científico. La segunda faceta trata de otro tipo de economía: la naturaleza escoge órbitas de longitud mínima para un área dada, la luz sigue las trayectorias más cortas, etc. Este segundo aspecto tuvo importantes desarrollos, como veremos luego.

Sobre la economía del pensamiento podemos mencionar que ya Guillermo de Ockham sostenía en el Siglo XIV que el número de hipótesis no debe exceder del mínimo necesario para explicar los hechos y Copérnico, quien abundaba en ideas platónicas sobre la simplicidad de la naturaleza, hizo notar que el sistema heliocéntrico contenía hipótesis más simples y en menor número que el modelo geocéntrico de Tolomeo. Aún Kepler y Galileo, reputados como fundadores del método experimental, seguían teniendo en mente el amor de la naturaleza por la simplicidad, pero insistieron en que los resultados del razonamiento abstracto debían ser sometidos a una comprobación experimental. Por otra parte la idea de que la naturaleza realiza sus operaciones con la máxima economía ya se había mencionado a propósito del descubrimiento de Herón sobre la trayectoria de la luz. Pappus hizo notar como las celdas de las abejas tienen la forma justa para conseguir la máxima capacidad con una cantidad dada de material, hecho que ha sido muy comentado. (Mach, 1942) Por su parte, Galileo Galilei, en sus estudios sobre la resistencia de materiales, halló que una columna hueca es más resistente que otra maciza de igual longitud y de igual cantidad de material y el caso de los huesos vino inmediatamente a su mente. (Galileo, 1945). También observó que el cañón de las plumas de las alas de las aves tiene la forma de la que los Ingenieros llaman viga empotrada de resistencia constante, en toda su longitud, que proporciona la máxima economía de material.

Estos razonamientos tenían una fuerte base teológica; no obstante, ejercieron mucha influencia sobre la mente de quienes formularon las teorías de máximos y mínimos en Física, ya basados en el método científico de la observación y la experimentación (Mach, 1942).

El primero de ellos fue seguramente Fermat, quien generalizando el descubrimiento de Herón sobre la reflexión en los espejos, logró demostrar que el tiempo gastado por la luz, para ir de un punto a otro, es un mínimo, cualquiera que sea el número de reflexiones y refracciones. Más tarde se demostró que no siempre se cumple la condición de mínimo tiempo: hay veces que el tiempo es más bien máximo, con gran decepción para los defensores de la economía en la naturaleza. Sin embargo, la economía de pensamiento y el correspondiente aspecto estético salieron reforzados, pues hoy sabemos que tanto la situación de máximo como la de mínimo se expresan por la misma condición matemática: la trayectoria en ambos casos es tal que la llamada variación es cero.

2. LOS METODOS VARIACIONALES

Se trata pues en general de escoger la forma de una función que haga máxima o mínima determinada cantidad; la variación de esta última debe ser cero en tal caso.

Los problemas de este tipo en el campo de la mecánica fueron estudiados con mucha seriedad por los hermanos Juan y Jaime Bernoulli. Juan descubrió que una cadena pesada colgada de sus dos extremos, adopta la forma de la curva llamada Catenaria, que es justamente la que tiene el centro de gravedad más bajo posible. Descubrió también que, dados dos puntos, la trayectoria de mínimo tiempo de caída (braquistócrona) es la llamada cicloide. Su hermano Jaime dio a este problema una interpretación matemática más próxima a los trabajos de Euler, que abajo se mencionan.

Alrededor de medio siglo más tarde Maupertuis enunció su célebre principio de la "Mínima Acción", pero se basó de nuevo en las viejas ideas pitagóricas de la economía en la naturaleza, según él, manifestación de la sabiduría del Ser Supremo. Esto era un verdadero retroceso respecto al trabajo de Fermat, por cierto mucho más preciso. Maupertuis denominaba "acción" al producto de masa por velocidad y por camino recorrido, pero midiendo estas tres cantidades en forma caprichosa. Este principio de la mínima acción fue enunciado de manera más exacta por Euler definiendo la acción como la integral $\int mv\,ds$, la que debía ser minimizada. (Siendo m constante, en realidad, decía él, la cantidad $\int v\,ds$ debe ser mínima, para una sola partícula).

Lagrange observó que no solamente se debe pensar en que la acción sea mínima, sino en que también puede ser máxima, lo que equivale a decir que la trayectoria descrita por la partícula debe ser tal que la variación de la acción sea cero al pasar a una trayectoria infinitimente vecina. Este tipo de problemas es el objeto del llamado Cálculo de Variaciones.

Los trabajos de Euler dieron nacimiento a la forma más perfecta de la Mecánica Clásica, que es la forma más estética para el Físico Teórico y ella es la desarrollada por Lagrange y Hamilton.

Los métodos de máximos y mínimos también encuentran vasta aplicación en la Mecánica Cuántica, pues esta disciplina hace amplio uso de los métodos Lagrangianos y Hamiltonianos.

En la Relatividad General también se hallan magnitudes que toman valores extremos; por ejemplo tienen gran importancia las geodésicas, o líneas de menor longitud entre dos puntos, de las geometrías no Euclidianas.

El principio variacional, o como se dice no muy apropiadamente "el principio de la mínima acción", ha probado ser muy útil, no sólo en Mecánica y Optica, sino en Electrodinámica y Termodinámica de los procesos reversibles. Aún hubo quien sugirió la extensión de estos métodos a ciencias diferentes de las físicas y matemáticas.

3. EL CALCULO DE VARIACIONES, ¿UN METODO UNIVERSAL?

Max Planck, el iniciador de la Teoría Cuántica, manifestó su optimismo sobre la bondad de estos métodos, de aplicación universal, según su opinión. Pero, para sorpresa de muchos, manifestó su adhesión a las ideas teológicas de siglos atrás, en el sentido de usar el poder unificador de estos métodos como argumento en favor de la existencia del Ser Supremo. Es de anotar que Sommerfeld, uno de los pioneros de la Teoría Cuántica en su primera forma, anotó cómo tal teoría, nueva por entonces, había dado otra vez preferencia a los números enteros, tal como lo habían hecho los pitagóricos 2500 años atrás. (Yourgrav, Mandelstam, 1956).

¿Cuál es la situación actual en cuanto a los métodos variacionales? Lo cierto es que los físicos están tratando de sistematizar su uso, antes confiado un poco al azar, mediante teoremas conocidos por los matemáticos desde bastante tiempo atrás. En particular se han ocupado del llamado problema inverso del cálculo de variaciones.

4. PROBLEMA INVERSO DEL CALCULO DE VARIACIONES

Sea

$$L\mu = f \qquad (1)$$

una ecuación lineal o conjunto de ecuaciones lineales, donde L es un operador diferencial, integral o integro diferencial. D (L) es el dominio de L en un espacio vectorial U y rango R (L) en un segundo espacio vectorial V. Se trata de buscar una funcional F $[\mu]$ definida en el dominio de L, tal que los puntos críticos de F (que dan lugar a sus máximos y mínimos), sean las soluciones de (1). Este es el ***problema inverso*** del cálculo de variaciones mientras el ***problema directo*** consiste en buscar los puntos críticos de una funcional previamente fijada (Mikhlin, 1964 y Vainberg, 1964).

Para resolver el problema inverso necesitamos una "forma bilineal" G $[\nu, \mu,]$, lineal tanto en ν como en μ, si ν y μ pertenecen a los espacios vectoriales V y U respectivamente.

Ejemplos:

$$<\nu, \mu> = \int_0^T \nu(t)\, \mu(t) dt \qquad (2)$$

$$<\nu, \mu> = \int_0^T \nu(t)\, \mu(T-t) dt \qquad (3)$$

La notación $<\nu, \mu>$ recuerda la que se emplea para el producto escalar (ν, μ). (El producto escalar es justamente el ejemplo (2)). Se dice que un operador lineal es "simétrico" respecto a una forma bilineal $<\nu, \mu>$ si

$$<L\mu_1, \mu_2> = <L\mu_2, \mu_1> \qquad (4)$$

para toda pareja μ_1, μ_2 en el dominio de L. En el espacio de Hilbert, suponiendo $U = V$ y si la forma bilineal es el producto escalar

$$(L\mu_1, \mu_2) = (L\mu_2, \mu_1) \qquad (5)$$

forma muy familiar.

El *teorema fundamental* de la teoría dice que si el operador L es simétrico respecto a una forma bilineal conveniente, las soluciones de la ecuación (1) son los puntos críticos de la funcional

$$F[\mu] = \tfrac{1}{2}<L\mu,\mu> - <f, \mu> \qquad (6)$$

Para demostrarlo, calculamos la primera variación de (6)

$$\delta F[\mu] = F[\mu + \delta\mu] - F[\mu] =$$

$$= \tfrac{1}{2}<L\mu + L\delta\mu> - <f,\mu + \delta\mu> - \tfrac{1}{2}<\mu,\mu> + <f, \mu>$$

$$= \tfrac{1}{2}\,(<L\mu, \delta\mu> + <l\,\delta\mu,\mu>) - <f,\delta\mu>$$

o usando la hipótesis (4)

$$\delta F[\mu] = \tfrac{1}{2}<L\,\mu,\delta\mu> + \tfrac{1}{2}<L\mu,\delta\mu> - <f, \delta\,\mu>$$

$$\delta F[\mu] = <L\mu - f,\delta\mu> \qquad (7)$$

Así que si μ_0 es solución de (1), $L\mu_0 - f = 0$

$$y \quad \delta F[\mu_0] = 0 \qquad (8)$$

o sea las soluciones son los puntos críticos (Magri, 1974).

El éxito del método radica en la acertada elección de la forma bilineal (Tonti, 1973), que no debe ser degenerada, es decir si

$$\forall \nu \in V, <\nu,\tilde{\mu}> = o, \text{ implica } \tilde{\mu} = o \qquad (9)$$

$$\text{y también } \forall \mu \in V, <\tilde{\nu}, \mu> = o, \text{ implica } \tilde{\nu} = o \qquad (9')$$

La necesidad de esta propiedad se ve si se trata de considerar un raciocinio inverso al de arriba, es decir si suponemos que μ_0 es punto crítico de $F[\mu]$

$$\delta F[\mu_0] = 0, \qquad \text{o usando (7)}$$

$$<L\mu_0 - f, \delta\mu> = o$$

Sólo si se cumple (9) podemos deducir que $L\mu_0 - f = 0$ o sea μ_0 es solución de (1). Es muy importante anotar aquí que si el operador L no es simétrico respecto a una forma bilineal dada, p. ejemplo el producto escalar ordinario

$$(\nu, \mu) = \int_0^T \nu(t)\mu(t)dt,$$

en general puede encontrarse otra forma bilineal respecto a la cual el operador L si sea simétrico (Magri, 1974). En efecto consideremos una forma bilineal en el espacio V, $<\nu_1, \nu_2>$; sin otro requisito por el momento que el de ser simétrica respecto al intercambio de ν_1 por ν_2. (El producto escalar ordinario (2) serviría desde este punto de vista). Ahora, a partir de esta primera forma bilineal introducimos una segunda

$$<\nu, \mu> = <\nu, L\mu>_s \qquad (10)$$

definida para $\nu \epsilon V$ y $\mu \epsilon D(L)$

Pero la forma bilineal (10) hace simétrico el operador L:

$$<L\mu_1, \mu_2> = <L\mu_1, L\mu_2>_s = <L\mu_2, L\mu_1>_s = <L\mu_2, \mu_1> \qquad (11)$$

lo que indica que L es simétrico, cualquiera sea la forma de $<\nu_1, \nu_2>_s$, con tal de que sea simétrica respecto a ν_1 y ν_2. En tal caso, las soluciones de (1) serán puntos críticos de la funcional $F[\mu]$, dada por (6)

$$F[\mu] = \tfrac{1}{2}<L\mu, L\mu>_s - <f, L\mu>_s \qquad (12)$$

Sin embargo, para asegurarnos de que todos los puntos críticos de $F[\mu]$ sean soluciones de (1), debemos exigir que nuestra forma bilineal (10) sea no degenerada en D(L) y R(L).

Para ver los requisitos adicionales que con este objeto debemos imponerle a nuestra nueva forma bilineal, calculemos la 1ª. variación de (12)

$$\delta F[\mu] = <L\mu - f, L\delta\mu>_s \qquad (13)$$

(Compárese con (7)).

Entonces, la condición necesaria y suficiente de que todos los puntos críticos de $F[\mu]$ sean soluciones de (1) es que la forma bilineal $<\nu_1, \nu_2>_s$ sea no degenerada en el *rango del operador L*, R(L). Pero con este fin basta exigir que el rango de L sea *denso* en el espacio lineal V con respecto a una topología que haga continua la forma bilineal $<\nu_1, \nu_2>_s$. Este requisito, que es suficiente pero no necesario, lo cumplen la mayoría de los operadores que se usan en la Física Matemática (Goldberg, 1966).

Existe una relación de las consideraciones que acabamos de hacer con el problema de los campos conservativos, relación que parece poco conocida por los físicos. Sea, en efecto un campo vectorial que se representa por una funcional que hace corresponder a cada vector de posición μ un vector ν.

$$N[\mu] = \nu \qquad (14)$$

Una línea se describe por medio de un vector $\eta(\lambda)$ que depende de un parámetro λ; éste se suele escoger haciendo $\lambda = o$ para $\eta = \mu_0$ y $\lambda = 1$ para $\eta = \mu_1$.

Se define la circulación por

$$C = \int_{\lambda=0}^{\lambda=1} <d\eta(\lambda), N[\eta(\lambda)]> d\lambda \qquad (15)$$

La circulación depende en general de la trayectoria seguida. Pero si no depende de tal trayectoria, se dice que el campo es "conservativo". En tal caso, la circulación puede escribirse

$$F[\mu] - F[\mu_0] = \int_0^1 <d\eta, N\eta> d\lambda \qquad (16)$$

siendo $d\eta = \dfrac{d\eta}{d\lambda} d\lambda$

La funcional $F[\mu]$ define un campo escalar y se llama el *potencial* del campo vectorial $N[\mu]$. Si el dominio de N es convexo, la línea $\eta(\lambda)$ se puede tomar recta

$$\eta(\lambda) = \lambda\mu + (1-\lambda)\mu_0 \qquad (17)$$

Si el dominio de N contiene el elemento nulo *0*, se puede hacer $\mu_0 = o$ y en (17) vemos

$$\eta(\lambda) = \lambda\mu \qquad (18)$$

y en (16)

$$F[\mu] = \int_0^1 <d\eta, N\eta> d\lambda \qquad (19)$$

poniendo $F[o] = o$, y en tal caso, si el operador es lineal, llamándolo L

$$F[\mu] = \int_0^1 <\mu, L\lambda\mu> d\lambda = \tfrac{1}{2}<\mu, L\mu> \qquad (20)$$

que es la misma (6) con f = 0

Consideremos de nuevo la ecuación

$$N[\mu] = o \tag{21}$$

que representa algún problema físico, siendo N un operador, en general no lineal.

Las soluciones μ_0 de la ecuación (21) son las que hacen estacionaria la funcional $F[\mu]$. En efecto, para un campo conservativo, de las ecuaciones (16) y (15)

$$\delta F[\mu] = \langle \delta\mu, N[\mu] \rangle \tag{22}$$

Si $N[\mu_0] = o$

$$\delta F[\mu] = \langle \delta\mu, N[\mu_0] \rangle \tag{23}$$

$$\delta F[\mu_0] = o \tag{24}$$

o sea F es estacionaria.

A la inversa, si $\delta F[\mu_0] = o$, $\langle \delta\mu, N[\mu_0] \rangle = o$

y si la forma bilineal es no degenerada, esto implica $N[\mu_0] = o$, o sea μ_0 es solución de (19).

Por último, si la circulación entre dos puntos arbitrarios no depende del camino seguido, tomemos una distancia infinitesimal cubierta por dos caminos diferentes abc y adc; las dos circulaciones infinitesimales serán iguales

$$\langle N(\mu), \epsilon\varphi \rangle + \langle N(\mu+\epsilon\varphi), \nu\psi \rangle = \langle N(\mu), \nu\psi \rangle + \\ + \langle N(\mu+\nu\psi), \epsilon\varphi \rangle$$

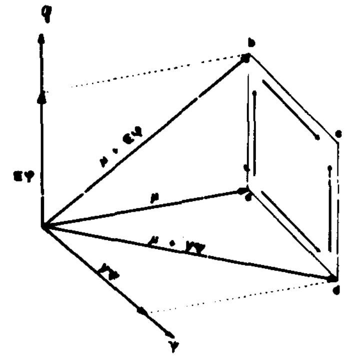
donde ϵ y ν son infinitesimales (Tonti, 1981).

De ahí resulta $\left\langle \frac{N(\mu + \epsilon\varphi) - N(\mu)}{\epsilon}, \psi \right\rangle =$

$$= \left\langle \frac{N(\mu + \nu\psi) - N(\mu)}{\nu}, \varphi \right\rangle$$

Pasando el límite cuando $\epsilon \to o$, $\nu \to o$ y llamando

$$\lim_{\epsilon \to o} \frac{N(\mu + \epsilon\varphi) - N(\mu)}{\epsilon} = N'_\mu \varphi$$



donde N'_μ es la llamada derivada de Gateaux del operador $N(\mu)$

$$\langle N'_\mu \varphi, \psi \rangle = \langle N'_\mu \psi, \varphi \rangle \tag{25}$$

lo que quiere decir que la derivada de Gateaux del operador no lineal es simétrica. Esta condición es necesaria para que el campo sea conservativo si el operador N que define el campo es no lineal. Si el dominio del operador es convexo, la condición es suficiente.

5. CONCLUSIONES

De los resultados anteriores se deduce que prácticamente cualquier problema de interés en la Física puede resolverse por un método variacional, con tal de usar la forma bilineal apropiada.

Estos teoremas extienden así la aplicabilidad de los métodos variacionales a un campo ilimitado, cumpliéndose en cierta forma el sueño de Planck y acercando la ciencia al ideal acariciado por los antiguos de reducir a un mínimo el número de leyes de la naturaleza. Pero para lograrlo, ha sido necesario usar métodos matemáticos cada vez más sofisticados; la simplicidad en el número de las leyes necesarias se ha conseguido a cambio de mayor complicación en la teoría. Favorece esto a la estética o a la economía? Las opiniones en realidad están divididas.

BIBLIOGRAFIA

GALILEO GALILEI. *Diálogos acerca de dos nuevas Ciencias.* Losada. Buenos Aires (1945).

S. GOLDBERG. *Unbounded Linear Operators.* Mc Graw-Hill. New York, (1966).

E. El HELM. *Scientific American. 217,* No. 6 (1967).

E. MACH. *The Science of Mechanics. Open Court.* La Salle (Ill) (1942).

F. MAGRI. *Int. J. Eng.* Sci. *12,* 537-549 (1974). .

S. G. MIKHLIN. *Variational Methods in Mathematical Physics. Pergamon Press.* Oxford (1964).

E. TONTI. *Ann di Mat. Pura ed Appl.* Vol. XCV, 331-360 (1973).

E. TONTI. Lecture Notes, SMR/92 — 20, *Autum Course on Variational Methods in Analysis and Mathematical Physics.* International Centre for Theoretical Physics. Trieste (1981).

M. M. Vainberg. *Variational Methods in the Study of Non-Linear Operators.* Holden Day (1964).

W. YOURGRAV, S. Mandelstam. *Variational Principles in Dynamics and Quantum Theory.* Pitman, London, (1956).