

HIDRODINAMICA EN ESTRUCTURAS ASTROFISICAS

por

Mario A. Higuera G.*

Resumen.

Higuera, M.A.: Hidrodinámica en estructuras Astrofísicas. Rev. Acad. Colomb. Cienc. 19 (75): 641-650, 1995. ISSN 0370-3908.

El objetivo principal de este trabajo es examinar la dinámica y la estabilidad térmica, en términos de modos normales, de una estructura laminar constituida por un plasma con abundancias solares, enfriado y calentado a tasas proporcionales a $\rho^2 T^\nu$ y $\rho^a T^b$ ($\text{ergs cm}^{-3} \text{s}^{-1}$) respectivamente y con un coeficiente de conducción térmica proporcional a $\rho^c T^q$. Se supone que inicialmente el gas tiene una presión estacionaria constante. Se hace un estudio analítico de la solución trivial (equilibrio térmico), se encuentra la ecuación característica correspondiente, se analizan sus raíces así como los dos primeros armónicos y se obtienen tres criterios de inestabilidad, independientemente de si las superficies de frontera se toman libres o rígidas. Se consideran cinco mecanismos típicos de calentamiento, de interés en astrofísica.

Palabras clave: hidrodinámica - inestabilidades - plasmas.

Abstract

The dynamics and stability analysis into the normal modes of a slablike thermal structure constituted by a plasma with solar abundances, cooled and heated at rates $\sim \rho^2 T^\nu$, and $\rho^a T^b$ ($\text{ergs cm}^{-3} \text{s}^{-1}$), respectively, is carried out. The initial steady gas pressure through the structure is assumed to be a constant. A complete analytical study for the trivial solution (thermal equilibrium) is made; the corresponding characteristic equation, their roots and two harmonics are calculated, from which three instability criteria are obtained regardless the bounding surfaces be rigid or free. Five kind of heating mechanisms which are operative in different thermal structures of interest in astrophysics are considered.

Key Words: hydrodynamics - instabilities - plasmas.

Introducción

La razón de ser de la astrofísica es el conocimiento de las diferentes estructuras observadas en el universo. Este trabajo se puede abordar desde dos puntos de vista mutuamente complementarios: la observación mediante el uso de instrumentos en el rango de frecuencias del espectro electromagnético accesible, o en la construcción acertada de modelos. Sin embargo la descripción de esta

realidad a través de modelos teóricos no resulta ser del todo completa.

Estrictamente hablando en el universo nada se puede tratar de forma aislada, sus estructuras (galaxias, estrellas, nubes, cuerpos opacos, etc) no se encuentran en equilibrio termodinámico, por lo que las interacciones de unas con otras a través de sus propios procesos físicos las llevan a evolucionar de un estado a otro. Estos cambios pueden ser suaves y lentos, o en algunas ocasiones con transiciones violentas en intervalos de tiempo muy pequeños.

El estudio de la evolución de los sistemas, entre estados de equilibrio temporal, es uno de los problemas más difíciles de la física actual, debido a la no linealidad de

* Observatorio Astronómico Nacional Facultad de Ciencias, Universidad Nacional de Colombia. Apartado Aéreo 2584. E-Mail: ahiguera@ciencias.campus.unal.edu.co
Santafé de Bogotá, Colombia.

las ecuaciones que los gobiernan y en parte a la complejidad matemática y exigencia computacional. En primera aproximación se puede hacer una revisión de los estados de equilibrio y ver la estabilidad de dichos estados frente a una perturbación. Alterar los estados de equilibrio, significa que si un sistema está descrito por un conjunto de M variables (temperatura, densidad, velocidad, entre otras) que a la vez son funciones de las coordenadas \vec{r} y del tiempo t , se investiguen soluciones de la forma

$$\psi_i(\vec{r}, t) = \psi_i^0(\vec{r}) + \delta\psi_i(\vec{r}, t) \quad , \quad i = 1, \dots, M, \quad (1)$$

donde $\psi_i^0(\vec{r})$ son las soluciones estacionarias correspondientes al estado de equilibrio y $\delta\psi_i(\vec{r}, t)$ son las funciones a determinar. Si la magnitud de la función de perturbación es mucho menor que la magnitud de la solución estacionaria $|\delta\psi_i(\vec{r}, t)| \ll |\psi_i^0(\vec{r})|$, las ecuaciones fundamentales se pueden linealizar al llevar esta solución (1) a las ecuaciones de conservación y despreciar los términos de orden superior o igual a 2 en $\delta\psi_i(\vec{r}, t)$.

La introducción de perturbaciones en el estudio lleva a revisar varios aspectos estrechamente vinculados.

i.- En los problemas de estabilidad (Chandrasekhar, 1961), un sistema es estable si todas las perturbaciones se amortiguan con el tiempo y es inestable si por lo menos una de las $\delta\psi_i(\vec{r}, t)$ crece con t . Entre estos dos procesos aparecen en escena los denominados estados marginales o de estabilidad neutra, ellos caracterizan en algunos parámetros del sistema, los valores para los cuales la estructura deja de ser estable. Por otra parte los tiempos de relajación (crecimiento o decrecimiento de la perturbación) señalan algún estado transitorio por el que pasa el sistema en estudio.

ii.- Las perturbaciones $\delta\psi_i(\vec{r}, t)$ se propagan como ondas de diferentes tipos en el medio, y durante este proceso sufren amortiguaciones o amplificaciones, por lo tanto pueden producir cambios estructurales apreciables en el sistema; por ejemplo en el comportamiento de las estrellas Cefeidas, en las diferentes regiones de la atmósfera solar, en novae y supernovas, entre otras.

iii.- Si la condición $|\delta\psi_i(\vec{r}, t)| \ll |\psi_i^0(\vec{r})|$ no se cumple, el sistema entra al régimen no lineal y esto puede llevar a la formación de discontinuidades: detonaciones o deflagraciones; ondas de choque (fuertes, débiles o sónicas). Varias de estas discontinuidades están íntimamente relacionadas con procesos típicos en diferentes sistemas, como por ejemplo en atmósferas y vientos estelares; acreción en el entorno de binarias y agujeros negros; formación de estrellas, cúmulos estelares y galaxias Ibáñez (1986).

Una vez linealizadas las ecuaciones de conservación, el problema se reduce a encontrar los métodos analíticos o numéricos, que permitan derivar los valores propios así como las respectivas autofunciones, compatibles unas con otras, correspondientes al plasma bajo estudio y sujetas a las condiciones de frontera. Dentro de este desarrollo, un análisis de la solución trivial estacionaria permitirá encontrar soluciones analíticas al problema, lo que físicamente corresponde a la solución para el equilibrio térmico.

Tabla 1
Valores de Densidad ρ , Temperatura T y Distancia R
para 9 clases diferentes de gases (Kenneth, 1980)

Región	ρ (gram^{-3})	T (K)	R (cm)
Ionosfera	$10^{-20} - 10^{-10}$	200 - 1500	6.4×10^8
Magnetosfera	10^{21}	10^4	$10^9 - 10^{11}$
Sol (estrellas)	1.4 (media)	$10^4 - 10^7$	10^{11}
Corona Solar	$10^{-10} - 10^{-16}$	10^6	10^{12}
Sistema Solar	10^{-28}	10^5	10^{15}
Nebulosa Galáctica	$10^{-19} - 10^{-16}$	$10^2 - 10^4$	$10^{18} - 10^{21}$
Galaxia	10^{-24}	$10^2 - 10^4$	10^{22}
Cúmulo Local	10^{-27}	10^5	3×10^{24}
Universo	10^{-29}	$10^5 - 10^6$	3×10^{28}

En estudios anteriores llevados a cabo por Ibáñez & Plachco (1991), Ibáñez *et al.* (1992), se analizaron tanto la estructura térmica así como su estabilidad. En un desarrollo posterior Ibáñez *et al.* (1993) un análisis no lineal de la estabilidad térmica sobre una estructura laminar también fue llevado a cabo.

En el presente trabajo se va a investigar el comportamiento térmico y dinámico de una estructura laminar, constituida por un plasma que puede ser típico de varias regiones del medio interestelar, tal como el estudiado en los trabajos de McKee & Cowie (1977) y McKee & Ostriker (1977), o el que se encuentra en diversas regiones de la atmósfera solar (Priest, 1982), o en el gas alrededor de los cuasares (Mathews & Doane, 1990). La estructura se caracteriza por una función típica de calentamiento que representa el término de generación de energía, así como una función de enfriamiento, ambas dependientes de la densidad y la temperatura. En la tabla 1 se muestran algunas características físicas (densidad, temperatura y tamaño) de varias estructuras astrofísicas.

Al introducir los procesos dinámicos se tratará de observar en qué medida se afectan los resultados ya derivados en los trabajos anteriores. Para llevar a cabo este objetivo, se usarán las tres ecuaciones fundamentales de conservación (Masa, Momento y Energía), así como la ecuación de los gases ideales. La estructura térmica se tomará inicialmente en un estado estacionario a presión constante y a una temperatura dada. En términos de modos normales (Chandrasekhar, 1961) la perturbación a imponer sobre las variables del sistema tiene la forma de una onda plana,

$$\delta\psi(\vec{r}, t) = A(z)e^{i(k_x x + k_y y) + \mathcal{N}t}, \quad (2)$$

al linealizar las ecuaciones resultantes y tomar el estado estacionario (solución trivial) se obtendrá una ecuación de dispersión compleja para la cantidad \mathcal{N} , en general se tiene que $\mathcal{N} = \sigma + i\omega$ donde σ y ω son cantidades reales. Con base en estos resultados se derivarán los criterios de estabilidad.

Ecuaciones fundamentales

Para derivar las Ecuaciones Hidrodinámicas (Landau, 1987) se considera el sistema de partículas o fluido como un medio continuo, caracterizado por un elemento diferencial de volumen dV , en el cual se estudiarán los procesos involucrados; el propósito es derivar el conjunto de ecuaciones y relaciones que permitan conocer el com-

portamiento de un fluido ideal, es decir aquel fluido que no es afectado por pérdidas debidas a procesos de viscosidad (fricción interna), efectos gravitacionales, conducción térmica y procesos exotérmicos explosivos. La descripción matemática del estado de movimiento de un fluido está determinada por las funciones que dan su distribución de velocidad $V = V(x, y, z, t)$ además de cualesquiera dos funciones termodinámicas pertenecientes al mismo, tales como la presión $P(x, y, z, t)$ y la densidad $\rho(x, y, z, t)$. Así el estado de movimiento del fluido queda determinado por 5 cantidades: 3 componentes de velocidad y 2 variables termodinámicas.

A. Ecuación de continuidad

Si se toma la materia como una cantidad invariante, la conservación de la masa está determinada por la ecuación de continuidad. Entonces si se define la masa del fluido M_i en el volumen V_o por:

$$M_i = \int_{V_o} \rho dV, \tag{3}$$

la pérdida por unidad de tiempo de la masa de fluido en el volumen V_o será:

$$\frac{\partial M_i}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial t} \int_{V_o} \rho dV, \tag{4}$$

y la masa total del fluido que se mueve fuera del volumen V_o por unidad de tiempo estará dada por:

$$\Delta M_f = \oint_s \rho \vec{v} \cdot dS = \int_{V_o} \nabla \cdot (\rho \vec{v}) dV. \tag{5}$$

Como las ecuaciones (4) y (5) representan la misma cantidad, se pueden igualar y al trasponer términos se obtiene:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{V_o} \rho dV + \int_{V_o} \nabla \cdot (\rho \vec{v}) dV = 0. \tag{6}$$

Eliminando los signos de integración se obtiene la ecuación de continuidad

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0, \tag{7}$$

que expresa físicamente la conservación de la materia. Para el caso estacionario $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ la anterior expresión representa el hecho de que no pueden existir fuentes ni sumideros de materia.

B. Ecuación de Euler

La ecuación de conservación de la cantidad de movimiento se puede desarrollar siguiendo a Landau (1987) y Brand (1964). Así sobre un elemento diferencial de volumen actúa una fuerza total

$$F = - \oint p df = - \int_V \nabla p \cdot dV, \tag{8}$$

desarrollando los términos extremos de la anterior expresión:

$$m \vec{a} = - \nabla p \int_{V_o} dV$$

$$\rho \vec{a} = - \nabla p \tag{9}$$

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = - \nabla p.$$

El operador D/Dt se denomina la derivada total o convectiva y toma en cuenta tanto los cambios por unidad de tiempo de la función sobre la que actúa, como las variaciones con respecto a las coordenadas espaciales. Sobre la velocidad se encuentra:

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \cdot \nabla \right) \vec{v}, \tag{10}$$

en donde el término $(\frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \cdot \nabla) \vec{v}$ es igual a $dx(d\vec{v}/dx) + dy(d\vec{v}/dy) + dz(d\vec{v}/dz)$. Al colocar esta cantidad, la ecuación movimiento se reduce a:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = - \frac{1}{\rho} \nabla p. \tag{11}$$

Añadiendo el término gravitacional g :

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = - \frac{1}{\rho} \nabla p + g, \tag{12}$$

se obtiene la ecuación de momento para un fluido en ausencia de fricción interna.

C. Ecuación de conservación de la energía

La primera Ley de la Termodinámica o Principio de Conservación de la Energía, establece que el cambio de la energía interna de un sistema más el trabajo realizado por el mismo es igual al cambio de calor; estas cantidades expresadas en unidades volumen y tiempo se escriben:

$$\rho \frac{Du}{Dt} + \rho P \frac{DV}{Dt} = \rho \frac{DQ}{Dt} = \rho T \frac{Ds}{Dt}, \tag{13}$$

donde u , Q y V son la energía interna, el calor y el volumen respectivamente.

Si se tiene un fluido no viscoso, que entrega y recibe calor a través de una función de pérdida-ganancia, más un término difusivo, se encuentra que:

$$\rho T \frac{Ds}{Dt} = \nabla \cdot (\kappa \nabla T) - \rho L(\rho, T), \tag{14}$$

en donde el término del lado izquierdo se puede escribir de tres formas diferentes:

a)

$$\begin{aligned} \rho T \frac{Ds}{Dt} &= \rho \frac{D\varepsilon}{Dt} + \rho P \frac{DV}{Dt} \\ &= \rho \frac{D\varepsilon}{Dt} - \frac{P}{\rho} \frac{D\rho}{Dt}, \\ &= \rho c_v \frac{DT}{Dt} - \frac{P}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} \end{aligned} \tag{15}$$

donde se realizaron las siguientes sustituciones: $V = 1/\rho$ (siendo ρ la densidad específica). $P = R/\mu\rho T$ y $\varepsilon = c_v T$ (siendo ε la energía interna).

b)

$$\rho T \frac{Ds}{Dt} = \rho c_p \frac{DT}{Dt} - \frac{Dp}{Dt}, \tag{16}$$

donde $c_v = \frac{c_p}{\gamma} = \frac{1}{\gamma-1} \frac{R}{\mu}$, y de la ecuación de los gases ideales $\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\mu}{RT} \frac{Dp}{Dt} - \frac{\rho}{T} \frac{DT}{Dt}$.

c)

$$\rho T \frac{Ds}{Dt} = \frac{1}{\gamma - 1} \left[\frac{Dp}{Dt} - \gamma \frac{p}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} \right], \quad (17)$$

donde $\frac{DT}{Dt} = \frac{\mu}{\rho R} \frac{Dp}{Dt} - \frac{T}{\rho} \frac{D\rho}{Dt}$.

D. Ecuación de estado

Para un gas ideal las variables P (presión), ρ (densidad) y T (temperatura) están relacionadas en la forma:

$$P - \frac{R}{\mu} \rho T = 0, \quad (18)$$

donde R es la constante universal de los gases (8.3143×10^7 (erg/mol.K)) y μ es el peso molecular. Si se toma en consideración un plasma con abundancias solares, el valor medio de μ es 0.57222.

El conjunto de ecuaciones (7), (12) y (14), junto con la ecuación de estado (18), permiten calcular cinco magnitudes físicas (tres componentes de velocidad y dos variables termodinámicas), las cuales caracterizan el estado dinámico del fluido.

Modelo térmico

Los parámetros que van a caracterizar el sistema en estudio se representan en la figura 1; como se puede observar éstos involucran la geometría, la presión, la velocidad, la densidad y el gradiente de temperatura del sistema.

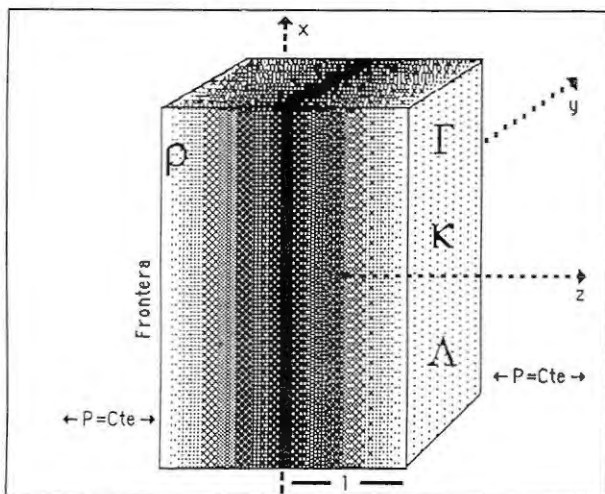


Figura 1. Representación de la estructura bajo estudio. Las funciones de calentamiento y enfriamiento son calculadas punto a punto. La presión es constante tanto dentro como fuera del sistema. l especifica la dimensión de la estructura a lo largo de z .

Las ecuaciones de conservación (7), (12) y (14) admiten soluciones estacionarias, i.e. donde todos los términos $\frac{\partial X}{\partial t} = 0$. En particular, existe la solución estacionaria ($v = 0$) para la cual la ecuación de energía (14) se reduce a un equilibrio entre la difusión de calor, la generación interna de calor y la radiación.

En trabajos realizados por Ibáñez & Plachco (1991) se analizó el rango de valores que caracterizan los meca-

nismos de transporte de energía así como la geometría y las condiciones de frontera para las cuales existen soluciones estables de la ecuación estática

$$\nabla \cdot [\kappa(T) \nabla T] + Q(\rho, T) = 0, \quad (19)$$

donde $Q(\rho, T)$ es el calor generado ($Q > 0$) o radiado ($Q < 0$) por unidad de volumen y tiempo, y tiene la forma:

$$Q = \pm Q_0 T^m, \quad (20)$$

expresión utilizada en muchos experimentos de laboratorio, así como típica de varias situaciones astrofísicas (Q_0 y n son constantes conocidas).

Por otra parte, el coeficiente de conducción térmica escrito en forma general es:

$$\kappa(T) = \kappa_0 T^m, \quad (21)$$

siendo κ_0 y m constantes dadas.

En un trabajo posterior (Ibáñez *et al.*, 1992) se generaliza el análisis de estabilidad incluyendo al mismo tiempo los términos de calentamiento y enfriamiento: ($\Gamma(\rho, T) = \Gamma_0 T^m$ y $\Lambda(\rho, T) = \Lambda_0 T^n$), esta situación es común en diversos modelos astrofísicos, en particular cuando las estructuras en el medio interestelar se encuentran cercanas al equilibrio térmico (McKee & Cowie, 1977; McKee & Ostriker, 1977; Parravano, 1987) y en diversas estructuras de la atmósfera solar (Priest, 1982).

Para configuraciones estáticas a presión (P) constante en el tiempo (t) la ecuación de energía viene expresada en la forma:

$$\nabla [\kappa(\rho, T) \nabla T] + \Gamma(\rho, T) - \Lambda(\rho, T) = 0, \quad (22)$$

con las correspondientes condiciones de frontera

$$\begin{aligned} \nabla T &= 0 \quad \text{en } r = 0 \quad (\text{centro}) \\ T &= T_b \quad \text{en } r = R \quad (\text{frontera}). \end{aligned} \quad (23)$$

La anterior ecuación se puede expresar:

$$\frac{1}{z^{\nu-1}} \frac{d}{dz} \left(z^{\nu-1} \theta^k \frac{d\theta}{dz} \right) + \lambda_* (\theta^m - \theta^n) = 0, \quad (24)$$

en donde: $z = r/R$, $\theta = T/T_*$, $T_* = (\Lambda_0/\Gamma_0)^{1/(n-m)}$ (Temperatura del equilibrio térmico). El parámetro ν es el índice de simetría ($\nu = 1, 2, 3$ para láminas, cilindros y esferas respectivamente). El parámetro adimensional λ_* está definido por la relación:

$$\lambda_* = \frac{\Gamma_0}{\kappa_0} R^2 T_*^{m-k-1} = \frac{\Lambda_0}{\kappa_0} R^2 T_*^{n-k-1} \quad (25)$$

Si conocemos la geometría del problema en estudio y los índices (κ , n y m) se pueden determinar los rangos de temperatura, así como las dimensiones en donde existen distribuciones del campo térmico estacionarias y estables.

Si se revisa el caso no estacionario, la ecuación de energía se puede escribir

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{1}{z^{\nu-1}} \frac{\partial}{\partial z} \left(z^{\nu-1} \theta^k \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) + \lambda_* (\theta^m - \theta^n), \quad (26)$$

donde \bar{t} es el tiempo medido en unidades de un tiempo de relajación: $t_x = R^2 \rho c_p / \kappa_o$.

Si se toman soluciones para la ecuación anterior de la forma:

$$\theta(z, t) = \bar{\theta}(z) + \varepsilon(z) e^{\bar{\sigma} t}, \quad (27)$$

obtenemos:

$$\frac{1}{z^{\nu-1}} \frac{d}{dz} \left[z^{\nu-1} \frac{d}{dz} (\bar{\theta}^k \varepsilon) \right] + [\lambda_* (m \bar{\theta}^{m-1} - n \bar{\theta}^{n-1}) - \bar{\sigma}] \varepsilon = 0, \quad (28)$$

con condiciones de frontera para $\varepsilon(z)$

$$\begin{aligned} \frac{d\varepsilon}{dz} &= 0 & z &= 0 \\ \varepsilon &= 0 & z &= 1. \end{aligned} \quad (29)$$

Para la solución trivial, la anterior ecuación se reduce a una ecuación de Bessel

$$\frac{1}{z^{\nu-1}} \frac{d}{dz} \left[z^{\nu-1} \frac{d\varepsilon}{dz} \right] + [\lambda_* (m - n) - \bar{\sigma}] \varepsilon = 0, \quad (30)$$

cuyas soluciones compatibles con las condiciones de frontera son:

$$\begin{aligned} \varepsilon(z) &= A_1 \cos [\lambda_* (m - n) - \bar{\sigma}]^{1/2} z & \text{si } \nu &= 1 \\ \varepsilon(z) &= A_2 J_0 [\lambda_* (m - n) - \bar{\sigma}]^{1/2} z & \text{si } \nu &= 2 \\ \varepsilon(z) &= A_3 \frac{\text{sen} [\lambda_* (m - n) - \bar{\sigma}]^{1/2} z}{z} & \text{si } \nu &= 3, \end{aligned} \quad (31)$$

donde A_i son constantes, J_0 es la función de Bessel de orden cero, y

$$\bar{\sigma} = \lambda_* (m - n) - b_N^2, \quad (32)$$

siendo b_N : $(2N+1)\pi/2$, $j_{(2N+1)}$ y $(2N+1)\pi$ para $\nu = 1, 2$ y 3 respectivamente. Obviamente, solo para $m - n > 0$, la tasa $\bar{\sigma} > 0$; también se tiene que el modo más rápido es aquel para el cual $N = 0$ y sera inestable si $\bar{\sigma} > 0$. El valor λ_c crítico correspondiente será:

$$\lambda_c = \frac{b_N^2}{m - n}, \quad (33)$$

y el tamaño de las estructuras, marginalmente estables, homogéneas, y en equilibrio térmico vendrá dado por:

$$R_c = \left[\frac{b_N^2}{m - n} \left(\frac{\kappa_o}{\Gamma_o} \right) \left(\frac{\Lambda_o}{\Gamma_o} \right)^{(k+1-m)/(m-n)} \right]^{1/2}, \quad (34)$$

el cual se calcula por las propiedades físicas del gas en consideración.

En el trabajo de Ibáñez *et al.* (1992) (Artículo I) se continúa con un desarrollo numérico para las soluciones estacionarias que permite conocer las distribuciones de temperatura para diferentes valores del parámetro λ_* e identificar las ramas de estabilidad e inestabilidad con la ayuda de la solución trivial, y más adelante Ibáñez *et al.* (1993) (Artículo II) se lleva este análisis al régimen no lineal.

Modelo dinámico

Ahora se va a analizar el acoplamiento del campo térmico con la dinámica, desarrollo que no ha sido aún tomado en cuenta. Recordando las ecuaciones hidrodinámicas:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot v = 0, \quad (35)$$

$$\rho \frac{Dv}{Dt} + \nabla p = 0, \quad (36)$$

$$\frac{R}{\mu} \left(\frac{1}{\gamma - 1} \rho \frac{DT}{Dt} - T \frac{D\rho}{Dt} \right) + \rho L(\rho, T) - \nabla \cdot (\kappa \nabla T) = 0, \quad (37)$$

$$p = \frac{R}{\mu} \rho T, \quad (38)$$

donde ρ , v , p , T , κ , and R son: densidad de masa, velocidad, presión, temperatura, coeficiente de conducción térmica y constante de los gases, respectivamente. $L(\rho, T)$ es la función de pérdida-ganancia de energía por unidad de masa y tiempo definida por

$$\rho L(\rho, T) = \Lambda(\rho, T) - \Gamma(\rho, T), \quad (39)$$

siendo Γ , el calor liberado por unidad de volumen y tiempo por procesos de caracter irreversible y/o calor absorbido de una fuente externa, y Λ , la tasa de pérdida de calor por unidad de volumen y tiempo respectivamente. En este trabajo la atención se centrará en la siguiente forma funcional para el calentamiento:

$$\Gamma(\rho, T) = C \rho^a T^b, \quad (\text{erg cm}^{-3} \text{ s}^{-1}), \quad (40)$$

C , a , b son constantes dadas (Rosner *et al.*, 1978; Dahlburg & Mariska, 1988; y referencias citadas). Adicionalmente, la función de enfriamiento para gases con abundancias solares se tomará en la forma

$$\Lambda(\rho, T) = \rho^2 \Lambda_i \left(\frac{T}{T_i} \right)^\nu, \quad (\text{erg cm}^{-3} \text{ s}^{-1}), \quad (41)$$

(Vesecky *et al.*, 1979). Por otra parte, el coeficiente de conducción térmica se escribirá de la forma

$$\kappa(\rho, T) = \kappa_1 \rho^c T^q, \quad (42)$$

donde κ_1 , c y q son constantes dadas (Parker, 1953, Spitzer, 1962, Ibáñez & Plachco, 1991).

Las soluciones inicialmente estacionarias bajo consideración son:

$$v_o = 0, \quad p_o = \frac{R}{\mu} \rho_o T_o \equiv \text{constante}, \quad (43)$$

siendo (ρ_o, T_o) , soluciones de la ecuación:

$$\rho_o L_o(\rho_o, T_o) - \nabla \cdot (\kappa(\rho_o, T_o) \nabla T_o) = 0, \quad (44)$$

con condiciones de frontera

$$\nabla T_o = 0 \text{ en } (x, y, 0), \quad (45)$$

$$T_o(x, y, z) = T_b \text{ en } (x, y, l), \tag{46}$$

donde l es la distancia del centro al borde de la lámina en estudio.

Si se perturban las soluciones estacionarias, teniendo siempre presente que $p_o \equiv \text{const}$, se pueden tomar soluciones de las ecuaciones (35)-(38) de la forma:

$$\Psi(x, y, z, t) = \Psi_o(x, y, z) + \delta\Psi(x, y, z, t), \tag{47}$$

para cualquiera de las variables termodinámicas. Así, si se desprecian los términos no lineales en $\delta\Psi$ del conjunto de ecuaciones (35)-(38) y si además se consideran las soluciones en términos de modos normales (Chandrasekhar, 1961), i.e.

$$\begin{aligned} \frac{\delta\rho}{\rho_o} &= \eta(z) \exp[i(k_x x + k_y y) + \mathcal{N}t], \\ \frac{\delta T}{T_o} &= \theta(z) \exp[i(k_x x + k_y y) + \mathcal{N}t], \\ v &= v^1(z) \exp[i(k_x x + k_y y) + \mathcal{N}t], \\ \frac{\delta p}{p_o} &= \beta(z) \exp[i(k_x x + k_y y) + \mathcal{N}t], \end{aligned} \tag{48}$$

donde $k_\perp \equiv (k_x, k_y)$ es el número de onda normal a la dirección z y \mathcal{N} es la tasa, se obtienen las siguientes dos ecuaciones diferenciales simultáneas:

$$\frac{d^2\eta}{dz^2} - \left(\frac{\tilde{\mathcal{N}}^2}{\tilde{T}_o} + \tilde{k}_\perp^2 \right) \eta + \frac{d^2\theta}{dz^2} - \tilde{k}_\perp^2 \theta = 0, \tag{49}$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{d \ln \tilde{T}_o}{dz} \right) \left(c\tilde{\alpha}\tilde{T}_o^{q-c}\tilde{\mathcal{N}} + 1 \right) \frac{d\eta}{dz} \\ & + \tilde{\mathcal{N}} \left[\frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{\tilde{\mathcal{N}}}{\tilde{T}_o} - \tilde{\alpha}\tilde{\epsilon}_*(2\tilde{T}_o^{m-1} - a\tilde{T}_o^{m-1}) + c(q+1-c)\tilde{\alpha}\tilde{T}_o^{q-c} \left(\frac{d \ln \tilde{T}_o}{dz} \right)^2 + c\tilde{\alpha}\tilde{T}_o^{q-c} \left(\frac{d^2 \ln \tilde{T}_o}{dz^2} \right) \right] \eta \\ & + \tilde{\alpha}\tilde{T}_o^{q-c}\tilde{\mathcal{N}} \frac{d^2\theta}{dz^2} + \left(\frac{d \ln \tilde{T}_o}{dz} \right) \left\{ [2(q+1)-c]\tilde{\alpha}\tilde{T}_o^{q-c}\tilde{\mathcal{N}} + 1 \right\} \frac{d\theta}{dz} \\ & - \tilde{\mathcal{N}} \left\{ \frac{1}{\gamma} \frac{\tilde{\mathcal{N}}}{\tilde{T}_o} + \tilde{\alpha}\tilde{T}_o^{q-c}\tilde{k}_\perp^2 + \tilde{\alpha}\tilde{\epsilon}_*[(\nu - q - 1)\tilde{T}_o^{m-1} - (b - q - 1)\tilde{T}_o^{m-1}] \right\} \theta = 0, \end{aligned} \tag{50}$$

donde

$$\begin{aligned} \tilde{z} &= \frac{z}{l}, \quad \tilde{T}_o = \frac{T_o}{T_*}, \quad \tilde{k}_\perp^2 = (lk_x)^2 + (lk_y)^2, \\ \tilde{\mathcal{N}} &= \tau_*\mathcal{N}, \quad \tau_* = \frac{l}{c_*}, \quad \tau_x = \frac{l^2}{\chi_*}, \quad \tilde{\alpha} = \frac{\tau_*}{\tau_x}, \\ \tilde{\epsilon}_* &= \frac{l^2\Gamma_1 T_*^{m-1}}{\kappa_*} = \frac{l^2\Lambda_1 T_*^{m-1}}{\kappa_*}. \end{aligned} \tag{51}$$

En las anteriores ecuaciones, $\chi_o \equiv \kappa_o/\rho_o c_p$ es la conductividad termométrica y $c_o^2 \equiv RT_o/\mu$ es la velocidad del sonido. El subíndice (*) se refiere a la respectiva cantidad evaluada a la temperatura de equilibrio T_* . En particular, c_* es la velocidad isotérmica del sonido en T_* . Por lo tanto, τ_* y τ_x son el tiempo de propagación de la onda sonora, y el tiempo de relajación debido a la conducción térmica, respectivamente. Adicionalmente, como la presión estacionaria es constante, las funciones de calentamiento y enfriamiento se pueden expresar tal como en Ibáñez *et al.* (1992), i.e. $\Gamma = \Gamma_1 T^m$, $\Lambda = \Lambda_1 T^m$, siendo Γ_1 y Λ_1 constantes, y $m = b - a$, $n = \nu - 2$.

Estabilidad de la solución trivial

La ecuación estacionaria (44) tiene una solución $T_o = T_*$ que caracteriza el estado de equilibrio térmico. Por lo

tanto, para esta solución estacionaria $\tilde{T}_o = 1$, el sistema de ecuaciones (49)-(50) se simplifica, i.e.

Las soluciones requeridas de las ecuaciones (52)-(53) son de la forma $\sim \exp(i\tilde{k}_z z)$, donde \tilde{k}_z es el número de onda a lo largo del eje z , siempre y cuando se cumpla la ecuación característica

$$\frac{d^2\eta}{dz^2} - (\tilde{\mathcal{N}}^2 + \tilde{k}_\perp^2)\eta + \frac{d^2\theta}{dz^2} - \tilde{k}_\perp^2\theta = 0, \tag{52}$$

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\gamma - 1}{\gamma} \tilde{\mathcal{N}}^2 - \tilde{\mathcal{N}}\tilde{\alpha}\tilde{\epsilon}_*(2 - a) \right] \eta + \tilde{\mathcal{N}}\tilde{\alpha} \frac{d^2\theta}{dz^2} \\ & - \left\{ \frac{\tilde{\mathcal{N}}^2}{\gamma} + \tilde{\mathcal{N}}\tilde{\alpha}\tilde{k}_\perp^2 + \tilde{\mathcal{N}}\tilde{\alpha}\tilde{\epsilon}_*(\nu - b) \right\} \theta = 0. \end{aligned} \tag{53}$$

Adicionalmente, las perturbaciones en presión y velocidad están dadas por:

$$\beta(z) = \eta(z) + \theta(z), \tag{54}$$

$$\tilde{\mathcal{N}}\tilde{v}_\perp^1(z) = -i\tilde{k}_\perp\beta(z), \tag{55}$$

$$\tilde{\mathcal{N}}\tilde{v}_z^1(z) = -\frac{d}{dz}\beta(z), \tag{56}$$

donde $\tilde{v}_w^1 = v_w^1/c_*$, and $\tilde{\mathcal{N}} = \tau_*\mathcal{N}$.

$$\tilde{\mathcal{N}} \left\{ \tilde{\mathcal{N}}^3 + \gamma\tilde{\alpha}[\tilde{k}^2 + (n - m - a + 2)\tilde{\epsilon}_*]\tilde{\mathcal{N}}^2 + \gamma\tilde{k}^2\tilde{\mathcal{N}} + \gamma\tilde{\alpha}[\tilde{k}^2 + (n - m)\tilde{\epsilon}_*]\tilde{k}^2 \right\} = 0,$$

en la ecuación anterior $\bar{k}^2 = \bar{k}_z^2 + \bar{k}_\perp^2$.

Independientemente de las condiciones de frontera, existe una solución no-trivial para el sistema (52)-(53) que corresponde a la raíz $\mathcal{N} = 0$, i.e. $\eta = -\theta$, $\beta = 0$, $v_z^1 = 0$, $v_\perp^1 = 0$, y $\xi = 0$, es decir un desplazamiento de los valores de equilibrio a presión constante, en donde los cambios en densidad son equilibrados por los cambios en temperatura ($\delta\rho + \delta T = 0$). Los tres valores propios nulos restantes se determinan de las raíces de la ecuación cúbica que aparece entre los corchetes de la ecuación (57).

Como es de esperarse, para las soluciones $\mathcal{N} \neq 0$ las condiciones de frontera imponen restricciones sobre los valores de \bar{k}_z . En efecto, se puede mostrar fácilmente que si las fronteras de la lámina son libres, las soluciones son:

$$\theta = \Theta_1 \cos(\bar{k}_z z), \tag{58}$$

$$\eta = H\theta, \tag{59}$$

$$\beta = (1 + H)\theta, \tag{60}$$

$$\tilde{\mathcal{N}}\tilde{v}_\perp^1 = -i\bar{k}_\perp\beta, \tag{61}$$

$$\tilde{\mathcal{N}}\tilde{v}_z^1 = \bar{k}_z(1 + H)\Theta_1 \sin(\bar{k}_z z), \tag{62}$$

donde Θ_1 es la amplitud de la perturbación en temperatura,

$$\bar{k}_z = (2N + 1)\left(\frac{\pi}{2}\right), \quad N = 0, 1, 2, \dots, \tag{63}$$

y

$$H = \frac{\tilde{\mathcal{N}} + \gamma\tilde{\alpha}[\bar{k}^2 + \epsilon_*(\nu - b)]}{(\gamma - 1)\tilde{\mathcal{N}} - \gamma\tilde{\alpha}\epsilon_*(2 - a)}. \tag{64}$$

En la frontera $\theta(1) = \eta(1) = \beta(1) = 0$, $\tilde{v}_\perp^1(1) = 0$, $\tilde{v}_z^1(1) = 0$, pero $\tilde{\mathcal{N}}\tilde{v}_z^1(1) = \bar{k}_z(1 + H)\Theta_1$ (aceleración de la frontera) $\neq 0$, y $\xi_z \neq 0$. Por otra parte, en el centro de la estructura $(d\theta/dz)_{z=0} = 0$; por lo tanto, las anteriores soluciones para la perturbación en temperatura satisfacen idénticas condiciones a las supuestas en el Artículo I. Lo anterior permite examinar los efectos de la dinámica del gas sobre la estructura térmica estudiada. Es intere-

sante resaltar que en el centro $\theta(0) = \Theta_1$, $\eta(0) = H\Theta_1$, y $\beta = (1 + H)\Theta_1 \neq 0$, $\tilde{\mathcal{N}}\tilde{v}_\perp^1(0) = -i\bar{k}_\perp\beta(0) \neq 0$, $\xi_\perp \neq 0$ pero $\tilde{v}_z^1(0) = 0$, y $\xi_z(0) = 0$.

Por otra parte, si las fronteras de la lámina son rígidas, las soluciones correspondientes para $\tilde{\mathcal{N}} \neq 0$ son:

$$\theta = \Theta_1 \sin(\bar{k}_z z), \tag{65}$$

$$\tilde{\mathcal{N}}\tilde{v}_z^1 = -\bar{k}_z(1 + H)\Theta_1 \cos(\bar{k}_z z), \tag{66}$$

donde \bar{k}_z y H están definidas por las ecuaciones (63) y (64), respectivamente; y η , β , y v_\perp^1 continúan siendo definidas por las relaciones (59)-(61), respectivamente. Obviamente, en la frontera, $\theta(1) = \Theta_1$, $\eta(1) = H\Theta_1$, $\beta(1) = (1 + H)\Theta_1$, $\tilde{\mathcal{N}}\tilde{v}_\perp^1(1) = -i\bar{k}_\perp\beta(1)$, $\xi_\perp \neq 0$, $\tilde{v}_z^1(1) = 0$ y $\xi_z(1) = 0$. Sin embargo, para que las soluciones anteriores satisfagan condiciones de frontera rígidas, $(d\theta/dz)_{z=0} = \bar{k}_z\Theta_1 \neq 0$ en el centro; adicionalmente, $\theta(0) = \eta(0) = \beta(0) = 0$, $\tilde{v}_\perp^1(0) = 0$, y $\xi_\perp = 0$, pero $\tilde{v}_z^1(0) = -\bar{k}_z(1 + H)\Theta_1 \neq 0$, y $\xi_z \neq 0$. Estrictamente hablando, sobre una superficie rígida se debe cumplir que $v_\perp^1(1) = 0$, y $v_z^1(1) = 0$. Sin embargo, y debido a que en el problema bajo estudio la viscosidad del gas se ha despreciado, la anterior condición no se puede cumplir.

Raíces de la ecuación de dispersión y criterios de inestabilidad

La ecuación cúbica entre los paréntesis del lado izquierdo de la ecuación (57) es de la forma

$$\tilde{\mathcal{N}}^3 + a_1\tilde{\mathcal{N}}^2 + a_2\tilde{\mathcal{N}} + a_3 = 0, \tag{67}$$

con coeficientes reales a_i . En general, las raíces de la ecuación (67) son de la forma

$$\tilde{\mathcal{N}}_j = \bar{\sigma}_j + i\bar{\omega}_j, \quad j = 1, 2, 3. \tag{68}$$

en donde las tasas $\bar{\sigma}_j$ y frecuencias $\bar{\omega}_j$ son cantidades reales.

Una forma de investigar cuándo los anteriores valores propios son inestables ($\bar{\sigma}_j > 0$) es aplicando los criterios de Hurwitz (1895), de acuerdo con los cuales, el número de raíces de la ecuación (67) con parte real positiva ($\bar{\sigma}_j > 0$) está dada por el número de cambios de signo en la secuencia $+1, a_1, a_1(a_1a_2 - a_3), a_3$ en donde:

$$a_1 = \gamma\tilde{\alpha}[\bar{k}^2 + (n - m - a + 2)\epsilon_*], \tag{69}$$

$$a_1(a_1a_2 - a_3) = \gamma\tilde{\alpha} \left[\bar{k}^2 + (n - m + 2 - a)\epsilon_* \right] \left\{ (\gamma - 1)\bar{k}^2 + [(\gamma - 1)(n - m) + \gamma(-a + 2)]\epsilon_* \right\} \bar{k}^2, \tag{70}$$

$$a_3 = \gamma\tilde{\alpha}[\bar{k}^2 + (n - m)\epsilon_*]\bar{k}^2. \tag{71}$$

Además, una condición suficiente para que una inestabilidad exista es que cualquiera de las siguientes relaciones se cumpla

$$\left(\frac{2N + 1}{2}\pi\right)^2 + \bar{k}_\perp^2 + (n - m - a + 2)\epsilon_* \leq 0, \tag{72}$$

$$\left(\frac{2N + 1}{2}\pi\right)^2 + \bar{k}_\perp^2 + [(n - m) + \frac{\gamma}{\gamma - 1}(-a + 2)]\epsilon_* \leq 0, \tag{73}$$

$$\left(\frac{2N + 1}{2}\pi\right)^2 + \bar{k}_\perp^2 + (n - m)\epsilon_* \leq 0. \tag{74}$$

Obviamente, las igualdades en las relaciones (72)-(74) definen los estados marginales de la estructura térmica. Como se observa, a diferencia del caso estudiado por

Ibáñez, Parravano & Mendoza, aparecen tres criterios de inestabilidad; sin embargo, el criterio (74) se identifica claramente con la ecuación (33), derivada por ellos.

Si se conocen las condiciones físicas particulares del plasma en consideración (i.e. los valores de los índices n , m , y a son dados), se puede resolver la ecuación de dispersión (57) para encontrar las tasas $\bar{\sigma}_j$ y las frecuencias $\bar{\omega}_j$ como funciones del número de onda transversal \tilde{k}_\perp , para los diferentes modos normales ($N=0,1,\dots$) y los dos números adimensionales $\alpha_* = \tau_*/\tau_\chi$ y ϵ_* . Una vez que se determinen las raíces \tilde{N}_j , el parámetro H se puede calcular de la ecuación (64).

Tabla 2
Procesos de calentamiento en plasmas astrofísicos.

Caso	Descripción	a	b
A	Calentamiento constante por unidad de volumen	0	0
B	Calentamiento constante por unidad de masa	1	0
C	Calentamiento por corriente coronal de disipación	1	1
D	Calentamiento por Modo Alfvén/Modo de conversión	7/6	7/6
E	Calent. por Modo Alfvén/Conducción anómala amortiguada	1/2	-1/2

Existen cinco procesos de calentamiento de particular importancia en astrofísica, ver tabla 2 [Rosner et al., (1978), Dahiburg & Mariska, (1988) y referencias citadas]. El caso $n = -3/2$, $m = -1$ estudiado en el Artículo I como un caso de referencia, será analizado.

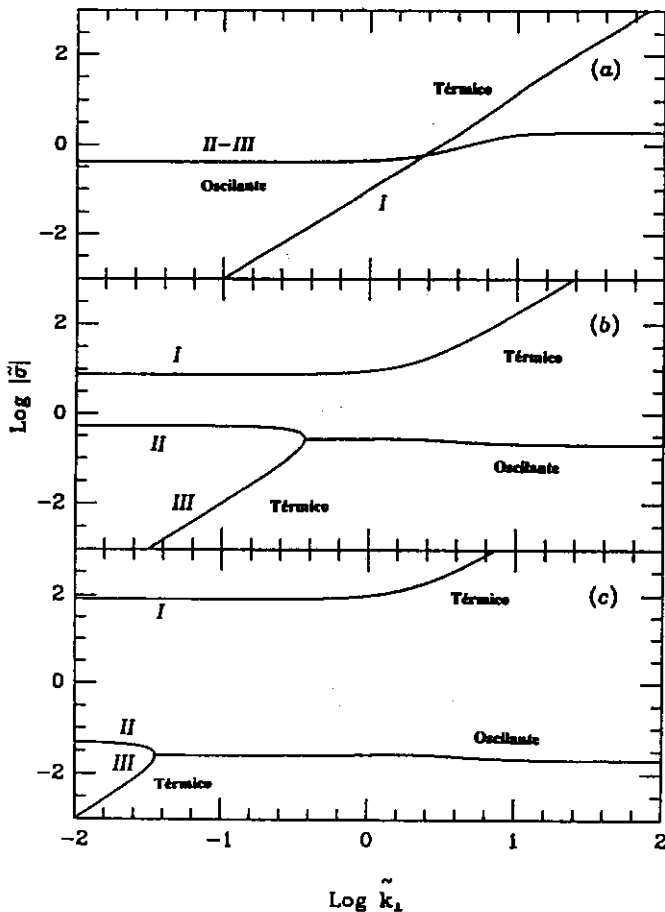


Figura 2. Las tasas $\bar{\sigma}_j$ como funciones del número de onda \tilde{k}_\perp para el modo fundamental $N = 0$, $\gamma = 5/2$, $n = -3/2$, $m = -1$, $a = 1$, $\epsilon_* = \pi^2/2$, y $\alpha_* = 0.1, 1, 10$, panel (a), (b), y (c), respectivamente. Las diferentes raíces de la ecuación (3.16) están etiquetadas con números romanos.

Este caso corresponde a una lámina de plasma con abundancias solares calentado a una tasa por unidad de masa constante (caso B), y enfriado por radiación libre-libre ($\nu=1/2$). Adicionalmente, bajo las condiciones anteriores, la difusión de calor es dominada por electrones y la conocida relación de Spitzer (1962) se cumple (i.e. $c = 0$, $q = 5/2$).

La figura 2 es una gráfica de las tasas $|\bar{\sigma}_j|$ como funciones del número de onda normal \tilde{k}_\perp , para el modo fundamental $N = 0$, $\gamma = 5/3$, $n = -3/2$, $m = -1$, $a = 1$, $\epsilon_* = \pi^2/2$, (valor crítico en Artículos I, y II), y tres valores diferentes del parámetro adimensional α_* : 0.1, 1 y 10 (paneles a, b y c respectivamente). Se observó que hay un rompimiento del cruce de modos para $\alpha \approx 0.4899$. Las respectivas frecuencias, cuando las raíces \tilde{N}_j son números complejos, se muestran en la figura 3, y los correspondientes valores de $|ReH|$ en la figura 4. La figura 5 es similar a la figura 2; pero para $\epsilon_* = \pi^2$; cuando $\alpha \approx 0.385$, desaparece el cruce de modos. Los respectivos valores de $|ReH|$ se muestran en la figura 6. Como se espera de los criterios de Hurtwitz independientemente del valor de α_* , el modo térmico (el cual siempre se comporta como el modo más lento) se hace inestable para $\tilde{k}_\perp \leq \tilde{k}_{c\perp} \cong \pi/\sqrt{2}$. En las figuras 7 y 8 se observa el comportamiento de las raíces $\bar{\sigma}_j$ para el primer y segundo armónicos, $N = 1$ y $N = 2$ respectivamente con $\epsilon_* = \pi^2$.

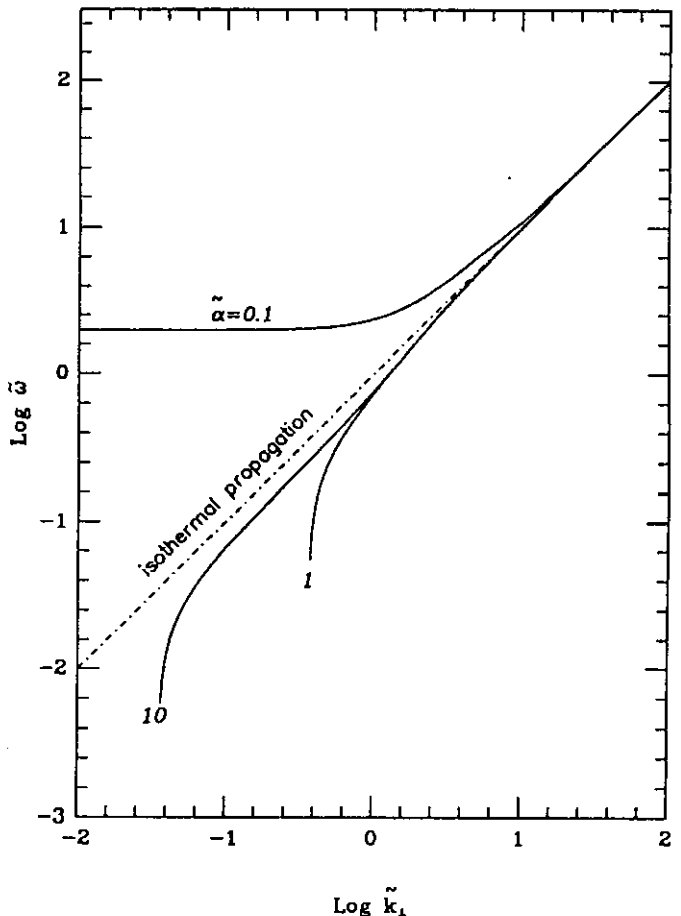


Figura 3. Las frecuencias correspondientes a los modos oscilantes de la figura 2 como función de \tilde{k}_\perp . La relación de dispersión $\bar{\omega}(\tilde{k}_\perp)$ para una onda sonora isotérmica se muestra con una línea de puntos.

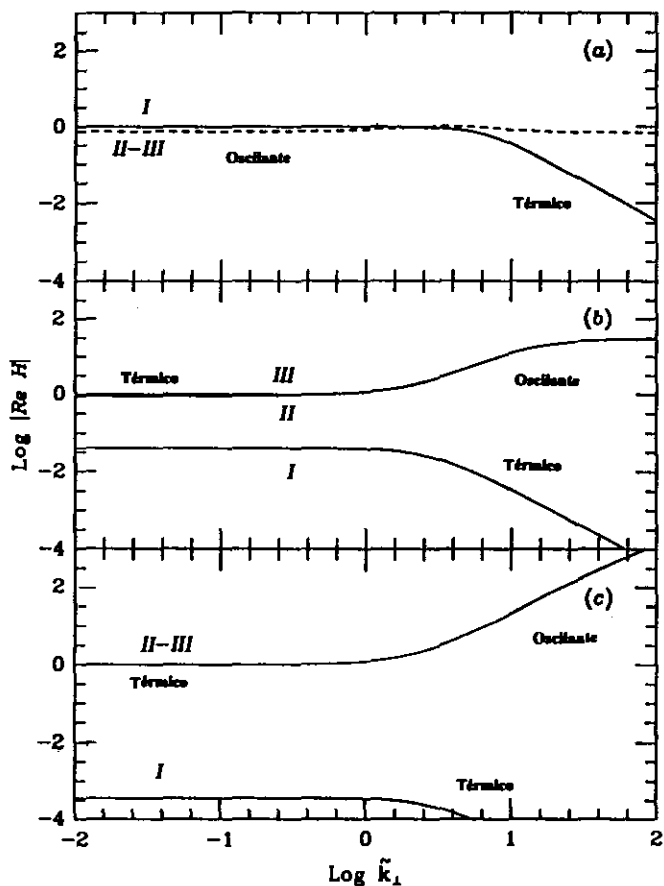


Figura 4. El parámetro adimensional ReH correspondiente a las respectivas tasas de la figura 2 como función de k_{\perp} . Valores positivos de ReH están indicados por líneas a trazos.

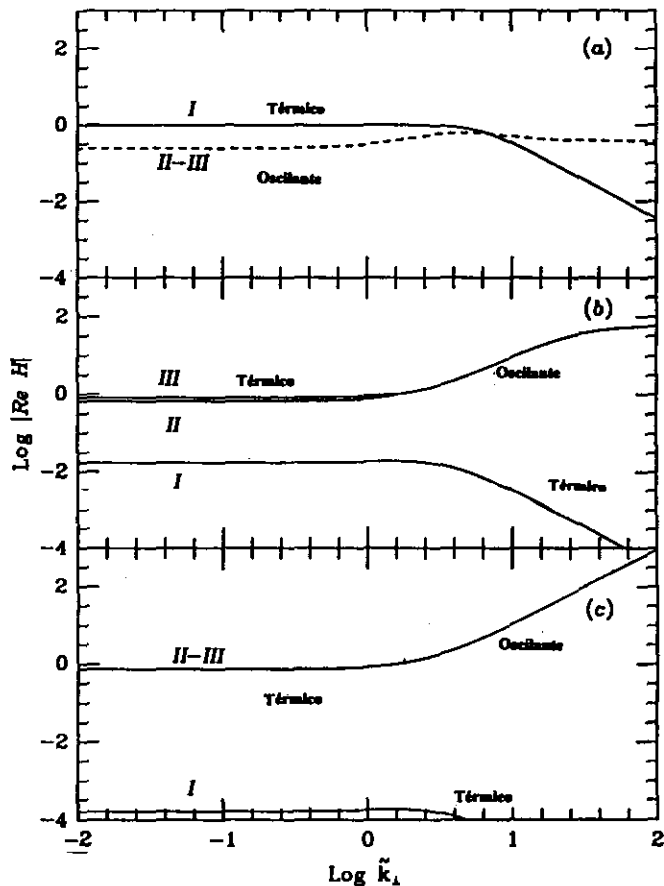


Figura 6. Los valores de ReH correspondientes a las raíces mostradas en la figura 5 como funciones de k_{\perp} . Líneas a trazos corresponden a valores positivos de H .

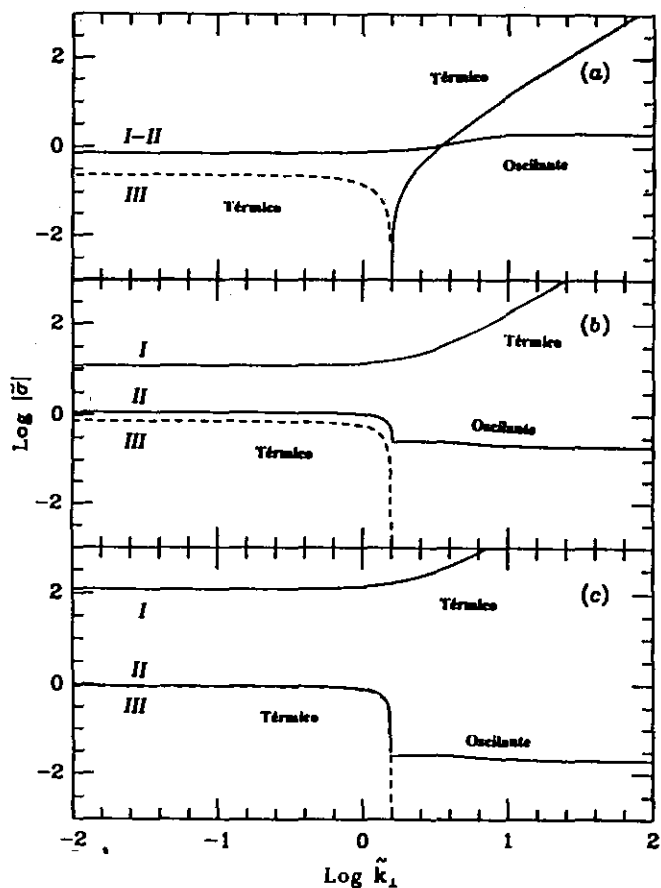


Figura 5. Similar a la figura 2 para $\epsilon_* = \pi^2$

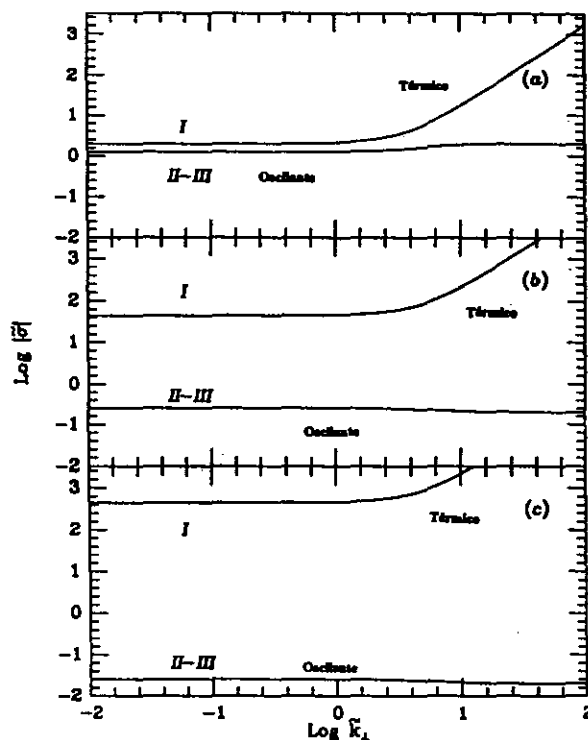


Figura 7. Similar a la figura 2 pero para el primer armónico $N = 1$ y $\epsilon_* = \pi^2$.

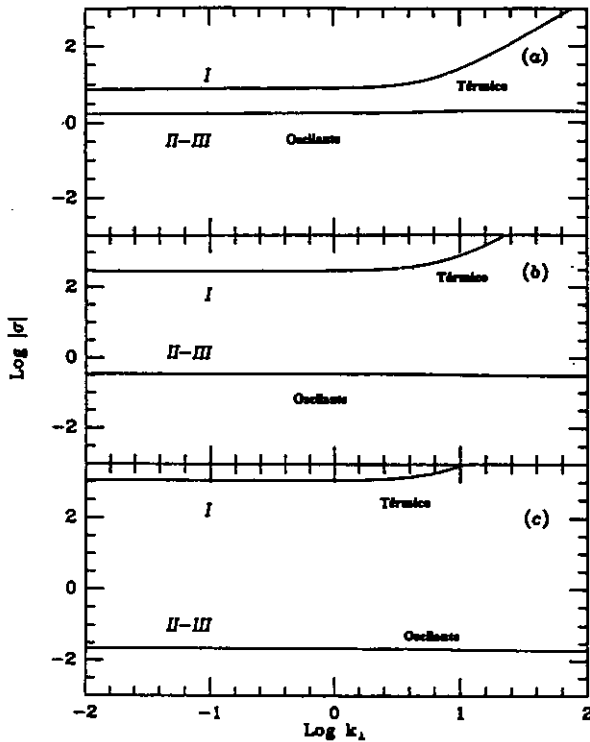


Figura 8. Similar a la figura 2 pero para el segundo armónico $N = 2$ y $\epsilon_* = \pi^2$.

Conclusiones

En resumen, en este trabajo se realizó un análisis en términos de modos normales de una estructura térmica laminar. El problema general de valores propios fue reducido a dos ecuaciones diferenciales acopladas de segundo orden las cuales deben ser solucionadas numéricamente. Se hizo un estudio analítico para la solución trivial (la solución del equilibrio térmico): se derivó la ecuación característica correspondiente y se obtuvieron tres criterios de inestabilidad independientemente de si las fronteras son libres o rígidas. Estos criterios determinan cuándo aparece una inestabilidad y el parámetro de acoplamiento H definido por ecuación (64) determina la forma en que la inestabilidad ocurre, i.e. la forma como la fluctuación en temperatura está acoplada con la fluctuación en densidad, presión y velocidad al surgimiento de la inestabilidad. Las ecuaciones (59)-(61) permiten visualizar el acople y desacople de las perturbaciones en temperatura, densidad, presión y velocidad para los tres modos resultantes (térmico, oscilante y no-oscilante); sin embargo, hay que tener presente que un análisis general debe involucrar la acción simultánea de las tres raíces. Es de destacar que si en todas las gráficas correspondientes a las raíces $\tilde{\sigma}_j$ contra \tilde{k}_\perp se presentan raíces positivas (líneas a trazos), éstas dominan sobre las restantes ya que implican la aparición de una inestabilidad; pero en aquellas gráficas en que las tres raíces son negativas para un mismo valor de \tilde{k}_\perp , quien domina la estabilidad es la menos negativa de todas. Al investigar los

armónicos correspondientes al caso de referencia, se observa cómo desaparece la inestabilidad presente cuando $N = 0$ (Modo Fundamental).

Deseo expresar mi especial agradecimiento al Dr Miguel H. Ibáñez S, tutor de esta línea de investigación, a los Doctores Eduardo Brieva B. y Antonio Uribe por sus correcciones, así como al Observatorio Astronómico Nacional, por el soporte logístico.

Bibliografía

- Brand, L. 1964. Vector and tensor analysis. (New York: John Wiley & sons.
- Chandrasekhar, S. 1961. Hydrodynamic and hydromagnetic stability (Oxford: Clarendon press).
- Dahlburg, R. B. & J.T. Mariska. 1988. Solar Physics, 117, 51.
- Higuera, G.M.A. 1994, M.Sc Tesis. Universidad de Los Andes, Mérida. Venezuela.
- Hurwitz, A. 1895. Math. Ann. 46, 273.
- Ibáñez, S. M. H. 1986. Estabilidad y Ondas Lineales en Fluidos. Departamento de Física. Universidad de Los Andes, Mérida Venezuela.
- Ibáñez, S. M. H., & M. F. P. Plachco. 1991. On the thermal stability of slabs, cylinders and spheres. ApJ, 370: 743-751.
- Parravano A. & B. C. A. Mendoza. 1992. On the thermal structure and stability of configurations with heat diffusion and a gain-loss function. ApJ, 398: 177-185. (Artículo I).
- Parravano A. & B. C. A. Mendoza. 1993. Non-linear instability of thermal field. ApJ, 407: 611-621. (Artículo II).
- Kenneth R. L. 1980. Astrophysical Formulae (Berlin: Springer-Verlag).
- Landau, L.D. & E.M. Lifshitz. 1987. Fluid Mechanics (London: Pergamon).
- Mathews W.G. & J.S. Doane. 1990. Can quasar clouds form in thermal instabilities. ApJ, 352: 423-432.
- Mckee, Ch. & J. Ostriker. 1977. A theory of interstellar medium. ApJ, 218: 148-169.
- Mckee, Ch. & L. Cowie. 1977. The evaporation of spherical cloud in hot gas. ApJ, 215: 213-225.
- Parker E.N. 1953. ApJ, 117, 431.
- Parravano, A. 1987. A&A, 172, 280.
- Priest, E. R. 1982. Solar Magnetohydrodynamics (Dordrecht: Reidel)
- Rosner, R., Tucker, W. H., & G.S. Vaiana. 1978. Dynamics of the quietest solar corona. ApJ, 220: 643-665.
- Spitzer, L. 1962. Physics of fully ionized gases (New York: Interscience publishers).
- Vesicky, J. F., Antiochos, S. K. & J. H. Underwood. 1979. ApJ, 233, 987.