

POLINOMIOS ORTOGONALES EN LA ESTIMACION DEL HIDROGRAMA UNITARIO

por

Ricardo A. Smith Q.*

Resumen

Smith, R.A.: Polinomios ortogonales en la estimación del Hidrograma unitario. Rev. Acad. Colomb. Cienc. 19(72): 121-129, 1994. ISSN 0370-3908.

El hidrograma unitario es un modelo lineal del proceso lluvia-escorrentía de una cuenca. Hidrogramas de escorrentía directa pueden obtenerse mediante la convolución del hidrograma unitario y los correspondientes eventos de precipitación efectiva. Numerosos procedimientos de estimación del hidrograma unitario han sido propuestos en la literatura, entre ellos el uso de funciones ortogonales. Este procedimiento usa funciones ortogonales para invertir la ecuación de convolución anterior y estimar el hidrograma unitario (un hidrograma unitario para cada evento lluvia-escorrentía, teniéndose que promediar para definir el único hidrograma unitario de la cuenca). Dos procedimientos generales de estimación son presentados.

En este trabajo se introduce el uso de una función γ ortogonalizada como una función que representa más adecuadamente el comportamiento físico del proceso lluvia-escorrentía. Se presenta también un procedimiento nuevo que permite la estimación del único hidrograma unitario de la cuenca usando todos los eventos lluvia-escorrentía al mismo tiempo con funciones ortogonales.

Palabras clave: Polinomios Ortogonales.

Abstract

The unit hydrograph is a linear rainfall-runoff model of a watershed. Direct runoff hydrographs can be obtained by the convolution of the unit hydrograph and the corresponding excess rainfall events. Numerous unit hydrograph procedures have been presented in the literature, including the use of orthogonal functions. This procedure uses orthogonal functions to invert the convolution equation mentioned above and estimate the unit hydrograph (one unit hydrograph for each rainfall-runoff event, using averaging procedures to determine the unique unit hydrograph for the watershed). In this research the use of a γ orthogonalized function is introduced. γ functions adequately represent the damped response typical of natural watersheds. A new procedure that uses orthogonal functions allows the direct estimation of the unique unit hydrograph using all rainfall-runoff events at the same time (without averaging) is introduced.

1. Introducción

En este trabajo se presenta un análisis detallado mediante el uso de funciones ortogonales de la estimación de los modelos lluvia-escorrentía lineales del tipo hidrograma unitario. Estos modelos usan una relación tipo caja negra para el proceso precipitación-escorrentía

que permite estimar escorrentía en el punto de interés. La entrada al sistema, excitación, es convertida en la respuesta mediante la acción del sistema, el modelo, del cual sólo se conoce la función de transformación. Estos modelos son técnicas de estimación del sistema cuenca que transforma la precipitación en escorrentía suponiendo que el sistema es lineal, estacionario e inicialmente relajado. El concepto de hidrograma unitario está basado en el concepto de elemento unitario, es decir, en la

* Postgrado en Aprovechamiento de Recursos Hidráulicos. Facultad de Minas. Universidad Nacional de Colombia.

idea de que si el efecto debido a una acción unitaria es conocido, el efecto debido a cualquier otra acción está dado por la combinación de esa acción y el efecto de la acción unitaria. Esta combinación puede ser multiplicativa, divisoria o convolutiva. El hidrograma unitario fue introducido por Sherman (1932) y se puede definir como el hidrograma de escorrentía directa que resulta de una precipitación efectiva de profundidad unitaria, uniformemente distribuida sobre la cuenca y de una duración específica. Esta definición, combinada con las suposiciones de linealidad, estacionariedad, y de un sistema inicialmente relajado constituye lo que se conoce con el nombre de *teoría del hidrograma unitario* (Chow, 1964).

Si la duración de la lluvia se vuelve infinitesimal el hidrograma unitario resultante recibe el nombre de *hidrograma unitario instantáneo (HUI)*. De acuerdo con la definición de hidrograma unitario, cada elemento infinitesimal de precipitación efectiva produce un hidrograma de escorrentía directa igual al producto de ese elemento y el HUI. Usando el principio de superposición, el hidrograma de escorrentía directa está dado por la integral de convolución

$$Q(t) = \int_0^t U(w)P(t-w)dw, \quad (1)$$

en donde $P(t)$ y $Q(t)$ son, respectivamente, las funciones de entrada (precipitación neta) y respuesta (escorrentía directa), y $U(t)$ es el HUI. El HUI puede ser visto como una respuesta a una excitación impulsiva, o como una función núcleo (*kernel*), de un sistema agregado, invariante y lineal. Cuando el HUI es conocido, el hidrograma unitario de duración específica puede obtenerse mediante

$$U(T, t) = \frac{1}{T} \int_{t-T}^t U(w)dw, \quad (2)$$

en donde $U(T, t)$ es el hidrograma unitario de T horas de duración y $U(t)$ es el HUI. En la ecuación (2) se supone que $t-T=0$ cuando $t < T$. La forma directa de la ecuación (1) puede escribirse en la forma

$$Q(t) = \sum_{i=1}^N U(T, i)P(t-i+1), \quad (3)$$

en donde N representa la memoria del sistema.

Desde la introducción del concepto de hidrograma unitario (Sherman, 1932), una gran cantidad de técnicas de estimación del mismo han sido presentadas en la literatura. Estas técnicas pueden ser clasificadas en dos grupos (Eagelson et al., 1966): *verdaderamente lineales* y *lineales óptimas*. Las técnicas verdaderamente lineales estiman el hidrograma unitario suponiendo que la ecuación (1) o la ecuación (3) son las únicas ecuaciones que caracterizan el sistema. Técnicas como la solución directa de la integral de convolución (Blank et al., 1971); el uso de funciones ortogonales (O'Donnell, 1960; Diskin, 1967; Dooge, 1973; Papazafiriou, 1975); el uso de transformaciones (Levi y Valdés, 1964; Delleur y

Rao, 1971; Bank et al., 1971); y mínimos cuadrados en forma matricial (Snyder, 1955; Newton y Vinyard, 1967; Dooge, 1973; Singh, 1976) forman parte de este grupo. Las técnicas lineales óptimas estiman el hidrograma unitario dándole una solución aproximada a la ecuación (3) mediante el uso de un procedimiento computacional que define el hidrograma unitario óptimo en cierto sentido (mínimos cuadrados o mínimas desviaciones absolutas). El uso de series de tiempo (Eagelson et al., 1966), el uso de modelos conceptuales (Nash, 1958; Dooge, 1959; Nash, 1960), el uso de programación lineal (Eagelson et al., 1966; Deiniger, 1969; Mays y Coles, 1980) el uso de procedimientos de búsqueda (Diskin y Boneh, 1975; Singh, 1977; Amisial et al., 1981) forman parte de este grupo.

La diferencia básica entre los dos grupos es que en general las técnicas verdaderamente lineales estiman un hidrograma unitario para cada evento de precipitación-escorrentía. Estas técnicas tienen que recurrir a procedimientos de promediación para definir un hidrograma unitario único para la cuenca. Las técnicas lineales óptimas pueden estimar un hidrograma unitario único para todos los eventos de precipitación-escorrentía, evitando de esta forma tener que estimar un hidrograma unitario promedio. Otra ventaja de estas técnicas es que, en general, todas ellas garantizan la estimación de hidrogramas unitarios físicamente posibles (sin ordenadas negativas), mientras que las técnicas verdaderamente lineales no pueden garantizar esto.

Se presenta ahora una descripción de las técnicas de estimación del hidrograma unitario usando funciones ortogonales.

2. Métodos de las funciones ortogonales

Las funciones ortogonales estiman el hidrograma unitario usando las características básicas de estas funciones para invertir bien sea la ecuación convolutiva (1) y definir el HUI, o la forma discreta de la ecuación (3) para obtener del HU de cierta duración. En la literatura se han sugerido dos métodos diferentes de estimación del hidrograma unitario usando funciones ortogonales (Dooge, 1973; Papazafiriou, 1975; Smith y Amisial, 1982). El primero de ellos expresa la escorrentía directa, la precipitación efectiva y el HUI como expansiones en funciones ortogonales. Los coeficientes de estas expansiones para la escorrentía directa y la precipitación efectiva pueden ser estimados ya que son variables conocidas. Introduciendo las tres expansiones en la ecuación convolutiva (1) pueden obtenerse los coeficientes de la expansión del HU en función de los coeficientes de las expansiones de la escorrentía directa y de la precipitación efectiva. Una vez estimados los coeficientes de la expansión del hidrograma unitario, éste se puede calcular usando la ecuación que corresponde a dicha expansión. Las funciones ortogonales de armónicos (O'Donnell, 1960), de Laguerre (Dooge, 1973; Dooge, 1977) y de polinomios de Meixner (Dooge, 1973) han sido utilizados en la estimación del HUI.

La segunda de las formas de estimación del hidrograma unitario, usando funciones ortogonales, ex-

presa este hidrograma como una expansión en funciones ortogonales. Esta expansión del hidrograma unitario es entonces reemplazada en la forma discreta de la ecuación convolutiva representada por la ecuación (3), resultando una ecuación del tipo de regresión múltiple que expresa la escorrentía directa como una función de la precipitación efectiva, de las funciones ortogonales y de los coeficientes de la expansión del hidrograma unitario. La estimación de los coeficientes de regresión múltiple es equivalente a la estimación de los coeficientes de la expansión del hidrograma unitario. Una vez estimados estos coeficientes, el hidrograma unitario puede definirse mediante la ecuación respectiva de la expansión de este hidrograma. Funciones ortogonales de armónicos (Papazafiriou, 1957), de Chevyshev (Papazafiriou, 1975), de peso unitario (Papazafiriou, 1975), de Laguerre, de polinomios de Meixner, y funciones ortogonalizadas han sido utilizados en la estimación del hidrograma unitario mediante esta metodología.

3. Método de relación de coeficientes

La excitación del sistema $P(t)$ (precipitación efectiva), la respuesta del mismo $Q(t)$ (escorrentía directa) y la función de transformación (el HUI) pueden expresarse como expansiones en funciones ortogonales en la forma

$$P(t) = \sum_{m=0}^{\infty} a_{p,m} f_m(t), \quad (4)$$

$$Q(t) = \sum_{m=0}^{\infty} a_{q,m} f_m(t), \quad (5)$$

$$U(t) = \sum_{m=0}^{\infty} a_{u,m} f_m(t), \quad (6)$$

en donde $a_{p,m}$, $a_{q,m}$ y $a_{u,m}$ son los coeficientes de la expansión de la precipitación efectiva, de la escorrentía directa y del HUI , respectivamente, y $f_m(t)$ es el sistema ortogonal usado. Los coeficientes $a_{p,m}$ y $a_{q,m}$ pueden ser estimados ya que $P(t)$ y $Q(t)$ son funciones conocidas.

Reemplazando las expansiones anteriores en la ecuación convolutiva (1), se obtiene que

$$Q(t) = \int_0^t \left(\sum_{m=0}^{\infty} a_{p,m} f_m(w) \right) \left(\sum_{m=0}^{\infty} a_{u,m} f_m(t-w) \right) dw.$$

Haciendo uso de las propiedades de las funciones ortogonales esta ecuación puede reescribirse como

$$Q(t) = \sum_{m=0}^{\infty} a_{p,m} a_{u,m} \int_0^{\infty} f_m(w) f_m(t-w) dw,$$

reemplazando ahora $Q(t)$ por la expansión (5) e igualando término a término las sumatorias de ambos lados de la ecuación resultante, se llega a que

$$a_{q,m} f_m(t) = a_{p,m} a_{u,m} \int_0^{\infty} f_m(w) f_m(t-w) dw,$$

lo cual permite concluir que

$$a_{u,m} = \frac{a_{q,m} f_m(t)}{a_{p,m} \int_0^{\infty} f_m(w) f_m(t-w) dw}, \quad (7)$$

ecuación que permite estimar los coeficientes de la expansión del HUI en función de los coeficientes de las expansiones de la precipitación efectiva y de la escorrentía directa (conocidos) y del sistema ortogonal usado $f_m(t)$. Una vez estimados los coeficientes $a_{u,m}$, el HUI puede definirse usando la ecuación (6).

Las funciones ortogonales usadas dentro de esta metodología para la estimación del HUI han sido las funciones de armónicos de Fourier (O'Donnell, 1960), los polinomios de Laguerre (Dooge, 1973) y los polinomios de Meixner (Dooge, 1973).

4. Método de regresión múltiple

La expansión del hidrograma unitario de T horas de duración en funciones ortogonales puede escribirse en la forma

$$U(T, t) = \sum_{m=0}^M a_{u,m} f_m(t), \quad (8)$$

donde M es el orden de la expansión. Reemplazando esta expresión del hidrograma unitario en la ecuación (3) se puede escribir

$$Q(t) = \sum_{m=0}^M a_{u,m} \sum_{n=1}^N f_m(n) P(t-n), \quad (9)$$

y definiendo la función

$$F_m(t) = \sum_{n=1}^N f_m(n) P(t-n), \quad (10)$$

permite reescribir la ecuación (9) en la forma

$$Q(t) = \sum_{m=0}^M a_{u,m} F_m(t), \quad (11)$$

que expresa la escorrentía directa en función de los coeficientes de la expansión del hidrograma unitario y de las funciones $F_m(t)$.

Si el número de ordenadas de la escorrentía directa y de la precipitación efectiva es el mismo, la ecuación (11) representa un sistema con igual número de ecuaciones y de incógnitas. En general, el número de ordenadas de la precipitación efectiva es mucho menor que el de la escorrentía directa, y la ecuación (11) representa un sistema indeterminado de ecuaciones. El método empleado para estimar las incógnitas (los coeficientes de la expansión del hidrograma unitario) de este sistema indeterminado es el de regresión múltiple (Papazafiriou, 1975). Este método no sólo permite estimar los coeficientes sino también determinar el orden de la expansión, bien sea por algún procedimiento del tipo *stepwise* (Papazafiriou, 1975), o por escogencia del orden de una regresión polinómica (Smith y Amisial, 1982). Además

de las expansiones del hidrograma unitario en funciones de armónicos, en polinomios de Laguerre, y en polinomios de Meixner, presentados en la sección anterior, el uso de funciones Chebyshev y de peso unitario también ha sido sugerido (Papazafiriou, 1975).

5. Uso de funciones no ortogonales

Existen funciones en hidrología que no son ortogonales pero que tienen un mejor sentido físico para representar el hidrograma unitario que otras funciones ortogonales tradicionalmente utilizadas (armónicos, pesos unitarios, Chebyshev, etc.). Las funciones del tipo de las funciones gamma o Lognormal representan de una manera más adecuada la respuesta de cada monótona, típica de las cuencas naturales.

Dooge (1973) sugirió definir las relaciones de los coeficientes de las expansiones en términos de las funciones gamma en lugar de términos de los coeficientes de los polinomios de Laguerre. La excitación (precipitación efectiva), el hidrograma unitario instantáneo y la respuesta (escorrentía directa), pueden escribirse como expansiones de funciones gamma en la forma

$$P(t) = \sum_{m=0}^{\infty} d_m \frac{e^{-t/2} \left(\frac{t}{2}\right)^m}{2m!}, \quad (12)$$

$$Q(t) = \sum_{m=0}^{\infty} D_m \frac{e^{-t/2} \left(\frac{t}{2}\right)^m}{2m!}, \quad (13)$$

$$U(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \delta_m \frac{e^{-t/2} \left(\frac{t}{2}\right)^m}{2m!}. \quad (14)$$

Debido a que las funciones gamma no son ortogonales, no es posible obtener los valores de los coeficientes d_i y D_i directamente, sino a través de los correspondientes coeficientes a_r y A_r de los polinomios de Laguerre, como

$$d_m = (-2)^{m+1} \sum_{r=m}^{\infty} \binom{r}{m} a_r \quad (15)$$

y

$$D_m = (-2)^{m+1} \sum_{r=m}^{\infty} \binom{r}{m} A_r. \quad (16)$$

mediante la integral de convolución podemos escribir

$$\begin{aligned} \sum_{p=0}^{\infty} D_p \frac{e^{-t/2} \left(\frac{t}{2}\right)^p}{p!} &= \\ &= \left(\sum_{m=0}^{\infty} d_m \frac{e^{-t/2} \left(\frac{t}{2}\right)^m}{m!} \right) * \left(\sum_{n=0}^{\infty} \delta_n \frac{e^{-t/2} \left(\frac{t}{2}\right)^n}{n!} \right), \end{aligned}$$

y comparando ambos miembros de la ecuación anterior, se obtiene

$$D_m = 2 \sum_{k=0}^{m-1} d_k \delta_{m-k-1}. \quad (17)$$

Expresando los valores del coeficiente desconocido δ_m en función de los coeficientes D_m y d_m se puede escribir que,

$$d_0 \delta_m = D_{m+1} - \sum_{k=1}^m d_k \delta_{m-k} \quad (18)$$

y si $d_0 = 0$, que

$$d_1 \delta_{m-1} = D_{m+1} - \sum_{k=2}^m d_k \delta_{m-k}, \quad (19)$$

ecuaciones que permiten calcular inductivamente los coeficientes de la expansión en términos de funciones gamma del hidrograma unitario.

El éxito de esta propuesta de Dooge fue limitado ya que la función gamma propuesta no es ortogonal.

Una propuesta alternativa es la de usar las funciones no ortogonales propuestas, pero ortogonalizarlas previamente. Esto permitiría usar estas funciones en cualquiera de los procedimientos anteriores para estimación del hidrograma unitario mediante funciones ortogonales.

Para aplicar este procedimiento se pueden ortogonalizar funciones de mayor significado físico como

$$\text{-gamma} \quad F_m(j) = \frac{e^{-m/2} \left(\frac{m}{2}\right)^j}{2(j)!}. \quad (20)$$

$$\text{-Lognormal} \quad F_m(j) = \frac{1}{jm\sqrt{2\pi}} e^{-[\ln(m)/\sqrt{2}j]^2}. \quad (21)$$

Para ortogonalizar estas funciones se puede utilizar el procedimiento de ortogonalización de E. Schmidt. Este procedimiento permite además ortonormalizar funciones que son ya ortogonales expresándolas en forma matricial. Una vez se hayan ortonormalizado estas funciones, se pueden usar para definir la expansión del hidrograma unitario. Los coeficientes de dicha expansión son entonces calculados mediante procedimientos conocidos. Una vez estimados los coeficientes del hidrograma unitario mediante la ecuación (11) y el uso de regresión múltiple, el hidrograma unitario puede ser estimado usando su respectiva expansión en términos de funciones ortogonales.

6. Hidrograma unitario único

Los métodos de funciones ortogonales propuestos estiman un hidrograma unitario para cada tormenta. Para definir un hidrograma unitario único para la cuenca se deben usar procedimientos de promediación similares a los sugeridos para el método de los volúmenes.

Sin embargo, el método de regresión múltiple de las funciones ortogonales sugiere una metodología que permite estimar un hidrograma unitario único para la cuenca, usando todas las tormentas al mismo tiempo. Este procedimiento eliminaría el inconveniente de definir el hidrograma unitario por promediación.

Se define inicialmente:

- (1) I : Número de tormentas.
- (2) N_i : Número de ordenadas de la escorrentía directa para la tormenta i .
- (3) L_i : Número de ordenadas de la precipitación efectiva para la tormenta i .
- (4) M : Número de ordenadas del hidrograma unitario único de la cuenca.

En general, se debe calcular inicialmente el valor de M_i para cada tormenta como:

$$M_i = N_i - L_i + 1, \quad (22)$$

y luego escoger M como el mayor de esos valores:

$$M = \text{Máx} \{M_1, M_2, M_3, \dots, M_I\}. \quad (23)$$

En aquellas tormentas donde $M_i < M$ se aumenta el número de ordenadas de escorrentía directa (N_i) con ceros hasta que se cumpla para todas las tormentas que

$$M = N_i - L_i + 1. \quad (24)$$

Se definen también

- (1) $Q(i, n)$: la ordenada n de la escorrentía directa de la tormenta i .
- (2) $P(i, l)$: la ordenada l de la precipitación efectiva de la tormenta i .
- (3) $U(m)$: la ordenada m del hidrograma unitario único para la cuenca.

usando la ecuación (3) se puede escribir para cada tormenta i que

$$Q(i, t) = \sum_{m=0}^M U(m)P(i, t-m), \quad (25)$$

y la expansión del hidrograma unitario se puede escribir usando la ecuación (8) como

$$U(t) = \sum_{j=0}^k a_{n,j} f_j(t), \quad (26)$$

donde k es el orden de la expansión. Reemplazando la ecuación (26) en la (25) da como resultado

$$Q(i, t) = \sum_{m=0}^M P(i, t-m) \sum_{j=0}^k a_{n,j} f_j(m),$$

o sea,

$$Q(i, t) = \sum_{j=0}^k a_{n,j} \sum_{m=0}^k f_j(m)P(i, t-m) \quad (27)$$

y definiendo la función

$$F_j(i, t) = \sum_{m=0}^k f_j(m)P(i, t-m), \quad (28)$$

se puede escribir

$$Q(i, t) = \sum_{j=0}^k a_{n,j} F_j(i, t). \quad (29)$$

La función $F_j(i, t)$ es una función de valores conocidos, pues sólo depende de la precipitación efectiva y de las funciones ortogonales usadas.

La escorrentía directa definida por la ecuación (29) representa la escorrentía directa calculada o estimada usando el hidrograma unitario y la precipitación efectiva. Si se define $Q_o(i, t)$ como la ordenada t de la escorrentía directa observada para la tormenta i , los coeficientes de la expansión ortogonal del hidrograma unitario pueden calcularse mediante la expresión de mínimos cuadrados

$$\text{Mín} \left[\sum_{i=1}^I \sum_{t=1}^{N_i} \left(Q_o(i, t) - \sum_{j=0}^k a_{n,j} F_j(i, t) \right)^2 \right]. \quad (30)$$

Esta expresión puede ser resuelta para $a_{n,j}$ usando métodos de búsqueda como los de Hooke y Jeeves, Powell, o cualquier otro método conocido. Este procedimiento permitiría definir el único hidrograma unitario instantáneo para la cuenca usando todas las tormentas al mismo tiempo. En este caso no habría necesidad de promediar hidrogramas unitarios.

7. Aplicación y resultados

Los procedimientos descritos de estimación del hidrograma unitario usando funciones ortogonales discretos fueron utilizados para estimar el hidrograma unitario de cuatro horas de duración del río Potomac cerca de Cumberland, Maryland, Estados Unidos, usando cuatro tormentas (Singh K.P., 1976), y el hidrograma unitario del río Cache en Forman, Illinois, Estados Unidos, usando ocho tormentas (Diskin y Boneh, 1975). El área del río Potomac cerca a Cumberland es de 2.266 km^2 y la del río Cache, en Forman, de 630 km^2 . Todas las tormentas utilizadas están dadas como eventos de precipitación efectiva-escorrentía directa.

Los hidrogramas unitarios estimados usando las diferentes metodologías propuestas fueron utilizados para calcular el hidrograma de escorrentía directa para cada evento usando la precipitación efectiva correspondiente. Los resultados obtenidos con cada método, para cada tormenta en cada cuenca, fueron comparados usando diversos índices que miden la bondad del ajuste del hidrograma de escorrentía directa calculado. Entre estos índices se incluyen las características más importantes del hidrograma (caudal pico, tiempo al pico, volumen y algunos índices estadísticos), medidas del error de predicción (en porcentaje) y medidas de comportamiento

Tabla 1. Resultados para la Tormenta 4, Ríos Potomane a Cumberland

INDICE	OBSERVADO	RESULTADOS ORIGINALES	METODO REGRESION LINEAL MULTIPLE					
			ARMONICOS	LAGUERRE	MEIXNER	CHEBYSH EV	PESO UNITARIO	GAMMA ORTOGONALIZADA
CAUDAL PICO	0.089	0.092	0.091	0.091	0.092	0.092	0.095	0.094
TIEMPO AL PICO	40.000	44.000	44.000	44.000	44.00	44.000	44.000	44.000
VOLUMEN	3.400	3.390	3.350	3.400	0	3.380	3.470	3.590
MEDIA	0.031	0.031	0.031	0.032	3.380	0.031	0.032	0.032
DESVIACION TIPICA	0.033	0.032	0.032	0.032	0.031	0.033	0.034	0.033
COEFICIENTE DE VARIACION	1.000	1.000	1.000	1.000	0.032	1.000	1.000	1.000
ERROR DE PREDICION DEL PICO		-3.70	-2.60	-2.20	1.000	-3.80	-6.90	-5.50
ERROR DE PREDICION DEL VOLUMEN		0.200	1.500	-0.10	-3.00	0.700	-2.10	-2.10
COEFICIENTE DE CORRELACION		0.988	0.988	0.988	0.600	0.985	0.989	0.990
COEFICIENTE DE EFICIENCIA		0.976	0.976	0.976	0.988	0.970	0.977	0.980
COEFICIENTE DE CORRELACION ESPECIAL		0.994	0.994	0.994	0.976	0.992	0.994	0.995
COEFICIENTE DE LA CURVA DE MASA RESIDUAL		0.985	0.982	0.985	0.994	0.971	0.982	0.989

INDICE	METODO RELACION DE COEFICIENTES			METODO REGRESION LINEAL MULTIPLE				
	ARMONICOS	LAGUERR E	MEIXNER	ARMONICOS	LAGUERRE	MEIXNER	PESO UNITARIO	GAMMA ORTOGONALIZADA
CAUDAL PICO	0.087	0.100	0.095	0.091	0.095	0.089	0.091	0.090
TIEMPO AL PICO	40.000	44.000	48.000	44.000	44.000	48.00	48.000	48.000
VOLUMEN	3.220	3.360	3.500	3.360	3.430	0	3.410	3.430
MEDIA	0.031	0.031	0.032	0.031	0.032	3.370	0.032	0.026
DESVIACION TIPICA	0.030	0.036	0.033	0.033	0.032	0.032	0.033	0.029
COEFICIENTE DE VARIACION	1.000	1.100	1.000	1.000	1.000	0.033	1.000	1.100
ERROR DE PREDICION DEL PICO	2.500	-14.0	-6.90	-2.70	-6.30	1.000	-1.80	-0.10
ERROR DE PREDICION DEL VOLUMEN	5.400	1.300	-2.80	1.200	-0.80	-1.80	-0.40	0.880
COEFICIENTE DE CORRELACION	0.965	0.943	0.990	0.992	0.991	-0.40	0.991	0.972
COEFICIENTE DE EFICIENCIA	0.928	0.866	0.972	0.983	0.981	0.991	0.983	0.909
COEFICIENTE DE CORRELACION ESPECIAL	0.981	0.965	0.995	0.996	0.995	0.983	0.996	0.976
COEFICIENTE DE LA CURVA DE MASA RESIDUAL	0.924	0.786	0.996	0.994	0.998	0.996	0.996	0.946

(coeficientes de correlación, de eficiencia y residuales). Una descripción de estos índices puede encontrarse en Aitken (1973) y en Sarma et al. (1973).

Para el análisis comparativo de las metodologías presentadas se elaboraron tablas con los índices mencionados y figuras con los hidrogramas de escorrentía directa observados y calculados para cada tormenta. A manera de ejemplo de los resultados obtenidos, en la Tabla 1 y en la Figura 1 se presentan algunos de los resultados

para una de las tormentas del río Potomac, y, en la Tabla 2 y Figura 2, algunos de los resultados para una de las tormentas del río Cache. A partir de los resultados obtenidos se pueden hacer los siguientes comentarios:

- La segunda columna de las tablas muestra los resultados obtenidos usando los hidrogramas unitarios obtenidos por los autores de cuyos trabajos se tomaron las tormentas utilizadas en el presente trabajo (Singh K.P., 1976; Diskin y Boneh, 1975).

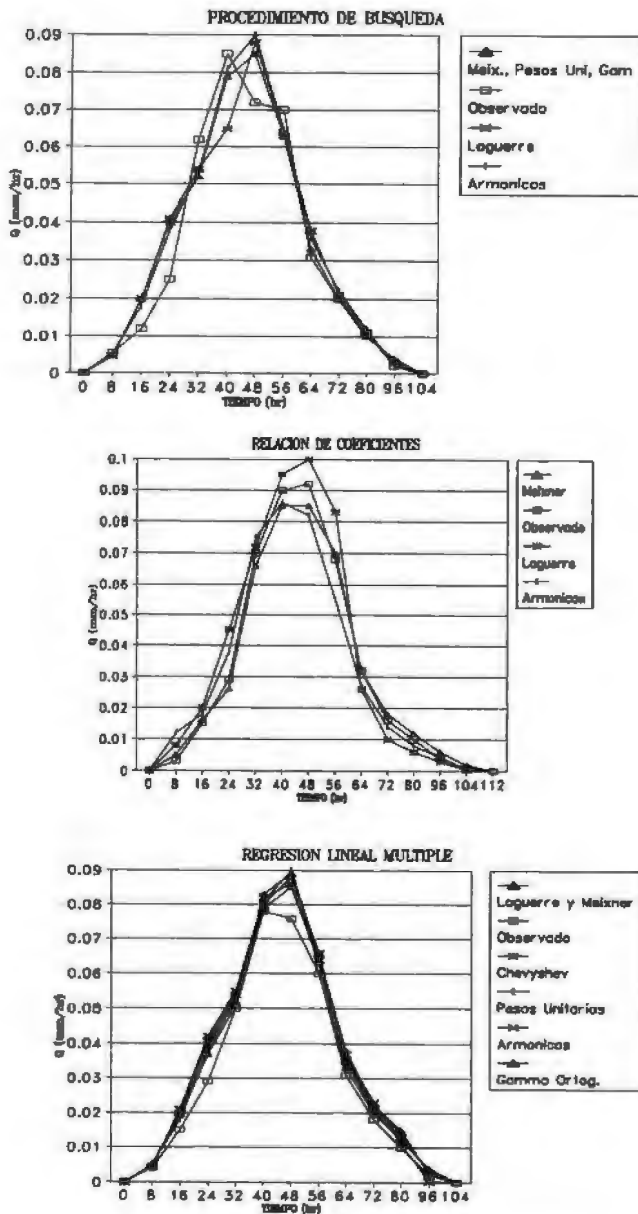


Figura 1. Hidrogramas observados y calculados, tormenta 4 río Potomac, cerca a Cumberland.

- Los peores resultados fueron obtenidos usando el método de la relación de coeficientes. No fue siempre posible obtener resultados razonables con esta metodología cuando se usaron los polinomios de Meixner.

- Los resultados obtenidos con el método de regresión lineal múltiple fueron muy buenos en la mayoría de los casos. El uso de hidrogramas unitarios promedios en este caso arrojó resultados satisfactorios. El uso de los polinomios ortogonales de Chebyshev produjo los peores resultados con esta metodología.

- El uso de funciones gamma ortogonalizadas conjuntamente con el procedimiento de regresión lineal múltiple produjo resultados comparables a los obtenidos mediante el uso de otras funciones ortogonales.

- En el caso del método de regresión lineal múltiple los picos más altos se obtuvieron usando funciones de peso unitario y funciones gamma ortogonalizadas. Las funciones de Laguerre dieron, en la mayoría de los casos, los menores errores de predicción del caudal pico.

Los caudales picos más bajos se obtuvieron con los polinomios de Chebyshev. Usando esta metodología se obtuvieron resultados comparables usando funciones de armónicos, Laguerre, Meixner, pesos unitarios y gamma ortogonalizadas.

- Los mejores resultados se obtuvieron usando el procedimiento de búsqueda para estimar directamente el único hidrograma unitario de la cuenca usando todas las tormentas al mismo tiempo. Estos resultados son comparables a los obtenidos usando los hidrogramas unitarios derivados por los autores de los trabajos donde se tomaron los datos utilizados en el presente trabajo (Singh K.P., 1976; Diskin y Boneh, 1975).

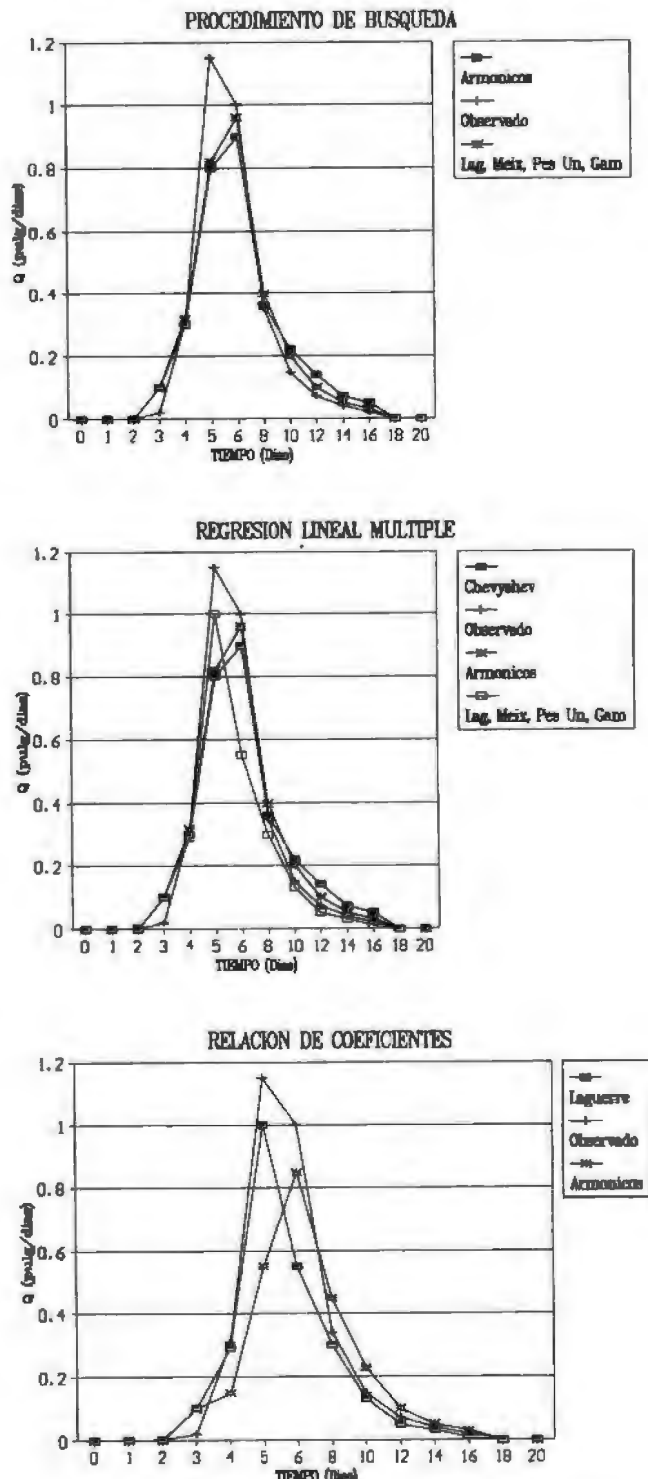


Figura 2. Hidrogramas observados y calculados, tormenta 2, río Cache en Forman.

Tabla 1. Resultados para la Tormenta 4, Rio Potomac en Cumberland

INDICE	OBSERVADO	RESULTADOS ORIGINALES	METODO REGRESION LINEAL MULTIPLE					
			ARMONICOS	LAGUERRE	MEIXNER	CHEBYSHEV	PESO UNITARIO	GAMMA ORTOGONALIZADA
CAUDAL PICO	0.089	0.092	0.091	0.091	0.092	0.092	0.095	0.094
TIEMPO AL PICO	40.000	44.000	44.000	44.000	44.000	44.000	44.000	44.000
VOLUMEN	3.400	3.390	3.350	3.400	3.380	3.380	3.470	3.590
MEDIA	0.031	0.031	0.031	0.032	0.031	0.031	0.032	0.032
DESVIACION TIPICA	0.033	0.032	0.032	0.032	0.032	0.033	0.034	0.033
COEFICIENTE DE VARIACION	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
ERROR DE PREDICION DEL PICO		-3.70	-2.60	-2.20	-3.00	-3.80	-6.90	-5.50
ERROR DE PREDICION DEL VOLUMEN		0.200	1.500	-0.10	0.600	0.700	-2.10	-2.10
COEFICIENTE DE CORRELACION		0.988	0.988	0.988	0.988	0.985	0.989	0.990
COEFICIENTE DE EFICIENCIA		0.976	0.976	0.976	0.976	0.970	0.977	0.980
COEFICIENTE DE CORRELACION ESPECIAL		0.994	0.994	0.994	0.994	0.992	0.994	0.995
COEFICIENTE DE LA CURVA DE MASA RESIDUAL		0.985	0.982	0.985	0.985	0.971	0.982	0.989

INDICE	METODO RELACION DE COEFICIENTES			METODO REGRESION LINEAL MULTIPLE				
	ARMONICOS	LAGUERRE	MEIXNER	ARMONICOS	LAGUERRE	MEIXNER	PESO UNITARIO	GAMMA ORTOGONALIZADA
CAUDAL PICO	0.087	0.100	0.095	0.091	0.095	0.089	0.091	0.090
TIEMPO AL PICO	40.000	44.000	48.000	44.000	44.000	48.000	48.000	48.000
VOLUMEN	3.220	3.360	3.500	3.360	3.370	3.370	3.410	3.430
MEDIA	0.031	0.031	0.032	0.031	0.032	0.032	0.032	0.026
DESVIACION TIPICA	0.030	0.036	0.033	0.033	0.032	0.033	0.033	0.029
COEFICIENTE DE VARIACION	1.000	1.100	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.100
ERROR DE PREDICION DEL PICO	2.500	-14.0	-6.90	-2.70	-6.30	-1.80	-1.80	-0.10
ERROR DE PREDICION DEL VOLUMEN	5.400	1.300	-2.80	1.200	-0.80	-0.40	-0.40	0.880
COEFICIENTE DE CORRELACION	0.965	0.943	0.990	0.992	0.991	0.991	0.991	0.972
COEFICIENTE DE EFICIENCIA	0.928	0.866	0.972	0.983	0.981	0.983	0.983	0.909
COEFICIENTE DE CORRELACION ESPECIAL	0.981	0.965	0.995	0.996	0.996	0.996	0.996	0.976
COEFICIENTE DE LA CURVA DE MASA RESIDUAL	0.924	0.786	0.996	0.994	0.998	0.996	0.996	0.946

Tabla 2. Resultados para la Tormenta 2, Cache River en Forman.

INDICE	OBSERVADO	RESULTADOS ORIGINALES	METODO REGRESION LINEAL MULTIPLE					
			ARMONICOS	LAGUERRE	MEIXNER	CHEBYSHEV	PESO UNITARIO	GAMMA ORTOGONALIZADA
CAUDAL PICO	1.180	1.000	0.920	0.960	0.950	0.880	0.940	0.950
TIEMPO AL PICO	5.000	6.000	6.000	6.000	6.000	6.000	6.000	6.000
VOLUMEN	4.040	4.040	4.040	4.050	4.060	4.010	4.040	4.020
MEDIA	0.240	0.240	0.240	0.240	0.240	0.240	0.240	0.240
DESVIACION TIPICA	0.370	0.330	0.310	0.310	0.310	0.310	0.310	0.310
COEFICIENTE DE VARIACION	1.500	1.300	1.300	1.300	1.300	1.300	1.300	1.300
ERROR DE PREDICION DEL PICO		14.000	22.000	18.000	20.000	26.000	20.000	19.000
ERROR DE PREDICION DEL VOLUMEN		0.000	0.000	-0.21	-0.46	0.830	0.020	0.550
COEFICIENTE DE CORRELACION		0.989	0.979	0.976	0.978	0.965	0.980	0.977
COEFICIENTE DE EFICIENCIA		0.971	0.942	0.937	0.929	0.916	0.943	0.939
COEFICIENTE DE CORRELACION ESPECIAL		0.990	0.980	0.978	0.979	0.970	0.980	0.979
COEFICIENTE DE LA CURVA DE MASA RESIDUAL		0.995	0.983	0.982	0.981	0.980	0.982	0.984

INDICE	METODO RELACION DE COEFICIENTES			METODO REGRESION LINEAL MULTIPLE				
	ARMONICOS	LAGUERRE	MEIXNER	ARMONICOS	LAGUERRE	MEIXNER	PESO UNITARIO	GAMMA ORTOGONALIZADA
CAUDAL PICO	0.850	1.000	---	0.970	1.000	1.000	1.000	1.000
TIEMPO AL PICO	6.000	5.000	---	6.000	5.000	5.000	5.000	6.000
VOLUMEN	3.600	3.110	---	4.310	4.210	4.150	4.130	4.260
MEDIA	0.210	0.180	---	0.250	0.240	0.240	0.240	0.250
DESVIACION TIPICA	0.270	0.280	---	0.320	0.340	0.340	0.340	0.340
COEFICIENTE DE VARIACION	1.200	1.500	---	1.200	1.300	1.400	1.400	1.300
ERROR DE PREDICION DEL PICO	28.000	12.000	---	18.000	15.000	13.000	13.000	13.000
ERROR DE PREDICION DEL VOLUMEN	11.000	23.000	---	-6.80	-4.20	-2.60	-2.20	-5.40
COEFICIENTE DE CORRELACION	0.877	0.979	---	0.984	0.992	0.993	0.993	0.992
COEFICIENTE DE EFICIENCIA	0.745	0.894	---	0.953	0.977	0.983	0.983	0.980
COEFICIENTE DE CORRELACION ESPECIAL	0.908	0.963	---	0.984	0.992	0.994	0.994	0.993
COEFICIENTE DE LA CURVA DE MASA RESIDUAL	0.789	0.930	---	0.989	0.995	0.996	0.995	0.995

- El uso de la función gamma ortogonalizada conjuntamente con el procedimiento de búsqueda produjo resultados satisfactorios, pero no tanto como se esperaba. Esta función produjo los picos más altos para esta metodología. Los menores errores de predicción del caudal pico con el método de búsqueda se obtuvieron usando las funciones de pesos unitarios y los polinomios de Meixner.

8. Conclusiones y recomendaciones

Con base en la metodología desarrollada y los resultados obtenidos se puede llegar a las siguientes conclusiones y recomendaciones:

- El método de regresión lineal múltiple arrojó siempre mejores resultados que el método de la relación de coeficientes. En el caso de la estimación del hidrograma unitario usando funciones ortogonales se debe usar siempre el método de regresión múltiple.

- El procedimiento de los métodos de búsqueda para estimar el hidrograma unitario con funciones ortogonales permite estimar directamente el único hidrograma unitario de la cuenca usando todas las tormentas al mismo tiempo. Las otras metodologías estiman un hidrograma unitario por tormenta y luego promedian estos hidrogramas para definir el único hidrograma unitario de la cuenca.

- En cuanto al uso de una función gamma ortogonalizada para estimar el hidrograma unitario, y a pesar de que esta función tiene más significado físico que las otras funciones ortogonales, los resultados obtenidos son comparables con los que se deducen mediante otras funciones ortogonales.

- Los mejores resultados se obtuvieron usando la metodología de búsqueda propuesta en este trabajo. En este caso varias funciones ortogonales (armónicos, Laguerre, polinomios de Meixner, pesos unitarios, y gamma ortogonalizada) producen prácticamente los mismos resultados.

- Se recomienda, entonces como metodología para estimar el hidrograma unitario mediante funciones ortogonales, el método de búsqueda que usa todas las tormentas al mismo tiempo para estimar directamente el único hidrograma unitario de la cuenca. En este caso se pueden usar indistintamente las funciones ortogonales de armónicos, Laguerre, Meixner, pesos unitarios o gamma ortogonalizada, pues todas producen resultados comparables.

Referencias

- Aitken A.P., *Assessing systematic errors in rainfall-runoff models*, Journal of Hidrology 20 (1973), 121-136.
- Amisial R.A., Smith R.A., Bandes T.A. y Castro M., *Incidencia de los métodos de generalización y regionalización sobre la selección de las medidas de control de inundaciones. Informe de Avance al CONICIT*, Mérida, Venezuela, 1981.
- Blank D., Delleur J.W. y Giorgini A., *Oscillator and Kernel functions in linear hydrologic models*, Water Res. Res. 7(5) (1971), 1102-1117.
- Delleur J.W. y Rao R.A., *Linear system analysis in hidrology - The transform approach, the Kernel oscillations and the effect of noise*. In: *System Approach to Hydrology*, Yevjevich V. (Ed), Water Resources Publications, Fort Collins, Colorado.
- Diskin M.H. y Boneh A., *Determination of an optimal instantaneous unit hydrograph for linear time invariant systems for multi-storm records*, Journal of Hidrology 24 (1976), 57-76.
- Diskin M.H., *On the derivation of linkage equation for Laguerre function coefficient*, Journal of Hydrology 32 (1977), 321-327.
- Dooge J.C.I., *Problems and methods of rainfall runoff modelling*. In: *Mathematical models of surface Water Hidrology*, Ciriani T.A., Maione U. y Wallis J.R. (Ed.) (1977), John Wiley and Sons, New York.
- Hall M.J., *On the smoothing of oscillations in finite period unit hydrograph derived by the harmonic method*, Hydrol. Sciences Bulletin 22(2) (1977), 313-324.
- Levi E. y Valdes J., *A method for direct analysis of hydrographs*, Journal of Hydrology 2(2) (1964), 182-190.
- Mays L.W. y Coles L., *Optimization of Unit Hydrograph determination*, Jour. Hydr. Div. ASCE 106(HY2) (1980), 85-97.
- Nash J.E., *The form of the instantaneous unit hydrograph*, Inter. Assoc. Hydr. Science Publication 42 (1957), 114-118.
- Newton D.W. y Vinyard J.W., *Computer determined unit hydrograph from floods*, Jour. Hydr. Div., ASCE 93(HY5) (1967), 219-235.
- O'Donnell T., *Instantaneous unit hydrograph derivation by harmonic analysis*, Inter. Assoc. Hydr. Science Publication 51 (1960), 546-557.
- Papazafiriou Z.G., *Polynomial approximation of the Kernel of close linear hydrologic systems*, Journal of Hydrology 27 (1975), 319-329.
- Sarma P.B.S., Delleur J.W. y Rao A.R., *Comparison of rainfall runoff models for urban areas*, Journal of Hydrology 18 (1973), 329-347.
- Singh K.P., *Unit hydrograph, a comparative study*, Water Resources Bulletin 12(2) (1976), 381-392.
- Singh V.P., *Comparison of two mathematical models of surface runoff*, Hydrol. Sciences Bulletin 21(2) (1976), 285-299.
- Smith R.A. y Amisial R.A., *A comparative analysis of various rainfall runoff models. International Symposium on Hydrometeorology, June 13-17, Denver, Estados Unidos.*