VALORES DE JUEGOS DE MERCADO SIN PAGOS LATERALES

Guillermo Owen *

Departamento de Matemáticas
Universidad de los Andes

ABSTRACTO

En este artículo analizamos una situación de mercado desde el punto de vista del valor juego-teórico. La primera parte introduce el mercado básico y da condiciones para optimalidad, en el sentido de Pareto y equilibrios competitivos. La segunda parte desarrolla una función característica para representar esto en forma de juego. La tercera parte explica la teoría de extensiones multilineales y da la forma de esta extensión para el juego de mercado aquí tratado. La cuarta parte desarrolla las ecuaciones de valor para el juego y muestra, en particular, que jugadores equivalentes reciben trato equivalente para el valor. La quinta parte estudia el mercado replicado r veces, y muestra la relación entre los dos juegos (el original y el replicado). La sexta parte considera el caso de mercados "grandes" (es decir, $r \to \infty$), y da un sistema de ecuaciones diferenciales asintóticamente válido para el valor del juego. La séptima parte trata los equilibrios económicos en general y desarrolla un modelo cuya solución es efectivamente igual a aquella desarrollada en la sexta parte.

1. El Mercado Básico

Consideramos aquí una situación de juego de mercado, en la cual n jugadores (negociantes) empieza con una dote inicial en m bienes. Asumimos que éstos se pueden transferir entre los jugadores de manera a incrementar su utilidad. Además, las preferencias de cada jugador se pueden representar por una función de utilidad individual, que normalizamos a 0 para la dote inicial del jugador. Más exactamente, sea z^i $(z_1^i, \ldots, z_m^i)$ la dote inicial del jugador i. Entonces, para cualquier $x = (x_1, \ldots, x_m)$, definimos

$$u^i(x_1, \ldots, x_m)$$

como la utilidad del jugador i para el paquete de bienes $z^i + x = (z_1^i + x_1, \ldots, z_m^i + x_m)$. La normalización nos da entonces

$$(1) \qquad u^i(0,0,\ldots,0) = 0$$

para cada $i = 1, \ldots, n$. Asumimos que u^i es diferenciable, con $u_j^i = \dfrac{\partial u^i}{\partial x_j} > 0$ para cada $j = 1, \ldots, m$. Si, para cada $i = 1, \ldots, n$, x^i es un vector de m componentes, entonces

$$X = \langle x^1; x^2; \ldots; x^n \rangle$$

es una **alocación**. La alocación es **factible** si, para cada j,

$$(2) \qquad x_j^1 + x_j^2 + \ldots + x_j^n = 0$$

Una alocación factible, X, es **eficiente** si no existe ninguna alocación factible $Y = \langle y^1; \ldots; y^n \rangle$ tal que $u^i(y^i) \geq u^i(x^i)$ para cada i, con $u^i(y^i) > u^i(x^i)$ para por lo menos una i. Asumiendo diferenciabilidad, una condición necesaria para la eficiencia de X es la existencia de dos vectores, $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ y $(p_1, \ldots, p_m)$ tales que, para cada i, j:

$$(3) \qquad u_j^i(x^i) = \lambda_i P_j$$

Esta condición es suficiente para la eficiencia de X si las funciones u^i son cóncavas. Asumiremos, en general, que las funciones u^i son cóncavas.

Asumiendo las condiciones (3), el vector $p = (p_1, \ldots, p_m)$ es el vector de precios: representa precios (para los m bienes) tales que ninguno de los jugadores querrá cambiar de la alocación X si los bienes se compran y venden a estos precios. Las cantidades λ_i son multiplicadores de Lagrange que representan la utilidad marginal de cada jugador para una unidad de dinero.

Alternativamente, los multiplicadores λ_i representan la tasa de transferencia (local) de utilidad entre jugadores. Así pues, si el jugador i cede la pequeña cantidad $\epsilon\lambda_i$, entonces la utilidad del jugador k se puede incrementar en la pequeña cantidad $\epsilon\lambda_k$, sin variar las utilidades de los demás jugadores.

Se debe notar, naturalmente, que el dinero no está en realidad presente en esta economía; es posible multiplicar el vector λ por cualquier escalar, si se divide el vector p por el mismo escalar. Asumire-

* Trabajo presentado el día de su posesión como Miembro Correspondiente de la Academia.

mos, sin embargo, que este escalar sea positivo; así los precios y los multiplicadores siempre serán positivos. Así pues, el vector λ está determinado hasta multiplicación por un escalar positivo, y se puede, en general, normalizar de cualquier manera que deseemos, por ejemplo poniendo uno de los λ_i igual a 1, o poniendo la suma $\lambda_1 + ... + \lambda_m$ igual a 1.

Si la alocación eficiente X y el vector de precios o satisfacen, además, la condición

$$(4) \qquad P_1 x_1^i + P_2 x_2^i + ... X P_m x_m^i = 0$$

para cada i=1,..., n, entonces X es un equilibrio competitivo.

En esencia, un equilibrio competitivo (x*; p*) se puede explicar así: si, antes de empezar las negociaciones, se promulgan los precios p*, entonces las ofertas y demandas de los n jugadores serán precisamente las de X*, la cual, como es una alocación factible, no necesita ajustes. Si, en cambio, se promulgaran otros precios (es decir, precios que no corresponden al equilibrio), entonces habría un exceso de demanda para algunos bienes, y exceso de oferta para otros bienes, así que sería necesario ajustar los precios eventualmente.

Condiciones para la existencia y unicidad de los equilibrios competitivos se encuentran en la literatura ([8], [9]). En general, la existencia ocurre en muchos casos, pero la unicidad no es común. Varios sistemas dinámicos, algunos de los cuales convergen a un equilibrio (bajo ciertas condiciones), también se encuentran en la literatura ([1], [2]).

Los vectores $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_n)$, normalizados de alguna manera, forman un conjunto de dimensión n−1. Existe una correspondencia entre estos vectores y las alocaciones eficientes X. Esta correspondencia no es siempre una biyección, es decir que pueden corresponder varias X a un mismo λ, o varios vectores λ a una misma alocación. Asumiendo, sin embargo, que las funciones u^i son diferenciables, habrá un λ único para cada alocación eficiente. Si además, las u^i son estrictamente cóncavas, entonces habrá no más de una alocación para cada λ. Esto lo entendemos si consideramos que cada uno de los vectores x^i maximiza la función lagrangiana

$$(5) \qquad F = u^i(x_1^i, ..., x_m^i) - \lambda_i \sum_j p_j x_j^i$$

para los λ_i, p_j. También maximiza, por lo tanto,

$$(6) \qquad \lambda \frac{1}{i} F_i = \lambda \frac{1}{i} u^i(x^i) - \sum p_j x_j^i$$

y concluimos que los n vectores x^i juntos maximizan la suma

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{F_i}{\lambda_i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda_i} u^i(x^i) - \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} p_j x_j^i$$

$$= \sum_{j=i}^{n} \frac{u^i}{\lambda_i} - \sum_{j=1}^{m} p_j \sum_{i=1}^{n} x_j^i$$

Pero por la condición (2), esta última suma es igual a 0. Por lo tanto la alocación X=<x^1;...; x^n> maximiza la función

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda_i} u^i(x_1^i, ..., x_m^i)$$

sujeto a las restricciones

$$\sum_{i=1}^{n} x_j^i = 0 \qquad j = 1, ..., m.$$

Para funciones u^i estrictamente cóncavas, la alocación maximizante X es naturalmente única, si es que existe. Por lo tanto, podremos hablar de una correspondencia biyectiva entre los vectores λ normalizados y las alocaciones eficientes X.

Lema 1. Sean $\hat{\lambda}$, λ_* dos vectores tales que

$$\lambda_1^* > \hat{\lambda}_1$$
$$\lambda_i^* = \hat{\lambda}_i \qquad i = 2, ..., n$$

y sean $\hat{x}$, X* las alocaciones eficientes correspondientes. Entonces

$$u^1(\hat{x}^1) \geq u^1(x^{*1}).$$

Prueba: Sabemos que $\hat{x}$ maximiza $\sum \frac{1}{\hat{\lambda}_i} u^i$, mientras que X* maximiza $\sum \frac{1}{\lambda_i^*} u^i$.

Entonces

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\hat{\lambda}_i} u^i(\hat{x}^i) + \sum_{i=i}^{n} \frac{1}{\lambda_i^*} u^i(x^{*i}) \geq \sum \frac{1}{\lambda_i^*} u^i(\hat{x}^i) + \sum \frac{1}{\hat{\lambda}_i} u^i(x^{*i}).$$

Cancelando términos iguales, esto nos da la desigualdad

$$\left(\frac{1}{\hat{\lambda}_1} - \frac{1}{\lambda_1^*}\right) \left(u^1(\hat{x}^1) - u^1(x^{*1})\right) \geq 0.$$

El primer factor de este producto, por hipótesis, es positivo, por lo tanto el segundo factor es no negativo, o sea

$$u^1(\hat{x}^1 0 \geq u^1(x^{*1}).$$

Lema 2. Supóngase que los dos jugadores, 1 y 2, son intercambiables, en el sentido de que las dos funciones u^1 y u^2 son idénticas (esto querrá decir que tienen los mismos gustos y las mismas dotes iniciales). Sea λ un vector lagrangiano, y sea X la alocación correspondiente. Si $\lambda_1 > \lambda_2$, entonces

$$u^1(x^1) \leq u^1(x^2).$$

Prueba: De nuevo recordamos que X maximiza la suma $\sum \frac{1}{\lambda_i} u^i$. Por lo tanto

$$\frac{1}{\lambda_1} u^1(x^1) + \frac{1}{\lambda_2} u^1(x^2) + \sum_3^n \frac{1}{\lambda_1} u^i(x^i) \geqslant$$

$$\frac{1}{\lambda_1} u^1(x^2) + \frac{1}{\lambda_2} u^1(x^1) + \sum_3^n \frac{1}{\lambda_i} u^i(x^i)$$

lo que nos da

$$\left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2}\right)\left(u^1(x^1) - u^1(x^2)\right) \geqslant 0.$$

Aquí, el primer factor es negativo, por lo tanto el segundo factor debe ser no positivo, y

$$u^1(x^1) \leqslant u^1(x^2).$$

2. Desarrollo Juego-Teórico

Vamos ahora a tratar este mercado como un juego a n personas (sin pagos laterales). Para una coalición S (un subconjunto del conjunto N= 1,2,...,n de los jugadores), definimos V(S) como el conjunto de todos los puntos

$$y = (y_1, y_2, ..., y_n)$$

tales que existe una alocación X que satisfaga

$$\text{(7)} \qquad \sum_{i \in S} x_j^i = 0 \qquad j = 1, ..., m$$

$$\text{(8)} \qquad x_j^i = 0 \qquad \forall\, i \notin S$$

$$\text{(9)} \qquad u^i(x^i) \geqslant y_i \qquad i = 1, ..., n$$

Un punto y es óptimo en el sentido de Pareto (o.s.p.) en V(S) si no existe y' en V(S) tal que $y_i' \geqslant y_i$ para por lo menos un i. Los puntos o.s.p. y corresponden a las alocaciones eficientes, es decir, si y es o.s.p. en V(S), entonces

$$y_i = u^i(x^i)$$

donde X es una alocación eficiente para S (es decir, eficiente sujeto a las restricciones (7)-(8)). De nuevo la condición necesaria que será suficiente si las u^i son cóncavas— es que

$$\text{(10)} \qquad u_j^i(x^i) = \lambda_i p_j$$

para cada iϵS y cada j= 1, m (y, además que X satisfaga (7)-(8)).

Definida de esta manera, V es la función característica de un juego sin pagos laterales. No es difícil de ver que cualquier equilibrio competitivo corresponde a un punto del corazón, luego el juego, en el caso general de existencia de un equilibrio (en particular, si las funciones de utilidad son cóncavas), tendrá un corazón no vacío. Generalmente puede haber otros puntos en el corazón.

3. Extensiones Multilineales

Se han sugerido varios métodos para dar un valor a los juegos sin pagos laterales. El método que seguimos aquí es 1 de Owen [12], basado en la idea de una extensión multilineal [11].

Dado el juego a n personas con función característica V (cuyos valores son conjuntos), la extensión multilineal es una función F (cuyos valores también son conjuntos) definida para n-tuples (q_1, q_2,..., q_n) de variables reales, $0 \leqslant q_i \leqslant 1$. El conjunto F($q_1$, q_2, ..., q_n) consiste de todos los (y_1, ...,y_n) que puedan expresarse en la forma

$$\text{(11)} \qquad y = \sum_{S \subset N} P_S(q) y(S)$$

donde

$$\text{(12)} \qquad P_S(q) = \prod_{i \in S} q_i \prod_{i \notin S} (1-q_i)$$

y, para cada S, y (S) ϵ V(S).

Para el juego de mercado que estamos estudiando, el conjunto F(q_1,...q_n) consistirá de todos los vectores y que satisfagan

$$\text{(13)} \qquad y_i \leqslant \sum_{S \subset N} P_S(q) u^i\left(x^i(S)\right)$$

donde, para cada S, X(S) =⟨ x^1(S), x^2(S),..., x^n(S)⟩ es una alocación factible, que satisface (7)-(8).

Una condición necesaria (pero no suficiente) para que $\lambda = (\lambda_1, ..., y_n)$ sea o.s.p. en F(q) es que, en (11), y (S) sea o.s.p. en V(S) para todo S tal que $P_S(q) > 0$. En nuestro caso, quiere decir que, en (13) debe haber igualdad, y, además, cada una de las alocaciones X(S) debe ser eficiente, sujeto a (7)-(8). Para cada S, pues (excepto si $P_S(q) = 0$), existirán dos vectores, $\lambda(S) = \left(\lambda_1(S), ..., \lambda_n(S)\right)$ y $p(S) = \left(p_1(S), ..., p_n(S)\right)$ tales que

$$u_j^i\left(x^i(S)\right) = \lambda_i(S) p_j(S)$$

para todo iϵS, j=1,..., m. Notamos que los $\lambda_i(S)$ no tienen importancia (mejor dicho, no están definidos) cuando i$\notin$ S. Para los iϵS, los $\lambda_i(S)$ están definidos hasta multiplicación por una constante positiva.

Se presenta una pregunta en cuanto a la relación entre los varios vectores λ(S). La respuesta es que, hasta multiplicación por una constante, deben ser iguales:

Lema 3. Sea y, definido por (13) (con igualdad) o.s.p. en F(q), sean $P_S(q) > 0$, $P_T(q) > 0$, y sean i, kϵ S∩T. Entonces

$$\frac{\lambda_i(S)}{\lambda_i(T)} = \frac{\lambda_k(S)}{\lambda_k(T)}$$

Prueba: Como todos los $\lambda(S) > 0$, y se pueden multiplicar por un escalar positivo cualquiera, asumiremos que $\lambda_i(S) = \lambda_k(T) = 1$. Si el lema es falso, $\lambda_k(S) \neq \lambda_k(T)$. No se pierde generalidad al asumir que

$$\lambda_k(S) = \lambda_k(T) + h, \qquad h > 0.$$

Cambiemos ahora la alocación X(S) a $\bar{X}(S)$ poniendo, para un j en particular,

$$\bar{x}_j^i(S) = x_j^i(S) - \frac{\epsilon}{p_j(S)P_S(q)}$$

$$\bar{x}_j^k(S) = x_j^k(S) + \frac{\epsilon}{p_j(S)P_S(q)}$$

donde ϵ es un número muy pequeño pero positivo. Ningún otro de los componentes de los varios vectores en X(S) se varía. Obviamente, $\bar{X}(S)$ satisface (7)-(8). Además,

$$u^i\left(\bar{x}^i(S)\right) = u^i\left(x^i(S)\right) - \frac{\epsilon}{P_S(q)} + \theta(\epsilon)$$

$$u^k\left(\bar{x}^k(S)\right) = u^k\left(x^k(S)\right) + \frac{\epsilon\lambda_k(S)}{P_S(q)} + \theta(\epsilon),$$

donde los $\theta(\epsilon)$ son cantidades desestimables.

De la misma manera, ponemos, para la misma j,

$$\bar{x}_j^i(T) = x_j^i(T) + \frac{\epsilon}{p_j(T)P_T(q)}$$

$$\bar{x}_j^k(T) = x_j^k(T) - \frac{\epsilon}{p_j(T)P_T(q)}$$

y aparte de esto dejamos que $\bar{X}(T)$ sea lo mismo que X(T). De nuevo vemos que $\bar{X}(T)$ satisface (7)-(8), y tenemos

$$u^i\left(\bar{x}^i(T)\right) = u^i\left(x^i(T)\right) + \frac{\epsilon}{P_t(q)} + \theta(\epsilon)$$

$$u^k\left(\bar{x}^k(T)\right) = u^k\left(x^k(T)\right) - \frac{\epsilon\lambda_k(T)}{P_t(q)} + \theta(\epsilon)$$

donde de nuevo los $\theta(\epsilon)$ son desestimables. Si todos los demás X(U) quedan sin cambio, tendremos

$$\bar{y}^i = \sum_{U C N} P_U(q)u^i\left(\bar{x}^i(U)\right)$$

$$\bar{y}^k = \sum_{U C N} P_U(q)u^k\left(\bar{x}^k(U)\right)$$

Vemos que la suma para $\bar{y}^i$ difiere de la de y^i sólo que el sumando para U=S se ha incrementado en ϵ, mientras aquel para U=T se ha disminuido en ϵ. Por lo tanto $\bar{y}^i = y^i$ (excepto los términos desestimables $\theta(\epsilon)$. Al mismo tiempo, vemos que la suma para $\bar{y}^k$ difiere de la de y^k en que el sumando para U=S se ha incrementado en $\epsilon\lambda_k(S)$ mientras que el de U=T se ha disminuido en $\epsilon\lambda_k(T)$. El cambio neto da

$$\bar{y}^k = y^k + \epsilon\left(\lambda_k(S) - \lambda_k(T)\right) + \theta(\epsilon)$$

$$\bar{y}^k = y^k + \epsilon h + \theta(\epsilon)$$

de manera que podemos aumentar y^k sin cambiar los demás y^h; concluimos que el punto y no es o.s.p. La contradicción prueba el lema.

El lema nos dice que, hasta multiplicación por un escalar, los número $\lambda_i(S)$ son independientes de S. Esta constante multiplicativa se puede incluir en los vectores p(S) de precios, lo que nos dice que en realidad sólo habrá un vector $(\lambda_1, ..., \lambda_n)$. La condición necesaria para que y sea o.s.p., entonces, es que, para cada $i \in S$, j=1, ..., m, tengamos

$$(14) \qquad u_j^i\left(x^i(S)\right) = \lambda_i p_j(S)$$

El vector λ nos da, como siempre, la tasa (local) de transferibilidad de utilidad: si i cede la pequeña cantidad $\epsilon\lambda_i$, entonces k puede ganar la pequeña cantidad $\epsilon\lambda_k$.

Como había sucedido anteriormente, encontramos que cada vector y o.s.p. se caracteriza por el vector lagrangiano $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_n)$; la y correspondiente se obtiene con igualdad en (13), donde cada alocación X(S) maximiza

$$\sum_{i \in S} \frac{1}{\lambda_i} u^i(xi)$$

sujeto a (7)-(8). Los siguientes lemas son generalizaciones directas de los Lemas 1 y 2.

Lema 4. Sea $\hat{\lambda}$ y λ^* vectores lagrangianos tales que

$$\lambda_1^* > \hat{\lambda}_1$$

$$\lambda_i^* = \hat{\lambda}_i \qquad i = 2, ..., n.$$

Sean $\hat{y}$ y* los correspondientes puntos o.s.p. de F(q). Entonces

$$\hat{y}_1 \geqslant y_1^*$$

Prueba: Por el Lema 1, vemos que, para cada $S \subset N$, $1 \epsilon S$,

$$u^1(\hat{x}^1) \geqslant u^1(x^{*1})$$

mientras que, si $1 \notin S$, $u^1(x^1(S)) = u^1(0) = 0$.

Ahora bien,

$$\hat{y}_1 = \sum P_s u^1(\hat{x}^1); \; y_1^* = \sum P_s u^1(x^{*1})$$

y, como todos los $P_S \geqslant 0$, vemos que $\hat{y}_1 \geqslant y_1^*$.

Lema 5. Sean los jugadores 1 y 2 intercambiables, en el sentido de que las funciones u^1 y u^2 son idénticas, y supóngase que $q_1 = q_2$. Sea y un puno.s.p. de F(q), con vector lagrangiano λ, tal que $\lambda_1 > \lambda_2$. Entonces

$$y_1 \leqslant y_2.$$

Prueba: Existen cuatro tipos de coalición, según si alguno, ambos o ninguno de 1 y 2 pertenecen. Asumamos que S es una coalición tal que $1 \notin S$, $2 \notin S$, y sean

$$S' = S \cup \{1\}$$

$$\hat{S} = S \cup \{2\}$$

$$S^* = S \cup \{1,2\}$$

Es fácil ver que $P_{S'}(q) = P_{\hat{S}}(q)$, ya que $q_1 = q_2$.

Podemos aplicar el Lema 1 a S′ y $\hat{S}$, ya que difieren solamente en que hemos intercambiado los jugadores 1 y 2. Entonces, $\lambda_1 \geqslant \lambda_2$, vemos que

$$u^1\left(x^1(S')\right) \leqslant u^1\left(x^2(\hat{S})\right)$$
$$u^i\left(x^1(S')\right) \leqslant u^2\quad x^2(\hat{S})\Big)$$

Para el conjunto S*, aplicamos el Lema 2, que nos da

$$u^1\left(x^2(S^*)\right) \leqslant u^2\left(x^2(S^*)\right)$$

Finalmente, $x^1(S) = x^2(S) = 0$, ya que $1, 2 \notin S$. Tenemos, entonces,

$$y_1 = \sum_S \left\{P_{S'} u^1\left(x^1(S')\right) + P_{S^*} u^1\left(x^1(S^*)\right)\right\}$$

$$y_2 = \sum_S \left\{P_{\hat{S}} u^2\left(x^2(\hat{S})\right) + P_{S^*} u^2\left(x^2(S^*)\right)\right\}$$

Aquí, los P son no negativos, con $P_{S'} = P_{\hat{S}}$, y los sumandos en la suma para y_1 son no mayores que los de la suma para y_2. Por lo tanto $y_1 \leqslant y_2$.

4. El Valor

Para un juego con extensión multilineal F, un valor se define en [12] de la siguiente manera:

Si restringimos $(y_1, \ldots, y_n)$ a la superficie o.s.p. de F(q), el conjunto de todas éstas (y; q) tiene dimensión 2n−1. Cualquiera de las 2n variables puede entonces tratarse como una función (implícita) de las otras 2n−1. En la mayoría de los casos (incluyendo, como lo veremos, el presente juego de mercado), esta función es diferenciable, o sea que las derivadas

$$\frac{\partial y_i}{\partial q_j}$$

se pueden en general definir. (Esta es la derivada de y_i con respecto a q_j, dado que las demás y_k, q_k no varían, y que el punto $(y_1, \ldots, y_n)$ sigue sobre la superficie o.s.p. de F(q).

Considérese entonces el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\frac{dq_i}{dt} = 1 \tag{15}$$

$$\frac{dy_i}{dt} = \frac{\partial y_i}{\partial q_i} \tag{16}$$

con valores iniciales $y_i(0) = q_i(0) = 0$. Si este sistema se puede resolver para $0 \leqslant t \leqslant 1$, entonces el punto

$$y(1) = (y_1(1), y_2(1), \ldots, y_n(1))$$

es un valor del juego.

Es fácil ver, de (15), que $q_i(t) = t$ para todo i y todo t. Por lo tanto sólo necesitamos considerar valores de q en la "diagonal principal" (t, t,..., t). Para tales q, tenemos

$$P_S(q) = t^s(1-t)^{n-s}$$

donde s es el número de jugadores en la coalición S. Entonces

$$y_i = \sum_{\substack{S \subset N \\ i \in S}} t^s(1-t)^{n-s}\, u^i\left(x^i(S)\right)$$

y así, dejando que solamente q_i aumente (por una cantidad pequeña) vemos que

$$\frac{\partial y_i}{\partial q_i} = \sum_{i \in S} t^{s-1}(1-t)^{n-s}\, u^i\left(x^i(S)\right) +$$

$$+ \sum_{i \in S} t^s(1-t)^{n-s} \frac{\partial u^i\left(x^i(S)\right)}{\partial q_i}$$

Ahora,

$$\frac{\partial u^i}{\partial q_i} = \lambda_i \sum_{j=1}^{m} P_j \frac{\partial x_j^i}{\partial q_i}$$

y por lo tanto

(17)

$$\frac{\partial y_i}{\partial q_i} = \sum_{\substack{S \\ i \in S}} t^{s-1}(1-t)^{n-s}\left[u^i\left(x^i(S)\right) + \right.$$

$$\left. + \lambda_i t \sum_j p_j(S) \frac{\partial x_j^i(S)}{\partial q_i}\right]$$

Ahora, para cualquier $k \neq i$, tendremos

$$\frac{\partial y_k}{\partial q_i} = \sum_{i \in S} t^{s-1}(1-t)^{n-s}\left[u^k\left(x^k(S)\right) - \right.$$

$$\left. - u^k\left(x^k(S - \{i\})\right)\right]$$

$$+ \lambda_k \sum_S t^s (1-t)^{n-s} \sum_{j=1}^m p_j(S) \frac{\partial x_j^k}{\partial q_i}(S).$$

Pero queremos que $\partial y_k / \partial q_i = 0$ para todo $k \neq i$, y por lo tanto

$$\text{(18)} \quad \sum_S t^s (1-t)^{n-s} \sum_{j=1}^m p_j(S) \frac{\partial x_j^k}{\partial q_i}(S)$$

$$= -\frac{1}{\lambda_k} \sum_{i \in S} t^{s-1}(1-t)^{n-s}\left[u^k\left(x^k(S)\right) - \right.$$

$$\left. - u^k\left(x^k(S - \{i\})\right)\right]$$

Como (7)-(8) debe ser válido para cada X(S), tendremos

$$\frac{\partial x_j^i}{\partial q_i}(S) = -\sum_{k \neq i} \frac{\partial x_j^k(S)}{\partial q_i}$$

y, además,

$$\frac{\partial x_j^i(S)}{\partial q_i} = 0 \qquad \forall\, i \notin S$$

Por lo tanto,

$$\lambda_i \sum_{i \in S} t^s(1-t)^{n-s} \sum_j p_j(S) \frac{\partial x_j^i(S)}{\partial q_i}$$

$$= \lambda_i \sum_S t^s(1-t)^{n-s} \sum_j p_j(S) \frac{\partial x_j^i(S)}{\partial q_i}$$

$$= -\lambda_i \sum_S t^s(1-t)^{n-s} \sum_j p_j(S) \sum_{k \neq i} \frac{\partial x_j^k(S)}{\partial q_i}$$

$$= -\lambda_i \sum_{k \neq i}\left[\sum_S t^s(1-t)^{n-s} \sum_{j=i}^m p_j(S) \frac{\partial x_j^k(S)}{\partial q_i}\right]$$

y, por (18), esto es igual a

$$\sum_{k \neq i} \frac{\lambda_i}{\lambda_k} \sum_S t^{s-1}(1-t)^{n-s}\left[u^k\left(x^k(S)\right) - \right.$$

$$\left. - u^k\left(x^k(S - \{i\})\right)\right]$$

Si introducimos esto en (17), obtenemos

$$\frac{\partial y_i}{\partial q_i} = \sum_{\substack{S \\ i \in S}} t^{s-1}(1-t)^{n-s}\left\{u^i\left(x^i(S)\right) + \right.$$

$$\left. + \sum_{k \neq i} \frac{\lambda_i}{\lambda_k}\left[u^k\left(x^k(S)\right) - u^k\left(x^k(S - \{i\})\right)\right]\right\}$$

y, recordando que $x^i(S - \{i\}) = 0$, obtenemos

$$\frac{\partial y_i}{\partial q_i} = \lambda_i \sum_{\substack{S \\ i \in S}} t^{s-1}(1-t)^{n-s} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\lambda_k}\left[u^k\left(x^k(S)\right) - \right.$$

$$\left. - u^k\left(x^k(S - \{i\})\right)\right]$$

y la ecuación (16) tiene la forma

(19)

$$\frac{dy_i}{dt} = \lambda_i \sum_{\substack{S \\ i \in S}} t^{s-1}(1-t)^{n-s} \sum_{k=1}^n \frac{u^k\left(x^k(S)\right) - u^k\left(x^k(S - \{i\})\right)}{\lambda_k}$$

Generalmente, al conocer los $y_i(t)$ podemos determinar los $\lambda_i(t)$, los cuales a su vez nos ayudan a calcular los varios X(S), ya que sabemos que X(S) siempre maximiza la suma

$$\sum_{k \in S} \frac{u^k(x^k)}{\lambda_k}$$

sujeto a las restricciones (7)-(8). Existe un problema si los u^i no son estrictamente cóncavos ya que, en ese caso, el problema de maximización puede tener varias soluciones: los X(S) no están completamente determinados. En este caso, se debe notar que la diferencia

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{u_k\ x^k(S)}{\lambda_k} \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{u^k \left(x^k(S-\{i\})\right)}{\lambda_k}$$

es lo que en realidad nos interesa, y esta diferencia está bien definida si conocemos los λ_i -- es la expresión que deseamos maximizar, menos otra de estas expresiones. Por lo tanto, al conocer los λ_i, la ecuación diferencial (19) está bien definida.

Asumiendo la diferenciabilidad de las varias funciones $u^i(x)$, podemos aplicar el Lema 3, y vemos que los $y_i(t)$ automáticamente determinan los λ_i si todos los $P_S(q)$ son positivos. Esto pasará, naturalmente, si $q = (t, t,..., t)$ con $0 < t \leqslant 1$, y concluimos que las ecuaciones (19) están bien definidas para $0 < t \leqslant 1$; si, además, las derivadas de segundo orden de los u^i son acotadas, el sistema será Lipschitziano.

En $t=0$, la situación se complica. Esto se debe, en esencia, a que la diferenciabilidad de las funciones u^i no nos garantiza una frontera lisa para el conjunto F(0) — o, en otras palabras, el Lema 3 no sirve de nada aquí.

Para resolver esta dificultad, notamos que si todos los gradientes

$$\nabla u^i\ (0, 0,..., 0)$$

coinciden, o son proporcionales, entonces el punto (0, 0,..., 0) será o.s.p. para cada V(S); es decir, el juego es no esencial. En ese caso, las ecuaciones (16) tienen la solución trivial $y=0$.

Supongamos, entonces, que no todos los gradientes ∇u^i (0, 0,...,0) son proporcionales. En ese caso, para cada i habrá por lo menos un k tal que $V(\{i,k\})$ contiene puntos y con y_i, y_k positivos, $y_h=0$ para $h\neq i$, $h\neq k$.

Consideremos, ahora, el conjunto W de todos los puntos con forma

$$y = \sum_{i=1}^{n} \quad \sum_{k=i+1}^{n} y(\{i,k\})$$

donde cada $y(\{i,k\}) \in V(\{i,k\})$. Es fácil ver que W es convexo. Si $\hat{y}$ es o.s.p. en W, existen número $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ tales que $\hat{y}$ maximiza la suma

$$\frac{y_1}{\lambda_1} + \frac{y_2}{\lambda_2} + ... + \frac{y_n}{\lambda_n}$$

sujeto a las restricciones (20). Si ponemos entonces

$$\hat{y} = \sum_{i<k} \hat{y}(\{i,k\})$$

con $\hat{y}(\{i,k\}) \in V(\{i,k\})$, es fácil ver que $\hat{y}(\{i,k\})$ maximiza

$$\frac{y_i}{\lambda_i} + \frac{y_k}{\lambda_k}$$

sujeto a $y \in V(\{i,k\})$.

Para cada punto $y \in W$, con el λ correspondiente, definamos las cantidades

(21)

$$\phi_i = \sum_{k\neq i} \frac{y_k(\{i,k\})}{\lambda_k} - \frac{y_i(\{i,k\})}{\lambda_i}$$

Veremos que existe un punto y tal que, para cada i, $\phi_i = 0$. En efecto, consideremos el vector $\delta y = (\lambda_1\phi_1, \lambda_2\phi_2, ..., \lambda_n\phi_n)$, definido para cada y en la superficie o.s.p. de W. Tenemos

$$\sum_i \frac{\delta y_i}{\lambda_i} = \sum_i \phi_i = \sum_i \sum_{k\neq i} \left[\frac{y_k(\{i,k\})}{\lambda_k} - \frac{y_i(\{i,k\})}{\lambda_i} \right] = \sum_{i \neq k} \sum \frac{y_k(\{i,k\})}{\lambda_k} - \sum_{i \neq k} \sum \frac{y_i(\{i,k\})}{\lambda_i}$$

y esto es obviamente igual a 0. Por lo tanto δy es tangente a la superficie de W.

Supongamos, ahora, que $y_i=0$ para algún i. Para cada k, sabemos que $(0,0,...,0) \in V(\{i,k\})$, y entonces, debido a las propiedades de maximización de y, tenemos

$$\frac{y_i(\{i,k\})}{\lambda_i} + \frac{y_k(\{i,k\})}{\lambda_k} \geqslant 0.$$

En esta desigualdad, la desigualdad estricta debe cumplirse por lo menos para un valor de k – ya que existe k tal que y_i, y_k pueden ambos ser positivos y así, sumando con respecto a k, obtendremos

$$\sum_k \frac{y_k(\{i,k\})}{\lambda_k} > - \sum \frac{y_i(\{i,k\})}{\lambda_i} = 0$$

así que $\delta y_i = \lambda_i\phi_i > 0$. Vemos, entonces, que δy es un campo vectorial definido sobre la superficie o.s.p. del conjunto W^+:

$$W^+ = W \cap \{y \mid y_i \geqslant 0\}$$

y que este campo, en las aristas $y_i = 0$ de este conjunto, está dirigido *hacia el interior* de la superficie. Concluimos que existe $y^* > 0$, en la superficie o.s.p. de W^+, tal que todos los $\phi_i = 0$. Sea λ^* el vector λ correspondiente. Veremos ahora que y^* trata a jugadores equivalentes simétricamente:

Lema 6. Sean 1, 2 jugadores equivalentes, y sea y^* tal que todos los $\phi_i = 0$. Entonces $y^*_1 = y^*_2$.

Prueba: Supóngase que $y^*_1 > y^*_2$. Entonces, para algún valor de k, $y^*_1(\{1,k\}) > y^*_2(\{2,k\})$, o $y^*_1(\{1,2\}) > y^*_2(\{1,2\})$. En cualquiera de estos casos, el uso del Lema 1 o el Lema 2 nos da

$$\lambda^*_1 \leqslant \lambda^*_2 .$$

Supongamos primero que $\lambda^*_1 < \lambda^*_2$. Entonces, para cada $k = 3, \ldots, n$,

$$y^*_k(\{1,k\}) \leqslant y^*_k(\{2,k\}).$$

debido al Lema 1. Así mismo, debido al Lema 2,

$$y^*_1(\{1,2\}) \geqslant y^*_2(\{1,2\})$$

y éstos no pueden ambos ser negativos, así que $y^*_1(\{1,2\}) \geqslant 0$. Entonces

$$\frac{y^*_1(\{1,2\})}{\lambda^*_1} \geqslant \frac{y^*_1(\{1,2\})}{\lambda^*_2} \geqslant \frac{y^*_2(\{1,2\})}{\lambda^*_2}$$

Por lo tanto

$$\sum_{k\neq 1} \frac{y^*_k(\{1,k\})}{\lambda_k} \leqslant \sum_{k\neq 2} \frac{y^*_k(\{2,k\})}{\lambda_k}$$

y, además,

$$\sum_{k\neq 1} \frac{y^*_1(\{1,k\})}{\lambda_1} = \frac{y^*_1}{\lambda_1} > \frac{y^*_1}{\lambda_2} > \frac{y^*_2}{\lambda_2} = \sum_{k\neq 2} \frac{y^*_2(\{2,k\})}{\lambda_2} .$$

Por lo tanto, $\phi_1 < \phi_2$, lo que contradice la hipótesis que todos $\phi_1 = 0$.

Supongamos, ahora, que $\lambda^*_1 \; O \; \lambda^*_2$. En este caso, las propiedades de maximalidad de los $y^*_1(\{1,k\})$ nos dicen que, para cada $k \geqslant 3$,

$$\frac{y^*_1(\{1,k\})}{\lambda^*_1} + \frac{y^*_k(\{1,k\})}{\lambda^*_k} = \frac{y^*_2(\{2,k\})}{\lambda^*_2} + \frac{y^*_k(\{2,k\})}{\lambda^*_k}$$

puesto que ambos maximizan la misma expresión, y por lo tanto

$$\sum_{k\neq 1} \left\{ \frac{y^*_1(\{1,k\})}{\lambda^*_1} + \frac{y^*_k(\{1,k\})}{\lambda^*_k} \right\} =$$

$$= \sum_{k\neq 2} \left\{ \frac{y^*_2(\{2,k\})}{\lambda^*_2} + \frac{y^*_k(\{2,k\})}{\lambda^*_k} \right\}$$

Sean V_1 y V_2 los lados izquierdo y derecho, respectivamente, de esta ecuación. Entonces

$$\phi_1 = V_1 - 2\frac{y^*_1}{\lambda^*_1} \qquad \phi_2 = V_2 - 2\frac{y^*_2}{\lambda^*_2}$$

y, como $V_1 = V_2$, $\lambda^*_1 = \lambda^*_2 > 0$, $y^*_1 > y^*_2$, vemos que $\phi_1 < \phi_2$. De nuevo encontramos que no todos los $\phi_i = 0$. La contradicción prueba el Lema: $y^*_1 = y^*_2$.

Volvemos ahora al sistema (19) y su comportamiento para valores pequeños de t. Si t es pequeño, el coeficiente $P_S(t, t, \ldots, t)$ es aproximadamente igual a t^s, y, como los conjuntos S con $s=0$ o $s=1$ no pueden dar utilidad, vemos que los valores de $y(t)$ deben tener orden de magnitud t^2. Efectivamente,

(22)

$$y_i = t^2 \sum_{k\neq i} y_i(\{i,k\}) + 0(t^3)$$

donde $y_i(\{i,k\}) = u^i\big(x^i(\{i,k\})\big)$, y, por (19),

(23)

$$\dot{y}_i = t\lambda_i \sum_{k\neq i} \left\{ \frac{y_i(\{i,k\})}{\lambda_i} + \frac{y_k(\{i,k\})}{\lambda_k} \right\} + 0(t^2)$$

Las soluciones "bien comportadas" son aquellas que toman la forma de series de potencias de t, o sea que el coeficiente de t^2 debe ser constante; por lo tanto, al diferenciar (22), encontramos

$$\dot{y}_i = 2t \sum_{k\neq i} y_i(\{i,k\}) + 0(t^2)$$

y, al igualar esto con (23), tenemos

(24)

$$2 \sum_{k\neq i} y_i(\{i,k\}) = \lambda_i \sum_{k\neq i} \frac{y_i(\{i,k\})}{\lambda_i} + \frac{y_k(\{i,k\})}{\lambda_k}$$

o, simplemente, $\phi_i = 0$.

Por lo tanto, las soluciones analíticas deben comenzar con los valores iniciales

$$y_i(\{i,k\}) = y^*_1(\{i,k\}) \quad \text{en } t = 0$$

y los λ^*_i correspondientes como valores iniciales de λ_i; éstos a su vez sirven para calcular valores iniciales de los $y_i(S)$ para otros conjuntos S.

En breve, entonces, las soluciones y^* de la ecuación $\phi = 0$ nos permiten obtener valores iniciales para el sistema diferencial (19) en el punto $t = 0$:

$$y_i(t) = t^2 y^*_i + 0\,(t^3)\,.$$

Después del principio, el sistema (19) continúa sin más puntos singulares.

Buen comportamiento de las funciones u^i (es decir, su doble diferenciabilidad) nos garantizará que (19) tiene soluciones únicas después del comienzo; tendremos, pues, exactamente una solución de (19) para cada solución y^* de $\phi=0$. Es importante notar que, si i y k son jugadores equivalentes, tendremos entonces $y_i(t) = y_k(t)$ para todo $t \in [0,1]$, es decir que el valor siempre trata a los jugadores equivalentes de igual manera.

5. El Mercado Replicado

Consideremos ahora la situación que se presenta en caso de lo que llamaremos replicación r-tuple. Efectivamente, esta replicación aumenta el número de jugadores de n a rn (r, un entero positivo), reemplazando al jugador, i, del juego original, con r jugadores que llamaremos *de tipo i.* Cada uno de los r jugadores de tipo i en el juego replicado tiene una dote inicial z^i, y, más importante, tiene la misma función de utilidad, u^i. Jugadores del mismo tipo son, pues, equivalentes en el sentido del Lema 2.

Representaremos cada jugador de este juego por un par (h, i), donde h e i son enteros, $1 \leqslant h \leqslant r$, $1 \leqslant i \leqslant n$. El jugador (h, i) es entonces el *h-ésimo jugador de tipo i,* o la h-ésima réplica de i.

El juego nuevo sigue siendo, naturalmente, un juego de mercado; lo importante es que la estructura es un poco más específica que la que habíamos considerado originalmente. De todas maneras, todo lo que se había dicho originalmente sigue siendo verdad ahora: función característica, corazón, valor se definen de la misma manera. Gracias, sin embargo, a la estructura especial, podemos obtener resultados más fuertes.

Notamos, además, que cada coalición S se puede representar por un vector $s = (s_1, s_2, .., s_n)$, donde s_i es el número de jugadores de tipo i en S.

En muchos casos, estaremos interesados, no en la utilidad que recibe un jugador (h, i), sino en la utilidad total a todos los jugadores de tipo i en cierta coalición S (o en todo el juego). Escribiremos

(26) $$W^i_S = \sum_{\substack{h \\ (h,i)\in S}} u^i(x^{hi}).$$

Asumiendo, como siempre, la concavidad de las funciones u^i, notamos que w^i se maximiza (sujeto a un total fijo de bienes para todos los jugadores de tipo i) si todos los jugadores de este tipo reciben cantidades iguales:

(27) $$x^{hi} = \frac{1}{s_i}\,\xi^i \qquad (h,i)\epsilon S$$

y entonces

(28) $$w^i_S = s_i u^i\left(\frac{1}{s_i}\,\xi^i\right)$$

donde $\xi^i = (\xi^i_1, ..., \xi^i_m)$ es la realocación total a los jugadores de tipo i en esta coalición.

Se debe notar que, en la ecuación (28), w^i es función de las m+1 variables ξ^i_j (j=1, ..., m) y s_i. Naturalmente, s_i sólo puede tomar valores positivos enteros, pero no hay razón valedera que nos prohiba extender esta definición a todos los valores reales positivos de s_i (y quizá. tomando límites, también hasta $s_i = 0$). Definamos, entonces,

(29) $$w^i\left(\xi^i_1, ..., \xi^i_m; p\right) = p u^i\left(\frac{1}{p}\,\xi^i_1, ..., \frac{1}{p}\,\xi^i_m\right).$$

Como u^i es cóncava, es claro que, para cada $p > 0$, w^i es cóncava en las m variables ξ^i_j. En realidad, lo siguiente es verdad:

Lema 7. Si u^i es cóncava, entonces w^i es cóncava sobre todo el conjunto $p > 0$.

Prueba: Sean, $p, p' > 0$, $\alpha + \beta = 1$, $\alpha, \beta \geqslant 0$. Pongamos

$$\gamma = \frac{\alpha p}{\alpha p + \beta p'} \qquad \delta = \frac{\beta p'}{\alpha p + \beta p'}$$

y obviamente $\gamma, \delta \geqslant 0$, con $\gamma + \delta = 1$.

Entonces, para dos vectores ξ y ξ', tenemos

$$w(\alpha\,\xi + \beta\xi'; \alpha p + \beta p') =$$

$$(\alpha p + \beta p')\,u\left(\frac{\alpha\,\xi + \beta\xi'}{\alpha\,p + \beta p'}\right)$$

$$= (\alpha\,p + \beta p')\,u\left(\gamma\frac{\xi}{p} + \delta\frac{\xi'}{p'}\right)$$

$$\geqslant (\alpha p + \beta p')\left[\gamma u\left(\frac{\xi}{p}\right) + \delta\,u\left(\frac{\xi'}{p'}\right)\right]$$

$$= \alpha p u\left(\frac{\xi}{p}\right) + \beta p' u\left(\frac{\xi'}{p'}\right)$$

$$= \alpha w\,(\xi; p) + \beta w\,(\xi', p')$$

Esto nos dará

$$w(\alpha\xi + \beta\xi'; \alpha p + \beta p') \geqslant \alpha w(\xi;p) + \beta w(\xi';p')$$

y vemos que w es cóncava.

6. Valor del Juego Replicado

Ahora estudiaremos el valor del juego. En este caso, la simetría nos permite una simplificación. Hemos visto anteriormente que el proceso de integración usado trata todos los jugadores del mismo tipo simétricamente (puesto que son equivalentes). Así, en (19), tendremos

$$y^{hi}(t) = y^{\ell i}(t) \tag{30}$$

y también

$$\lambda_{hi}(t) = \lambda_{\ell i}(t) \tag{31}$$

para todo h, $\ell=1, ..., r; i=1, ..., n,$ y $0 \leqslant t \leqslant 1$.

Ahora, para cualquier coalición S, la alocación X(S) (t) debe maximizar la expresión

$$\sum_{(h,i)\epsilon S} \frac{u^i(x^{hi})}{\lambda_{hi}(t)}$$

y, debido a la simetría, esto se puede escribir en la forma

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{s_i u^i(x^i)}{\lambda_i(t)}$$

donde x^i es el paquete de bienes de cada jugador de tipo i en S, y λ_i es el valor común de todos los λ_{hi} (h=1, .., r). De nuevo usando la simetría, es fácil ver que el vector $x^i(S)$ depende solamente de los números $s_1, s_2, ..., s_n$ de jugadores de cada tipo, y no en los jugadores particulares de cada tipo que pertenecen a S.

La alocación total a todos los jugadores de tipo i, en S, es entonces

$$\xi^i(S) = s_i x^i(S) \tag{32}$$

y la utilidad total para todos estos jugadores es

$$w^i(\xi^i; s_i) = s_i u^i(x^i). \tag{33}$$

Posiblemente sea más fácil tratar las alocaciones totales, ξ^i, y las utilidades totales, w^i, de todos los jugadores de tipo i en una coalición dada. Si es así, notemos que la alocación Ξ (S) = $\langle \xi^1 (S),..., \xi^n(S)\rangle$ debe maximizar la expresión

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{w^i(\xi^i;s_i)}{\lambda_i}$$

sujeto a las restricciones

$$\sum_{i=1}^{n} \xi^i = 0 \tag{34}$$

$$\xi^i = 0 \qquad \text{Si} \quad s_i = 0\,. \tag{35}$$

Las ecuaciones (19) se pueden transformar ahora, si ponemos

$$\eta_i = \sum_{h=1}^{r} y_{hi} = r y_{hi} \tag{36}$$

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} s_i \tag{37}$$

lo que nos dará

$$\eta_i = \sum_{S \subset N} t^{\sigma}(1-t)^{nr-\sigma} w^i \left(\xi^i(S);s_i\right). \tag{38}$$

Ahora, $\xi^i(S)$ depende, no del conjunto S, sino del vector $(s_1, ..., s_n)$.

Para este vector s, habrá

$$\prod_{k=1}^{n} \binom{r}{s_k} = \binom{r}{s_1}\binom{r}{s_2} \cdots \binom{r}{s_n}$$

conjuntos diferentes, S, para este mismo vector s.

Luego

$$\eta_i = \sum_{s} t^{\sigma}(1-t)^{nr-\sigma} \prod_{k=1}^{n} \binom{r}{s_k} w^i \left(\xi^i(s);s_i\right) \tag{39}$$

donde la suma se toma sobre todos los vectores s, enteros, tales que $0 \leqslant s_k \leqslant r$ (k=1,..., n).

De la misma manera, la ecuación (19) será ahora

$$\dot{y}_{hi} = \lambda_i \sum_{\substack{S \\ (h,i)\epsilon S}} t^{\sigma-1}(1-t)^{nr-\sigma} \sum_{k=1}^{n}$$

$$\sum_{\substack{\ell \\ (\ell,k)\epsilon S}} \frac{u^k\left(x^k(S)\right) - u^k\left(x^k(S')\right)}{\lambda_\ell}$$

donde $S' = S - \{(h,i)\}$. Para un valor de k dado, existen s_k valores de ℓ tales que $(\ell,k)\epsilon S$, y así tenemos

$$\dot{y}_{hi} = \lambda_i \sum_{\substack{S \\ (h,i)\epsilon S}} t^{\sigma-1}(1-t)^{nr-\sigma}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{s_k u^k\left(x^k(S)\right) - s'_k u^k\left(x^k(S')\right)}{\lambda_k}$$

donde $s'_i = s_i - 1$, $s'_k = s_k$ si $k \neq i$. De nuevo, tendremos

$$w^k\left(\xi^k(S);s_k\right) = s_k u^k\left(x^k(S)\right)$$

luego

(40)

$$\dot{y}_{hi} = \lambda_i \sum_{\substack{S \\ (h,i)\epsilon S}} t^{\sigma-1}(1-t)^{nr-\sigma}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{w^k\ \xi^k(S);s_k - w^k\ {}^k(S');s_k}{\lambda_k}$$

De nuevo preferimos expresar esta suma en términos de los vectores s más que de los conjuntos S. Dado s, el jugador (h,i) está naturalmente fijo, y hay $\binom{r-1}{s_i-1}$ maneras de escoger los otros $s_i - 1$ jugadores de tipo i. Para $k \neq i$, existen $\binom{r}{s_k}$ maneras de escoger los s_k jugadores de tipo k. Tenemos

$$\binom{r-1}{s_i-1} = \frac{s_i}{r}\binom{r}{s_i}$$

y por lo tanto existen

$$\frac{S_i}{r}\prod_{k=1}^{n}\binom{r}{s_k}$$

maneras diferentes de escoger a S, dado s. Tenemos, entonces,

(41)

$$\dot{y}_{hi} = \lambda_i \sum_{s} \frac{s_i}{r} t^{\sigma}(1-t)^{nr-\sigma} \prod_{k=1}^{n}\binom{r}{s_k}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{w^k\left(\xi^k(s);S_k\right) - w^k\left(\xi_k(S');S'_k\right)}{\lambda_k}$$

y, recordando que $\eta_i = t y_{hi}$, obtenemos

(42)

$$\eta_i = \lambda_i \sum_{s} \frac{s_i}{t} t^{\sigma}(1-t)^{nr-\sigma} \prod_{k=1}^{n}\binom{r}{s_k}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{w^k\left(\xi^k(s);s_k\right) - w^k\left(\xi^k(s');S'_k\right)}{\lambda_k}$$

donde la suma se toma sobre todos los vectores s, con $0 \leqslant s_k \leqslant r$. Naturalmente, el valor para el juego replicado no es, en general, igual al valor para el juego original (sin replicar). Se sabe que esto no pasa ni siquiera para los juegos con pagos laterales; *a fortiori*, podemos esperar comportamiento más extraño aún de los juegos sin pagos laterales. La solución, pues, del sistema (19) para el juego no replicado (r=1) no nos dará, en general, la solución para juegos más grandes ($r \geqslant 2$). Es interesante, sin embargo, notar que, para valores pequeños de t, los juegos replicados y no replicados dan, en efecto, las mismas soluciones.

Teorema 1. Sea

(42) $$y_i(t) = y_i^* t^2 + 0(t^3)$$

una solución regular (analítica), valida cerca de t = 0, para el sistema (19) del juego no replicado. Entonces

(43) $$y_{hi}(t) = r y_i^* t^2 + 0(t^3)$$

es una solución regular para (19) del juego replicado. Conversamente, toda solución regular para el juego replicado tendrá la forma (43).

Prueba: Sea $y_i(t) = y_i^* t^2 + 0(t^3)$ una solución para el juego no replicado.

Existen entonces números λ_i^*, $\hat{y}_i(\{i,k\})$ tales que

$$y_i^* = \sum_{k\neq i} \hat{y}_i(\{i,k\})$$

y, para cada (i,k), los números $\hat{y}_i(\{i,k\})$, $\hat{y}_k(\{i,k\})$ maximizan

$$\frac{y_i}{\lambda_i^*} + \frac{y_k}{\lambda_k^*}$$

sujeto a $y \epsilon V(\{i,k\})$. Además, para cada i,

$$\sum_{k\neq i} \frac{\hat{y}_i(\{i,k\})}{\lambda_i^*} = \sum_{k\neq i} \frac{\hat{y}_k(\{i,k\})}{\lambda_k^*}$$

Para el juego replicado, ahora, sea

$$\tilde{y}_{hi}(\{(h,i),(\ell,k)\}) = \hat{y}_i(\{i,k\}) \quad \text{si} \quad i \neq k$$

$$\tilde{y}_{hi}(\{(h,i),(\ell,i)\}) = 0$$

$$\lambda_{hi} = \lambda_i^*$$

Ahora bien, los dos conjuntos, $V(\{i,k\})$ en el juego original, y $V(\{(h,i),(\ell,k)\})$ en el juego replicado son congruentes en el sentido de que, si y está en el primero de ellos, entonces existe y' en el otro, con $y'_{hi} = y_i$, $y'_{\ell k} = y_k$; conversamente, si y' pertenece al segundo de ellos, existe tal y en el primero. Por lo tanto $\tilde{y}_{hi}(\{(h,i),(\ell,k)\})$, $\tilde{y}_{\ell k}(\{(h,i),(\ell,k)\})$ maximizan

$$\frac{y_{hi}}{\lambda_{hi}} + \frac{y_{\ell k}}{\lambda_{\ell k}}$$

sujeto a $y \in V(\{(h,i),(\ell,k)\})$.

Debido a la simetría y concavidad de las funciones de utilidad, vemos que $y_{hi} + y_{\ell i} \leq 0$ para todo $y \in V(\{(h,i),(\ell,i)\})$. Por lo tanto los valores $\tilde{y}_{hi} = \tilde{y}_{\ell i} = 0$ maximizan la expresión

$$\frac{y_{hi}}{\lambda_{hi}} + \frac{y_{\ell i}}{\lambda_{\ell i}}$$

sobre todo este conjunto.

Finalmente, para cada (h,i) tenemos

$$\sum_{(\ell,k)\neq(h,i)} \left[\frac{\tilde{y}_{hi}(\{(h,i),(\ell,k)\})}{\lambda_{hi}} - \frac{\tilde{y}_{\ell k}(\{(h,i),(\ell,k)\})}{\lambda_{\ell k}}\right]$$

$$= \sum_{k\neq i}\sum_{\ell=1}^{r}\left[\frac{\tilde{y}_{hi}(\{(h,i),(\ell,k)\})}{\lambda_{hi}} - \frac{\tilde{y}_{\ell k}(\{(h,i),(\ell,k)\})}{\lambda_{\ell k}}\right]$$

$$= r\sum_{k\neq i}\left[\frac{\hat{y}_i(\{i,k\})}{\lambda_i^*} - \frac{\hat{y}_k(\{i,k\})}{\lambda_k^*}\right]$$

$$=0$$

Por lo tanto ese vector $\tilde{y}$ nos dará una solución regular de (19). Tenemos

$$\sum_{(\ell,k)\neq(h,i)} \tilde{y}_{hi}(\{(h,i),(\ell,k)\}) =$$

$$\sum_{k\neq i}\sum_{\ell=1}^{r} \tilde{y}_{hi}(\{(h,i),(\ell,k)\}) =$$

$$r\sum_{k\neq i} \hat{y}_i(\{i,k\})$$

$$= r y_i^*$$

y vemos que

$$y_{hi}(t) = r y_i^* t^2 + 0(t^3)$$

es una solución regular de (19) de $t = 0$.

Conversamente, supongamos que

$$y_{hi}(t) = y_{hi}^{**} t^2 + 0(t^3)$$

es una solución regular para el juego replicado, y sean λ_{hi}^{**} los componentes del vector lagrangiano correspondiente. Entonces

$$y_{hi}^{**} = y_{\ell i}^{**};\ \lambda_{hi}^{**} = \lambda_{\ell i}^{**}$$

para todo $h, \ell = 1,\dots, r$ y todo $i = 1, \dots, n$.

Sabemos que existen números $\tilde{y}_{hi}(\{(h,i),(\ell,k)\})$ tales que

$$y_{hi}^{**} = \sum_{(\ell,k)\neq(h,i)} \tilde{y}_{hi}(\{(h,i),(\ell,k)\})$$

que $\tilde{y}_{hi}(\{(h,i),(\ell,k)\})$, $\tilde{y}_{\ell k}(\{(h,i),(\ell,k)\})$ maximizan

$$\frac{y_{hi}}{\lambda_{hi}^{**}} + \frac{y_{\ell k}}{\lambda_{\ell k}^{**}}$$

para $y \in V(\{(h,i),(\ell,k)\})$, y que, para cada (h,i),

$$\sum_{(k,\ell)\neq(h,i)}\left[\frac{y_{hi}(\{(h,i),(\ell,k)\})}{\lambda_{hi}^{**}} - \frac{y_{\ell k}(\{(h,i),(\ell,k)\})}{\lambda_{\ell k}^{**}}\right] = 0$$

Como los λ^{**}_{hi} no dependen de h, pondremos

$$\lambda^*_i = \lambda^{**}_{hi}$$

y, además,

$$\hat{y}_i(\{i,k\}) = \frac{1}{r^2} \sum_{h=1}^{r} \sum_{\ell=1}^{r} \tilde{y}_{hi} \{(h,i), (\ell,k)\}$$

para cada par i,k, $i \neq k$.

Ahora bien, el punto $\tilde{y}(\{(h,i), (\ell,k)\})$ pertenece a $V(\{(h,i), (\ell,k)\})$, luego, bajo el mapa natural $y_{hi} \to y_i$, $y_{\ell k} \to y_k$, nos dará un punto de $V(\{i,k\})$ en el juego no replicado. Como este conjunto es convexo, el punto $\hat{y}(\{i,k\})$, que es el promedio de estos r^2 puntos, también pertenece a $V(\{i,k\})$. Además,

$$\frac{\hat{y}_i(\{i,k\})}{\lambda^*_i} + \frac{\hat{y}_k(\{i,k\})}{\lambda^*_k} = \frac{1}{r^2} \sum_h \sum_\ell \left[\frac{\tilde{y}_{hi}\big((h,i),(\ell,k)\big)}{\lambda^*_i} + \frac{\tilde{y}_{\ell k}\big((h,i),(\ell,k)\big)}{\lambda^*_k}\right]$$

y como cada uno de los sumandos aquí maximiza $y_i/\lambda^*_i + y_k/\lambda^*_k$, también lo hace el lado izquierdo de esta ecuación -- el promedio aritmético de ellos. Por lo tanto $\hat{y}_i(\{i,k\})$, $\hat{y}_k(\{i,k\})$ maximiza

$$\frac{y_i}{\lambda^*_i} + \frac{y_k}{\lambda^*_k}$$

sujeto a $y \in V(\{i,k\})$.

Finalmente, para cada i, tenemos

$$\sum_{k\neq i}\left[\frac{\hat{y}_i(\{i,k\})}{\lambda^*_i} - \frac{\hat{y}_k(\{i,k\})}{\lambda^*_k}\right]$$

$$= \frac{1}{r^2} \sum_{k\neq i} \sum_{h=i}^{r} \sum_{\ell=i}^{r} \left[\frac{\tilde{y}_{hi}\{(h,i),(\ell,k)\}}{\lambda^{**}_{hi}} - \frac{\tilde{y}_{\ell k}\{(h,i),(\ell,k)\}}{\lambda^{**}_{\ell k}}\right]$$

$$= \frac{1}{r^2} \sum_{h=1}^{r} \left\{\sum_{k\neq i} \sum_{\ell=1}^{r} \left[\frac{\tilde{y}_{hi}\big(\{(h,i),(\ell,k)\}\big)}{\lambda^{**}_{hi}} - \frac{\tilde{y}_{\ell k}\big(\{(h,i),(\ell,k)\}\big)}{\lambda^{**}_{\ell k}}\right]\right\}$$

En esta última expresión, le podemos añadir, a la suma interna, términos como

$$\frac{y_{hi}\big(\{(h,i),(\ell,i)\}\big)}{\lambda^{**}_{hi}} \quad \frac{y_{\ell i}\big(\{(h,i),(\ell,i)\}\big)}{\lambda^{**}_{\ell i}}$$

ya que éstos se cancelarán al sumar con respecto a h (la suma externa). El total de esta suma será entonces

$$\frac{1}{r^2} \sum_{h=1}^{r} \left\{ \sum_{(\ell,k)\neq(h,i)} \left[\frac{\tilde{y}_{hi}\big(\{(h,i),(\ell,k)\}\big)}{\lambda^{**}_{hi}} - \frac{\tilde{y}_{\ell k}\big(\{(h,i),(\ell,k)\}\big)}{\lambda^{**}_{\ell k}}\right]\right\}$$

y, por hipótesis, la suma interna es igual a cero. Entonces

$$\sum_{k\neq i}\left[\frac{\hat{y}_i(\{i,k\})}{\lambda^*_i} - \frac{\hat{y}_k(\{i,k\})}{\lambda^*_k}\right] = 0$$

y los $\hat{y}(\{i,k\})$ nos darán una solución regular. Esta es

$$y^*_i = \sum_{k\neq i} \hat{y}_i(\{i,k\})$$

$$= \frac{1}{r^2} \sum_{k\neq i} \left\{ \sum_{h=1}^{r} \sum_{\ell=1}^{r} \tilde{y}_{hi}\big(\{(h,i),(\ell,k)\}\big)\right\}$$

(44)

$$y^*_i = \frac{1}{r^2} \sum_{h=1}^{r} \left\{ \sum_{k\neq i} \sum_{\ell=1}^{r} \tilde{y}_{hi}\big(\{(h,i),(\ell,k)\}\big)\right\}$$

Ahora, para $h \neq \ell$, sabemos que

$$\frac{\tilde{y}_{hi}\big(\{(h,i),(\ell,i)\}\big)}{\lambda^{**}_{hi}} + \frac{\tilde{y}_{\ell i}\big(\{(h,i),(\ell,i)\}\big)}{\lambda^{**}_{\ell i}} = 0$$

porque, debido a la concavidad, esto no puede ser positivo, pero sí puede ser 0 (su valor máximo) si escogemos $\tilde{y}_{hi} = \tilde{y}_{\ell i} = 0$. Entonces, como $\lambda^{**}_{hi} = \lambda^{**}_{\ell i}$, tenemos

$$\tilde{y}_{hi}\big(\{(h,i),(\ell,i)\}\big) + \tilde{y}_{\ell i}\big(\{(h,i),(\ell,i)\big) = 0$$

y por lo tanto, en la ecuación (44), podemos añadir los términos $\tilde{y}_{hi}(\{(h,i),(\ell,i)\})$ a la suma interna -- ya que estos se cancelarán al tomar la suma externa (con respecto a h). Por lo tanto

$$y_i^* = \frac{1}{r^2} \sum_{h=1}^{r} \left\{ \sum_{(\ell,k)\neq(h,i)} \tilde{y}_{hi}\left(\{(h,i),(\ell,k)\}\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{r^2} \sum_{h=1}^{r} y_{hi}^{**}$$

Ahora bien, y_{hi}^{**} es independiente de h, luego

$$y_i^* = \frac{1}{r} y_{hi}^{**}$$

y vemos que la solución regular es

$$y_i(t) = \frac{1}{r} y_{hi}^{**} t^2 + 0(t^3).$$

7. Propiedades Asintóticas

Consideremos, en fin, el comportamiento de las ecuaciones de valor si r, el número de réplicas, aumenta sin cota. Empezamos con la ecuación (42)

$$\dot{\eta} = \lambda_i \sum_s \frac{s_i}{t} t^\sigma (1-t)^{nr-\sigma} \prod_{k=1}^{n} \binom{r}{s_k}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{w^k\left(\xi^k(s);s_k\right) - w^k\left(\xi^k(s');s_k'\right)}{\lambda_k}$$

Podemos escribir

$$t^\sigma (1-t)^{nr-\sigma} = \prod_{k=1}^{n} t^{s_k}(1-t)^{t-s_k}$$

luego

$$t^\sigma (1-t)^{nr-\sigma} \prod_{k=1}^{n} \binom{r}{s_k}$$

$$= \prod_{k=1}^{n} B(r,s_k;t)$$

donde $B(r, s_k; t)$ es la probabilidad binominal:

$$B(r,s_k;t) = t^{s_k}(1-t)^{r-s_k} \binom{r}{s_k}$$

Por lo tanto, (42) toma la forma

(45)

$$\dot{\eta}_i = \lambda_i \sum_s \left\{ \prod B(r,s_k;t)\right\} \left[\frac{s_i}{t} \sum_{k=1}^{n} \frac{w^k(s) - w^k(s')}{\lambda_k}\right]$$

donde, por simplificar, hemos escrito $w^k(s)$ en lugar de $w^k(\xi^k(s);s_k)$, etc. De la misma manera, (39) toma la forma

(46)
$$\eta_i = \sum_s \left[\prod B(r,s_k;t)\right] w^k(s)$$

Aquí, los $w^k(s)$ dependen de los λ_k además de los s_k.

Hasta ahora, sólo hemos considerado valores enteros para el vector $(s_1,..., s_n)$. No hay razón, sin embargo, para no considerar valores fraccionales de los s_k, sobre todo si trabajamos en el η-espacio (de n dimensiones) en cambio del y-espacio (de m dimensiones). Definamos, entonces,

$$W(s_1,s_2,...,s_n) \qquad 0 \leq s_k \leq r$$

como el conjunto de todos los puntos $(\eta_1, \eta_2,..., \eta_n)$ tales que

(47) $\quad \eta_i \leq w^i(\xi^i; s_i)$

para alguna alocación $\Xi = \langle \xi^1,...,\xi^n \rangle$ que satisfaga

(48) $$\sum_{i=1}^{n} \xi^i = 0$$

(49) $\quad \xi^k = 0 \text{ if } s_k = 0$

Por otra parte, tenemos los conjuntos $\tilde{F}(q)$, de todos los $(\eta_1,...,\eta_n)$ que tengan la forma

$$\eta_i = \sum_{h=1}^{r} y_{hi} \qquad i=1,..., n$$

para algún $y \epsilon F(q)$.

Existe una relación natural entre los conjuntos $\tilde{F}(q)$ y $W(s)$, donde s y q cumplen la relación

$$s_i = \sum_{h=1}^{r} q_{hi} \qquad i = 1,...,n$$

En efecto, es fácil ver que, si todos los q_{hi} son 0 ó 1, entonces $F(q) = V(S)$, donde S es el conjunto de los (h,i) con $q_{hi} = 1$. En ese caso,

$$\tilde{F}(q) = W(s).$$

En el caso más general, en que los q_{hi} tienen valores fraccionales, podemos dar un resultado más débil:

Lema 8. Sea $s_i = \sum_h q_{hi}$. Entonces

(50) $$\tilde{F}(q) \subset W(s)$$

Prueba: Supóngase que $\eta \in \widetilde{F}(q)$. Entonces existe $y \in F(q)$ con

$$\eta_i = \sum_{h=1}^{r} y_{hi}$$

$$y_{hi} = \sum_{TCN*} P_t(q)\, y_{hi}(T)$$

$$y_{hi}(T) \leqslant u^i \left(x^{hi}(t)\right)$$

donde $X(T) = \langle x^{hi}(T) \rangle$ es una alocación factible para la coalición T. Entonces

$$\eta_i = \sum_{TCN} P_t(q) N_i(T)$$

donde

$$\eta_i(T) = \sum_h y_{hi}(T) \leqslant \sum_{\substack{h\\(h,i)\epsilon T}} u^i \left(x^{hi}(T)\right)$$

y

$$\sum_{\substack{h\\(h,i)\epsilon T}} u^i \left(x^{hi}(T)\right) \leqslant w^i \left(\xi^i(T); t_i\right)$$

Por lo tanto

$$\eta_i \leqslant \sum_{TCN} P_t(q)\, w^i \left(\xi^i(T); t_i\right)$$

Ahora bien, los $P_T(q)$ son números no negativos que satisfacen

$$\sum_{TCN} P_T(q) = 1$$

luego, por la concavidad de w^i,

$$\sum P_T(q)\, w^i \left(\xi^i(T); t_i\right) \leqslant w^i \left(\xi^i; \sigma_i\right)$$

donde

$$\xi^i = \sum_T P_T(q) \xi^i(T)$$

y

$$\sigma = \sum P_T(q) t_i.$$

Ahora bien,

$$\sum_{i=1}^{n} \xi^i = \sum_{TCN} P_T(q) \sum_{i=1}^{n} \xi^i(T) = 0$$

ya que cada $\Xi(T)$ es una alocación factible para T. Supóngase, además, que $\sigma_k = 0$. Esto quiere decir que, para cada T, o bien $t_k = 0$, o $P_T(q) = 0$. Pero si $t_k = 0$, entonces $\xi^k(T) = 0$ también, y entonces

$$\text{if } \sigma_k = 0, \quad \text{then } \xi^k = \sum P_T(q) \xi^k(T) = 0$$

Vemos, pues, que η satisface (48)-(49), así que

$$\eta \epsilon w(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n).$$

Falta demostrar que $(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n) = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$, donde $s_i = \sum q_{hi}$. Esto se debe a que tenemos

$$\sigma_i = \sum_T P_T(q) t_i$$

Sea, pues, $t_{hi} = 0$ s_i $(h,i) \notin T$, $t_{hi} = 1$ si $(h,i) \epsilon T$. Entonces

$$t_i = \sum_{h=1}^{r} t_{hi}$$

y

$$\sigma_i = \sum_h \left\{ \sum_T P_T(q) t_{hi} \right\} = \sum_h \left\{ \sum_{\substack{T\\(h,i)\epsilon T}} P_T(q) \right\}$$

Esto nos da

$$\sum_{\substack{T\\(h,i)\epsilon T}} P_T(q) = q_{hi} \sum_{\substack{T\\(h,i)\epsilon T}} \left\{ \prod_{\substack{(\ell,k)\epsilon T\\(\ell,k)\neq(h,i)}} q_{\ell k} \prod_{(\ell,k)\notin T} (1-q_{\ell k}) \right\}$$

y la suma en esta última expresión es igual a 1 (ver, p.ej. [10]). Entonces

$$\sum_{\substack{T\\(h,i)\epsilon T}} P_T(q) = q_{hi}$$

y

$$\sigma_i = \sum_{h=1}^{r} q_{hi} = s_i$$

lo que muestra que, efectivamente, $\eta \epsilon W(S)$, con

$$s_i = \sum_{h=1}^{r} q_{hi}$$

como se había planteado. Por lo tanto $\widetilde{F}(q) \subset W(S)$.

Se ha visto, en particular, que

(51) $\widetilde{F}(t,t,t,\ldots,t) \subset W(rt,rt,\ldots,rt)$

Si $t=0$ ó 1, es fácil ver que $\widetilde{F}$ y W coinciden. Para otros valores de t, la inclusión es generalmente propia (W contiene puntos que no son de $\widetilde{F}$).

Quisiéramos demostrar que, si r aumenta sin cota, los dos lados de (51) se vuelven casi iguales. Esto es algo complicado ya que, cuando r crece, los dos conjuntos aumentan sin cota. Es por lo tanto necesario normalizar.

Notamos ante todo que, para cualquier $t > 0$, las w^i satisfacen

$$w^i(t\xi;tp) = tpu^i\left(\frac{t\xi}{tp}\right) = tpu^i\left(\frac{\xi}{p}\right) = tw^i(\xi;p)$$

o sea que son homogéneas de grado 1. Vemos, pues, que el punto $\eta \epsilon W(t,t,\ldots,t)$ si y solamente si $r\eta \epsilon W(rt,rt,\ldots,rt)$.

Por otra parte, definamos $\widetilde{F}'_r(q)$ como el conjunto de todos los η tales que $r\eta \epsilon \widetilde{F}(q)$. La inclusión (51) es entonces equivalente a

(52) $\widetilde{F}'_r(t,t,\ldots,t) \subset W(t,t,\ldots,t)$

Ahora bien, en (52) el lado derecho es independiente de r; el izquierdo sí depende de r. Tenemos entonces lo siguiente:

Teorema 2.

$$\lim_{r\to\infty} \widetilde{F}'_r(t,t,\ldots,t) = W(t,t,\ldots,t)$$

Prueba: Sabemos que W contiene la unión de los $\widetilde{F}'_r$ ya que contiene a cada uno de ellos. Mostraremos que W es subconjunto del límite inferior de los $\widetilde{F}'_r$.

Sea ahora $\hat{\eta}$ un punto cualquiera de $W(t,t,\ldots,t)$. Entonces $\hat{\eta}$ satisface

$$\hat{\eta}_i \leq W^i(\xi^i;t)$$

para alguna alocación factible $\hat{\Xi} = \langle \hat{\xi}^1,\ldots,\hat{\xi}^n \rangle$

Sea f un número, mayor que el valor absoluto de todos los $\hat{\xi}^i$. Sea S una coalición con todos los s_k cerca de rt; más exactamente, para todo k,

(53) $$\left|\frac{s_k}{r} - t\right| < \frac{\epsilon}{f}$$

(54) $$\left|\frac{r}{s_k} - \frac{1}{t}\right| < \epsilon$$

Para todos los S que cumplen (53)-(54), escojamos X(S) como

$$x^{hi}(S) = \frac{r}{s_i}\hat{\xi}^i \qquad (h,i)\epsilon S$$

$$x^{hi}(S) = 0 \qquad (h,i) \notin S$$

Para los otros S, sea $X(S) = \langle 0;0;\ldots;0\rangle$. Es fácil ver que, si S cumple (53)-(54), tenemos

$$\sum_{(h,i)\epsilon S} x^{hi}(S) = \sum_i s_i\frac{r}{s_i}\hat{\xi}^i = r\sum_i \hat{\xi}_i = 0$$

luego X(S) es factible. Para los otros S, X(S) es obviamente factible.

Ahora, si S satisface (53)-(54),

$$\sum_h u^i\left(x^{hi}(S)\right) = s_i u^i\frac{r\hat{\xi}_i}{s_i} = rw^i\left(\hat{\xi}_i;\frac{s_i}{r}\right)$$

luego $\eta \epsilon \widetilde{F}(t,t,\ldots,t)$, donde

$$\eta_i = \sum_S{}' P_S(q)rw^i\left(\hat{\xi}_i;\frac{s_i}{r}\right)$$

En esta última expresión, el símbolo ′ sobre la sumativa quiere decir que ésta sólo se debe tomar sobre los S con (53)-(54). Entonces vemos que

$$\frac{1}{r}\eta\epsilon\widetilde{F}'_r(t,t,\ldots,t)$$

donde

(55) $$\frac{1}{r}\eta_i = \sum_S{}'\left\{\prod_k B(r,s_k;t)\right\} w^i\left(\hat{\xi}^i;\frac{s_i}{r}\right).$$

Considérese ahora el lado derecho de (55). El producto que allí aparece es un producto de probabilidades binomiales, con parámetros r y t. Cuando r crece, la probabilidad de que cada s_k/r sea cerca de t se acerca a 1 -- esto quiere decir que (53)-(54) se cumple con probabilidad cerca de 1, y tendremos, para cualquier $\delta>0$,

$$(56) \qquad \sum_S{}' \left\{ \prod_k B(r,s_k;t) \right\} > 1-\delta$$

si r es suficientemente grande.

De la misma manera,

$$w^i(\hat{\xi}_i;\frac{s_i}{r}) - w^i(\hat{\xi}^i;t) = \frac{s_i}{r}\, u^i \left(\frac{r\hat{\xi}^i}{s_i}\right) - tu^i\left(\frac{\hat{\xi}^i}{t}\right)$$

$$= \left(\frac{s_i}{r} - t\right) u^i \left(\frac{r\hat{\xi}^i}{s_i}\right) + t \left[u^i\left(\frac{r\hat{\xi}^i}{s_i}\right) - u^i\left(\frac{\hat{\xi}^i}{t}\right)\right]$$

Ahora bien, el primer término del lado derecho de esta última expresión se puede hacer arbitrariamente pequeño si S cumple (54), escogiendo ϵ pequeño. De la misma manera, el segundo término será arbitrariamente pequeño si S cumple (53), debido a la continuidad de u^i. Podemos, pues, tener

$$| w^i(\xi_i;\frac{s_i}{r}) - w^i(\xi_i;t) | < \delta$$

para todo S que satisface (53)-(54). Concluimos que

$$\frac{1}{r}\eta_i > (1-\delta)(\hat{\eta}_i - \delta)$$

y, como ϵ es arbitrariamente pequeño, vemos que existen puntos en $\widetilde{F}'_r$, arbitrariamente cerca de $\hat{\eta}$, si r es suficientemente grande. Por lo tanto

$$W(t,...,t) \subset \lim_{r\to\infty} \inf \widetilde{F}'_r (t,t,...,t)$$

y, como todos los $\widetilde{F}'_r \subset W$, tenemos

$$(57) \qquad W(t,...,t) = \lim \widetilde{F}'_r (t,t,...,t).$$

En (57), es interesante ver que, ni el conjunto de valores de importancia para cada x^i_j es acotado, entonces en (53) se puede usar la misma f para todos los puntos η, las funciones u^i serán uniformemente continuas, y por lo tanto la convergencia será uniforme sobre todo el conjunto W(t,...,t). La convergencia no es uniforme con respecto a t, ya que valores cerca de 0 requieren valores muy grandes de r para (56); la convergencia será uniforme en t para cualquier intervalo cerrado que no contenga a 0. Por lo tanto: Teorema 3. Asumiendo que los valores relevantes de los x^i_j sean uniformemente acotados, entonces la convergencia d $\widetilde{F}'_r$ (t,t,...,t) a W(t,t,...,t) es uniforme en η sobre todo W, y uniforme en t sobre cualquier intervalo [J,1], donde $J > 0$.

En realidad, la condición de cota uniforme en los x^i_j no es terriblemente restrictiva. En efecto, quiere decir que ninguno de los jugadores reciba nunca más que un máximo f, de ningún bien. Esto es razonable ya que, en muchos casos, sólo hay una cantidad fija de cada bien entre todos los jugadores; cualquier transferencia adicional a uno de ellos causaría un déficit que probablemente implicaría utilidades negativas y grandes al jugador con tal déficit.

Encontramos, pues, que cada sucesión convergente de puntos en los conjuntos F'_r (t,t,...,t) converge a un punto de W (t,t,...,t); si, además, los puntos de la sucesión son o.s.p. en los F'_r correspondientes, su límite también será o.s.p. en W. Pues, supóngase que $\eta^* = \lim \eta(r)$ no es o.s.p. en W. Entonces existe $\eta \epsilon$ W con $\eta_k \geqslant \eta^*_k$ para todo k, $\eta_i > \eta^*_i$ para una i por lo menos. Una pequeña cantidad del bien j (arbitrario) se puede entonces transferir de los jugadores de tipo i a los demás jugadores (es decir, podemos disminuir ξ^i_j una cantidad pequeña y aumentar los ξ^k_j, $k\neq i$, cantidades muy pequeñas), obteniendo así un punto nuevo, η', con

$$\eta'_k > \eta^*_k$$

para todo k. Entonces, para r suficientemente grande, podemos encontrar $\eta'(r)$ en $\widetilde{F}'_r$, arbitrariamente cerca a η'. Encontramos entonces que $\eta'_k(r) > \eta_k(r)$ para todo k, y vemos que $\eta(r)$ no es o.s.p. en $\widetilde{F}'_r$.

Como los conjuntos W y $\widetilde{F}_r$ son todos convexos, convergencia de los conjuntos implicará convergencia de los hiperplanos tangentes. Es decir que, si los puntos o.s.p. convergen,

$$\eta(r) \to \eta^*$$

de la misma manera los vectores $(\lambda_1,..., \lambda_n)$ convergen:

$$\lambda(r) \to \lambda^*$$

donde $\lambda(r)$ y λ^* son los vectores lagrangianos, definidos para $\eta(r)$ y η^* respectivamente, y normalizados por $\sum_{i=1}^{n} \lambda i = 1$. Además, debido a una propiedad bien conocida de los conjuntos convexos, esta convergencia será uniforme para cualquier subconjunto compacto de W; en particular será uniforme sobre la parte no negativa de W, que es la única que nos interesa.

Cuando r aumenta, encontramos que (46) toma la forma aproximada

$$(58) \qquad \eta_i(t) \cong w^i(\xi^i(t); rt)$$

ó

$$(59) \qquad y_i(t) \cong tu^i\left(x^i(t)\right)$$

donde $x^i(t) = \xi^i(t)/rt$, y donde el error en (59) se acerca a 0 cuando r crece sin ser acotado. Aquí, X(t) es una alocación factible y eficiente, y por tanto nos dará vectores de precio p(t) y lagrangiano $\lambda(t)$ que satisfacen (3).

Consideremos, ahora, la ecuación (45)

$$\dot{\eta}_i = \lambda_i \sum_s \left\{ \prod_k B(r,s_k;t) \right\} \frac{s_i}{t} \sum_k \frac{w^k\left(\xi^k(s);s_k\right) - w^k\left(\xi^k(s');s'_k\right)}{\lambda_k}$$

Aquí estamos más que todo interesados en los términos $w^k(\xi^k(s);s_k) - w^k(\xi^k(s');s'_k)$;asumiremos que

$$\xi^k(s') = \xi^k(s) + \delta\xi^k$$

donde los $\delta\xi^k$ son cantidades pequeñas. (Esto pasa porque los vectores s y s' casi son iguales). Entonces, para $k \neq i$, $s_k = s'_k$, luego

$$w^k\left(\xi^k(s');s'_k\right) = s_k u^k\left(\frac{\xi^k(s')}{s_k}\right)$$

$$= s_k u^k\left(\frac{\xi^k(s)}{s_k}\right) + s_k \sum \frac{1}{s_k} u^k_j \, \delta\xi^k_j$$

$$= w^k\left(\xi^k(s);s_k\right) + \lambda_k \sum P_j \, \delta\xi^k_j$$

Así, para $k \neq i$, tenemos

$$\frac{w^k\left(\xi^k(s);s_k\right) - w^k\left(\xi^k(s');s'_k\right)}{\lambda_k} = -\sum_{j=1}^{m} P_j \, \delta\xi^k_j$$

En cambio, $s'_i = s_i - 1$, luego

$$w^i\left(\xi^i(s),s'_i\right) = (s_i - 1)u^i\left(\frac{\xi^i(s)}{s_i - 1}\right)$$

Tenemos, pues,

$$\frac{\xi^i(s)}{s_i - 1} = \frac{\xi^i(s)}{s_i} + \frac{\xi^i(s)}{s_i(s_i -)}$$

y entonces,

$$u^i\left(\frac{\xi^i(s)}{s_i - 1}\right) \cong u^i\left(\frac{\xi^i(s)}{s_i}\right) + \frac{\lambda_i}{s_i(s_i - 1)} \sum P_j \xi^i_j$$

o si ponemos $x^i_j = \xi^i_j / s_i$,

$$u^i\left(\frac{\xi^i(s)}{s_i - 1}\right) \cong u^i\left(\frac{\xi^i(s)}{s_i}\right) + \frac{\lambda_i}{s_i - 1} \sum P_j \, x^i_j$$

y

$$w^i\left(\xi^i(s);s'_i\right) \cong \frac{s_i - 1}{s_i} \; w^i\left(\xi^i(s);s\right) +$$

$$+ \lambda_i \sum P_j \, x^i_j$$

Por lo tanto,

$$\frac{w^i\left(\xi^i(s);s_i\right) - w^i\left(\xi^i(s');s'_i\right)}{\lambda_i} =$$

$$= \frac{1}{\lambda_i s_i} w^i\left(\xi^i(s);s_i\right) - \sum P_j \, x^i_j - \sum_{j=1}^{m} P_j \, \delta\xi^i_j$$

luego, en (45), la sumatoria será igual a

$$\frac{1}{\lambda_i s_i} w^i\left(\xi^i(s);s_i\right) - \sum_{j=1}^{m} P_j x^i_j - \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} P_j \delta\xi^k_j$$

Esta última sumatoria es 0 porque los $\delta\xi^k$ deben sumar a cero, y vemos que (45) tiene la aproximación

(60)

$$\dot{\eta}_i = \sum_s \left\{ \prod B(r,s_k;t) \right\} \frac{1}{t} \left[w^i - \lambda_i s_i \sum P_j x^i_j \right]$$

Ahora, bien, la distribución probabilística está casi completamente concentrada cerca de $s_i = rt$, lo que nos da

(61) $$\dot{\eta}_i \cong \frac{1}{t} \eta_i - \lambda_i r \sum P_j x^i_j$$

o equivalentemente,

(62) $$\dot{y}_i \cong \frac{1}{t} y_i - \lambda_i \sum P_j x^i_j$$

Esto, junto con

$$y_i(t) \cong t u^i(x^i)$$

nos da el sistema asintótico, es decir, si t crece sin cota, la solución del sistema verdadero (19) aproxima la del sistema asintótico (62).

Si, en lugar de y_i, tratamos con $u^i = y_i/t$, tendremos

(63) $$\dot{u}^i = -\frac{1}{t} \lambda_i \sum P_j x^i_j$$

como el sistema deseado. Repetimos que esta aproximación no es válida para la vecindad de $t = 0$. Cerca de $t = 0$, la aproximación

$$u^i(t) = ty_i^* + 0(t^2)$$

donde los y_i^* satisfacen (24), será válida, y nos da un punto de salida.

Con el sistema (63), notamos que los puntos de equilibrio, $\dot{u}^i = 0$, satisfacen

$$\sum p_j x_j^i = 0 \tag{64}$$

o sea que son los equilibrios competitivos del mercado. Empero, no se puede esperar que el sistema (63) sea en general estable; aún si desestimamos los pequeños errores debidos a la aproximación, no hay garantía alguna de que el sistema converja al equilibrio. Por consiguiente, nuestro modelo para el valor no converge en general. En esto se diferencia del modelo Shapley-Shubik para juegos sin pagos laterales, en el cual el valor converge al equilibrio competitivo cuando r crece. Esta diferencia radica, sobre todo, en que nuestro modelo es dinámico y trata (en cierto sentido) de imitar el comportamiento temporal de cierto mercado idealizado; el modelo Shapley-Shubik, en cambio, es estático. En la vida real, los mercados no siempre convergen al equilibrio.

8. Equilibrios Económicos Generales

Como se ha visto, el modelo de valor para nuestro juego de mercado replicado nos da, asintóticamente, un sistema de ecuaciones diferenciales cuyos puntos de equilibrio son, precisamente, los equilibrios competitivos del mercado. En esta sección presentaremos un modelo de comportamiento de mercado que nos dará —esperamos— cierta justificación para nuestro sistema asintótico. Nuestra consideración aquí no es tanto el problema juego-teórico, cuanto el problema de equilibrio económico general para el mercado descrito en la 1a. sección de este artículo.

En general, la mayoría de análisis de esta situación asumen la existencia de un "corredor" que promulga precios para los varios bienes del mercado. Conociendo estos precios, los varios jugadores (negociantes) ofrecen entonces la venta o compra de ciertas cantidades de los bienes a estos precios (estas son las cantidades x_j^i). Si estas ofertas son compatibles (es decir, si se cumplen las condiciones (2)), el corredor las acepta y las transacciones se llevan a cabo. Como las ofertas se asumen, de antemano, satisfacer (3) y (4) (es decir, todos los negociantes tratan de maximizar su utilidad sujeto a la restricción de presupuesto), este proceso nos da un equilibrio competitivo.

Supongamos, empero, que las ofertas no cumplen (2). En este caso, el corredor rechaza todas las ofertas y reajusta los precios, subiendo los precios de aquellos bienes que muestran exceso de demanda, y bajándolos para aquellos que muestran exceso de oferta. Con estos nuevos precios, los negociantes hacen nuevas ofertas, y el proceso continúa hasta (tal vez) obtener convergencia. Condiciones para convergencia al equilibrio se han estudiado en [1] y [2].

Aunque no deseamos iniciar una polémica en cuanto a los méritos de este modelo, consideramos que no es perfecto, luego puede haber provecho en estudiar otros modelos. Consideremos, pues, el siguiente proceso:

Asumamos que los varios jugadores se reúnen a negociar. Puede haber precios promulgados para los varios bienes, pero aún si no los hay, los jugadores pueden generalmente aumentar su utilidad al negociar, luego ciertas negociaciones se llevarán a cabo, lo que nos dará —implícitamente por lo menos— precios comparativos para los bienes. Después de cierto tiempo, las negociaciones pararán, por cuanto se habrá llegado a una alocación eficiente. Esta alocación determina un "precio-sombra" para cada bien, por la condición (3). En general encontraremos, sin embargo, que las condiciones de equilibrio (4) no están satisfechas; esto se debe a que algunos de los negocios se llevaron a cabo antes de determinar los precios finales, y por consiguiente algunos de los jugadores encuentran que hicieron negocio "malos", es decir que compraron más caro, o vendieron más barato, que a los precios finales. Otros, en cambio, han hecho "buenos" negocios, y el valor final (a los precios del mercado) de su paquete final de bienes es superior al de su dote original. Así pues, cuando las negociaciones terminan, las condiciones (2)-(3) se cumpliran, pero no necesarimente las (4).

Para convertir esto en un sistema dinámico, asumiremos, primero, que los bienes son perecederos, y segundo, que los varios negociantes son también productores, y producen los bienes de manera a reemplazarlos a medida que se agotan. Más exactamente, asumimos que, en un período de tiempo, una pequeña fracción, α, de los bienes existentes desaparece. Simultáneamente, cada negociante produce la misma fracción, α, de su dote inicial. La cantidad total de cada bien permanece, pues, constante, pero, debido a los negocios, la distribución general de estos bienes varía con el tiempo.

Supongamos que la dote inicial de i era $z^i = (z_1^i, \ldots, z_m^i)$. Al principio de un período de tiempo, sus tenencias son $z^i + x^i$. Ahora bien, durante el período el consumo de estos bienes será $\alpha z^i + \alpha x^i$; al mismo tiempo, i produce la cantidad $\alpha^{z}i$, luego sus tenencias cambian por la cantidad $-\alpha x^i$. Él puede ahora, naturalmente, negociar con los otros jugadores, pero esto se debe hacer a los precios presentes del mercado, y el efecto neto de todo esto es que, a los precios presentes, el valor de sus bienes cambiará por la cantidad total $-\alpha \sum p_j x_j^i$. Es verdad que las negociaciones harán cambiar los precios del mercado, pero si el período de tiempo es corto, y α es pequeño, este cambio debe ser relativamente pequeño. Tendremos, pues, la aproximación,

$$\sum_{j=1}^{m} p_j \triangle x_j^i \cong -\alpha \sum_{j=1}^{m} p_j x_j^i$$

donde Δx_j^i es el cambio neto en la cantidad del bien j que el jugador i posee. Esta aproximación será exacta en el límite —dejando que el período de tiempo se aproxime a 0— dándonos un sistema diferencial

$$(65) \qquad \sum_{j=1}^{m} p_j \dot{x}_j^i = -\alpha \sum_{j=1}^{m} p_j x_j^i \qquad i=1,\dots,n.$$

Ahora, debemos tener

$$\dot{u}^i = \sum_{j=1}^{m} u_j^i \dot{x}_j^i$$

pero $u_j^i = \lambda_i p_j$, luego

$$\dot{u}^i = \lambda_i \sum_{j=1}^{m} p_j \dot{u}_j^i$$

ó

$$(66) \qquad \dot{u}^i = -\alpha\lambda_i \sum_{j=1}^{m} p_j x_j^i$$

Se puede ver que, aparte el factor α que aparece aquí, y el factor 1/t en (63), los dos sistemas son idénticos. El cambio de variable $T = \alpha e^t$ hará que (66) sea idéntico a (63). Así pues, este modelo de mercado "razonable" parece apoyar nuestro modelo de valor.

BIBLIOGRAFIA

1. Arrow, K.J., and L. Hurwicz. "On the Stability of Competitive Equilibrium I", Económetrica, 26 (1958), 522-552.
2. Arrow, K.J., H.D. Block, and L. Hurwicz. "On the Stability of Competitive Equilibrium II", Económetrica, 27 (1959), 82-109.
3. Arrow, K.J., and F. Hahn. General Competitive Analysis San Francisco (Holden-Day) 1971.
4. Aubin, J.P. "Coeur et Valeur des Jeux Floux a Paiements Latéraux", C.R. Acad. Sc. Paris 279 (1974), 891-894.
5. Aubin, J.P. "Coeur et Equilibries des Jeux Floux sans Paiements Lateraux", C.R. Acad. Sc. Paris 279 (1974), 963-966.
6. Blackett, D.W. Elementary Topology New York (Academic Press) 1967.
7. Debreu, G. "New Concepts and Techniques for Equilibrium Analysis", Int. Econ. Review 3 (1962), 257-273.
8. Debreu, G. "Economies with a Finite Set of Equilibria", Económetrica 38 (1970), 387-392.
9. Dierker, E., and H. Dierker. "The Local Uniqueness of Equilibria", Económetrica 40 (1972), 867-881.
10. Owen, G. "The Tensor Composition of Non-Negative Games", Annals of Mathematics Studies No. 52, Princeton (Princeton Univ. Press), 1964, 307-326.
11. Owen, G. "Multilinear Extensions of Games", Management Science 18 (1972), P64-P79.
12. Owen, G. "Values of Games Without Side Payments", Int. J. Game Th. 1 (1972), 95-109.
13. Rockefeller, R.T. Convex Analysis Princeton (Princeton Univ. Press), 1970.
14. Shapley, L.S., and M. Shubik. "Pure Competition, Coalitional Power, and Fair Division", Int. Econ. Review 10 (1969), 337-362.
15. Shapley, L.S., and M. Shubik "On Market Games", J. Econ. Theory 1 (1969), 9-25.