DOS ECUACIONES EN DIFERENCIAS FINITAS CON COEFICIENTES VARIABLES

Gabriel Póveda Ramos

INTRODUCCION

1. Es un hecho curioso que el estudio de las ecuaciones en diferencias finitas que se encuentra en libros, textos, revistas, etc. hasta el día de hoy, termina en las ecuaciones lineales con coeficientes constantes. Solamente para la ecuación lineal de primer orden se encuentran soluciones utilizables cuando los coeficientes son variables[1], y hay casos particulares de ecuaciones de primer orden, no lineales, que admiten algunos procedimientos particulares, ad-hoc, para resolverlas[2]. Los libros dedicados a estos temas, que los abarcan con mayor amplitud, son los de Milne-Thompson y Ch. Jordan (Ver bibliografía) y en ellos no se estudian a fondo las ecuaciones de orden mayor que 1, con coeficientes variables, ni siquiera aquellas que son lineales. En general, la teoría de las ecuaciones en diferencias finitas sigue siendo en parte terra incognita, a pesar de su interés teórico y de sus numerosas aplicaciones posibles.

2. El material que se presenta en este artículo ha sido todo elaborado por el autor, sin poder apoyarse en la literatura disponible en nuestro medio, por la casi total ausencia de bases teóricas en la bibliografía que se estudió. Después de estar escrito el artículo, el autor advirtió que una parte del trabajo hecho podía haberse abreviado usando uno o dos teoremas del capítulo 6 del libro de Levy y Lessman, al cual ya se hizo referencia[2]. Sin embargo, el autor cree aún que el trabajo merece presentarse por tres razones:

a. Porque contiene deducciones y observaciones que no existen publicadas en la literatura accesible actualmente en Colombia.

b. Porque puede tener alguna utilidad didáctica.

c. Porque puede estimular en algún lector el interés por estos temas, que son relativamente elementales pero en los cuales hay todavía un buen campo abierto a la investigación.

Por eso se expondrá completamente el trabajo como fue desarrollado por el autor.

LA ECUACION EN DIFERENCIAS FINITAS DE EULER–CAUCHY

3. Se trata aquí de deducir un método para resolver la ecuación en diferencias finitas

$$(3.1)\quad (n+m-1)^{(m)}\, y(n+m) + a_1 (n+m-2)^{(m-1)}\, y(n+m-1) + \dots + a_{m-2} (n+1)^{(2)}\, y(n+2) + a_{m-1}\, n\, y(n+1) + a_m\, y(n) = 0,$$

cuyos términos tienen el siguiente significado:

$y(n)$ es una sucesión incógnita, definida en el dominio de los números naturales positivos, o sea que la variable independiente es $n = 1, 2, 3, 4, \dots$; m es un número entero positivo fijo y predeterminado, mayor o igual que 1. Se le denomina el **orden** de la ecuación;

$n^{(m)} = n(n-1)\dots(n-m+1) = n!/(n-m)!$;

$a_1, a_2, \dots a_m$ son constantes reales o complejas, conocidas y predeterminadas. a_m no es cero. Si lo fuera, el orden de la ecuación sería realmente $m-1$ y no m, como es fácil apreciar.

Además, se pretende que la solución satisfaga las **condiciones iniciales**

$$(3.1.1)\quad y(1) = y_1,\ y(2) = y_2,\ \dots,\ y(m) = y_m$$

siendo $y_1, y_2, \dots, y_m$, números reales o complejos, conocidos y predeterminados. Este tipo de problema se llama un **problema de ecuación en diferencias finitas con condiciones iniciales**, y tiene varias analogías formales con el conocido problema de Cauchy sobre ecuaciones diferenciales con condiciones iniciales.

Por otra parte, la forma de la ecuación (3.1) presenta también cierta analogía con la forma de la ecuación diferencial

$$(3.2)\quad x^m (d^m y/dx^m) + a_1 x^{m-1} (d^{m-1} y/dx^{m-1}) + a^{m-2} x^2 (d^2 y/dx^2) + a_{m-1} x(dy/dx) + a_m \cdot y = 0$$

(1) Ver, por ejemplo Miller, Keneth S., **An Introduction to the Calculus of Finite Differences and Difference Equations**, New York, Dover Publications Inc., 1966, 160.

(2) Ver, Levy, H. y F. Lessman, **Finite Difference Equations**, New York, Tihe Macmillan Company, 1961, 278.

ecuación a la cual se le llama ecuación de Euler y Cauchy, y cuya discusión y solución son muy conocidas.

En razón de la analogía de la ecuación original (3.1) con la ecuación (3.2), conviene llamar a la primera con el nombre de **ecuación en diferencias finitas de Euler y Cauchy, de orden m**, homogénea.

En los tratados y textos corrientes sobre ecuaciones en diferencias finitas no se la presenta en absoluto, o al menos no se la presenta como caso aparte, digna de su propio estudio.

4. Para explicar mejor la forma de la ecuación, puede presentarse la ecuación (de Euler-Cauchy) de 4o. orden:

$$(n+3)(n+2)(n+1)n.\,y(n+4) + a_1\,(n+2)$$

$$(n+1)\,n.\,y(n+3) + a_2\,(n+1)n.y(n+2) +$$

$$+ a_3\,n.y(n+1) + a_4\,.y(n) = 0$$

$$(a_4 \neq 0,\ n = 1, 2, 3...)$$

El significado de los términos es el mismo que se explicó atrás. Usando el operador de desplazamiento E, definido como $E^k\,y(n) \equiv y\,(n+k)$ para todo n y para todo k que sean números naturales, la ecuación de 4o. orden se escribe también

$$(n+3)^{(4)}\,E^4\,y(n) + a_1\,(n+2)^{(3)}.\,E^3\,y(n)\ X$$

$$+ a_2\,(n+1)^{(2)}.E^2\,y(n) + a_3\,n.\,E\,y(n) + a_4\,.\,y(n) = 0$$

5. Las potencias del operador nE.– Definimos el operador nE sobre la clase de las sucesiones y(n) definidas en los naturales positivos (n= 1, 2, 3,...), por la identidad.

$$(5.1)\ (nE).\,y(n) = n.E\,y(n) = n.\,y(n+1)$$

Por la aplicación reiteradas podemos definir las potencias sucesivas de n, así, la segunda potencia $(nE)^2$ es tal que

$$(5.2)\ (nE)^2\ y(n) = (nE)\,[n.E\,y(n)] = n(n+1).$$

$$.\,E^2\,y(n) = (n+1)^{(2)}\,E^2\,y(n)$$

Puesto que, según la definición de E, se tiene

$$E[n.\,E\,y(n)] = (En)\,.\,E\,(Ey) = (n+1).\,E^2\,y(n).$$

La tercera potencia es $(nE)^3$, tal que

$$(5.3)\ (nE)^3\,y(n) = (nE)\,[(n+1)^{(2)}\,E^2\,y(n)] =$$

$$= n(n+2)^{(2)}\,E^3\,y(n) = (n+2)^{(3)}\,E^3\,y(n)$$

Observando las identidades (5.1), (5.2) y (5.3), se puede escribir:

$$nE = n^{(2)}E \qquad (nE)^2 = (n+1)^{(2)}E^2$$

$$(nE)^3 = (n+2)^{(3)}\,E^3$$

y en general

$$(5.4)\ (nE)^k = (n+K-1)^{(k)}\,E^k$$

lo cual puede demostrarse por el método de inducción completa. La ecuación (5.4) permite varias cosas, entre otras las siguientes:

a. Definir las potencias del operador (nE):

$$(5.5)\ (nE)^k\,.\,y(n) = (N+k-1)^{(k)}E^k\,y(n) =$$

$$(n+k-1)^{(k)}\,y(n+k)$$

b. Interpretar expresiones de la forma $(n+k-1)^{(k)}$ $y(n+k)$ en términos de ese operador:

$$(5.6)\ (n+k-1)^{(k)}\,y(n+k) = (nE)^k\,.\,y(n)$$

c. Comprobar que $(nE)^h\,(nE)^k = (nE)^{n+k} =$

$$= (nE)^k\,(nE)^h$$

6. La Ecuación de Euler - Cauchy de Primer Orden. La forma más sencilla de la ecuación (3.1) que estamos estudiando, es

$$(6.1)\ n\,y(n+1) - c\,.\,y(n) = 0 \text{ o bien}$$

$$(6.2)\ (nE-c)\,y(n) = 0$$

es decir

$$(6.2)\ y(n+1) - (c/n)\,y(n) = 0\quad (n=1, 2, 3, ...)$$

La anterior ecuación es un caso particular de la ecuación general lineal de primer orden

$$(6.3)\ y(n+1) - g(n)\,.\,y(n) = Q(n)$$

cuya solución general es (1)

$$(6.4)\quad y(n) = \prod_{h=o}^{n-1} g(h)\left[\sum_{k=o}^{n-1} Q\,k \prod_{j=1}^{j=k} \frac{1}{g(j)} + A\right]$$

Siendo A una constante arbitraria, o una función arbitraria pero periódica con período igual a 1.

Aplicando la fórmula (6.4) a la ecuación (6.2) encontramos que la solución de la ecuación

$$n\,.\,y(n+1) - c.\,y(n) = 0$$

es la sucesión (o mejor, la familia de sucesiones)

$$(6.5)\ y(n) = A\,n\,c^n/n!$$

(1) Ver, por ejemplo, Miller, op. cit.

en donde A es cualquier constante arbitraria, o, si se quiere, cualquier función definida en los reales positivos y con período igual a 1.

7. Las potencias del operador (nE−c). Es fácil comprobar que las potencias de este operador pueden obtenerse usando formalmente el binomio de Newton, a condición de tratar como un sólo símbolo el símbolo nE. Es decir, para todo número entero positivo k se tiene

$$(7.1)\ (nE-c)^k = \sum_{h=o}^{k} \binom{k}{h} (-c)^{k-h}\,(nE)^h$$

y, según la fórmula (5.4):

(7.2)
$$(nE-c)^k = \sum_{h=o}^{k} \binom{k}{h} (-c)^{k-h} \; (n+h-1)^{(h)} \; E^h$$

Observando la fórmula (7.2) se deduce que toda ecuación en diferencias finitas que pueda escribirse en la forma

(7.3) $(nE-c)^k \; y(n) = 0$

es también del tipo

(7.4)
$$(n+k-1)^{(k)} \; E^k \; y(n) + \ldots + a_{k-1} \; n \; y(n+1) + a_k \; .$$
$$. \; y(n) = 0$$

o sea que pertenece a la clase que hemos llamado ecuaciones de Euler-Cauchy, de orden k.

8. La ecuación

(8.1) $(nE-c)^2 \;\; y(n) = 0$

puede resolverse (o "sumarse" como podría decirse también) fácilmente.
Poniendo

(8.2) $z(n) = (nE-c) \; y(n)$

la ecuación (8.1) propuesta se escribe

$$(nE-c). \, z(n) = o$$

que es como la ecuación (6.2), y su solución es como la fórmula (6.5):

$$z(n) = A_1 \;\; nc^n/n!$$

siendo A_1 una constante arbitraria
Sustituyendo en (8.2) se obtiene

(8.3) $(nE-c) \; y(n) = A_1 \, . \, nc^n/n!$

$$(E-c/n) \; y(n) = A_1 \;\; c^n/n!$$

La ecuación anterior, a su vez, puede tratarse como ecuación de primer orden en y(n), no homogénea. Usando la fórmula general (6.4) obtenemos:

$$y(n) = \prod_{h-1}^{n-1} (c/h) \left[A_2 + \sum_{k=1}^{n-1} A_1 \; \frac{c^k}{k!} \prod_{j=1}^{k} (j/c) \right]$$

$$= \prod_{h=1}^{n-1} (c/h) \;\; (A_2 + \sum_{k=1}^{n-1} A_1) = [\, c^{n-1} \;/(n-1)!]$$

$$[A_2 + (n-1) \;\; A_1] = (c^n/n!) \;\; [\; n \;\; (A_2/c) \; + \; n(n-1)$$

$$(A_1/c)]$$

es decir

$$y(n) = (c^n/n!) \, [\; K_1 \;\; n^{(1)} + K_2 \;\; n^{(2)}]$$

o bien

(8.4) $y(n) = (c^{\,n}/n!) \, [\; C_1 \, n + C_2 \, n^2 \,] \;\; n = 1,2,3,\ldots$

en donde C_1 y C_2 son constantes arbitrarias que podrán luego determinarse fijando dos condiciones iniciales (o en dos puntos distintos, eventualmente) para y(n).

9. En general, la solución de la ecuación en diferencias finitas.

(9.1) $(nE-c)^r \; y(n) = 0 \;\; (n=1,\, 2,\, 3,\ldots)$

en donde r es un número entero positivo y c es un número real o complejo, es

(9.2)
$$y(n) = (c^n/n!) \, [\; A_1 \;\; n + A_2 \;\; n^{(2)} + \ldots + A_r \;\; n^{(r)}]$$

Este teorema se demuestra por inducción completa. En efecto. Admitamos que la solución (9.2) es válida hasta algún valor de r. Entonces la ecuación de orden r+1 de la forma (9.1) puede escribirse

(9.3) $(nE-c)^{r+1} \;\; y(n) = 0$

y, poniendo

(9.4) $(nE-c) \; y(n) = z(n),$

la (9.3) se escribe

$$(nE-c)^r \;\; z(n) = 0$$

$$a(n) = (c^n/n!) \, [\; A_1 \;\; n + \; A_2 \;\; n^{(2)} + \ldots + A_r \;\; n^{(r)} \;]$$

Sustituyendo en (9.4) y dividiendo por n:

$$[\; E-c/n \;] \; y(n) = (c^n/n!n) \, [\; A_1 \;\; n + \ldots + A_r \;\; n^{(r)} \;]$$

Esta es una ecuación en DD.FF., lineal, de primer orden, de la forma (6.2) que se resuelve con la fórmula (8.4):

$$y(n) = \prod_{k=1}^{n-1} (c/k) \left\{ \sum_{k=1}^{n-1} (c^k/k!k) \, [\; A_1 \;\; k + \ldots + \right.$$

$$\left. + \; A_r k^{(r)}] \prod_{j=1}^{k} \;\; (j/c) + B_o \right\}$$

$$= \prod_{k=1}^{n-1} \frac{c}{k} \left[\sum_{k=1}^{n-1} \frac{c^k}{k!} \;\; (B_1^1 + B_2^1 \; k + \ldots + B_r^1 \, k^{r-1}) \frac{k!}{c^k} + B_0 \right]$$

Pero como es bien sabido:

$$\sum_{1}^{n-1} k^m = \text{Polinomio en n de grado m} + 1$$

de donde

$$y(n) = \frac{c^{n-1}}{(n+1)!}\ (B_0 + B_1\, n + \cdots + B_r\, n^r)$$

Multiplicando y dividiendo por cn, se tiene

$$y(n) = \frac{c^n}{n!}(B_0\, n + B_1\, n^2 + \ldots + B_r\, n^{r+1})$$

en donde las B contienen un factor c. Transformando las potencias ordinarias de n en potencias factoriles se encuentra, finalmente

$$y(n) = (c^n/n!)\,[\, A_1^1\, n + \ldots + A_{r+1}^1\, n^{(r+1)}\,]$$

que es precisamente como lo prevé la fórmula (9.2) al sustituir r por r + 1. Queda así demostrado que la fórmula (9.2) es la solución general de la ecuación en DD.FF. propuesta en (9.1).

10. Estamos así en condiciones de tratar la ecuación en DD.FF. de Euler y Cauchy, homogénea, de orden m:

(3.1)

$$(n+m-1)^{(m)}\, y(n+m) + a_1\, (n+m-2)^{(m-1)}\, y(n+m-1) + \ldots + a_{m-1}\, n\, y(n+1) + a_m\, .y(n) = 0$$

(n=1,2,3,4...)

Usando el operador E, la ecuación puede escribirse

$$[(n+m-1)^{(m)}\, E^m + a_1\, (n+m-2)^{(m-1)}\, E^{m-1} + \ldots + a_{m-1}\, nE + a_m]\, y(n) = 0$$

y, teniendo en cuenta la fórmula (5.6), podemos poner también

(10.1)

$$[(nE)^m + a_1\, (nE)^{m-1} + \ldots + a_{m-1}\, (nE) + a_m]$$

Es fácil darse cuenta de que el polinomio-operador que aparece en el lado izquierdo de la ecuación anterior puede tratarse como un elemento perteneciente a un anillo de polinomios (en el sentido del Algebra Moderna). Por lo tanto, puede factorizarse en factores de primer grado en nE. Sean b_1, b_2,..., b_h los ceros o raíces simples del polinomio; y sean c_1, c_2,..., c_k las raíces múltiples, siendo d_1, d_2,..., d_k sus multiplicidades respectivas. Esto significa que la ecuación característica

(10.2)

$$x^m + a_1\, x^{m-1} + \ldots + a_{m-1}\, x + a_m = 0$$

puede factorizarse como

$$(x-b_1)(x-b_2)..(x-b_h)(x-c_1)^{d_1}(x-c_2)^{d_2}\ldots(x-c_k)^{d_k} = 0$$

siendo las multiplicidades tales que

(10.3) $h+d_1 + d_2 + .. + d_k = m$

En conclusión, la ecuación (10.1) es equivalente a la ecuación original (3.1), y también puede escribirse

(10.4)

$$[(nE-b_1)..(n-b_h)(nE-c_1)^{d_1}\ldots(nE-c_k)^{d_k}]\, y(n)=0$$

Es bien sabido que si $a_m \neq 0$ en la ecuación (10.2), entonces ninguno de los ceros b_1,..., b_h, c_1,.. c_k, puede ser nulo, debido a la identidad $b_1\, b_2 \ldots b_h\, c_1^{\,d_1} \ldots c_k^{\,d_k} = a_m$.

11. Recordemos dos teoremas muy importantes de la teoría de ecuaciones en DD.FF.

11.1 La solución general de toda ecuación en DD. FF. de orden m, contiene m constantes arbitrarias. Estas constantes arbitrarias pueden interpretarse, más generalmente, como funciones periódicas arbitrarias de período igual a 1.

11.2 Para toda ecuación en DD.FF. que sea lineal, de orden mayor que uno, si se conocen dos soluciones linealmente independientes, $f_1(n)$, $f_2(n)$, toda combinación lineal de la forma

$$A_1\, f_1(n) + A_2\, f_2(n)$$

la satisface también, siendo A_1, A_2 funciones periódicas arbitrarias, con período igual a 1. A este tipo de funciones se les llama "periódica-unitaria".

12. Estamos ya en condiciones de describir el método para resolver la ecuación en DD.FF. de Euler-Cauchy de orden $m \geqslant 1$, presentada en la forma (3.1). El algoritmo correspondiente consiste de los siguientes pasos:

a. Convertir la ecuación de la forma original (3.1) a la forma (10.1), como polinomio-operador en la "variable" nE, mediante la identidad (5.6);

b. Factorizar el polinomio-operador que aparece en (10.1), en factores lineales, o sea determinar los "ceros" o raíces del polinomio-operador, el cual quedará en la forma (10.4);

c.1) Para cada raíz simple real b_k, construir el término (o solución particular)

(12.1) $\quad A_k\, .\, n\, b_k^{\,n}/n!$

o, si se prefiere,

$$A_k\, .\, b_k^{\,n}/(n-1)!$$

Si la ecuación es de orden m=1, esta es la solución general.

c.2) Para cada pareja conjugada, b_k, $b_k{}^*$, de raíces simples complejas,

$$b_k = R_k\, e^{i\theta}k,\ b_k^{\,*} = R_k\, e^{-i\theta}k\ (R_k = \text{mod}\ b_k,\quad \theta_k = \arg b_k)$$

construir el término (o solución particular)

(12.2)

$$(R_k^{\,n}/(n-1)!)\,(A_k \operatorname{sen} n\theta_k + A_k{+}1 \cos n\theta_k)$$

siendo A_k, A_k+1, funciones arbitrarias pero periódicas-unitarias, mutuamente independientes.

c.3) Para cada raíz múltiple real, c_k, de multiplicidad d_k, construir el término

(12.3)

$$\frac{c_k^{\,n}}{n!}\,[B_{k1}\,n+B_{k2}\,n^{(2)}+...+B_{k,d_k}\,n^{(d_k)}]$$

en donde las B's sonfunciones periódica-unitarias, arbitrarias. Si se prefiere, el polinomio en potencias factoriales que aparece en la fórmula anterior puede convertirse a pllinomio en potencias ordinarias usando las conocidas identidades entre potencias ordinarias y potencias factoriales con números de Stirling como coeficientes(1).

c.4) Para cada pareja conjugada de raíces complejas, múltiples,

$$c_j = C_j\, i\theta_j,\; c_j^* = C_j\, {-i\theta_j}\; (C_j = \text{mod } c_j,\; \theta_j = \arg c_j)$$

con multiplicidad d_j para cada una de ellas, construir la expresión

(12.4)

$$\frac{C_j}{n!}\;\text{sen } n\theta_j\,[B_{j1}\,n+..+B_j,d_j.n^{(d_j)}]\;+$$

$$+\;\cos n\theta_j\,[D_{j1}\,n+..+D_j,d_j.n^{(d_j)}]$$

en donde las B's y las D's son funciones arbitrarias, periódica-unitarias, mutuamente independientes.

d. Construir la solución general por superposición de los téminos resultantes de la etapa anterior. Esto significa que la solución general tendrá la forma

(12.5)

$$y(n) = \frac{1}{(n-1)!}\,[A_1\,b_1+...+A_h\,b_h]$$

$$+\,\frac{c_1^{\,n}}{n!}\,[B_{11}\,n+..+B_1,d_1\,n^{(d_1)}]+...+$$

$$\frac{ck^n}{n!}\,[B_{k1}\,n+...+B_k,d_k\,.n^{(d_k)}]$$

en donde:

$b_1, b_2,..\,b_h$ son las raíces simples (reales o complejas) de la ecuación característica (10.2).

$c_1, c_2,..., c_k$ son las raíces múltiples (reales o complejas) de la misma ecuación.

$d_1, d_2,..., d_k$ son las respectivas multiplicidades de $c_1,..., c_k$ $A_1,.., A_h$, $B_{11},.., B_{1d_1},..., B_{k1},..., B_{k,d_k}$ son funciones arbitrarias periódica-unitarias.

(1) Ver, por ejemplo, Hamming, Numerical Methods for Scientists and Engineers, Ch. 1.

$n=1,2,3,...,$ es la variable independiente discreta que recorre la sucesión de números naturales positivos.

Desde luego, si algunas parejas de las raíces simples y/o de las raíces múltiples, son complejas conjugadas, los términos que les corresponden en (12.5) pueden transformarse en términos de la forma (12.2) y (12.4), respectivamente. En la forma general (12.5) puede observarse que el número de funciones arbitrarias periódica-unitarias, es

$$h+d_1+...+d_k$$

que es igual a m según la ecuación (12.3), y que es precisamente como lo prevé el teorema de existencia de soluciones para ecuaciones en DD.FF. (Ver No. 11.1, más atrás).

13. Para resolver por completo el problema de la ecuación (3.1) con las condiciones iniciales (3.1.a), estudiamos luego la determinación de valores para las funciones arbitraria periódica-unitarias. Este punto lo estudiaremos para el caso de la ecuación de orden m=4, para evitar una gran complicación en la nomenclatura y en las expresiones que siguen, y porque el análisis que haremos es aplicable a cualquier otro valor m>1, sin modificaciones, y en forma que resultará evidente. Consideramos pues la ecuación

(13.1)

$$(m+3)^{(4)}\;y(n+4)\;+\;a_1(m+2)^{(3)}\;y(n+3)\;+...+\;a_4\,y(n) = 0\;(a_4\neq 0;\,n=1,2...)$$

que puede convertirse en

(13.2)

$$[(mE)^4+a_1\,(mE)^3+..+a_4]\,y(n)=0,$$

con las condiciones iniciales

(13.3)

$$y(1)=y_1,\,y(2)=y_2,\,y(3)=y_3,\,y(4)=y4,$$

siendo $y_1,.., y_4$, números reales o complejos conocidos, no todos nulos.

Supongamos que el polinomio-operador (13.2) tiene dos raíces simples, reales, b_1 y b_2, y una raíz doble, real, c. Entonces según la expresión (12.5), en este caso la solución general de (13.1) es

(13.4)

$$y(n) = \frac{n}{n!}[A_1\,b_1^{\,n}+A_2\,b_2^{\,n}]+\frac{c^n}{n!}[B_1\,n+B_2\,n^2]$$

en donde $b_1\neq 0$, $b_2\neq 0$, $c\neq 0$, porque $a_4\neq 0$.

Aplicando las condiciones iniciales se obtiene el sistema lineal

$$A_1\,b_1+A_2\,b_2+B_1\,c = y_1$$
$$A_1\,b_1^2+A_2\,b_2^2+B_1\,c^2+B_2\,c^2 = 2!y_2/2$$
$$A_1\,b_1^3+A_2\,b_2^2+B_1\,c^3+B_2\,2c^3 = 3!y_3/3$$
$$A_1\,b_1^4+A_2\,b_2^2+B_1\,c^4+B_2\,3c^4 = 4!\,y_4/4$$

donde las incógnitas son A_1, A_2, B_1 B_2. El determinante de este sistema es

(13.5)

$$D=b_1\ b_2\ c^3 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ b_1 & b_2 & c & 1 \\ b_1^2 & b_2^2 & c^2 & 2c \\ b_1^3 & b_2^3 & c^3 & 3c^2 \end{vmatrix} = b_1\ b_2\ c^3\ H$$

Respecto a c, el determinante H es un polinomio de grado 4o., que se anula (como es evidente) para $c=b_1$, $c=b_2$. Respecto a b_1, el determinante es un polinomio de grado 3o., que se anula para $b_1=b2$, $b_1=c$. Respecto a b_2, el determinante es un polinomio de grado 3o., que se anula para $b_2=b_1$, $b_2=c$. Por lo tanto el determinante H se puede factorizar.

(13.6)

$$H=k\,(b_1-b_2)\,(b_1-c)^2\ (b_2-c)^2$$

en donde k es una constante numérica que está por determinar. Para determinar a k basta observar que el producto de la diagonal principal del determinante H en (13.5) es $3b_2\ c^4$, y que al expandir el producto indicado en (13.6) el último término sería $k\ b_2\ c^4$. Por tanto k=3. Luego el determinante (13.5) del sistema es

$$D=3\ b_1\ b_2\ c^3\ (b_1-b_2)\,(b_1-c)^2\ (b_2-c)^2$$

Por hipótesis, b_1 es simple, luego $b_1\neq b_2$, $b_1\neq c$. Por la misma razón $b_2\neq c$. Luego

$$D\neq 0$$

Entonces existe un sistema de 4 números A_1, A_2, B_1, B_2, no todos nulos, que obligan a la solución general (13.4) a cumplir las condiciones iniciales (13.3), además de que satisface la ecuación en DD.FF. que se propuso en (13.1).

La aplicación de este razonamiento a cualquier ecuación del tipo que estudiamos, de cualquier orden $m>1$ es evidente por sí misma.

14. Por último, examinamos el comportamiento de la solución general encontrada (14.5), para valores grandes de la variable independiente n. Observemos que, en general, esa solución es una suma de términos (reales o complejos), correspondientes a cada raíz c_i de la ecuación auxiliar, que tiene la forma

(14.1)

$$\frac{c_i^{\,n}}{n!}\ [B_{i1}\ n+B_{i2}\ n^{(2)}+...+B_{i,d_i}\ n^{(d_i)}]$$

en donde $d_i\geq 1$ (si d=1, se trata de una raíz c_i simple).

Para valores enteros grandes de n, el factorial puede representarse asintóticamente por la fórmula de Stirling

$$n! = (n/e)^n\ \sqrt{2\pi n}\ e^{\theta/12\,n}\ (0<\theta<1)$$

Sustituyendo en (14.1):

(14.2)

$$\frac{(ec_i)^n}{n^{n-1/2}}\ [B'_{i1}\ n+...+B'_{id_i}\ n^{(d_i)}]$$

El límite de esta expresión cuando n tiende a infinito es cero porque para todo valor entero positivo del exponente d, y para todo número (real o complejo), x, se tiene

$$\lim_{n\to\infty}(x^n\ n^d/n^n)=\lim_{n\to\infty}(x^n/n^{n-d})=0$$

Esto significa que cualesquiera que sean los valores iniciales de una sucesión infinita y(n) que satisfaga una ecuación en DD.FF. de Euler-Cauchy homogénea, y cualesquiera que sean los coeficientes de ésta, la sucesión tiende al límite cero.

LA ECUACION MODIFICADA DE EULER-CAUCHY (FORMA INCREMENTAL)

15. Una ecuación en DD.FF. que tiene cierta analogía con la ecuación (3.1) es la ecuación

(15.1)

$$(n+m-1)^{(m)}\ \Delta^m\ y(n)+b_1\ (n+m-2)^{(m-1)}\ \Delta^{m-1}\ y(n)+$$
$$+..+\ b_{m-1}\ n\Delta y(n)\ +\ b_m\ y(n)=0$$

en cuyos términos tienen el mismo significado ya conocido. Los coeficientes b's son constantes (reales o complejas) predeterminadas. Esta ecuación se expresa en términos de las diferencias finitas sucesivas de y(n), $\Delta y(n)$,.., $\Delta^m\ y(n)$, a diferencia de la ecuación (3.1), que se expresa en términos de los valores sucesivos de la secuencia y(n), y(n+1),..., y(n+m). Por lo tanto, a la ecuación (15.1) la llamaremos ecuación de Euler-Cauchy, homogénea, modificada. Es importante notar que la una no es reductible a la otra, es decir, que son dos ecuaciones en DD.FF. distintas.

16. Las potencias del operador $n\Delta$. El operador $n\Delta$ se define sobre la clase de sucesiones y(n) (finitas o infinitas) mediante la identidad

(16.1)

$n\Delta\ .\ y(n)=n\ [y(n+1)-y(n)]$ para todo n de la sucesión y(n).

El "cuadrado" (o "segunda potencia") de $n\Delta$ es

(16.2)

$$(n\Delta)^2\ y(n)=(n\Delta)\ [n\Delta.y(n)]=n\ \Delta(n.\Delta\ y)=$$
$$=n(n\Delta^2\ y+\Delta y+\Delta^2 y)=(n+1)n\ \Delta^2\ y+n\ \Delta y=$$
$$=[(n+1)^{(2)}\ \Delta^2+n\Delta]\ y(n)$$

En general toda potencia entera positiva $(n\Delta)^m$ de este operador se define por recurrencia(1).

$$(n\Delta)^m\ y(n)=n.\Delta\ [(n\Delta)^{m-1}\ y(n)].$$

(1) Nótese que $(n\Delta)^k\neq n^k\ k$, es decir que, $(n\Delta)^k\ y\neq n^k\ \Delta^k y$

La tercera potencia es

$$(n\Delta)^3\, y(n) = n\Delta\, [(n\Delta)^2\, y(n)] = n\Delta\, [(n+1)^{(2)}\, \Delta^2 y(n)$$

$$+ n\Delta\, y(n)] = n[(n+1)^{(2)}\, \Delta^3 y + 2\,(n+1)\, \Delta^2 y +$$

$$+ 2(n+1)\, \Delta^3 y + n\, \Delta^2 y + \Delta y + \Delta 2y] = [(n+2)^{(3)}\, \Delta^3 +$$

$$+\ 3(n+1)^{(2)}\, \Delta^2 + n\Delta]\, y(n)$$

Para deducir estas identidades hemos usado la conocida identidad para potencias factoriales

$$n^{(k)} = (n+1)^{(k)} - n^{(k)} = k\, n^{(k-1)}$$

La "cuarta potencia" de $n\Delta$ es

$$(n\Delta)^4\, y(n) = n\Delta\, [(n\Delta)^3\, y]$$

Sustituyendo dentro del corchete cuadrado la expresión (16.3) y después de efectuar las diferencias indicadas y simplificar, se obtiene

(16.4)

$$(n\Delta)^4\, y(n) = [(n+3)^{(4)}\, \Delta^4 + 7\,(n+2)^{(3)}\, \Delta^3 +$$
$$+ 6\,(n+1)^{(2)}\, \Delta^2 + n\Delta]\, y(n)$$

17. Teorema. Para toda sucesión $y(n)$, y para cualquier número entero k mayor que 1, se tiene

(17.1)

$$(n\Delta)^k\, y(n) = \sum_{h=1}^{k} s(h, k).\, (n+h-1)^{(h)}\, \Delta^h\, y(n),$$

en donde $s(h, k)$ son los números de Stirling de segunda especie.

Estos números son los que resultan al expresar una potencia ordinaria en potencias factoriales

(17.2)

$$x^k = \sum_{h=1}^{k} s(h, k)\, x^{(h)}$$

Obedecen a la ley de recurrencia

(17.3)

$$s(h, k+1) = s(h, k).\, h + s\,(h-1, k)$$

y los primeros son los siguientes

$k\ ^h$	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1							
2	1	1						
3	1	3	1					
4	1	7	6	1				
5	1	15	25	10	1			
6	1	31	90	65	15	1		
7	1	63	301	350	140	21	1	
8	1	127	966	1701	1050	266	28	1

Se demuestra este teorema por el método de inducción. Supongamos que la identidad (17.1) es válida hasta algún valor de k. Mostraremos que entonces es también válida para $k+1$. En efecto. Aplicando el operado $n\Delta$ a $(n\Delta)^k\, y(n)$ en la fórmula (17.1), se obtiene

$$(n\Delta)^{k+1}\, y(n) = n\Delta \sum_{n=1}^{k} s(h, k)\, (n+h-1)^{(h)}\, \Delta^h\, y(n)$$

$$= n \sum_{h=0}^{k} s(h,k)\, [h\, (n+h-1)^{(h-1)}\, \Delta^h y + h$$

$$(n+h-1)^{(h-1)}\, \Delta^{h+1}\, y(n) + (n+h-1)^{(h)}\, \Delta^{h+1}\, y(n)]$$

pero $n(n+h-1)^{(h-1)} = (n+h-1)^{(h)}$, así que la expresión anterior es

$$\sum_{h=1}^{k} s(h,k).\, h\, (n+h-1)^h\, \Delta^h\, y$$

$$+ \sum_{h=1}^{k} s(h,k)\, [h(n+h-1)^{(h)} + n(n+h-1)^{(h)}]\, \Delta^{h+1}\, y(n)$$

Cambiando de índice en la segunda sumatoria de la expresión anterior, $h+1=r$; y poniendo $r=h$ en la primera sumación se obtiene

(17.4)

$$\sum_{r=1}^{k} s(r,k)\, r\, (n+r-1)^{(r)}\, \Delta^r y + \sum_{r=1}^{k+1} s(r-1,k).$$

$$.(n+r-1)^{(r)}\, \Delta^r\, y$$

$$= s(k,k)\, (n+k)^{(k+1)}\, \Delta^{k+1}\, y + \sum_{r=1}^{k} s(r,k).r + s\,(r-1,k)$$

$$(n+r-1)^{(r)}\, \Delta^r\, y$$

Pero según la fórmula (17.2) para los números de Stirling

$$s(r,k)\, r + s\,(r-1,k) = s(r,k+1);\ s(k,k) = 1 = s\,(k+1, k+1)$$

de manera que la expresión (17.4) es (usando nuevamente a h como índice de sumación):

$$(n\Delta)^{k+1}\, y = \sum_{h=1}^{k+1} s(h,k+1)\, (n+h-1)^{(h)}\, \Delta^h\, y$$

y esta es precisamente la fórmula (17.1) tal como resultaría poniendo $k+1$ en lugar de k. Así queda demostrada la validez de la fórmula (17.1) para toda potencia entera y positiva k del operador $n\Delta$.

18. Para todo valor de k, las expresiones de la forma (17.2) tienen sus recíprocas de la forma

$$x^{(k)} = \sum_{h=1}^{k} S(h,k)\, x^h$$

en donde S(h,k) son los números de Stirling de primera especie. Así mismo, la fórmula (17.1) tiene su recíproca

(18.1)

$$(n+k-1)^{(k)} \Delta^k y(n) = \sum_{h=1}^{k} S(h,k) (n\Delta)^h y(n)$$

19. De las ecuaciones que estamos estudiando, la más sencilla es la de orden 1

(19.1)

$$n\Delta y(n) - a y(n) = 0 \qquad (n=1,2,...)$$

o bien

$$\Delta y(n) - (a/n) y(n) = 0$$

La fórmula (6.4), referida a la (6.3), da como solución para la ecuación anterior

$$y(n) = A(1+a)(1+a/2)..\left[1+a/(n-1)\right], \quad n=1,2,3,...$$

(19.3)

$$y(n) = A \sum_{k=1}^{n-1} (1+a/k), \quad n=1,2,3,...$$

siendo A una función arbitraria periódica-unitaria.

Sobre la solución de la ecuación en DD.FF. lineal, de primera especie, el Anexo a este artículo muestra un método de solución del mismo autor. Ese mismo método permite deducir que la solución a la ecuación

(19.4) $$(n\Delta - a)^2 y(n) = 0$$

es

(19.5) $$y(n) = \prod_{k=1}^{n-1} (1+a/k) \left[A_1 + A_2 \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{j+a}\right]$$

y que la solución a la ecuación

(19.6) $$(n\Delta - a)^k y(n) = 0$$

es (19.7) $$y(n) = (1+a)(1+a/2)..[1+a/(n-1)]$$

$$\left[A_1 + A_2 \sum_{i_1=1}^{n-1} \frac{1}{i_1+a} + .. + A_k \sum_{i_1=1}^{n-1} \frac{1}{i_1+a}\right.$$

$$\left.\sum_{i_2=1}^{i_1-1} \frac{1}{i_2+a} .. \sum_{i_{k-1}=1}^{i_{k-2}-1} \frac{1}{i_{k-1}+a}\right]$$

en donde $A_1,..., A_k$ son funciones arbitrarias periódica-unitarias.

La demostración de este último resultado es un ejercicio sencillo que puede realizarse usando repetidamente los resultados del Anexo mencionado, y que se deja al lector.

20. Así puede desarrollarse ya el algoritmo para resolver la ecuación homogénea, de Euler-Cauchy, modificada

(15.1)

$$(n+m-1)^{(m)} \Delta^m y(n) + A_1 (n+m-2)^{(m-1)} \Delta^{m-1} y(n) +$$

$$+ .. + A_m y(n) = 0$$

que se ejecuta en las siguientes etapas:

a. Expresar cada uno de los términos con potencias factoriales de la ecuación anterior (15.1) en potencias del operador n, mediante la identidad (18.1).

b. Simplificar y recoger términos semejantes, y escribir la ecuación en la forma

$$[(n\Delta)^m + a_1 (n\Delta)^{m-1} + .. + a_{m-1} n\Delta + a_m] y(n) = 0$$

c. Factorizar el polinomio-operador del lado izquierdo de esta ecuación en factores lineales, con lo cual la ecuación toma la forma

$$[(n\Delta - b_1)..(n\Delta - b_h)(n\Delta - c_1)^{d_1} ...(n\Delta - c_k)^{d_k}] y(n) = 0$$

en donde $b_1,.. b_h$ son las raíces simples, y las $c_1,...,c_k$ son las raíces múltiples, con multiplicidades $d_1,.., d_k$, respectivamente.

c.1) Para cada raíz simple (real o compleja) b_k le corresponde la solución particular

$$A_k (1+b_k)(1+b_k/2)... [1+b_k/(n-1)]$$

c.2) Para cada raíz múltiple c, de multiplicidad d le corresponde una solución parcial de la forma (19.9), en donde c tomará el lugar de a y d tomará el lugar de k.

d. Construir la solución general de (15.1) sumando las soluciones parciales ya mencionadas. Esa solución general contiene un número de funciones arbitrarias periódica-unitarias (o constantes) que es precisamente igual a m.

e. Valorar las constantes $A_1,... A_m$ usando condiciones iniciales. Se puede demostrar que esto es posible mediante una discusión como la que se hizo en el No. 13.

21. Quedan así resueltas las dos ecuaciones en DD.FF. que nos propusimos estudiar.

BIBLIOGRAFIA

1. Boole, George. **The Calculus of Finite Differences.** New York. Dover Publications Inc. 1960.

2. Batchelder, Paul. **An Introduction to Linear Difference Equiations.** New York. Dover Publications Inc., 1967.

3. Miller, Keneth S. **The Calculus of Finite Differences and Differences Equations.** New York. Dover Publications Inc. 1966.

4. Levy, H. y F. Lessman. **Finite Difference Equations.** New York. The MacMillan Co. 1961.

5. Milne-Thompson, L.M. **Calculus and Finite Differences.** New York. The MacMillan Co. 1940.

6. Jordan, Charles, **Calculus of Finite Differences.** New York. Chelsea Publishing Press. 1965.

7. Goldberg, Samuel **Introduction to Difference Equations.** New York. John Whey & Sons. 1958.

8. Ralston, Anthony. **A First Course in Numerical Analysis.** New York. Mac Graw Hill-Kogakusha. 1965.