UNA FORMULA DE SUMACION APROXIMADA

Gabriel Póveda Ramos

1. El propósito de esta nota es establecer una fórmula aproximada para estimar con alguna aproximación el valor numérico de una suma finita de la forma

(01) $$\sum_{n=1}^{n=N} Y_n$$

siendo $Y_n = f(n)$ una sucesión real conocida y definida en todos los puntos $x = 1, 2, 3, ..., N$. Un caso muy frecuente de este problema es el de calcular sumas del tipo mencionado cuando f(n) es una función trascendente. Si f(n) es una función algebraica el problema es muy fácil de resolver, porque basta aplicar la sumación a cada uno de los sumandos del polinomio que da a f (n), y calcular todos las sumaciones de la forma

(02) $$\sum_{n=1}^{N} n^P$$

(siendo p un exponente entero positivo, conocido) que así resultan. En tal caso existen fórmulas breves de sumación para calcular la suma (02) recurriendo a polinomios de Bernoulli, bastante conocidas (1).

Es evidente que desde el punto de vista del Análisis Numérico sólo se justifica la búsqueda de una fórmula de sumación (siquiera aproximada) cuando el número de sumandos en (01), es decir el número N, es del orden de las decenas o de los centenares, y cuando no se dispone de recursos de computación digital (sea del "hardware" o del "software"). Cuando el número de sumando N en (01) es del orden de 10, 20, 30 ó menor, o cuando se dispone de un computador programado, el problema es un ejercicio trivial de cómputo numérico: basta calcular numéricamente los N números reales f(1), f(2), ..., f(N) y luego hacer la suma (Ver Fig. 1).

2. Ejemplos imaginables del problema que se plantea serían los de calcular los valores numéricos de las siguientes expresiones:

a. $\sum_{n=1}^{150} -2_n$ (= 2.718281846.. = base de logaritmos neperianos)

b. $\sum_{n=1}^{400} \text{sen}\,(n.\ 30^0)$

c. $\sum_{n=1}^{230} n^{-3.2842}$

d. $\sum_{n=1}^{80} J_0(2.45\ n)$, siendo $J_0(x)$ la función de Bessel del primer tipo y de orden cero (2)

e. $\zeta\ (k) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-k} = \lim_{N\to\infty} \sum_{1}^{N} n^{-k}$, que es la llamada función "Zeta" de Riemann (3).

3. El método que se usará se inspira en la idea de buscar un ajuste o aproximación que tenga la forma de parábola de segundo grado (o sea un polinomio de segundo grado) para cada terna de términos consecutivos de la sucesión $\{Y_n\}$ a que se refiere la suma (01). Es decir, que nos planteamos el problema de calcular la parábola de colocación (como se dice en Análisis Numérico); de segundo grado, para cada terna (n–1), n, (n+ 1), de números consecutivos, en donde n recorre los números naturales desde n=1 hasta n=N–1. (Véase Fig. 2).

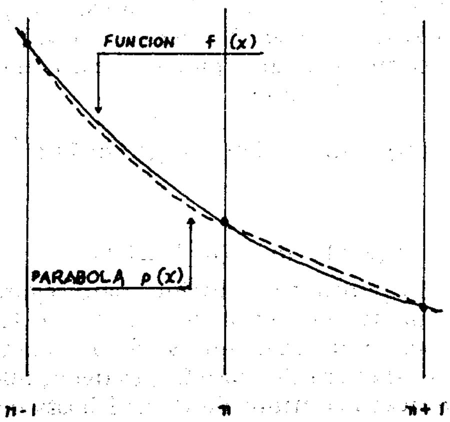

FIG. 2

Sea pues p(x, n) el polinomio de segundo grado que corresponde a la parábola de colocación que se busca. En cualquier libro de Análisis Numérico (4), (5), se puede comprobar que dicha parábola se caracteriza unívocamente por la condición

$$(03)\quad \begin{vmatrix} p(x,n) & 1 & x & x^2 \\ Y_{n-1} & 1 & n-1 & (n-1)^2 \\ Y_n & 1 & n & n^2 \\ Y_{n+1} & 1 & n+1 & (n+1)^2 \end{vmatrix} = 0$$

Expandiendo el determinante de cuarto orden mediante la regla de Laplace se tiene:

$$P_n(x) \begin{vmatrix} 1 & n-1 & (n-1)^2 \\ 1 & n & n^2 \\ 1 & n+1 & (n+1)^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} Y_{n-1} & n-1 & (n-1)^2 \\ Y_n & n & n^2 \\ Y_{n+1} & n+1 & (n+1)^2 \end{vmatrix} - x$$

$$\begin{vmatrix} Y_{n-1} & 1 & (n-1)^2 \\ Y_n & 1 & n^2 \\ Y_{n+1} & 1 & (n+1)^2 \end{vmatrix} + x^2 \begin{vmatrix} Y_{n-1} & 1 & (n-1) \\ Y_n & 1 & n \\ Y_{n+1} & 1 & (n+1) \end{vmatrix}$$

Finalmente, expandiendo estos determinantes de tercer orden y recogiendo los términos semejantes se encuentra para el polinomio de colocación p(x,n):

$$(04)\quad \begin{aligned} 2.\,p(x,n) = {} & Y_{n-1}\,[n(n+1) - (2n+1)\,x + x^2] \\ & - Y_n\,[2\,(n^2-1) - 4\,n\,x + 2\,x^2] \\ & + Y_{n+1}\,[n\,(n-1) - (2n-1)\,x + x^2] \end{aligned}$$

fácilmente se comprueba que la fórmula encontrada (04) es la correcta ya que, sustituyendo sucesivamente x por (n−1), n y (n+1) se obtiene en ella

$$\begin{aligned} p\,(n-1,n) &= Y_{n-1} \\ p\,(n,n) &= Y_n \\ p\,(n+1,n) &= Y_{n+1} \end{aligned}$$

como debe cumplirse para el polinomio de colocación según lo prescribimos más arriba.

4. Una vez determinado el polinomio de colocación en los tres puntos dados, con abscisas n−1, n, n+1, podemos escribir para todo el intervalo cerrado desde n−1 hasta n+1:

$$(05)\quad n-1 < x < n+1 \Rightarrow f(x) = p(x,n) + \epsilon\,(x,n)$$

en donde p(x,n) está ya dado por la fórmula (04) y ϵ (x,n) es el llamado error de colocación. En cualquier texto de Análisis Numérico (4) se puede recordar o comprobar que, para este caso, el error de colocación es la función

$$(06)\quad \epsilon\,(x,n) = (x-n+1)\,(x-n)\,(x-n-1)\,f^{III}\,(\bar{x})/3!$$

en donde

$$\bar{x} = \bar{x}\,(x,n) \in In = (n-1, n+1)$$

es un cierto punto no conocido, pero seguramente existente dentro del intervalo abierto (n−1, n+1), y que depende del valor que se dé a x para cada n (desde que f(x) sea de clase C^3, es decir, que tenga tercera derivada continua desde n−1 hasta n+1).

5. También en cualquier texto de Análisis Numérico se puede comprobar que, por ser p(x,n) el polinomio de segundo grado que pasa por los tres puntos

$$(n-1, Y_{n-1}),\ (n, Y_n),\ (n+1, Y_{n+1})$$

previamente especificados, con abscisas separadas a 1 unidad una de otra, su integral definido en el intervalo de la abscisa más a la izquierda y la abscisa más a la derecha, está dado por la siguiente fórmula

$$(07)\quad \int_{n-1}^{n+1} p\,(x,n)\,dx = \frac{1}{3}\,Y_{n-1} + \frac{4}{3}\,Y_n + \frac{1}{3}\,Y_{n+1} \qquad (3)$$

que es seguramente muy familiar a muchos lectores.

6. Integrando la ecuación (05) en su intervalo de validez (n−1, n+1), se tiene

$$\int_{n-1}^{n+1} f(x).\,dx = \int_{n-1}^{n+1} p(x,n)\,dx + \int_{n-1}^{n+1} \epsilon\,(x,n)\,dx$$

o también

$$(08)\quad \int_{n-1}^{n} f(x)\,dx + \int_{n}^{n+1} f(x)\,dx = \frac{1}{3}\,Y_{n+1}$$

$$+ \int_{n-1}^{n+1} \epsilon\,(x,n)\,dx$$

Escribamos la ecuación (08) para n = 2, 3, 4,..., N−3, N−2, N−1:

$$\left|\int_1^2 + \int_2^3\right| f(x).\,dx = \frac{1}{3}\,Y_1 + \frac{4}{3}\,Y_2 + \frac{1}{3}\,Y_3 +$$

$$+ \int_1^3 \epsilon\,(x,2)\,dx$$

$$\left|\int_2^3 + \int_3^4\right| f(x)\,dx = \frac{1}{3}\,Y_2 + \frac{4}{3}\,Y_3 + \frac{1}{3}\,Y_4 +$$

$$+ \int_2^4 \epsilon\,(x,2)\,dx$$

$$\left|\int_3^4 + \int_4^5\right| f(x)\,dx = \frac{1}{3}\,Y_3 + \frac{4}{3}\,Y_4 + \frac{1}{3}\,Y_5 +$$

$$+ \int_3^5 \epsilon\,(x,3)\,dx$$

(3) De esta fórmula se deduce justamente, la conocida fórmula de Simpson.

$$\left|\int_{N-4}^{N-3} + \int_{N-3}^{N-2}\right| f(x)\,dx = \frac{1}{3}Y_{N-4} + \frac{4}{3}Y_{N-3} + \frac{1}{3}Y_{N-2} + \int_{n-4}^{n-2} (x,N-3)\,dx$$

$$\left|\int_{N-3}^{N-2} + \int_{N-2}^{N-1}\right| f(x)\,dx = \frac{1}{3}Y_{N-3} + \frac{4}{3}Y_{N-2} + \frac{1}{3}Y_{N-1} + \int_{N-3}^{N-1} \epsilon\,(x,N-2)\,dx$$

$$\left|\int_{N-2}^{N-1} + \int_{N-1}^{N}\right| f(x)\,dx = \frac{1}{3}Y_{N-2} + \frac{4}{3}Y_{N-1} + \frac{1}{3}Y_{N} + \int_{N-2}^{N} \epsilon\,(x,N-1)\,dx$$

Sumando las ecuaciones anteriores obtenemos

$$\left|\int_{1}^{2} + 2\int_{2}^{3} + 2\int_{N-2}^{N-1} + \int_{N-1}^{N}\right| f(x)\,dx = \frac{1}{3}Y_1 + \frac{5}{3}Y_2 + 2\sum_{3}^{N-2} Y_n + \frac{5}{3}Y_{N-2} + \frac{1}{3}Y_N + \sum_{N=2}^{N-1}\int_{n=1}^{n+1} \epsilon(x,n)dx$$

Sumando y restando dos integrales definidos (de 1 a 2 y de N−1 a N) y cuatro términos en la sumación ($2Y_1$, $2Y_2$, $2Y_{N-1}$, $2Y_N$), dividiendo por 2 y trasponiendo tenemos:

(09)
$$\sum_{n=1}^{N} Y_n = \int_1^N f(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_1^2 f(x)\,dx - \frac{1}{2}\int_{N-1}^{N} f(x)\,dx + \frac{5}{6}(Y_1 + Y_N) + \frac{1}{6}(Y_2 + Y_{N-1}) + E$$

en donde E es el "error de sumación" y está dado por la expresión

$$E = -\frac{1}{2}\sum_{n=2}^{N-1}\int_{n-1}^{n+1} \epsilon(x,n)\,dx$$

y sustituyendo la función $\epsilon(x,n)$ por su expresión en (06), esto es

$$E = -\frac{1}{2}\sum_{n=2}^{N-1}\int_{n-1}^{n+1} (x-n+1)\,(x-n)\,(x-n-1)\,f^{III}(\bar{x}).\,dx/3!$$

La expresión anterior no se puede calcular explícitamente debido a la indeterminación (y a la eventual multivocidad) de la relación entre $\bar{x}$ y x. Pero es posible (y es también lo usual en Análisis Numérico) establecer una cota superior para su módulo así:

$$|E| = \frac{1}{12}\left|\sum_{n=2}^{N-1}\int_{n-1}^{n+1} (x-n+1)\,(x-n)\,(x-n-1)\,f^{III}(\bar{x})\,dx\right|$$

$$\leqslant \frac{1}{12}\left|\sum_{n=2}^{N-1}\int_{n-1}^{n+1} (x-n+1)\,(x-n)\,(x-n+1)\ \ (\bar{x})|\,dx\right|$$

Es un sencillo ejercicio de cálculo elemental el de mostrar que el polinomio de tercer grado en x

$$(x-n+1)\,(x-n)\,(x-n+1) = x^3 - 3nx^2 + (3n^2 - 1)\,x - n\,(n^2 - 1)$$

tiene su máximo en $n-1/\sqrt{3}$ y su mínimo en $n+1/\sqrt{3}$, y que dicho máximo vale + 0.384900179 así como el mínimo vale −0.384900179. Es decir

$$|\,(x-n+1)\,(x-n)\,(x-n\pm1)\,| < 0.384900179$$

y en consecuencia

$$|E| < 0.032075014 \sum_{n=2}^{N-1}\int_{n-1}^{n+1} \max_{\bar{x}\in I_n} |f^{III}(\bar{x})|\,dx$$

(10)
$$|E| < 0.064150029 \sum_{n=2}^{N-1} \max_{u\in I_n} |f^{III}(u)|$$

La fórmula (09) es la fórmula de aproximación que buscábamos, y el error absoluto que se comete en ella al omitir el término E está acotado por la inecuación (10).

Podemos pues poner:

(11)
$$\sum_{n-1}^{N} f(n) = \int_1^N f(x)\,dx - \frac{1}{2}\left(\int_1^2 f(x).\,dx + \int_{N-1}^{N} f(x)\,dx\right) + \frac{5}{6}(f(1) + f(N)) + \frac{1}{6}(\,f(2) + f(N-1)\,) + E$$

En donde E está acotado por la inecuación (10), si f(x) es de clase C^3.

7. Ejemplo 1. Una serie bien conocida en Aritmética es la llamada serie armónica, que se forma con los inversos de los primeros N números natuales positivos:

$$1 + 1/2 + 1/3 + \ldots + 1/N$$

y que se puede también escribir

$$\sum_{n=1}^{N} f(n), \text{ siendo } f(x) = 1/x$$

Para usar nuestra fórmula de sumación (11), calculamos las siguientes expresiones, en este caso:

$$f(1) = 1 \ , f(2) = 1/2 \ , f(N-1) = 1/(N-1) \ , f(N) = 1/N$$

$$f(1) + (f(N) = (N+1)/N \ , \ f(2) + f(N-1) = $$
$$= (N+1)/2\,(N-1)$$

$$\int_1^2 f(x).dx = \int_1^2 \frac{dx}{x} = \log_e 2 \ , \ \int_{N-1}^{N} f(x).dx =$$

$$= \int_{N-1}^{N} \frac{dx}{x} = \log_e \frac{N}{N-1} \int_1^N f\,(x).\,dx = \log_e N$$

$$f^{III}(u) = 1\,6/x^4 \rightarrow \max_{u \in I_n} \mid f^{III}(u) \mid = 6/(n-1)^4$$

Aplicando la fórmula (11) tenemos:

$$(12) \quad \sum_{n=1}^{N} (1/n) = \log N - \frac{1}{2} \log \ 2N/(N-1) \ +$$
$$+ \ 5\,(N+1)/6N + E$$

siendo

$$\mid E \mid < 0.064150029 \sum_{n=2}^{N-1} \max_{u \in I_n} \mid f^{III}(u) \mid =$$

$$= 0.064150029 \times 6 \sum_{n=2}^{N-1} (n-1)^4$$

$$= 0.384900174\,(1 + 1/2^4 + 1/3^4 + 1/4^4 + \ldots +$$
$$+ \ 1/(N-2)^4)$$
$$= 0.384900174\,(1 + 0.0625 + 0.0123456 +$$
$$+ \ 0.00390625 \ + 0.001600$$
$$+ \ 0.0007716099 + 0.0004164933 +$$
$$+ \ 0.0002441406 + 0.00015241579 + 0.0001 +$$
$$\ldots = 1.08215) = 0.4164758$$

Como se ve la cota superior del error es una suma de los inversos de las cuartas potencias de los N−2 primeros números naturales. Cuando $N \rightarrow \infty$, esta suma se convierte en una serie infinita de la cual se sabe bien que es convergente. Además:

$$\lim_{N \to \infty} \ \log \mid 2N/(N-1) \mid = \log 2$$

$$\lim_{N \to \infty} \ \mid 5(N+1)/6N \mid = 5/6$$

y por lo tanto

$$\lim_{N \to \infty} \sum_{1}^{N} (1/N) = \lim_{N \to \infty} \ \log N + \log 2 + (5/6) + E$$

y $E < + \infty$, de modo que

$$\lim_{N \to \infty} \sum_{1}^{N} (1/n) = + \infty$$

lo cual significa que la serie armónica infinita es divergente, lo cual, por lo demás, es un hecho muy conocido por otros caminos.

8. Ejemplo 2. Ya que la fórmula ha sido obtenida ajustando arcos de parábolas a ternas de puntos consecutivos, con ordenadas f(n−1), f(n), f(n+1), es claro que la fórmula será rigurosamente exacta si la función de que se trata es $f(x) = x^2$, y también si es $f(x) = x$. Comprobémoslo para $f(x) = x^2$, función elemental y bien conocida:

$$f(1) = 1 \ , \ f(2) = 4 \ , \ f(N-1) = N^2 - 2N + 1 \ ,$$
$$, f(N) = N^2$$

$$f(1) + f(N) = 1 + N^2 \ , f(2) + f(N-1) = N^2 = 2N + 5$$

$$\int_1^N f(x)\ d\,x = \int_1^N x^2\ dx = \frac{1}{3}(N^3 - 1) \ , \ \int_1^2 f(x)\ dx = 7/3$$

$$\int_{N-1}^{N} f(x).\,dx = \frac{1}{3}(3N^2 - 3N + 1) \ , \ f^{III}\,(u) = 0$$

Sustituyendo en la fórmula (11) obtenemos

$$\sum_{1}^{N} n^2 = \frac{1}{3}(N^3 - 1) - \frac{1}{2}\left| \frac{7}{3} + \frac{3N^2 - 3N + 1}{3} \right| +$$
$$+ \frac{5}{6}(N^2 + 1) + \frac{1}{6}(N^2 - 2N + 5) + E$$
$$= N\,(N+1)\,(2N+1)\,/6 + E$$

y el error E es:

$$\mid E \mid < 0.064150029 \sum_{2}^{N-1} \max \mid f^{III}(u) \mid = 0 \rightarrow E = 0$$

es decir que el error es cero y tenemos

(13) $$\sum_{1}^{N} n^2 = N(N+1)(2N+1)/6$$

Esta fórmula es bastante conocida y se puede obtener por otros varios métodos.

9. Ejemplo 3. La idea de buscar la fórmula aproximada de que hablamos surgió cuando el autor de esta nota se vio precisado a calcular un valor numérico siquiera aproximado para la suma

(14) $$1 + \frac{1}{2^{0.9}} + \frac{1}{3^{0.9}} + \dots + \frac{1}{99^{0.9}} + \frac{1}{100^{0.9}}$$

Esta serie la encontró el autor cuando hacía un estudio estadístico sobre la distribución de los tamaños de las ciudades en Colombia, medido por su población humana, al aplicarles una ley empírica conocida en demografía como Ley de Auerbach. (6)

Evidentemente, se trata aquí de calcular la sumatoria

$$\sum_{1}^{N} f(n) \text{ en donde } f(x) = x^{-a} \text{ (con } a = 0.9), N = 100$$

Fácilmente calculamos:

$$\begin{aligned} f(1) &= 1 . f(2) = 1/2^{0.9} &&= 0.535886726 \\ f(N-1) &= f(99) = 1/99^{0.9} &&= 0.01599294 \\ f(N) &= f(100) = 1/100^{0.9} &&= 0.015848932 \\ f(1) + f(N) &= f(1) + f(100) &&= 1.015848932 \\ f(2) + f(N-1) &= f(2) + f(99) &&= 0.551879667 \end{aligned}$$

$$\int_1^N f(x)\,dx = \int_1^N x^{-a}.dx = \frac{1}{1-a} x^{1-a} \Big|_1^N =$$

$$= \frac{N^{1-a} - 1}{1-a} = \frac{100^{0.1} - 1}{0.1} = 5.848932$$

$$\int_1^2 f(x)\,dx = \int_1^2 x^{-a}\,dx = \frac{1}{1-a} x^{1-a} \Big|_1^2 =$$

$$= \frac{2^{1-a} - 1}{1-a} = \frac{2^{0.1} - 1}{0.1} = 0.717735$$

$$\int_{N-1}^N f(x)\,dx = \int_{N-1}^N x^{-a}\,dx = \frac{1}{1-a} x^{1-a} \Big|_{N-1}^N =$$

$$= \frac{N^{1-a} - (N-1)^{1-a}}{1-a} = \frac{100^{0.1} - 99^{0.1}}{0.1} = 0.0015921$$

$$f^{III}(u) = -a(a+1)(a+2)\, x^{-(a+2)}$$

$$\max_{x \in I_n} f^{III}(u) = a(a+1)(a+2)(n-1)^{-(a+3)} = 0.9 \text{ x}$$

$$\text{x } 1.9 \text{ x } 2.9 (n-1)^{-3.9} = 4.959 (n-1)^{-3.9}$$

Sustituyendo en la fórmula (11) obtenemos:

(15)
$$\sum_{n=1}^{N} n^{-a} = \frac{N^{1-a} - 1}{1-a} - \frac{1}{2(1-a)} (2^{1-a} - 1 + $$
$$+ N^{1-a} - (N-1)^{1-a})$$
$$+ \frac{5}{6}(1 + N^{-a}) + \frac{1}{6}(2^{-a} + (N-1)^{-a}) + E$$

de donde

(15A)
$$\sum_{n=1}^{100} n^{-0.9} = 5.848932 + (1/2)(0.717735 +$$

$$+ 0.0015921) + (5/6) \text{ X } 1.015848932 + (1/6) \text{ x}$$

$$\text{x } 0.551879667 + E = 7.14711627 + E$$

En el caso particular de a = 0.9, N = 100, el error de sumación tiene una cota superior de:

$$|E| < 0.064150029 \sum_{n=2}^{99} \max_{u \in I_n} |f^{III}(u)|$$

$$= 0.064150029 \text{ x } 4.959 \sum_{n=2}^{100} (n-1)^{-3.9}$$

$$= 0.318119993 (1 + 0.66985842 + 0.013779298 +$$

$$+ 0.004487102 + 0.0018793903 + 0.0009230179 +$$

$$+ 0.0005059617 + 0.00030057237 +$$

$$+ 0.00018986907 + 0.00012589254 +$$

$$+ \ldots \doteq 1.0895) \doteq 0.34655064$$

El valor relativo de este máximo error posible, sobre el total estimado como 7.14711627 es de 4.85o/o, que es relativamente satisfactorio para efectos prácticos.

10. Ejemplo 4. Nuestra fórmula (11) permite deducir una expresión para calcular factoriales de números naturales, aproximadamente, y también valores aproximados para la función gama de números reales positivos.

Como bien se sabe el factorial está definido para cada número natural:

$$N! = 1 \text{ x } 2 \text{ x } 3 \text{ x} \ldots \text{ x } N$$

o sea, tomando logaritmos naturales (o neperianos)

$$\log N! = \sum_{n=1}^{N} \log n$$

En este caso tenemos que calcular:

$$\sum_{n=1}^{N} f(n) \quad \text{siendo } (f(x) = \log x$$

Calculamos pues las siguientes expresiones:

$$f(1) = 0,\ f(2) = \log 2,\ \ f(N-1) = \log (N-1)\,,$$

$$f(N) = \log N$$

$$\int_1^N f(x).\,dx = \int_1^N \log x.\,dx = x.\log x - x\Big|_1^N =$$

$$= \log (N^N e^{1-N})$$

$$\int_1^2 f(x).\,dx = \log (2^2\, e^{-1})$$

$$\int_{N-1}^{N} \log x.\,dx = \log\ N^N\,(N-1)^{1-N}\, e^{-1}$$

Aplicamos la fórmula (11) que hemos deducido, como fórmula aproximada, es decir ignorando el término de error E, y usando el signo $\doteq$ (aproximadamente igual) en lugar del signo = (igual):

$$\sum_1^N \log n \doteq \log (N^N e^{1-N}) - \frac{1}{2} \log (2^2\, e^{-1}) - \frac{1}{2} \log$$

$$|\ N^N (N-1)^{1-N}\, e^{-1}\ |$$

$$\doteq \frac{5}{6} \log N + \frac{1}{6} \log 2 + \frac{1}{6} \log (N-1)$$

$$= \log |\ N^{N/2\,+\,5/6}\ N-1)^{N/2-2/6}\ e^{2-N}\ 2^{-5/6}\ |$$

es decir, aproximadamente:

(16)

$$N! \doteq 4.146967491\ N^{N/2+5/6}\ (N-1)^{N/2\ -2/6}\ e^{-N}$$

Para N= 1, la fórmula anterior nos da 1! = 0, lo cual es rigurosamente correcto. Para N= 10, el factorial vale 10! = **3628800, y la fórmula** nos da 10! $\doteq$ 3641252, cuyo error relativo es sólo del 0.34o/o. Para N= 50, cuyo factorial es 50! = 3.0414093 x 10^{64}, la fórmula da, aproximadamente, 50! = 3.051885699 x 10^{64}, incurriendo en un error relativo solamente de 0.344o/o que en cálculos numéricos es un estimativo muy aceptable.

Cuando en la fórmula (16) sustituimos N por N + 1, se obtiene después de algunas simplificaciones sencillas:

(17)

$$(N+1)! = N!\,(N+1)\ \frac{\left(\dfrac{N+1}{N-1}\right)^{N/2}\ \dfrac{(N+1)^{1/3}\ (N-1)^{1/3}}{N^{2/3}}\, e^{-1}}{G(N)}$$

Ahora bien, la función G(N) tiende asintóticamente a 1. En efecto:

$$\lim_{N\Rightarrow\infty} \frac{(N+1)^{1/3}\ \ (N-1)^{1/3}}{N^{2/3}} = 1$$

$$\lim_{N\Rightarrow\infty} \left(\frac{N+1}{N-1}\right)^{N/2} = \lim_{\frac{N}{2}\Rightarrow 0} \left|\frac{(N/2-1/2)+1}{(N/2-1/2)}\right|^{N/2} =$$

$$= \lim_{h\Rightarrow 0}\ (1+1/h)^h = e$$

de donde

$$\lim_{N\Rightarrow\infty} G(N) = e \times e^{-1} = 1$$

Es decir que la fórmula (17) puede escribirse, asintóticamente:

(18)

$$(N+1)\,! = N!\,(N+1)$$

que es la relación de recurrencia a la cual obedece la sucesión de los factoriales de los números naturales, o la que permite calcular valores para la función gama $\Gamma(u)$. Vale la pena notar que G(10) = 1.000.003345, de modo que la fórmula (18) sólo tiene una diferencia relativa con la (17) de 3.34 partes por millón, ya desde un valor bajo de N como es N = 10.

BIBLIOGRAFIA

(1) Mineur, Henri. Les Techniques du Calcul Numerique. Paris. 1952. Librairie Polytechnique Ch. Béranger. Cap. XI.

(2) Kreyszig, Erwin. Advanced Engineering Analysis. New York. 1962. John Wiley and Sons. Sección 3.5.

(3) Knopp, Konrad. Teoría de Funciones. Barcelona. 1956. Editorial Labor. Libro II, 2a. parte.

(4) Scheid, Francis. Theory and Problems of Numerical Analysis. New York. 1968. Mac Graw Hill Book Co. Cap. 10.

(5) Ralston, Anthony. A First Course in Numerical Analysis. New York. 1965. Chap. 2.

(6) Poveda Gabriel. Análisis Estadístico de la Población de las Ciudades Colombianas , en Boletín de Matemáticas, Bogotá, Junio 1978.