ALGUNOS METODOS MATEMATICOS APLICADOS A ESTUDIOS FORESTALES

Por: GABRIEL POVEDA RAMOS.

INTRODUCCION

• 1. Actualmente (1978 - 1979) no se conoce en Colombia muchos métodos teóricos, de carácter riguroso, para prever y programar el desarrollo de proyectos forestales de alguna envergadura. En particular, parece que el uso de métodos matemáticos para el tratamiento de variables cuantitativas en estos campos es muy poco frecuente o es inexistente, cuando todo indica que esos métodos pueden ser muy fructíferos en el análisis y en el pronóstico del comportamiento de bosques, tanto en Colombia como en todo el mundo.

A juicio del autor, este vacío se debe hoy en nuestro país a las siguientes causas principales:

a. Aún a nivel internacional, parece que la tecnología forestal no ha incorporado muy a fondo los procedimientos matemáticos en su metodología.
b. La actividad reforestadora en Colombia ha sido muy escasa, falta de apoyo, dispersa y de muy poca envergadura, frente a lo que debería ser.
c. Los matemáticos en nuestra nación se muestran por lo general poco interesados frente a los problemas reales de este país, con pocas y brillantes excepciones.
d. En los curricula de las tres facultades de ingeniería forestal, la enseñanza de las matemáticas alcanza solamente un nivel relativamente elemental.

• 2. En este artículo se presentan algunos procedimientos para formular y analizar matemáticamente algunos aspectos importantes dentro del planeamiento de proyectos forestales. No se pretende que este sea un tratado sobre la materia. Solo se trata de mostrar las posibilidades de este tipo de enfoque del desarrollo forestal, así como algunos de los instrumentos matemáticos que son utilizables en este sentido.

• 3. Se tratarán, separadamente, los siguientes temas:

1. Las funciones de crecimiento volumétrico de árboles.
2. La función de supervivencia dentro de una plantación.
3. El crecimiento volumétrico de una masa forestal o de un bosque homogéneo.
4. La formulación de un régimen de siembra frente a metas futuras de disponibilidad.
5. El programa económico de un rodal.

1. FUNCIONES DE CRECIMIENTO VOLUMETRICO DE ARBOLES Y BOSQUES

• 4. Es un hecho empíricamente conocido por silvicultores y por técnicos forestales que el crecimiento de un árbol de determinada especie botánica, en una región determinada, en condiciones edafológicas y climáticas conocidas, sigue una ley de crecimiento más o menos bien conocida, que se puede expresar en términos del aumento de la altura, o del peso, o del volumen de madera aprovechable, en función de la edad. Es evidente también que aún entre varios ejemplares de una misma generación, en un mismo bosque, hay diferencias apreciables en cualquiera de esas variables, debido a condiciones genéticas o ambientales que difieren aleatoriamente de uno a otro árbol. Pero, en general, es siempre posible escoger un ejemplar promedio, representativo de todos los que forman un bosque, de una misma especie (o variedad) botánica, y en unas mismas condiciones de suelo, de clima y de ecología.

Las consideraciones que se hacen a continuación se refieren a ese ejemplar promedio de los árboles de un bosque homogéneo, en el sentido que se ha definido.

• 5. La medición de las variables mencionadas (p. e. altura, volumen maderable, etc.), en función de la edad del árbol, es un trabajo empírico que requiere gran experiencia forestal, una cuidadosa selección estadística de las muestras, y persistencia a lo largo de varios años. En Colombia son muy pocos los trabajos de esta naturaleza que han sido realizados y publicados. El más conocido, y tal vez el primero, es el que realizaron los profesores TSCHINKEL (1) e ILLENCIK para el *Cupressus sp.* en Antioquia, en los años anteriores a 1971.

• 6. La variable de más interés es el volumen maderable de un árbol (que llamaremos m) en función de la edad (que llamaremos x), para un ejemplar promedio. La relación entre las dos variables puede representarse por una función:

$$m = m(x)$$

Llamada función de crecimiento, y se puede representar gráficamente mediante la correspondiente *curva de crecimiento.*

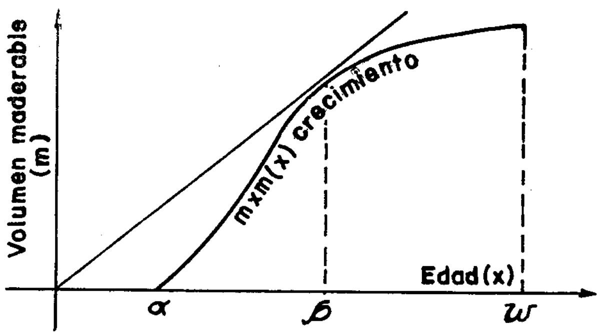

Figura 1

Esta función tiene las siguientes propiedades, que son evidentes desde el punto de vista forestal y físico:

a. La función $m(x)$ está definida solo para edades positivas, es decir su dominio es $x > 0$; y es estrictamente positiva, es decir su codominio es $m(x) > 0$.

b. La función $m(x)$ es continua, derivable y monotónicamente no-decreciente en todo su dominio, o sea, $m'(x) \geqslant 0$.

c. Existe un valor α para la edad, antes del cual el árbol no contiene madera en cantidad apreciable, es decir que $m(x) = 0$ para $x < \alpha$.

d. A partir de cierta edad, w, el árbol prácticamente ya no crece en volumen maderable, o sea que, para $x > w$, $m'(x) = 0$.

De las anteriores condiciones para la función $m(x)$ se desprende, necesariamente, que a partir de algún valor de x (mayor que α), la función $m(x)$ es convexa, es decir que para dos abscisas h_1, h_2 en esa región ($h_1 < h_2$), se tiene que $m'(h_1) > m'(h_2)$; y si admitimos que $m(x)$ es de clase $C^2(\alpha, w)$ (o sea que es derivable dos veces en el intervalo abierto de α hasta w), eso significa que existe un entorno a la izquierda de w tal que $m''(x) < 0$.

• 7. Es natural definir la vida óptima silvícola del árbol (o sea el turno óptimo silvícola del rodal coetáneo), como la edad a la cual el volumen de madera cosechada al cortar el árbol, dividido por su edad, es la máxima posible. En la figura 1 ese óptimo está en el punto β, tal que allí la recta que va del origen a la curva tiene la máxima pendiente; es decir, que para todo x se tiene

$$m(\beta)/\beta \geqslant m(x)/x$$

Es evidente que en el punto de la curva correspondiente a este óptimo, la recta que lo une al origen, coincide con la tangente a la curva.

De acuerdo con los supuestos admitidos para m, el turno óptimo silvícola cumple las condiciones

$$m(\beta)/\beta = \max_{x} [m(x)/x] \geqslant m(x)/x$$

y necesariamente, en $x = \beta$, se cumple

$$d(m/x)/dx = 0$$

o sea que allí es

$$\beta . m'(\beta) = m(\beta) .$$

Más adelante se definirá otro concepto de óptimo: el turno óptimo financiero, que en general es distinto del anterior.

Es interesante también notar que la edad de más rápido crecimiento del árbol promedio (o sea, del rodal), es la que cumple la condición.

$$\max_{x} (dm/dx) = d(dm/dx)/dx =$$

$$0 <=> d^2 m/dx^2 = 0$$

• 8. La fórmula de TSCHINKEL para el *Cupressus sp.* en Antioquia se refiere no propiamente al volumen maderable de un árbol, sino al volumen de madera en pie de un rodal coetáneo. La fórmula es (1):

$$Log_{10} V = a + b/x + c\,I - d\,I/x + I\,N,$$

en donde:

V = Volumen de madera en pie (en metros cúbicos), por hectárea *(no por árbol).*
x = Edad de la plantación ($x > 5$ años).
I = Indice de sitio = Altura de los árboles dominantes a los 15 años de edad, en metros.
N = Densidad de la plantación, en número de árboles por hectárea.
a = 0.7850
b = 0.5137
c = 0.0912
d = 0.2451
l = 0.00007
$R = \sqrt{0.92}$ = Coeficiente de correlación múltiple de la fórmula.
e = 2.71828182846... = Base de los logaritmos neperianos.

Se trata de una fórmula empírica deducida por TSCHINKEL y sus colaboradores a partir de numerosas mediciones hechas en parcelas escogidas al efecto. Se han constituido tablas numéricas para facilitar su uso.

El turno óptimo silvícola se define como la edad x^* para la cual se tiene

$$\max_{x} \ (V/x) = d\ (V/x)\ /\ dx = 0\ ;$$

pero

$$V/x = x^{-1}\ e^{2.30259\ (a + b/x + c\,I - d\,I/x + l\,N)}$$

de donde

$$d\ (V/x)/dx = e^{2.30258\ (a + b/x + cI - dI/x + lN)}\ [x^{-1}\ (-b + dI)\ .2.30258 - x^{-2}]$$

Haciendo esta expresión igual a cero, se obtiene el turno óptimo silvícola:

$$x^* = 2.30258\ (d\,I - b)$$

Para índice de sitio $I = 18$, que es muy frecuente en Antioquia, se tendría

$$x^* = 2.30258\ (18 \times 0.2451 - 0.5137) = 9 \text{ años}$$

que resulta demasiado corto por otras razones de carácter práctico-forestal. Para índice de sitio $I = 21$, que es un buen terreno forestal en Antioquia, se tendría

$$x^* = 2.30258\ (21 \times 0.2451 - 0.5137) = 10.6 \text{ años}$$

que es también demasiado bajo por otras consideraciones.

Se demuestra fácilmente que $d^2\ (V/x)\ /\ dx^2 < 0$, y por lo tanto x^* es realmente el punto de máximo para la relación V/x.

La edad de más rápido crecimiento del volumen de madera, cumple la condición

$$d^2\ V\ /\ dx^2 = 0$$

pero

$$d\,V/dx = 2.30258\, x^{-2}\ e^{E}\ (d\,I - b)$$

donde hemos puesto $E = a + b/x + c\,I - d\,I/x + l\,N$ por abreviar la escritura. Luego

$$d^2\ V/dx^2 = 2.30258\ (d\,I - b)\ e^{E}\ [(d\,I - b)\ 2.30258\, x^{-4} - 2\, x^{-3}]$$

y haciendo igual a cero se deduce que la edad de más rápido crecimiento en volumen es

$$x^{\circ} = 2.30258\ (d\,I - b)\ /\ 2 = x^*\ /\ 2$$

o sea, a la mitad de la vida óptima silvícola del rodal , suponiendo la validez de esta ley de crecimiento.

La fórmula de TSCHINKEL merece, sin embargo, algunas objeciones, como las siguientes:

a. No está definida para $x = 0$

b. Es un poco engorrosa para calcular numéricamente.

c. No deja ver claramente que para $x < 5$ años, prácticamente no hay madera aprovechable.

d. Conduciría a un turno óptimo demasiado joven.

Por estas razones el autor de esta nota propone otro tipo de función de crecimiento.

● 9. El autor de esta nota propone para investigaciones futuras una función de crecimiento de la forma

$$V\ (x) = (ax - k)\ /\ (x + b), \text{ con } x > k/a = \alpha \ \text{(5 años para } \textit{Cupressus}\text{)}$$

y siendo

$V\ (x)$ = Volumen de madera por hectárea, a la edad x

$a, k, b,$ = Constantes reales positivas.

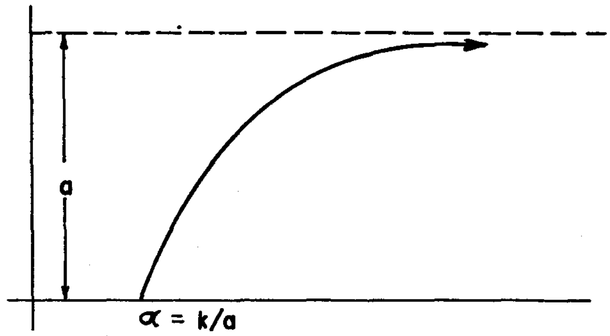

Figura 2

La gráfica de la función propuesta, en coordenadas cartesianas, es una rama de hipérbola que crece con x tendiendo asintóticamente a la recta horizontal $V = a$. Así, la constante a significa el volumen máximo de madera, por hectárea, que tiende a desarrollar el bosque, a largo plazo, con todos los árboles plenamente desarrollados. La constante k es $k = \alpha\ .\ a$, es decir, es igual a la edad umbral α en que se empieza a formar madera en el bosque, multiplicada por el parámetro a.

La determinación del turno óptimo silvicultural, definido por la edad que proporciona el máximo volumen de madera por año de vida, al cortar el bosque, resulta de la condición

$$d\ (V/x)\ /\ dx = 0$$

Pero

$$V/x = (\alpha - k/x)\ /\ (x + b)$$

cuya derivada es

$$\frac{(k/x^2)\ \ (x + b) - (\alpha - k/x)}{(x + b)^2}$$

Haciendo igual a cero se obtiene la ecuación de segundo grado

$$a\, x^2 - 2\, k\, x - b\, k = 0$$

cuya única solución real y positiva es

$$x^* = \frac{k + \sqrt{k^2 + a\, b\, k}}{a}$$

Fácilmente se demuestra, además, que para este valor se tiene $d^2\ (V/x)\ /\ dx^2 < 0$, o sea que sí se trata del máximo para V/x.

A esa edad el volumen de madera cosechado por hectárea es

$$V^* = \frac{a \sqrt{k^2 + a\, b\, k}}{k + ba + \sqrt{k^2 + a\, b\, k}}$$

y de aquí se deduce el máximo del volumen de madera por hectárea-año, $V^*\ /\ x^*$.

2. LA FUNCION DE SUPERVIVENCIA DE UNA PLANTACION

• 10. Desde el momento cuando la plántula se traslada del semillero al terreno, durante la siembra del bosque, ella (y luego el árbol) están sujetos a muchos factores adversos que pueden matarla. Algunos de estos factores son la sequía, las plagas, el fuego, etc. Además, el mismo silvicultor hace raleos y entresacas tanto por razones forestales como por razones económicas. Todo esto significa que de un rodal coetáneo (sembrado en un mismo momento, o siquiera dentro de un mismo período lluvioso del año), de un número grande de individuos (digamos, unos 10 mil o 100 mil ejemplares) que se siembran inicialmente, al cabo de cierto tiempo solo subsisten vivos un número menor de ejemplares, o a lo sumo igual a los iniciales. En general, a medida que pasa el tiempo y el bosque aumenta en edad, su población de árboles va disminuyendo debido a factores naturales de mortalidad y a procesos de corte por el hombre. Si todos estos factores obedecen a regímenes biológicos, climáticos o económicos más o menos estables, es posible definir una función tal que, para cada edad del bosque, dé la probabilidad de que un árbol cualquiera, tomado al azar, muera o sea derribado durante 1 año, antes de cumplir el siguiente año de edad. Esa función se puede denominar tasa de mortalidad a la edad x, $\mu(x)$, por analogía con el mismo proceso y la misma función en poblaciones humanas (2).

En consecuencia, la probabilidad de que un árbol elegido al azar sobreviva durante el transcurso de 1 año, es $1 - \mu(x)$. Si se designa con $L(x)$ la probabilidad de que un árbol viva todavía a la edad x, y consideramos un breve transcurso de tiempo (por ejemplo de unos pocos días) en el bosque, Δx, podemos escribir:

a. Probabilidad de que un árbol (al azar) muera o sea cortado durante $\Delta x : \mu(x) . \Delta x$

b. Probabilidad de que sobreviva durante el lapso $\Delta x : 1 - \mu(x)\, L(x)\, . \Delta x$

Además, según una regla de probabilidades muy conocida:

Probabilidad de que esté vivo a la edad $x + \Delta x =$ (Probabilidad de que esté vivo a la edad x) $\times$ (Probabilidad de que sobreviva durante Δx) o poniéndolo en símbolos

$$L(x + \Delta x) = L(x)\ [1 - \mu(x)\ .\ \Delta x]$$

Formando $L(x + \Delta x) - L(x)$, dividiendo por Δx y haciendo $\Delta x \longrightarrow 0$, se obtiene

$$\frac{1}{L}\,\frac{dL}{dx} = -\mu(x) \leqslant 0$$

cuando exista la derivada.

Es evidente que en el momento de hacer la plantación, todos los arbolitos están vivos, o sea que $L(0) = 1$. Integrando la ecuación anterior se encuentra, pues:

$L(x) = e^{-\int_0^x \mu(t)\,.\,dt} - \Sigma$ saltos de discontinuidad anteriores a x.

Esta función tiene algunas propiedades analíticas que reflejan realidades físicas obvias, y que vale la pena mencionar:

a. $L(x)$ es monotónicamente no creciente.

b. En todo su dominio, es $L(x) \leqslant 1$.

c. Cuando se hacen raleos o entresacas la función tiene un salto finito (discontinuidad), negativa.

d. Cuando el bosque se corte totalmente, a la edad T, se tiene $L(T+) = 0$.

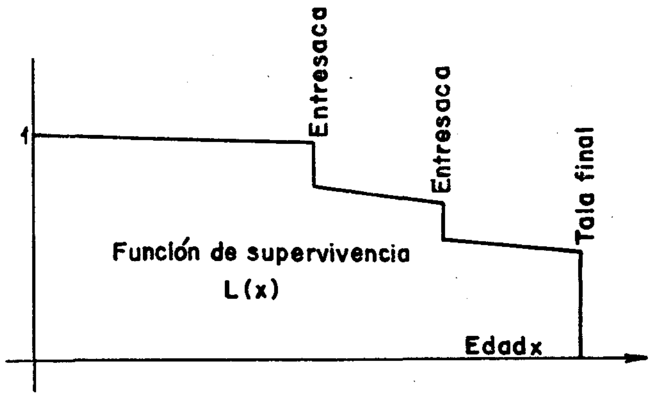

Figura 3

Si el número de árboles sembrados inicialmente (a edad cero, $x = 0$), y que llamamos $N(0)$ es grande, digamos del orden de decenas o centenas de miles, puede ponerse con muy buena aproximación que el número de ellos que viven aún a la edad x es:

$$N(x) = N(0)\, L(x),$$

de acuerdo con la ley de los grandes números. Es decir, que un buen estimador para $L(x)$ es

$$N(x)\ /\ N(0)$$

• 11. La edad T a la cual se tala el bosque completamente puede ser determinada a voluntad por el silvicultor. Sin embargo, es presumiblemente igual o cercana a la vida óptima del bosque, tal como ya se ha definido.

• 12. En las consideraciones anteriores no se ha tenido en cuenta el fenómeno de la regeneración natural del bosque por la germinación espontánea de semillas producidas por los árboles ya maduros, porque se ha tratado de una misma cohorte coetánea. La regeneración natural ha de ser tenida en cuenta cuando se analice la dinámica de la masa forestal, junto con las siembras nuevas y las resiembras, como un factor exógeno que se incorpora a la población de árboles ya existentes.

• 13. Por último, es oportuno señalar que el supuesto que hemos hecho de que la función $L(x)$ es invariante en el tiempo, es decir estacionaria, es bastante difícil de acercar a la realidad. En distintas épocas históricas van cambiando los factores adversos al bosque, tanto en su naturaleza como en su intensidad. Sin embargo, como una primera aproximación y para fines de análisis admitiremos aquella condición.

En un bosque bien cuidado, y en ausencia de incendios y de plagas puede ponerse con bastante aproximación

$$dL / dx = 0$$

en donde $L(x)$ sea derivable. En este caso

$$L(x) = 1 - \Sigma\, p(x_i) \quad , \text{ con } x_i < x$$

siendo $p(x_i)$ la proporción de árboles cortados en una entresaca a la edad x_i (anterior a x), en comparación con el número total inicialmente sembrados, $N(0)$. Si hay incendios, o plagas u otros agentes naturales que atacan el bosque, en general, es

$$dL / dx < 0$$

Este caso será considerado después con mayor detalle.

3. LA MASA FORESTAL DE UN BOSQUE HOMOGENEO Y SU CRECIMIENTO VOLUMETRICO

● 14. Se trata aquí de obtener expresiones matemáticas que nos den la población forestal y el volumen maderable de una gran masa forestal que se siembra de acuerdo con los siguientes supuestos:

a. La siembra se hace en forma continua en el tiempo, a una tasa constante o variable. Esto último incluye la posibilidad de interrupciones en el proceso de siembra.

b. La función de crecimiento de volumen maderable según la edad, $m(x)$, es invariante en el tiempo (o permanente, o estacionaria), y es una misma para cada árbol; o por lo menos representa fielmente el promedio por ejemplar.

c. Se trata de una misma especie taxonómica, sembrada en una región cuyas características ecológicas, edáficas y agrológicas son uniformes.

d. Todos los árboles sembrados en una misma fecha son cortados al alcanzar una misma edad T, pero no se hacen entresacas a edades menores que T.

Las premisas anteriores no son muy bien aplicables a procesos de reforestación dispersos, esporádicos y con mercado incierto para la madera, como ha sido el caso de Antioquia y en toda Colombia hasta hoy. Pero previsiblemente sí habrán de ser válidas en el futuro, cuando existan grandes masas boscosas que se explotarán de acuerdo con regímenes de corta bien determinados, y que habrán de sembrarse y resembrarse de acuerdo con programas cuidadosamente planificados. Esto habrá de ser así dentro de programas ambiciosos de reforestación para producción de pulpa de celulosa, o para otras formas de industrialización de la madera.

Con tales premisas ya puede describirse cuantitativamente la dinámica del bosque.

En efecto, sea:

$s(t)$: El número de árboles (o bien el número de hectáreas) que se siembren en una fecha t, por unidad de tiempo (digamos, por mes), dentro de un territorio determinado, como por ejemplo una cuenca hidrográfica, una gran región geográfica o un departamento.

u: Edad de un árbol y de todos sus coetáneos (sembrados en la misma fecha, anterior).

$m(u)$: Volumen de madera en cada árbol (o, respectivamente, en cada hectárea) en pie, y de edad u. En caso de que los cálculos se refieran a la superficie forestal en lugar de la población forestal, en lugar de $m(u)$ pondríamos la función $V(u)$ que ya se explicó antes, introduciendo también el número de árboles por hectárea.

$L(u)$: Función de supervivencia a la edad u, es decir, proporción de árboles que aún viven, en comparación con el número que se sembró inicialmente en una misma fecha. Admitimos que $L(u)$ es derivable a trozos, por lo menos, en su dominio $0 < u < T$.

T: Edad señalada para la tala de cada árbol, o sea el turno de corta.

t: Una fecha dentro de la historia del bosque en la cual se trata de cuantificar las existencias en árboles y/o en madera.

De acuerdo con esta nomenclatura, podemos escribir:

$s(x)\,\Delta x$: número de árboles que fueron sembrados durante un corto intervalo Δx de tiempo, en la fecha x anterior a t. Esos árboles tendrán la edad $t - x$ en la fecha x.

$s(x)\, L(t - x)\, \Delta x$: número de árboles de esa cohorte coetánea (o "generación") que permanecen en pie en la fecha t.

$m(t - x)\ .\ s(x)\, L(t - x)\ \Delta x$: volumen de madera de esa cohorte, en la fecha t.

Puesto que todos los árboles al llegar a la edad T son talados, es claro que en fecha t no queda ninguno que hubiera sembrado en fecha anterior a $x = t - T$. En otras palabras: $L(u) = 0$ para $u > T$. Se deduce así que el número de árboles en pie a la fecha t es:

$$(3.1) \qquad N(t) = \int_{t-T}^{t} s(x)\; L(t-x)\, dx$$

y que la madera existente es:

$$(3.2) \qquad M(t) = \int_{t-T}^{t} m(t-x)\,.\,L(t-x)\; s(x)\,.\,dx$$

Cambiando la variable independiente de t a $u = t - x$, se escribe también:

$$(3.3) \qquad N(t) = \int_{0}^{T} s(t-u)\, L(u)\, du$$

$$(3.4) \qquad M(t) = \int_0^T m(u) \,.\, L(u) \,.\, s(t-u) \,.\, du$$

Las expresiones anteriores permiten predecir las existencias en árboles o en madera que tendrá el bosque en una fecha futura determinada t, si se conoce el programa de siembras $s(x)$ y la función de supervivencia $L(u)$.

La función:

$$m(u)\, L(u) = g(u)$$

indica el volumen promedio de madera en pie existente a la edad u, por cada arbolito sembrado inicialmente en una misma cohorte, aunque de ellos algunos pueden ya haber desaparecido por destrucción, pestes o entresacas. Esta función será derivable (o por lo menos, derivable a trozos), según las propiedades que hemos propuesto para $m(u)$ y para $L(u)$. Por ser $m\ (0) = 0$, resulta $g(0)$, y la derivada de $g(u)$, en donde exista, es:

$$\dot{g}(u) = m(u)\, \dot{L}(u) + \dot{m}(u)\, L(u)$$

en donde el punto escrito sobre cada función indica *su* derivada, como es usual (Notación de NEWTON y de LAGRANGE).

Usando la notación de producto convolutivo, las fórmulas (3.3) y (3.4) pueden escribirse:

$$N(t) = s(t) * L(t) \quad \text{con } 0 \leqslant t \leqslant T$$
$$M(t) = g(t) * L(t).$$

• 15. Un aspecto del bosque que es muy importante conocer es la velocidad de crecimiento del volumen de madera. Para ello derivamos la ecuación (3.4) respecto a t, usando la llamada regla de LEIBNIZ, ya que t aparece bajo el integral y en ambos límites

$$\dot{M}(t) = \int_{t-T}^{t} s(x)\, \dot{g}(t-x)\, dx + s(t)\, g(0) -$$
$$s(t-T)\, g(T) \text{ pero } g\ (0) = 0, \text{ luego}$$

$$(3.5) \qquad \dot{M}(t) = \int_{t-T}^{t} s(x)\, \dot{g}(t-x)\, dx -$$
$$s(t-T)\, g(T).$$

Esta expresión está constituida por dos términos:

a. El integral:

$$\int_{t-T}^{t} s(x)\, g(t-x)\, dx$$

o bien:

$$\int_0^t s(t-u)\, \dot{g}(u)\, du$$

que significa el aumento de madera por unidad de tiempo, de aquellos árboles que aún no han llegado a la edad de corta, T;

b. El término:

$$-s(t-T)\, g(t)$$

que significa la extracción de madera por unidad de tiempo, y que consiste de la que contienen aquellos árboles que llegan a la edad T, y que pertenecen a la cohorte o generación que fue sembrada en la fecha anterior $t-T$.

A título de ejemplo examinaremos algunos modelos correspondientes a distintos regímenes de siembra en el tiempo, y dentro de las hipótesis ya mencionadas.

• 16. *Ejemplo 1.* Consideramos un bosque que desde tiempo inmemorial viene siendo resembrado y talando los árboles de edad T, a un ritmo continuo y constante, o sea:

$$s(x) = a \ \text{(constante), para } -\infty < x < +\infty$$

La ecuación (3.4) da para el volumen de madera:

$$M(t) = \int_{t-T}^{t} a \,.\, g(t-x)\, dx =$$
$$a \int_0^t .\, g(u)\, du = a\, G(T)$$

siendo $G(x) = \int_0^x g(u)\, du$, la primitiva de $g(u)$.

Y derivando respecto a t:

$$dM\, /\, dt = 0$$

Es decir que el volumen de madera en pie permanece constante. Eso significa que el volumen de madera cortada por la tala de árboles a la edad T es exactamente compensado por el aumento volumétrico de los árboles más jóvenes que quedan en pie. Esta situación es pues el régimen estacionario de siembra y extracción continuadas y constantes de una masa forestal de volumen constante.

• 17. *Ejemplo 2.* Consideramos el caso de una plantación nueva (forestación primaria) que se siembra durante un tiempo corto (y en todo caso hasta antes de comenzar a talar), a un ritmo uniforme, durante un lapso de duración D, y luego se suspende la siembra. Al llegar a su edad de corte $(T > D)$, los primeros árboles, comienza a talarse sistemáticamente los que la van alcanzando.

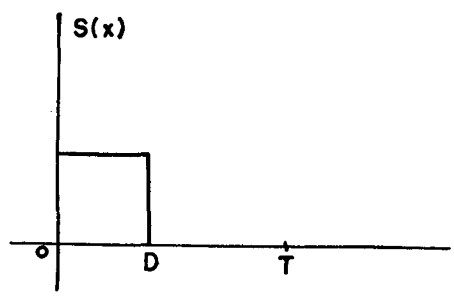

Figura 4

El ritmo de siembra es pues:

$$s(x) = \begin{cases} 0\,, x < 0 \\ a\,, 0 < x < D \\ 0\,, x > D \end{cases}$$

i. Para $t \epsilon (o, D)$:

$$M(t) = \int_0^t a \, . \, g(t-x) \, dx = a \int_0^t g(u) \, du = a \, G(t)$$

de donde:

$dM / dt = a \, . \, g(t) > 0$

ii. Para $t \epsilon (D, T)$:

$$M(t) = \int_0^t s(x) \, . \, g(t-x) \, dx = \int_0^D a \, . \, g(t-x) \, dx \, . \, dx = - \int_t^{t-D} a \, . \, g(u) \, du = a \, [G(t) - G(t-D)]$$

de donde:

$dM/dt = a \, [g(t) - g(t-D)] > 0$, [si $m(t) \, L(t) > m(t-D) \, L(t-)$].

iii. Para $t \epsilon (T, T+D)$:

$$M(t) = \int_{t-T}^t s(x) \, g(t-x) \, dx = \int_{t-T}^D a \, g(t-x) \, dx = - \int_t^{t-D} a \, . \, g(u) \, du = a \, [\, G(T) - G(t-D) \,]$$

de donde:

$dM / dt = - a \, g(t-D) < o$

iv. Para $t > T + D$:

$M(t) = 0$ de donde $dM/dt = 0$

La figura 5 ilustra esquemáticamente la curva de desarrollo y de extinción de un bosque sembrado y talado en estas condiciones.

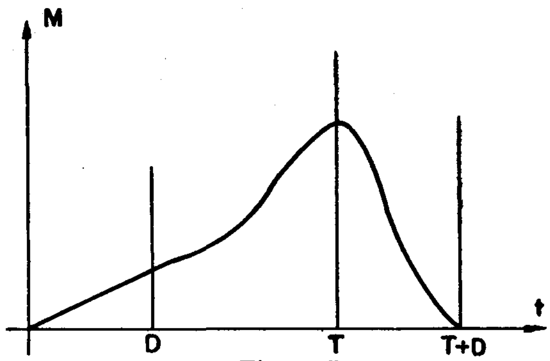

Figura 5

• 18. *Ejemplo 3.* En el caso en que la siembra se haga a un ritmo constante durante todo el período de crecimiento de los primeros árboles, y se suspenda desde el momento en que estos comienzan a ser cortados a edad T, se tiene un caso particular del ejemplo anterior, siendo $D = T$. En estas condiciones hay dos períodos en la vida del bosque, uno de siembra y otro de corte, sin intervalo intermedio. El crecimiento en cada uno de tales períodos puede describirse así:

a. Para $t \epsilon (0, T)$: $M(t) = k \, G(t) \implies dM/dt = k \, g(t)$

b. Para $t \epsilon (T, 2T)$: $M(t) = k \, [G(T) - G(t-T)] \implies dM/dt = -k \, . \, g(t-T) < 0$

• 19. *Ejemplo 4.* Veamos ahora el caso de un rodal que se siembra partiendo de tierra rasa. La siembra se hace a un ritmo creciente de manera uniforme, durante cierto lapso D, menor que la vida útil prescrita $(T > D)$; luego se suspende la siembra y se deja crecer el bosque hasta que los árboles se talan al llegar a su edad T. Este ejemplo es análogo al ejemplo 2, con la diferencia de que el ritmo de siembra en aquel ejemplo es constante mientras en el presente ejemplo es variable (uniformemente creciente), es decir $s(x) = kx$, en $x \epsilon (0, D)$, con $k =$ constante, y $s(x) = 0$ en todo otro momento.

Se tiene aquí también tres etapas claramente diferenciadas:

a. Para $t \epsilon (0, D)$: $M(t) = \int_0^t kx \, g(t-x) dx = \int_0^t k(t-u) \, g(u) \, du$, e integrando por partes se encuetra:

$$M(t) = kt \, G(t) - k \, [u \, G(u) - G(u) \, du]_o^t = k \int_o^t G(u) \, du \implies \frac{dM}{dt} = G(t) \int_o^t g(x) \, dx$$

b. Para $T(D, T)$: $M(t) = \int_o^D kx \, g(t-x) \, dx = \int_{t-D}^t k(t-u) \, g(u) du$

$$= kt \, [\, G(t) - G(t-D) \,] - k \, [u \, G(u) - G(u) \, du]_{t-D}^t$$

$$= k \int_{t-D}^t G(u) \, du - k \, D \, G(t-D)$$

de donde:

$$dM/dt = k \, [\, G(t) - G(t-D) \,] - k \, D \, g(t-D) = k \int_{t-D}^t g(u) \, du - k \, D \, . \, g(t-D)$$

c. Para $t \epsilon (T, T+D) : M(t) = \int_{t-T}^t kx \, g \, (t-x) dx$

$$= \int_{t-T}^D k \, x \, g(t-x) dx = \int_{T-D}^T k \, (t-u) \, g(u) \, du$$

$$= k \, t \, [\, G(T) - G(t-a) \,] - k \, [u \, G(u) - \int G(u) \, du]_{T-D}^T$$

$$= k \, (t-T) \, G(T) - k \, D \, G(t-D) + k \int_{t-D}^T G(u) \, du \implies$$

$$dM/dt = k \, [\, G(t) - G(T-D) \,] - k \, a \, g(t-D)$$

La curva de aumento volumétrico en las tres fases se aprecia en la figura anexa.

Si el período de siembra se prolongara hasta el momento T de comenzar a talar los primeros árboles, se tendrían dos fases:

a. Para $t \epsilon (0, T): M(t) = \int_0^t G(u)\, du \Rightarrow dM/dt = k\, G(t)$

b. Para $t \epsilon (T, 2T): M(t) = k(t-T)\, G(T) - k a\, G(t-a) + k \int_{t-a}^{T} G(u)\, du$

En el anexo 1 se presenta otro ejemplo sobre el cálculo del crecimiento volumétrico bajo otro régimen de siembras.

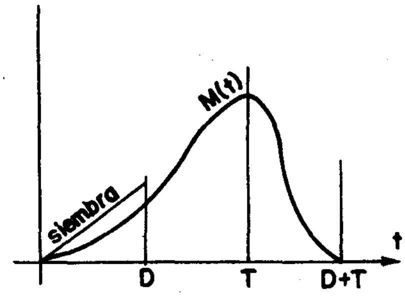

Figura 6

• 20. Si consideramos la posibilidad de hacer entresacas, las funciones que dan la población en el bosque, el volumen de madera en pie y la tasa de extracción son distintas. Consideremos, por ejemplo, que antes de completar el turno del bosque se hacen n entresacas, a las edades E_1, E_2, .., $E_n < T$, en su orden. En cada una de estas entresacas se corta cierto número de árboles que representan determinadas proporciones respecto al número de árboles que permanecen en pie al momento de la entresaca, proporciones a las cuales llamamos p_1, p_2, .., pn. En Antioquia, en el caso de las coníferas, para un turno de $T = 20$ años, los ingenieros forestales recomiendan hacer entresacas a las edades de $E_1 = 8$ años, $E_2 = 12$ años, $E_3 = 16$ años antes de la tala final a los 20 años.

En este caso, debemos hacer otras consideraciones. En la función de supervivencia $L(x)$ hay que separar el efecto de la mortalidad natural por pestes, fuego y otros agentes, del efecto de las entresacas, porque el primero es una riqueza que se pierde (al menos parcialmente) mientras que las últimas dan un producto aprovechable.

Sea $H(x)$ la función de supervivencia a la edad x, *si no se hicieran las entresacas* programadas, y si solo se perdieran árboles por acción de agentes que actúan al azar pero bajo un régimen aleatorio cuyas probabilidades pueden determinarse a cada edad. De esta función $H(x)$ supondremos que es derivable por lo menos a trozos en su dominio $0 \leqslant x \leqslant T$, aunque presente discontinuidades en algunos puntos (*p.e.* por calamidades repentinas), y desde luego, donde exista la derivada, es $dH/dx < 0$. En esta forma la función de supervivencia, *considerando las entresacas*, a lo largo de la vida del rodal, será:

a. Al momento de la siembra de una cohorte inicial de No árboles, $x = 0$, se tiene:
$L(0) = H(0) = 1$

b. Después de la siembra y antes de la 1ª entresaca o sea para $0 < x < E_1$, se tiene:
$N(x) = N_o H(x)$, de donde $L(x) = N(x)/N_o = H(x)$

c. Inmediatamente antes de la 1ª entresaca, o sea, en símbolos $x = E_1 - e$, siendo e muy pequeña:
$N(E_1-) = N_o H(E_1)$, de donde $L(E_1-) = H(E_1)$

d. Inmediatamente después de la 1ª entresaca, o sea, para $x = E_1 + e$, siendo e muy pequeña:
$N(E_1+) = H(E_1)\,(1-p_1)\, N_o$, de donde $L(E_1+) = (1-p_1)\, H(E_1)$

e. Después de la 1ª entresaca y antes de la 2ª, o sea, para $E_1 < x < E_2$ se tiene:
Probabilidad de que un árbol que está vivo a edad E_1 continúe vivo a edad $x > E_1 = H(x)/H(E^1)$
Número de árboles con que comienza este período $= N(E_1+) = (1-p_1) \times H(E_1)\, N_o$
Número de árboles sobrevivientes a edad x
$N(x) = (1-p_1)\, H(E_1)\, .\, N_o\, .\, H(x) / H(E_1) = N_o\,(1-p_1)\, H(x)$
de donde $L(x) = (1-p_1)\, H(x)$
y por consideraciones análogas se tiene, en general, que para la edad x, posterior a E_r y anterior a E_{r+1}, es decir $E_r < x < E_{r+1}$, la función *de supervivencia.es*s..
$L(x) = (1-p_1)\,(1-p_2)\, ..\, (1-p_r) H(x)$

Para fijar ideas, supondremos que sólo se harán 3 entresacas, a las edades E_1, E_2 y E_3 antes de la tala final a la edad T. Así, se puede poner:

$$L(x) = \begin{cases} H(x)\ , & 0 < X < E_1 \\ (1-p_1)\, H(x)\ , & E_1 < X < E_2 \\ (1-p_1)\,(1-p_2)\, H(x)\ , & E_2 < X < E_3 \\ (1-p_1)\,(1-p_2)\,(1-p_3)\, H(x)\ , & E_3 < X < T. \end{cases}$$

● 21. Las existencias en el bosque, en árboles y en madera se pueden calcular ya fácilmente, para una fecha cualquiera:

a. De los árboles en edad $x < E_1$, que aún no han sufrido la 1ª entresaca, se sembraron en fecha $y = t - x$, un número $s(y) \, . \, dy$, y sobreviven en fecha t

$$d N_1(t) = s(y) \, . \, dy \, . \, L(t-y) = S(y) \, . \, H(t-y) \, . \, dy$$

Entonces, del período de siembra desde $t - E_1$ hasta t, quedan en pie

$$N_1(t) = \int_{t-E_1}^{t} s(y) \, H(t-y) \, . \, dy$$

b. Del período de siembras desde $t - E_2$ hasta $t - E_1$, cuyos árboles tienen edades entre E_1 y E_2, a la fecha t hay en pie

$$N_2(t) = \int_{t-E_2}^{t-E_1} s(y) \, H(t-y) \, (1-p_1)$$

Así mismo pueden escribirse las expresiones para el número de árboles en pie con edades entre E_2 y E_3 (N_3), y el número con edades entre E_3 y T (N_4). La población total es

$$N(t) = N_1(t) + N_2(t) + N_3(t) + N_4(t)$$

$$(3.6) \quad N(t) = \int_{t-E_1}^{t} s(y) \, H(t-y) \, dy + (1-p_1) \int_{t-E_2}^{t-E_1} s(y) \, H(t-y) \, dy + (1-p_1) \, (1-p_2)$$

$$\int_{t-E_3}^{t-E_2} s(y) \, . \, H(t-y) \, dy + (1-p_1) \, (1-p_2) \, (1-p_3) \int_{t-T}^{t-E_3} s(y) \, H(t-y) \, dy$$

● 22. Así también se deduce que el volumen de madera en pie, a la fecha t, es:

$$(3.7) \quad M(t) = \int_{t-E_1}^{t} m(t-y) \, . \, s(y) \, H(t-y) \, dy + \ldots + q_3 \int_{t-T}^{t-E_3} m(t-y) \, s(y) \, H(t-y) \, . \, dy$$

en donde, por brevedad en la escritura, se han omitido los dos términos correspondientes a los períodos de siembra de $t - E_2$ a $t - E_1$, y de $t - E_3$ a $T - E_2$; y hemos puesto

$q_3 = (1-p_1) \, (1-p_2) \, (1-p_3)$, $q_2 = (1-p_1) \, (1-p_2)$, $q_1 = 1 - p_1$.

Derivando la expresión (3.3), y escribiendo, por simplificar la notación, $m(u) \, H(u) = f(u)$, se encuentra la tasa neta de aumento del volumen maderable:

$$(3.8) \quad \dot{M}(t) = \int_{t-E_1}^{t} s(y) \, \dot{f}(t-y) \, dy + q_1 \int_{t-E_2}^{t-E_1} s(y) \, \dot{f}(t-y) \, . \, dy + q_2 \int_{t-E_3}^{t-E_2} s(y) \, .$$

$$\dot{f}(t-y) \, dy + q_3 \int_{t-T}^{t-E_3} s(y) \, \dot{f}(t-y) dy - s(t-E_1) \, f(E_1) + q_1 \, [s(t-E_1) \, f(E_1)$$

$$- s(t-E_2) \, f(E_2)] + q_2 \, [s(t-E_2) \, f(E_2) - s(t-E_3) \, f(E_3)] + q_3 \, [s(t-E_3) \, f(E_3) - s(t-T) \, f(T)]$$

Para calcular esta derivada se ha usado la regla de LEIBNIZ (3), teniendo en cuenta que la variable independiente t aparece bajo los integrales, en los límites superiores y en los límites inferiores. Además, se ha usado la propiedad de que

$$f(0) = m(0) \, H(0) = 0 \text{ porque } m(0) = 0.$$

Sustituyendo las q por su valor en términos, de las p, y reorganizando términos, se tiene:

$$(3.9) \quad \dot{M}(t) = \int_{t-E_1}^{t} s(y) \, \dot{f}(t-y) \, dy + q_1 \int_{t-E_2}^{t-E_1} s(y) \, \dot{f}(t-y) \, dy + q_2 \int_{t-E_3}^{t-E_2} s(y) \, \dot{f}(t-y) \, . \, dy +$$

$$q_3 \int_{t-T}^{t-E_3} s(y) \, \dot{f}(t-y) \, dy \; - p_1 \, s(t-E_1) \, f(E_1) - p_2 \, q_1 \, s(t-E_2) \, f(E_2) -$$

$$- p_3 \, q_2 \, s(t-E_3) \, f(E_3) - q_3 \, s(t-T) \, f(T)$$

omitiendo las expresiones que hay bajo los integrales, que son las mismas de la ecuación (3.8).

Cada uno de los cuatro integrales significa el crecimiento volumétrico de la madera de los árboles sembrados en los períodos de $t-E_1$ a t, de $t-E_2$, a $t-E_1$, de $t-E_3$ a $t-E_2$ y de $t-T$ a $t-E_3$, retrospectivamente. Los otros cuatro términos, precedidos de signo negativo, expresan la tasa de extracción en la fecha considerada, t, correspondiente a la 1ª entresaca de los árboles de edad E_1, a la 2ª de los de edad E_2, etc., y a la corta final de los que llegan a la edad T en ese momento.

4. PREDETERMINACION DE PROGRAMAS DE SIEMBRA POR METAS FUTURAS

• 23. El análisis que se ha hecho en párrafos anteriores permite dar solución a un problema que hasta ahora no se ha planteado (y con mayor razón, no se ha resuelto) en la literatura conocida sobre manejo de bosques. Dicho problema es el de determinar a priori un programa escalonado de siembras, cronológicamente dispuesto de modo que, de acuerdo con un régimen determinado de cortas, permita disponer en el futuro de determinados volúmenes de madera en pie.

Partimos nuevamente de la ecuación (3.4) para el volumen de madera en pie, de acuerdo con la nomenclatura y con los supuestos explicados en el numeral 14:

$$(4.1) \qquad M(t) = \int_0^T g(u)\, s(t-u)\, du$$

siendo $g(u) = m(u)\, L(u)$. En esta fórmula no se consideran entresacas, sea porque no las hay, o porque su producido en volumen de madera es insignificante.

El problema que se plantea es el de conocer cuál es la función $s(t)$ que dará lugar a una determinada forma de crecimiento en el tiempo del volumen de madera, $M(t)$. Esto es, establecer la función incógnita $s(t)$ suponiendo que $M(t)$ está dada y es conocida. La función incógnita aparece en la ecuación anterior bajo el signo integral, y además su argumento aparece disminuido o "rezagado" en cierta cantidad variable, u. Una ecuación de esta naturaleza se llama una ecuación integral con retraso, o ecuación histero-diferencial. Hay muchos problemas en Demografía, en Investigación de Operaciones, en Biología, en Teoría de Renovación, y en otras disciplinas que conducen a una ecuación análoga a la ecuación (4.1). (4).

Hay dos maneras de resolver la ecuación propuesta. Una de ellas usa el método de la transformación de LAPLACE (ver anexo 2). La otra fue descubierta por el matemático y demografista ALFRED J. LOTKA en 1939, y por ser más sencilla es la que presentaremos aquí. (5).

Según el método de LOTKA, la solución para la ecuación (4.1) es:

$$s(t) = C_o F_o(t) - C_1 F_1 + \frac{C_2}{2!} F_2(t) - \frac{C_3}{3!} F_3(t) + \ldots\ldots$$

siendo:

$$F_o(t) = M(t)$$

$$F_r(t) = d^r F_o(t) \,/\, dt^r \qquad (r = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$$

$$C_o = 1 / \int_0^T g(u)\, du$$

y los otros coeficientes están ligados por relaciones:

$$C_1 = - a_1 C_o$$

$$C_2 = - a_1 C_1 - a_2 C_o$$

$$C_3 = - a_1 C_2 - 2a_2 C_1 - a_3 C_2$$

....

en donde los coeficientes $a_1, a_2, \ldots$, se llaman semi-invariantes y están relacionados con los momentos de la función $g(u)$,

$$m_n = \int_0^T u^n g(u)\, .\, du$$

por las relaciones:

$$m_o = \int_0^T g(u)\, du$$

$$m_1 = a_1 m_o$$

$$m_2 = a_1 m_1 + a_2 m_o$$

$$m_3 = a_1 m_2 + a_2 m_1 + a_3 m_o$$

$$m_4 = a_1 m_3 + a_2 m_2 + a_3 m_1 + a_4 m_o$$

Resolviendo estas igualdades una tras otra se encuentra

$$C_o = 1/m_o \ , \quad m_o = \int_0^T g(u)\, .\, du$$

$$C_1 = -\, (m_1/m_o) \ , \quad m_1 = \int_0^T u\, .\, g(u)\, du$$

$$C_2 = \left[2 \frac{m_1}{m_o}^2 - \frac{m_2}{m_o}\right] \ , \quad m_2 = \int_0^T u^2 g(u)\, du$$

$$C_3 = -\left[5 \frac{m_1}{m_o}^3 - \frac{5\, m_1 m_2}{m_o{}^2} - \frac{m_3}{m_o}\right] ,$$

$$m_3 = \int_0^T u^3\, .\, g(u)\, .\, du$$

Evidentemente este método supone que la función $M(t)$ es indefinidamente derivable casi por doquier.

Es interesante ver dos ejemplos del uso de esta ecuación.

• 24. Consideremos el caso de una masa forestal manejada en las condiciones que dan lugar a la ecuación (3.4) o sea a la (3.5), y en la cual se trata de mantener constante en el tiempo el volumen de madera.

Es decir, $M(t) = A$. Entonces:

$$F_o(t) = A \ , \quad F_1(t) = 0 = F_2 = F_3 = \ldots$$

y, en consecuencia

$$s(t) = \frac{A}{\int_0^T g(u)\, .\, du}$$

Además, si en los bosques no hay plagas, ni fuego, ni entresacas, $L(u) = 1$, y por lo tanto:

$$g(u) = m(u)$$

así que:

$$s(t) = \frac{A}{\int_0^T m(u)\, .\, du}$$

es decir, que el programa de siembra debe hacerse en forma prolongada, indefinidamente, y a un ritmo constante. Para un proceso de reforestación de esta naturaleza, en Antioquia, con *Cupressus sp.*, y admitiendo la fórmula de TSCHINKEL, sería

$$s(t) = \frac{A}{2.30258\ (a + cI + lN)\ \int_0^T e^{-2.30258(dI - b)/x}\ .\ dx}$$

y el integral del denominador puede valorarse por los procedimientos numéricos o gráficos bien conocidos.

• 25. Otro ejemplo sería el caso de que se trate de lograr que el volumen de madera existente crezca en el futuro según una curva logística, tratando de llegar a un volumen límite en el futuro, en forma más o menos rápida. La forma de esta curva se ilustra en la figura.

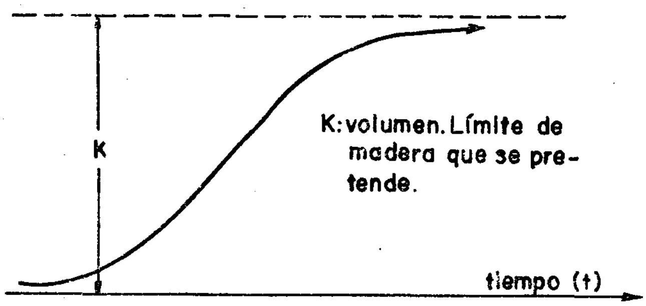

Figura 7

La fórmula que expresa la curva logística es:

$$M(t) = \frac{K}{1 + e^{-c(t - t_o)}}$$

en donde:

K: Volumen — límite de madera al cual se pretende llegar a largo plazo, asintóticamente.

$c = 2\ M^1(0)\ /\ M(0)$ = el doble de la tasa porcentual de crecimiento que se señale para el momento de comenzar el programa, o sea en el momento $t = t_o$.

5. INVERSIONES Y RENDIMIENTOS ECONOMICOS DE UN RODAL

• 26. En general, el análisis económico que recomiendan los textos de economía forestal es bastante simple. Consiste en calcular los gastos que requiere el bosque en cada año de su vida, así como la cantidad de madera que producirá por entresacas y en la tala final, y luego proyectarlos en forma descontada a una misma fecha (generalmente a la fecha de corta final). Una vez hecho esto, se comparan los beneficios descontados con los gastos y costos descontados para establecer su rentabilidad. Las tasas que se suelen recomendar para calcular valores descontados son por lo general copiadas de la literatura sueca, canadiense o norteamericana de los años sesenta, y aún más antiguas, y por eso son del orden del 5% anual, el 6% o algo por el estilo.

A esta metodología pueden hacerse los siguientes reparos:

a. No toma en cuenta los virulentos procesos inflacionarios que se han experimentado y se seguirán experimentando en Colombia.

b. No considera el fenómeno que muestra la realidad colombiana de que la tasa de aumento en los precios de la madera, sobre períodos de varios años, es sensiblemente distinta de la tasa de aumento del nivel general de precios de toda la economía.

c. No da la significación debida al costo de oportunidad de la tierra ni al costo de oportunidad del dinero.

Por estas razones se justifica ahondar un poco en el análisis cuantitativo de los fenómenos económicos de la reforestación.

• 27. Para el análisis que sigue, nos referiremos a un *rodal coetáneo*, y estableceremos las siguientes hipótesis, que corresponden a la realidad colombiana, al menos en primera aproximación y sobre períodos prolongados de tiempo (7):

a. Se conoce de antemano la función de crecimiento volumétrico de un árbol, $m(x)$.

b. El rodal se siembra con densidad uniforme de árboles por hectárea, y en forma simultánea, es decir que todo el rodal es coetáneo.

c. El precio de la madera crecerá en el futuro con una tasa porcentual predecible y constante.

d. Conocemos con exactitud los gastos y los costos que demanda la siembra y el cuidado del bosque en cada año de su edad, previa una cuantificación del trabajo humano y de los insumos físicos requeridos. Tales gastos y costos son proporcionales al área del bosque.

e. Pueden hacerse entresacas a distintas edades.

f. El análisis que se explicará corresponde a la fecha de comenzar las siembras.

g. Toda madera que se corte se aplica prioritariamente a amortizar gastos ya hechos.

h. El reforestador es, estrictamente, un empresario que aporta la tierra y el capital, pero se considerará que estos dos factores representan costos de explotación. El costo de la tierra se computa como un arrendamiento que va incorporado a la función $h(u)$, y el costo del dinero está representado por la tasa de interés r.

i. Los cálculos se hacen todos a precios constantes, es decir, sin tener en cuenta la inflación, o bien una vez que ella ha sido corregida.

j. Suponemos que todos los arbolitos inicialmente plantados nacen y crecen, y que luego no hay mortalidad natural del bosque.

Establezcamos además las siguientes convenciones de nomenclatura:

$m(x)$: Volumen de madera en un árbol promedio (es decir, representativo) de una misma cohorte, a la edad x, sembrada en un mismo momento, por ejemplo, en un mismo período lluvioso de un mismo año.

$N(x)$: Número de árboles por hectárea que permanecen en pie a la edad x.

N_o: Número de árboles por hectárea que se siembran y que crecen inicialmente.

$h(x)$: Gastos de operación, más costos de administración, más renta de la tierra, por unidad de tiempo y por hectárea, a la edad x. Este valor se supone expresado a los precios corrientes del momento de hacer el análisis, y, en general, no depende del número de árboles existentes en el momento de hacer estos gastos o estas inversiones.

p: Precio de la madera en pie, por metro cúbico.

$D(x)$: Suma total de gastos e inversiones hechas hasta la edad x, por hectárea.

$i(x)$: Costo de financiamiento (si lo hay), por unidad de tiempo, a la edad x. Este costo vale $i(x) = r \, . \, D(x)$, siendo r la tasa de interés que se pague por el dinero, por unidad de tiempo, y que supondremos constante.

$t(x)$: Número de árboles talados por unidad de tiempo y por hectárea, a la edad u.

El monto acumulado de gastos e inversiones hechos hasta la edad u, por hectárea, crece con la edad del bosque afectada por tres factores:

a. Los gastos de explotación, administración y otros (h), que lo incrementan.

b. Los gastos financieros (i) que lo incrementan, siendo $i = rD$.

c. La tala de árboles (t), cuyos rendimientos se aplican en primer lugar a amortizar los gastos hechos, o la deuda que se haya adquirido para sufragarlos.

Esta consideración permite escribir la ecuación diferencial:

$$(5.1) \quad \frac{dD(x)}{dx} = h(x) - p \, . \, m(x) \, . \, t(x) + r \, . \, D(x)$$

con la condición inicial obvia $D(0) = 0$.

La solución de esta ecuación diferencial (Problema de CAUCHY), se obtiene por métodos elementales de integración, muy conocidos, y es (6):

$$D(x) = e^{rx} \int_0^x e^{-rv} \, [h(v) - p \, . \, m(v) \, . \, t(v)] \, dv$$

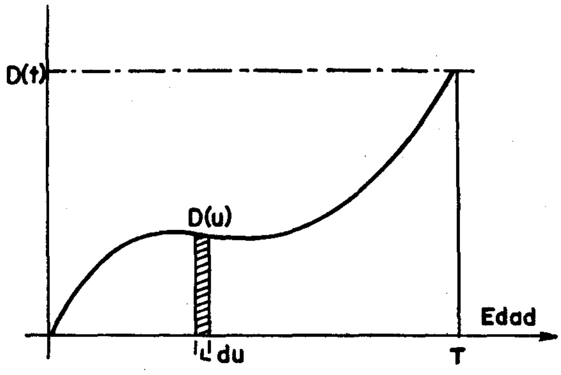

Figura 8

La gráfica que representa esta función se ve en la figura anexa. La curva es creciente en la mayor parte de su dominio, excepto en aquellas edades en que el lado derecho de la ecuación (5.1) sea negativo.

La inversión retenida durante la vida del rodal, por hectárea, es:

$$I(T) = \int_0^T D(x) \, . \, dx$$

y es con respecto a ella como se mide la rentabilidad relativa de la explotación.

Integrando por partes se tiene:

$$I(T) = [D(x) \, . \, x]_0^T - \int_0^T x \, . \, D^1(x) \, . \, dx$$

$$(5.2) \quad = T \, . \, D(T) - \int_0^T x \, [h(x) - p \, . \, m(x) \, t(x)] \, dx - \int_0^T x \, . \, r \, . \, D(x) \, dx$$

Ahora bien. El número de árboles que se haya cortado hasta la edad x, por hectárea, es:

$$\int_0^x t(u) \, . \, du$$

y los que subsisten en pie, por hectárea, a la edad x, son:

$$N(x) = N_o - \int_0^x t(u) \, . \, du$$

y al final del turno:

$$N(T) = N_o - \int_0^T t(u) \, . \, du$$

El valor de las ventas de madera extraída por las entresacas y el raleo, hasta la edad x, por cada hectárea, es:

$$\int_0^x p \, . \, m(u) \, . \, t(u) \, . \, du,$$

y durante toda la vida del rodal, es el integral anterior desde cero hasta T.

El valor de la madera que se corta en la tala final es:

$$p \, . \, m(T) \, . \, N(T) = p \, . \, m(T) \, . \, [N_o - \int_0^T t(u) \, . \, du]$$

La utilidad obtenida es la suma de los dos renglones anteriores menos la deuda $D(T)$ que se cancela finalmente al cortar por último el rodal.

$$(5.3) \quad U(T) = \, . \, m(T) \, . \, N_o - \int_0^T [m(T) - m(u)] \, t(u) \, . \, du - D(T)$$

La rentabilidad relativa, por año de vida del bosque, es:

5.4) $U(T)/I(T)$

cuyo valor está dado por el cuociente de las expresiones (5.3) y (5.2).

• 28. Aplicaremos las ideas anteriores a las condiciones que corresponderían muy probablemente a proyectos de siembra y explotación de coníferas que estuvieren exclusivamente dedicadas a producción de pulpa de celulosa. Tales condiciones serían presumiblemente las siguientes:

a. No se hacen podas, raleos ni entresacas en toda la vida del bosque, es decir, $t(x) = 0$ para todo x desde 0 hasta T.

b. El turno de los rodales es de 12 años: $T = 12\,a$.

c. Se usará para el cálculo de volúmenes de madera, $m(x)$, las curvas de TSCHINKEL, con índice de sitio de 18, que es aproximadamente el promedio en Antioquia. Pondremos: $m(T) = m(12\,a) = M$.

d. No hay mortalidad en el bosque, y todas las plántulas inicialmente sembradas crecerán.

e. El análisis financiero se hace a precios constantes, y sin considerar los costos de oportunidad del dinero, es decir, sin corregir los valores en distintas fechas por valores presentes descontados a una fecha de referencia. Aunque en buena técnica de análisis financiero debe hacerse esa reducción a valores presentes, aquí la omitimos por no recargar la escritura de las expresiones. Además, trabajando a precios constantes, las diferencias resultantes de hacer o no esa reducción, no son muy importantes.

f. El reforestador aporta la tierra y el dinero para la operación. El valor de la tierra por hectárea es A, y se mantiene constante, en moneda constante. En otras palabras, aun a precios corrientes, el *precio relativo* de la tierra es constante. Además, por otra parte, como el dinero es propio del reforestador, no hay gastos financieros. Y siendo propia la tierra, no hay gasto por arrendamiento de la tierra.

En este caso la función $h(x)$ está formada por los gastos de preparación de tierra, siembra, cultivo, administración y asistencia técnica. No hay que imputarle gastos financieros ni arrendamientos, porque no los hay. Entonces, para cada hectárea, se tiene:

i. Valor de las ventas de madera (en pie) al final del turno: $p \,.\, m(T) \,.\, N = p\,M\,N$

ii. Gastos hechos durante toda la vida del bosque: $\int_0^T h(x) \,.\, dx$

iii. Inversión representada en la tierra, retenida durante toda la vida del rodal: AT

iv. Inversión representada en los gastos hechos, retenido cada uno desde la fecha x hasta la fecha T:

$$\int_0^T (T-x)\, h(x) \,.\, dx$$

En consecuencia, la utilidad en dinero obtenida al final del proyecto valdría:

$$U_1 = p\,M\,N - \int_0^T h(x) \,.\, dx$$

y la rentabilidad relativa sería:

$$R_1 = \frac{p\,M\,N - \int_0^T h(x) \,.\, dx}{A\,T + \int_0^T (T-x)\, h(x)\, dx}$$

• 29. Consideremos otro caso, en el que son válidas todas las hipótesis del caso anterior, a excepción de la que se refiere a la propiedad de los factores. Nos referimos aquí a la situación en que el reforestador es un campesino dueño de su tierra, pero que carece de recursos financieros para hacer los gastos requeridos por el proyecto. En las condiciones socio-económicas de Antioquia (y en muchas otras regiones de Colombia) esta sería una situación muy frecuente y muy común si se realizara un proyecto de reforestación en grande escala.

En estas condiciones, suponemos que el reforestador aporta la tierra y obtiene una línea de crédito para ir atendiendo los gastos de la operación, y aun para financiar los intereses que se causen en cada momento por la deuda ya acumulada. Evidentemente, los desembolsos de fondos solo se harán en el momento en que se vayan requiriendo, y no desde el primer momento del proyecto.

Así, la deuda $D(x)$ del reforestador con el financiador obedece a la ecuación diferencial

$$\dot{D}(x) = h(x) + r \,.\, D(x)$$

$$D(0) = 0$$

cuya solución es [Ver ecuación (5.1) antes]:

$$D(x) = e^{rx} \int_0^x e^{-rv}\, h(v) \,.\, dv$$

y al final del turno, lo que tiene que reembolsar al financiador es:

$$D(T) = e^{rT} \int_0^T e^{-rv}\, h(v)\, dv$$

Entonces, la utilidad en dinero obtenida al final del proyecto valdría:

$$p\,M\,N - D(T) = p\,M\,N - e^{rT} \int_0^T e^{-ru}\, h(u)\, du$$

su inversión retenida es solamente la que ha hecho en su tierra, AT.

Y la rentabilidad relativa que obtiene es:

$$R_2 = \frac{p\,M\,N - e^{rT} \int_0^T e^{-ru}\, h(u) \,.\, du}{AT}$$

• 30. Para mayor ilustración obtendremos los valores numéricos para las utilidades, las inversiones y las rentabilidades que resultarían atribuyendo a la función $h(x)$, y los parámetros p, M, N, r, T, A, sus respectivos valores para las condiciones específicas de Antioquia, en 1975, a precios de ese año, en plantaciones de coníferas, bajo las dos modalidades económicas de que hablamos.

En este caso, la función $h(x)$ sería aproximadamente una función que se puede describir por etapas del proyecto, y por cada hectárea, así:

a. Un desembolso inicial, en $x = 0$, de una suma "de contado", K_o, para los gastos iniciales de la reforestación: contratos, asesoría técnica para escoger la tierra y la especie adecuada, etc. No se incluye aquí el valor de la tierra, si fuere necesario comprarla.

b. Los gastos fuertes durante el primer año, desde $x = 0$ hasta $x = 1$ año $= a$, que corresponden a la preparación de la tierra, la compra de plántulas, el trasplante, la deshierba, y, si es necesario, la compra de fertilizantes y productos fitosanitarios.

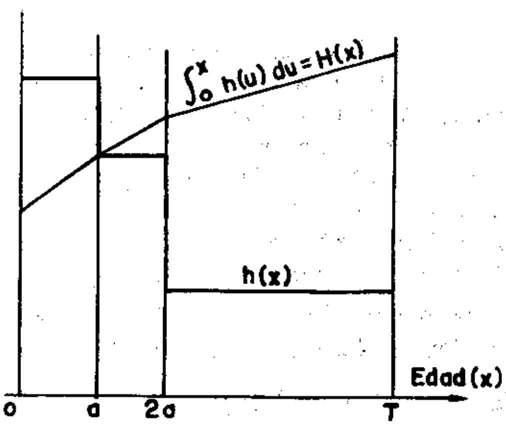

Figura 9

Estos desembolsos pueden hacerse, aproximadamente, en forma gradual y continuada durante el año, y su valor total es K_1 (pesos por hectárea):

$0 < x \leqslant a$, $h(x) = K_1/a$, de donde

$\int_0^a h(x)\,dx = K_1$

c. Los gastos (ya menores) durante el segundo año, desde $x = a$ hasta $x = 2a$, ocasionados principalmente por resiembras (para asegurar la densificación adecuada del bosque), deshierbas, etc. Suponiendo también que estas erogaciones se hacen a ritmo constante y llamando K_2 a los gastos de ese año, tenemos:

$a < x \leqslant 2a$, $h(x) = K_2/a$, de donde

$\int_a^{2a} h(x)\,dx = K_2$

d. El tercer escalón es para el resto de la vida del rodal. Se trata de los gastos de vigilancia, administración, tratamiento fitosanitario, asistencia técnica regular, etc., los cuales se pueden calcular como desembolsos a ritmo constante durante ese período. Llamando K_3 al ritmo de gasto por unidad de tiempo durante esos $T-2$ años, tenemos:

$2a < x \leqslant T$, $h(x) = K_3$, de donde

$\int_{2a}^{T} h(x)\,.\,dx = (T-2a)\,K_3$

En resumen, la función $h(x)$ es:

$$h(x) = \begin{cases} K_o\,\delta(x), & x = 0 \\ K_1/a, & 0 < X \leqslant a \\ K_2/a, & a < X \leqslant 2a \\ K_3, & 2a < X \leqslant T \end{cases}$$

donde $\delta(x)$ es la "función delta" de DIRAC (o mejor, la distribución "delta" de DIRAC).

Entonces:

$$\int_0^x h(u)\,.\,du = \begin{cases} K_o + K_1\,x/a, \; 0 < X \leqslant a \\ K_o + K_1 + K_2\,(x-a)/a, \\ a < X \leqslant 2a \\ K_o + K_1 + K_2 + K_3\,(x-2a), \\ 2a < X \leqslant T \end{cases}$$

$$\int_0^T h(u)\,.\,du = K_o + K_1 + K_2 + K_3\,(T-2a)$$

Además es necesario calcular: $\int_0^T x\,h(x)\,.\,dx = \int_0^a x\,h(x)\,.\,dx + \int_a^{2a} x\,h(x)\,dx + \int_a^T x\,h(x)\,.\,dx$

Sustituyendo las expresiones para $h(x)$, efectuando las operaciones indicadas y haciendo simplificaciones se obtiene: $\int_0^T x\,h(x)\,.\,dx = K_1 a/2 + 3\,K_2\,a/2 + K_3\,(T^2 - 4a^2)\,/2$

También es necesario calcular: $\int_0^T {}^{-rx}\,h(x)\,.\,dx = \frac{K_1}{ra} - \frac{e^{-ra}}{ra}\,(K_1 - K_2) - \frac{e^{-2ra}}{r}\,(K_2/a - K_3) - \frac{e^{-rT}}{r}\,K_3$

• 31. En Antioquia, para plantaciones de coníferas, los valores aproximados de los gastos y costos de plantación, asistencia técnica y manejo, a precios de 1975 son aproximadamente:

$K_o = \$\ 2.000$/hectárea

$K_1 = \$\ 8.000$/hectárea

$K_2 = \$\ 2.000$/hectárea

$K_3 = \$\ \ 500$/hectárea-año.

El volumen de madera en pie en bosques con índice de sitio $I.S. = 18$, a los 12 años, en bosques sembrados en plantilla rectangular a $2\,m \times 2\,m$ es de unos 180 m^3/hectárea, es decir:

$m(T)\,N = M\,N = 180\ m^3$/hectárea.

El precio de la madera en pie, en 1975, era cercano a \$ 300/m^3. Para simplificar las operaciones ponemos pues: $p = \$\ 300/m^3$

El costo real del dinero, a precios constantes, se sitúa hoy internacionalmente, y para muchas operaciones de crédito en Colombia alrededor del 10% anual. La tasa r de capitalización continua equivalente no coincide estrictamente con la anterior, pero para elaborar un ejemplo sencillo numéricamente, tomaremos $r = 0.10$/año. El turno es $T =$ 12 años para plantaciones dedicadas a molinos de pulpa en las tierras aptas para coníferas, en Antioquia.

• 32. Para un reforestador que dedica tierra y recursos financieros propios, la inversión retenida de su tierra sería AT. En Antioquia, *ca.* 1975, un precio típico de tierras para conífera es de unos \$ 3.000/hectárea, en moneda de ese año. La inversión en tierra es pues: $AT = \$\ 3.000 \times 12$ años/hectárea $= \$\ 36.000$ año/hectárea.

La inversión hecha y retenida en recursos financieros (dinero) valdría:

$$\int_o^T (T-x)\, h(x)\ .\ dx = T \int_o^T h(x)\ .\ dx - \int_o^T x . h(x)\ . dx$$

$$= T[K_o + K_1 + K_2 + K_3(T-2a)] - a\ (K_1 + 3K_2)/2 - K_3\ (T^2 - 4a^2)/2$$

$$= [12 \times (12.000 + 500 \times 10) - (8.000 + 3 \times 2.000)/2 - 500(12^2-4)/2]\ \ (\$ \times \text{año/hectárea}$$

$$= \$\ 163.000 \text{ año/hectárea.}$$

La inversión total retenida es, pues, $I = (163.000 + 36.000)$ \$ $\times$ año/hectárea $= \$\ 200.000$ año/hectárea. El pronóstico de ventas de madera es:

$M\,N\,p = 180\ (m^3/h.) \times \$\,300/m^3 = \$\ 54.000$/hectárea y la utilidad esperada es:

$$M\,N\,p - \int_o^T h(x)\ dx = M\,N\,p - (K_o + K_1 + K_2) - K_3\ (T-2a)$$

$= (54.000 - 12.000 - 500 \times 10)$ (\$/hectárea) $= \$\ 67.000$/hectárea y la rentabilidad relativa promedia valdría: $R_1 = \dfrac{\$\ 67.000/\text{hectárea}}{\$\ 163.000\ \text{año/hectárea}} = 22.7\%$ por año a precios constantes de 1975.

• 33. En el caso de otro reforestador que carece de recursos financieros, pero que posee la tierra para la plantación, y recibe una línea de crédito a interés $r = 10\%$ por año (en moneda constante, ya vimos que llega a acumular una deuda, al final del turno, en moneda constante, que vale:

$$D(T) = e^{rT} \int_o^T e^{-rx}\, h(x)\ .\ dx = e^{rT} \left[\frac{K_1}{ra} - \frac{e^{-ra}}{ra}(K_1 - K_2) - \frac{e^{-2ra}}{r} \left(\frac{K_2}{a} - K^3 \right) - \frac{e^{-rT}}{r} K_3 \right]$$

$$= \frac{K_1}{ra} e^{rT} - \frac{e^{r(T-a)}}{ra} (K_1 - K_2) - \frac{e^{r(T-2a)}}{r} \left(\frac{K_2}{a} - K_3 \right) - \frac{K_3}{r}$$

$$= \frac{8.000}{0.1} e^{1.2} - \frac{e^{1.1}}{0.1} (8.000 - 2.000) - \frac{e}{0.1} (2.000 - 500) - \frac{500}{0.1}\ (\$/ha\ .)$$

$= \$\ 39.595$/hectárea, que es mayor que las ventas esperadas de madera.

En consecuencia, no puede esperar obtener utilidad: todo el valor de la madera tendrá que entregarlo a quien lo financió y aún quedará debiéndole.

6. OBSERVACION FINAL

• 34. Todos los análisis que hemos hecho aquí en términos de tiempo, considerando a éste como una variable continua, podrían hacerse considerándolo como una variable discreta ("año a año"). Ello conduce a ecuaciones en diferencias finitas, a sumaciones finitas y a ecuaciones sumatorias. El hecho de ser algo menos conocidos los métodos de análisis de estos instrumentos es una de las razones para no haberlo hecho así en este artículo. Pero se deja como problema interesante para los lectores que deseen continuar este trabajo.

ANEXO 1

CRECIMIENTO EN EL TIEMPO DE UNA MASA FORESTAL BAJO UN PROGRAMA DE SIEMBRA ACELERADO

Sea el caso $s(x) = kx^2$ en $x \epsilon\ (o, a)$, con $a < T$; y cero todo el resto del tiempo:

a. Para $t \epsilon (o, a)\ .\ M(t) = \int_o^t kx^2\, g(t-x)\ dx = \int_o^t k(t-u)^2\, g(u)\ .\ du$

$$= k\ [\ (t-u)^2\, G(u) + G(u) \times 2\ (t-u)\ du\ ]_o^t$$

$$= k\ [(t-u)^2\, G(u) + 2\ [(t-u) \int_o^u G(v)\ .\ dv + \int\int_o^u G(v)\ dv\ .\ du\ ]]_o^t$$

$$= k\,[(t-u)^2\, G(u) + 2\,(t-u) \int_o^u G(v)\, dv + 2 \int_o^u \int_o^v G(s)\, .\, ds\, .\, dv]_o^t$$

$$= k\,[2\int_o^t \int_o^v G(s)\, .\, ds\, .\, dv - t^2\, G(o)] \quad dM/dt = 2\,k\,[\int_o^t G(s)\, ds - t\, G(o)]$$

b. Para $t \in (a, T)$: $M(t) = \int_{t-a}^t k(t-u)^2\, g(u)\, du$

$$= k\,[(t-u)^2\, G(u) + 2\,(t-u) \int_o^u G(v)\, .\, dv + 2 \int_o^u \int_o^v G(s)\, ds\, .\, dv]_{t-a}^t$$

$$= k\,[\,-\,a^2\, G(a) - 2_a \int_o^a G(v)\, .\, dv + 2 \int_{t-a}^t \int_o^v G(s)\, ds\, .\, dv] \quad dM/dt = 2k \int_{t-a}^t G(s)\, ds$$

c. Para $t \in (T, T+a)$: $M(t) = \int_{t-a}^t k(t-u)^2\, g(u)\, du$

$$= k\,[(t-u)^2\, G(u) + 2(t-u) \int_o^u G(v)\, dv + 2 \int_o^u \int_o^v G(s)\, ds\, .\, dv]_{t-a}^t$$

$$= k\,[(t-T)^2\, G(t) - a^2\, G(a) + 2(t-T) \int_o^T G(v)\, .\, dv - 2a \int_o^a G(v)\, .\, dv + 2 \int_{t-a}^T \int_o^v G(s)\, ds\, dv]$$

$$dM/dt = k\,[2(t-T)\, G(T) + 2 \int_o^T G(v)\, .\, dv - 2 \int_o^{t-a} G(s)\, .\, ds]$$

d. Para $t > T + a$: $M(t) = o \quad dM/dt = o$

ANEXO 2

LA TRANSFORMACION DE LAPLACE EN EL CRECIMIENTO DEL BOSQUE

La ecuación (4.1) indica las existencias de madera en pie en una fecha t, así:

$$(4.1) \quad M(t) = \int_o^T g(u)\, .\, s(t-u)\, du$$

siendo $g(u) = m(u)\, .\, L(u)$ la función de supervivencia de madera por hectárea (sin hacer entresacas), y $s(t)$ el número de árboles que se siembran por unidad de tiempo. La operación entre dichas funciones que está escrita en la fórmula anterior, se llama *convolución*, y se suele representar escribiéndola así:

$$M(t) = g(t) * s(t)$$

Un teorema de BOREL, muy conocido, establece que la transformación de LAPLACE de la convolución es el producto de las respectivas transformadas:

$$\mathcal{L}[M(t)] = \mathcal{L}[g(t)] \;.\; \mathcal{L}[s(t)]$$

La transformada de LAPLACE de una función es, por definición:

$$\mathcal{L}\,[M(t)] = \int_o^\infty e^{-rt}\, M(t)\, .\, dt = F(r)$$

(suponiendo, desde luego, que el integral así escrito sea convergente). Esa transformada, $F(s)$, depende solamente del parámetro de transformación r. Hoy en día existen extensísimas tablas de transformadas de LAPLACE para muchísimas funciones.

De la ecuación del producto convolutivo se deduce:

$$\mathcal{L}\,[s(t)] = \mathcal{L}\,[M(t)] \;/\; \mathcal{L}\,[g(t)]$$

Entonces, si se conoce la función de supervivencia en madera, $g(t)$, y la función de crecimiento que se proponga para la masa forestal, $M(t)$, es posible calcular explícitamente el lado derecho de esta ecuación.

Sea, por ejemplo:

$$\int_o^\infty e^{-rt}\, M(t)\, .\, dt \,/ \int_o^\infty e^{-rt}\, .\, g(t)\, .\, dt = f(r)$$

Entonces:

$$\mathcal{L}[s(t)] = f\,(r)$$

y $s(t)$ se obtiene como transformada inversa de LAPLACE de $f(r)$:

$$s(t) = \mathcal{L}^{-1}\,[f(r)]$$

Esta transformada inversa puede hallarse en las tablas mencionadas, o usando la fórmula de BROMWICH que permite escribirla así:

$$s(t) = \mathcal{L}^{-1}\,[f(r)] = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{rt} f(r)\, .\, dr$$

como integral en el plano complejo.

BIBLIOGRAFIA

1. TSCHINKEL, H. M. *La clasificación de sitios y el crecimiento de* CUPRESSUS SP, *en Antioquia, Colombia.* Revista Facultad de Agronomía. (Abril 1972), v. XXVII, Nº 1, Pág. 3.

2. LYRA MADEIRA, JOAO. *Modelos de analises do crescimento demográfico.* Revista Brasileira de Statistica. (out./dez. 1971), v. 32, pp. 452-519. Pág. 486 et seg.

3. CARR, GEORGES S. *Formulas and Theorems in Pure Mathematics.* 2nd edition. New York, Chelsea Publishing Company, 1970. 935 p.

4. COX, D. R. *Théorie du Renouvellement.* París, Dunod, 1966.

5. BRAMBILLA, FRANÇESCO. *Analisi Spettrale delle Serie Temporali.* Génova, Fratelli Pagano, 1966. 157 p.

6. RAMÍREZ, ARTURO, YU TAKEUCHI y CARLOS RUIZ SALGUERO. *Ecuaciones Diferenciales.* Bogotá, Universidad Nacional de Colombia (sin fecha).

7. Corporación Forestal de Antioquia. *Plan de Desarrollo Forestal de Antioquia.* 4 vol. Medellín. (Mimeografiado). 1975.