

ALGEBRAS DE BOOLE

ASOCIADAS A UN ESPACIO DE MEDIDA

Por: ALONSO TAKAHASHI *

Resumen. En este artículo se considera inicialmente el isomorfismo natural entre la σ -álgebra de BOOLE de los idempotentes de $L^\infty(X)$, donde X un espacio de medida, y la σ -álgebra de BOOLE de los conjuntos medibles de X , módulo los conjuntos de medida nula. Este isomorfismo se aplica luego para implementar espacialmente un isomorfismo cualquiera entre las álgebras de multiplicación de dos espacios de medida finita. De este caso particular puede luego obtenerse el resultado general referente a dos álgebras autoadjuntas maximales cualesquiera.

§ 1. **Introducción.** Con el fin de acordar terminología y facilitar la exposición se presentan algunas nociones y se obtienen algunos resultados simples que serán utilizados más adelante.

Un *álgebra de BOOLE* es un sistema $(X, \vee, \wedge, ', O)$ donde X es un conjunto, \vee ("unión") y \wedge ("intersección") son operaciones binarias asociativas, conmutativas y distributivas cada una de ellas con respecto a la otra y tales que $A \vee A = A$ y $A \wedge A = A$ para todo A de X . Además, $'$ es una función de X en X tal que $(A')' = A$ y $(A \wedge B)' = A' \vee B'$, para todo A y todo B de X . Por último, O es un elemento de X tal que $A \wedge O = O$ y $A \vee O = A$ para todo A de X .

Si en un álgebra de BOOLE se conviene escribir $A \leq B$ para indicar que $A \wedge B = A$, se puede comprobar que \leq es un orden parcial con respecto al cual $A \vee B$ es precisamente $\sup \{A, B\}$. Si el álgebra de BOOLE es tal que para toda sucesión (A_i) de elementos de X existe un mínimo elemento A de X tal que $A_i \leq A$ se dice que X es una σ -álgebra de BOOLE; en este caso al elemento A se lo denota por $\bigvee_i A_i$.

Un *álgebra de medida* es un sistema constituido por una σ -álgebra de BOOLE X y una función real no negativa μ definida en X y tal que:

- i) $\mu(A) = 0$ si y solo si $A = O$
- ii) $\mu(\bigvee_i A_i) = \sum_i \mu(A_i)$, si $A_i \wedge A_j = O$ para $i \neq j$.

La función μ se llama la *medida* de X .

Si X y Y son álgebras de BOOLE, un *isomorfismo* de X sobre Y es una función biunívoca ξ de X sobre Y tal que

$$\xi(A \vee B) = \xi(A) \vee \xi(B) \text{ y } \xi(A') = \xi(A)'$$

En este caso ξ^{-1} es un isomorfismo de Y sobre X .

Es fácil ver que todo isomorfismo conserva el orden. De aquí se deduce que, si X y Y son σ -álgebras de BOOLE, entonces también conserva uniones contables, es decir

$$\xi(\bigvee_i A_i) = \bigvee_i \xi(A_i).$$

En efecto, sea $A = \bigvee_i A_i$; como $A_i \leq A$ se tiene que $\xi(A_i) \leq \xi(A)$ para todo i . Además, si $\xi(A_i) \leq B$ para todo i , entonces $A_i \leq \xi^{-1}(B)$ y entonces $A \leq \xi^{-1}(B)$, de donde $\xi(A) \leq B$. Se concluye que $\xi(A) = \bigvee_i \xi(A_i)$.

Ilustraremos estas nociones en dos casos, importantes para las consideraciones subsecuentes. Supongamos que (X, \mathfrak{M}, μ) es un espacio de medida (en el sentido de la Teoría de la Medida) con $\mu(X)$ finito.

1) Sea \mathfrak{A} la colección de todos los conjuntos de medida nula. Definiendo

$$E \sim F \quad \text{si y sólo si} \quad E \Delta F \in \mathfrak{A}$$

se observa que \sim es una relación de equivalencia

en \mathfrak{M} . Denotando por \dot{E} , la clase de E , $E \in \mathfrak{M}$, puede definirse

$$\dot{E} \wedge \dot{F} = \overline{E \cap F} \quad \dot{E} \vee \dot{F} = \overline{E \cup F} \quad (\dot{E})' = \overline{CE}$$

comprobandose que las definiciones no dependen de los representantes y que la estructura obtenida sobre el cociente $\mathfrak{M}/\mathfrak{A}$ es la de una σ -álgebra de

BOOLE. Si se define, además $\mu(\dot{E}) = \mu(E)$ se obtiene un álgebra de medida.

2) Sea ahora $L^\infty(X)$ la colección de todas las

clases de equivalencia \dot{f} de funciones medibles esencialmente acotadas (dos funciones son equivalentes si y sólo si coinciden, salvo un conjunto de medida cero), con la adición y multiplicación definidas en la forma usual. Consideremos la colección \mathcal{J}_X de todos los idempotentes de X , es

decir, $\dot{e} \in \mathcal{J}_X$ si y sólo si $\dot{e}^2 = \dot{e}$. Definiendo

* Departamento de Matemáticas y Estadística. Universidad Nacional de Colombia - Bogotá.

$\dot{e} \Delta \dot{f} = \dot{e} \dot{f}$ $\dot{e} \nabla \dot{f} = \dot{e} + \dot{f} - \dot{e} \dot{f}$ $(\dot{e})' = \dot{1} - \dot{e}$
 se obtiene sobre \mathcal{J}_X una estructura de σ -álgebra de BOOLE.

Como es de esperarse, las dos σ -álgebras de BOOLE que acabamos de definir son esencialmente idénticas. En efecto, si definimos

$$\alpha: \mathfrak{m}/\mathfrak{a} \longrightarrow \mathcal{J}_X$$

$$\dot{E} \longrightarrow \dot{K}_E \quad (E \in \mathfrak{M})$$

donde K_E es la función característica de E , se comprueba fácilmente que la definición es independiente de los representantes y que α es un isomorfismo. El inverso de este isomorfismo es la función

$$\beta: \mathcal{J}_X \longrightarrow \mathfrak{m}/\mathfrak{a}$$

$$\dot{e} \longrightarrow \overline{e^{-1}(1)} \quad (\dot{e} \in \mathcal{J}_X)$$

§ 2. Isomorfismo de álgebras de multiplicación.

Sea (X, \mathfrak{m}, μ) un espacio de medida con $\mu(X) < \infty$, y sea $H = L^2(X)$ el espacio de HILBERT de las (clases de equivalencia de) funciones de cuadrado integrable. Cada elemento k de $L^\infty(X)$ define un operador acotado.

$$M_k: L^2(X) \longrightarrow L^2(X)$$

$$\dot{f} \longrightarrow k \dot{f} \quad (\dot{f} \in L^2(X))$$

Queda así determinado un isomorfismo de $L^\infty(X)$ sobre una subálgebra del álgebra $B(H)$ de todos los operadores acotados sobre $L^2(X)$

$$M: L^\infty(X) \longrightarrow B(H)$$

$$k \longrightarrow M_k$$

Este isomorfismo preserva la norma y la involución, es decir, es un isomorfismo de álgebras normadas involutivas. Mediante este isomorfismo $L^\infty(X)$ puede considerarse como una subálgebra del álgebra $B(H)$, cuyos elementos actúan en $L^2(X)$ mediante multiplicación. Este subálgebra de $B(H)$ se llama el *álgebra de multiplicación* del espacio X .

En este punto es conveniente recordar algunas nociones y hechos de la teoría de operadores: Un *álgebra de operadores* sobre un espacio de HILBERT H es una subálgebra involutiva \mathfrak{a} del álgebra $B(H)$ de todos los operadores acotados sobre H . En este caso, el *conmutante* \mathfrak{a}' de \mathfrak{a} definido por

$$\mathfrak{a}' = \{T \in B(H) : TA = AT \text{ para todo } A \in \mathfrak{a}\}$$

es también un álgebra de operadores sobre H .

Se dice que \mathfrak{a} es un *álgebra abeliana maximal* si \mathfrak{a} es conmutativa y además todo T de $B(H)$ que conmuta con cada uno de los elementos de \mathfrak{a} pertenece necesariamente a \mathfrak{a} ; para este tipo de álgebras se cumple que $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}'$. Se puede comprobar sin dificultad que el álgebra de multiplicación antes definida es abeliana maximal. En la otra dirección se tiene un resultado fundamental que

afirma que toda álgebra abeliana maximal es, esencialmente, de este tipo.

Si \mathfrak{a} es un álgebra de operadores sobre H y k_0 es un vector del espacio H , se dice que k_0 es:

- a) *separador* (para \mathfrak{a}) si para todo $A \in \mathfrak{a}$ se tiene que $A k_0 \neq 0$, a menos que $A = 0$.
- b) *cíclico* si el subespacio cerrado generado por los vectores de la forma $A k_0$, con $A \in \mathfrak{a}$, es todo H .

Puede demostrarse que si k es separador para \mathfrak{a}' entonces es cíclico para \mathfrak{a} . Luego, para un álgebra abeliana maximal, todo vector separador es cíclico.

Con estos preliminares podemos pasar a enunciar y demostrar un hecho interesante referente a los isomorfismos entre álgebras de multiplicación:

Teorema. Sean (Y, \mathfrak{n}, ν) y (X, \mathfrak{m}, μ) dos espacios de medida finita. Si existe un isomorfismo de álgebras de operadores

$$\Phi: L^\infty(Y) \longrightarrow L^\infty(X)$$

entonces también existe un isomorfismo de espacios de HILBERT

$$U: L^2(Y) \longrightarrow L^2(X)$$

que implementa a Φ , es decir, tal que

$$\Phi(h) \circ U = U \circ h$$

para todo h de $L^\infty(Y)$.

Demostración: La restricción Φ_0 de Φ a \mathcal{J}_Y es un isomorfismo de \mathcal{J}_Y sobre \mathcal{J}_X , a partir del cual se puede definir una función λ de acuerdo con el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{n} & \xrightarrow{\lambda} & [0, +\infty[\\ \downarrow & & \uparrow \mu \\ \mathfrak{n}/\mathfrak{h} & \xrightarrow{\Psi} & \mathfrak{m}/\mathfrak{a} \\ \downarrow \alpha & & \uparrow \beta \\ \mathcal{J}_Y & \xrightarrow{\Phi_0} & \mathcal{J}_X \end{array}$$

donde \mathfrak{h} (resp \mathfrak{a}) es la clase de los conjuntos nulos de \mathfrak{n} (resp de \mathfrak{m}).

La función λ es una medida (la aditividad completa se obtiene debido a que Ψ preserva uniones contables). Un cálculo directo muestra que si f es una función característica medible en X , entonces

$$\int_Y f d\lambda = \int_X \Phi(f) d\mu.$$

Se concluye que esta relación se cumple para toda f de $L^\infty(Y)$.

Por otra parte, si $E \in \mathfrak{n}$ y $\nu(E) = 0$, entonces, $\lambda(E) = 0$ luego, por el teorema de RADON-NICODYN, existe $k \in L^1(Y)$, $k \geq 0$ tal que

$$\int_Y f d\lambda = \int_Y f k d\nu, \quad f \in L^\infty(Y).$$

Tomando $k_0 = k^{1/2}$ se tiene que, para toda f de $L^\infty(Y)$:

$$\begin{aligned} \langle f k_o, k_o \rangle &= \int_Y f k_o^2 d\nu = \int_Y f k d\nu \\ &= \int_Y f d\lambda = \int_X \Phi(f) d\mu = \langle \Phi(f)' 1, 1 \rangle \end{aligned}$$

Se deduce que si $f k_o = 0$ entonces

$$\begin{aligned} 0 &= \langle f k_o, f k_o \rangle = \langle \bar{f} f k_o, k_o \rangle \\ &= \langle \Phi(\bar{f} f)' 1, 1 \rangle = \langle \Phi(f), \Phi(f) \rangle, \end{aligned}$$

es decir, $\Phi(f) = 0$, y entonces $f = 0$. En otros términos, k_o es separador y por lo tanto cíclico, es decir, $k_o L^\infty(Y)$ es denso en $L^2(Y)$.

Del hecho de que k_o es separador se deduce que cada elemento g de $k_o L^\infty(Y)$ se puede escribir

de una sola manera en la forma $g = k_o f$ con $f \in L^\infty(Y)$. Puede entonces definirse

$$U(g) = U(k_o f) = \Phi(f)$$

y luego extender U a todo $L^2(Y)$ obteniéndose un isomorfismo sobre $L^2(X)$. Para ver que U implementa a Φ tomemos $h \in L^\infty(Y)$ y $g = k_o f \in k_o L^\infty(Y)$:

$$\begin{aligned} (\Phi(h) \circ U) g &= \Phi(h) (U g) = \Phi(h) \Phi(f) \\ &= \Phi(h f) = U(k_o h f) = U(h g) \\ &= (U \circ h) g \end{aligned}$$

Se concluye que $\Phi(h) \circ U = U \circ h$.

BIBLIOGRAFIA

1. DIXMIER, J. *Les algèbres d'opérateurs dans l'espace hilbertien*. Gauthier Villars, Paris, 1957.
2. ROYDEN, H. L. *Real Analysis*. Macmillan, New York, 1963.
3. RUDIN, W. *Real and Complex Analysis*. McGraw Hill, New York, 1966.
4. SEGAL, I. E. - KUNZE, R. A. *Integrals and Operators*. McGraw Hill, New York, 1968.