DIVAGACIONES MATEMATICAS

Por: EDUARDO CARO CAYZEDO *

Hace algunos meses escribí para una revista de matemáticas, y con fines ligeramente didácticos, un artículo sobre algunos de los diferentes métodos o procedimientos que hay para calcular la raíz cuadrada de un número dado; arte que desgraciadamente se está perdiendo entre nuestra población escolar y que, gracias al maravilloso invento de las calculadoras manuales, pronto desaparecerá completamente.

Uno de estos métodos, que no he encontrado en los textos que he consultado, conduce al cálculo del valor de un radical por medio de una sucesión de aproximaciones racionales obtenidas a través de una factorización en el campo irracional como podemos ver en seguida:

Sea N el número cuya raíz deseamos obtener y $\dfrac{p}{q}$ una aproximación cualquiera al valor de $\sqrt{N}$, de preferencia una aceptablemente buena (aun cuando el método permite aproximaciones tan atrozmente incorrectas como la de considerar a 10 o a 100 como aproximaciones a $\sqrt{2}$), tendremos entonces:

$$\sqrt{N} \approx \frac{p}{q}$$

$$N \approx \frac{p^2}{q^2}$$

$$Nq^2 \approx p^2 \quad p^2 - Nq^2 \approx 0$$

o lo que es lo mismo:

$$p^2 - Nq^2 = r \qquad \text{(Ecuación 1)}$$

Igualdad en la que, probablemente, r es relativamente pequeña en relación con p y q, y cuyo primer miembro es factorizable en el campo irracional así:

$$(p + p\sqrt{N}) \ (p - q\sqrt{N}) = r$$

Expresión que elevada al cuadrado nos da:

$$(p + q\sqrt{N})^2 \ (p - q\sqrt{N})^2 = r^2$$

$$(p^2 + Nq^2 + 2pq\sqrt{N}) \ (p^2 + Nq^2 - 2pq\sqrt{N}) = r^2$$

o sea $(p^2 + Nq^2)^2 - (2pq)^2 N = r^2$

que comparada con la ecuación 1 nos sugiere que:

$$(p^2 + Nq^2)^2 - (2pq)^2 N \approx 0$$

y $N \approx \left(\dfrac{p^2 + Nq^2}{2pq}\right)^2$

y por lo tanto que:

$$\frac{p^2 + Nq^2}{2pq}$$

es otra aproximación a $\sqrt{N}$.

Lo interesante de este proceso es que *siempre* esta segunda aproximación será mejor que la primera como podremos ver así:

de $p^2 - Nq^2 = r$

obtenemos sucesivamente

$$p^2 = Nq^2 + r \qquad \frac{p^2}{q^2} = N + \frac{r}{q^2}$$

y de

$$(p^2 + Nq^2)^2 - (2pq)^2 = r^2$$

$$(p^2 + Nq^2)^2 = (2pq)^2 + r^2$$

$$\left(\frac{p^2 + Nq^2}{2pq}\right)^2 = N + \frac{r^2}{4p^2q^2}$$

ahora bien, la segunda fracción será una mejor aproximación a $\sqrt{N}$ que la primera si su cuadrado difiere menos de N que el cuadrado de la primera, o sea si:

$$\frac{r^2}{4p^2q^2} < \frac{|r|}{q^2} \text{ de donde } \frac{|r|}{4p^2} < 1$$

y $|r| < 4p^2$

pero r es siempre menos que $4p^2$ porque su valor, si r es positivo, es:

$$r = p^2 - Nq^2 \quad \text{y, siendo} \quad N > 0$$

$$r = p^2 - Nq^2 < p^2 < 4p^2$$

luego $r < 4p^2$

y si r es negativo, con mayor razón.

[Una mejor demostración puede basarse en las proposiciones:

Proposición 1: Si N, p y q son números positivos (o al menos $N > 0$, y $pq > 0$) se tendrá siempre que

* Departamento de Matemáticas y Estadística. Universidad Nacional de Colombia - Bogotá.

$$\frac{p^2 + Nq^2}{2\,pq} > \sqrt{N}$$

Proposición 2: Si N, p y q son números positivos (o al menos $N > 0, pq > 0$) y $P = p^2 + Nq^2$, y $Q = 2\,pq$ se tendrá siempre que $\dfrac{P^2 + NQ^2}{2\,PQ}$ es mejor aproximación a N (por exceso) que $\dfrac{p^2 + Nq^2}{2\,pq}$

Que pueden resumirse en una sola así: Si N, p y q son números positivos y $P = p^2 + Nq^2$, y $Q = 2pq$ se tendrá siempre que

$$\frac{p^2 + Nq^2}{2\,pq} > \frac{P^2 + NQ^2}{2\,PQ} > \sqrt{N}$$

cuyas demostraciones, muy sencillas, omito en gracia de la brevedad].

El procedimiento anterior nos permite aproximarnos a la raíz de un número muy fácil y rápidamente como puede verse en los siguientes ejemplos:

$$\sqrt{2} \approx 1 = \frac{1}{1} \quad p_1 = 1 \quad q_1 = 1$$

$$\sqrt{2} \approx \frac{1^2 + 2 \times 1^2}{2 \times 1 \times 1} = \frac{3}{2} = \underline{1},5 \qquad \underline{3^2 - 2 \times 2^2 = 1}$$

$$\approx \frac{3^2 + 2 \times 2^2}{2 \times 3 \times 2} = \frac{17}{12} = \underline{1,416}\ldots$$

$$\underline{17^2 - 2 \times 12^2 = 1}$$

$$\approx \frac{17^2 + 2 \times 12^2}{2 \times 17 \times 12} = \frac{577}{408} = \underline{1,414215}6\ldots$$

$$577^2 - 2 \times 408^2 = 1$$

$$\approx \frac{577^2 + 2 \times 408^2}{2 \times 577 \times 408} = \frac{665857}{470832} = \underline{1,4142135623}746\ldots$$

La tercera aproximación tiene tres cifras significativas exactas, la cuarta seis (una más que en la aproximación usual 1,4142) y la quinta doce cifras exactas. Si hubiéramos partido de $\sqrt{2} \approx 2$ tendríamos como segunda aproximación $\dfrac{6}{4} = \dfrac{3}{2}$ como en el caso anterior.

Para hallar $\sqrt{3}$ partiremos de la misma aproximación inicial 1:

$$\sqrt{3} \approx \frac{1}{1}$$

$$\approx \frac{1^2 + 3 \times 1^2}{2 \times 1 \times 1} = \frac{4}{2} = \frac{2}{1} = 2 \qquad \underline{2^2 - 3 \times 1^2 = 1}$$

$$\approx \frac{2^2 + 3 \times 1^2}{2 \times 2 \times 1} = \frac{7}{4} = \underline{1,75} \qquad \underline{7^2 - 3 \times 4^2 = 1}$$

$$\approx \frac{7^2 + 3 \times 4^2}{2 \times 7 \times 4} = \frac{97}{56} = \underline{1,732142\ldots}$$

$$97^2 - 3 \times 56^2 = 1$$

$$\approx \frac{97^2 + 3 \times 56^2}{2 \times 97 \times 56} = \frac{18817}{10864} = \underbrace{1,732050810\ldots}_{8 \text{ cifras}}$$

y para $\sqrt{5}$ partiendo de 2

$$\sqrt{5} \approx \frac{2}{1}$$

$$\approx \frac{2^2 + 5 \times 1^2}{2 \times 2 \times 1} = \frac{9}{4} = \underline{2,25} \qquad 9^2 - 5 \times 4^2 = 1$$

$$\approx \frac{9^2 + 5 \times 4^2}{2 \times 9 \times 4} = \frac{161}{72} = \underline{2,236111\ldots}$$

$$161^2 - 5 \times 72^2 = 1$$

$$\approx \frac{161^2 + 5 \times 72^2}{2 \times 161 \times 72} = \frac{51841}{23184} = \underbrace{2,236067978\ldots}_{9 \text{ cifras}}$$

Vemos que, en general, el número de cifras decimales exactas de la aproximación se duplica a cada paso.

Si, en los ejemplos anteriores:

$$\sqrt{2} \approx \frac{3}{2} \approx \frac{17}{12} \ldots$$

$$\sqrt{3} \approx \frac{2}{1} \approx \frac{7}{4} \ldots$$

$$\sqrt{5} \approx \frac{9}{4} \approx \frac{161}{72} \ldots$$

buscamos el valor de r en la fórmula $p^2 - Nq^2 = r$ (ecuación 1) vemos que en los tres casos este valor es igual a 1, o sea que hemos encontrado soluciones para $N = 2$, 3 y 5 de la ecuación $x^2 - Ny^2 = 1$ muy importante en la teoría de números y conocida como la ecuación de PELL, o peliana, aun cuando en justicia debería llamarse la ecuación de FERMAT, ya que fue este príncipe de las matemáticas el primero en afirmar en 1657 que esta ecuación poseía una infinidad de soluciones, al desafiar, en la forma usual de la época, a los matemáticos ingleses a resolver, entre otras, la ecuación $x^2 - 151y^2 = 1$, la cual fue resuelta por LORD BROUNCKER.

La importancia de esta ecuación y la facilidad con la que se obtienen soluciones para valores pequeños de N me llevaron a ir coleccionando poco a poco soluciones para valores de N cada vez mayores y por procedimientos cada vez menos simples como en el caso de $N = 13$ en donde se obtiene con facilidad que $18^2 - 13 \times 5^2 = -1$ y de ahí por una elevación al cuadrado la menor de las soluciones para este valor de N: $649^2 - 13 \times 180^2 = 1$, o la correspondiente a $N = 20$ que se deduce de la de $N = 5$: $9^2 - 5 \times 4^2 = 1$, multiplicando ambos miembros por $4 = 2^2$ y dividiendo luego por cuatro para llegar a $9^2 - 20 \times 4^2 = 1$, hasta que estos métodos más o menos empíricos fracasaron totalmente al llegar a $N = 61$ donde tuve que recurrir al método de las fracciones continuas, debido a Euler, para encontrar primero

$$29.718^2 - 61 \times 3.805^2 = -1$$

y luego

$$1.766'319.049^2 - 61 \times 226'153.980^2 = 1$$

que es la mínima solución para este valor de N.

Adjunto, en beneficio de quien pueda estar interesado, una tabla de las soluciones mínimas de la ecuación de PELL $x^2 - Ny^2 = 1$ (y las de $x^2 - Ny^2 = -1$ donde éstas existen) para valores de N entre 2 y 200. Basta con la tabla de soluciones mínimas ya que de éstas se pueden deducir tantas como se quieran por procedimientos elementales como podemos ver en los ejemplos siguientes.

TABLA DE SOLUCIONES DE LA ECUACION DE PELL

1.	—		
2.	$3^2 - 2 \times 2^2 = 1$	$1^2 - 2 \times 1^2 = -1$	
3.	$2^2 - 3 \times 1^2 = 1$		
4.	—		
5.	$9^2 - 5 \times 4^2 = 1$	$2^2 - 5 \times 1^2 = -1$	
6.	$5^2 - 6 \times 2^2 = 1$		$2^2 - 6 \times 1^2 = -2$
7.	$8^2 - 7 \times 3^2 = 1$		
8.	$3^2 - 8 \times 1^2 = 1$		
9.	—		
10.	$19^2 - 10 \times 6^2 = 1$	$3^2 - 10 \times 1^2 = -1$	
11.	$10^2 - 11 \times 3^2 = 1$		
12.	$7^2 - 12 \times 2^2 = 1$		
13.	$649^2 - 13 \times 180^2 = 1$	$18^2 - 13 \times 5^2 = -1$	
14.	$15^2 - 14 \times 4^2 = 1$		
15.	$4^2 - 15 \times 1^2 = 1$		
16.	—		
17.	$33^2 - 17 \times 8^2 = 1$	$4^2 - 17 \times 1^2 = -1$	
18.	$17^2 - 18 \times 4^2 = 1$		$4^2 - 18 \times 1^2 = -2$
19.	$170^2 - 19 \times 39^2 = 1$		$13^2 - 19 \times 3^2 = -2$
20.	$9^2 - 20 \times 2^2 = 1$		
21.	$55^2 - 21 \times 12^2 = 1$		
22.	$197^2 - 22 \times 42^2 = 1$		$14^2 - 22 \times 3^2 = -2$
23.	$24^2 - 23 \times 5^2 = 1$		
24.	$5^2 - 24 \times 1^2 = 1$		
25.	—		
26.	$51^2 - 26 \times 10^2 = 1$	$5^2 - 26 \times 1^2 = -1$	
27.	$26^2 - 27 \times 5^2 = 1$		$5^2 - 27 \times 1^2 = -2$
28.	$127^2 - 28 \times 24^2 = 1$		
29.	$9801^2 - 29 \times 1820^2 = 1$	$70^2 - 29 \times 13^2 = -1$	
30.	$11^2 - 30 \times 2^2 = 1$		
31.	$1520^2 - 31 \times 273^2 = 1$		$39^2 - 31 \times 7^2 = 2$
32.	$17^2 - 32 \times 3^2 = 1$		
33.	$23^2 - 33 \times 4^2 = 1$		
34.	$35^2 - 34 \times 6^2 = 1$		
35.	$6^2 - 35 \times 1^2 = 1$		
36.	—		
37.	$73^2 - 37 \times 12^2 = 1$	$6^2 - 37 \times 1^2 = -1$	
38.	$37^2 - 38 \times 6^2 = 1$		
39.	$25^2 - 39 \times 4^2 = 1$		
40.	$19^2 - 40 \times 3^2 = 1$		
41.	$2049^2 - 41 \times 320^2 = 1$	$32^2 - 41 \times 5^2 = -1$	
42.	$13^2 - 42 \times 2^2 = 1$		
43.	$3482^2 - 43 \times 531^2 = 1$		$59^2 - 43 \times 9^2 = -2$
44.	$199^2 - 44 \times 30^2 = 1$		
45.	$161^2 - 45 \times 24^2 = 1$		
46.	$24335^2 - 46 \times 3588^2 = 1$		$156^2 - 46 \times 23^2 = 2$
47.	$48^2 - 47 \times 7^2 = 1$		
48.	$7^2 - 48 \times 1^2 = 1$		

49.	—		
50.	$99^2 - 50 \times 14^2 = 1$	$7^2 - 50 \times 1^2 = -1$	
51.	$50^2 - 51 \times 7^2 = 1$		$7^2 - 51 \times 1^2 = -2$
52.	$649^2 - 52 \times 90^2 = 1$		
53.	$66249^2 - 53 \times 9100^2 = 1$	$182^2 - 53 \times 25^2 = -1$	
54.	$485^2 - 54 \times 66^2 = 1$		$22^2 - 54 \times 3^2 = -2$
55.	$89^2 - 55 \times 12^2 = 1$		
56.	$15^2 - 56 \times 2^2 = 1$		
57.	$151^2 - 57 \times 20^2 = 1$		
58.	$19603^2 - 58 \times 2574^2 = 1$	$99^2 - 58 \times 13^2 = -1$	
59.	$530^2 - 59 \times 69^2 = 1$		$23^2 - 59 \times 3^2 = -2$
60.	$31^2 - 60 \times 4^2 = 1$		
61.	$1766'319.049^2 -$	$226'153.980^2 \times 61 = 1$	$29.718^2 - 61 \times 3805^2 = -1$
62.	$63^2 - 62 \times 8^2 = 1$		
63.	$8^2 - 63 \times 1^2 = 1$		
64.	—		
65.	$129^2 - 65 \times 16^2 = 1$	$8^2 - 65 \times 1^2 = -1$	
66.	$65^2 = 66 \times 8^2 = 1$		$8^2 - 62 \times 1^2 = -2$
67.	$48842^2 - 67 \times 5967^2 = 1$		$221^2 - 67 \times 27^2 = -2$
68.	$33^2 - 68 \times 4^2 = 1$		
69.	$7775^2 - 69 \times 936^2 = 1$		
70.	$251^2 - 70 \times 20^2 = 1$		
71.	$3480^2 - 71 \times 413^2 = 1$		$59^2 - 71 \times 7^2 = 2$
72.	$17^2 - 72 \times 2^2 = 1$		
73.	$2'281.249^2 - 73 \times 267.000^2 = 1$	$1068^2 - 73 \times 125^2 = -1$	
74.	$3699^2 - 74 \times 430^2 = 1$	$43^2 - 74 \times 5^2 = -1$	
75.	$26^2 - 75 \times 3^3 = 1$		
76.	$57799^2 - 76 \times 6630^2 = 1$		
77.	$351^2 - 77 \times 40^2 = 1$		
78.	$53^2 - 78 \times 6^2 = 1$		
79.	$80^2 - 79 \times 9^2 = 1$		
80.	$9^2 - 80 \times 1^2 = 1$		
81.	—		
82.	$163^2 - 82 \times 18^2 = 1$	$9^2 - 82 \times 1^2 = -1$	
83.	$82^2 - 83 \times 9^2 = 1$		
84.	$55^2 - 84 \times 6^2 = 1$		
85.	$285.769^2 - 85 \times 30996^2 = 1$	$378^2 - 85 \times 41^2 = -1$	
86.	$10405^2 - 86 \times 1122^2 = 1$		$102^2 - 86 \times 11^2 = -2$
87.	$28^2 - 87 \times 3^2 = 1$		
88.	$197^2 - 88 \times 21^2 = 1$		
89.	$500.001^2 - 89 \times 53.000^2 = 1$	$500^2 - 89 \times 53^2 = -1$	
90.	$19^2 - 90 \times 2^2 = 1$		
91.	$1574^2 - 91 \times 165^2 = 1$		
92.	$1151^2 - 92 \times 120^2 = 1$		
93.	$12151^2 - 93 \times 1260^2 = 1$		
94.	$2'143.295^2 - 94 \times 221.064^2 = 1$	$1464^2 - 94 \times 151^2 = 2$	
95.	$39^2 - 95 \times 4^2 = 1$		
96.	$49^2 - 96 \times 5^2 = 1$		
97.	$62'809.633^2 - 97 \times 6'377.352^2 = 1$	$5604^2 - 97 \times 569^2 = -1$	
98.	$99^2 - 98 \times 10^2 = 1$		
99.	$10^2 - 99 \times 1^2 = 1$		
100.	—		
101.	$201^2 - 101 \times 20^2 = 1$	$10^2 - 101 \times 1^2 = -1$	
102.	$101^2 - 102 \times 10^2 = 1$		$10^2 - 102 \times 1^2 = -2$
103.	$227.528^2 - 103 \times 22419^2 = 1$		
104.	$51^2 - 104 \times 5^2 = 1$		
105.	$41^2 - 105 \times 4^2 = 1$		
106.	$32'080.051^2 - 106 \times 3'115.890^2 = 1$	$4005^2 - 106 \times 389^2 = -1$	
107.	$962^2 - 107 \times 93^2 = 1$		
108.	$1351^2 - 108 \times 130^2 = 1$		
109.	$158''070.671'986.249^2 - 109 \times 15''140.424'455.100^2 = 1$		$8'890.182^2 - 109 \times 851.525^2 = -1$
110.	$21^2 - 110 \times 2^2 = 1$		
111.	$295^2 - 111 \times 28^2 = 1$		

112. $127^2 - 112 \times 12^2 = 1$

113. $1'204.353^2 - 113 \times 113.296^2 = 1$ $776^2 - 113 \times 73^2 = -1$

114. $1025^2 - 114 \times 96^2 = 1$

115. $1126^2 - 115 \times 105^2 = 1$

116. $9801^2 - 116 \times 910^2 = 1$

117. $649^2 - 117 \times 60^2 = 1$

118. $306.917^2 - 118 \times 28.254^2 = 1$ $554^2 - 118 \times 51^2 = -2$

119. $120^2 - 119 \times 11^2 = 1$

120. $11^2 - 120 \times 1^2 = 1$

121. —

122. $243^2 - 122 \times 22^2 = 1$ $11^2 - 122 \times 1^2 = -1$ $11^2 - 123 \times 1^2 = -2$

123. $122^2 - 123 \times 11^2 = 1$

124. $4'620.799^2 - 124 \times 414.960^2 = 1$

125. $930.249^2 - 125 \times 83.204^2 = 1$ $682^2 - 125 \times 61^2 = -1$

126. $449^2 - 126 \times 40^2 = 1$

127. $4'730.624^2 - 127 \times 419.775^2 = 1$ $2175^2 - 127 \times 193^2 = 2$

128. $577^2 - 128 \times 51^2 = 1$

129. $13.855^2 - 129 \times 1484^2 = 1$

130. $6499^2 - 130 \times 570^2 = 1$ $57^2 - 130 \times 5^2 = -1$

131. $10.610^2 - 131 \times 927^2 = 1$

132. $23^2 - 132 \times 2^2 = 1$

133. $2'588.599^2 - 133 \times 224.460^2 = 1$

134. $145.925^2 - 134 \times 12.606^2 = 1$

135. $244^2 - 135 \times 21^2 = 1$

136. $35^2 - 136 \times 3^2 = 1$

137. $6'083.073^2 - 137 \times 519.712^2 = 1$ $1744^2 - 137 \times 149^2 = -1$

138. $47^2 - 138 \times 4^2 = 1$

139. $77'563.250^2 - 139 \times 6'578.829^2 = 1$ $8807^2 - 137 \times 747^2 = -2$

140. $71^2 - 140 \times 6^2 = 1$

141. $95^2 - 141 \times 8^2 = 1$

142. $143^2 - 142 \times 12^2 = 1$

143. $12^2 - 143 \times 1^2 = 1$

144. —

145. $289^2 - 145 \times 24^2 = 1$ $12^2 - 145 \times 1^2 = -1$

146. $145^2 - 146 \times 12^2 = 1$

147. $97^2 - 147 \times 8^2 = 1$

148. $73^2 - 148 \times 6^2 = 1$

149. $25.801'741.449^2 - 149 \times 2.113'761.020^2 = 1$

$113.582^2 - 149 \times 9305^2 = -1$

150. $49^2 - 150 \times 4^2 = 1$

151. $1.728'148.040^2 - 151 \times 140'634.693^2 = 1$ $41571^2 - 151 \times 3383^2 = 2$

152. $202.501^2 - 152 \times 16425^2 = 1$

153. $2177^2 - 153 \times 176^2 = 1$

154. $21295^2 - 154 \times 1716^2 = 1$

155. $249^2 - 155 \times 20^2 = 1$

156. $25^2 - 156 \times 2^2 = 1$

157. $46''698.728'731.849^2 - 157 \times 3''726.964'292.220^2 = 1$

$4'832118^2 - 157 \times 385645^2 = -1$

158. $7743^2 - 158 \times 616^2 = 1$ $88^2 - 158 \times 7^2 = 2$

159. $1324^2 - 159 \times 105^2 = 1$

160. $721^2 - 160 \times 57^2 = 1$

161. $11775^2 - 161 \times 928^2 = 1$

162. $19601^2 - 162 \times 1540^2 = 1$ $140^2 - 162 \times 11^2 = -2$

163. $64'080.026^2 - 163 \times 5'019.135^2 = 1$ $8005^2 - 163 \times 627^2 = -2$

164. $2049^2 - 164 \times 160^2 = 1$

165. $1079^2 - 165 \times 84^2 = 1$

166. $1700'902.565^2 - 166 \times 132'015.642^2 = 1$ $41242^2 - 166 \times 3201^2 = -1$

167. $168^2 - 167 \times 13^2 = 1$

168. $13^2 - 168 \times 1^2 = 1$

169. —

170. $339^2 - 170 \times 26^2 = 1$ $13^2 - 170 \times 1^2 = -1$

171. $170^2 - 171 \times 13^2 = 1$ $13^2 - 171 \times 1^2 = -2$

172. $24'248.647^2 - 172 \times 1'848.942^2 = 1$

173. $2'499.849^2 - 173 \times 190.060^2 = 1$ $\quad 1118^2 - 173 \times 85^2 = -1$
174. $1451^2 - 174 \times 110^2 = 1$
175. $2024^2 - 175 \times 153^2 = 1$
176. $199^2 - 176 \times 15^2 = 1$
177. $62423^2 - 177 \times 4692^2 = 1$
178. $1601^2 - 178 \times 120^2 = 1$ $\quad 40^2 - 178 \times 3^2 = -2$
179. $4'190.210^2 - 179 \times 313.191^2 = 1$ $\quad 2047^2 - 179 \times 153^2 = -2$
180. $161^2 - 180 \times 12^2 = 1$ $\quad (180 = 45 \times 2^2)$
181. $2''\,'469645''423824'185.801^2 - 181 \times 183567''298683'461940^2 = 1$
$1111'225770^2 - 181 \times 82'596761^2 = -1$
182. $27^2 - 182 \times 2^2 = 1$
183. $487^2 - 183 \times 36^2 = 1$
184. $24335^2 - 184 \times 1794^2 = 1$
185. $9249^2 - 185 \times 680^2 = 1$ $\quad 68^2 - 185 \times 5^2 = -1$
186. $7501^2 - 186 \times 550^2 = 1$
187. $1682^2 - 187 \times 123^2 = 1$ $\quad 41^2 - 187 \times 3^2 = -2$
188. $4607^2 - 188 \times 336^2 = 1$
189. $55^2 - 189 \times 4^2 = 1$
190. $52021^2 - 190 \times 3774^2 = 1$
191. $8'994.000^2 - 191 \times 650.783^2 = 1$ $\quad 2999^2 - 191 \times 217^2 = 2$
192. $97^2 - 192 \times 7^2 = 1$
193. $6''224323'426849^2 - 193 \times 448036'604040^2 = 1$ $\quad 1'764.132^2 - 193 \times 126.985^2 = -1$
194. $195^2 - 194 \times 14^2 = 1$
195. $14^2 - 195 \times 1^2 = 1$
196. —
197. $393^2 - 197 \times 28^2 = 1$ $\quad 14^2 - 197 \times 1^2 = -1$
198. $197^2 - 198 \times 14^2 = 1$ $\quad 14^2 - 198 \times 1^2 = -2$
199. $16266'196520^2 - 199 \times 1153'080099^2 = 1$ $\quad 127539^2 - 199 \times 9041^2 = 2$
200. $99^2 - 200 \times 7^2 = 1$

1. TRIANGULOS PITAGORICOS CASI ISOSCELES

Consiste el problema en hallar los triángulos pitagóricos cuyos catetos difieran en 1 unidad, como en el caso del conocidísimo triángulo de lados 3, 4 y 5.

Los lados enteros de un triángulo rectángulo están dados por las fórmulas:

$a = k(m^2 - n^2)$
$b = k(2mn)$
$c = k(m^2 + n^2)$, con m, n y k enteros.

Conocidas, por lo menos, desde la época de DIOFANTO (mediados del siglo III) y probablemente desde muchos siglos antes por los matemáticos babilonios, y en las que las soluciones llamadas primitivas se encuentran haciendo $k = 1$, y n y m primos entre sí y de diferente paridad. El problema pide entonces aquellos triángulos para los cuales

$a - b = \pm 1$
o sea $(m^2 - n^2) - 2mn = \pm 1$
$m^2 - 2mn - (n^2 \pm 1) = 0$

de donde por la fórmula de la ecuación de segundo grado

$m = n \pm \sqrt{(n^2 - (n^2 \pm 1))} = n \pm \sqrt{(2n^2 \pm 1)} = n \pm d$

que no puede dar valores enteros de m sino en el caso de que la cantidad subradical sea un cuadrado perfecto o sea que:

$$2n^2 \pm 1 = p^2$$

de donde $p^2 - 2n^2 = \pm 1$
ecuación que tiene la solución obvia

$$p = 1 \quad n = 1$$

Supongamos una segunda solución p_k, n_k

$$p_k^2 - 2n_k^2 = (p_k + n_k\sqrt{2})\ (p_k - n_k\sqrt{2}) = \pm 1$$

$$\times\ 1^2 - 2.1^2 = (1 + \sqrt{2})\ (1 - \sqrt{2}) = -1$$

$$p_{k+1}^2 - 2n_{k+1}^2 = [(p_k + 2n_k) + (p_k + n_k)\sqrt{2}]\ [(p_k + 2n_k) - (p_k + n_k)\sqrt{2}] = \mp 1$$

por lo tanto, de una solución p_k, n_k se deduce una segunda p_{k+1}, n_{k+1}, por las fórmulas

$$p_{k+1} = p_k + 2n_k \qquad n_{k+1} = p_k + n_k$$

Tendremos pues la tabla:

$k=$	$p=$	$n=$	$p^2-2n^2=$	$m=n+p=$	$m'=n-p=$
1	1	1	−1	2	0
2	3	2	+1	5	—1
3	7	5	−1	12	—2
4	17	12	+1	29	—5
5	41	29	−1	70	—12

en la que vemos que los valores de m y n son términos sucesivos de la sucesión 1 2 5 12 29 70 169 408 985... que es recurrente (como puede demostrarse fácilmente) con cada término igual al doble del inmediatamente anterior más el que lo precede $5 = 2 \times 2 + 1$; $12 = 2 \times 5 + 2$ etc., lo que nos permite prolongar la sucesión tanto como queramos y obtener así la de triángulos

$k =$	$a =$	$b =$	$c =$
1	3	4	5
2	21	20	29
3	119	120	169
4	697	696	985
5	4059	4060	5741
6	23661	23660	33461

en la que tanto las hipotenusas como la suma de los catetos, 7, 41, 239, 1.393... cumplen con las relaciones de recurrencia

$$C_{k+1} = 6C_k - C_{k-1}$$

$$a_{k+1} + b_{k+1} = 6(a_k + b_k) - (a_{k-1} + b_{k-1})$$

Cada cateto de la sucesión es unas seis veces mayor que el anterior, de manera que aumentan rápidamente de valor hasta el punto de que los catetos del vigésimo triángulo son ya números de 16 cifras y el triángulo mismo prácticamente indistinguible de uno rectángulo isósceles de lados racionales.

2. PROBLEMA DEL 3, 8, 120

Un segundo ejemplo, bastante más complejo es el propuesto hace algunos años, por MARTÍN GARDNER, en la forma siguiente: Scientific American, marzo de 1967.

"Los números 1, 3, 8 y 120 tienen la propiedad de que el producto de 2 de ellos es siempre una unidad menos que un cuadrado perfecto. Encontrar un quinto número que pueda agregársele sin que desaparezca esta propiedad".

El problema hacía parte de un grupo de doce que debían resolverse en menos de cinco minutos cada uno, lo cual es posible si caemos en cuenta que la intención del autor era la de que el quinto número fuera el cero que multiplicado por cualquiera de los dados da como resultado $0 = 1^2 - 1$.

Pero el problema dista mucho de ser trivial si tratamos de que el quinto número sea diferente de cero, ya que en este caso el número pedido sería la solución del sistema de ecuaciones:

$$x = n^2 - 1$$
$$3x = m^2 - 1$$
$$8x = p^2 - 1$$
$$120x = q^2 - 1 \quad \text{o su equivalente.}$$

$$3(n^2 - 1) = m^2 - 1$$
$$8(n^2 - 1) = p^2 - 1$$
$$120(n^2 - 1) = q^2 - 1$$

sistema que resultó superior a mis capacidades, por lo que me vi obligado a atacarlo en forma indirecta construyendo tablas de soluciones para cada una de las tres ecuaciones con la esperanza de encontrar un valor de n común a todas ellas.

El proceso fue como sigue:

de $3(n^2 - 1) = m^2 - 1$ obtenemos

$3n^2 - 3 = m^2 - 1$

$m^2 - 3n^2 = -2$ que es una variante de la ecuación de PELL, que no siempre tiene solución, pero que en este caso la tiene y está dada por los datos mismos del problema ya que $3 \times 8 = (2^2-1)\,(3^2-1) = (5^2-1)$ y por lo tanto $5^2 - 3 \times 3^2 = -2$

partiendo de una solución cualquiera m_k, n_k de la ecuación anterior podemos establecer

$$m_k{}^2 - 3n^2{}_k = -2$$

$$(m_k + n_k\sqrt{3})\;(m_k - n_k\sqrt{3}) = -2$$

y de la solución de la ecuación de PELL

$$(2 + \sqrt{3})\;(2 - \sqrt{3}) = 1$$

$$m^2{}_{k+1} - 3n^2{}_{k+1} = [(2m_k + 3n_k) + (m_k + 2n_k)\sqrt{3}]\,[(\quad) - (\quad)\sqrt{3}] = -2$$

encontrando así dos nuevas soluciones m_{k+1}, n_{k+1} de la ecuación $m^2 - 3n^2 = -2$.

Partiendo entonces de las soluciones conocidas $m_1 = 5$, $n_1 = 3$ obtenemos sucesivamente:

$m_1 = \ldots\ldots\ldots$	5	$n_1 = \ldots\ldots\ldots$	3
$m_2 = 2m_1 + 3n_1 =$	19	$n_2 = m_1 + 2n_1 =$	11
		(2º valor del problema)	
$m_3 = 2m_2 + 3n_2 =$	71	$n_3 = m_2 + 2n_2 =$	41
$m_4 = \ldots\ldots\ldots$	265	$n_4 = \ldots\ldots\ldots$	153
$m_5 = \ldots\ldots\ldots$	989	$n_5 = \ldots\ldots\ldots$	571

No estamos interesados en realidad sino en los valores de n_k y por esta razón conviene buscar una forma de hallar sus valores independientemente de los de las m's, lo que en este caso es sencillo, ya que un poco de observación nos lleva a la conclusión de que los valores de n satisfacen la relación de recurrencia * $n_{k+1} = 4n_k - n_{k-1}$

De donde también $n_{k-1} = 4n_k - n_{k+1}$ y podemos avanzar o retroceder en la sucesión de las n's para obtener los números cuyo cuadrado, menos uno, multiplicados por 3, dan un número cuadrado perfecto, menos 1.

...571, 153, 41, 11, 3, 1, 1, 3, 11, 41, 153, 571...

El 1 corresponde a la solución trivial $1^2 - 1 = 0$.

En forma análoga encontramos la sucesión de los números cuyo cuadrado, menos uno, multiplicado por 8 nos dan un número que sea cuadrado menos uno.

... 781, 134, 23, 4, 1, 2, 11, 64, 373 ...

La relación de recurrencia en este caso es de $n_{k+1} = 6n_k - n_{k-1}$ que da valores diferentes a lado y lado del uno central.

---

* de $n_{k+1} = m_k + 2n_k$ con $m_k = 2m_{k-1} + 3n_{k-1}$ y $n_k = m_{k-1} + 2n_{k-1}$

deducimos:

$$\begin{aligned} n_{k+1} &= 2m_{k-1} + 3n_{k-1} + 2m_{k-1} + 4n_{k-1} \\ &= 4m_{k-1} + 7n_{k-1} + n_{k-1} - n_{k-1} \\ &= 4(m_{k-1} + 2n_{k-1}) - n_{k-1} \\ &= 4n_k - n_{k-1} \end{aligned}$$

y, en forma similar

$$m_{k+1} = 4m_k - m_{k-1}$$

En forma similar hallamos la sucesión correspondiente a los números cuyo cuadrado, menos uno, multiplicados por 120 dan cuadrados perfectos, menos uno. Solo que en este caso obtenemos no una sino dos sucesiones de recurrencia correspondiente a $n_{k+1} = 22n_k - n_{k-1}$, estas sucesiones son:

5771 263 12 1 10 219 4808 $(11^2 - 1)$

19759 900 41 2 3 64 1405 $(11^2 - 1)$

Hay dos, porque en una de ellas aparece el 1 correspondiente a la solución trivial y en la otra el 2 y el 3 dados por el problema.

Cualquier número común a una de estas dos sucesiones y a las dos anteriores sería solución del problema como lo sugieren el 41 y el 64 comunes a dos de ellas pero no a las tres.

Infortunadamente, ni el cálculo de estas sucesiones hasta números de 12 cifras con ayuda de una calculadora manual, ni tampoco su prolongación hasta números de 90 cifras, es decir, a factores de 180 cifras, hecha con ayuda de una computadora y que debo agradecer a mi hijo GUILLERMO, produjeron resultados favorables, de modo que todo lo que puedo decir por el momento es que la solución, en caso de que exista (lo que parece poco probable), es un número de más de 180 cifras.

Otra posibilidad de ataque consiste en considerar factores diferentes de 3, 8 y 120, mejor aún, en considerar todos los factores de la forma $p^2 - 1$ con cuyas sucesiones podemos construir el cuadro siguiente, llevado hasta valores de 4 cifras.

NUMEROS CUYO CUADRADO, MENOS UNO, MULTIPLICADO POR (p^2-1) DAN POR RESULTADO UN CUADRADO, MENOS UNO:

1	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$p =$ 2	153	41	11	3	1	1	3	11	41	153	571	2131	7953
3	2174	373	64	11	2	1	4	23	134	781	4552		
4		1425	181	23	3	1	5	39	307	2417			
5		3821	386	39	4	1	6	59	584	5781			
6		8377	703	59	5	1	7	83	989				
7			1156	83	6	1	8	111	1546				
8			1769	111	7	1	9	143	2279				
9			2566	143	8	1	10	179	3212				
10			3571	179	9	1	11	219	4369				
11			4808	219	10	1	12	263	5744				
11 bis			1405	64	3	1	41	900					
12			6301	263	11	1	13	311	7451				
13			8074	311	12	1	14	363	9424				
14				363	13	1	15	419					
15				419	14	1	16	479					
16				479	15	1	17	543					
—				—	—	—	—	—					
—				—	—	—	—	—					
23				1011	22	1	24	1103					
23 bis			8322	181	4	3	134	6161					
—				—	—	—	—	—					
39				2963	38	1	40	3119					
39 bis				386	5	4	307						
—				—	—	—	—						
41				3279	40	1	42	3443					
41 bis				900	11	2	153						
—				—	—	—	—						
59				6483	58	1	60	7079					
59 bis				703	6	5	584						
—				—	—	—	—						
64				8063	63	1	65	8319					
64 bis				1405	11	3	373						

Inmediatamente aparecen algunas regularidades como por ejemplo la de que en la fila correspondiente a un valor dado de p aparecen los de $p+1$ y $p-1$, lo que nos indica que el producto de los cuadrados, menos uno, de dos números consecutivos es también igual a un cuadrado, menos uno, o sea:

$$(p^2 - 1)\ ((p+1)^2 - 1) = (p^2 + p - 1)^2 - 1.$$

y factorizando completamente el primer miembro obtenemos:

$$(p+1)(p-1)((p+1)+1)((p+1)-1) =$$
$$(p-1)p(p+1)(p+2) = (p^2+p-1)^2-1.$$

o sea que *el producto de cuatro enteros consecutivos es siempre igual a un cuadrado perfecto, menos uno.*

Podemos ver también que el caso de los tres números, 3, 8 y 120 $(2^2-1,\ 3^2-1,\ 11^2-1)$ no es único, ya que hay una infinidad de ternas con la propiedad de que siendo sus miembros cuadrados menos uno, sus productos dos a dos también lo son, como en el caso de:

3^2-1	4^2-1	23^2-1	8	15	528
4^2-1	5^2-1	39^2-1	15	24	1.520
5^2-1	6^2-1	59^2-1	24	35	3.480
2^2-1	11^2-1	41^2-1	3	120	1.680

Los tres primeros casos corresponden, como se ve fácilmente, a las fórmulas

$$n$$
$$n+1$$
$$2n^2+2n-1$$

para valores de n enteros, positivos o negativos, o más claramente, a las fórmulas siguientes en las que no daremos sino valores positivos a n:

n	$n-1$
$n+1$	n
$2n^2+2n-1$	$2n^2-2n-1$

que, después de un estudio más detallado del cuadro, se complementan con las siguientes dos fórmulas, para formar los quintetos:

Serie 1

1	n
2	$n+1$
3	$2n^2+2n-1$
4	$4n^3+4n^2-3n-1$
5	$16n^5+32n^4-4n^3-24n^2+n+2$

Serie 2

1	$n-1$
2	n
3	$2n^2-2n-1$
4	$4n^3-4n^2-3n+1$
5	$16n^5-32n^4-4n^3+24n^2+n-2$

Que nos dan cada uno siete parejas cuyo producto es igual a un cuadrado, menos uno; por ejemplo, con la primera serie, y $n=2$ tendremos los valores 2, 3, 11, 41, 900, que nos dan los números 3, 8, 120, 1680 y 809.999 con los siguientes 7 productos dos a dos:

$3\times 8 = 24 = 5^2-1$
$3\times 120 = 360 = 19^2-1$
$3\times 1.680 = 5.041 = 71^2-1$
$8\times 120 = 960 = 31^2-1$
$120\times 1.680 = 201.600 = 449^2-1$
$120\times 809.999 = 97'199.880 = 9.859^2-1$
$1680\times 809.999 = 1.360'798.320 = 36.889^2-1$

en la que tres de los productos son los del problema original. Con $n=3$ en la segunda serie obtenemos 2, 3, 11, 64 y 1.405 de los que se deducen los siguientes 7 productos:

$3\times 8 = 24 = 5^2-1$
$3\times 120 = 360 = 19^2-1$
$8\times 120 = 960 = 31^2-1$
$8\times 4.095 = 32.760 = 181^2-1$
$120\times 4.095 = 491.401 = 701^2-1$
$120\times 1'974.024 = 236'882.880 = 15.391^2-1$
$4.095\times 1'974.024 = 8.083'628.280 = 89.909^2-1$

que incluyen también los tres del problema inicial.

Otra posibilidad es la de que, para algún valor particular de n, se obtenga un cuadrado, menos uno, en uno de los productos de las parejas que normalmente no dan este resultado, pero hasta donde he podido comprobarlo no es posible que esto suceda, por lo que me inclino a creer que el problema propuesto no tiene solución ni aun entre los números de más de 180 cifras.

3. PRODUCTOS DE DOS NUMEROS CONSECUTIVOS

El último problema que trataré se refiere a encontrar dos números consecutivos cuyo producto sea un determinado número de veces, el doble, por ejemplo, del producto de otros dos números consecutivos.

Tendremos entonces:

$$m(m+1) = 2n(n+1)$$
$$m^2+m-2(n^2+n) = 0$$
$$m = \frac{-1\pm\sqrt{(1+8(n^2+n))}}{2}$$
$$= \frac{-1\pm\sqrt{(8n^2+8n+1)}}{2}$$

que no admite soluciones en enteros sino en el caso de que la cantidad subradical sea cuadrado perfecto.

$$8n^2+8n+1 = p^2$$

y $m = \dfrac{\pm p-1}{2}$

$$8n^2+8n-(p^2-1) = 0$$
$$n = \frac{-8\pm\sqrt{(64+32(p^2-1))}}{16}$$
$$= \frac{-2\pm\sqrt{(4+2(p^2-1))}}{4}$$
$$= \frac{-2\pm\sqrt{(2p^2+2)}}{4}$$

nuevamente aquí la cantidad subradical debe ser cuadrado perfecto, luego:

$2p^2+2 = q^2$ y $n = \dfrac{\pm q-2}{4}$

$q^2-2p^2 = 2$ que admite la solución obvia $q=2$ $p=1$

$$(q+p\sqrt{2})(q-p\sqrt{2}) = 2$$
$$(3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2}) = 1$$

$$((3q + 4p) + (2q + 3p)\sqrt{2})$$
$$\quad\; q' \qquad\qquad\quad p'$$

$$((3q + 4p) - (2q + 3p)\sqrt{2}) = 2$$

y obtenemos las sucesiones

$p =$	$q =$	$m = \dfrac{q-2}{4}$	$n = \dfrac{p-1}{2}$
1	2	0	0
7	10	2	3
41	58	14	20
239	338	119	84

$$p_{k+1} = 6p_k - p_{k-1} \qquad q_{k+1} = 6q_k - q_{k-1}$$

que nos dan como soluciones al problema:

$$3 \times 4 = 2(2 \times 3) = 12$$
$$20 \times 21 = 2(14 \times 15) = 420$$
$$119 \times 120 = 2(84 \times 85) = 14.280$$
$$696 \times 697 = 2(492 \times 493) = 485.112$$
$$4.059 \times 4.060 = 2(2.870 \times 2.871) = 16'479.540$$

en las que, por extraña coincidencia, encontramos de nuevo los catetos de los triángulos casi isósceles, cerrándose así el ciclo.