UN MODELO MATEMATICO PARA UNA POBLACION GANADERA EN COLOMBIA

Por Gabriel Poveda Ramos[1]

A raíz de un estudio que ha hecho el autor sobre la ganadería en Antioquia durante el siglo XIX, se vio llevado a plantearse una serie de cuestiones sobre las características vitales de una población ganadera, y sobre las condiciones en que ésta puede crecer en el número de sus individuos, a largo plazo, o bien estancarse, o aún extinguirse. Se trata de un problema análogo al que se conoce bastante desde hace mucho tiempo, en demografía para poblaciones humanas, y en el cual han trabajado demógrafos y matemáticos como Quetelet, Verhulst, Hottelling, Gini, Lotka y otros. Pero las diferencias existentes entre el régimen de reproducción de los seres humanos y su movilidad geográfica, con estos mismos aspectos en el caso de animales de rebaño y domesticados, no permiten acudir a los clásicos modelos de la demografía, que son continuos en el tiempo y que permiten, por lo tanto, acudir al instrumental analítico de las ecuaciones diferenciales ordinarias.

La *zoometría* es una ciencia que está por crearse y desarrollarse. Sería la ciencia análoga a la demografía, y se ocuparía de estudiar los efectivos numéricos de poblaciones animales, su comportamiento en el tiempo, la composición por edades y por sexos, los métodos estadísticos para estimarlos, las incidencias de parámetros vitales como natalidad y mortalidad en dichos efectivos, etc. Sería una rama de la zoología y/o de la biometría, que haría uso amplio de métodos de la estadística y del análisis matemático, con posibles aplicaciones muy amplias y muy útiles en ecología. El autor se atreve a presentar este pequeño artículo más que todo para estimular la curiosidad de biólogos, matemáticos y estadísticos colombianos, para que se intensifique este tipo de investigaciones en nuestro país, donde serían tan importantes y útiles.

El problema central que se va a tratar en esta nota es el siguiente: Dado un hato ganadero, en un territorio determinado, y conocidas sus tasas de natalidad y de mortalidad, ¿cómo varía el número de sus individuos a lo largo de los años?

Un momento de reflexión permite darse cuenta de que las variaciones históricas de ese hato ganadero dependen de tres factores básicos:

a. El número de vacas en edad reproductiva (llamadas vacas de vientre, o vientres simplemente), su fertilidad efectiva, y sus modificaciones.

b. La mortalidad de los animales en sus distintas edades, que en este caso puede caracterizarse en tres modalidades: la tasa de abortos, la mortalidad de los terneros y la mortalidad de las vacas.

c. La incorporación al hato de partidas de animales oriundos de otras poblaciones, o el retiro de animales hacia afuera de aquél. Estos dos fenómenos son los que en demografía se llaman inmigración y emigración, o migraciones para hablar de ambos. En nuestro caso proponemos llamarlos *zoomigraciones* y tener muy en cuenta que éstos son fenómenos determinados por imposición del hombre sobre el rebaño.

Comenzaremos considerando el caso de un hato sin zoomigraciones, es decir "cerrado" en sentido zoométrico.

En primer lugar es necesario recordar ciertos hechos propios de la vida de los bovinos, que afec-

[1] Ingeniero Químico y Electricista. Apdo. Aéreo 53028. Medellín.

tan directamente el comportamiento de sus efectivos a largo plazo, y sobre los cuales fijaremos algunas hipótesis necesarias para elaborar posteriormente el modelo:

a. Una ternera (hembra) que nace viva está expuesta al riesgo de morir accidentalmente o de muerte natural antes de llegar a la edad fértil, con mayor probabilidad que después de que ha alcanzado dicha edad, pero sin ser muy vieja. A aquel riesgo lo llamaremos mortalidad temprana.

b. De los terneros que nacen vivos, unos se sacrifican para beneficiar su carne y otros se dejan levantar para comenzar a engordarlos cuando tienen un año y medio o dos años. Sólo una fracción muy pequeña sobreviven y se les conserva la vida como sementales.

c. Los terneros y las terneras lactan hasta una edad más o menos fija, cercana a un año y medio.

d. Las terneras que sobreviven, pasan a ser hembras fértiles al cumplir una edad más o menos determinada. Para este trabajo tomaremos, para esa transición, la edad de 2 años para todas las hembras, que es muy cercana a la realidad de épocas anteriores en la ganadería colombiana y también de la actual.

e. No todas las vacas y novillas fértiles son fecundadas naturalmente, por los toros, en un año. Este hecho es modificable hoy por el hombre, por la inseminación artificial, pero aún así lo consideraremos válido en nuestro caso. Admitimos pues, que el porcentaje de vientres fecundables que conciben durante un año (probabilidad de fecundación) es constante de año a año y a cualquier edad de la hembra, siempre que sea durante sus edades fértiles, por supuesto. No parece que haya en Colombia estudios estadísticos adecuados, para ratificarla, pero se cree que esta hipótesis es aceptable, en primera aproximación.

f. La tasa de natalidad por vientre-año depende directamente de la tasa de fecundación, e inversamente (*) de la tasa de aborto.

g. El período de gestación de la vaca es de 9 meses, es decir, menor que un año.

h. Durante sus años fértiles, la mortalidad de la vaca depende generalmente sólo de factores biológicos o accidentales, y ella no es sacrificada por el hombre, pero al llegar a cierta edad, cuando su fertilidad ya no compensa sus costos de mantenimiento, es sacrificada. Esa edad suele ser alrededor de los 9 años, pero para no tener que hacer un modelo estocástico supondremos que es fija, y la designaremos ω (omega, como suele indicarse la edad biológica máxima posible para una persona en demografía). Supondremos que la mortalidad de las hembras en su vida fértil es una misma en todas las edades, lo que suele ser bastante aceptable en la realidad.

i. El número de terneros machos que nacen vivos es sensiblemente igual al de hembras nacidas vivas. Es decir, que la probabilidad *a priori* de que un ternero recién nacido sea macho, vale 50%; y la de que sea hembra vale también 50%.

j. Para analizar el comportamiento numérico del hato en el tiempo, nos referiremos al número de animales en cada grupo de edad y en cada sexo, contados al final de cada año-calendario. En este caso, consideraremos solamente dos grupos de edades, antes de la edad fértil (terneros y terneras), y después de la edad fértil (vacas de vientre, novillos y toros). Para otros estudios puede llegar a ser necesario discriminar aún más esta clasificación por edades, pero para nuestro propósito aquí, es suficiente.

k. Los riesgos de mortalidad para todas las terneras son unos mismos, así como los riesgos para todas las vacas son unos mismos.

Una vez establecidos los hechos anteriores, y las hipótesis acordadas, adoptemos la siguiente nomenclatura para formular el modelo. Sean:

n: El número ordinal de cierto año-calendario, contado a partir de un momento $n = o$, fijado por convención, en la historia del rebaño. El año histórico que escojamos como origen para la variable n ($n = o$) es, pues, elegible a voluntad.

V_n: El número de vacas de vientre existentes en el hato al final del n-ésimo año-calendario. Ese número V_n es un número natural.

f: El porcentaje de vacas de vientre que son fertilizadas naturalmente en el transcurso de 1 año, o sea, la probabilidad de que una vaca de vientre (no preñada) expuesta a ese "riesgo" durante un año, sea fecundada por un toro, expresada como fracción de la unidad: $0 < f \leq 1$. Lo llamaremos "tasa de fertilidad del hato".

v: La probabilidad de que una vaca en edad fértil muera (de muerte natural) durante 1 año, o sea el porcentaje de vacas de esa condición, expuestas a ese "riesgo" durante 1 año. Es claro que $0 < v < 1$. Se llama también tasa de mortalidad anual.

s: La probabilidad de que una vaca en edad fértil sobreviva durante un año. Evidentemente: $s = 1 - v$, y, $0 < s < 1$. En Colombia, en épocas anteriores, el valor de s para vacas adultas podía estar alrededor de 90% o sea 0.90.

* Sería más apropiado decir "en forma creciente con la tasa de fecundidación y en forma decreciente con la tasa de aborto", pero estas expresiones parecen un poco pedantes.

a: La probabilidad de que una vaca fecundada aborte la cría, o sea, la tasa de aborto.

b: La probabilidad de que una ternera recién nacida sobreviva hasta la edad en que comienza a ser fértil, edad que aquí consideramos ser de 2 años. Es evidente que b es igual a uno menos la probabilidad de muerte temprana. La llamaremos tasa de supervivencia de terneras. En épocas anteriores, para ganado criollo el valor de b podía quizás ser algún valor entre 0.70 y 0.80.

Durante el transcurso de 1 año, si no hay zoomigraciones, ni sacrificio de hembras de cualquier edad, el número de vientres se reduce únicamente por mortalidad natural (tasa : v); pero aumenta en el número de hembras jóvenes que alcanzan en ese año su edad fértil. Estas hembras jóvenes, según nuestras hipótesis, y según nuestra nomenclatura, están identificadas por las siguientes condiciones (necesarias y suficientes):

a. Fueron concebidas en las vacas de vientre que vivían durante el año (n-2)-ésimo, es decir dos años atrás. El número de aquellas vacas era V_{n-2} y la probabilidad de ser fecundadas era (y es) f.

b. Nacieron normalmente, vivas, es decir, que no fueron abortadas. La probabilidad de este evento es 1-a.

c. Nacieron como hembras, cuya probabilidad es 50% o sea 1/2.

d. Han sobrevivido durante sus dos primeros años de vida, de lo cual la probabilidad es b.

En consecuencia, y siguiendo reglas elementales de probabilidad, se sigue que el incremento neto es el número de vientres durante el año que sigue al n-ésimo, es

$$\nabla V_n = - V_n\, v + V_{n-2} f\,(1\text{-}a)\,(1/2)\, b$$

siendo $\nabla V_n = V_n+1 - V_n$ y $v = 1 - s$, se sigue que

$$V_n + 1 = s\, V_n + f\,(1\text{-}a)\,(b/2)\, V_{n-2}$$

o también

$$(01)\ V_n + 3 - s\, V_n + 2 - k\, V_n = 0$$

en donde hemos puesto, para abreviar

$$k = f(1\text{-}a)\big(b/2\big) > 0$$

A este parámetro, k, se le suele llamar "tasa de reposición natural" del hato. Es muy importante advertir que al deducir esta ecuación, *no estamos tomando en cuenta la matanza de vacas viejas,* que es una práctica general en ganadería, *ni la matanza de hembras jóvenes,* lo que también es frecuente en Colombia. Lo hacemos así para simplificar el modelo, pero más abajo se tratará de corregir esta limitación, la cual, sin duda, dejaría al modelo sin utilidad pragmática.

La ecuación (01) es una ecuación en diferencias finitas, determinista, ordinaria, lineal, homogénea, de tercer orden. Es la que rige el comportamiento del número de vientres en el hato, insistimos, si se cumplen:

a. Todas las hipótesis que hemos hecho sobre los valores numéricos de los parámetros vitales y su comportamiento.

b. Que no hay zoomigraciones.

c. Que no se sacrifican hembras, de ninguna edad, aunque sean muy viejas, a las cuales se les deja morir naturalmente. Más abajo estudiaremos cómo cambia el modelo para considerar la posibilidad de sacrificar vacas.

El método para resolver ecuaciones en diferencias finitas como la de arriba está expuesto en los textos sobre la materia, y en nuestro problema es como sigue. Admitamos soluciones de la forma

$$Am^n$$

en donde A es una constante (que resultará arbitraria, en principio); m es una constante pero aún desconocida; y n es la variable discreta que corre de año en año como número natural, o también, si se quiere, como número entero.

Sustituyendo en la ecuación (01) se obtiene la ecuación algebraica

$$(02)\ P(m) \equiv m^3 - s\, m^2 - k = 0$$

que se llama ecuación característica, y de la cual resultarán los valores posibles de m, que son tres (en principio) por tratarse de una ecuación de tercer grado. Los coeficientes s y k son positivos, por su misma definición.

El número de raíces reales positivas de la ecuación característica (02) se obtiene aplicando la regla de signos de Descartes. Según dicha regla ese número es igual al número de cambios de signo en el polinomio

$$P(m) \equiv m^3 - sm^2 - k$$

ordenado en potencias decrecientes de la incógnita m. Evidentemente, ese número es uno. Según la misma regla, el número de raíces negativas es igual al número de cambios de signo en el polinomio

$$P(-m) \equiv -m^3 - sm^2 - k$$

ordenado en la misma forma, el cual número en este caso es cero. Es decir, que la ecuación (02) tiene una sola raíz real, la cual es positiva y, por fuerza, tiene dos raíces complejas (conjugadas entre sí).

Lo anterior se puede visualizar gráficamente en forma clara y sencilla. Consideremos la curva

$$y = m^3 - sm^2 - k \equiv P(m)$$

en un plano cartesiano OMY donde el eje de abscisas es OM y el eje de ordenadas es OY (ver figura anexa). Como bien se sabe, esa curva es una parábola de tercer grado, que tiendo hacia $(+\infty, +\infty)$ en el primer cuadrante y hacia $(-\infty, -\infty)$ en el tercer cuadrante y que corta el eje OY en el punto de abscisa $m = 0$ y de ordenada $y = P(0) = -k$.

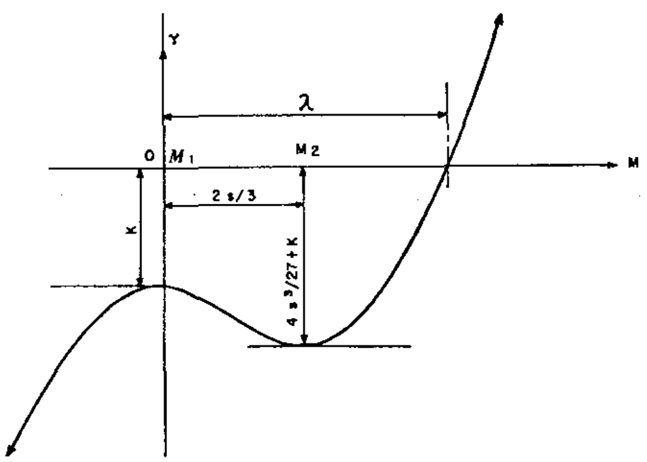

FIGURA 1

El máximo y el mínimo (locales) de la curva, quedan determinados por la condición necesaria

$$dy / dm = 0$$

$$P'(m) \equiv 3m^2 - 2\,sm = 0$$

de modo que se encuentran localizados en los puntos de abscisas

$$M_1 = 0\,,\; M_2 = 2\,s/3$$

La segunda derivada de la función $y = P(m)$ es

$$d^2\, y/dm^2 = P''(m) = 6\,m - 2s$$

y sus signos en los dos puntos críticos hallados son

$$P''(M_1) = -2s < 0$$

$$p''(M_2) = 6\,(2\,s/3) - 2s = 2s > 0$$

Se deduce pues que el máximo de $y = P(m)$ está en $m = 0$ y vale $P\,(0) = -k$; y que el mínimo está en $m = 2\,s/3$ y vale

$$P(2s/3) = (2s/3)^3 - s(2s/3)^2 - k = -(4\left(s^3/27\right) + k)$$

La raíz única real, positiva de la ecuación $P(m) = 0$ está en el punto de abscisa $m = \lambda$, como es evidente. También es evidente que la curva no corta el eje OM en ningún otro punto, es decir, que no hay más raíces reales, como ya lo habíamos deducido algebraicamente.

La ecuación cúbica (02) se puede resolver por métodos numéricos o por el método algebraico llamado de Cardano y Tartaglia. Según este método, si se hace el cambio de variable

$$m = z + s/3$$

y se sustituye en la ecuación original, se obtiene la ecuación cúbica en z

$$(03)\; z^3 - (s/3)\,z - (k + 2(s^3/27)) = 0$$

pero que ya no tiene término de segundo grado. Poniendo ahora

$$z = u + v$$

y sustituyendo en la anterior, se obtiene

$$u^3 + v^3 - (k + 2s^3/27) + 3uv\,(u + v)$$

$$-\,(s^2/3)\,(u+v) = 0$$

Esta última ecuación se satisface si elegimos a u, v, de manera que cumplan las dos condiciones

$$u^3 + v^3 = k + 2s^3/27$$

$$3\,u\,v = s^2/3$$

Despejando v de la segunda, se tiene $v = s^2/9u$; y reemplazándola en la primera encontramos, después de algunas operaciones sencillas

$$u^6 - (k + 2s^3/27)\,u^3 + s^6/9^3 = 0$$

que es una ecuación de segundo grado respecto a u^3. Así que

$$\frac{(k+2s^3/27) + \sqrt{(k+2s^3/27)^2 - 4s^6/9^3}\;^{*}}{2}$$

* Se observa que basta tomar una de las dos raíces de la ecuación cuadrática en u^3, y que elegimos la de signo positivo para el radical en el numerador por simple comodidad.

Entonces

$$u_1 = \left[k/2 + s^3/27 + \sqrt{(k/2 + s^3/27)^2 - s^6/9^3}\,\right]^{1/3}$$

$$(04)\ u_1 = \left[k/2 + s^3/27 + \sqrt{k^2/4 + k\,s^3/27}\,\right]^{1/3}$$

donde la potencia $^1/_3$ (raíz cúbica) se toma dentro de los números reales, y es por lo tanto un número real positivo. El valor correspondiente de v es

$$v_1 = s^2/9u_1$$

Nótese que, en general $u_1 > s/3$ y que $v_1 < s/3$, puesto que k es positivo ($k > 0$).

Los otros dos pares de valores de u, v, son:

$$u_2 = w\,u_1\ ,\ v_2 = s^2/(9wu_1) = w^2\ s^2/9u_1$$

$$u_3 = w^2\ u_1\ ,\ v_3 = s^2(9w^2u_1) = w\ s^2/9u_1$$

en donde w es la primera raíz cúbica compleja de la unidad. Recordando que

$$w = \varrho\ 2\pi\ i/3 = \cos 120^\circ + i \operatorname{sen} 120^\circ = (-1 + \sqrt{3}\,i)/\ 2.$$

y por lo tanto

$$w^2 = \varrho^{4\pi\,i/3} = \cos 240^\circ + i \operatorname{sen} 240^\circ = (-1 - \sqrt{3}\,i)/2$$

se deduce fácilmente que las tres raíces de la ecuación resolvente (03) son:

$$z_1 = u_1 + v_1$$

$$z_2 = u_2 + v_2 = \frac{-(u_1 + v_1) + \sqrt{3}\,i\,(u_1 - v_1)}{2}$$

$$z_3 = u_3 + v_3 = \frac{-(u_1 + v_1) - \sqrt{3}\,i\,(u_1 - v_1)}{2}$$

Como pusimos $m = z + s/3$, se obtiene que las tres raíces para la ecuación característica (02) son:

$$m_1 = u_1 + v_1 + s/3 = u_1 + s2/9u_1 + s/3 = \lambda$$
(que es positiva obviamente)

$$m_1 = \frac{-(u_1 + v_1) + \sqrt{3}\,i\,(u_1 - v_1)}{2} + \frac{s}{3}$$

$$= \frac{-u_1 + s2/9u_1}{2} + \frac{s}{3} + i\ \frac{\sqrt{3}}{2}\,\frac{9u_1{}^2 - s^2}{9u_1}$$

$$m_3 = \frac{-(u_1 + v_1) - \sqrt{3}\,i\,(u_1 - v_1)}{2} + \frac{s}{3}$$

$$= \frac{-u_1 + s^2/9u_1}{2} + \frac{s}{3} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\,\frac{9u_1{}^2 - s^2}{9u_1}$$

sin olvidar que u_1 es el número real positivo definido por la expresión (04). Desde este punto en adelante, y por razones de comodidád tipográfica, suprimiremos el sub-índice "uno" al escribir "u_1" y escribiremos simplemente "u".

Obsérvese que, como ya se había previsto usando la regla de Descartes de los signos, una de las raíces (m_1) es real positiva. Su valor numérico es el que ya atrás habíamos indicado con la letra griega λ, en el gráfico dibujado más arriba. Así mismo se observa que las otras dos raíces obtenidas son números complejos, mutuamente conjugados.

Las dos raíces complejas pueden escribirse en la forma

$$m_2 = -\alpha + i\beta\quad ,\quad m_3 = -\alpha - i\beta$$

En estas expresiones hemos abreviado la notación, poniendo la parte real como

$$(05)\quad -\alpha = -\frac{u + v}{2} + \frac{s}{3} = -\frac{u + s^2/9u}{2} + \frac{s}{3}$$

y la parte imaginaria como

$$\beta = \frac{\sqrt{3}}{2}(u - v) = \frac{\sqrt{3}}{2}(u - s^2/9u$$

Con estas convenciones de nomenclatura, las tres raíces que hemos encontrado para la ecuación característica (02), son:

$$\lambda\quad ,\quad -\alpha + i\beta\quad ,\quad -\alpha - i\beta$$

Comparando a α con λ, encontramos fácilmente que $\lambda = 2\alpha + s$.

La teoría de las ecuaciones en diferentes finitas prescribe que, entonces, la solución general de la ecuación (01), se escribe

$$(06)\ V_n = A_1 \lambda^n + A_2 (-\alpha+i\beta)^n + A_3 (-\alpha-\beta)^n$$

en donde los coeficientes A_1, A_2, A_3 son factores arbitrarios.

Estudiemos ahora los signos de α y de β. Según las definiciones que ya les dimos, los parámetros f, a, b son números reales positivos. Para un hato ganadero en condiciones biológicamente óptimas, con las mejores prácticas zootécnicas, se podría, pues, tener

$$\max f = 1 \quad , \quad \min a = 0 , \quad \max b = 1$$

y se tendría, por lo tanto, que

$$\max k = \max f \max (1-a) \max b/2 = 1/2$$

Por otra parte, dadas las características biológicas del ganado vacuno, hemos establecido como edad máxima de supervivencia la de 9 años; para éstas vacas:

$$\omega = 9 \text{ años}$$

Además, hemos puesto que la tasa de supervivencia, $1-s$, es constante en todas las edades de la vida fértil de cada vaca, lo cual no discrepa mucho de la experiencia práctica. Un criterio estadístico aceptable para calcular s podría ser el de considerar que la edad máxima de las vacas (ω), es aquella en que una cohorte muy numerosa de hembras que llegaron simultáneamente a su edad fértil, se ha ido extinguiendo por mortalidad, hasta que a la edad máxima biológica, ω, sólo resta el 1% de esas hembras cuando eran jóvenes de 2 años de edad. Llamando N_2 el número (supuestamente elevado) de una cohorte de novillas coetáneas con 2 años de edad, el número N_9 que subsisten de ellas al llegar a los 9 años de edad ($\omega = 9$ años) es, como se puede ver con facilidad,

$$N_9 = N_2 \quad x\, s\, x\, s\, x\, s\, x\, s\, x\, s\, x\, s\, x\, s = N_2\, s^7$$

y puesto que, nuestro criterio estadístico puede expresarse como

$$N_9 = 0.01\, N_2$$

se deduce que

$$s^7 = 0.01$$

de donde $s = 51.8\%$, y la tasa de mortalidad vale $v = 1-s = 48.2\%$. Para mayor comodidad, pondremos $\max s = 0.6$ (*). Usaremos así, en lo que sigue salvo advertencia de lo contrario **estos valores para** los parámetros s, v.

En relación con el valor de u (antes designado como u_1), lo anterior significa lo siguiente

$$\max \sqrt{(k^2/4) + (ks^3/27} = \sqrt{(1/16)} + \sqrt{(1/2)(0.6/3)^3} = 0.258$$

de donde

$$\max u = (1/4 + 0.6^3/27 + 0.258)^{1/3} = 0.802$$

Observando la ecuación (05) que nos define a alfa (α), podemos escribir:

$$(07)\quad \alpha = \frac{u + s^2/9u}{2} - \frac{s}{3} = \alpha(u)$$

Si examinamos los posibles valores que podrían serle atribuidos a u, y que, por lo que ya explicamos podrían ser números reales mayores que $s/3$ y menores que uno, y construimos la gráfica de la función $\alpha(u)$, resulta la gráfica de la figura 2.

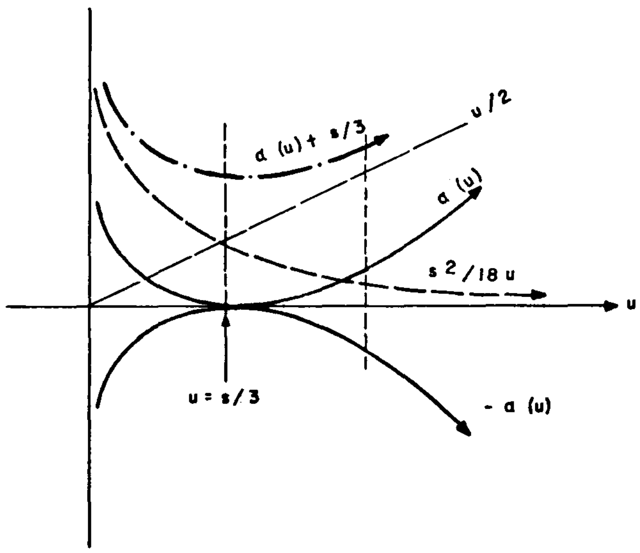

FIGURA 2

El punto donde α alcanza su mínimo es tal que

$$d\alpha/du = 0$$

o sea

$$1 - s^2/9u^2 = 0$$

es decir en $u^* = s/3$. En ese punto se obtiene:

$$\alpha^* = \min \alpha(u) = \alpha(u^*) = 0$$

---

* Es claro que en la realidad, ningún hato ganadero tiene una tasa de mortalidad anual tan alta como 0.4, a todas las edades y sobre plazos largos de tiempo. En este modelo resulta así por la forma como ha sido visualizado el régimen de supervivencia, para no complicar exageradamente el modelo.

y por lo tanto

$$\max(-\alpha) = 0$$

cualquier otro valor de alfa es positivo; o, en otras palabras, que menos alfa es forzosamente negativo o nulo (a lo sumo). Observemos que α es igual a cero en el punto $u^* = s/3$, y sólo allí. Pero, según la ecuación (04), el valor u coincide con s/3 si y solamente si k=0, es decir si las fuerzas del aborto, de la mortalidad de los terneros y de la esterilidad del hato hacen que el producto $f(1-a)\, b/2 = k$ sea nulo.

En cuanto a la parte imaginaria de las raíces complejas, beta (β), es forzosamente positiva, en nuestro caso. En efecto:

$$\beta = (\sqrt{3}/2)\,(u - s^2/9u)$$

porque $u > s/3$ (como vimos más arriba), o sea

$$u^2 > s^2/9 \Longleftrightarrow u > s^2/9u \Longleftrightarrow \beta > 0$$

Las anteriores consideraciones se pueden resumir aseverando que las dos raíces complejas de la ecuación característica (02) de este problema se encuentran en los cuadrantes segundo (II) y tercero (III) del diagrama de Argand-Gauss para números complejos:

$$m^2 = R\, e^{i\phi} = -\alpha + i\beta$$

$$m^3 = R\, e^{-i\phi} = -\ \bar{m}_2 \text{ (conjugado de } m_2\text{)}$$

en donde

$$-\alpha = R\cos\phi\ ,\ \beta = R \operatorname{sen}\phi$$

$$R = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}\ ,\ \phi = \operatorname{tg}^{-1}\left(\beta/(-\alpha)\right)$$

y ϕ está comprendido entre 90° y 180° (*).

Volviendo a la solución general (06), notamos que parte de ella se puede expresar como

$$A_1 (-\alpha + i\beta)^n + A_2 (-\alpha - i\beta)^n = A_2 R^n e^{i\phi n} + A_3 R^n e^{-i\phi n}$$

$$= R^n (A_2 + A_3)\cos\phi n + iR^n (A_2 - A_3)\operatorname{sen}\phi n$$

según la conocida identidad de Euler

$$e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x.$$

La expresión anterior puede también escribirse en la forma abreviada

$$K\cos(\phi n - \epsilon)$$

* Para explicarse estas últimas relaciones, basta observar el dibujo cercano al párrafo.

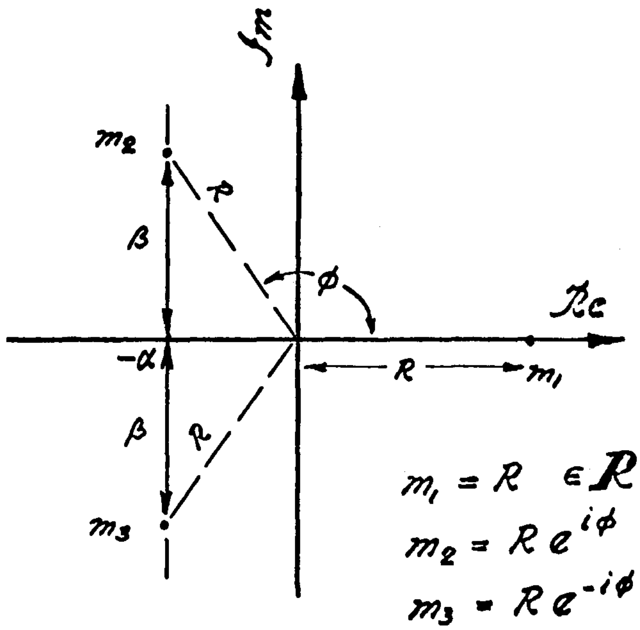

Diagrama de Argand de las raíces de la ecuación cúbica siendo una real (m_1).

FIGURA 3

en donde

$$K = R^n \sqrt{(A_2 + A_3)^2 + (A_2 - A_3)^2}$$

$$= R^n \sqrt{2(A_2^2 + A_3^2)} > 0 \text{ (positivo)}$$

$$\epsilon = \operatorname{tg}^{-1}\left(i\,\frac{A_2 - A_3}{A_2 + A_3}\right),\ A_3 = \bar{A}_2.$$

Entonces, la solución general se escribe como

$$(08)\ V_n = A\lambda^n + K\cos(\phi n - \epsilon)$$

siendo A, K, ϵ, tres constantes arbitrarias positivas e independientes entre sí.

La representación gráfica de una función como la (08) es la que se muestra en el dibujo de la figura 4, según que la raíz real lambda (λ) sea mayor o menor que uno.

La ecuación (08) y las curvas de la figura 4 expresan que la población ganadera V_n evoluciona con la variable n, a lo largo de los años, presentando fluctuaciones cíclicas de amplitud constante, alrededor de una curva de tendencia que crece en progresión geométrica en el tiempo, si lambda es mayor que uno ($\lambda > 1$) o que decrece tendiendo a extinguirse asintóticamente si lambda es menor que uno ($\lambda < 1$).

El caso de lambda igual a 1 ($\lambda = 1$) llevaría a una solución en la que la población ganadera osci-

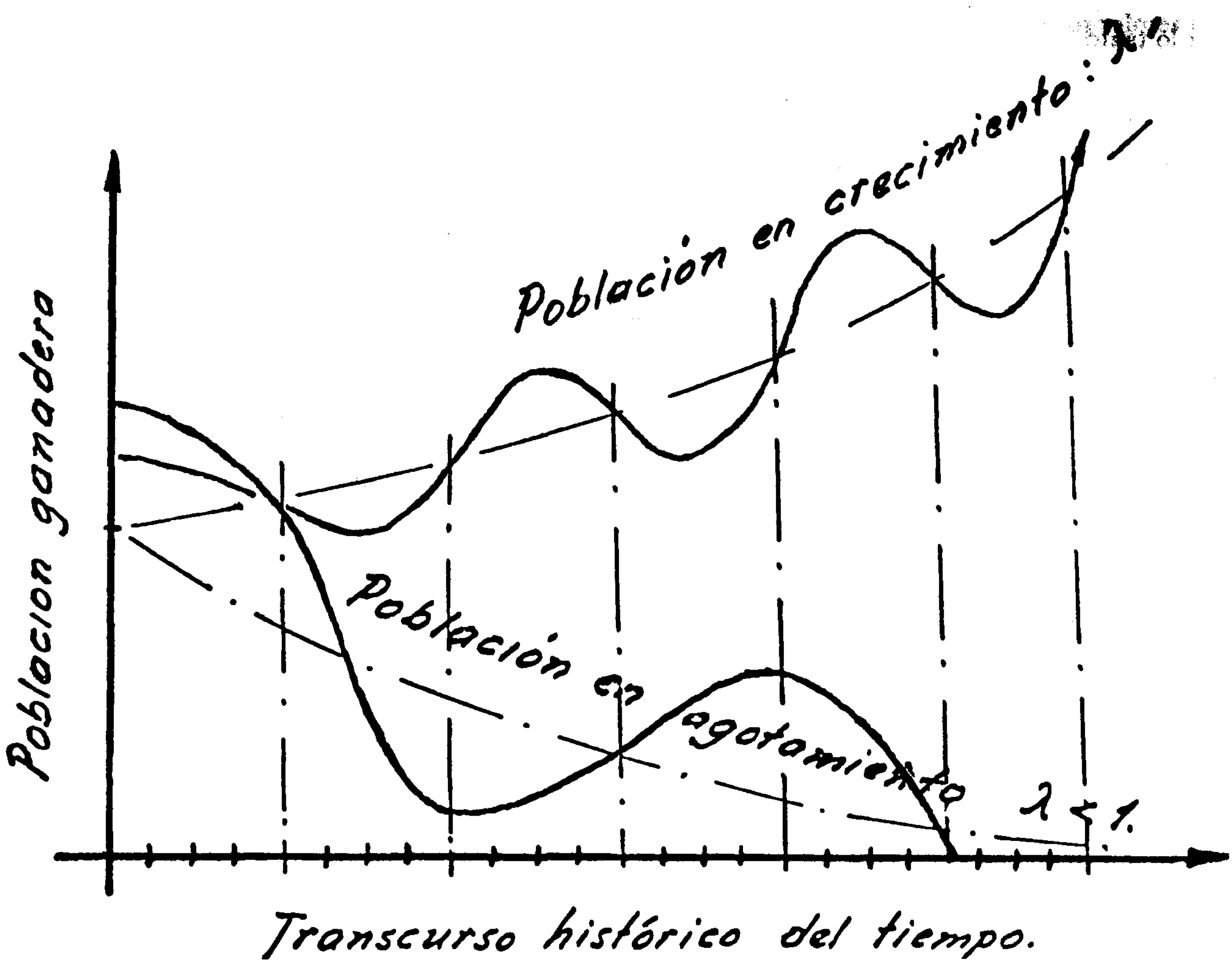

FIGURA 4

laría periódicamente alrededor de un promedio A, constante a través de los años. Se trataría de una población en oscilación estacionaria, que a largo plazo permanecería estancada.

Por lo que se ha dicho, la expansión (o disminución) del número de vientres, a largo plazo depende fundamentalmente de que el factor λ sea mayor que 1 (o menor que 1, respectivamente). Por esa razón se le puede llamar *factor de crecimiento secular.*

Puede también notarse que la serie temporal, año por año, que es generada por una función como la (08), puede ser "filtrada" para eliminar la componente cíclica de forma

$K \cos(\phi n - \epsilon)$, siendo $\phi = 2\pi / T$, T = período (en años)

tomando sobre esa serie una medida móvil simple sobre T años, como es fácil comprobar mediante consideraciones estadísticas y alebraicas muy sencillas.

Veamos qué condiciones biológicas se requieren para que una lambda sea mayor que uno. Ya sabemos que

$\lambda = u + s^2/9u + s/3$, o sea que $u + s^2/9u > 1 - s/3$

consultando la fórmula encontrada en el párrafo No. 9, más arriba. Encontramos así dos resultados muy importantes para este problema:

a. Que *el hato subsistirá persistentemente y crecerá a largo plazo, si y sólo si los parámetros biológicos* s, f, a, b, *son tales que*

$$u + s^2/9u > 1 - s/3, \text{ o sea que } \alpha > (1-s)/2$$

teniendo en cuenta la fórmula (07) y siendo que

$$u = \sqrt[3]{k/2 + s^3/27 + \sqrt{k^2/4 + ks^3/27}} \text{ , con}$$

$$k = f(1-a)\, b/2$$

b. Que a lo largo de su historia, la población del hato presenta ciclos con períodos de T años, siendo

$$T = \frac{2\pi}{\phi} \quad \text{con} \ = tg^{-1}(-\beta/\alpha)$$

Esta última fórmula se deduce muy sencillamente de la fórmula (08). Recuérdese que

$$\frac{\phi}{2\pi}=\frac{1}{T}=\frac{1}{2\pi}tg^{-1}\frac{-\beta}{\alpha}=\frac{1}{2\pi}$$

$$tg^{-1}\frac{\sqrt{3}\,(u-s^2/9u)}{2\,(-(u+s^2/9u)/2+s/3)}$$

Dichos ciclos se han observado claramente en las estadísticas ganaderas en Colombia y en otros países.

Un ejemplo numérico hipotético pero verosímil de las fórmulas encontradas, sería el de examinar el comportamiento histórico, a largo plazo, de un hato ganadero que presentara los siguientes parámetros biológicos:

Tasa de fertilidad del hato : $f = 0.6 = 60\%$

Tasa de aborto:

$a = 0.1 = 10\%$ y $1\text{-}a = 0.9 = 90\%$

Tasa de supervivencia de terneras:

$b = 0.9 = 90\%$

Tasa de supervivencia anual de vacas: $s = 0.6$ (se le da este valor muy alto, para que el resultado numérico a que lleguemos se parezca al de un hato colombiano donde hay sacrificio de hembras en todas las edades, y porque este fenómeno no ha sido tenido en cuenta explícitamente en el modelo, hasta ahora),

de donde se calcula:

$k = f(1\text{-}a)b/2 = 0.6 \times 0.9 \times 0.9/2 = 0.243$

La ecuación característica (02) en este caso es

$$m^3 - 0.6\,m^2 - 0.243 = 0$$

Pongamos

$$m = z + 0.2$$

y tenemos

$$z^3 - 0.12\,z - 0.259 = 0$$

y escribiendo $z = u + v$, se llega a las dos ecuaciones

$$u^3 + v^3 = 0.259$$

$$3uv = 0.12$$

Resolviendo este par de ecuaciones como ya se indicó, encontramos

$$u = 0.63722842,\ v = 0.062771839$$

y la raíz real de la ecuación es

$$m_1 = u + v + h = 0.900000 = \lambda$$

En estas condiciones, si los parámetros biológicos permanecen invariables, la población ganadera disminuye a largo plazo, hasta que su número llegue a ser tan bajo, que en una fase descendente del ciclo ganadero desaparezca totalmente.

En este caso, el período del ciclo ganadero sería de 2.8770 años = 2 años y 10.5 meses.

La función de crecimiento del número de vientres es

$$V_n = A\ 0.9^n + k\cos(2.183884873...n - \epsilon)$$

radianes

siendo $n = 0, 1, 2, 3, 4...$, y A, K, ϵ constantes indeterminadas, por lo menos hasta aquí.

Propongamos ahora el caso de un hato de vacas con los siguientes parámetros biológicos

$$f = 0.8,\ a = 0.1,\ 1\text{-}a = 0.9,\ b = 0.9,\ s = 0.95$$

por lo cual $k = f(1\text{-}a)b/2 = 0.324$

La ecuación característica es

$$m^3 - 0.95\,m^2 - 0.324 = 0$$

y poniendo

$$m = z + h,\ \text{siendo } h = 0.95/3 = 0.3166667$$

se cónvierte en

$$z^3 - 0.285791667\,z - 0.387509259 = 0$$

Continuando el proceso como ya se explicó, se obtiene

$$u = 0.72794321,\ v = 0.137754946,\ y\ \lambda = 1.182364856$$

El período del ciclo ganadero sería de 2 años y 9 meses.

En este caso el hato de vacas puede aumentar porque $\lambda = 1.1823... > 1$, y ejecuta también oscilaciones alrededor de la tendencia secular de crecimiento. La función de crecimiento es

$$V_n = A\,(1.182364856...)^n + K\cos(2.273483273...n - \epsilon)$$

en donde $n = 0, 1, 2, 3,...$ años, y A, K, ϵ son constantes indeterminadas. En este ejemplo, como en el anterior, las tres constantes indeterminadas pueden ser especificadas, si y solamente si se prescriben expresamente los tres valores iniciales V_0, V_1, V_2.

Es obvio que, como ya se dijo hasta ahora estamos suponiendo que no hay sacrificio de vacas de vientre y la única mortalidad considerada es la natural, con tasa anual 1 – s, uniforme para todas las edades.

Un hato ganadero está formado no solamente por las vacas de vientre. Hay también terneras, terneros. novillas no fértiles, novillos, toros, etc.

Por ejemplo, el número de terneras menores de un año de edad puede calcularse teniendo en cuenta lo siguiente:

a. que fueron concebidas en las vacas de vientre que había dos años antes (uno de edad de la ternera, más 9 meses de gestación, más 2 meses de frigidez lactante de las vacas), vacas cuyo número era V_{n-2}, y cuya probabilidad de ser fecundadas es f para cada una;

b. es necesario que la vaca en que es concebida la ternera, dé nacimiento a la cría viva a su debido tiempo, es decir, que se requiere que la vaca no aborte, lo cual tiene una probabilidad (1-a);

c. de las crías nacidas, la mitad (50%) es de hembras y la mitad es de machos;

d. las terneras deben sobrevivir durante esos primeros meses de vida. Si b es la probabilidad de sobrevivir hasta los dos años, la de sobrevivir hasta el primer año es aproximadamente $\sqrt{b}$, y para el conjunto de terneras entre cero y un años, su promedio puede estimarse en $\sqrt{b}$.

En consecuencia, puede estimarse el número de terneras hembras menores de un año, al fin del año-calendario n-ésimo en

$$T_n = V_{n-2}\, f\,(1\text{-}a)\; 0.5\sqrt{b}$$

El número de terneros machos en esa edad es igual también a lo anterior.

Por consideraciones probabilísticas análogas a las anteriores, podemos calcular el número de novillas hembras mayores de 1 año y menores de 2 años de edad, al final del año-calendario n-ésimo en

$$N_n = V_{n-3}\, f\,(1\text{-}a)\; 0.5\, b$$

y éste también es el número de novillos machos de esa edad, suponiendo que no haya sacrificio de terneros.

El número de novillos entre dos y tres años de edad será

$$G_n = s\, N_{n-1} = s\, f\,(1\text{-}a)\,(b/2)\, V_{n-4}$$

y éstas son, precisamente los que, previamente cebados, se sacrifican para carne, cada año.

Además ha sido práctica general que al llegar a los 9 años de edad, las vacas se engordan un año o seis meses y se sacrifican. El número de tales vacas (si se las dejara vivir) en el año-calendario n-ésimo será el mismo que el de novillas de 2 años de edad, 8 años-calendario antes, y que hayan sobrevivido esos 8 años, es decir

$$\bar{\nabla} Sn = N_{n-8}\, s^8 = V_{n-11}\, f\,(1\text{-}a)\; 0.5\, b\, s^8$$

El número de vacas que entra en el año-calendario n-ésimo a la edad de los 10 años es entonces

$$\bar{\nabla} Sn = f\,(1-a)\, s^8 (b/2)\, \nabla\, V_{n-11}$$

y el número de novillos que ese mismo año entran al grupo de dos o tres años será

$$\bar{\nabla} G_n = s\, f\,(1\text{-}a)\,(b/2)\, \bar{\nabla}\, V_{n-4}$$

Considerando que la matanza para carne está constituida cada año por estas dos formas de sacrificios (excluyendo, por ejemplo, el sacrificio de terneros), entonces la extracción en el año n-ésimo será

$$E_n = \bar{\nabla} S_n + \bar{\nabla} G_n = sf(1\text{-}a)\,(b/2)\;\; (\bar{\nabla} V_{n-4} + s^8\, \bar{\nabla} V_{n-11})$$

y la tasa de extracción será E_n/H_n donde H_n es el tamaño de la población en el n-ésimo año.

Es interesante examinar cómo varía el factor λ, que es el factor de crecimiento secular, según que los parámetros vitales, s, k, sean más o menos altos. Ello es fácil de lograr partiendo de la consideración de que λ satisface la ecuación característica (02);

$$P(\lambda) = \lambda^3 - s\,\lambda^2 - k = 0$$

La derivada de λ respecto a s se puede calcular fácilmente

$$\frac{d\lambda}{ds} = -\frac{\partial P/\partial s}{\partial P/\partial \lambda} = \frac{\lambda}{3 - 2s}$$

Ahora bien, observando la figura 1 se aprecia, evidentemente, que

$$\lambda > 2\, s/3 \text{ o sea: } 3\,\lambda - 2s > 0$$

por lo tanto

$$d\,\lambda\, /\, ds > 0$$

Esto significa que, si consideramos tasas de supervivencia (s) mayores de un hato a otro, el factor de crecimiento secular (λ) será mayor.

Por otra parte:

$$\frac{d\lambda}{dk} = -\frac{\partial P/\partial k}{\partial P/\partial \lambda} = -\frac{-1}{3\lambda^2 - 2s\lambda} = \frac{1}{\lambda(3\lambda - 2s)}$$

porque λ y $3\lambda - 2s$ son todos factores positivos. Es decir, que a mayores valores de k corresponden también mayores valores del factor de crecimiento secular, λ.

Los dos resultados anteriores concuerdan con lo que puede deducirse en forma si se quiere intuitiva, por meras consideraciones cualitativas y empíricas.

Al final del año n-ésimo, el rebaño puede considerarse, en esencia constituido por:

a. Las vacas de vientre, en número V_n

b. Los terneros de ambos sexos de menos de 1 año, en número $2T_n$

c. Los novillos y las novillas entre 1 y 2 años, de levante, en número $2N_n$

d. Los toros, más o menos uno por cada 10 vacas de vientre, o sea en número $0.1\ V_n$

En total, el número de individuos sería, pues, en general *(si no hubiera sacrificio de hembras):*

$$H_n = 1.1\ V_n + 2\,(T_n + N_n)$$

$$= 1.1\ V_n + f\,(1\text{-}a)\,b\,(V_{n-2} + b\,V_{n-3}).$$

BIBLIOGRAFIA

CRAGG, J.B. and PIRIE, N. W. *The Numbers of Man and Animals.* London. Oliver and Boyd. 1955. p. 152.

ENGEL, ALEJANDRO B. *Elementos de Biomatemática.* Washington. Organización de Estados Americanos. 1978. p. 76.

JORDAN, CHARLES. *Calculus of Finite Differences.* New York. Chelsea Publishing Company. 1965. p. 654.

LOTKA, ALFRED J. *Elements of Mathematical Biology.* New York. Dover Publications, Inc. 1965. p. 465.

SMITH, J. MAYNARD. *Mathematical Ideas in Biology.* Cambridge. University Press. 1968. p. 152.

DE LIRA MADEIRA, JOAO. "Modelos de Analises do Crescimento Demográfico". *Revista Brasileira de Estadística.* No. 128. Octubro/dezembro, 1971.

RABINOVICH, JORGE. *Ecología de Poblaciones Animales.* Washington. Organización de Estados Americanos. 1978. p. 101.