DOS NUEVOS GRUPOS PIAGETIANOS EN LA LOGICA ELEMENTAL

Por Carlos E. Vasco Uribe[1]

1. Introducción

Es conocida la propuesta de Jean Piaget de clasificar el grado de desarrollo del pensamiento del niño y el adolescente en cuatro etapas, la sensorio-motriz, aproximadamente de cero a dos años, la pre-operatoria, aproximadamente de los dos años hasta los cinco o siete años; la operatoria concreta hasta las doce o catorce años, y la operatoria formal, etapa llamada también de pensamiento formal, o de pensamiento hipotético-deductivo, de esa edad en adelante.

También es conocida la controversia que desde los años cincuenta hasta nuestros días se ha desatado sobre la validez de esa clasificación y la realidad de esas etapas, sobre todo porque en otras culturas distintas de Suiza y Francia no se observan los indicadores de pensamiento formal en la mayoría de los jóvenes y adultos.

Menos conocida fuera del círculo de los especialistas en psicología evolutiva, es la propuesta de corte radicalmente estructuralista que hizo Piaget al proponer que el paso del pensamiento concreto al pensamiento formal se debe a una estructura algebraica profunda: al dominio del grupo de transformaciones que él llamó "grupo INRC".

Esta invasión del álgebra en la lógica y en la psicología ha sido cuestionada por los psicólogos más pragmáticos y empiristas, sobre todo en Inglaterra y los Estados Unidos. No vamos a entrar en los detalles de esa controversia. Es posible que el pensamiento formal no se deba a una única estructura profunda, sino que tenga diversas dimensiones relativamente independientes. Pero ciertamente es posible "a posteriori" tratar de sistematizar por medio de códigos algebraicos una serie de reacciones de los niños y adolescentes ante cierto tipo de frases del lenguaje ordinario y del lenguaje de las ciencias y las matemáticas, y ante cierto tipo de preguntas y juegos de tipo lógico.

Puede discutirse la validez de la codificación hecha por Piaget, con la ayuda de lógicos como L. Apostel, B. Matalon y J. B. Grize, que pretendió describir el pensamiento infantil por medio de una estructura inestable que él llamó "agrupamiento", y el pensamiento adolescente por medio de la estructura del grupo INRC, que se llama por antonomasia "el grupo de Piaget".

Pero antes de discutirla, es conveniente analizarla en detalle, y apreciar así su fuerza y su elegancia. Después de estudiar ese grupo, y de tratar de ver si los comportamientos lingüísticos de los niños y adolescentes sí seguían en alguna forma los esquemas que deberían seguirse de la teoría, no sólo encontré que efectivamente aparecen muchas transformaciones lógicas espontáneas y provocadas que parecen seguir el esquema del grupo INRC, sino que encontré otros dos grupos lógicos formados por operadores o transformaciones diferentes, pero que tenían exactamente la misma estructura algebraica que el grupo INRC.

Sobre el grupo INRC pueden verse algunos textos de Piaget, como Inhelder y Piaget (1972, pp. 259-277) y Piaget e Inhelder (1980, pp. 136-144), o la exposición ya clásica de Flavell (1978, pp. 235-241). Una exposición lúcida de W. Mays con algunos de los textos originales de Piaget se encuentra en Gruber y Vonèche (1977, pp. 444-471). Para la discusión teórica sobre las relaciones entre la lógica formal y el pensamiento real puede verse Beth y Piaget (1968), y para la discusión psicológica, DelVal (Ed.) (1977), y el tercer volumen del "Handbook" de Mussen (Ed.) (1983).

Empecemos con una revisión rápida de algunos aspectos menos conocidos del cálculo proposicional, que me parecen imprescindibles para una

1 Universidad Nacional de Colombia.

correcta interpretación del grupo de Piaget y de los dos grupos piagetianos que describo en este trabajo.

2. Clases de equivalencia en el cálculo proposicional

Podríamos imaginarnos la lógica proposicional como la química del lenguaje declarativo. Una frase declarativa afirma o niega (con verdad o sin ella) que algo es el caso.

Es posible identificar cada frase declarativa como una proposición diferente, o considerar que una proposición es el contenido conceptual de todas las frases declarativas que lo expresen. En cierto sentido, y para aquellos a quienes les gustan las clases de equivalencia, puede considerarse que una proposición es la clase de equivalencia de todas las frases declarativas que tienen el mismo sentido.

Supongamos que tenemos una colección de proposiciones, a cada una de las cuales le podemos asignar como símbolo una letra del alfabeto, generalmente las letras de la p a la w, añadiéndoles subíndices si es necesario introducir nuevas letras.

Hablo de química del lenguaje declarativo, pues podemos comenzar tratando de romper cada proposición en sus átomos o proposiciones primitivas, que no pueden ya desmembrarse en proposiciones más simples unidas por conectivas o afectadas por negaciones. Estos átomos de la química lógica nos permiten volver a construir moléculas, al volverlos al revés por medio de negaciones, o al unirlos en parejas por medio de conectivas binarias.

Muchas de esas moléculas proposicionales resultan ser lógicamente equivalentes, tanto en el sentido sintáctico, o sea porque cada una se puede deducir de la otra y viceversa, como en el sentido semántico, o sea que para cada asignación de valores de verdad a sus letras proposicionales, se obtiene siempre para ambas el mismo valor de verdad global.

Nótese que estos dos sentidos de la equivalencia lógica son diferentes de la conectiva a la que los lógicos (y nadie más que los lógicos) se refieren con la expresión "si y solo si". Los dos primeros sentidos se refieren a relaciones entre las proposiciones, mientras que la conectiva "si y solo si" es un operador binario que sólo produce una nueva proposición, sin decir nada sobre los valores de verdad de los componentes ni de los del compuesto.

Nótese además que el sentido sintáctico y el sentido semántico de la equivalencia lógica coinciden para las fórmulas bien formadas del cálculo proposicional, pues por los metateoremas de validez y completez de dicho cálculo, la transformabilidad mutua por pasos sintácticamente válidos implica la equivalencia semántica, y viceversa.

En el estudio del grupo INRC de Piaget vamos a manejar clases de equivalencia de proposiciones, y no las proposiciones mismas. Este es la primera fuente de confusiones en el tratamiento del grupo de Piaget.Los operadores que se contemplan parecen actuar sobre las proposiciones, pero en realidad actúan sobre las clases de equivalencia de proposiciones.

El espacio-objeto, o espacio afín, o campo de acción del grupo INRC de Piaget no es pues el conjunto de las fórmulas bien formadas del cálculo proposicional como suele creerse, sino el espacio cociente por la relación de equivalencia. Si notamos "**FBF**" el conjunto de las fórmulas bien formadas, y "$\approx$" la relación de equivalencia (sintáctica o semántica), ese espacio sobre el que actúa el grupo no es **FBF**, sino **FBF**$/\approx$.

De cada clase de equivalencia es posible extraer un representante canónico, que puede ser la fórmula más corta de la clase, y en caso de empate entre fórmulas de la misma longitud, la que preceda a las demás en cierto orden lexicográfico; o mejor aún, como lo selecciona Piaget, el representante canónico puede ser la forma normal disyuntiva equivalente a cualquier fórmula de la clase, pues siempre es posible encontrar una forma normal disyuntiva en cada clase de equivalencia, y esa forma puede escogerse con todas las letras proposicionales de cada conjunción en orden alfabético, y con las conjunciones también en orden lexicográfico, suponiendo que la letra sin negación precede a la letra con negación.

Por ejemplo, para el caso que más nos interesa que es $n = 2$, tomando $p = p_1$, $q = p_2$, tendríamos cuatro conjunciones de dos términos. Las cuatro conjunciones en orden lexicográfico serían:

$p \wedge q,\ p \wedge \neg q,\ \neg p \wedge q,\ \neg p \wedge \neg q.$

De ellas podemos seleccionar 16 subconjuntos para formar una disyunción de sus elementos, incluyendo por supuesto el conjunto lleno (que daría la disyunción de las cuatro conjunciones, equivalente a todas las tautologías), los cuatro subconjuntos unitarios (que darían solo la conjunción respectiva sin disyunción ninguna), y el conjunto vacío (que se asume equivalente a todas las antilogías).

Diez de esos subconjuntos producen formas normales disyuntivas que no son equivalentes a ninguna otra con menos letras proposicionales. (Sobre las 16 operaciones binarias, ver Inhelder y Piaget, 1972, pp. 247-259; ver también Flavell, 1978, pp. 232-235).

A menos que se adopten convenciones como transformar una fórmula dada en el representante canónico de su clase de equivalencia, luego aplicar la transformación piagetiana, y luego volver a transformar a la forma normal disyuntiva equivalente, es necesario trabajar con clases de equivalencia. De lo contrario, el resultado de la transformación no sería único, y ya es conocida la repugnancia de los lógicos y los matemáticos para aceptar operadores que no sean unívocos.

3. Los juegos lógicos del niño y el adolescente

Piaget notó que los niños que comprenden proposiciones condicionales lo suficientemente bien como para poder jugar con ellas, pueden efectuar algunas transformaciones lógicas sencillas. Por ejemplo, un niño puede empezar a oír que apenas suena el timbre de la puerta, el perro ladra. Se hace la hipótesis de que si suena el timbre, el perro ladra. El niño no necesita codificación formal, pero nosotros podemos codificar esa hipótesis tomando la inicial de una palabra clave de la proposición para utilizarla como símbolo de la proposición. En este caso, seleccionamos la "t" de "timbre" para "Suena el timbre", y la "p" de "perro" para "El perro ladra", y simbolizamos la suposición que se hace el niño por: "$t \to p$".

Si alguna vez suena el timbre y el perro no ladra, el niño cae en la cuenta de que esa suposición no era correcta. En cierto sentido, al comprobar lo que simbolizamos por "$t \wedge \neg p$", cae en la cuenta de que la hipótesis que simbolizamos por "$t \to p$" es falsa. Llamemos pues a la proposición que simbolizamos "$t \wedge \neg p$", "la negación de (o la negativa de) $t \to p$".

Si el niño cae en la cuenta de que el perro ve, oye o huele a la persona que va a tocar la puerta antes de que timbre, puede ensayar también la hipótesis recíproca de que si el perro ladra, suena el timbre.

Simbolizamos pues por "$p \to t$" la recíproca de la condicional inicial. Si expresamos los resultados de estas transformaciones por medio de las formas normales disyuntivas equivalentes a ellas, obtenemos los siguientes resultados:

Proposiciones	**Formas normales disyuntivas**
$t \to p$	$(p \wedge t) \vee (p \wedge \neg t) \vee (\neg p \wedge \neg t)$
$t \wedge \neg p$	$(\neg p \wedge t)$
$p \to t$	$(p \wedge t) \vee (\neg p \wedge t) \vee (\neg p \wedge \neg t)$
$p \wedge \neg t$	$(p \wedge \neg t)$.

Piaget notó que para lograr la transformación de una proposición condicional en su recíproca bastaba intercambiar cada letra proposicional no negada por su negación, y viceversa, y extendió el nombre de recíproca de una proposición cualquiera a la resultante de aplicar a su forma normal disyuntiva esa operación. Esta extensión de la transformación de reciprocación y de la relación de reciprocidad no es trivial. Si la proposición no es condicional, no es claro qué pueda ser su recíproca. ¿Cuál es por ejemplo la recíproca de $p \wedge \neg t$?

Piaget, como todos nosotros, confundía fácilmente la operación con su resultado, y la transformación misma con la relación asociada. Para no caer en esas fuentes de confusión, distingamos la operación misma de reciprocar, que llamamos "reciprocación", y el resultado de aplicarle esa operación a una proposición dada β, resultado al que llamamos "la recíproca de β", o un poco más alambicadamente, "la reciprocación de β". Distingamos también la transformación misma de reciprocación, de la relación resultante entre la materia prima y el producto terminado, que llamamos "relación de reciprocidad", o con su esquema de lectura, la relación "... es recíproca de..."

Simbolicemos el operador de reciprocación por una **R**, que se aplica a clases de equivalencia de proposiciones. En particular, en el ejemplo del timbre y el perro, notemos la clase de equivalencia de proposiciones equivalentes a $t \to p$ encerrándola entre paréntesis cuadrados: "$[t \to p]$". Tendríamos entonces que:

$$\mathbf{R}\,[t \to p] = [p \to t]\text{, y que }\mathbf{R}\,[p \to t] = [t \to p]$$

Piaget también notó que si en la forma normal disyuntiva que corresponde a $t \to p$ se intercambian las letras proposicionales que no aparecen negadas con sus negaciones y viceversa, y al mismo tiempo se intercambian las conjunciones $\wedge$ con las disyunciones $\vee$ y viceversa, se obtiene una fórmula equivalente a $\neg p \wedge t$, que sería la negación de la proposición $t \to p$. Simbolicemos el operador de negación por una **N**, que se aplica de nuevo a clases de equivalencia de proposiciones: $\mathbf{N}\,[t \to p] = [t \wedge \neg p] = [\neg p \wedge t]$, y $\mathbf{N}\,[p \to t] = [p \wedge \neg t]$.

La comprobación de que por ejemplo:

$$\mathrm{N}[p\wedge t)\vee(\neg p\wedge t)\vee(\neg p \wedge\neg t)] =$$

$$[(\neg p\vee\neg t)\wedge(p\vee\neg t) \wedge(p\vee t)] = [p\wedge\neg t],$$

es trivial, aunque engorrosa, pues requiere la utilización de la asociativa de la $\wedge$, de la recolectiva de la $\vee$ sobre la $\wedge$, de la modulativa de la $\vee$, de la distributiva de la $\wedge$ sobre la $\vee$, de nuevo de la modulativa de la $\vee$, y finalmente de la conmutativa de la $\wedge$.

Lo interesante del caso es que Piaget encontró que los niños que pueden entender cuál es la recíproca de una proposición dada, o cuál es la negación (o la negativa) de una proposición dada, pueden tal vez entender cuál es la recíproca de la recíproca, y cuál es la negación de la negación, pero se bloquean totalmente cuando se les pregunta cuál sería la recíproca de la negación, o la negación de la recíproca.

Para poder responder a esas preguntas, haría falta que construyeran una cuarta operación mental que produjera de una vez la negación de la recíproca, proposición a la que Piaget llama "la correlativa" de la proposición original. La operación misma debería llamarse "correlativización". Al resultado de aplicar la correlativización a una proposición β, lo llamaremos con Piaget "la correlativa de β", o más alambicadamente, "la correlativización de β".

Además, los niños tendrían que comprobar que la correlativa de la correlativa es otra vez la original, y que la recíproca de la negación es la misma correlativa. Para eso, dice Piaget, es necesario haber pasado al estadio de pensamiento formal.

Si esa operación mental ha sido construída, podríamos definir un cuarto operador de correlativización, **C**, que actúa no ya sobre proposiciones aisladas sino sobre clases de equivalencia, y que completaría el sistema de transformaciones entre esas clases de equivalencia de proposiciones.

Si notamos la aplicación sucesiva de operadores unarios por medio del símbolo"°",podemos pensar en una operación binaria de composición de operadores. Este circulito "°" se suele leer "compuesto con", pero ello produce mucha confusión en los niños y adolescentes. Basta leerlo "aplicado después de", "después de", o simplemente "de". Por ejemplo, "**R°R**" se puede leer "la recíproca de la recíproca", o "**R** aplicado después de **R**", o "**R** después de **R**", o "**R** compuesto con **R**".

Así, tendríamos que estos niños pueden entender que **R°R** es una operacion que devuelve la proposición a su forma original, o sea que no le hace nada, y por lo tanto podrían definir un operador que no hace nada a sus víctimas o argumentos: el operador idéntico, que aplicado a β produce como resultado el mismo β, o el idéntico de β. Al operador que no les hace nada a las clases de equivalencia de proposiciones, lo llamamos "el operador idéntico", y lo notamos con una **I**.

Los niños podrían saber que **R°R** = **I**, que **N°N** = **I**, y no saber qué es **N°R**, ni qué es **R°N**, ni si esas dos combinaciones producen o no el mismo resultado. Piaget diría que esos niños manejan los grupos IR e IN, pero que no han completado el grupo INRC.

Este grupo formado por los cuatro operadores unarios, **I**, **N**, **R**, **C**, bajo la operación binaria °, tiene estructura de grupo-cuatro de Klein ("Vierergruppe"), y no de grupo cíclico de cuatro elementos. Piaget lo llamó "el grupo INRC". Consideró que su manejo revela la llegada del pensamiento formal, y que esa estructura profunda regulaba todos los aspectos del pensamiento hipotético-deductivo.

Al leer a Piaget, es fácil confundir las operaciones del grupo, que son unarias, con la operación interna del grupo, que es binaria. Es preferible hablar de "operadores" cuando son unarios, y de "operaciones" cuando son binarias, aunque al hablar con la máxima abstracción, es posible llamar a todas las operaciones "operadores", o a todos los operadores "operaciones", especificando la ariedad o número de argumentos a los que se aplican.

Mantengamos claro que una cosa es el sistema al que pertecen los operadores unarios **I**, **N**, **R**, **C**, que actúan sobre clases de equivalencia de proposiciones; otra las proposiciones mismas, y otra la operación que transforma parejas de operadores unarios en un nuevo operador unario. Así pudimos ver que no bastaban los operadores **I**, **N**, **R**, para que el sistema quedara cerrado bajo la operación de composición. Fue necesario completar los grupos IR e IN con una cuarta operación **C**, que llamamos "correlativización", operación que actúa sobre la forma normal disyuntiva cambiando únicamente las conjunciones por las disyunciones y viceversa, pero dejando intactas las letras proposicionales y sus negaciones.

Como el resultado de aplicar **C** a una forma normal disyuntiva no es en general una forma normal disyuntiva, hay que hablar de clases de equivalencia, y considerar que el operador **C** actúa sobre esas clases de equivalencia. De lo contrario, no habría unicidad del resultado de la aplicación del operador. Tenemos pues, además de los operadores **I** de identificación, **N** de negación, y **R** de reciprocación, un cuarto operador **C** de correlativización.

Queda así completo el gupo INRC de Piaget, uno de los sistemas más sorprendentes que hayan aparecido nunca en la encrucijada de la psicología, la lógica y la epistemología.

Yo lo describiría como aquel sistema matemático que aparece en la psicología, y que ni los matemáticos ni los psicólogos entienden.

Espero que con la explicación dada sí se entienda qué es el grupo INRC, y cómo actúa sobre las proposiciones, o mejor aún, sobre las clases de equivalencia. Recapitulemos en forma un poco más rigurosa la información que tenemos sobre este grupo.

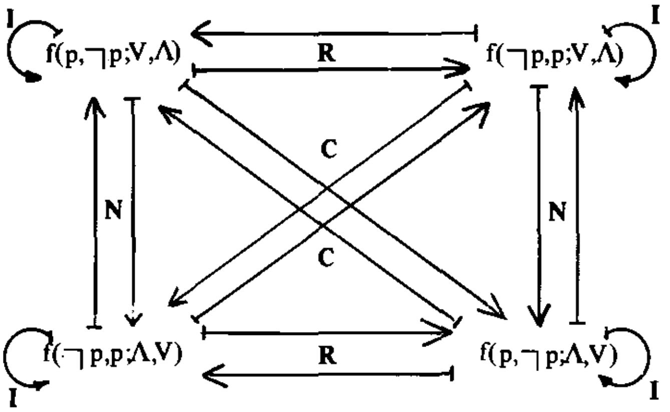
4. Detalles técnicos del grupo INRC

Sea $f(p, \neg p; V, \Lambda)$ la clase de equivalencia de todas las fórmulas bien formadas del cálculo proposional que sean equivalentes (sintáctica o semánticamente) a una forma normal disyuntiva expresada como una disyunción de conjunciones de n términos, cada uno de los cuales puede ser solo una de las letras proposicionales $p = p_1$, $q = p_2$, p_3,.. hasta p_n, en orden alfabético descendente, o su negación (pero no ambas), en la cual disyunción las conjunciones estén también ordenadas en orden lexicográfico descendente, suponiendo que cada letra proposicional p_i sin negación procede a $\neg p_i$.

Debe insistirse en que el símbolo "$f(p, \neg p; V, \Lambda)$" no representa la forma normal disyuntiva misma, sino su clase de equivalencia. Recordemos que el uso de clases de equivalencia es necesario, pues al aplicar esas transformaciones a una forma normal disyuntiva no necesariamente aparece una forma normal disyuntiva, sino que se requerirían tal vez muchas transformaciones para encontrar la forma normal disyuntiva equivalente al resultado inmediato. Además, sin clases de equivalencia no hay un resultado único de la operación. Un artificio que en apariencia evita las clases de equivalencia es el de utilizar el representante canónico de cada clase de equivalencia cuando éste existe y es único. Lo que se presupone es que, dada una fórmula bien formada cualquiera, se busca su clase de equivalencia y se selecciona el representante canónico; después de aplicar la transformación al representante canónico, si el resultado no es un representante canónico, se busca el representante de la clase a la que pertenece el resultado.

Utilizamos el símbolo "$f(p, \neg p; V, \Lambda)$" para mostrar la dependencia que tiene la clase de equivalencia del hecho de tener en cada miembro de la disyunción cada letra proposicional sin negación, o su negación, pero no ambas, y del hecho de que las formas normales disyuntivas tienen a lo más disyunciones y conjunciones; de esta manera, la transformación que intercambia cada letra proposicional que aparece sin negación por su negación, o viceversa, puede indicarse intercambiando el par $p, \neg p$ en el símbolo; la transformación que intercambia conjunciones y disyunciones, intercambiando el par V, Λ en el símbolo, y la transformación combinada, intercambiando ambos pares.

El diagrama del grupo INRC es el siguiente:



Así podemos expresar los cuatro operadores del grupo INRC en la siguiente forma:

I: El operador de **identificación**, u operador **idéntico**, que aplicado a una clase de equivalencia $f(p, \neg p; V, \Lambda)$ lo deja como estaba. El resultado $\mathbf{I}(f(p, \neg p; V, \Lambda))$ es pues la misma clase $f(p, \neg p; V, \Lambda)$, o la **idéntica de** $f(p, -p; V, \Lambda)$:

$\mathbf{I}(f(p, \neg p; V, \Lambda)) = f(p, \neg p; V, \Lambda)$.

N: El operador de **negación**, que aplicado a una clase de equivalencia $f(p, \neg p; V, \Lambda)$ produce la clase de equivalencia de la fórmula resultante de intercambiar cada letra proposicional que aparece sin negación por su negación, y viceversa, y de intercambiar las conjunciones por disyunciones, y viceversa. El resultado $\mathbf{N}(f(p, \neg p; V, \Lambda))$ es pues la clase $f(\neg p, p; \Lambda, V)$, la **negativa** de $f(p, \neg p; V, \Lambda)$:

$\mathbf{N}(f(p, \neg p; V, \Lambda)) = f(\neg p, p; \Lambda, V)$.

R: El operador de **reciprocación**, que aplicado a una clase de equivalencia $f(p, \neg p; V, \Lambda)$ produce la clase de equivalencia de la fórmula que resulta de intercambiar cada letra proposicional que no aparezca negada por su negación, y viceversa. El resultado $\mathbf{R}(f(p, \neg p; V, \Lambda))$ es la clase $f(\neg p, p; V, \Lambda)$: la **recíproca** de $f(p, \neg p; V, \Lambda)$:

$\mathbf{R}(f(p, \neg p; V, \Lambda)) = f(\neg p, p; V, \Lambda)$.

C: El operador de **correlativización**, que aplicado a una clase de equivalencia $f(p, \neg p; V, \Lambda)$ produce la **clase de equivalencia** de la fórmula que resulta de **intercambiar** cada conjunción por una disyunción, y **viceversa**. El resultado $\mathbf{C}(f(p, \neg p; V, \Lambda))$ es la clase $f(p, \neg p; \Lambda, V)$, la **correlativa** de $f(p, \neg p; V, \Lambda)$:

$\mathbf{C}(f(p, \neg p; V, \Lambda)) = f(p, \neg p; \Lambda, V)$.

Volviendo al sencillo ejemplo del timbre que suena y el perro que ladra, tendríamos que la hipótesis inicial que se formula el niño es, en símbolos, $t \rightarrow p$, que es equivalente a una cierta forma normal disyuntiva:

$t \rightarrow p \approx (p \Lambda t) V (p \Lambda \neg t) V (\neg p \Lambda \neg t)$.

La clase de equivalencia puede pues notarse "$[t \rightarrow p]$" o "$[(p \Lambda t) V (p \Lambda \neg t) V (\neg p \Lambda \neg t)]$". Con clases de equivalencia, "$\approx$" puede remplazarse por la igualdad "$=$":

$[t \rightarrow p] = [(p \Lambda t) V (p \Lambda \neg t) V (\neg p \Lambda \neg t)]$.

Así pues, el operador **I** actúa en esta forma sobre la clase de $t \rightarrow p$:

$\mathbf{I}[t \rightarrow p] = \mathbf{I}[(p \Lambda t) V (p \Lambda \neg t) V (\neg p \Lambda \neg t)] =$

$[(p \Lambda t) V (p \Lambda \neg t) V (\neg p \Lambda \neg t)] = [t \rightarrow p]$.

Veamos cómo actúa la negación **N**. Como ya habíamos visto que:

$(\neg p V \neg t) \Lambda (\neg p V t) \Lambda (p V t) \approx (\neg p \Lambda t) \approx (t \Lambda \neg p)$,

la clase de equivalencia es la misma:

$[(\neg p V \neg t) \Lambda (\neg p V t) \Lambda (p V t)] = [(\neg p \Lambda t)] = [(t \Lambda \neg p)]$

Así pues, el operador **N** actúa así sobre la clase de $t \rightarrow p$:

$\mathbf{N}[t \rightarrow p] = \mathbf{N}[(p \Lambda t) V (p \Lambda \neg t) V (\neg p \Lambda \neg t)] =$

$[(\neg p V \neg t) \Lambda (\neg p V t) \Lambda (p V t)] = [(\neg p \Lambda t)] = [(t \Lambda \neg p)]$

La negación de (la clase de equivalencia de) la proposición que dice que si el timbre suena, el perro ladra, es (la clase de equivalencia de) la proposición que dice que el timbre suena y el perro no ladra.

El operador de reciprocación **R** actúa así sobre la clase de $t \rightarrow p$:

$\mathbf{R}[t \rightarrow p] = \mathbf{R}[(p \Lambda t) \vee (p \Lambda \neg t) \vee (\neg p \Lambda \neg t)] =$

$[(\neg p \Lambda \neg t) \vee (\neg p \Lambda t) \vee (p \Lambda t)] =$

$[(p \Lambda t) \vee (\neg p \Lambda t) \vee (\neg p \Lambda \neg t)] = [p \rightarrow t]$.

La reciprocación de (la clase de equivalencia de) la proposición que dice que si el timbre suena, **el perro ladra, es** (la clase de equivalencia de) la **proposición que** dice que si el perro ladra, el timbre **suena.**

El operador de correlativización **C** actúa así sobre la clase de $t \to p$:

$$C[t\to p] = C[p\wedge t) \vee (p\wedge\neg t) \vee (\neg p\wedge t)] = [(p\vee t)\wedge(p\vee\neg t)\wedge(\neg p\vee\neg t)] = [(p\wedge\neg t)].$$

La correlativización de (la clase de equivalencia de) la proposición que dice que si el timbre suena, el perro ladra, es (la clase de equivalencia de) la proposición que dice que el perro ladra y el timbre no suena.

Si recordamos que $\mathbf{R}[t\to p] = [p \to t]$, y que

$$N[p \to t] = N[p\wedge t) \vee (\neg p\wedge t) \vee (\neg p\wedge\neg t)] = [(\neg p \vee\neg t)\wedge(p \vee \neg t)\wedge(p \vee t)] = [(p\wedge\neg t)],$$

podemos comprobar directamente en este caso que:

$$N[p \to t] = N(R[t \to p]) = (N^\circ R)[t \to p] = C[t\to p].$$

Esto vale por supuesto para toda clase de equivalencia, por lo cual escribimos con toda generalidad: $\mathbf{N}^\circ\mathbf{R} = \mathbf{C}$. Igualmente podríamos comprobar que $\mathbf{R}^\circ\mathbf{N} = \mathbf{C}$, y en general, que toda pareja de operadores conmuta, o sea que el grupo INRC es abeliano.

La tabla de Cayley de un grupo finito de operadores es una manera sinóptica de representar los resultados de todas las operaciones de ese grupo en una tabla de doble entrada, en la que se lee el primer operador en la columna de la izquierda, la composición en el vértice superior, el segundo operador en la fila superior, y el resultado en el cuarto vértice del rectángulo así formado.

La tabla de Cayley del grupo INRC de Piaget es la siguiente:

°	I	N	R	C
I	I	N	R	C
N	N	I	C	R
R	R	C	I	N
C	C	R	N	I

Con estos preliminares sobre el grupo INRC de Piaget, pasemos a estudiar los dos nuevos grupos piagetianos que he encontrado en mis investigaciones lógicas.

5. El Grupo IKRC

Tratando de trabajar el grupo INRC con niños y jóvenes, noté que la reciprocación se entiende mucho más fácilmente que la negación, y por supuesto que la correlativización. Mi hipótesis de trabajo es que esta facilidad se debe a que la reciprocación no se sale de la clase de las proposiciones condicionales: la recíproca de una condicional es de nuevo una condicional, mientras que la negativa y la correlativa de una condicional no son condicionales sino conjunciones.

Por lo que he observado en otras investigaciones, esta clase de proposiciones condicionales del cálculo proposicional no es tan clara para los niños como la clase de las instrucciones condicionales, que son las que han estado oyendo desde pequeños. Prefiero pues trabajar con lo que podríamos llamar "cálculo instruccional" en los primeros grados de primaria, y no con el cálculo proposicional que presentan los libros de texto. Pero prescindamos por ahora de este problema.

Dentro del mundo de las condicionales se da además otro problema: el de la secuencia temporal, pues en las condiciones usales, como la que anotamos arriba sobre el timbre que suena y el perro que ladra, hay una demora entre el cumplimiento del antecedente, y la verificación del consecuente. Por lo tanto, la recíproca no puede considerarse simplemente como un cambio de orden de los símbolos: también se cambia la secuencia temporal. (Ver Vasco, C.E., 1983).

El nuevo grupo que encontré actúa únicamente sobre las proposiciones condicionales. El operador inicial es el que se deriva de la transformación de una proposición en su recíproca: $p \to q$ se convierte en $q \to p$ (que también se puede notar "$p \leftarrow q$" cuando se supone conocida la secuencia temporal).

Este grupo actúa pues solo sobre proposiciones cuya conectiva principal es una implicación material $\to$ o su recíproca $\leftarrow$, que en el lenguaje ordinario se podrían leer "si..., entonces..." y "... si..." respectivamente, o de muchas otras maneras equivalentes. A este tipo de proposiciones condicionales las llamaremos simplemente "condicionales".

De nuevo en este caso se deben utilizar clases de equivalencia, aunque ahora mucho más restringidas que las clases de equivalencia sintáctica (o semántica) utilizadas en los otros grupos piagetianos.

Al nuevo tipo de clase de equivalencia de la condicional $p \to q$ la notamos "$\boxed{p \to q}$".

La caja por debajo de la condicional significa que se debe tomar la clase de equivalencia de todas las condicionales que puedan reducirse a ella por eliminación de todas las dobles negaciones. Es necesario utilizar estas clases de equivalencia más restringidas, pues en cálculo proposicional la condicional $p \to q$ es equivalente sintáctica y semánticamente a su contra-recíproca $\neg q \to \neg p$, mientras que al manejar el grupo que encontré, los niños y jóvenes no consideran que sean equivalentes. Mi ejemplo favorito es el siguiente:

Supongamos que el director del coro dice: "Si no llueve, no seguimos cantando", lo que podríamos simbolizar "$\neg ll \to \neg c$". Esa declaración de su intención de aprovechar el día soleado, no es en ninguna forma equivalente a su contra-recíproca "$c \to ll$", o sea "Si seguimos cantando, llueve". Nos habríamos pasado a la mitología criolla sobre los efectos atmosféricos de cantar desafinadamente.

Utilizaremos pues las clases de equivalencia restringidas, en las que las condicionales de la clase difieren a lo más por dobles negaciones, para que las contra-recíprocas no resulten equivalentes.

Conservaremos también la enunciación de la conectiva principal de la condicional original; por eso la recíproca de la condicional "Si p, q" o "$p \to q$", será "Si q, p" o "$q \to p$". (Si la original fuera "p si q" o "$p \leftarrow q$", su recíproca sería "q si p" o "$q \leftarrow p$").

Para no tener que usar clases de equivalencia, se podría de nuevo utilizar como representante canónico de cada clase, la condicional que tenga el mínimo número de negaciones, y asumir que después de aplicar cada transformación, se eliminan todas las dobles negaciones. Pero trabajaremos este grupo con clases de equivalencia restringidas.

Ya sabemos cómo utilizar el operador de reciprocación **R**, y por supuesto, el operador idéntico **I**.

Además de la recíproca de una condicional, los niños hacen una conversión que los lógicos no aceptan: Si el padre les dice algo así como: "Si terminas las tareas, vas a cine", el niño completa mentalmente "y si no, no". Esta coletilla implícita hace que la condicional del padre sea muy fuerte: una verdadera bicondicional.

Ya el Profesor Carlo Federici Casa había notado que los niños distinguen muy bien la "o exclusiva" de la "o inclusiva" en las instrucciones (o mejor, amenazas) disyuntivas que les dan sus padres, y que identifican la primera con la "o del papá", y la segunda con la "o de la mamá". En efecto, si el padre dice: "O comes helado, o tomas gaseosa", el niño sabe muy bien que solo puede elegir una de las dos cosas: la disyunción es fuerte o exclusiva. Pero si es la madre la que dice eso, sabe que si llora lo suficiente, muy probablemente podrá tomar helado y gaseosa: la disyunción es débil o inclusiva.

En la misma forma, encontré que los niños distinguen muy bien la bicondicional, o sea la condicional fuerte o condicional del papá, que se podría codificar "si..., ..., (y si no no)", de la condicional débil o condicional de la mamá, que se codificaría más bien "si..., ..., (y si no, todavía no he resuelto)". Por eso, al oír al padre decir: "Si terminas las tareas, vas a cine", los niños automáticamente concluyen "y si no las termino, no voy". Para que esta transformación sea válida, la conectiva no puede ser la mera implicación material, sino la bicondicional.

Para la conectiva bicondicional o doble implicación material, ni los niños ni ninguna persona normal utiliza la denominación usual entre los matemáticos y los lógicos: "si y solo si". Propongo pues que se use "si..., ..." para leer el símbolo "$\rightarrow$", "...si..." para leer "$\leftarrow$", y "si..., ... y si no no" para leer "$\leftrightarrow$". (Si se quiere enfatizar el orden temporal, puede añadirse una indicación de qué miembro de la condicional debe ocurrir después. Ver Vasco, C.E., 1983).

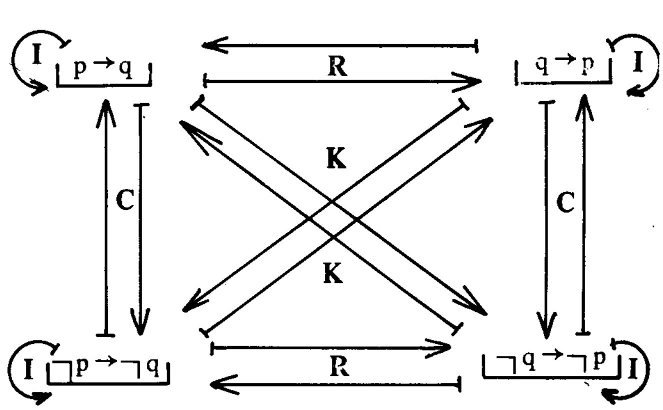
Esa transformación de la proposición: "Si terminas las tareas, vas a cine" (que notamos "$t \rightarrow c$") en su contraria: "Si no terminas las tareas, no vas a cine" (que notamos "$\neg t \rightarrow \neg c$"), define pues un operador sobre clases de equivalencia, el operador de contrariación **C**, ahora diferente de la correlativización del grupo INRC de Piaget.

¿Qué pasa si aplicamos **C** después de **R**, o viceversa? Es la misma pregunta que se hacía **Piaget**, pero ahora con otros operadores.

Ya clásicamente podíamos saber que la contraria de la recíproca se llama la "contra-recíproca". Podíamos pues abreviar $\mathbf{C}^\circ\mathbf{R} = \mathbf{CR}$, pero para no utilizar dos letras, abreviemos "**K**" al operador resultante de aplicar **C** después de **R**: $\mathbf{C}^\circ\mathbf{R} = \mathbf{K}$. Llamémoslo "el operador de contra-reciprocación". Tenemos pues cuatro operadores: **I**, **K**, **R**, **C**. Estos cuatro operadores con la operación binaria de composición o aplicación sucesiva, que notamos "$^\circ$", forman un grupo abeliano, distinto, pero isomorfo al grupo INRC de Piaget. Lo llamo "el grupo IKRC".

6. Detalles técnicos del Grupo IKRC

Con estas observaciones, podemos pasar a describir el diagrama del grupo y los cuatro operadores del grupo IKRC. El diagrama es el siguiente:



Los cuatro operadores **I,K,R,C** pueden explicitarse así:

I: El operador de **identificación**, también llamado "el operador **idéntico**". Sea $\lfloor p \rightarrow q \rfloor$ una clase de equivalencia de condicionales que difieren solo por dobles negaciones. El operador idéntico aplicado a esta clase la deja invariante. El resultado $\mathbf{I}(\lfloor p \rightarrow q \rfloor)$ es la misma clase, o sea la **idéntica** de $\lfloor p \rightarrow q \rfloor$: $\mathbf{I}(\lfloor p \rightarrow q \rfloor) = \lfloor p \rightarrow q \rfloor$.

Para casos particulares, es posible por ejemplo que $p \rightarrow q$ aparezca en la forma $\neg\neg p \rightarrow \neg\neg q$, que no es idéntica a la forma original, pero que ciertamente es equivalente a ella con la relación de equivalencia que estamos utilizando en este contexto, o sea por eliminación de dobles negaciones.

K: El operador de **contra-reciprocación**, que transforma la clase de equivalencia de la condicional $p \rightarrow q$ en la clase de equivalencia de su contra-recíproca $\neg q \rightarrow \neg p$. El resultado $\mathbf{K}(\lfloor p \rightarrow q \rfloor)$ es la **contra-recíproca** de $\lfloor p \rightarrow q \rfloor$:

$$\mathbf{K}(\lfloor p \rightarrow q \rfloor) = \lfloor \neg q \rightarrow \neg p \rfloor$$

R: El operador de **reciprocación**, que transforma la clase de equivalencia de la condicional $p \rightarrow q$ en la clase de equivalencia de su recíproca $q \rightarrow p$. El resultado $\mathbf{R}(\lfloor p \rightarrow q \rfloor)$ es la **recíproca** de $\lfloor p \rightarrow q \rfloor$: $\mathbf{R}(\lfloor p \rightarrow q \rfloor) = \lfloor q \rightarrow p \rfloor$.

C: El operador de **contrariación**, que transforma la clase de equivalencia de la condicional $p \rightarrow q$

en la clase de equivalencia de su contraria $\neg p \rightarrow \neg q$. El resultado $C(\lfloor p \rightarrow q \rfloor)$ es la **contraria** de $\lfloor p \rightarrow q \rfloor$: $C(\lfloor p \rightarrow q \rfloor) = \lfloor \neg p \rightarrow \neg q \rfloor$

La tabla de Cayley del grupo IKRC es la siguiente:

∘	I	K	R	C
I	I	K	R	C
K	K	I	C	R
R	R	C	I	K
C	C	R	K	I

Si cambiamos la **K** por la **N**, volvemos a obtener la misma tabla del grupo INRC. Por eso decimos que la aplicación que envía cada operador **I**, **R**, **C** del grupo IKRC en el que se nota en la misma forma en el grupo INRC, y el operador **K** del grupo IKRC en el operador **N** del grupo INRC es un isomorfismo de grupos, y por lo tanto que los grupos INRC e IKRC son isomorfos.

7. El Grupo INAC

En una investigación patrocinada por COLCIENCIAS y el Colegio de CAFAM, dirigida por Eloísa Vasco, desarrollé una prueba para determinar algunos de los aspectos del pensamiento formal en los adolescentes de ese Colegio, prueba que se ha aplicado después en otras investigaciones sobre pensamiento formal. Una de las dimensiones de la prueba es el manejo de los cuantificadores. (Ver Vasco, E., 1981 y 1983).

La teoría clásica de la cuantificación de las proposiciones de dos términos utilizadas en la silogística, puede resumirse en el famoso cuadro de las oposiciones de la lógica medieval.

En este tipo de proposiciones cuantificadas se consideraron dos aspectos: la cantidad de la proposición (universal o particular) y la calidad de la misma (afirmativa o negativa). Así se codificaron en la lógica medieval los cuatro tipos de proposiciones resultantes, utilizando las dos primeras vocales de los verbos latino "AFFIRMO" y "NEGO", la primera vocal para la universal y la segunda para la particular.

A para la universal afirmativa: Todos los S son P;

I para la particular afirmativa: Algún S es P (o algunos S son P);

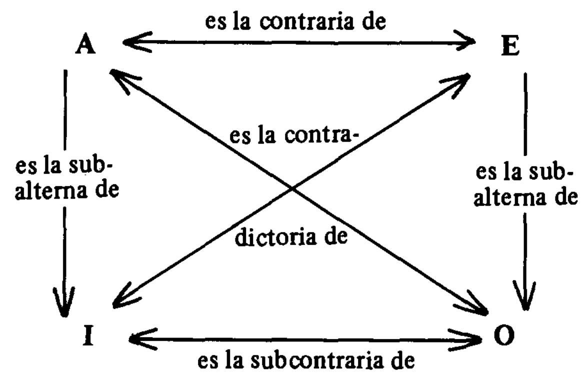
E para la universal negativa: Ningún S es P, y

O para la particular negativa: Algún S no es P (o Algunos S no son P).

El cuadro de las oposiciones empieza por la oposición entre las proposiciones contrarias A y E en el borde superior, y continúa con las contradictorias: A y O por un lado, y E e I por el otro. En efecto, para contradecir a alguien que afirme que todos los S son P (A), basta mostrarle que algún S no es P (O); y para contradecir a quien afirme que ningún S es P (E), basta mostrarle que algún S es P (I).

Para completar el cuadrado de las oposiciones, Pedro Lombardo decidió llamar "subcontrarias" a la I y la O, simplemente porque estaban colocadas debajo de las contrarias. Como no se veía claramente la relación entre la A y la I por un lado, y la E y la O por el otro, tal vez pensando en las jerarquías medievales, se dijo que la I era subalterna de la A, y la O subalterna de la E. La Relación de subcontrariedad se consideraba distinta de la de contrariedad, y la relación de subalternación era claramente unidireccional.

Así, el cuadrado de las oposiciones alcanzó esa forma armónica que ha durado siete siglos.



Si en los últimos grados de primaria se juega con proposiciones cuantificadas de la aritmética y de la geometría, se puede verificar que los niños transforman fácilmente una proposición universal en su contraria, confundiéndola a veces con la negación de la misma.

Se les puede preguntar, por ejemplo, qué es todo lo contrario de "Todos los cuadrados son rectángulos"; o se les puede pedir que se vayan al otro extremo de "Ningún divisor de doce es divisor de nueve".

A través de un juego que hemos llamado "¡A que no me contradice!", en el que se les pregunta qué es lo mínimo necesario que hay que decir para contradecir al profesor, los niños aprenden rápidamente la contradictoria de cualquier proposición de cada uno de los cuatro tipos. No hay nada que les guste más a los alumnos que contradecir al profesor.

Se les puede decir por ejemplo: "Yo digo que todos los números impares son primos. ¡A que no me contradicen!". Si alguien exclama "Ningún impar es primo", se le pide que piense si eso es lo mínimo que hay que decir para contradecir, y se le hace caer en la cuenta de que las dos frases son falsas, y por lo tanto la una no contradice a la otra.

Además de aprender a auto-afirmarse, los niños también aprenden a distinguir la contraria de la contradictoria, y a reconocer la equivalencia entre la negación de una proposición cuantificada y su contradictoria: "No todos los estudiantes pasan el curso" es equivalente a la contradictora de "Todos los estudiantes pasan el curso", que es: "Algunos estudiantes no pasan el curso", **lo mínimo necesario para contradecir a quien afirme que todos pasan.**

Podríamos pues afirmar que estos niños dominan esta transformación de una proposición en su negación o su contradictoria. Podemos pues codificar esa transformación con un operador de negación, que podemos notar con una "**N**", que aplicamos a la clase de equivalencia de las proposiciones lógicamente equivalentes con una dada.

También podemos introducir un operador de contrariación, que podemos notar con una "**C**"; pero tendríamos que ponernos de acuerdo en que este mismo operador transforma la clase de equivalencia de una proposición de tipo I en la correspondiente de tipo O, y viceversa. Así, la contraria de "algunos estudiantes pasan el curso" es "Algunos estudiantes no pasan el curso", y viceversa.

Esta extensión de la relación de contrariedad y del operador de contrariación es una creación conceptual que ocurre por olvido activo de la distinción inicial entre las contrarias y las subcontrarias. Es una típica coordinación de operaciones mentales a la manera piagetiana.

Es posible que los alumnos mismos encuentren que la negación de la negación de una proposición es otra vez equivalente a la original, y que la contraria de la contraria es de nuevo equivalente a la original. Tendríamos pues también el operador idéntico sobre clases de equivalencia restringidas, que podríamos codificar con una "**I**", y podríamos comprobar que **N°N** = **I** y que **C°C** = **I**.

Pero, ¿qué es la negación de la contraria? ¿Y la contraria de la negación? Estas son las preguntas que se hacía Piaget a propósito de las proposiciones del cálculo proposicional. Pero ahora estamos en el cálculo de predicados. En él nos encontramos con la misma dificultad de antes: los niños parecen poder manejar el grupo IN y el grupo IC, pero no pueden completar todo el sistema.

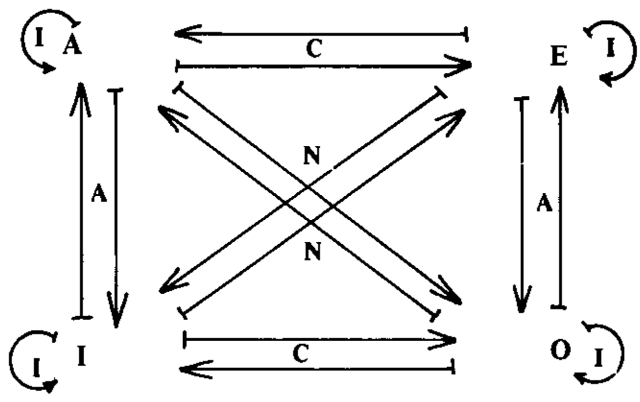
Con un poco de exploración, al aplicar repetidamente la negación y la contrariación en cualquier orden, es posible encontrar que las proposiciones de tipo A alternan con las de tipo I, y las de tipo E con las de tipo O. Tendríamos pues una transformación que podríamos llamar "alternación", y un nuevo operador de alternación sobre clases de equivalencia restringidas que podemos notar con una "**A**" (que no debe confundirse con la A del tipo universal afirmativo).

Se trata de la creación de una nueva relación de alternancia y de un nuevo operador de alternación, que hace reversible la anterior relación unidireccional de subalternancia, y que hace invertible el operador que transforma una proposición universal en su subalterna. Es un típico caso de reversibilidad de las operaciones mentales, precisamente de la manera postulada por Piaget.

Si superamos pues las relaciones estáticas, y pensamos en transformaciones activas, coordinadas y reversibles, la jerarquía medieval de las oposiciones se torna viva y dinámica, y aparece un grupo formado por los cuatro operadores **I, N, A, C,** bajo la operación binaria de composición o aplicación sucesiva, que notamos "°". A este grupo lo he llamado "el grupo INAC".

8. Detalles técnicos del grupo INAC.

El diagrama del grupo es el siguiente:



Cada una de las mayúsculas grandes en negrilla representa una clase de equivalencia compuesta por todas las fórmulas equivalentes a una fórmula cuantificada de dos términos del tipo respectivo (A, E, I, O), escrita en su forma normal.

Llamemos "Q" al cuantificador, que debe ser sólo uno de los siguientes: $\forall x$ para el tipo A, $\exists x$ para el tipo I, $\neg\exists x$ para el tipo E, $\neg\forall x$ para el tipo O. Llamemos "s" al sujeto S(x), "p" al predicado P(x), y omitamos la conectiva respectiva, que debe ser la $\rightarrow$ para los tipos A, O, en los que figura una $\forall$, y la $\wedge$ para los tipos I, E, en los que figura una $\exists$. Con esas convenciones, podemos abreviar todas las formas normales con el símbolo "Qsp".

Pero no debe olvidarse que las formas normales son:

Para el tipo A: $\forall x\ (S(x) \rightarrow P(x))$:	Asp.
Para el tipo I: $\exists x\ (S(x) \wedge P(x))$:	Isp.
Para el tipo E: $\neg\exists x\ (S(x) \wedge P(x))$:	Esp.
Para el tipo O: $\neg\forall x\ (S(x) \rightarrow P(x))$:	Osp.

Ordinariamente para el tipo O se considera la forma $\exists x\ (S(x) \wedge \neg P(x))$, que es equivalente a la última, pero que en esta convención no estaría en forma normal. Por eso hay que usar clases de equivalencia, o transformar primero la proposición cuantificada inicial en el representante canónico de su clase de equivalencia, aplicar luego la transformación, y volver a transformar el resultado en el representante canónico de su clase de equivalencia, que en este caso es la forma normal del resultado de la transformación. Escribamos pues [Qsp] para la clase de equivalencia de la proposición cuantificada Qsp.

Después de estas observaciones preliminares podemos representar los operadores del grupo INAC en la siguiente forma:

I: El operador de **identificación**, también llamado "el operador **idéntico**", que no hace nada al argumento [Qsp]. El resultado **I**[Qsp] es la misma clase [Qsp], o la **idéntica** de [Qsp]: **I**[Qsp] = [Qsp].

N: El operador de **negación**, que en este caso es el mismo operador de **contradicción**, que aplicado a la clase de equivalencia de cualquier proposición cuantificada Qsp, la transforma en la de su negativa o su contradictoria, es decir, en la de la proposición mínima que contradice la proposición inicial Qsp; en efecto, esta es $\neg$Qsp o su forma normal equivalente, que es la negativa de Qsp.

El resultado **N**[Qsp] es la **negativa** de [Qsp], que es lo mismo que la **contradictoria** de [Qsp]: **N**[Qsp] = [$\neg$Qsp].

A: El operador de **alternación**, que intercambia los dos tipos afirmativos entre sí (A con I e I con A), y los dos tipos negativos entre sí (E con O y O con E).

El operador de alternación transforma la cantidad, pero no la calidad de Qsp. El resultado **A**[Qsp] es la **alterna** de [Qsp].

Clásicamente, la I se llamaba "la **subalterna** de A", y la O se llamaba "la **subalterna** de E", pues se consideraba solo una relación unidireccional. En el nuevo grupo, la relación de alternancia ha sido simetrizada activamente.

C: El operador de **contrariación**, que transforma la calidad, pero no la cantidad de Qsp, intercambiando los dos tipos universales entre sí (A con E y E con A), y los dos tipos particulares entre sí (I con O y O con I). El resultado C[Qsp] es la **contraria** de [Qsp].

Clásicamente, la relación entre la A y la E se consideraba diferente de la relación entre la I y la O. La A y la E se llamaban "**contrarias**", y la I y la O se llamaban "**subcontrarias**". En el nuevo grupo, la relación de contrariedad ha sido extendida activamente.

La tabla de Cayley del grupo INAC es la siguiente:

o	I	N	A	C
I	I	N	A	C
N	N	I	C	A
A	A	C	I	N
C	C	A	N	I

Si cambiamos la **A** por la **R**, volvemos a obtener la tabla del grupo INRC. Este grupo INAC es por lo tanto distinto del grupo INRC, pero isomorfo al mismo.

9. Conclusión

Hemos encontrado pues que las transformaciones que pueden hacer los niños y adolescentes sobre proposiciones condicionales y cuantificadas, pueden codificarse rigurosamente como dos nuevos grupos de cuatro operadores, ambos con la misma estructura de grupo-cuatro de Klein ("Vierergruppe"), y por lo tanto isomorfos con el grupo INRC de Piaget.

Hemos comprobado como lo hizo Piaget la misma facilidad de manejo de un solo operador que tienen los niños, y la misma dificultad en coordinar dos de los operadores para obtener el operador idéntico y el cuarto operador del grupo. Una vez obtenido activamente ese cuarto operador, el sistema se cierra, y adquiere esa estabilidad o equilibrio que, según Piaget, caracteriza el pensamiento formal.

No pretendemos por supuesto que los niños y adolescentes puedan formular explícitamente los operadores y distinguir claramente las proposiciones de sus clases de equivalencia, pero hemos comprobado también que muchos adultos que ciertamente son pensadores formales tienen serias dificultades para captar las distinciones entre los operadores y las relaciones correspondientes, entre las operaciones mismas y sus resultados, entre los operadores sobre proposiciones y sobre clases de equivalencia, etc. Tal vez por eso las exposiciones sobre el grupo de Piaget adolecen de tan serios defectos, y producen reacciones negativas entre los matemáticos y entre los piscólogos, en lugar de despertar la admiración y el placer estético que se merece el grupo INRC.

El dominio de estos tres grupos piagetianos, el INRC, el IKRC y el INAC, puede no ser el aspecto más importante del pensamiento formal, pero ciertamente revela una capacidad de juego lógico con proposiciones cuyo contenido no es importante para el juego, y cuyo valor de verdad puede ser desconocido o aun contrafáctico, capacidad que bien puede llamarse con justicia "pensamiento formal".

Al menos, quienes han tenido la paciencia de seguir en forma comprensiva este discurso (y digo "comprensiva" en todos los sentidos de la palabra), ciertamente deben clasificarse (y eso también en varios sentidos de la palabra), como pensadores formales.

BETH, E.W. y PIAGET, J. (1968). *Relaciones entre la lógica formal y el pensamiento real.* Madrid: Ciencia Nueva. [Original francés. París, PUF, 1961].

DEL VAL, J.A. (Ed.) (1977). *Investigaciones sobre lógica y psicología.* Madrid: Alianza Editorial.

FLAVELL, J.H. (1978). *La psicología evolutiva de Jean Piaget.* (5a. edición). Buenos Aires: Paidós. [Original inglés. Princeton, NJ: Van Nostrand, 1963].

GRUBER, H.E. & VONECHE, J.J. (Eds.). (1977). *The essential Piaget.* New York: Basic Books.

INHELDER, B. y PIAGET, J. (1972). *De la lógica del niño a la lógica del adolescente.* Buenos Aires: Paidós. [Original francés. París: PUF, 1955].

MUSSEN, P.H. (Ed.) (1983). *Handbook of Child Psychology.* (4th edition). (4 vols.). New York: John Wiley & Sons.

PIAGET, J. (1980). *Problemas de Psicología Genética* (4a. edición). Barcelona, etc.: Ariel. [Original francés. París: Denoël-Gonthier, 1972].

PIAGET, J. e INHELDER, B. (1980). *Psicología del niño.* (9a. edición). Madrid: Morata. [Original francés: París: PUF, 1966].

VASCO, C.E. (1983). "Conectivas secuenciales y la formalización del lenguaje ordinario". *Matemática-Enseñanza Universitaria,* n. 22, 12-23.

VASCO, E. (1981). *El desarrollo del pensamiento abstracto en una población de estudiantes de secundaria en Bogotá.* (Tesis doctoral). Fort Lauderdale, FL/Bogotá, D.E. Nova University/CINDE. [Proyecto COLCIENCIAS 97259-5-01-79].

VASCO, E. (1983). "El desarrollo del pensamiento abstracto en una población de estudiantes de secundaria en Bogotá". *Encuentros (CAFAM),* **1**, 63-85.