CONFIGURACIONES SEMIPITAGORICAS

Estudio sobre algunas figuras geométricas cuyos lados se miden en números enteros.

Por EDUARDO A. CARO

RESUMEN

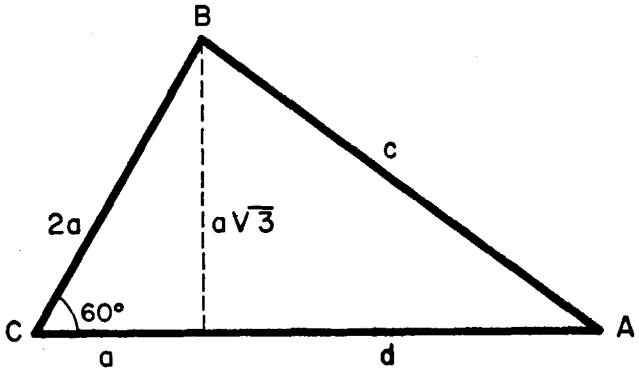
Con la lectura del siguiente trabajo su autor, el profesor Eduardo Caro Cayzedo, dio cumplimiento al requisito reglamentario para asumir su cargo de miembro correspondiente de la Academia. En él se estudian aquellos triángulos que tienen un ángulo de 60° y cuyos lados son todos números enteros (para los que se propone el nombre de semipitagóricos por analogía con los rectángulos similares) y se llega a la conclusión de que estos lados deben satisfacer la ecuación diofántica $3a^2 + b^2 = c^2$ de la que se hallan sus soluciones en forma paramétrica y esta solución se generaliza a la de las ecuaciones $Ax^2 + y^2 = z^2$ y $x^2 \pm Bxy + y^2 = z^2$. Luego se investigan aquellos paralelogramos en los que sus lados y sus diagonales se pueden expresar también en números enteros y se resuelve la ecuación diofántica asociada a tales figuras $x^2 + y^2 = 2\ (z^2 + w^2)$ y por último se tabulan algunas de las primeras soluciones de los triángulos y paralelogramos de las características anteriormente anotadas.

CONFIGURACIONES SEMIPITAGORICAS

Hace ya algunos años que, durante una de mis clases de Trigonometría, propuse a uno de mis estudiantes la solución de un triángulo de lados 5, 7 y 8, cifras escogidas sin otro propósito que el de no alargar innecesariamente los cálculos en el tablero; para sorpresa mía, ya que no de mis alumnos, uno de los ángulos de este triángulo resultó ser de 60° exactamente.

Al terminar la clase me pregunté si, a semejanza de los pitagóricos, no existiría también una familia de triángulos (que llamaré semipitagóricos) con un ángulo de 60° y cuyos lados fueran todos números enteros. Este trabajo es la respuesta a esa pregunta.

La primera idea fue la de subdividir el triángulo pedido en dos rectángulos, uno de ellos con el ángulo de 60°, cuyos ángulos fueran por lo



tanto a, $a\sqrt{3}$ y $2a$ y el otro con lados $a\sqrt{3}$, d y c que deberían cumplir la condición

$$(a\sqrt{3})^2 + d^2 = c^2$$

o sea

$$3a^2 + d^2 = c^2$$

El problema dependía pues en la solución de esta última ecuación diofántica para lo cual intenté una modificación de un método sugerido por B. L. van der Waerden (Science Awakening), como el utilizado por los matemáticos babilonios para hallar ternas de números pitagóricos que utilizaban para la construcción de sus tablas trigonométricas y que es como sigue:

Sea la ecuación:

$$3a^2 + d^2 = c^2$$

$$3a^2 = c^2 - d^2$$

$$3 = \left(\frac{c}{a}\right)^2 - \left(\frac{d}{a}\right)^2$$

$$3 = \left(\frac{c+d}{a}\right)\left(\frac{c-d}{a}\right)$$

Siendo a, d y c números enteros, los dos factores del segundo miembro de la última igualdad serán entonces números racionales y podremos por lo tanto sustituir

$$\frac{c+d}{a} = \frac{3m}{n} \qquad \frac{c-d}{a} = \frac{n}{m}$$

en donde m y n son nuevamente números enteros. De estas dos ecuaciones, por suma y resta encontramos:

$$\frac{c}{a} = \frac{1}{2}\left(\frac{3m}{n} + \frac{n}{m}\right) = \frac{3m^2 + n^2}{2mn}$$

$$\frac{d}{a} = \frac{1}{2}\left(\frac{3m}{n} - \frac{n}{m}\right) = \frac{3m^2 - n^2}{2mn}$$

y por lo tanto

$$a = 2kmn$$
$$d = k\ (3m^2 - n^2)$$
$$c = k\ (3m^2 + n^2)$$

(Otra sustitución posible es:

$$\frac{c+d}{a} = \frac{m}{n} \qquad \frac{c-d}{a} = \frac{3n}{m}$$

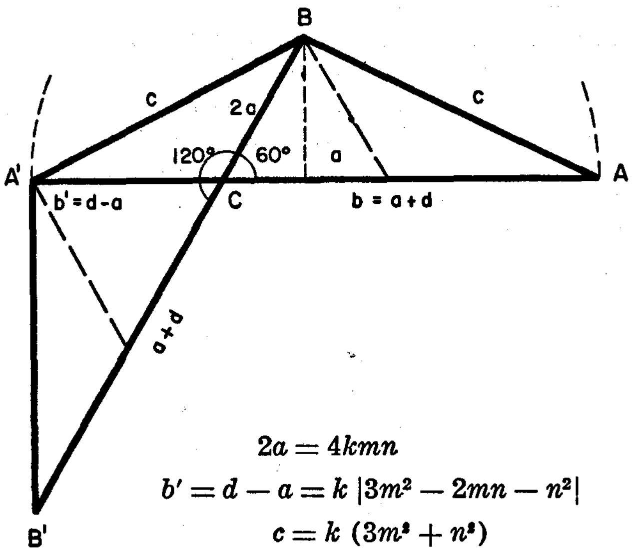
que, tratada en la misma forma, conduce al resultado $a = 2kmn$, $d = k\ (m^2 - 3n^2)$, $c = k\ (m^2 + 3n^2)$, esencialmente igual a la anterior).

Estos resultados nos dan, inmediatamente la solución del triángulo original:

$$\left|\begin{array}{l} 2a = 4kmn \\ b = a + d = k\ |3m^2 + 2mn - n^2| \\ c = k\ (3m^2 + n^2). \end{array}\right.$$

Las soluciones serán primitivas, es decir, en enteros primos entre sí, si $k = 1$, m y n primos entre sí y de diferente paridad y n no es múltiplo de 3.

Puede verse fácilmente que una solución de este tipo (con $C > 2a$) conduce a la de otro triángulo, de lados también enteros y con un ángulo de 120° cuyos lados son:



$$2a = 4kmn$$
$$b' = d - a = k\ |3m^2 - 2mn - n^2|$$
$$c = k\ (3m^2 + n^2)$$

y este triángulo, a su vez, a otro triángulo con un ángulo de 60° cuyos lados son:

$$b' = d - a = k\ |3m^2 - 2mn - n^2|$$
$$a' = d + a = k\ |3m^2 + 2mn - n^2| = b$$
$$c = \qquad k\ (3m^2 + n^2)$$

Así, por ejemplo, en el caso en que $k = 1$, $m = 1$, $n = 2$, tendremos:

$$\begin{array}{lll} 2a = 4mn & = & 8 \\ b = 3m^2 + 2mn - n^2 & = & 3 \\ b' = |\,3m^2 - 2mn - n^2\,| & = & 5 \\ c = 3m^2 + n^2 & = & 7 \end{array}$$

en donde aparece, de nuevo, el triángulo 5, 7, 8, origen del problema, y los triángulos 3, 7, 8 con un ángulo de 60° y 3, 5, 7 con uno de 120°.

Al final de este trabajo damos una tabla con algunos triángulos de este tipo; por último y como curiosidad es posible continuar el dibujo anterior hasta obtener la figura de la página siguiente donde todos los segmentos miden 3, 5, 7 u 8 unidades:

El procedimiento empleado atrás para resolver, en enteros, la ecuación $3a^2 + d^2 = c^2$ puede generalizarse fácilmente para resolver la ecuación más general $Ax^2 + y^2 = z^2$, donde A es en general un número entero pero podría ser racional, así:

$$Ax^2 + y^2 = z^2$$

$$Ax^2 = z^2 - y^2 = (z + y)\ (z - y)$$

$$A = \left(\frac{z}{x} + \frac{y}{x}\right)\left(\frac{z}{x} - \frac{y}{x}\right)$$

Tomemos dos números r y s, cuyo producto sea A ($rs = A$ en donde r puede valer 1 y s valer A) y m y n otros dos números enteros; podremos entonces hacer

$$\frac{z}{x} + \frac{y}{x} = \frac{rm}{n}$$

$$\frac{z}{x} - \frac{y}{x} = \frac{sn}{m} \qquad \left(\frac{rm}{n} \times \frac{sn}{m} = rs = A\right)$$

de donde, por suma y resta, obtenemos:

$$\frac{z}{x} = \frac{1}{2}\left(\frac{rm}{n} + \frac{sn}{m}\right) = \frac{rm^2 + sn^2}{2mn}$$

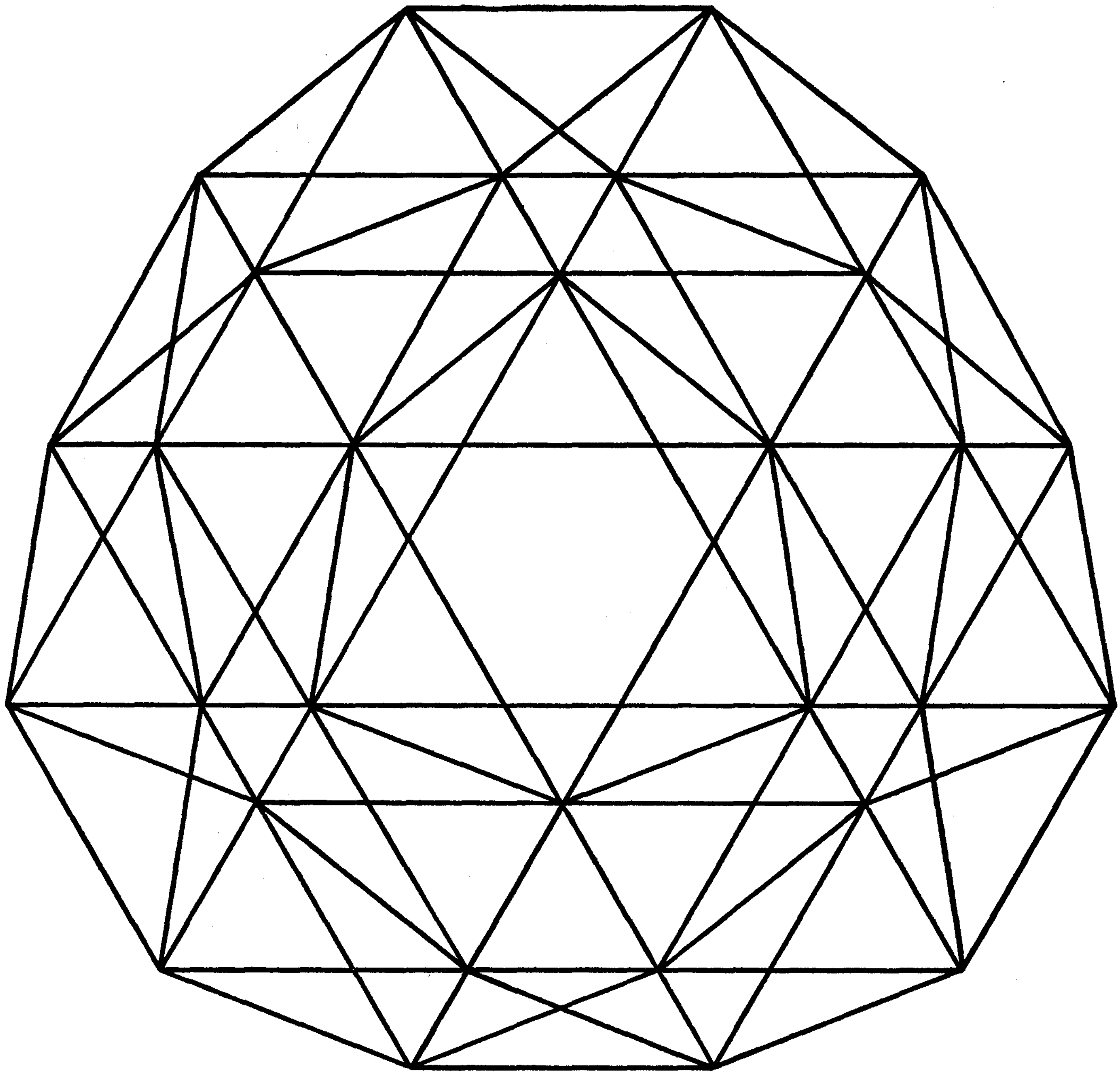
$$\frac{y}{x} = \frac{1}{2}\left(\frac{rm}{n} - \frac{sn}{m}\right) = \frac{rm^2 - sn^2}{2mn}$$

y, finalmente:

$$x = k\ \ 2mn$$
$$y = k\ |rm^2 - sn^2|$$
$$z = k\ (rm^2 + sn^2)$$

En estas fórmulas se toma el valor absoluto de y porque esta letra figura al cuadrado en la ecuación que tratamos de resolver:

Las soluciones serán primitivas si hacemos $k = 1$ y si m y n, r y n, s y m son primos entre sí.



Además si A, y por *consiguiente* r y s son impares, una de las cantidades m o n deberá ser par ya que, si ambas son impares las soluciones halladas contendrán el factor 2 y las soluciones primitivas procederán de las fórmulas:

$$x = mn \quad y = \left| \frac{rm^2 - sn^2}{2} \right| \quad z = \frac{rm^2 + sn^2}{2}$$

Por ejemplo, si se trata de resolver

$$6x^2 + y^2 = z^2$$

con $k = 1$ $r = 1$ $s = 6$ $m = 5$ $n = 3$

se tendrá $6 \times 30^2 + 29^2 = 79^2$

con $k = 1$ $r = 6$ $s = 1$ $m = 5$ $n = 3$

se tendrá $6 \times 30^2 + 141^2 = 159^2$

con $k = 1$ $r = 2$ $s = 3$ $m = 5$ $n = 3$

se tendrá $6 \times 30^2 + 23^2 = 77^2$

y con $k = 1$ $r = 3$ $s = 2$ $m = 5$ $n = 3$

obtenemos $6 \times 30^2 + 57^2 = 93^2$

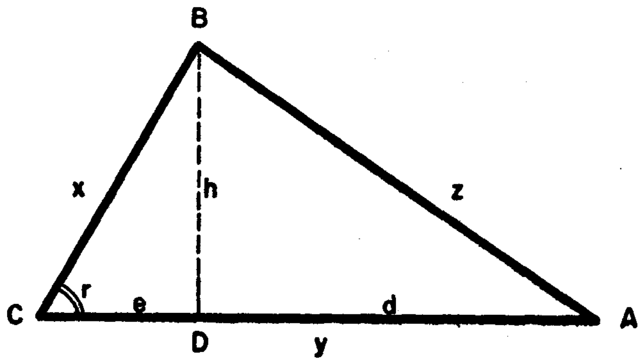
esta última solución no es primitiva porque $r = 3$ divide a $n = 3$; eliminando factores tendremos $6 \times 10^2 + 19^2 = 31^2$; que procede de hacer $k = 1$ $r = 6$ $s = 1$ $m = 1$ $n = 5$.

Una segunda idea para atacar el problema del triángulo semipitagórico de 60° sería tratarlo como un caso del teorema del coseno

$$a^2 + b^2 - 2ba \cos 60° = c^2$$

o sea $a^2 + b^2 - ab = c^2$ porque $\cos 60° = \frac{1}{2}$.

No estudiaremos aquí la solución de este caso particular sino que la generalizaremos a aquel en que $\cos r$ sea un número racional $\frac{p}{q}$ cualquiera, es decir, a la de la ecuación $x^2 + y^2 - Bxy = z^2$ con la restricción de que B sea racional y menor, en valor absoluto que 2.



En estas condiciones el problema es equivalente a buscar los lados enteros, de un triángulo ABC en el que $\cos r = \dfrac{B}{2} = \dfrac{p}{q}$;

Si hacemos $e = pf$ y $x = qf$

$$\text{tendremos} \quad h = \sqrt{x^2 - e^2} = f\sqrt{q^2 - p^2}$$
$$\text{y como} \quad h^2 + d^2 = z^2 \qquad (\Delta BDA)$$
$$\text{se deduce} \quad (q^2 - p^2)\ f^2 + d^2 = z^2$$

que es la ecuación que resolvimos atrás, con

$$q^2 - p^2 = A \qquad f = 'x' \qquad d = 'y'$$

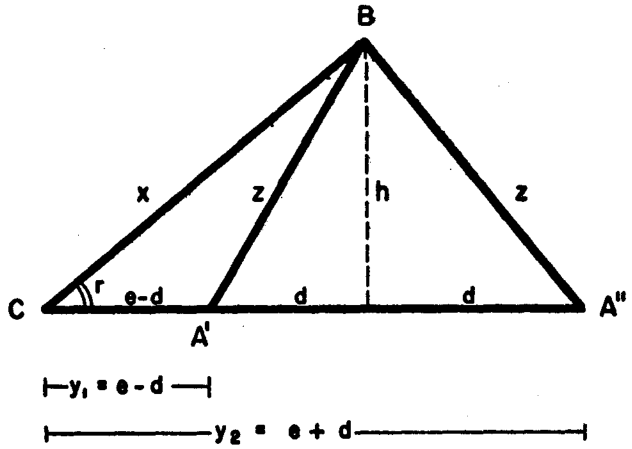
por lo tanto, si $rs = q^2 - p^2$ tendremos:

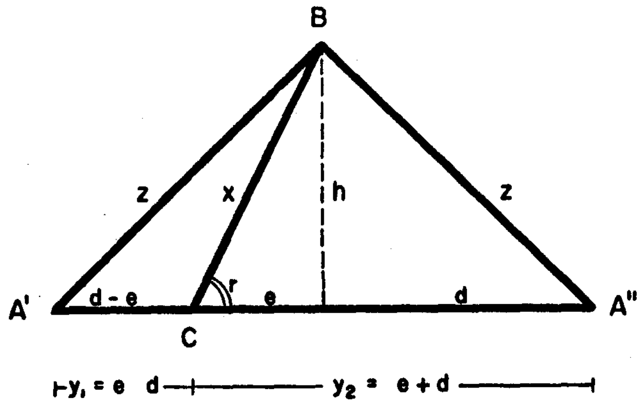
$$f = 2kmn$$
$$d = k\ |rm^2 - sn^2|$$

$$z = k\ (rm^2 + sn^2) \qquad \text{de donde:}$$
$$x = qf = 2kqmn$$
$$y = pf \pm d = k\ |2pmn \pm (rm^2 - sn^2)\ |$$

en el valor de y se utiliza el doble signo $\pm$ porque, según que d sea menor, mayor o igual a e se obtendrán dos soluciones para el caso:

$x^2 + y^2 - Bxy = z^2$ o una para este caso y la segunda para $x^2 + y^2 + Bxy = z^2$, o una sola para el primer caso.





Por ejemplo, sea $x^2 + y^2 - \dfrac{2}{3}xy = z^2$, en este caso $\cos r = \dfrac{B}{2} = \dfrac{1}{3}$ de donde $p = 1$ $q = 3$

$q^2 - p^2 = 8$ y $8f^2 + d^2 = z^2$ $\qquad k = 1 \qquad f = 2mn$

$d = |8m^2 - n^2|$.

$$z = 8m^2 + n^2$$
$$x = 3 . 2mn = 6mn$$
$$y = |\ 2mn \pm (8m^2 - n^2)\ |$$

que en el caso $m = 1$ $n = 2$ nos dan:

$$x = 12 \quad y = 4 \pm 4 = \begin{cases} 8 \\ 0 \end{cases} \quad z = 8 + 4 = 12$$

solución no primitiva y única que reducida nos da:

$$3^2 + 2^2 - \frac{2}{3} . 2 . 3 = 3^2$$

$$\text{Si } m = 2 \quad n = 1$$

$$x = 12 \quad y = |4 \pm 31| = \begin{cases} 35 \\ 27 \end{cases} \quad z = 32 + 1 = 33$$

$$\text{de donde:} \quad 12^2 + 35^2 - \frac{2}{3} . 12 . 35 = 33^2$$

$$\text{y:} \quad 12^2 + 27^2 + \frac{2}{3} . 12 . 27 = 33^2$$

una solución para cada uno de los dos casos

y si $\quad m = 1 \quad n = 3$

$$x = 18 \quad y = 6 \pm 1 = \begin{cases} 5 \\ 7 \end{cases} \quad z = 8 + 9 = 17$$

$$\text{de donde:} \quad 18^2 + 5^2 - \frac{2}{3} . 18 . 5 = 17^2$$

$$\text{y:} \quad 18^2 + 7^2 - \frac{2}{3} . 18 . 7 = 17^2$$

dos soluciones para el primer caso.

Lo interesante de esta solución es que como en el caso de que se elimine la restricción de que

$|B| < 2$ y por lo tanto el raciocinio por comparación con un triángulo deje de ser válido, el procedimiento formal, puramente numérico, sigue sirviendo (con pequeñas variaciones) y continúa proporcionando soluciones como se puede ver en el ejemplo siguiente:

Sea la ecuación $x^2 + y^2 - 3xy = z^2$ (en este caso $\cos r = \frac{3}{2} - \frac{p}{q}$, trigonométricamente imposible) haciendo

$$x = qf = 2f$$

$$e = pf = 3f \qquad \text{obtenemos:}$$

$$h = \sqrt{q^2 - p^2} \quad f = \sqrt{-5f} \quad \text{(imaginario)}$$

continuando:

$$h^2 + d^2 = z^2$$

$$-5f^2 + d^2 = z^2 \qquad \text{y trasponiendo } 5f^2$$

$$5f^2 + z^2 = d^2$$

obteniendo la ecuación original pero con c y d intercambiados, entonces:

$$f = 2mn \qquad (k = 1)$$

$$d = 5m^2 + n^2$$

$$z = 5m^2 - n^2$$

$$y = 3f \pm d = 6mn \pm (5m^2 + n^2)$$

$$x = 2f = 4mn.$$

Y como casos particulares:

$$m = 1 \qquad n = 2$$

$$x = 8 \qquad y = \begin{cases} 3 \\ 21 \end{cases} \qquad z = 1$$

$$8^2 + 3^2 - 3.8.\ 3 = 1^2$$

$$8^2 + 21^2 - 3.8.21 = 1^2$$

$$m = 2 \qquad n = 1$$

$$x = 8 \qquad y = \begin{cases} -9 \\ 33 \end{cases} \qquad z = 19$$

$$8^2 + 9^2 + 3.8.\ 9 = 19^2$$

$$8^2 + 33^2 - 3.8.33 = 19^2$$

$$m = 2 \qquad n = 3$$

$$x = 24 \qquad y = \begin{cases} 7 \\ 65 \end{cases} \qquad z = 11$$

$$24^2 + 7^2 - 3.24.\ 7 = 11^2$$

$$24^2 + 65^2 - 3.24.65 = 11^2$$

$$m = 3 \qquad n = 2$$

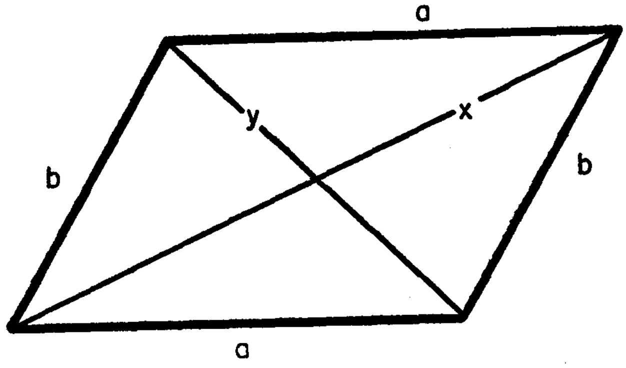
$$x = 24 \qquad y = \begin{cases} -13 \\ 85 \end{cases} \qquad z = 41$$

$$24^2 + 13^2 + 3.24.13 = 41^2$$

$$24^2 + 85^2 - 3.24.85 = 41^2$$

En donde, en algunos de los ejemplos, aparecieron soluciones de $x^2 + y^2 + Bxy = z^2$.

Un segundo problema, análogo al anterior es el de encontrar aquellos paralelogramos en los que, tanto los lados como las diagonales sean números enteros.



en este caso, si a y b son los lados y x las diagonales deberá cumplirse que

$$2\,(a^2 + b^2) = x^2 + y^2$$

Y además podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $a \geqslant b$ y $x \geqslant y$ y estas cantidades deberán cumplir, además, con las desigualdades del triángulo, que podemos resumir en

$$a + b > x \geqslant y > a - b$$

desigualdades que eliminan, inmediatamente la solución

$$2\,(a^2 + b^2) = (a + b)^2 + (a - b)^2$$

ya que en este caso $a + b = x$ $a - b = y$ en contradicción con las desigualdades anteriores; pero sugiriendo, al mismo tiempo que de existir valores de x, y diferentes de éstos deberemos tener

$$x^2 + y^2 = (a + b)^2 + (a - b)^2 = 2\,(a^2 + b^2)$$

es decir, que deberemos buscar dos parejas de números cuyos cuadrados tengan la misma suma, que es exactamente lo que ocurre en la conocida igualdad:

$$(m^2 + n^2)\ (p^2 + q^2) =$$

$$= (mp + nq)^2 + (mq - np)^2 =$$

$$= (mq + np)^2 + (mp - nq)^2$$

por medio de la cual podemos encontrar cantidades a, b, c y d tales que:

$$2\,(a^2 + b^2) = (a + b)^2 + (a - b)^2$$

$$2\,(c^2 + d^2) = (c + d)^2 + (c - d)^2$$

en las que no se cumplen las condiciones necesarias para formar el paralelogramo semipitagórico buscado pero en las que, mediante un intercambio de los segundos miembros, obtenemos:

$$2\,(a^2 + b^2) = (c + d)^2 + (c - d)^2$$

$$2\,(c^2 + d^2) = (a + b)^2 + (a - b)^2$$

dos nuevas igualdades de las que una corresponderá siempre a uno de los paralelogramos que tratábamos de encontrar.

Por ejemplo: si $m = 4$ $n = 3$ $p = 2$ y $q = 1$ tendremos:

$$a = mp + nq = 4.2 + 3.1 = 11$$

$$b = |mq - np| = |4.1 - 3.2| = 2$$

$$c = mq + np = 4.1 + 3.2 = 10$$

$$d = |mp - nq| = 4.2 - 3.1 = 5$$

de donde:

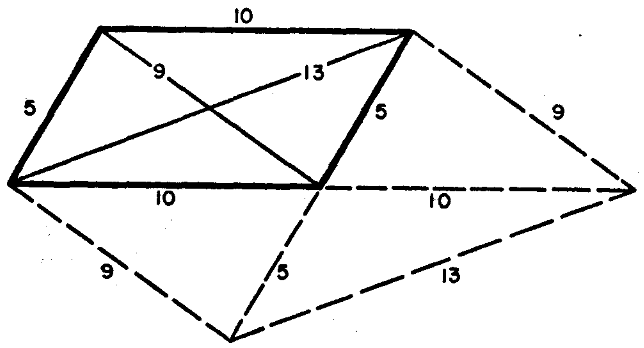
$$2\,(11^2 + 2^2) =$$

$$(10 + 5)^2 + (10 - 5)^2 \qquad 11 + 2 < 15$$

$$2\,(10^2 + 5^2) =$$

$$(11 + 2)^2 + (11 - 2)^2 \qquad 10 + 5 > 13$$

Y esta última igualdad nos da el paralelogramo $a = 10$ $b = 5$ $x = 13$ $y = q$, que, a su vez, genera el $a' = 13$ $b' = 9$ $x' = 20$ $y' = 10$, como se ve en la figura:



Las fórmulas así obtenidas (y que se reproducen en el apéndice) son innecesariamente complicadas ya que dependen de cuatro parámetros; otras, más simples, con solo tres se obtienen como sigue:

de $2\,(a^2 + b^2) = 2\,(c^2 + d^2)$ se deduce

$$a^2 - c^2 = d^2 - b^2$$

$$(a + c)\,(a - c) = (d + b)\,(d - b)$$

y sustituyendo:

$$pq \times r = p \times qr = pqr$$

obtenemos:

$$a = \frac{1}{2}(pq + r) \qquad b = \frac{1}{2}(p - qr)$$

$$c = \frac{1}{2}(pq - r) \qquad d = \frac{1}{2}(p + qr)$$

de donde, eliminando el factor $\frac{1}{2}$, una de las dos expresiones

$$(a + b)^2 + (a - b)^2 = 2\,(c^2 + d^2)$$

$$(c + d)^2 + (c - d)^2 = 2\,(a^2 + b^2)$$

corresponde a un paralelogramo semipitagórico.

Por ejemplo, con:

$$p = 1 \quad q = 2 \quad r = 7 \quad a = 9 \quad b = 13 \quad c = 5 \quad d = 15$$

obtenemos $10^2 + 20^2 = 2\,(9^2 + 13^2)$

del que se deduce $2\,(5^2 + 10^2) = 9^2 + 13^2$

que fue el ejemplo anterior.

APENDICE

Resumen de los resultados obtenidos:

1º La ecuación $Ax^2 + y^2 = z^2$

donde $A \neq u^2$ y $A = rs$

admite las soluciones en enteros dadas por

$$x = 2\,kmn$$

$$y = k\,|rm^2 - sn^2|$$

$$z = k\,(rm^2 + sn^2)$$

éstas serán primitivas si $k = 1$ y r y n, s y m, m y n son primos entre sí y no todos impares. Si A es impar y m y n también lo son las soluciones halladas serán dobles de otras primitivas.

2º La ecuación $x^2 + y^2 \pm Bxy = z^2$

a) donde $|B| < 2$ $B = \dfrac{2p}{q}$. $rs = p^2 - q^2$

tiene como soluciones:

$$x = 2\,kqmn$$

$$y = k\,[2\,pmn \pm (rm^2 - sn^2)]$$

$$z = k\,(rm^2 + sn^2)$$

b) y si $|B| > 2$ $B = \dfrac{2p}{q}$ $rs = p^2 - q^2$

tiene como soluciones:

$$x = 2\,kqmn$$

$$y = k\,[2\,pmn \pm (rm^2 + sn^2)]$$

$$z = k\,(rm^2 - sn^2)$$

3º La ecuación $2\,(a^2 + b^2) = x^2 + y^2$ tiene como soluciones las correspondientes a uno de los dos casos:

$$2\,(a^2 + b^2) = (c + d)^2 + (c - d)^2 = x^2 + y^2$$

$$2\,(c^2 + d^2) = (a + b)^2 + (a - b)^2 = z^2 + w^2$$

en donde:

$a = mp + nq$

$b = mq - np$

$c = mq + np$

$d = mp - nq$

o, más simplemente:

$a = pq + r$

$b = p - qr$

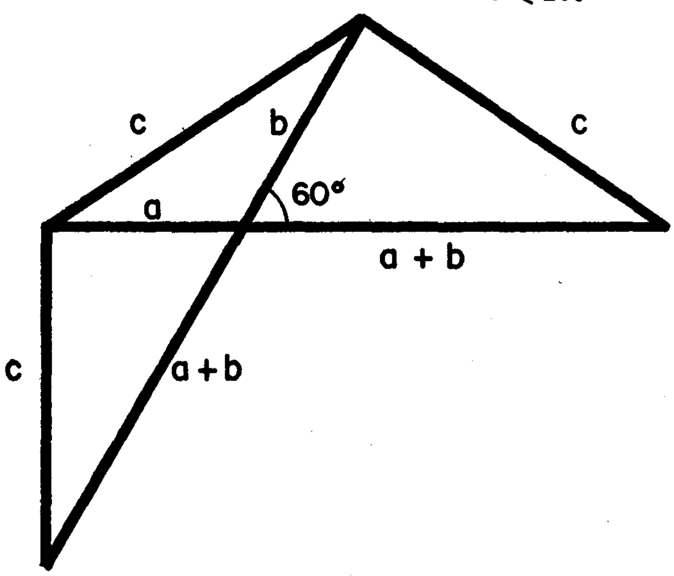
$c = pq - r$

$d = p + qr$

TRIANGULOS DE 60° Y 120°

$a + b < 100$

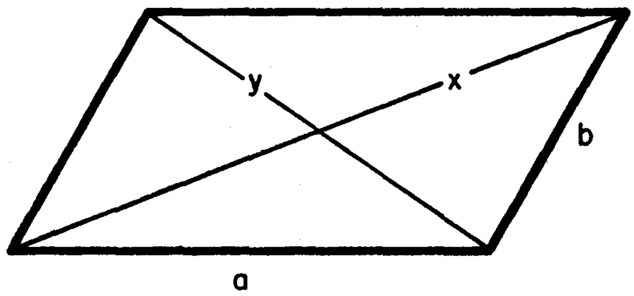
$c < 100$



$a =$	$b =$	$c =$	$a + b =$
3	5	7	8
7	8	13	15
5	16	19	21
11	24	31	35
7	33	37	40
13	35	43	48
16	39	49	55
9	56	61	65
32	45	67	77
17	63	73	80
40	51	79	91

11	85	91	96
19	80	91	99
55	57	97	(112)

PARALELOGRAMOS SEMIPITAGORICOS



$b =$	$a =$	$y =$	$x =$	$2\,(a^2 + b^2) = x^2 + y^2 =$
3	4	5	5	50
4	7	7	9	130
5	10	9	13	250
5	12	13	13	338
6	7	7	11	170
6	13	11	17	410
6	17	17	19	650
7	16	13	21	610
8	9	11	13	290
8	11	9	17	370
8	15	17	17	578
10	11	9	19	442
10	19	7	27	778
11	16	15	23	754
13	16	11	27	850
13	18	19	25	986
15	16	11	29	962

APENDICE 2

BIBLIOGRAFIA

O. NEUGEBAUER: *The Exact Sciences in Antiquity*. 2ª ed. Harper Torchbooks.

B. L. VAN DER WAERDEN: *Science Awakening*. Traducción del holandés. John Wiley & Sons. Inc.

A. O. GELFOND: *The solution of Equations in Integers*. Traducción del ruso. W. H. Freeman & Co.

ALBERT H. BEILER: *Recreations in the Theory of Numbers*. Dover.

J. M. VINOGRADOV: *Elements of Number Theory* Traducción del ruso. Dover.

R. D. CARMICHAEL: *The Theory of Numbers & Diophantine Analysis*. Dover.

H. GRIFFIN: *Elementary Theory of Numbers*. McGraw-Hill. Book Co.

B. W. JONES: *Teoría de Números*. Universidad Nacional de Colombia.

HALL & KNIGHT: *Higher Algebra*. Macmillan & Co. Ltd. En esta álgebra se encuentra una solución paramétrica de la ecuación $x^2 + y^2 - xy = z^2$
$x = 2mn - n^2 \quad y = m^2 - n^2 \quad z = m^2 - mn + n^2$
diferente de la obtenida en este trabajo por un procedimiento también diferente.

G. CHRYSTAL: *Algebra* (2 tomos). Chelsea Pub. Co.

S. BARNARD & J. M. CHILD: *Higher Algebra*. Macmillan & Co. Ltd.

H. MIDONICK: *The Treasury of Mathematics*. (2 tomos). Capítulo sobre Diofanto. Pelican Books.