EL INFINITO

POR ALONSO TAKAHASHI.

INTRODUCCION

Comenzamos haciendo algunas observaciones sobre la elección del tema de esta exposición. En primer lugar, la matemática tiende a ser universal aunque los problemas matemáticos de cada época sean bien determinados; quizás haya una matemática propia de cada cultura pero el matemático no encuentra temas propios de su medio ni problemas inherentes a su localidad. La Matemática Aplicada es algo distinto: es una aplicación de la matemática.

En segundo lugar está la comunicación: la matemática es en sí misma un lenguaje con una gramática más precisa que la de los idiomas naturales. Sus conceptos pueden tener interpretaciones concretas aproximadas o pueden necesitar de una franca intuición de lo abstracto; en todo caso la exposición no puede permitirse muchas paráfrasis sin arriesgar profundamente el significado, aunque es la opinión de matemáticos eminentes que una teoría matemática no debe considerarse completa mientras no sea tan clara que pueda ser explicada a la primera persona que uno encuentre. Habría que aclarar que es conveniente, si no indispensable, que dicha persona sea un matemático.

En todo caso, el tema debía ser de interés general y también ser significativo dentro de la misma matemática y además debía intentarse una presentación no especializada del mismo. Ahora bien, la *noción de infinito,* en su doble versión de lo desmesuradamente grande y de lo arbitrariamente pequeño, ha sido una de las grandes inquietudes de la mente. El ser humano, decía Pascal, "se aterrará sin duda al verse perdido en el cuerpo que la naturaleza le ha dado entre esos dos abismos del infinito y de la nada... Porque, en fin, ¿Qué es el hombre en el mundo? La nada con respecto al infinito, el todo con respecto a la nada, un medio entre nada y todo. Se encuentra infinitamente alejado de los dos extremos y su ser no está menos distante de la nada, de la cual fue sacado, como del infinito en donde está inmerso".

Y ya en la matemática, es el concepto de infinito el que con mayor insistencia ha permanecido al acecho con irrupciones periódicas cargadas de significado como en las paradojas de Zenón, en la doctrina de los infinitesimales, en los números transfinitos y la crisis de los fundamentos, en la moderna metamatemática y en las ambiciosas teorías actuales que figuradamente pueden describirse como galácticas.

Por último, y afortunadamente, para la presentación del tema se cuenta con ensayos magistrales de hombres como Bertrand Russell, David Hilbert y otros más. Es por esto por lo que, sin querer parangonar esta exposición con una de las más grandes obras de la civilización, debo descubrirla como una simple colcha de retazos.

Deseo insistir en que el tratamiento del tema no pretende ser técnico y, a decir verdad, es muy poco ortodoxo. Espero ser disculpado por quienes consideran que esto es incorrecto.

La noción de infinito.

La noción de infinito se presenta al espíritu ligada a experiencias comunes como el tiempo, el espacio y el proceso de contar objetos de una colección. El homo sapiens apareció sobre la tierra hace 30.000 años, tiempo muy corto si se compara con los 250 millones de años durante los que reinaron los trilobitos y los dinosaurios o con los 4.500 millones de años transcurridos desde la formación de la tierra. Sin embargo, no es habitual imaginar que el tiempo haya empezado en cierto momento o que vaya a terminar en un instante dado; cabría siempre pensar en un antes y un después. Pero tampoco es fácil aceptar un pasado infinito durante el cual, habiendo habido plazo suficiente, todo lo posible habría sucedido ya.

Esta suerte de consideraciones exige el establecimiento de ideas fundamentales a cuya luz se determinen las formas sensatas de plantear los problemas, cuidando siempre de no concluir más de lo estrictamente implicado.

Como en el caso del tiempo, es inadmisible asignar un término al espacio, pero de ello se concluye su ilimitación y no su infinitud. Esta observación permitió corregir en forma genialmente drástica y sencilla la moderna teoría de la gravitación: habiéndose observado que las ecuaciones correspondientes fallaban en regiones arbitrariamente alejadas, vale decir, en el infinito, se curvó el espacio hasta cerrarlo completamente y así, no habiendo infinito, la teoría era correcta. Pero se necesitó valor para abandonar la geometría euclídea como descripción propia del espacio físico.

Similarmente se han elaborado teorías para eliminar la total infinitud del tiempo. Puede, por ejemplo, argüirse que en un estado inicial y final de equilibrio el tiempo tendería a detenerse o también que la evolución del mundo físico es eterna pero periódica, como la Biblioteca de Babel de Borges, donde el gran desorden repetido una y otra vez se constituye en Orden.

Y con respecto a tamaño y masa, a pesar de la impresionante inmensidad de la boveda celeste, la cosmología moderna afirma que el universo está formado por 100 mil millones de galaxias, cada una de las cuales consta, en promedio, de unos 100 mil millones de estrellas; que el radio del universo, antes de iniciarse el actual proceso de expansión, era de 1.060 millones de años luz y que su masa es de $2{,}14 \times 10^{49}$ toneladas correspondiente a $1{,}29 \times 10^{79}$ protones.

También en la dirección de lo infinitamente pequeño la mente desprevenida estaría dispuesta a aceptar la divisibilidad indefinida de la materia en fragmentos arbitrariamente minúsculos. Pero de nuevo aparecen límites finitos en forma de partículas elementales y cuantos de energía.

En conclusión: el mundo físico no presenta o no necesita el infinito en ninguna de sus modalidades. Y debido a esta finitud, aunque las magnitudes sean inconcebibles, el hombre de ciencia actual ha perdido algo del pasmo ante el Universo: "confía en que dados suficiente ingenio, perseverancia, tiempo y dinero, puede entender todo lo que hay más allá de las estrellas" (W. Rindler).

Pero el infinito subsiste en la mente y exige una aclaración. Su naturaleza ha sido explicada como negación de lo finito y no como una idea verdadera. Decía Buffon que "una cosa infinita no es sino esa misma cosa finita a la cual le quitamos sus términos, sus límites; la idea de infinito no es sino una idea de privación y, en modo alguno, un objeto real... Un número infinito carece de realidad pues le hace falta un objeto, o mejor, una colección de objetos por representar, a fin de que su existencia sea posible".

El infinito en matemáticas.

El empleo del infinito en matemáticas se justificó inicialmente con base en la comodidad. Leibniz, por ejemplo, no creía en la existencia de magnitudes verdaderamente infinitas ni verdaderamente infinitesimales pero las consideraba como "ficciones útiles para abreviar y hablar universalmente". Según Fréchet "...para cada grado de civilización existe un límite para los números que se pueden efectivamente contar. Toda concepción de un número superior a este límite es puramente teórica".... "Pero es más simple no ocuparse jamás de esta limitación e imaginar pura y simplemente la serie de los enteros como ilimitada. Y he aquí *el infinito introducido en las matemáticas*, no como la afirmación de que este infinito corresponda a una realidad científica, sino como una comodidad del lenguaje".

Pero no todos se resignan a un infinito irreal y es así como Dedekind, en un esfuerzo para exhibir una colección real infinita arguye que, si algo puede ser objeto de mi pensamiento, entonces también puede serlo la idea de que ese algo puede ser objeto de mi pensamiento, y así sucesivamente. De tal manera que las cosas que pueden ser objeto de mi pensamiento forman una colección infinita.

La realidad del infinito hace parte del problema general de la existencia de los objetos matemáticos y de la naturaleza de las matemáticas donde pueden distinguirse tres posiciones extremas, a saber:

1. Según el *Platonismo* hay un hipermundo en el cual los objetos matemáticos gozan de una existencia tan real como la del mundo en que vivimos. Allí se encuentran los conjuntos finitos e infinitos, las funciones, el campo de los números reales, los órdenes. El matemático, a semejanza del naturalista, observa este mundo y lo describe y sus "creaciones" son los resultados de este estudio.

2. Según el *Formalismo* la matemática es un juego con ciertos términos y reglas explícitas, las cuales deben aplicarse en la derivación de los teoremas. Los objetos matemáticos no tienen existencia real y sólo existen representaciones más o menos útiles. La *verdad* es la aplicación correcta de las reglas y la existencia es sinónimo de consistencia, es decir, ausencia de contradicción.

3. Según el *Intuicionismo* la matemática es una actividad propia del cerebro humano, el cual tiene intuiciones directas como la de los números naturales. La verdad es evidencia interna y la existencia es constructibilidad con base en procesos directamente intuibles.

Naturalmente estos son especímenes puros que no se dan en la realidad y todo matemático presenta trazas de todas estas tendencias.

Considerando la evolución del concepto de número se encuentra que en las primeras etapas la numeración se reduce a

uno, varios o
uno, dos, varios, muchos, etc.,

y aunque este "muchos" sea el germen del infinito, dichos sistemas no facilitan nombrar números grandes. Aún un sistema más evolucionado como el jónico, usado por los griegos y basado en el alfabeto y otros signos adicionales, aunque perfectamente adecuado para las necesidades de su civilización, no permitía simbolizar con facilidad números arbitrariamente grandes como se manifiesta, por ejemplo, en la penosa argumentación de Arquímedes para mostrar que el número total de granos de arena, aunque muy grande, no es infinito.

Con la introducción del sistema posicional por parte de sumerios y chinos y en particular el decimal de acadios, babilonios, árabes e hindúes se tuvo el instrumento adecuado para simbolizar todos los números y aun magnitudes no intuibles. Una vez dado este paso, la simbolización decimal se extendió a los números racionales o fracciones y luego a los irracionales para encontrarse frontalmente con el infinito. En efecto, una fracción como 7/4 tiene una expresión decimal finita, a saber, 1,75 y hay otros casos, como 20/7 que produce la expresión, 2,857142 857142 857142... la cual, aunque infinita, puede visualizarse en su totalidad debido a su carácter periódico. Podría decirse que el desorden en que aparecen las cifras del período, al ser repetido una y otra vez, produce un orden que permite aprehender de una vez toda la expresión. El caso del número $\sqrt{2}$ es esencialmente diferente, pues la representación decimal 1,4142... no es periódica (si lo fuese, $\sqrt{2}$ sería racional) y es por lo tanto verdaderamente infinita; aceptarla significa aceptar que en alguna parte existe dicha expresión infinita aunque no sea conocida en su totalidad. El estudio de los números reales (racionales e irracionales) sucesiones, series y funciones numéricas, límites y continuidad, representación de funciones arbitrarias en términos de funciones trigonométricas (como lo exigía, por ejemplo, la teoría del calor de Fourier), derivadas e integrales, extremos de funciones y funcionales, constituyó el llamado Análisis Matemático que ha sido descrito como "una sola sinfonía del infinito". Esta maravillosa estructura teórica exigía en forma apremiante, una definición clara del conjunto de los números reales, entidad en la cual se basaban todas sus construcciones y exigía una formulación precisa del infinito asociada a funciones numéricas que representan magnitudes que devienen infinitas o infinitesimales.

Y además de esta modalidad del infinito, subsistía aún sin resolver el problema más antiguo de "contar" colecciones arbitrarias como la totalidad de los números enteros o el conjunto de puntos de discontinuidad de una función.

El paraíso de Cantor.

Esta intensa actividad matemática produjo una considerable tensión en medio de la cual estalló lo que Hilbert ha descrito como "la más maravillosa floración del espíritu matemático y, sin duda, una de las más altas aportaciones de la serena y pura actividad de la inteligencia", a saber, la Teoría de los Números Transfinitos, de George Cantor.

Antes de Cantor, si bien se aceptaba la existencia de colecciones infinitas, como 1, 2, 3,..., se creía que cualquier colección, finita o no, podía ser agotada extrayendo primero uno de sus elementos, luego otro y así sucesivamente. Aplicando un "método diagonal", Cantor descubrió que los números reales no pueden agotarse de esta manera. También mostró que hay tantos números enteros como fraccionarios a pesar de que entre dos fracciones cualesquiera hay infinitas más. Hechos similares habían sido observados antes: Galileo, por ejemplo, señaló que hay tantos cuadrados perfectos como números naturales, pues al asignar a cada número su cuadrado se agotan las dos colecciones; la misma peculiaridad puede presentarse en forma pintoresca refiriéndose a cierto personaje que, al redactar su autobiografía, emplea un año describiendo un día de su vida. A este ritmo, a medida que transcurre el tiempo estará más y más lejos de terminar su obra. Pero, si vive eternamente, todos los días de su vida quedarán descritos: el 10° día en el año 10°, el día 1000° en el año 1000°, etc. Sin embargo, estos hechos eran considerados simplemente como jugarretas del infinito. En manos de Cantor y con la sencillez propia de la genialidad, estas paradojas se transformaron en la misma definición de *equinumerosidad:* dos conjuntos o colecciones de objetos A y B son *equinumerosos* (esto es: tienen el mismo número de elementos o *cardinal)* si entre ellos puede establecerse una correspondencia biunívoca (esto es, uno a uno) y que las agote a ambas. El cardinal de A será (estrictamente) *menor* que el de B si A es equinumeroso con una parte de B, pero B no es equinumeroso con ninguna parte de A. Es claro que estas nociones coinciden con las usuales cuando A y B son colecciones finitas.

En este sentido, el número de enteros es igual al de fraccionarios pero menor que el de reales.

De acuerdo con estas definiciones, si de una colección se extraen algunos elementos, e inclusive infinitos, la subcolección restante no tendrá necesariamente un número de elementos inferior al de la original. Así, si de la colección 1, 2, 3,... se sacan los números impares, la subcolección restante es equinumerosa con la colección completa.

Cantor descubrió también que en lugar del simple *¿cuántos...?* puede, en ciertos casos, preguntarse *¿cuántos... y en qué orden?* Para colecciones finitas esta diferencia es secundaria pero en el caso infinito las respuestas imponen dos tipos diferentes de números transfinitos: los *cardinales* y los *ordinales.*

Para un conjunto cualquiera A el cardinal de A es la característica que distingue a todos los conjuntos que son equinumerosos con A. Si, además, entre los elementos de A se ha establecido un orden de tal manera que, como en el caso de los números naturales, cada subconjunto no vacío tiene un menor elemento, entonces el ordinal de A indica la característica común a todos los conjuntos equinumerosos con A y ordenados en forma completamente similar a él. Los primeros ordinales son los números naturales,

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$$

y después de todos ellos viene el primer ordinal infinito ω. Ni siquiera contando todos los objetos del mundo físico se llegaría a ω, pero en el mundo de Cantor, después de ω vienen

$$\omega + 1,\ \omega + 2,\ \omega + 3,\ \ldots$$

y después de esta infinidad aparece $\omega + \omega$ u $\omega 2$. De esta manera se obtienen

$$\omega 2,\ \ldots,\ \omega 3$$

y después de esta infinidad de infinidades viene $\omega\omega$ u ω^2. Aparece entonces una infinidad de infinitas infinidades, a saber,

$$\omega^2,\ \ldots,\ \omega^3,\ \ldots,\ \ldots$$

después de las cuales viene ω^ω. Y así se obtienen

$$\omega^\omega,\ \ldots,\ \omega^{\omega^\omega},\ \ldots,$$

El ordinal que aparece después de estos se designa por ϵ_0 y con él se inicia de nuevo toda la historia:

$$\epsilon_0 + 1,\ \epsilon_0 + 2,\ \ldots,\ \text{etc, etc.}$$

A pesar de su tecnicismo, esta situación evoca el inútil esfuerzo del mensajero imperial descrito por Kafka: "...todavía está abriéndose paso a través de las cámaras del palacio central; no terminará de atravesarlas nunca; y si termina, no habría adelantado mucho; todavía tendría que esforzarse para descender las escaleras; y si lo consiguiera, no habría adelantado mucho; tendría que cruzar los patios; y después de los patios, el segundo palacio circundante; y nuevamente las escaleras y los patios; y nuevamente un palacio; y así durante miles de años; y cuando finalmente atravesara la última puerta —pero esto nunca, nunca puede suceder— todavía le faltaría cruzar la capital, el centro del mundo".

La introducción de los poderosos métodos de Cantor para manejar infinitudes transformó la Matemática en una verdadera Ciencia del Infinito, plantándola de un salto en un nuevo paraíso. Pero allí precisamente acechaba la contingencia más destructiva para la ciencia deductiva: la contradicción interna.

Se encontró que los mismos principios usados por Cantor en su magnífica teoría conducían a contradicciones. Russell comenzó aplicando el método de definir un conjunto tomando como elemento los objetos que satisfacen una condición determinada para así introducir el conjunto de todos aquellos conjuntos que no son elementos de sí mismos. Este "conjunto" no puede ni pertenecer a sí mismo ni dejar de hacerlo. También aparecieron otras antinomias más técnicas como la obtenida por Burali-Forti aplicando al "conjunto" de todos los ordinales el teorema que afirma que para cualquier conjunto de ordinales hay un ordinal mayor que todos los del conjunto, o la de Richard en donde la contradicción resulta al aplicar un método diagonal como el introducido por Cantor.

Infinitesimales.

Mientras que los transfinitos de Cantor eran mirados con justa desconfianza debido a las antinomias, los infinitesimales habían sido progresivamente aceptados en el mundo matemático. Aunque algo misteriosos, la gente quizás estaba acostumbrada, desde la antigüedad, a que un círculo, por ejemplo, podría ser aproximado por un polígono regular de lados pequeñísimos cuya área difería infinitesimalmente de la del círculo. Finalmente, el éxito y la potencia de los métodos del Cálculo Infinitesimal disculpaban la falta de claridad en los cimientos. Sin embargo, los trabajos de Wierstrass mostraron que el Análisis podía aritmetizarse: que la estructura del campo numérico real no admite infinitesimales y, lo que es más importante, que los infinitesimales no eran necesarios para desarrollar el cálculo y la matemática superior. Aunque muy caros a la intuición, su presencia era inadmisible e inútil y fueron totalmente expulsados de la matemática.

La lucha contra la crisis.

La aparición de las antinomias ocasionó la llamada Crisis de los Fundamentos contra la cual se inició un programa similar al desarrollado por Hilbert en Geometría, que buscaba un sistema consistente de axiomas a partir del cual pudiesen derivarse todos los hechos de la teoría. Esta labor fue iniciada por Zermelo y continuada por von Neumann, Bernays y Gödel, dando lugar a la Teoría de Conjuntos (TC), la cual se refiere a ciertos objetos llamados *clases*. Una clase puede o no pertenecer a otra clase; en el primer caso se dice que la clase es un *conjunto* o *colección;* éstos constituyen por así decir, los *objetos elementales.* El sistema de axiomas es el siguiente:

1. *Axioma de extensión:* Una clase está determinada por sus miembros.

2. *Axioma de conjuntos binarios:* Con dos objetos elementales puede formarse un conjunto.

3. *Axioma de formación de clases:* ciertas propiedades determinan clases.

4. *Axioma de uniones:* Reuniendo los miembros de una colección de conjuntos se obtiene un nuevo conjunto.

5. *Axioma de Conjuntos de Partes (o potencia):* Los subconjuntos de un conjunto constituyen un nuevo conjunto.

6. *Axioma de reemplazo:* Al sustituir cada elemento de una colección por un conjunto se obtiene de nuevo una colección.

Para que la teoría no sea vacía debe postularse la existencia de objetos, y para que sirva de fundamento a la matemática debe comprender conjuntos infinitos. Los objetos obtenidos progresivamente a partir del conjunto vacío ϕ agregando siempre a cada conjunto A un nuevo elemento, a saber, el mismo A, son todos diferentes. Entonces, la existencia de conjuntos y en particular de conjuntos infinitos se postula así:

7. *Axioma del Infinito:* Existe un conjunto M tal que ϕ pertenece a M y si x pertenece a M entonces el conjunto x^+ obtenido agregando a x el nuevo elemento x también pertenece a M.

El conjunto M contendrá entonces, entre otros, los siguientes elementos:

$$\phi, \{\phi\}, \{\phi, \{\phi\}\}, \{\phi, \{\phi\}, \{\phi, \{\phi\}\}\}, \ldots$$

A los axiomas de la Teoría de Conjuntos (TC) es conveniente agregar otros dos principios:

El Axioma de Elección (E): Dada una colección no vacía de conjuntos no vacíos puede formarse un nuevo conjunto extrayendo un miembro de cada uno de los conjuntos de la colección.

Cuando la colección dada es finita no es necesario recurrir a este principio para formar ese nuevo conjunto. Aplicado a colecciones infinitas las implicaciones del Axioma de Elección son sorprendentes. Asumiéndolo puede demostrarse que cualquier conjunto puede ordenarse perfectamente de tal manera que en todo subconjunto no vacío haya un elemento mínimo. Y en un terreno más accesible a la intuición, puede probarse que una esfera como la tierra puede dividirse en un número finito de fragmentos tales que al ser reunidos de nuevo en otra disposición forman una nueva esfera del tamaño de una arveja.

Axioma de Restricción (R): Toda clase no vacía tiene un miembro disyunto con ella.

Este axioma excluye algunas situaciones intuitivamente patológicas y una de sus consecuencias, aunque un poco técnica, es también sorprendente: Todo conjunto puede obtenerse a partir del conjunto vacío haciendo uniones y tomando conjuntos de partes en número suficiente, posiblemente transfinito, de veces.

Con base en estos 8 o 9 postulados pueden fundamentarse y desarrollarse las teorías matemáticas usuales. Otras, como la moderna Teoría de Categorías, en su intento de estudiar grandes colectividades de estructuras matemáticas, debe contar con conjuntos infinitos supremamente grandes. Con el fin de adaptar la teoría a estos requerimientos se introducen los *universos* o conjuntos en el seno de los cuales pueden efectuarse las operaciones usuales entre conjuntos sin que nunca el resultado escape al universo y el Axioma del Infinito se sustituye por el.

Axioma Fuerte del Infinito: Todo conjunto es miembro de algún universo.

Si bien es cierto que estos principios han sido escogidos de tal manera que las antinomias conocidas no pueden presentarse, también es cierto que, no habiéndose demostrado la no contradicción de los axiomas, siempre es factible el descubrimiento de otras nuevas.

Metamatemática.

El estudio general de las teorías formales, de los problemas de consistencia y constructibilidad iniciado por Hilbert y sus discípulos como una "teoría de la demostración", abarcó posteriormente gran parte de la lógica, recibiendo acertadamente el nombre de Metamatemática.

La mayor esperanza de la Metamatemática en sus comienzos, la demostración de la consistencia de la Matemática usual, fue dramáticamente frustrada por los resultados de Gödel en 1931.

Gödel demostró que en la matemática existen aserciones indecidibles, esto es, aserciones que no pueden probarse ni refutarse dentro de ella. Y también demostró que jamás será posible probar con los métodos aceptados, que la matemática no es contradictoria. Es con razón como von Neumann declara que después de Gödel la Lógica nunca podrá volver a ser la misma.

Este es básicamente el estado actual de los fundamentos aunque hay impresionantes resultados nuevos que parecen justificar la confianza puesta en la Teoría de Conjuntos. He aquí algunos de ellos:

1. GÖDEL 1938, COHEN 1963. El Axioma de Elección es independiente, es decir, su afirmación o su negación no acarrea contradicciones.
2. GENTZEN 1936. Admitiendo razonamientos por inducción transfinita, hasta el ordinal ϵ_0, puede probarse que la aritmética es consistente.
3. SOLOWAY 1965. Admitiendo la existencia de ciertos cardinales infinitos grandes, llamados fuertemente inaccesibles, puede probarse la consistencia de la Teoría de Conjuntos.
4. COHEN 1963. La llamada hipótesis del continuo es independiente.

Nuevos infinitesimales.

Apoyándose en la teoría de conjuntos y, en particular y en forma explícita, en el Axioma de Elección puede ampliarse el campo de números reales de tal manera que aparezcan elementos infinitamente pequeños e infinitamente grandes adecuados para desarrollar el análisis según las líneas intuitivas seguidas por sus creadores. Estos nuevos elementos son los *números reales no convencionales,* la apariencia legítima con que los infinitesimales regresan al mundo matemático.

CONCLUSION

El infinito es indudablemente un concepto difícil de manejar y ha sido un ingrediente indispensable del pensar matemático. La Matemática no puede reducirse a los confiables métodos finitarios sin sufrir enormes mutilaciones.

Los técnicos emplean miembros mecánicos para manipular peligrosos elementos radiactivos. Los matemáticos han creado en la Metamatemática un arsenal de dispositivos de tipo finito para manejar el infinito.

Profetizar en este terreno es demasiado arriesgado.