

Artículo original

Estudio de la estructura y el momento de inercia de los politropos newtonianos

Study of the structure and moment of inertia of Newtonian polytropes

 Jeisson Armando Cruz-Amaya

Facultad de Matemáticas e Ingeniería, Fundación Universitaria Konrad Lorenz, Bogotá, Colombia

Resumen

Los politropos newtonianos son modelos fundamentales en astrofísica que pueden representar sistemas autogravitantes, como son las estrellas y ciertos objetos compactos. Sin embargo, llama la atención que, a pesar de su popularidad, muy poco se ha discutido en la literatura sobre su momento de inercia. Por ello, en este estudio nos propusimos analizar algunas propiedades integrales y de la estructura de los politropos newtonianos, prestando especial atención a su momento de inercia. Con ese fin estudiamos la ecuación de Lane-Emden y presentamos soluciones tanto analíticas como numéricas para diferentes valores del índice politrópico n . Asimismo, ofrecemos diagramas de masa-radio y calculamos el momento de inercia de varias configuraciones. Encontramos que el momento de inercia normalizado I/MR^2 , en función del índice politrópico n , se ajusta a una función polinómica de cuarto orden.

Palabras clave: politropos newtonianos; momento de inercia; ecuación de Lane-Emden; diagramas masa-radio; índice politrópico.

Abstract

Newtonian polytropes are fundamental models in astrophysics that can represent self-gravitating systems such as stars and certain compact objects. Despite their popularity, however, it is striking that very little has been discussed in the literature about their moment of inertia. In this context, here, we aimed to analyze some integral and structural properties of Newtonian polytropes, with special emphasis on their moment of inertia. For this purpose, we studied the Lane-Emden equation and present both analytical and numerical solutions for different values of the polytropic index n . We also provide mass-radius diagrams and calculate the moment of inertia for various configurations. We found that the normalized moment of inertia I/MR^2 , as a function of the polytropic index n , follows a polynomial of the fourth order.

Keywords: Newtonian polytropes; moment of inertia; Lane-Emden equation; mass-radius diagrams; polytropic index.

Citación: Cruz-Amaya JA. Estudio de la estructura y el momento de inercia de los politropos newtonianos. Revista de la Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. 50(196):851-872, julio-septiembre de 2026. doi: <https://doi.org/10.18257/raccefyn.3578>

Editor: Jorge Cossio

Correspondencia:

Jeisson Armando Cruz-Amaya;
jasoncruz9014@gmail.com

Recibido: 24 de noviembre de 2025

Aceptado: 15 de junio de 2026

Publicado en línea: 21 de julio de 2026



Este artículo está bajo una licencia de Creative Commons Reconocimiento-NoComercial-Compartir Igual 4.0 Internacional

Introducción

El concepto de politropía tiene sus raíces en el estudio de la termodinámica de gases y fluidos, pero su aplicación en astrofísica se consolidó en el siglo XX con los trabajos de **Eddington** (1920) y **Chandrasekhar** (1964). **Eddington** (1920) utilizó estos modelos para analizar la estabilidad de las estrellas, mientras que **Chandrasekhar** (1964) los empleó en el estudio de enanas blancas, estableciendo el famoso límite que lleva su nombre, el cual determina la masa máxima que una enana blanca puede alcanzar antes de colapsar por efecto de su propia gravedad.

El concepto de politropa introducido por **Lane** (1870) y complementado por **Emden** (1907) surge porque la ecuación de estado (EdE) politrópica que describe estos sistemas permite describir una gran variedad de estructuras, dependiendo del valor del índice politrópico. En otras palabras, como su nombre lo indica, estos sistemas autogravitantes pueden adoptar diferentes perfiles de densidad y presión, dependiendo de su índice politrópico.

La EdE brinda un modelo sencillo, que describe relativamente bien a una gran variedad de objetos compactos sin necesidad de recurrir a ecuaciones más complejas. En el marco de la gravedad Newtoniana, estos modelos son esenciales para entender la distribución de masa, presión y temperatura dentro de una estrella en equilibrio hidrostático (**Chandrasekhar**, 1967; **Shapiro & Teukolsky**, 1983; **Tooper**, 1964). Algunos autores han propuesto el modelo de politropas relativistas para modelar halos de materia oscura en galaxias (**Lopes & Panotopoulos**, 2019; **Stuchlík, Hledík, & Novotný**, 2016; **Stuchlík, Novotný, & Hladík**, 2025).

Tooper (1964) extendió el análisis de los modelos politrópicos al marco de la relatividad general, explorando su aplicabilidad en objetos extremadamente compactos, como estrellas de neutrones y precursores de agujeros negros. Estudios de la estabilidad radial de configuraciones politrópicas relativistas fue llevado a cabo por **Bludman** (1973), **Chandrasekhar** (1964), **Hladík, Posada & Stuchlík** (2020), **Horedt** (2013), and **Posada, Hladík & Stuchlík** (2020). La EdE también ha sido empleada en el modelamiento de objetos compactos covariantes anisotrópicos (**Beltracchi & Posada**, 2025; **Raposo et al.**, 2019)

A pesar de que el modelo politrópico es ampliamente utilizado en la literatura, llama la atención que se haya prestado poca atención al estudio de su momento de inercia en el límite Newtoniano. Aunque se han realizado investigaciones en sistemas relativistas autogravitantes (**Beltracchi & Posada**, 2024a, 2024b, 2025; **Breu & Rezzolla**, 2016; **Chandrasekhar & Miller**, 1974; **Hartle**, 1967; **Hartle & Thorne**, 1968; **Jiang & Yagi**, 2020), el análisis de cómo este momento de inercia varía con el índice politrópico, en el límite Newtoniano, sigue siendo un tema poco abordado. Este estudio es particularmente relevante, ya que los resultados para politropas Newtonianas proporcionan un banco de pruebas fundamental para validar los correspondientes cálculos en sistemas relativistas. Este trabajo, busca subsanar esta carencia mediante un estudio del momento de inercia de politropas Newtonianas.

Materiales y métodos

Politropas Newtonianas

En astrofísica estelar, uno de los problemas centrales es comprender cómo se mantiene en equilibrio una estrella frente a dos fuerzas opuestas, la presión térmica hacia el exterior, generada por procesos nucleares, y la atracción gravitatoria hacia el centro, debida a su propia masa. Este equilibrio, denominado equilibrio hidrostático, define no solo la estructura interna de las estrellas, sino también su estabilidad y evolución a lo largo del tiempo (**Araujo & Chirenti**, 2011; **Chandrasekhar**, 1967; **Kippenhahn, Weigert, & Weiss**, 2012; **Shapiro & Teukolsky**, 1983).

Ecuación de equilibrio hidrostático

El equilibrio hidrostático es una condición fundamental en la física estelar que establece que, en cada capa concéntrica de una estrella, la fuerza de presión que actúa hacia el exterior debe equilibrar exactamente la fuerza gravitacional que actúa hacia el centro (ver Fig. 1). Esta condición es esencial para que una estrella mantenga una estructura estable; si la presión fuera insuficiente, el objeto colapsaría; si fuera excesiva, se expandiría. En el marco de la gravitación Newtoniana, el equilibrio hidrostático se describe mediante la siguiente

ecuación

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{Gm(r)\rho(r)}{r^2}, \quad (1)$$

donde, $P(r)$ representa la presión radial en una capa ubicada a una distancia radial r desde el centro de la estrella, $\rho(r)$ es la densidad de masa en esa capa, $m(r)$ es la masa contenida dentro del radio r , y G es la constante de gravitación universal. Esta ecuación muestra que el gradiente de presión es negativo, por lo tanto, la presión debe aumentar hacia el centro para contrarrestar la atracción gravitacional ejercida por las capas superiores.

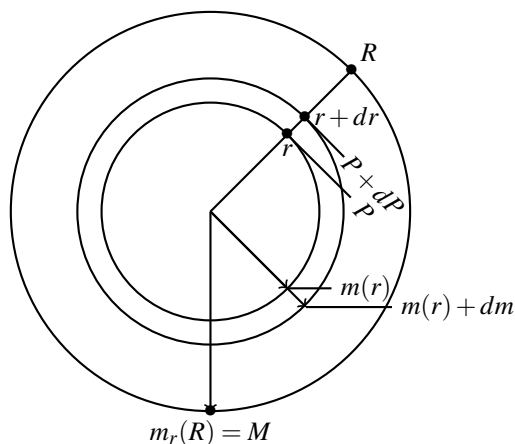


Figura 1. Representación esquemática de un sistema esférico con distribución radial de presión (Chandrasekhar, 1967, p. 62), (Kippenhahn, Weigert, & Weiss, 2012, p. 4)

Para resolver la ecuación (1), es necesario conocer cómo varía la masa acumulada $m(r)$ con el radio. Esto se establece mediante la ecuación de conservación de la masa en simetría esférica, la cual está dada por (Chandrasekhar, 1967, p. 62), (Shapiro & Teukolsky, 1983, p. 57); (Kippenhahn, Weigert, & Weiss, 2012, p. 3).

$$\frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r), \quad (2a)$$

$$m(r) = \int_0^r 4\pi r^2 \rho(r) dr, \quad (2b)$$

donde, $m(r)$ comprende a la masa contenida en el radio r . La masa total $M = m_r(R)$, donde R es el radio de la configuración.

Las ecuaciones (1) y (2) forman un sistema acoplado de ecuaciones diferenciales de primer orden que permite determinar la estructura interna de una estrella, es decir, cómo varían la presión, la densidad y la masa con el radio. Sin embargo, este sistema es incompleto hasta que se especifique una relación entre P y ρ , conocida como la EdE, la cual refleja la naturaleza del material estelar y las condiciones termodinámicas del sistema (Chandrasekhar, 1967, p. 84); (Shapiro & Teukolsky, 1983, p. 58).

Ecuación de Estado Politrópica

La EdE politrópica está dada por

$$P = K\rho^{1+\frac{1}{n}}, \quad (3)$$

donde K es una constante que depende de las propiedades del gas (como su composición química y temperatura) y n se llama el índice politrópico, un parámetro adimensional que determina el tipo de estructura del sistema estelar (Chandrasekhar, 1967, p. 84).

Sobre las unidades de K . A lo largo del manuscrito empleamos el sistema cgs (centímetro, gramo, segundo) para todas las magnitudes físicas. La constante K tiene unidades que dependen del índice politrópico n , pues su dimensión queda determinada por la ecuación de estado (3). Igualando dimensionalmente $[P] = [K] [\rho]^{1+1/n}$ y usando $[P] = \text{g cm}^{-1} \text{s}^{-2}$ y $[\rho] = \text{g cm}^{-3}$, se obtiene

$$[K] = \text{g}^{-1/n} \text{cm}^{2+3/n} \text{s}^{-2}. \quad (4)$$

En particular, para los índices que aparecen más adelante en este trabajo:

- $n = 1$: $[K] = \text{cm}^5 \text{g}^{-1} \text{s}^{-2}$,
- $n = 3/2$: $[K] = \text{cm}^4 \text{g}^{-2/3} \text{s}^{-2}$,
- $n = 2$: $[K] = \text{cm}^{7/2} \text{g}^{-1/2} \text{s}^{-2}$,
- $n = 3$: $[K] = \text{cm}^3 \text{g}^{-1/3} \text{s}^{-2}$.

Los exponentes fraccionarios en gramos y centímetros son una característica intrínseca del modelo politrópico y no deben interpretarse como anomalías; provienen directamente de la potencia no entera $1 + 1/n$ en la ecuación de estado. Cuando se reportan valores numéricos de K en el resto del manuscrito, las unidades correspondientes se indican explícitamente para evitar ambigüedad.

La ecuación (3) idealiza el comportamiento del gas al suponer que la presión en un punto dado depende únicamente de la densidad local. Aunque no incluye efectos como el transporte de calor, la radiación o la rotación, resulta notablemente conveniente para capturar las propiedades esenciales de muchos sistemas astrofísicos reales **Kippenhahn, Weigert & Weiss** (2012, Cap. 3); (**Shapiro & Teukolsky**, 1983, Cap. 3).

Cabe resaltar que distintos valores de n permiten modelar diferentes tipos de materia estelar. El caso $n = 3/2$ corresponde a un gas de electrones no relativistas degenerados, como en enanas blancas de baja masa, y el caso $n = 3$ corresponde a un gas de electrones relativistas degenerados, como en enanas blancas masivas cercanas al límite de **Chandrasekhar** (1964). El caso especial $n = 5$ corresponde al límite donde la masa total del sistema diverge, por lo tanto, la solución se vuelve físicamente inviable (**Chandrasekhar**, 1967, p. 94); (**Tooper**, 1964). Mención aparte merece el caso $n = 0$, que no debe interpretarse a través de la Ec. (3) de manera literal ya que el exponente $1 + 1/n$ diverge y la EdE politrópica deja de tener sentido como tal, sino como el *límite formal de incompresibilidad* del modelo, en el que la densidad se mantiene constante en todo el volumen, $\rho(r) = \rho_c$, y la presión se determina exclusivamente por la condición de equilibrio hidrostático (1); este límite es útil como modelo idealizado de baja densidad o como caso de validación analítica de la formulación general.

Cabe mencionar que el valor del índice n también afecta la concentración de masa en la estrella; a menor n , la densidad es más uniforme; a mayor n , la masa tiende a concentrarse más hacia el centro (**Chandrasekhar**, 1967; **Shapiro & Teukolsky**, 1983; **Tooper**, 1964).

La ecuación de Lane-Emden

La ecuación de Lane-Emden representa una reducción universal del problema de equilibrio hidrostático a una forma simplificada que encapsula los aspectos esenciales del sistema. A través de sus soluciones adimensionales, es posible reconstruir magnitudes físicas como la masa total, el radio físico, el perfil de presión, su distribución de densidad y de masa. Además, esta ecuación permite analizar cómo varía la estructura interna de un objeto compacto al modificar el índice n , facilitando la comparación entre distintos tipos de objetos astrofísicos (Chandrasekhar, 1967, p. 88); (Shapiro & Teukolsky, 1983, p. 62).

Nota terminológica. A lo largo de este trabajo empleamos la palabra *adimensional* para referirnos a magnitudes cuya *dimensión física* en el sentido del análisis dimensional es la unidad. Esto incluye situaciones distintas que conviene no confundir: (i) parámetros puros como el índice politrópico n , que no tienen unidades por su propia definición; (ii) cantidades reescaladas mediante el cociente con una escala característica del problema, como la variable radial $\xi = r/a$ y la función $\theta(\xi)$, relacionada con la densidad local mediante $\rho = \rho_c \theta^n$; y (iii) ecuaciones reformuladas íntegramente en términos de las variables y funciones del tipo (i)–(ii), de manera que ninguna constante con unidades aparece explícitamente en ellas. Las cantidades del tipo (ii) y (iii) son las que más adelante se denominarán *adimensionales* en este texto, y en particular ξ y $\theta(\xi)$ son funciones de variable real cuyo dominio y codominio son numéricos puros.

El sistema original está compuesto por las ecuaciones (1)–(3), al incorporar la relación politrópica para la presión en la ecuación (1). Esta transformación permite un análisis más general y la comparación directa de las soluciones, facilitando la resolución del sistema y proporcionando una interpretación más clara de los resultados. Para simplificar aún más el análisis, se introduce el siguiente cambio a variables adimensionales,

$$\rho(r) = \rho_c \theta^n(\xi), \quad (5a)$$

$$r = a\xi, \quad (5b)$$

$$a^2 = \frac{(n+1)K\rho_c^{1/n-1}}{4\pi G}, \quad (5c)$$

donde ρ_c es la densidad central, $\theta(\xi)$ es una función adimensional que representa la razón entre la densidad local y la densidad central, ξ es la variable radial adimensional y a es una escala de longitud que depende de la densidad de masa central y del índice politrópico n . Este cambio de variables fue introducido por **Emden** (1907) y permite obtener una forma universal de la ecuación para distintos valores de n .

La derivación de la ecuación de Lane-Emden a partir de las ecuaciones de conservación de masa (2) y la EdE (3) permite simplificar el sistema a una única ecuación diferencial adimensional. Esta ecuación encapsula la estructura del objeto estelar para un índice n dado. El proceso de cambio de variables y reescalamiento [Ecs. (5)] involucrado en esta derivación ha sido ampliamente discutido en la literatura (Chandrasekhar, 1967, p. 87); (Kippenhahn, Weigert, & Weiss, 2012, p. 215); (Shapiro & Teukolsky, 1983, p. 62); como resultado de este procedimiento, se obtiene la muy conocida ecuación,

$$\frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \left(\xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} \right) + \theta^n = 0. \quad (6)$$

La ecuación (6) se conoce como la ecuación de Lane-Emden de índice n . Esta es una ecuación diferencial ordinaria no lineal que describe el perfil de densidad adimensional de una estrella politrópica.

La ecuación (6) está sujeta a las siguientes condiciones iniciales,

$$\theta(0) = 1, \quad \frac{d\theta}{d\xi}(0) = 0, \quad (7)$$

las cuales aseguran que la densidad es máxima en el centro ($\theta = 1 \Rightarrow \rho = \rho_c$) y que no hay dirección preferente en el origen, ya que el gradiente de densidad es nulo allí. El radio de la configuración está dado por la condición, $\theta(\xi_1) = 0$, considerando que la presión es nula en el exterior.

La existencia de soluciones analíticas para ciertos valores de n ha sido discutida en (**Chandrasekhar**, 1967; **Emden**, 1907; **Schaffner-Bielich**, 2020). Estos valores corresponden a casos específicos donde la ecuación se puede resolver de manera exacta y cerrada, los cuales están dados por:

- En el caso $n = 0$, la solución analítica es $\theta_0(\xi) = 1 - \xi^2/6$, lo que describe un modelo con densidad constante. El radio en este caso se encuentra en $\xi_1 = \sqrt{6}$, lo que indica una distribución de masa homogénea a lo largo de la esfera. Este modelo es una aproximación útil en situaciones de baja densidad o para gases ideales donde no se esperan grandes variaciones en la presión.
- La solución para el caso $n = 1$ está dada por la función $\theta_1(\xi) = \sin(\xi)/\xi$, la cual corresponde a una estrella en equilibrio donde la presión es proporcional al cuadrado de la densidad. En este caso, el radio es $\xi_1 = \pi$. Este modelo es ampliamente utilizado para representar estrellas en su fase estable.
- Para el caso $n = 5$, la solución analítica es $\theta_5(\xi) = 1/(\sqrt{1 + \xi^2/3})$. Esta solución da lugar a una configuración con un radio infinito $\xi_1 = \infty$, pero con una masa finita. Este comportamiento indica que la densidad decae rápidamente con la distancia radial, mientras que el radio crece sin límite. Este modelo, aunque matemáticamente válido, se considera un caso límite, ya que para $n > 5$, la masa sigue aumentando sin restricción conforme el radio crece.

Sin embargo, para la mayoría de los valores astrofísicamente relevantes como $n = 3/2$ y $n = 3$, es necesario recurrir a métodos numéricos para obtener la función $\theta(\xi)$.

Relación Masa - Radio

En el estudio de objetos compactos, como las enanas blancas, la relación entre la masa total y el radio físico es una de las propiedades más importantes para entender su estructura y evolución; por ejemplo, se puede hacer análisis de estabilidad a partir del diagrama Masa-Radio $M(R)$ (**Chandrasekhar**, 1967, Cap. IV), (**Shapiro & Teukolsky**, 1983, Cap. 3). En el marco de la teoría de politropas, es posible obtener expresiones explícitas para el radio físico R a partir de la Ec. (5b) y la masa total M a partir de la Ec. (2b) para una estrella en equilibrio hidroestático, en función del índice politrópico n la densidad central ρ_c y la constante K .

De la Ecs. (5a), (5b) y (5c) se obtiene que el radio máximo está dado por,

$$R = a\xi_1 = \left[\frac{(n+1)K}{4\pi G} \right]^{1/2} \rho_c^{(1-n)/2n} \xi_1, \quad (8)$$

donde ξ_1 es la primera raíz positiva de θ . Un caso crítico ocurre para $n = 1$, donde se cumple que $\xi_1 = \pi$, y la expresión del radio se simplifica, dando lugar a la expresión

$$R = \left(\frac{K}{2G} \right)^{1/2}. \quad (9)$$

Este resultado es notable porque muestra que el radio no depende de la densidad central, lo cual es importante dentro de la familia de soluciones politrópicas. En este caso, el tamaño del objeto está determinado únicamente por la constante K , es decir, por la temperatura politrópica del sistema (**Chandrasekhar**, 1967, p. 97).

Por otro lado, la masa interior contenida en una esfera de radio físico r se obtiene a partir de la ecuación de conservación de la masa (2), sustituyendo en ella las relaciones adimensionales del modelo politrópico. En primer lugar, el cambio de variable $r = a\xi$ [Ec. (5b)] implica $dr = a d\xi$ y $r^2 = a^2 \xi^2$; en segundo lugar, la densidad se reemplaza por $\rho(r) = \rho_c \theta^n(\xi)$ [Ec. (5a)]. Sustituyendo ambas relaciones en la Ec. (2b) se obtiene

$$m(\xi) = 4\pi a^3 \rho_c \int_0^{\xi} \xi^2 \theta^n d\xi, \quad (10)$$

y usando Ec. (6) se llega a,

$$m(\xi) = 4\pi a^3 \rho_c \left(-\xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} \right).$$

La masa total M de la estrella se obtiene evaluando la expresión cerrada para $m(\xi)$ en $\xi = \xi_1$, donde ξ_1 es la primera raíz de $\theta(\xi)$:

$$M = m(\xi_1) = 4\pi a^3 \rho_c \left(-\xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} \right)_{\xi=\xi_1}. \quad (11)$$

Para escribir M explícitamente en función de K , G , n y ρ_c , basta con sustituir la definición de a dada por la Ec. (5c). De $a^2 = (n+1)K\rho_c^{1/n-1}/(4\pi G)$ se obtiene

$$a^3 = \left[\frac{(n+1)K}{4\pi G} \right]^{3/2} \rho_c^{3(1-n)/(2n)}. \quad (12)$$

Sustituyendo la Ec. (12) en la Ec. (11), y la expresión cerrada para la masa total queda entonces

$$M = 4\pi \left[\frac{(n+1)K}{4\pi G} \right]^{3/2} \rho_c^{(3-n)/(2n)} \left(-\xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} \right)_{\xi=\xi_1}, \quad (13)$$

donde la constante $(-\xi^2 d\theta/d\xi)_{\xi=\xi_1}$ se obtiene tras resolver la Ec. (6).

Otro caso interesante ocurre para $n = 3$, el cual es particularmente importante en el estudio de las enanas blancas relativistas (**Beltracchi & Posada**, 2024a; **Posada, Hladík, & Stuchlík**, 2020; **Tooper**, 1964). La expresión para la masa total, Ec. (13), se simplifica y se vuelve independiente de la densidad central,

$$M = 4\pi \left[\frac{K}{\pi G} \right]^{3/2} \left(-\xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} \right)_{\xi=\xi_1}. \quad (14)$$

A partir de las expresiones analíticas para la masa total M [Ec. (13)] y el radio R [Ec. (8)] de una estrella, que dependen de la densidad central ρ_c , es posible eliminar esta variable algebraicamente para obtener una relación directa entre M y R . Combinando ambas ecuaciones, se llega a la siguiente expresión general (**Chandrasekhar**, 1967, p. 97), (**Shapiro & Teukolsky**, 1983, p. 62)

$$GM^{(n-1)/n} R^{(3-n)/n} = \frac{(n+1)K}{(4\pi)^{1/n}} \left[-\xi^{\frac{n+1}{n-1}} \frac{d\theta}{d\xi} \right]_{\xi=\xi_1}^{(n-1)/n}, \quad (15)$$

ó

$$M = 4\pi R^{(3-n)/(1-n)} \left[\frac{(n+1)K}{4\pi G} \right]^{n/(n-1)} \omega_n, \quad (16)$$

donde,

$$\omega_n = \left[-\xi^{\frac{n+1}{n-1}} \frac{d\theta_n}{d\xi} \right]_{\xi=\xi_1},$$

es una constante adimensional que depende exclusivamente del índice politrópico. Aquí $\theta_n \equiv \theta(\xi; n)$ denota explícitamente la solución de la ecuación de Lane-Emden (6) para un valor dado del índice n ; el subíndice se introduce únicamente para enfatizar la dependencia funcional con n en aquellas expresiones, como las Ecs. (15)–(16), en que conviven cantidades evaluadas en distintos índices. Los valores numéricos de ω_n para varios índices se reportan en la Tabla 1.

Esta formulación, Ecs. (15) ó (16), es particularmente útil porque establece una relación universal que no requiere conocer la densidad central para describir la configuración de una estrella. La Ec. (16) puede reescribirse compactamente como

$$M = \lambda R^{\frac{3-n}{1-n}}, \quad (17)$$

donde λ es la constante de proporcionalidad que conecta la masa total M con el radio físico R en una configuración politrópica de índice n . Identificándola en la Ec. (16), su forma explícita es

$$\lambda = 4\pi \left[\frac{(n+1)K}{4\pi G} \right]^{n/(n-1)} \omega_n, \quad (18)$$

de modo que λ depende de el índice politrópico n y, a través de la solución de la Ec. (6), el valor numérico de ω_n , la constante politrópica K y la constante de gravitación universal G .

Por otro lado, la estabilidad de una configuración estelar descrita por un modelo politrópico está gobernada por el valor del índice n , a través de su relación con el exponente adiabático efectivo, $\Gamma = 1 + \frac{1}{n}$. La condición para la estabilidad es $\Gamma > \frac{4}{3}$, que se cumple para $n < 3$; fuera de este rango, la estructura se vuelve inestable (Schaffner-Bielich, 2020); (Shapiro & Teukolsky, 1983, p. 61). Para $n > 3$ ($\Gamma < \frac{4}{3}$), la EdE proporciona una respuesta de presión insuficiente ante un aumento de densidad. Esto resulta en la incapacidad del sistema para restaurar el equilibrio hidrostático tras una compresión, conduciendo a una inestabilidad por colapso gravitatorio (Schaffner-Bielich, 2020); (Shapiro & Teukolsky, 1983, p. 61).

Constante K a partir de la Masa y el Radio

En modelos estelares, la constante K es un parámetro clave que depende de las propiedades internas y termodinámicas del material que forma el objeto, tales como la temperatura, la composición química y la naturaleza de las partículas que contribuyen a la presión interna (Chandrasekhar, 1967, Cap. IV); (Kippenhahn, Weigert, & Weiss, 2012); (Shapiro & Teukolsky, 1983, Cap. 3). Sin embargo, es posible reexpresar K en términos de la masa M y el radio R de la estrella, proporcionando una forma más práctica de encontrar este parámetro, así, K se obtiene a partir de las ecuaciones (15) ó (16) dando lugar a la expresión

$$K = N_n G M^{\frac{n-1}{n}} R^{\frac{3-n}{n}}, \quad (19)$$

donde N_n es un coeficiente numérico dependiente únicamente del índice n y de las características de la función θ , el cual está dado por

$$N_n = \frac{1}{n+1} \left[\frac{4\pi}{\omega_n^{n-1}} \right]^{1/n}.$$

En la práctica, K puede obtenerse a partir de modelos físicos más detallados que incluyan, por ejemplo, la teoría del gas ideal, la degeneración cuántica de electrones y otros efectos relevantes para la estructura estelar, en la forma general (Chandrasekhar, 1967, Cap. IV); (Kippenhahn, Weigert, & Weiss, 2012); (Shapiro & Teukolsky, 1983, Cap. 3).

$$K = \frac{k_B T}{\mu m_H}, \quad (20)$$

donde k_B es la constante de Boltzmann, T es la temperatura efectiva del gas, μ es el peso molecular medio y m_H es la masa del hidrógeno.

Mientras que el cálculo teórico de K depende directamente de las propiedades físicas y termodinámicas del gas, la expresión (19) derivada a partir de la relación masa-radio permite obtener un valor de K en función de las propiedades observables o calculadas de la estrella. Este enfoque es particularmente útil cuando no se cuenta con información detallada sobre la composición o temperatura interna, pero sí con datos observacionales, o simulaciones, de masa y radio.

Métodos

Para estudiar la estructura interna de las politropas Newtonianas, se resolvió numéricamente la ecuación de Lane-Emden mediante el método Runge-Kutta de cuarto orden, implementado en una rutina en Python (Python Software Foundation, 2021). Este método de integración permite ajustar dinámicamente el tamaño del paso en función de la precisión requerida, garantizando así la confiabilidad de las soluciones (Epperson, 2013; Kiusalaas, 2013).

La integración se realizó en el intervalo $\xi \in [0, 173]$, utilizando una tolerancia relativa de 10^{-12} y una tolerancia absoluta de 10^{-14} , con un millón de puntos de evaluación distribuidos uniformemente. Para determinar el borde de la configuración estelar, se implementó un evento de parada que detiene la integración cuando la función $\theta(\xi)$ se hace no positiva, definiendo así el radio adimensional ξ_1 .

Las soluciones numéricas se obtuvieron para algunos índices politrópicos $n \in [0, 5]$, incluyendo los casos especiales $n = 0, 1, 5$, que poseen soluciones analíticas conocidas. La validación de los resultados mostró una excelente concordancia entre las soluciones numéricas y las analíticas en estos casos particulares, confirmando la precisión del método implementado.

Se realizó un análisis estadístico de la constante de proporción K entre la masa y el radio para hallar la constante politrópica K para diferentes índices n , examinando su dependencia funcional con los parámetros estructurales de las configuraciones. A partir de las relaciones masa-radio derivadas del modelo de Lane-Emden, se determinaron los valores de K para cada índice politrópico mediante un procedimiento de ajuste que considera las condiciones físicas de las enanas blancas.

Por otro lado, se calculó numéricamente el momento de inercia para todo el rango de índices politrópicos mediante evaluación de la integral correspondiente. Los valores obtenidos se representaron gráficamente en función del índice n , observándose una curva suave y continua que coincide exactamente con los valores calculados analíticamente para $n = 0, 1, 5$.

Para obtener una expresión analítica aproximada del momento de inercia en función de n , se realizó un ajuste de curvas mediante varios métodos de aproximación. Se probaron modelos logarítmicos y polinomios de grados 2, 3 y 4, encontrándose que un polinomio de grado 4 proporciona el mejor ajuste a los resultados numéricos. Este modelo permite calcular el momento de inercia para cualquier índice politrópico dentro del rango estudiado.

sin recurrir a métodos numéricos, manteniendo una precisión comparable con los resultados de integración directa.

Resultados

Soluciones de la ecuación de Lane-Emden

Los perfiles de densidad, obtenidos mediante la solución numérica de la ecuación de Lane-Emden para distintos índices politrópicos n , se presentan en la Fig. 2. La gráfica incluye tanto los casos con soluciones analíticas conocidas ($n = 0, 1$ y 5) como aquellos para los que solo es posible obtener soluciones numéricas. La ecuación (6) se puede expresar como un sistema de dos ecuaciones diferenciales de primer orden acopladas, definiendo la variable auxiliar $\phi = d\theta/d\xi$, lo que lleva a,

$$\frac{d\theta}{d\xi} = \phi, \quad (21a)$$

$$\frac{d\phi}{d\xi} = -\frac{2}{\xi}\phi - \theta^n, \quad (21b)$$

con las condiciones iniciales en las Ecs. (7).

Singularidad en el origen

El término $-2\phi/\xi$ en la Ec. (21b) introduce una singularidad de tipo regular en $\xi = 0$ que impide iniciar la integración numérica directamente desde el origen. Para evitar este obstáculo, se construye una solución en serie de potencias en un entorno del origen que sirva como condición de arranque del esquema de Runge-Kutta a partir de un ξ_{inicial} suficientemente pequeño. Ahora bien, antes de determinar los coeficientes de dicha serie conviene establecer una propiedad estructural de $\theta(\xi)$ que reduce sustancialmente el número de coeficientes independientes, la función θ es par alrededor del origen, de modo que su desarrollo de Taylor contiene exclusivamente potencias pares de ξ . El argumento se apoya en tres elementos.

En primer lugar, aunque la variable radial reescalada $\xi = r/a$ está definida sobre $\xi \geq 0$ por construcción, la simetría esférica del problema permite extender θ de forma natural a todo el eje real. En efecto, la densidad $\rho(r)$ en una configuración esféricamente simétrica depende únicamente de la magnitud de la coordenada radial, lo que motiva imponer $\theta(-\xi) = \theta(\xi)$ como definición de la extensión. En segundo lugar, esta paridad es compatible con la dinámica, la Ec. (6) es invariante bajo la reflexión $\xi \rightarrow -\xi$, pues el operador diferencial $\xi^{-2} d(\xi^2 d/d\xi)/d\xi$ involucra dos derivadas y el factor ξ^2 , de modo que los signos se compensan, y el término no lineal θ^n no depende explícitamente de ξ . Como consecuencia, si $\theta(\xi)$ es solución de la ecuación, la función reflejada $\theta(-\xi)$ también lo es. En tercer lugar, ambas soluciones satisfacen idénticas condiciones iniciales en el origen, $\theta(0) = 1$ y $\theta'(0) = 0$ [Ecs. (7)], de manera que el teorema de existencia y unicidad para problemas de valor inicial garantiza su coincidencia, $\theta(-\xi) = \theta(\xi)$ en todo el dominio de definición.

Establecida la paridad de θ , se sigue por diferenciación término a término que las derivadas de orden impar se anulan en el origen, $\theta^{(2k+1)}(0) = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}_0$. El desarrollo de Taylor de θ alrededor de $\xi = 0$ adopta entonces la forma

$$\theta(\xi) = 1 + \frac{\theta''(0)}{2} \xi^2 + \frac{\theta^{(4)}(0)}{24} \xi^4 + O(\xi^6),$$

en la que el término constante coincide con la condición de centralidad $\theta(0) = 1$ y los coeficientes restantes serán determinados a continuación mediante la sustitución de la serie en la propia ecuación de Lane-Emden.

$$\theta(\xi) = 1 + \frac{\theta''(0)}{2}\xi^2 + \frac{\theta^{(4)}(0)}{24}\xi^4 + O(\xi^6). \quad (22)$$

Para determinar los coeficientes, esta expansión se sustituye en la ecuación de Lane-Emden (6). El desarrollo de θ'' se obtiene mediante la expansión binomial,

$$\theta^n = (1+u)^n = 1 + nu + \frac{n(n-1)}{2}u^2 + O(u^3), \quad (23)$$

donde $u = \frac{\theta''(0)}{2}\xi^2 + \frac{\theta^{(4)}(0)}{24}\xi^4 + \dots$. Igualando, orden por orden en ξ , los coeficientes de las series (22) y (23) tras sustituirlas en (6), se encuentra

$$\theta''(0) = -\frac{1}{3}, \quad \theta^{(4)}(0) = \frac{n}{5}.$$

Por lo tanto, la expansión resultante es,

$$\theta(\xi) = 1 - \frac{1}{6}\xi^2 + \frac{n}{120}\xi^4 + O(\xi^6).$$

Así, el sistema de ecuaciones (21) en la región cerca al origen toma la forma

$$\frac{d\theta}{d\xi} = \phi, \quad (24a)$$

$$\frac{d\phi}{d\xi} = -\frac{1}{3} + \frac{n}{10}\xi^2 + O(\xi^4), \quad (24b)$$

lo que permite iniciar la integración numérica de manera estable evitando la singularidad.

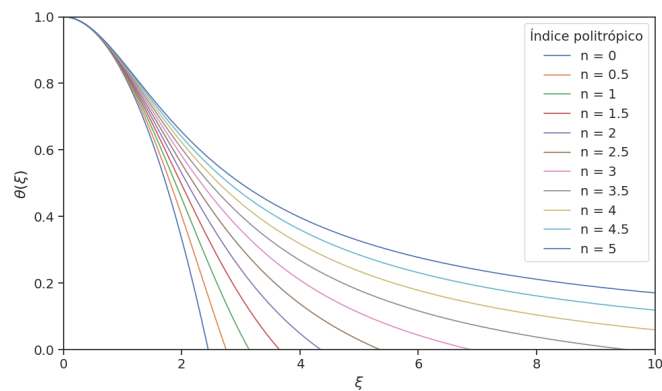


Figura 2. Perfiles de densidad derivados de la solución numérica de la ecuación de Lane-Emden para diferentes índices politrópicos n . Se incluyen tanto soluciones numéricas como analíticas donde están disponibles.

La Figura 2 presenta los perfiles de densidad adimensionales $\theta(\xi)$ obtenidos mediante la solución numérica de la ecuación de Lane-Emden para distintos índices politrópicos n . Los resultados muestran el comportamiento de la función $\theta(\xi)$ desde el origen hasta la superficie de la configuración, donde $\theta(\xi_1) = 0$. Se observa que todos los perfiles comparten características comunes, presentan su valor máximo en el centro [$\theta(0) = 1$] y decrecen monótonamente hacia la superficie. Sin embargo, la forma específica de cada perfil muestra una dependencia con el índice politrópico n . Para valores bajos de n , la densidad disminuye gradualmente, resultando en configuraciones con una distribución de masa más extendida.

En contraste, para valores mayores de n , los perfiles muestran una disminución más pronunciada cerca del centro, seguida de una cola extendida, lo que indica una mayor concentración de masa en las regiones centrales. Las soluciones también fueron comparadas con los resultados reportados en (**Chandrasekhar**, 1967, p. 96), lo que valida la precisión del método usado para los valores de n .

Tabla 1. Valores de constantes derivadas de las soluciones de la ecuación de Lane-Emden. El símbolo indica que la cantidad correspondiente no está definida en ese índice porque su expresión analítica involucra un exponente singular de la forma $q/0$

n	ξ_1	$-\xi^2 \left(\frac{d\theta}{d\xi} \right)$	ω_n	N_n
0	2.4493	4.8981	0.3333	
0,5	2.7526	3.7886	0.0240	2.5240
1	3.1415	3.1416		0.6367
1,5	3.6536	2.7141	132.23666	0.4242
2	4.3529	2.4110	10.4949	0.3647
2.5	5.3552	2.1872	3.8266	0.3515
3	6.8968	2.0182	2.0182	0.3639
3.5	9.5358	1.8906	1.2044	0.4010
4	14.9714	1.7972	0.7292	0.4772
4.5	31.8364	1.7378	0.3944	0.6580
5	∞	1.7318	0	∞

Determinación inversa de la constante K a partir de la relación masa-radio

Como se mostró en la [Ec. (20)], la constante K está fijada por la microfísica del fluido. Para enanas blancas, los dos casos canónicos son el régimen degenerado no relativista, asociado al índice $n = 3/2$,

$$K_{nr} = \frac{(3\pi^2)^{2/3}}{5} \frac{\hbar^2}{m_e(\mu_e m_H)^{5/3}} \approx 3.16 \times 10^{12} \left(\frac{\mu_e}{2} \right)^{-5/3} \text{ cm}^4 \text{ g}^{-2/3} \text{ s}^{-2}, \quad (25)$$

y el régimen degenerado ultra-relativista, asociado al índice $n = 3$,

$$K_{ur} = \frac{(3\pi^2)^{1/3}}{4} \frac{\hbar c}{(\mu_e m_H)^{4/3}} \approx 4.94 \times 10^{14} \left(\frac{\mu_e}{2} \right)^{-4/3} \text{ cm}^3 \text{ g}^{-1/3} \text{ s}^{-2}, \quad (26)$$

donde μ_e es el peso molecular medio por electrón (**Chandrasekhar**, 1967, p. 421). Una vez fijados n y K , el modelo politrópico es una familia uniparamétrica en la densidad central ρ_c , cada ρ_c genera un único par (M, R) a través de las Ecs. (8) y (13), y la trayectoria $M(R)$ es la curva unidimensional dada por la Ec. (17). La pregunta complementaria que se aborda en esta subsección es la inversa; Dada una nube observacional (M, R) típica de enanas blancas, ¿qué valores de K resultan compatibles con un modelo politrópico de índice n ? Esta inversión, definida punto a punto por la Ec. (19), ofrece un análisis de consistencia entre el modelo politrópico y los rangos observacionales y permite contrastar el resultado con los valores microfísicos canónicos K_{nr} y K_{ur} .

Por otro lado, el estudio de la relación masa-radio en enanas blancas, bajo el marco de modelos politrópicos Newtonianos, permite explorar a partir de datos simulados y soluciones numéricas, la caracterización de la constante de proporcionalidad que conecta la masa total M [Ec. (13)] y el radio R [Ec. (8)], por lo que se generaron conjuntos de datos que abarcan el rango físico realista para enanas blancas, considerando masas entre $0.08 M_\odot$ y $1.44 M_\odot$.

(el límite de Chandrasekhar) (Chandrasekhar, 1967; Kippenhahn, Weigert, & Weiss, 2012; Shapiro & Teukolsky, 1983), y radios entre $0.008 R_{\odot}$ y $0.01 R_{\odot}$, donde, $M_{\odot}$ es la masa solar y $R_{\odot}$ es el radio solar, valores que reflejan observaciones astronómicas y simulaciones previas (Araujo & Chirenti, 2011; Chandrasekhar, 1967; Kippenhahn, Weigert, & Weiss, 2012; Shapiro & Teukolsky, 1983).

Al calcular la constante de proporcionalidad $\lambda = M/R^{\frac{3-n}{1-n}}$, para cada combinación masa radio dentro del rango característico de una enana blanca, se obtuvieron resultados para distintos índices politrópicos. Sin embargo, es evidente a partir de la Ec. (16) que la constante λ puede expresarse como Ec. (17).

Conviene precisar que la naturaleza de este muestreo es na secuencia politrópica con (n, K) fijos traza la curva unidimensional $M \propto R^{(3-n)/(1-n)}$ y no una región rectangular en el plano (M, R) , de modo que el muestreo cartesiano cubre parejas que, en general, no corresponden a una secuencia de equilibrios politrópicos con un único K . La distribución resultante de λ debe entonces interpretarse como la distribución marginal de λ bajo medidas uniformes en los intervalos observacionales de M y R , equivalentemente, como un análisis de sensibilidad de K sobre la nube observacional, no como una probabilidad física sobre K .

Por ejemplo, para $n = 3$ es posible determinar el rango de valores de K entre $7.131 \times 10^{13} \text{ cm}^3 \text{ g}^{-1/3} \text{ s}^{-2}$, y $4.807 \times 10^{14} \text{ cm}^3 \text{ g}^{-1/3} \text{ s}^{-2}$, calculado directamente a partir de la Ec. (14) para la configuración analizada, orden de magnitud similar a los usados por Araujo & Chirenti (2011), sin necesidad de recurrir a un tratamiento estadístico de la constante de proporcionalidad λ . De manera análoga, para el caso $n = 1$, se puede obtener un valor de K entre $4.135 \times 10^{10} \text{ cm}^5 \text{ g}^{-1} \text{ s}^{-2}$ y $6.461 \times 10^{10} \text{ cm}^5 \text{ g}^{-1} \text{ s}^{-2}$ a partir de la Ec. (9); sin embargo, en estos dos límites, la masa y el radio permanecen constantes respectivamente.

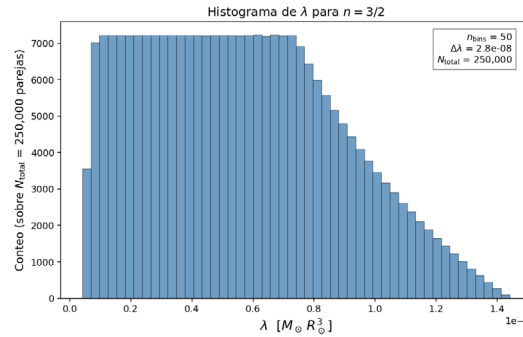


Figura 3. Histograma de la constante de proporcionalidad $\lambda = M/R^{(3-n)/(1-n)}$ calculada para $n = 3/2$ sobre las $N_{\text{total}} = 2.5 \times 10^5$ parejas (M, R) generadas mediante el muestreo cartesiano descrito en el texto, con $M \in [0.08; 1.44] M_{\odot}$ y $R \in [0.008; 0.01] R_{\odot}$. El eje horizontal reporta los valores de λ en unidades de $M_{\odot} R_{\odot}^3$ (las que corresponden a $n = 3/2$); el eje vertical reporta el conteo absoluto de parejas en cada barra.

Para el índice politrópico $n = 3/2$, la distribución de la constante de proporcionalidad λ (Figura 3) presenta una forma asimétrica con un máximo pronunciado entre 0.1×10^{-6} y 0.7×10^{-6} . Esta meseta indica los valores de λ más frecuentes, los cuales están relacionados con la constante politrópica K mediante la expresión (17).

Tomando los valores de λ correspondientes a las frecuencias máximas del histograma, es posible determinar un rango representativo de K entre $1.15 \times 10^{12} \text{ cm}^4 \text{ g}^{-2/3} \text{ s}^{-2}$, y $2.20 \times 10^{12} \text{ cm}^4 \text{ g}^{-2/3} \text{ s}^{-2}$, que caracteriza las configuraciones politrópicas más probables para este índice. Este rango concentra la mayor densidad de ocurrencias, lo que sugiere que los valores de K obtenidos corresponden a combinaciones que dan valores de masa y radio dentro de los rangos observacionales aceptados para dichas configuraciones. La

forma decreciente del histograma hacia valores mayores de λ , y por tanto de K , indica que configuraciones con constantes más altas son menos probables o menos representativas del equilibrio hidrostático para los valores de masa y radio usados para enanas blancas.

Es importante aclarar, en consonancia con la observación anterior, que dicho rango no debe leerse como la distribución de probabilidad de K , sino como el conjunto de valores que un modelo politrópico de índice $n = 3/2$ requeriría para reproducir las parejas (M, R) más densas del rectángulo observacional bajo medida uniforme.

Una vez estimados los valores de la constante K a partir de la constante de proporcionalidad λ , se emplearon las ecuaciones para la masa total M [Ec. (13)] y el radio R [Ec. (8)] derivadas de la ecuación de Lane–Emden para el índice politrópico $n = 3/2$ la masa y el radio dependientes de ρ_c tomando valores entre 10^5 y $2.35 \times 10^7 \text{ g cm}^{-3}$ (Shapiro & Teukolsky, 1983, p. 150).

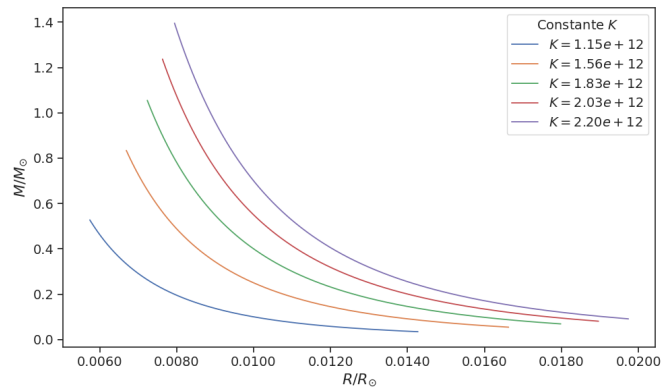


Figura 4. Relación masa–radio para $n = 3/2$ construida a partir de los valores de K compatibles con la moda de la Figura 3. Las curvas se obtienen variando ρ_c con K fijo, lo que sí define una secuencia politrópica auténtica.

La Figura 4 muestra el comportamiento inverso entre masa y radio característico de las enanas blancas modeladas como politropas no relativistas. La masa está medida en unidades de la masa solar, y el radio en unidades del radio solar. Observe que a medida que el radio disminuye, la masa aumenta. El desplazamiento de las curvas hacia masas mayores con el incremento de K indica que una constante politrópica más alta corresponde a una EdeE más rígida, es decir, una mayor presión para una misma densidad central, dando lugar a representaciones y configuraciones similares a las expuestas por (Shojai *et al.*, 2015).

Para el índice politrópico $n = 2$, la distribución de la constante de proporcionalidad λ , mostrada en la Figura 5, muestra un comportamiento notablemente diferente al caso $n = 3/2$. a diferencia del índice $3/2$ acá se observa una distribución más amplia con máxima frecuencia en la región de $\lambda \approx 0.001 - 0.011$. Esta mayor dispersión en los valores de λ sugiere que para $n = 2$ existe un rango más amplio de constantes K comprendido entre $7.24 \times 10^{12} \text{ cm}^{7/2} \text{ g}^{-1/2} \text{ s}^{-2}$, y $3.09 \times 10^{13} \text{ cm}^{7/2} \text{ g}^{-1/2} \text{ s}^{-2}$, que pueden dar lugar a configuraciones consistentes con los valores aceptados de masa y radio. La presencia de múltiples valores de λ con frecuencias significativas indica que, a diferencia del caso $n = 3/2$ donde existía una configuración claramente preferente, para $n = 2$ hay varias combinaciones Masa-Radio que son igualmente probables. Finalmente, la Figura 5 sugiere que configuraciones con constantes K más altas son relativamente más frecuentes que en el caso $n = 3/2$.

La relación entre la masa y el radio para el índice politrópico $n = 2$, presentada en la Figura 6, muestra que a medida que el radio de la configuración disminuye, la masa total aumenta. Por otro lado, las distintas curvas correspondientes a valores de la constante politrópica

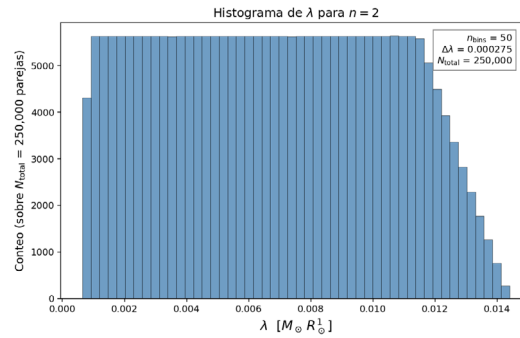


Figura 5. Histograma de $\lambda = M/R^{(3-n)/(1-n)}$ para $n = 2$, construido bajo el mismo muestreo que la Figura 3 ($N_{\text{total}} = 2,5 \times 10^5$ parejas (M, R) en el mismo rectángulo observacional). El eje horizontal reporta los valores de λ en unidades de $M_{\odot} R_{\odot}$ (las que corresponden a $n = 2$); el eje vertical reporta el conteo absoluto de parejas en cada barra. La mayor dispersión respecto al caso $n = 3/2$ refleja la dependencia funcional de $\lambda(M, R)$ propia de este índice (los exponentes hacen que λ varíe sobre un rango más amplio al barrer el rectángulo).

K en el rango de 10^{13} en unidades cgs, muestran cómo este parámetro escala la relación fundamental Masa–Radio. Valores mayores de K permiten configuraciones con mayor masa para un radio dado.

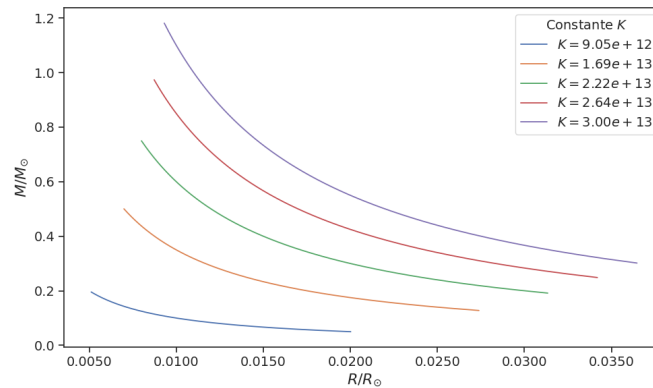


Figura 6. Relación masa–radio obtenida para el índice politrópico $n = 2$ utilizando los valores de K calculados a partir de la constante de proporcionalidad λ .

Los rangos de K obtenidos por inversión pueden contrastarse cuantitativamente con los valores microfísicos canónicos K_{nr} y K_{ur} introducidos al inicio de esta subsección. Para $n = 3$, el rango $K \in [0.71, 4.81] \times 10^{14}$ cgs calculado vía la Ec. (14) se aproxima al valor canónico $K_{\text{ur}} \approx 4.94 \times 10^{14} (\mu_e/2)^{-4/3}$ cgs, lo que confirma la consistencia del modelo politrópico ultra-relativista con los rangos observacionales adoptados. Para $n = 3/2$, el rango $K \in [1.15, 2.20] \times 10^{12}$ cgs extraído de la moda del histograma muestra el mismo orden de magnitud de K_{nr} .

Por último, las incertidumbres sobre K inducidas por las incertidumbres observacionales σ_M y σ_R se obtienen por propagación estándar a partir de la Ec. (19),

$$\frac{\sigma_K}{K} = \sqrt{\left(\frac{n-1}{n}\right)^2 \left(\frac{\sigma_M}{M}\right)^2 + \left(\frac{3-n}{n}\right)^2 \left(\frac{\sigma_R}{R}\right)^2}. \quad (27)$$

La Ec. (27) muestra que la sensibilidad de K a las incertidumbres observacionales depende

del índice politrópico: para $n \rightarrow 1$, K se vuelve insensible a σ_M ; para $n \rightarrow 3$, insensible a σ_R . Por ejemplo, incertidumbres relativas del 10% en M y 5% en R producen $\sigma_K/K \approx 6\%$ para $n = 3/2$ y $\sigma_K/K \approx 7\%$.

Momento de Inercia en Modelos Politrópicos

El momento de inercia I es una cantidad fundamental que caracteriza la distribución de masa en un cuerpo en rotación. Para estrellas compactas como las enanas blancas, su cálculo permite modelar la evolución rotacional y estimar la energía cinética almacenada (**Hartle**, 1967; **Horedt**, 2004; **Ravenhall & Pethick**, 1994; **Shapiro & Teukolsky**, 1983).

Para una configuración esféricamente simétrica, el momento de inercia se define como:

$$I = \frac{8\pi}{3} \int_0^R \rho(r) r^4 dr, \quad (28)$$

donde R es el radio total y $\rho(r)$ es el perfil de densidad.

En el marco del modelo politrópico, donde la estructura interna está determinada por la solución $\theta(\xi)$ de la ecuación de Lane-Emden (6), es posible expresar el momento de inercia en forma adimensional. Sustituyendo las relaciones de escala del modelo [Ec. (5)] en la ecuación (28), se obtiene:

$$I = \frac{8\pi}{3} \rho_c a^5 \int_0^{\xi_1} \theta^n \xi^4 d\xi. \quad (29)$$

Combinando esta expresión con las ecuaciones para la masa total M [Ec. (13)] y el radio R [Ec. (8)] de la politropa, se deduce que el momento de inercia puede escribirse en la forma normalizada mediante manipulaciones algebraicas de las ecuaciones y puede expresarse en términos de la solución de Lane-Emden como,

$$\tilde{I} \equiv \frac{I}{MR^2} = \frac{2}{3} \frac{\int_0^{\xi_1} \xi^4 \theta^n d\xi}{\xi_1^2 \left(-\xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} \right)_{\xi=\xi_1}}. \quad (30)$$

Esta expresión final permite calcular el momento de inercia, directamente a partir de las soluciones numéricas de la ecuación de Lane-Emden [Ec. (6)]. Sin embargo, es importante destacar que para la Eqc. (30) existen soluciones analíticas exactas para tres casos particulares del índice politrópico, a saber, $n = 0, 1, 5$, para los cuales disponemos de expresiones analíticas cerradas que facilitan la validación de los resultados numéricos.

El valor $n = 0$ corresponde a una configuración de densidad constante, cuyo momento de inercia da el valor bien conocido $\tilde{I} = 2/5$. Para $n = 1$, el momento de inercia normalizado se calcula como $\tilde{I} = 2(\pi^2 - 6)/3\pi^2 \approx 0.261$, lo cual coincide con el resultado reportado por **Beltracchi & Posada** (2025). En el límite $n = 5$, caracterizado por la solución $\theta_5(\xi) = (1 + \xi^2/3)^{-1/2}$ con radio infinito, también es posible calcular el momento de inercia normalizado. Sin embargo, este caso requiere un tratamiento particular debido a la naturaleza asintótica de la configuración. En este contexto, la integral relevante resulta ser,

$$\tilde{I} = \lim_{\xi_1 \rightarrow \infty} \frac{\int_0^{\xi_1} \xi^4 [(1 + \xi^2/3)^{-5/2}] d\xi}{\xi_1^2 \sqrt{3}}. \quad (31)$$

Resolviendo (31), se obtiene,

$$\tilde{I} = \lim_{\xi_1 \rightarrow \infty} \frac{9\sqrt{3} \left(\ln \left| \sqrt{3 + \xi_1^2} + \xi_1 \right| - \frac{1}{2} \ln(3) - \frac{4}{3} \right)}{\xi_1^2 \sqrt{3}}. \quad (32)$$

Observe que la ecuación (32) tiende a cero, lo que muestra que en configuraciones cuando el índice politrópico $n \rightarrow 5$, la contribución al momento de inercia disminuye, lo cual es coherente con la solución asintótica, donde el radio tiende a infinito.

Para valores del índice politrópico diferentes a $n = 0, 1, 5$, la evaluación debe realizarse mediante métodos numéricos, resolviendo primero la ecuación de Lane-Emden (6) y posteriormente integrando numéricamente la expresión (30).

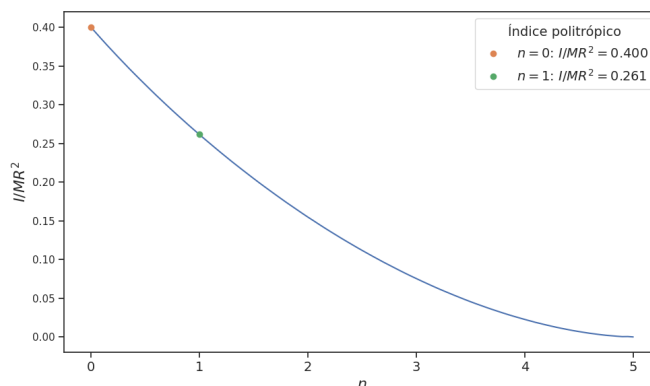


Figura 7. Momento de inercia normalizado $\tilde{I}$, en función del índice politrópico n , para configuraciones politrópicas Newtonianas. Los puntos marcados en color indican los casos $n = 0, 1$ con solución analítica conocida.

La Figura 7 muestra la variación del momento de inercia normalizado $\tilde{I}$ en función del índice politrópico n . La curva muestra los resultados obtenidos numéricamente, además, los puntos indicados en color, corresponden a los casos $n = 0, 1$ los cuales tienen solución analítica. Observe que el momento de inercia se aproxima a 0 cuando $n \rightarrow 5$.

Para complementar los resultados obtenidos mediante la resolución numérica de la ecuación de Lane-Emden (6), se utilizó un método de ajuste de curvas para encontrar una relación analítica que determine el momento de inercia en función del índice politrópico n . La figura 8 muestra la comparación entre la solución numérica para el momento de inercia normalizado $\tilde{I}$ y varias aproximaciones utilizando regresiones. En el gráfico principal, se presentan diferentes modelos de regresión; logarítmica (línea punteada roja), polinómica de grado 2 (línea verde a rayas), polinómica de grado 3 (línea azul punteada) y polinómica de grado 4 (línea morada punteada). Los círculos azules indican los puntos calculados por la solución analítica. El error absoluto de cada aproximación se muestra en el gráfico inferior, donde se observa que las regresiones de grado 3 y grado 4 presentan el menor error en comparación con la regresión logarítmica y la de grado 2. Esto indica que las aproximaciones polinómicas de mayor grado son más precisas, particularmente para valores más altos de n .

Esta aproximación permite estimar $\tilde{I}$ sin necesidad de resolver numéricamente las Ecs. (6) y (30) para cada índice n y permite disponer de expresiones para aproximar $\tilde{I}$. Considerando que el polinomio de grado 4 brinda el menor error absoluto, aquí sugerimos que el momento de inercia normalizado, en función del índice politrópico n , de politropas Newtonianas puede aproximarse analíticamente a través de la expresión

$$\tilde{I} \approx 0.0001776n^4 - 0.0019n^3 + 0.0203n^2 - 0.1570n + 0.3997. \quad (33)$$

La expresión polinómica propuesta reproduce bastante bien los casos analíticos conocidos, por ejemplo, para $n = 0$ devuelve $\tilde{I} = 0.3997$, lo cual es cercano a $2/5$; para $n = 1$, ec. (33) arroja $\tilde{I} = 0.261$, el cual se aproxima muy bien al valor exacto $2(\pi^2 - 6)/3\pi^2$.

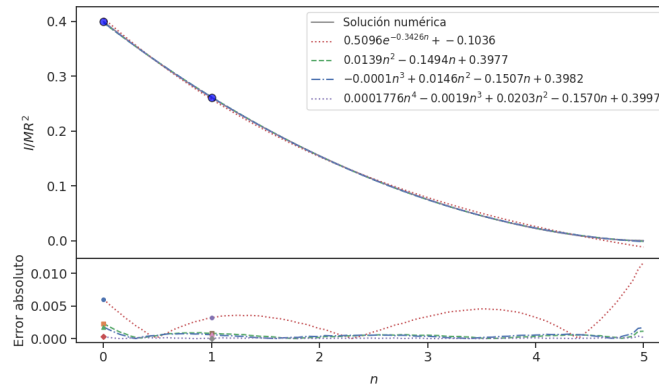


Figura 8. Comparación entre la solución numérica y las regresiones logarítmica y polinómicas (de grado 2, 3 y 4) para el momento de inercia normalizado, en función del índice politrópico n .

Bondad del ajuste y validación cuantitativa.

Para evaluar de manera rigurosa la calidad del ajuste polinómico de la Ec. (33), se reportan a continuación los detalles metodológicos del procedimiento numérico y las métricas de error asociadas. La malla de evaluación en el índice politrópico está conformada por

$$n_k = 0, 0.05, 0.10, \dots, 5.00, \quad k = 0, 1, \dots, 100, \quad (34)$$

es decir, $N = 101$ puntos uniformemente espaciados con paso $\Delta n = 0.05$ en el intervalo $n \in [0, 5]$. Para cada n_k se resolvió la Ec. (6) mediante el esquema descrito en la sección de Métodos y se evaluó $\tilde{I}(n_k)$ por integración numérica de la Ec. (30). La regresión polinómica se realizó por mínimos cuadrados ordinarios, equivalente a la minimización del residuo en norma L^2 ,

$$\min_{\{a_j\}} \sum_{k=0}^{N-1} \left(\tilde{I}(n_k) - \sum_{j=0}^d a_j n_k^j \right)^2, \quad (35)$$

para grados $d = 2, 3, 4$. Una alternativa habría sido el ajuste minimax (norma L^∞), que minimiza el error máximo absoluto en lugar del cuadrático medio; sin embargo, dado que el objetivo es disponer de una expresión analítica de uso general en $n \in [0, 5]$, el ajuste L^2 resulta más representativo del comportamiento global de $\tilde{I}(n)$ y es el procedimiento implementado por la rutina `numpy.polyfit` (Python Software Foundation, 2021).

Para cuantificar la calidad de los distintos ajustes se adopta las siguientes métricas, todas evaluadas sobre la malla (34): el coeficiente de determinación R^2 ; el error cuadrático medio $\text{RMSE} = (N^{-1} \sum_k r_k^2)^{1/2}$, donde $r_k = \tilde{I}(n_k) - \sum_j a_j n_k^j$; el error absoluto medio $\text{MAE} = N^{-1} \sum_k |r_k|$; y el error absoluto máximo $\|r\|_\infty = \max_k |r_k|$. Los resultados se resumen en la Tabla 3.

Tabla 2. Métricas de bondad del ajuste polinómico de $\tilde{I}(n)$ por mínimos cuadrados (norma L^2) sobre la malla de $N = 101$ puntos definida por la Ec. (34). Los errores relativos se reportan en la región $\tilde{I} > 0.01$, donde la división por valores cercanos a cero no infla artificialmente la métrica.

Modelo	R^2	RMSE	MAE	$\ r\ _\infty$
Polinomio grado 2	0.99997	6.0×10^{-4}	4.8×10^{-4}	2.3×10^{-3}
Polinomio grado 3	0.99998	5.6×10^{-4}	4.6×10^{-4}	1.8×10^{-3}
Polinomio grado 4 (Ec. (33))	0.99982	1.6×10^{-3}	1.1×10^{-3}	4.4×10^{-3}
Polinomio grado 4 (sin redondeo)	0.999999	9.7×10^{-5}	7.9×10^{-5}	3.8×10^{-4}

La Figura 9 muestra los residuos r_k en términos absolutos (panel izquierdo) y en términos relativos $|r_k/\tilde{I}(n_k)|$ (panel derecho, escala logarítmica). Dos comportamientos son notables. Primero, los residuos absolutos del polinomio en la Ec. (33) se mantienen por debajo de $\sim 5 \times 10^{-4}$ en $n \in [0, 2]$, pero crecen monótonamente hasta $\sim 4 \times 10^{-3}$ cerca de $n = 5$. Este crecimiento es consecuencia exclusiva del redondeo de los coeficientes a cuatro cifras, el polinomio de grado 4 con coeficientes sin redondear (curva verde) mantiene el residuo absoluto por debajo de $\sim 1 \times 10^{-4}$ en todo el rango y segundo, el error relativo del polinomio Ec. (33) se mantiene por debajo del 1% en $n \in [0, 3]$ y por debajo del 2.5% en $n \in [0, 4]$, valores que cubren con holgura los regímenes de mayor relevancia astrofísica ($n = 3/2$ y $n = 3$).

Tabla 3. Errores relativos del ajuste polinómico de $\tilde{I}(n)$ por mínimos cuadrados (norma L^2) sobre la malla de $N = 101$ puntos definida por la Ec. (34). Los errores relativos se reportan en la región $\tilde{I} > 0.01$ (es decir, $n \leq 4.35$), donde la división por valores cercanos a cero no infla artificialmente la métrica.

Modelo	Error rel. medio (%)	Error rel. máx. (%)
Polinomio grado 2	0.61	5.08
Polinomio grado 3	0.71	5.70
Polinomio grado 4 (Ec. (33))	2.46	25.24
Polinomio grado 4 (sin redondeo)	0.09	0.54

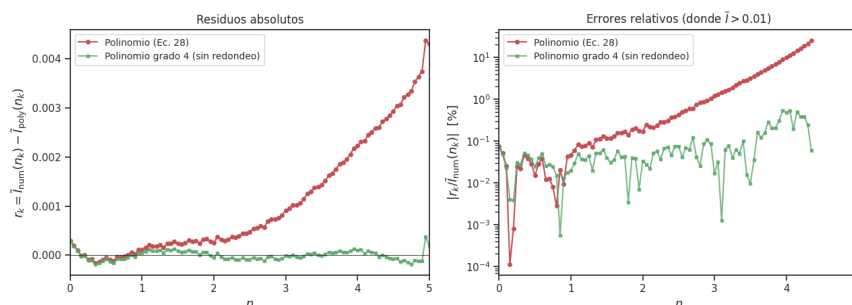


Figura 9. Residuos del ajuste polinómico de $\tilde{I}(n)$: panel izquierdo, residuos absolutos $r_k = \tilde{I}_{\text{num}}(n_k) - \tilde{I}_{\text{poly}}(n_k)$; panel derecho, errores relativos $|r_k/\tilde{I}_{\text{num}}(n_k)|$ en escala logarítmica, evaluados solo en la región donde $\tilde{I} > 0.01$. Se comparan el polinomio publicado en la Ec. (33) (rojo) y el ajuste de grado 4 sin redondear (verde).

La Figura 10 muestra los residuos absolutos de los polinomios de grados 2, 3 y 4 (sin redondeo de coeficientes) en escala logarítmica, junto con el polinomio Ec. (33) de grado 4 como referencia. Se observa con claridad que los polinomios de grado 2 y 3 producen residuos típicamente entre 10^{-4} y 10^{-3} sobre todo el intervalo, mientras que los polinomios de grado 4 alcanzan residuos un orden de magnitud menor (típicamente 10^{-5} a 10^{-4}). Esto justifica la elección del polinomio de grado 4 como expresión final para $\tilde{I}(n)$.

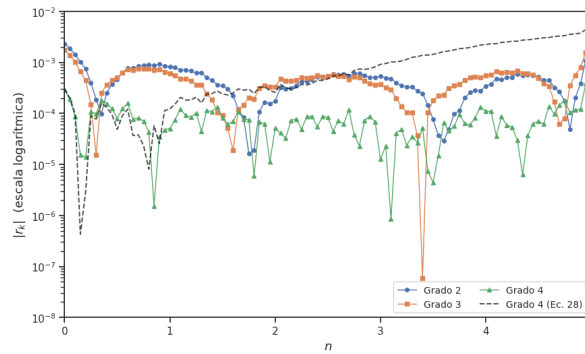


Figura 10. Residuos absolutos $|r_k|$ de los ajustes polinómicos de grado 2, 3, 4 y 5 (todos sin redondeo de coeficientes), junto con el polinomio publicado de grado 4 (línea discontinua negra), en escala logarítmica. Se aprecia la mejora de un orden de magnitud al pasar de grado 3 a grado 4, y el carácter marginal del salto a grado 5.

Finalmente, si se desea optimizar la precisión del ajuste sin renunciar a la forma polinómica de grado 4, basta con utilizar los coeficientes con mayor número de cifras significativas:

$$\begin{aligned} \tilde{I}(n) \approx & 1.7782 \times 10^{-4} n^4 - 1.8681 \times 10^{-3} n^3 + 2.0291 \times 10^{-2} n^2 \\ & - 1.5696 \times 10^{-1} n + 3.9971 \times 10^{-1}, \end{aligned} \quad (36)$$

con cuyo uso el error absoluto máximo en la malla (34) se reduce a 3.8×10^{-4} y el error relativo máximo en $\tilde{I} > 0.01$ es inferior al 0.6%. Esta expresión se recomienda en aplicaciones que requieran precisión por debajo del 1% en todo el rango $n \in [0, 4.9]$.

Discusión

Este trabajo ha proporcionado un análisis de algunas de las propiedades estructurales e integrales de las politropas Newtonianas, enfocándose en la resolución numérica de la ecuación de Lane-Emden y el estudio de propiedades clave como la relación masa-radio y el momento de inercia. A lo largo del estudio, los resultados obtenidos se validaron mediante la comparación con soluciones analíticas conocidas, lo que corroboró la precisión del método implementado.

Uno de los aspectos más relevantes de este trabajo fue el cálculo de la constante politrópica K , que conecta la masa y el radio de las estrellas. Este parámetro, dependiente de las características físicas del sistema, fue determinado mediante un ajuste estadístico basado en las condiciones observacionales de las enanas blancas. La relación masa-radio resultó ser fundamental para comprender cómo las configuraciones estelares varían según el índice politrópico n y cómo la constante K influye en la distribución de masa y presión dentro de las estrellas.

El análisis del momento de inercia en el modelo politrópico, utilizando regresiones, permitió desarrollar una aproximación analítica que evita la necesidad de cálculos numéricos extensivos. La regresión polinómica de grado 4 resultó ser una excelente aproximación para modelar el momento de inercia normalizado en función de n , proporcionando una expresión para este parámetro, lo que simplifica el cálculo sin sacrificar la exactitud.

En este trabajo, nos centramos en configuraciones politrópicas Newtonianas isotrópicas, pero se reconoce que este enfoque puede extenderse a modelos más complejos que incluyan anisotropía, como los estudiados por **Beltracchi & Posada** (2024a) y **Beltracchi & Posada**

(2025) en el caso relativista. La inclusión de anisotropía podría tener un impacto significativo en las propiedades obtenidas, lo que abre la puerta a futuras investigaciones.

Agradecimientos

Al profesor Camilo Posada Ph.D., por su constante apoyo, disposición y acompañamiento durante todo el desarrollo de este trabajo. Su guía ha sido fundamental en cada etapa, y su paciencia y dedicación me han permitido avanzar y mejorar en mi investigación. Aprecio profundamente todo el tiempo que me ha brindado y su invaluable ayuda.

Contribución de los autores

JC: Escritura del documento, participación en reuniones de discusión y análisis, redacción del artículo, investigación.

Conflicto de intereses

Los autores declaran no tener conflicto de intereses

References

- Araujo, F. M., & Chirenti, C. B. M. H. (2011) Newtonian and relativistic polytropes. *4th School on Cosmic Rays and Astrophysics*.
- Beltracchi, P., & Posada, C. (2024a) Slowly rotating anisotropic relativistic stars. *Phys. Rev. D*, *110*(2). <https://doi.org/10.1103/physrevd.110.024052>
- Beltracchi, P., & Posada, C. (2024b) Slowly rotating ultra-compact Schwarzschild star in the gravastar limit. *Class. Quantum Grav.*, *41*(4), 045001. <https://doi.org/10.1088/1361-6382/ad1a52>
- Beltracchi, P., & Posada, C. (2025) Slowly rotating covariant anisotropic objects. *Phys. Rev. D*, *112*(8), 084046. <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.112.084046>
- Bludman, S. A. (1973) Stability of general-relativistic polytropes. *Astrophys. J.*, *183*, 637–648. <https://doi.org/10.1086/152253>
- Breu, C., & Rezzolla, L. (2016) Maximum mass, moment of inertia and compactness of relativistic stars. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, *459*(1), 646–656. <https://doi.org/10.1093/mnras/stw575>
- Chandrasekhar, S. (1964) Dynamical Instability of Gaseous Masses Approaching the Schwarzschild Limit in General Relativity. *Phys. Rev. Lett.*, *12*, 114–116. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.12.114>
- Chandrasekhar, S., & Miller, J. C. (1974) On slowly rotating homogeneous masses in general relativity. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, *167*, 63–80. <https://doi.org/10.1093/mnras/167.1.63>
- Chandrasekhar, S. (1967) *An introduction to the study of stellar structure*. Dover Publications.
- Eddington, A. S. (1920) The internal constitution of the stars. *The Scientific Monthly*, *11*(4), 297–303. Retrieved May 4, 2025, from <http://www.jstor.org/stable/6491>
- Emden, R. (1907) *Gaskugeln: Anwendungen der mechanischen wärmetheorie auf kosmologische und meteorologische probleme (gas spheres: Applications of the mechanical theory of heat to cosmological and meteorological problems)*. B.G. Teubner.
- Epperson, J. F. (2013) *An introduction to numerical methods and analysis* (2nd ed.). Wiley.

- Hartle, J. B.** (1967) Slowly rotating relativistic stars. 1. Equations of structure. *Astrophys. J.*, 150, 1005–1029. <https://doi.org/10.1086/149400>
- Hartle, J. B., & Thorne, K. S.** (1968) Slowly Rotating Relativistic Stars. II. Models for Neutron Stars and Supermassive Stars. *Astrophys. J.*, 153, 807. <https://doi.org/10.1086/149707>
- Hladík, J., Posada, C., & Stuchlík, Z.** (2020) Radial instability of trapping polytropic spheres. *Int. J. Mod. Phys. D*, 29(05), 2050030. <https://doi.org/10.1142/s0218271820500303>
- Horedt, G. P.** (2004) *Polytropes : Applications in astrophysics and related fields*. Kluwer Academic Publishers.
- Horedt, G. P.** (2013) Early Evolution of Prestellar Cores. *Astrophys. J.*, 773(2), Article 131, 131. <https://doi.org/10.1088/0004-637X/773/2/131>
- Jiang, N., & Yagi, K.** (2020) Analytic I-Love-C relations for realistic neutron stars. *Phys. Rev. D*, 101(12), 124006. <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.101.124006>
- Kippenhahn, R., Weigert, A., & Weiss, A.** (2012) *Stellar structure and evolution*. Springer.
- Kiusalaas, J.** (2013) *Numerical methods in engineering with python 3* (3rd ed.). Cambridge University Press.
- Lane, H. J.** (1870) On the theoretical temperature of the sun, under the hypothesis of a gaseous mass maintaining its volume by its internal heat, and depending on the laws of gases as known to terrestrial experiment. *American Journal of Science and Arts*, s2-50, 57–74. <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:131102972>
- Lopes, I., & Panotopoulos, G.** (2019) Mass-to-radius profiles of newtonian polytropic spheres: Low-mass main-sequence stars in palatini gravity versus dark-matter-admixed low-mass stars in general relativity. *Phys. Rev. D*, 99, 103013. <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.99.103013>
- Posada, C., Hladík, J., & Stuchlík, Z.** (2020) Dynamical instability of polytropic spheres in spacetimes with a cosmological constant. *Phys. Rev. D*, 102, 024056. <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.102.024056>
- Python Software Foundation.** (2021) Python (versión 3.x). Retrieved November 11, 2025, from <https://www.python.org/>
- Raposo, G., Pani, P., Bezares, M., Palenzuela, C., & Cardoso, V.** (2019) Anisotropic stars as ultracompact objects in General Relativity. *Phys. Rev. D*, 99(10), 104072. <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.99.104072>
- Ravenhall, D. G., & Pethick, C. J.** (1994) Neutron Star Moments of Inertia. *Astrophys. J.*, 424, 846. <https://doi.org/10.1086/173935>
- Schaffner-Bielich, J.** (2020) *Compact star physics*. Cambridge University Press.
- Shapiro, S. L., & Teukolsky, S. A.** (1983) *Black holes, white dwarfs and neutron stars. The physics of compact objects*. Wiley, VCH. <https://doi.org/10.1002/9783527617661>
- Shojai, F., Fazel, M. R., Stepanian, A., & Kohandel, M.** (2015) On the Newtonian Anisotropic Configurations. *Eur. Phys. J. C*, 75(6), 250. <https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-015-3478-6>
- Stuchlík, Z., Hladík, S., & Novotný, J.** (2016) General relativistic polytropes with a repulsive cosmological constant. *Phys. Rev. D*, 94(10), 103513. <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.94.103513>
- Stuchlík, Z., Novotný, J., & Hladík, J.** (2025) Dark matter halos modeled by polytropic spheres influenced by the relict cosmological constant and trapping polytropes forming supermassive black holes. *Astron. Astrophys.*, 702, A2. <https://doi.org/10.1051/0004-6361/202554520>
- Tooper, R. F.** (1964) General relativistic polytropic fluid spheres. *Astrophys. J.*, 140, 434. <https://doi.org/10.1086/147938>