

SERIES PARA "e" DE GRAN CONVERGENCIA

FRANCISCO LLERAS

Es posible mejorar la velocidad de convergencia de las series infinitas haciendo uso del siguiente principio:

Sea una serie convergente infinita $S = \sum_{N=0}^{\infty} F(N)$, podemos tomar otra serie infinita, también

convergente $S_1 = \sum_{N=0}^{\infty} G(N)$ y redefinir la primera serie así: $S = S_1 + \sum_{N=0}^{\infty} [F(N) - G(N)]$

Con una adecuada escogencia de $G(N)$ es posible mejorar la velocidad de convergencia de la serie S .

Tomemos el caso de la serie factorial de "e" para ver que a pesar de ser una de las series más convergentes que se conocen, es posible mejorar esta convergencia en forma notable.

Tomemos como series auxiliares las "telescopicas" generadas en la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 1 &= \frac{1}{2!} + \frac{1}{2!} \\
 \frac{1}{2!} &= \frac{3}{3!} = \frac{2}{3!} + \frac{1}{3!} \\
 \frac{1}{3!} &= \frac{4}{4!} = \frac{3}{4!} + \frac{1}{4!} \\
 &\dots \\
 \frac{1}{N!} &= \frac{N+1}{(N+1)!} = \frac{N}{(N+1)!} + \frac{1}{(N+1)!}
 \end{aligned}$$

Haciendo los reemplazos correspondientes:

$$\begin{aligned}
 1 &= \left(\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} \dots + \frac{N}{(N+1)!} + \frac{1}{(N+1)!} \right) \\
 \frac{1}{K!} &= \left(\frac{K}{(K+1)!} + \frac{K+1}{(K+2)!} + \dots + \frac{K+N}{(K+N+1)!} + \frac{1}{(K+N+1)!} \right)
 \end{aligned}$$

$$\text{Por tanto: } 1 = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{N+1}{(N+2)!} \qquad \frac{P}{Q} = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{P(N+1)}{Q(N+2)!} \tag{1}$$

$$\frac{1}{K!} = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{K+N}{(K+N+1)!} \qquad \frac{P}{Q} \cdot \frac{1}{K!} = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{P(K+N)}{Q(K+N+1)!} \tag{2}$$

Ahora bien, si:

$$e = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{1}{N!}, \text{ definiendo a } 0! = 1$$

podemos hacer uso de la serie (1) así:

$$e = \frac{P}{Q} + \sum_{N=0}^{\infty} \left(\frac{1}{N!} - \frac{P(N+1)}{Q(N+2)!} \right) = \frac{P}{Q} + \sum_{N=0}^{\infty} \frac{Q(N+1)(N+2) - P(N+1)}{Q \cdot (N+2)!}$$

$$\text{o sea: } e = \frac{P}{Q} + \sum_{N=0}^{\infty} \frac{(N+1)(QN+2Q-P)}{Q \cdot (N+2)!}$$

$$\text{Si } P = 2Q \text{ tendremos } e = 2 + \sum_{N=0}^{\infty} \frac{N(N+1)}{(N+2)!}$$

$$\text{o sea } e = 2 + \sum_{N=0}^{\infty} \frac{(N+1)(N+2)}{(N+3)!} \quad (3)$$

Volviendo a usar la serie (1) tenemos:

$$e = 2 + \frac{P}{Q} + \sum_{N=0}^{\infty} \left(\frac{(N+1)(N+2)}{(N+3)!} - \frac{P(N+1)(N+3)}{Q(N+3)!} \right)$$

$$e = 2 + \frac{P}{Q} + \sum_{N=0}^{\infty} \frac{Q(N+1)(N+2) - P(N+1)(N+3)}{Q \cdot (N+3)!}$$

$$e = 2 + \frac{P}{Q} + \sum_{N=0}^{\infty} \frac{(N+1)((Q-P)N + 2Q - 3P)}{Q \cdot (N+3)!}$$

a) Si $\frac{P}{Q} = \frac{2}{3}$ entonces: $e = 2 \frac{2}{3} + \sum_{N=0}^{\infty} \frac{(N+1)N}{3 \cdot (N+3)!} = 2 \frac{2}{3} + \sum_{N=0}^{\infty} \frac{(N+1)(N+2)}{3 \cdot (N+4)!}$

b) Si $\frac{P}{Q} = \frac{1}{2}$ $e = 2\frac{1}{2} + \sum_{N=0}^{\infty} \frac{(N+1)^2}{2 \cdot (N+3)!}$

Podemos también volver sobre la serie (3) y usar como auxiliar la serie (2) en la forma siguiente para $K=2$:

$$e = 2 + \frac{1}{2} + \sum_{N=0}^{\infty} \left(\frac{(N+1)(N+2)}{(N+3)!} - \frac{N+2}{(N+3)!} \right) = 2\frac{1}{2} + \sum_{N=0}^{\infty} \frac{(N+2)N}{(N+3)!}$$

o sea: $e = 2\frac{1}{2} + \sum_{N=0}^{\infty} \frac{(N+1)(N+3)}{(N+4)!}$

Continuando este proceso se obtienen dos familias distintas de series, todas ellas de convergencia más rápida que la serie clásica factorial.

Vamos ahora a buscar series descendentes a partir de 3, siguiendo el mismo procedimiento.

De la serie (3) y haciendo uso de la auxiliar (1) tenemos:

$$e = 2 + 1 + \sum_{N=0}^{\infty} \left(\frac{(N+1)(N+2)}{(N+3)!} - \frac{(N+1)(N+3)}{(N+3)!} \right)$$

$$e = 3 + \sum_{N=0}^{\infty} \frac{(N+1)((N+2) - (N+3))}{(N+3)!} = 3 - \sum_{N=0}^{\infty} \frac{N+1}{(N+3)!}$$

Usando la serie (2) con $K=2$ tenemos:

$$e = 3 - \frac{1}{2!} \frac{P}{Q} - \sum_{N=0}^{\infty} \left(\frac{(N+1)}{(N+3)!} - \frac{P(N+2)}{Q \cdot (N+3)!} \right) = 3 - \frac{1}{2!} \frac{P}{Q} - \sum_{N=0}^{\infty} \frac{(Q-P)N + Q - 2P}{Q \cdot (N+3)!}$$

Para $Q=2P$ tenemos:

$$e = 3 - \frac{1}{2!} \frac{1}{2} - \sum_{N=0}^{\infty} \frac{N}{2 \cdot (N+3)!} = 3 - \frac{1}{2!} \frac{1}{2} - \sum_{N=0}^{\infty} \frac{N+1}{2 \cdot (N+4)!}$$

Nuevamente hacemos uso de la serie (2) con $K=3$

$$e = 3 - \frac{1}{2!} \frac{1}{2} - \frac{P}{Q} \frac{1}{2} \frac{1}{3!} - \sum_{N=0}^{\infty} \left(\frac{N+1}{2 \cdot (N+4)!} - \frac{P}{Q} \frac{(N+3)}{2 \cdot (N+4)!} \right)$$

$$e = 3 - \frac{1}{2!} \frac{1}{2} - \frac{1}{3!} \frac{1}{2} \frac{P}{Q} - \sum_{N=0}^{\infty} \frac{(Q-P)N + Q - 3P}{2Q \cdot (N+4)!}$$

Para $Q = 3P$ tendremos:
$$e = 3 - \frac{1}{2!} \cdot \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{3!} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} - \sum_{N=0}^{\infty} \frac{N}{3 \cdot (N+4)!}$$

o sea
$$e = 3 - \frac{1}{2!} \cdot \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{3!} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} - \sum_{N=0}^{\infty} \frac{N+1}{3 \cdot (N+5)!}$$

Repitiendo este proceso para $K = 4, 5, 6 \dots S$ tendremos:

$$e = 3 - \frac{1}{2!} \cdot \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{3!} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} - \frac{1}{4!} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} - \dots - \frac{1}{S!} \cdot \frac{1}{(S-1)} \cdot \frac{1}{S} - \sum_{N=0}^{\infty} \frac{N+1}{S \cdot (N+S+2)!}$$

Al hacer tender S hacia infinito la sumatoria tiende a 0, luego podemos poner:

$$e = 3 - \sum_{N=0}^{\infty} \frac{1}{(N+1)(N+2) \cdot (N+2)!} = 3 - \sum_{N=0}^{\infty} \frac{1}{N!(N+1)^2(N+2)^2}$$

Esta serie converge con mucha más rapidez que la clásica, veamos algunos valores comparativos:

<u>N</u>	<u>Clásica</u>	<u>Nueva</u>
0	1.00000..	<u>2.75000</u>
1	<u>2.00000</u> ..	<u>2.72222</u>
2	<u>2.50000</u> ..	<u>2.7187493055</u>
3	<u>2.66666</u> ..	<u>2.71833263111</u>
4	<u>2.70833</u> ..	<u>2.71828633481481</u> ...

Hemos subrayado las cifras exactas en cada serie para hacer más visible la comparación.

Para terminar, deseo expresar mi agradecimiento al doctor Eduardo Caro Cayzedo, quien con su colaboración e insinuaciones fue factor decisivo en la culminación de este trabajo.