INVERSION DE MATRICES

LUIS DE GREIFF BRAVO
Profesor de la Universidad Nacional
Medellín

El siguiente estudio se inicia con una breve demostración de un principio conocido, en el cual se ha basado uno de los métodos utilizados para efectuar la inversión de matrices.

Introduciendo el concepto de "anti-matriz" como producto diádico de un vector columnar por un vector línea, el autor presenta un procedimiento que conduce, mediante cómputos de fácil ejecución, a la matriz inversa de una matriz dada.

I

Uno de los procedimientos utilizados para la obtención de la matriz inversa de una matriz dada, A, consiste en multiplicar ésta sucesivamente, por matrices E_1, E_2, ..., E_k que le reduzcan a la matriz idéntica, I. Si se efectúan las mismas operaciones sobre la matriz I, se tendrá, como resultado, la matriz inversa de A, a saber, A^{-1}.

Demostración. — La hipótesis equivale en símbolos a la siguiente relación,

$$(1) \qquad E_k \ldots E_2 E_1 A = I$$

Si se multiplica la matriz I por las E_i, en el mismo orden que se ha seguido en (1), se tiene,

$$(2) \qquad E_k \ldots E_2 E_1 I = X$$

Vamos a demostrar que se cumple la relación,

$$(3) \qquad X = A^{-1}$$

Con tal fin, multiplicamos los dos lados de (1), a la derecha, por A^{-1}, para tener,

$$(4) \qquad E_k \ldots E_2 E_1 A A^{-1} = I A^{-1}$$

El primer lado, en virtud de la ley asociativa, vale,

$$(5) \qquad E_k \ldots E_2 E_1 (A A^{-1}) = E_k \ldots E_2 E_1 I$$

Por otra parte, el segundo lado de la misma (4) vale A^{-1}. En consecuencia,

$$E_k \ldots E_2 E_1 I = A^{-1}$$

como se quería demostrar.

El procedimiento de inversión a que dan base las relaciones (1) y (6), consiste en ir formando, paso a paso, la siguiente correspondencia, en la cual el primer par es dado,

$$(7) \qquad \begin{array}{ccccccc} A; & E_1 A; & E_2 E_1 A; & \ldots & I \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow \\ I; & E_1 I; & E_2 E_1 I; & \ldots & A^{-1} \end{array}$$

En la primera línea se tienen las matrices provenientes de A. En la segunda línea se tienen las matrices provenientes de I. En el trabajo numérico cada matriz y su correspondiente se hacen constar en una misma página.

En el análisis que se presenta en seguida, utilizaremos matrices de orden 4, lo que en nada disminuye la generalidad. Sea lo primero definir las matrices E_1, E_2, ... Estas matrices son *operadores* (operadores matriciales) cuya finalidad es ir transformando la matriz dada en la matriz idéntica, y, correlativamente, la matriz idéntica, I, en la matriz inversa.

Distinguiremos los operadores que reducen a 1 los términos de la diagonal principal. Son de la forma,

$$(8) \qquad \begin{bmatrix} 1/a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \text{ etc.}$$

o sea, son matrices que se deducen de la matriz idéntica, mediante división de uno solo de los términos (la unidad) de la diagonal principal, por el número que figura en posición homóloga en la matriz que se ha de transformar. Así, como primera operación se tendrá,

$$(9) \qquad \begin{bmatrix} 1/a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & a_{12}/a_{11} & a_{13}/a_{11} & a_{14}/a_{11} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

con resultados análogos para los otros casos. En la práctica la operación se reduce a efectuar la multiplicación de la horizontal i por el factor $1/a_{ii}$. El mismo factor opera sobre las matrices provenientes de I.

Otros operadores matriciales tienen por objeto producir *ceros* en cada una de las columnas de la matriz proveniente de A, a excepción del término correspondiente a la diagonal principal que, por la operación precedente se supone haber sido reducido a la unidad.

Para aclarar la explicación anterior, supongamos tener la matriz,

$$(10) \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b'_{31} & b'_{32} & 1 & b'_{34} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} \end{bmatrix}$$

Queremos lograr ceros, en la tercera columna de esta matriz. Con tal fin consideramos la siguiente:

$$(11) \quad E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -b_{13} & 0 \\ 0 & 1 & -b_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -b_{43} & 1 \end{bmatrix}$$

Esta matriz se descompone así,

$$(12)\quad E_{-3} = I + \left[\begin{array}{cccc} 0 & 0 & -b_{13} & 0 \\ 0 & 0 & -b_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b_{43} & 0 \end{array}\right]$$

teniéndose,

$$E_{-3} \times B = IB + \left[\begin{array}{cccc} 0 & 0 & -b_{13} & 0 \\ 0 & 0 & -b_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b_{43} & 0 \end{array}\right] \times B$$

$$= B + \left[\begin{array}{c} -b_{13} \\ -b_{23} \\ 0 \\ -b_{43} \end{array}\right] \left[\begin{array}{cccc} b_{31}; & b_{32}; & 1; & b_{34} \end{array}\right]$$

El segundo término —producto diádico— es la ***anti-matriz*** o ***anulante*** correspondiente a la columna Nº 3. Adicionándole a B se obtiene el resultado que se busca. El operador es ahora el vector-columnar el cual se aplica correlativamente a la línea correspondiente —tercera en este caso—, de la matriz proveniente de A y la matriz proveniente de I.

Como complemento de lo anterior se presenta en seguida un ejemplo numérico. Para eliminar posibles errores de cómputo, se ha introducido una columna, bajo la designación "k", la cual fue utilizada por Gauss en la solución de sistemas lineales por eliminación. Los números escritos bajo "k" son los *opuestos* de la suma algébrica de todos los elementos que constituyen la horizontal correspondiente en la matriz. La comprobación permanente de las operaciones consiste en sumar las horizontales a medida que aparecen, para constatar que tales sumas son iguales a cero.

$$\begin{array}{cl} & \quad k \\ A = \left[\begin{array}{rrrr} 2.5700 & -1.4900 & 3.1400 & 0 \\ 1.7500 & -3.1800 & -2.5000 & 1.8700 \\ -2.2900 & -2.8000 & 3.0800 & 2.4800 \\ 0 & 1.5700 & 2.1900 & 2.7800 \end{array}\right] & \begin{array}{|l} -4.2200 \rightarrowtail \\ -4.3000 \\ -0.4700 \\ -6.5400 \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{cl} I = \left[\begin{array}{rrrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] & \begin{array}{|l} -1 \quad \rightarrowtail \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{cl} \left[\begin{array}{rrrr} 1.0000 & -0.5798 & 1.2218 & 0.0000 \\ 1.7500 & 3.1800 & -2.5000 & 1.8700 \\ -2.2900 & -2.8000 & 3.0800 & 2.4800 \\ 0.0000 & 1.5700 & 2.1900 & 2.7800 \end{array}\right] & \begin{array}{|l} -1.6420 \leftarrowtail \\ -4.3000 \\ -0.4700 \\ -6.5400 \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{cl} \left[\begin{array}{rrrr} 0.3891 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] & \begin{array}{|l} -0.3891 \leftarrowtail \\ -1.0000 \\ -1.0000 \\ -1.0000 \end{array} \end{array}$$

Obs. Las flechas indican las horizontales que han sido afectadas por la primera operación. En la práctica basta sobreponer las nuevas líneas, a las primeras matrices, suprimiendo así repeticiones inútiles, que no obstante hemos hecho constar aquí para mayor claridad

$$\begin{array}{cl} & \quad k \\ \left[\begin{array}{rrrr} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1.7500 & -1.0146 & -2.1382 & 0 \\ 2.2900 & -1.3277 & 2.7979 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] & \begin{array}{|l} 0 \\ 2.8735 \\ -3.7602 \\ 0 \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{cl} \left[\begin{array}{rrrr} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.6809 & 0 & 0 & 0 \\ 0.8910 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] & \begin{array}{|l} 0 \\ 0.6809 \\ -0.8910 \\ 0 \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{cl} \left[\begin{array}{rrrr} 1.0000 & -0.5798 & 1.2218 & 0.0000 \\ 0.0000 & 4.1946 & -4.6382 & 1.8700 \\ 0.0000 & -4.1277 & 5.8779 & 2.4800 \\ 0.0000 & 1.5700 & 2.1900 & 2.7800 \end{array}\right] & \begin{array}{|l} -1.6420 \rightarrowtail \\ -1.4265 \\ -4.2302 \\ -6.5400 \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{cl} \left[\begin{array}{rrrr} 0.3891 & 0 & 0 & 0 \\ -0.6809 & 1 & 0 & 0 \\ 0.8910 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] & \begin{array}{|l} -0.3891 \\ -0.3191 \rightarrowtail \\ -1.8910 \\ -1.0000 \end{array} \end{array}$$

Aparecen aquí las Anti-matrices correspondientes a la primera columna. La suma de éstas con las anteriores son las últimamente escritas.

$$\begin{array}{cl} & \quad k \\ \left[\begin{array}{rrrr} 1.0000 & -0.5798 & 1.2218 & 0.0000 \\ 0.0000 & 1.0000 & -1.1057 & 0.4458 \\ 0.0000 & -4.1277 & 5.8779 & 2.4800 \\ 0.0000 & 1.5700 & 2.1900 & 2.7800 \end{array}\right] & \begin{array}{|l} -1.6420 \\ -0.3401 \leftarrowtail \\ -4.2302 \\ -6.5400 \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{cl} \left[\begin{array}{rrrr} 0.3891 & 0 & 0 & 0 \\ -0.1623 & 0.2384 & 0 & 0 \\ 0.8910 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] & \begin{array}{|l} -0.3891 \\ -0.0761 \leftarrowtail \\ -1.8910 \\ -1.0000 \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{cl} \left[\begin{array}{rrrr} 0 & 0.5798 & -0.6411 & 0.2585 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4.1277 & -4.5640 & 1.8401 \\ 0 & -1.5700 & 1.7359 & -0.6999 \end{array}\right] & \begin{array}{|l} -0.1972 \\ 0 \\ -1.4038 \\ 0.5340 \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{cl} \left[\begin{array}{rrrr} -0.0941 & 0.1382 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.6699 & 0.9840 & 0 & 0 \\ 0.2548 & -0.3743 & 0 & 0 \end{array}\right] & \begin{array}{|l} -0.0441 \\ 0 \\ -0.3141 \\ 0.1195 \end{array} \end{array}$$

Se ha reiniciado el ciclo de operaciones. A saber: reducción a la unidad del elemento diagonal y formación de las Antimatrices correspondientes a la segunda columna.

$$\begin{array}{cl} & \quad k \\ \left[\begin{array}{rrrr} 1 & 0 & 0.5807 & 0.2585 \\ 0 & 1 & -1.1057 & 0.4458 \\ 0 & 0 & 1.3139 & 4.3201 \\ 0 & 0 & 3.9259 & 2.0801 \end{array}\right] & \begin{array}{|l} -1.8392 \\ -0.3401 \\ -5.6340 \rightarrowtail \\ -6.0060 \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{cl} \left[\begin{array}{rrrr} 0.2950 & 0.1382 & 0 & 0 \\ -0.1623 & 0.2384 & 0 & 0 \\ 0.2211 & 0.9840 & 1 & 0 \\ 0.2548 & -0.3743 & 0 & 1 \end{array}\right] & \begin{array}{|l} -0.4332 \\ -0.0761 \\ -2.2051 \rightarrowtail \\ -0.8805 \end{array} \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{rrrr} 1 & 0 & 0.5807 & 0.2585 \\ 0 & 1 & -1.1057 & 0.4458 \\ 0 & 0 & 1 & 3.2880 \\ 0 & 0 & 3.9259 & 2.0801 \end{array}\right]\begin{array}{|l} -1.8392 \\ -0.3401 \\ -4.2880 \twoheadleftarrow \\ -6.0060 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{rrrr} 0.2950 & 0.1382 & 0 & 0 \\ -0.1623 & 0.2384 & 0 & 0 \\ 0.1683 & 0.7489 & 0.7611 & 0 \\ 0.2548 & -0.3743 & 0 & 1 \end{array}\right]\begin{array}{|l} -0.4332 \\ -0.0761 \\ -1.6783 \twoheadleftarrow \\ -0.8805 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{rrrr} 0 & 0 & -0.5807 & -1.9093 \\ 0 & 0 & 1.1057 & 3.6355 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3.9259 & -12.9084 \end{array}\right]\overset{\text{k}}{\begin{array}{|r} 2.4900 \\ -4.7412 \\ 0 \\ 16.8343 \end{array}}$$

$$\left[\begin{array}{rrrr} -0.0977 & -0.4349 & -0.4420 & 0 \\ 0.1861 & 0.8281 & 0.8415 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.6607 & -2.9401 & -2.9880 & 0 \end{array}\right]\begin{array}{|r} 0.9746 \\ -1.8557 \\ 0 \\ 6.5888 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{rrrr} 1 & 0 & 0 & -1.6508 \\ 0 & 1 & 0 & 4.0813 \\ 0 & 0 & 1 & 3.2880 \\ 0 & 0 & 0 & -10.8283 \end{array}\right]\begin{array}{|l} -0.6508 \\ -5.0813 \\ -4.2880 \\ 10.8283 \rightarrowtail \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{rrrr} 0.1973 & -0.2967 & -0.4420 & 0 \\ 0.0238 & 1.0665 & 0.8415 & 0 \\ 0.1683 & 0.7489 & 0.7611 & 0 \\ -0.4059 & -3.3144 & -2.9880 & 1 \end{array}\right]\begin{array}{|l} 0.5414 \\ -1.9318 \\ -1.6783 \\ -5.7083 \rightarrowtail \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{rrrr} 1 & 0 & 0 & -1.6508 \\ 0 & 1 & 0 & 4.0813 \\ 0 & 0 & 1 & 3.2880 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]\overset{\text{k}}{\begin{array}{|l} -0.6508 \\ -5.0813 \\ -4.2880 \\ -1 \twoheadleftarrow \end{array}}$$

$$\left[\begin{array}{rrrr} 0.1973 & -0.2967 & -0.4420 & 0 \\ 0.0238 & 1.0665 & 0.8415 & 0 \\ 0.1683 & 0.7489 & 0.7611 & 0 \\ 0.0375 & 0.3061 & 0.2759 & -0.0923 \end{array}\right]\begin{array}{|l} 0.5414 \\ -1.9318 \\ -1.6783 \\ -0.5272 \twoheadleftarrow \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{rrrr} 0 & 0 & 0 & 1.6508 \\ 0 & 0 & 0 & -4.0813 \\ 0 & 0 & 0 & -3.2880 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]\begin{array}{|r} -1.6508 \\ 4.0813 \\ 3.2880 \\ 0 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{rrrr} 0.0619 & 0.5053 & 0.4555 & -0.1524 \\ -0.1530 & -1.2493 & -1.1260 & 0.3767 \\ -0.1233 & -1.0065 & -0.9072 & 0.3035 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]\begin{array}{|r} -0.8703 \\ 2.1517 \\ 1.7334 \\ 0 \end{array}$$

$$I = \left[\begin{array}{rrrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]\overset{\text{k}}{\begin{array}{|r} -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{array}}$$

$$A^{-1} = \left[\begin{array}{rrrr} 0.2592 & 0.2086 & 0.0135 & -0.1524 \\ -0.1292 & -0.1828 & -0.2845 & 0.3767 \\ 0.0450 & -0.2576 & -0.1461 & 0.3035 \\ 0.0375 & 0.3061 & 0.2759 & -0.0923 \end{array}\right]\begin{array}{|r} -0.3289 \\ 0.2199 \\ 0.0551 \\ -0.5272 \end{array}$$

II

LAS CONSTANTES ELASTICAS EN LA TEORIA DE ESTRUCTURAS

1. Introducción. — La Mecánica racional considera dos funciones relativas a la distribución de la masa en un sólido o en un sistema de sólidos, a saber: el momento estático o de primer orden, que permite fijar el centro de gravedad; y el momento de inercia o momento de segundo orden, de esencial importancia en las ecuaciones de la Dinámica.

En la teoría de Estructuras elásticas, aparecen con frecuencia funciones de una magnitud elemental conocida con el nombre de *peso elástico,* la cual es, por definición,

$$dw = \frac{ds}{I_s} \tag{1-1}$$

expresión en la cual ds designa la longitud del elemento estructural; I_s, el momento de inercia de flexión, relativo al eje de gravedad normal al plano de la estructura.

La relación (1-1) define el peso elástico *absoluto* de un elemento. Por razones prácticas se considera muchas veces preferible considerar el peso elástico *relativo,* a saber,

$$dw' = \frac{I_c}{I_s} ds \tag{1-2}$$

En esta segnnda expresión, I_c, significa un momento de inercia de comparación: particularmente el que corresponde a una sección notable de la estructura, por ejemplo, la *clave* en un arco. Su introducción hace más perceptible la presencia de errores en los cálculos numéricos.

Las magnitudes definidas en (1-1) y en (1-2), son de carácter geométrico; es decir, dependen solamente de las *dimensiones* del elemento considerado. Por el contrario, se define el peso elástico *reducido,* a saber,

$$dw'' = \frac{I_c \, ds}{E \, I_s} \tag{1-3}$$

como una magnitud *física,* por contener en el denominador el módulo de elasticidad del material fundamental que constituye la estructura.

Las funciones que aparecen con frecuencia y que vamos a estudiar en este aparte, son los momentos estáticos de primer orden y de orden superior de los pesos elásticos, momentos que se calcularán con relación a ejes contenidos en el plano de la estructura, generalmente los ejes de coordenadas.

Limitándonos por ahora al caso de piezas rectas o casi rectas, cuyos ejes geométricos se suponen coincidir exacta o aproximadamente con el eje de abscisas; teniendo en cuenta que las magnitudes dadas en (1-2-3) son escalares, cuyo valor es independiente del sistema de coordenadas, definiremos el momento, orden m, n de la pieza con pesos elásticos dw, por medio de la integral definida,

$$(1\text{-}4) \qquad Gm,n = \int_{x_1}^{x_2} x^m \, (l - x)^n \, dw$$

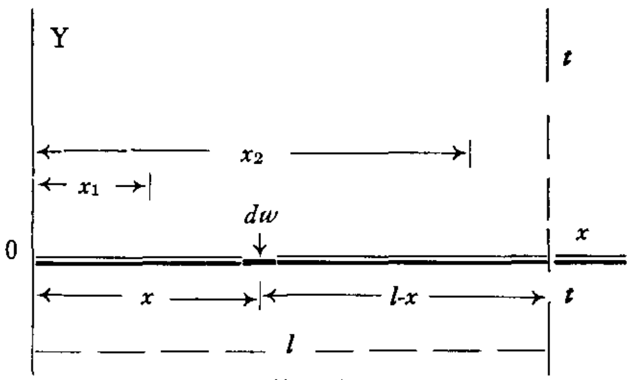

Figura 1

en la cual m, n son números enteros positivos. Los extremos x_1, x_2, de la integral, son los que convengan a la cuestión: generalmente (0; l).

Entre las integrales (1-4) distinguiremos algunos casos particulares.

Primero. n = 0. La integral viene a ser, en este caso,

$$(1\text{-}5) \qquad Gm,0 = \int x^m \, dw$$

Segundo. m = 0. La integral se expresa entonces así,

$$(1\text{-}6) \qquad G0,n = \int (l - x)^n \, dw$$

En (1-5), (1-6), se presentan a menudo los sub-casos siguientes, m = 0, o, respectivamente, n = 0. Se tiene,

$$(1\text{-}7) \qquad G0,0 = \int dw$$

que expresa simplemente el peso elástico total de la pieza.
m = 1. Se tiene, en (1-5),

$$(1\text{-}8) \qquad G1,0 = \int x \, dw$$

Es el momento de primer orden de los pesos elásticos respecto del eje Y (Figura 1).
n = 1, refiriéndose a (1-6). Se tiene,

$$(1\text{-}9) \qquad G0,1 = \int (l - x) \, dw$$

Es el momento de primer orden de los pesos elásticos con relación al eje t-t.
m = 2, en (1-5). Se tiene,

$$(1\text{-}10) \qquad G2,0 = \int x^2 \, dw$$

Es momento de segundo orden (momento inercial) respecto del eje de las Y. Asimismo,

$$(1\text{-}11) \qquad G0,2 = \int (l - x)^2 \, dw$$

es momento de segundo orden respecto del eje t — t.

Sea ahora, m = 1; n = 1. Se tiene,

$$(1\text{-}12) \qquad G1,1 = \int x \, (l - x) \, dw$$

que es un momento mixto de pesos elásticos respecto de los dos ejes paralelos (Y; t — t). Corresponde al producto inercial.

En el presente estudio nos vamos a aplicar casi exclusivamente al análisis de la forma (1-5), porque, como veremos luego, a ella se reducen todas las demás.

En el análisis que se da a continuación se han utilizado recursos de Algebra operacional. Para simplificar la escritura suprimiremos —como ya lo hicimos en casi todas las fórmulas aquí escritas— la indicación de los extremos en las integrales.

Sea la expresión del momento de orden m, n escrita en (1-4). Teniendo en cuenta que la fórmula de Newton para el desarrollo del binomio puede sintetizarse en lo siguiente,

$$(1\text{-}13) \qquad (l - x)^n = \sum_{v=0}^{n} (-1)^v \binom{n}{v} l^{n-v} x^v$$

e introduciendo esta sumatoria en la misma (1-4), se tiene,

$$(1\text{-}14) \qquad Gm,n = \int x^m \sum_{v=0}^{n} (-1)^v \binom{n}{v} l^{n-v} x^v \, dw$$

y, puesto que m es constante en el curso de un mismo cálculo, se puede volver a escribir la (1-14), como sigue,

$$(1\text{-}15) \qquad Gm,n = \int \sum_{v=0}^{n} (-1)^v \binom{n}{v} l^{n-v} x^{m+v} \, dw$$

Intercambiando ahora la integral y la sumatoria, viene a ser,

$$(1\text{-}16) \qquad Gm,n = \sum_{v=0}^{n} (-1)^v \binom{n}{v} l^{n-v} \int x^{m+v} \, dw$$

la cual, teniendo en cuenta (1-5), es,

$$(1\text{-}17) \qquad Gm,n = \sum_{v=0}^{n} (-1)^v \binom{n}{v} l^{n-v} \, Gm + v,0$$

Esta expresión puede descomponerse en factores simbólicos, a saber,

$$(1\text{-}18) \qquad Gm,n = \left[\sum_{v=0}^{n} (-1)^v \binom{n}{v} l^{n-v} \, Gv,0 \right] Gm,0$$

Entre el corchete aparece un desarrollo binómico, de la forma (1-13), luego, se tiene,

$$(1\text{-}19) \qquad Gm,0 = (l\cdot - G_{\cdot},0)^{(n)} \, Gm,0$$

donde se indica mediante un punto el lugar que debe ser ocupado con el exponente o bien con el índice al efectuar el desarrollo simbólico.

Así por ejemplo, la (1-19) nos da, para m = 2, n = 3, lo siguiente,

$$\begin{aligned} G2,3 &= (l\cdot - G_{\cdot},0)^{(3)} \, G2,0 \\ (1\text{-}20) \qquad &= (l^3 - 3\,l^2\, G1,0 + 3\,l\, G2,0 - G3,0)\; G2,0 \\ &= l^3\, G2,0 - 3\,l^2\, G3,0 + 3\,l\, G4,0 - G5,0 \end{aligned}$$

De la (1-19), al dividir simbólicamente por $Gm,0$, se obtiene,

$$(1\text{-}21) \qquad G0,n = (l\cdot - G_{\cdot},0)^{(n)}$$

fórmula que, por otra parte, resulta fácil obtener directamente. En efecto,

$$(1\text{-}22) \qquad G0,n = \int (l - x)^n \, dw$$

da, al desarrollar el binomio comprendido en el integrando,

$$(1\text{-}23) \qquad G0,n = \int \sum_{v=0}^{n} (-1)^v \binom{n}{v} l^v x^{n-v} \, dw$$

Se intercambian ahora la integral y la sumatoria, para tener,

$$(1\text{-}24)\qquad G0,n = \sum_{v=0}^{n} (-1)^{v} \binom{n}{v} l^{v} \int x^{n-v}\, dw = \sum_{v=0}^{n} (-1)^{v} \binom{n}{v} l^{v}\, Gn-v$$

de donde, finalmente, se obtiene,

$$(1\text{-}25)\qquad G0,n = (l^{\cdot} - G_{\cdot},0)^{(n)}$$

como habíamos ya encontrado en (1-21). Así, por ejemplo, para n = 2, es,

(1-26)

$$G0,2 = (l^{\cdot} - G_{\cdot},0)^{(2)} = l^{2}\, G0,0 - 2\,l\, G1,0 + G2,0$$

2. *Cambio de ejes.* — Es interesante estudiar cómo varía la magnitud $Gm,0$ cuando se cambia el origen de abscisas, en sistemas colineales. (La generalización de esta teoría para sistemas de coordenadas en el plano, no se presenta en este trabajo). Se trata, en otras palabras, de dar las fórmulas de transformación de la magnitud definida en (1-5), en los casos siguientes:

Primero. — Ejes colineales dirigidos en un mismo sentido. El origen del sistema acentuado tiene por abscisa (c) respecto del sistema no acentuado (Figura 2).

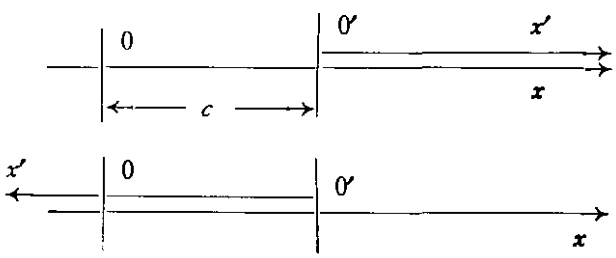

Figura 2

Segundo. — Ejes colineales dirigidos en sentido contrario. El origen del sistema acentuado tiene por abscisa (c) medida en el sistema no acentuado.

Veamos el primer caso. La fórmula de transformación es,

$$(2\text{-}1)\qquad x = c + x';\quad dx = dx'$$

Puede, en consecuencia, escribirse,

$$(2\text{-}2)\qquad Gm,0 = \int_{x_1}^{x_2} x^{m}\, dw = \int_{x'_1}^{x'_2} (c + x')^{m}\, dw$$

Aplicando la fórmula binómica, a saber,

$$(2\text{-}3)\qquad (c + x')^{m} = \sum_{v=0}^{m} \binom{m}{v} c^{m-v}\, x'^{v}$$

en la (2-2), se tiene,

$$(2\text{-}4)\qquad Gm,0 = \int_{x'_1}^{x'_2} \sum_{v=0}^{m} \binom{m}{v} c^{m-v}\, x'^{v}\, dw$$

Intercambiando la integral y la sumatoria, se tiene,

$$(2\text{-}5)\qquad Gm,0 = \sum_{v=0}^{m} \binom{m}{v} c^{m-v} \int_{x'_1}^{x'_2} x'^{v}\, dw = \sum_{v=0}^{m} \binom{m}{v} c^{m-v}\, G'v,0$$

de la cual se concluye,

$$(2\text{-}6)\qquad Gm,0 = (c^{\cdot} + G'_{\cdot},0)^{(m)}$$

o sea que, se obtiene de nuevo un desarrollo binómico simbólico en el cual $(c^{\cdot})$ recibe exponentes y $(G'_{\cdot},0)$ recibe índices, cuando se efectúan las operaciones. Explícitamente, es,

$$(2\text{-}7)\qquad Gm,0 = \binom{m}{0} c^{m}\, G'0,0 + \binom{m}{1} c^{m-1}\, G'1,0 + \binom{m}{2} c^{m-2}\, G'2,0 + \ldots$$

Sea, por ejemplo,

k = 1. Aplicando la (2-6) o su equivalente (2-7), se tiene,

$$(2\text{-}8)\qquad G1,0 = c\, G'0,0 + G'1,0;\quad (G'0,0 = G0,0)$$

Sea ahora,

k = 2. Se tiene,

$$(2\text{-}9)\qquad G2,0 = c^{2}\, G'0,0 + 2c\, G'1,0 + G'2,0$$

de tal manera que, si se parte de los valores $G0$, $G1$, $G2, \ldots Gh$, se podrán calcular uno a uno los $G'0$, $G'1$, $G'2, \ldots, G'h$.

Se puede proceder también directamente puesto que, de (2-1), se deduce,

$$(2\text{-}10)\qquad x' = x - c$$

con lo cual, siguiendo el mismo proceso de demostración, se establece la fórmula,

$$(2\text{-}11)\qquad G'm,0 = (G_{\cdot},0 - c)^{(m)}$$

Veamos ahora el segundo caso. Si se tiene en cuenta que la fórmula de transformación de coordenadas (ejes colineales de diferente sentido) es ahora,

$$(2\text{-}12)\qquad x = c - x'$$

todo se reduce a aplicar la fórmula (1-21) en la cual deberá efectuarse el cambio $l = c$.