DERIVADAS E INTEGRALES DEL PRODUCTO $e^{kx}\phi(x)$

Por **LUIS DE GREIFF BRAVO**

En los números 44 y 45 de esta Revista aparecieron, en orden respectivo, los artículos del autor: "Sobre algunos resultados de la integración por partes", "Integración de la forma $e^{ax}f(x)$".
El presente trabajo resume algunos de los resultados expuestos en los artículos de la referencia y se extiende luego al cálculo de integrales indefinidas (primitivas), de primero, segundo,... r-ésimo orden. Advertimos que la lectura del presente trabajo no exige el conocimiento de los estudios antes citados.

$\phi(x)$ designa una función entera de variable real; será un polinomio entero en casi todos los ejercicios. k designa un parámetro complejo.

Los procedimientos que usualmente se siguen para calcular derivadas e integrales de expresiones de la forma $e^{kx}\phi(x)$, pueden abreviarse con empleo de operadores como sigue:

Diferenciación:

$$(1)\qquad \begin{aligned} D.e^{kx}\phi(x) &= ke^{kx}\phi(x) + e^{kx}D\phi(x) \\ &= e^{kx}(k+D)\phi(x). \end{aligned}$$

En palabras: *para obtener la primera derivada de* $e^{kx}\phi(x)$, *multiplíquese* e^{kx} *por el resultado que se obtiene al aplicar el operador* $(k+D)$ *a* $\phi(x)$.

Para obtener la segunda derivada se reitera la aplicación del operador $(k+D)$ lo que conduce a expresar:

$$(2)\qquad D^2.e^{kx}\phi(x) = e^{kx}(k+D)^{(2)}\phi(x)$$

y para la derivada n—ésima:

$$(3)\qquad D^n.e^{kx}\phi(x) = e^{kx}(k+D)^{(n)}\phi(x).$$

La fórmula general (3) se demuestra fácilmente por inducción. En efecto, aceptando su validez para un cierto *n* y diferenciando, se tiene:

$$(4)\qquad \begin{aligned} D^{n+1}.e^{kx}\phi(x) &= ke^{kx}(k+D)^{(n)}\phi(x) + e^{kx}(k+D)^{(n)}D\phi(x) \\ &= e^{kx}(k+D)^{(n)}(k+D)\phi(x) \\ &= e^{kx}(k+D)^{(n+1)}\phi(x). \end{aligned}$$

Ahora bien, esta fórmula es la misma (3) cuando se cambia *n* por $(n+1)$. Por otra parte, en virtud de (1) la fórmula (3) vale para $n=1$, lo que completa la inducción.

Ejemplos: $k=2$, $\phi(x)=x^4$, $n=4$. Se tiene:

$$\begin{aligned} D^4.e^{2x}x^4 &= e^{2x}(2+D)^{(4)}.x^4 = e^{2x}(16+32D+24D^2+8D^3+D^4).x^4 \\ &= e^{2x}(16^{x4}+128x^3+288x^2+192x+24). \end{aligned}$$

$k=-1$, $\phi(x)=x^n$, (n, un entero positivo).

Se tiene:

$$D^n.e^{-x}(-1+D)^{(n)}.x^n = e^{-x}(-1)^n\ 1-nD+\frac{n(n-1)}{2!}D^2+\ldots+(-1)^nD^n.x^n$$

$$= e^{-x}(-1)^n\ x^n-n^2x^{n-1}+\frac{n^2(n-1)^2}{2!}x^{n-2}+\ldots+(-1)^nn!.$$

Para $n = 4$, este resultado da:

$$D^4 . e^{-x}x^4 = e^{-x}(x^4 - 16x^3 + 72x^2 - 96x + 24).$$

$k = 1$, $\phi(x) = x^{1/2}$, $n = 4$. Se obtiene,

$$\begin{aligned} D^4 . e^x x^{1/2} &= e^x (1 + D)^{(4)} . x^{1/2} \\ &= e^x x^{1/2} (1 + 2/x - 3/2x^2 + 3/2x^3 - 15/16x^4). \end{aligned}$$

$k = 1$, $\phi(x) = \mathrm{Ln}x$, $n = 3$, (Ln: logaritmo neperiano).

$$\begin{aligned} D^3 . e^x \mathrm{Ln}x &= e^x(1 + 3D + 3D^2 + D^3) . \mathrm{Ln}x \\ &= e^x(\mathrm{Ln}x + 3/x - 3/x^2 + 2/x^3). \end{aligned}$$

$k = i$

(5A) $$\begin{aligned} D^n . e^{ix}\phi(x) &= D^n . (\cos x + i \ \mathrm{sen}\, x)\phi(x) \\ &= D^n . \cos x\phi(x) + iD^n . \mathrm{sen}x\phi(x). \end{aligned}$$

Por otra parte se tiene, según (3):

(6A) $$\begin{aligned} D^n . e^{ix}\phi(x) &= e^{ix}(i + D)^{(n)}\phi(x) \\ &= e^{ix} i^n (1 - iD)^{(n)}\phi(x) \\ &= i^n(\cos x + i\mathrm{sen}x)(1 - iD)^{(n)}\phi(x). \end{aligned}$$

Una vez desarrollado el binomio, por comparación de los resultados escritos en (5A) y (6A), se podrán calcular las derivadas:

$$D^n . \phi(x)\cos x, \qquad D^n . \phi(x)\mathrm{sen}x.$$

Como ejemplo ilustrativo aplicamos al caso $n = 4$. Se tiene:

$$\begin{aligned} & D^4 . \left[\phi(x)\cos x + i\phi(x)\mathrm{sen}x \right] \\ &= (\cos x + i\mathrm{sen}x)(1 - 4iD - 6D^2 + 4iD^3 + D^4)\phi(x) \end{aligned}$$

de donde, al separar partes reales y partes imaginarias:

$$\begin{aligned} D^4 . \phi(x)\cos x = & \left[\phi(x) - 6\phi^{(2)}(x) + \phi^{(4)}(x) \right] \times \cos x \\ & + \left[4\phi^{(1)}(x) - 4\phi^{(3)}(x) \right] \times \mathrm{sen}x; \\ D^4 . \phi(x)\mathrm{sen}x = & \left[\phi(x) - 6\phi^{(2)}(x) + \phi^{(4)}(x) \right] \times \mathrm{sen}x \\ & + \left[- 4\phi^{(1)}(x) + 4\phi^{(3)}(x) \right] \times \cos x. \end{aligned}$$

La primitiva. Integrando por partes, se tiene:

(5) $$\begin{aligned} \int e^{kx}\phi(x)\,dx &= k^{-1}\int \phi(x)\,d . e^{kx} \\ &= k^{-1}e^{kx}\phi(x) - k^{-1}\int e^{kx}\phi^{(1)}(x)\,dx. \end{aligned}$$

Si se aplica este resultado a la integral:

$$\int e^{kx}\phi^{(1)}(x)\,dx$$

y se reemplaza en (5), resulta:

$$\int e^{kx}\phi(x)\,dx =$$

$$k^{-1}e^{kx}\phi(x) - k^{-2}e^{kx}\phi^{(1)}(x) + k^{-2}\int e^{kx}\phi^{(2)}(x)\,dx.$$

El proceso puede continuarse hasta inferir el resultado final:

$$(6) \quad e^{kx}\phi(x)\,dx = e^{kx}\left[k^{-1}\phi(x) - k^{-2}\phi^{(1)}(x) + k^{-3}\phi^{(2)}(x) - \ldots + (-1)^n k^{-n}\int e^{kx}\phi^{(n)}(x)\,dx\right].$$

Es obvio que se debe adicionar una constante de integración.

Si $\phi(x)$ es un polinomio de grado $(n-1)$, la integral que figura entre el corchete es nula.

La fórmula (6) podrá aplicarse al cálculo de integrales definidas, resultando un número limitado de términos en el caso mencionado, en que $\phi(x)$ es un polinomio entero. En caso distinto, para una clase más amplia de funciones, será necesario investigar si el término final, que contiene la integral, al ser culculado entre límites tiende a 0 cuando n tiende a ∞.

Veremos en seguida varios ejercicios y desarrollos relativos a la fórmula (6).

$k = 1$, $\phi(x) = x^p$, p un entero positivo. Se tiene,

$$\int e^x x^p dx = e^x\left[x^p - px^{p-1} + p(p-1)x^{p-2} - p(p-1)(p-2)x^{p-3} + \ldots + (-1)^p\, p!\right]$$

En particular, para $p = 5$, resulta:

$$\int e^x x^5 dx = e^x(x^5 - 5x^4 + 20x^3 - 60x^2 + 120x - 120).$$

$k = -1$, $\phi(x) = x^3$.

$$\int e^{-x}x^3 dx = e^{-x}(-x^3 + 3x^2 - 6x + 6).$$

$k = ir$, r un número real positivo.

Aplicaremos ahora la fórmula (3) a este importante caso. Se tiene,

$$(7) \qquad J = \int e^{irx}\phi(x)\,dx = \int(\cos rx + i\,\mathrm{sen}\,rx)\phi(x)\,dx$$
$$= \int \phi(x)\cos rx\,dx + i\int \phi(x)\,\mathrm{sen}\,rx\,dx.$$

Por otra parte, la fórmula (6) aplicada a este caso, da:

$$J = e^{irx}\left[(ir)^{-1}\phi(x) - (ir)^{-2}\phi^{(1)}(x) + (ir)^{-3}\phi^{(2)}(x) - (ir)^{-4}\phi^{(3)}(x) + \ldots\right]$$

de donde,

$$(8) \quad J = (\cos rx + i\,\mathrm{sen}\,rx)\left[-ir^{-1}\phi(x) + r^{-2}\phi^{(1)}(x) + ir^{-3}\phi^{(2)}(x) - r^{-4}\phi^{(3)}(x) - ir^{-5}\phi^{(4)}(x) + \ldots\right]$$

Efectuando productos y después de igualar partes reales y partes imaginarias en (7) y (8), se llega a los resultados siguientes:

$$(9) \qquad \int \phi(x)\cos rx\;dx =$$
$$\left[r^{-2}\phi^{(1)}(x) - r^{-4}\phi^{(3)}(x) + r^{-6}\phi^{(5)}(x) - \ldots\right]\cos rx$$
$$+ \left[r^{-1}\phi(x) - r^{-3}\phi^{(2)}(x) + r^{-5}\phi^{(4)}(x) - \ldots\right]\mathrm{sen}\,rx;$$

$$(10) \qquad \phi(x)\,\mathrm{sen}\,rx\;dx =$$
$$\left[r^{-2}\phi^{(1)}(x) - r^{-4}\phi^{(3)}(x) + r^{-6}\phi^{(5)}(x) - \ldots\right]\mathrm{sen}\,rx$$
$$- \left[r^{-1}\phi(x) - r^{-3}\phi^{(2)}(x) + r^{-5}\phi^{(4)}(x) - \ldots\right]\cos rx.$$

Si se atiende a la observación hecha respecto de la integral que figura entre el corchete de la fórmula (6), las fórmulas (9) y (10) pueden aplicarse a la determinación de los coeficientes de Fourier.

Veamos un ejemplo ilustrativo sobre la aplicación de estas fórmulas. Sean

$\phi(x) = x^4$, $r = 1$. Se tiene:

$$\int x^4\cos x\;dx = (4x^3 - 24x)\cos x + (x^4 - 12x^2 + 24)\,\mathrm{sen}\,x;$$

$$\int x^4\,\mathrm{sen}\,x\;dx = (4x^3 - 24x)\,\mathrm{sen}\,x - (x^4 - 12x^2 + 24)\cos x.$$

Vamos a calcular ahora los coeficientes de Fourier correspondientes a la función impar definida en el intervalo (0, p) mediante la expresión:

$$y = \phi(x) = m(px - x^2), \quad m = 4f/^2.$$

Se trata, pues, de una parábola ordinaria de eje vertical con vértice en el punto (p/2, f).

Los coeficientes se calculan con la expresión:

$$b_n = \frac{2}{p}\int_0^p \phi(x)\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{p}\,dx.$$

Para que las fórmulas (9) y (10) resulten aplicables al caso, se debe hacer en ellas el cambio $r = \frac{\pi n}{p}$

Se tiene,

$$\phi^{(1)}(x) = m(p-2x), \quad \phi^{(2)}(x) = -2m.$$

En consecuencia,

$$\int_0^p \phi(x)\operatorname{sen}\frac{\pi n}{p}x\,dx =$$

$$\frac{p^2}{\pi^2 n^2}\,m(p-2x)\operatorname{sen}\frac{\pi n}{p}x\,\Bigg|_0^p \qquad - \frac{p}{\pi n}\,m(px-x^2) + \frac{p^3}{\pi^3 n^3}2m\cos\frac{n\pi x}{p}\Bigg|_0^p \quad = \frac{2mp^3}{\pi^3 n^3}(1-\cos n\pi).$$

Según este resultado son nulos los coeficientes de índice par, y en cuanto a los impares se obtiene:

$$b_1 = \frac{8mp^2}{\pi^3} \quad b_3 = \frac{8mp^2}{27\pi^3} \quad b_5 = \frac{8mp^2}{125\pi^3},\ldots$$

O también, al reemplazar el valor de *m:*

$$b_1 = \frac{32f}{\pi^3} \quad b_3 = \frac{32f}{27\pi^3} \quad b_5 = \frac{32f}{125\pi^3},\ldots$$

La serie de Fourier correspondiente a este caso es, en consecuencia:

$$f(x) = \frac{32f}{\pi^3}\left(\operatorname{sen}\frac{\pi x}{p} + \frac{1}{27}\operatorname{sen}\frac{3\pi x}{p} + \frac{1}{125}\operatorname{sen}\frac{5\pi x}{p} + \ldots\right)$$

La primitiva como anti-derivada. Veamos ahora lo que ocurre cuando en la fórmula (3) se asignan valores negativos al entero *n*.

Para $n = -1$, se tiene:

(11) $$\begin{aligned} D^{-1}.e^{kx}\phi(x) &= e^{kx}(k+D)^{-1}.\phi(x) \\ &= e^{kx}k^{-1}(1+k^{-1}D)^{-1}.\phi(x) \end{aligned}$$

Al desarrollar el binomio, se obtiene:

(12) $$D^{-1}.e^{kx}\phi(x) = e^{kx}k^{-1}(1-k^{-1}D+k^{-2}D^2-k^{-3}D^3+\ldots)\phi(x).$$

Ahora bien, según la relación (6), el segundo miembro de (12) expresa la primitiva de $e^{kx}\phi(x)$. Claro está que nos referimos a la parte esencial de la primitiva, pues deberá sumarse una constante.

Para $n = -r$, entero negativo, la misma fórmula (3) da la primitiva o integral indefinida de orden *r*. A saber:

(13) $$\begin{aligned} D^{-r}.e^{kx}\phi(x) &= e^{kx}(k+D)^{-r}\phi(x) \\ &= e^{kx}k^{-r}(1+k^{-1}D)^{-r}\phi(x). \end{aligned}$$

Al desarrollar el binomio, se obtiene:

(14) $$\begin{aligned} D^{-r}.e^{kx}\phi(x) = e^{kx}k^{-r}(1 - rk^{-1}D &+ \begin{bmatrix} r \\ 2 \end{bmatrix} k^{-2}D^2 \\ &- \begin{bmatrix} r \\ 3 \end{bmatrix} k^{-3}D^3 + \ldots)\phi(x). \end{aligned}$$

Los coeficientes entre corchetes valen:

$$\left[\begin{matrix} r \\ 2 \end{matrix}\right] = \frac{r(r+1)}{2!}, \quad \left[\begin{matrix} r \\ 3 \end{matrix}\right] = \frac{r(r+1)(r+2)}{3!}, \text{ etc.}$$

Ejemplos:

$\phi(x) = x^2$, $r = 2$, $k = 1$.

$D^{-2}.e^x x^2 = e^x(1 - 2D + 3D^2)x^2 = e^x(x^2 - 4x + 6)$.

La parte complementaria será un polinomio de grado uno: $c_1x + c_2$.

Para la primitiva de orden 3 se obtiene:

$D^{-3}.e^x x^2 = e^x(1 - 3D + 6D^2)x^2 = e^x(x^2 - 6x + 12)$.

Como función complementaria, se sumará a la expresión obtenida un polinomio cuadrático. En los ejercicios siguientes se hará constar exclusivamente las respuestas.

$r = 2$, $\phi(x) = x^3$, $k = -1$.

$D^{-2}.e^{-x}x^3 = e^{-x}(x^3 + 6x^2 + 18x + 24)$.

$r = 3$, $\phi(x) = x^4$, $k = 2$.

$$D^{-3}.e^{2x}x^4 = \frac{e^{2x}}{16}(2x^4 - 12x^3 + 36x^2 - 60x + 45).$$