GENERALIZACION DE LA SERIE DE TAYLOR CON EMPLEO DE OPERADORES

LUIS DE GREIFF BRAVO

En las líneas siguientes haremos uso de los símbolos D_x, D_y —introducidos por Cauchy—, para designar las derivadas parciales de una función respecto de x e y respectivamente. Se tendrán pues las equivalencias:

$$D_x = \frac{\partial}{\partial x},\ D_y = \frac{\partial}{\partial y},\ D_x^{(r)} = \frac{\partial^r}{\partial x^r},\ \text{etc.}$$

Recordemos, lo que es conveniente para dar unidad a la exposición, el significado del operador exponencial e^{hD_x}.

Al efecto, aceptando el desarrollo formal de la función exponencial y si se designa mediante $f(x)$ una función uniforme y continua, derivable hasta el infinito, puede escribirse:

$$e^{hD_x} f(x) = [\,1 + hD_x^{(1)} + (h^2/2!)\,D_x^{(2)} + \ldots + (h^r/r!)\,D_x^{(r)} + \ldots]\ f(x) \tag{1}$$

O bien, empleando la notación de Lagrange,

$$e^{hD_x} f(x) = f(x) + hf'(x) + (h^2/2!)\,f''(x) + \ldots + (h^r/r!)\,f^{(r)}(x) + \ldots \tag{2}$$

Este resultado puede expresarse de la manera siguiente:

$$e^{hD_x} f(x) = f(x+h) \tag{3}$$

puesto que el lado derecho de (2) contiene el desarrollo en serie de Taylor correspondiente a $f(x+h)$.

La relación (3) confiere un significado al *operador exponencial* e^{hD_x}.

Aplicando ahora la fórmula (3) a la función de dos variables $f(x, y)$ —donde y ha de considerarse como un parámetro—, se tiene:

$$e^{hD_x} f(x,y) = f(x+h, y) \tag{4}$$

Ahora bien, de acuerdo con esta equivalencia, se puede escribir también:

$$e^{kD_y} f(x+h, y) = f(x+h, y+k) \tag{5}$$

Las relaciones (4) y (5) dan lugar a la siguiente:

$$e^{hD_x} e^{kD_y} f(x,y) = f(x+h, y+k) \tag{6}$$

Si en el proceso seguido se hubiere aplicado primero el operador e^{kD_y}, luego el operador e^{hD_x}, se habría llegado al mismo resultado. El operador exponencial es pues conmutativo, pudiendo escribirse:

$$e^{hD_x} e^{kD_y} = e^{kD_y} e^{hD_x} \tag{7}$$

Ahora vamos a demostrar la siguiente equivalencia:

$$e^{hD_x} e^{kD_y} = e^{hD_x + kD_y} \tag{8}$$

La demostración sería innecesaria si se tuviera en cuenta la equivalencia funcional:

$$e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1 + z_2}, \tag{9}$$

no obstante lo cual haremos ver dicha propiedad en forma directa.

Al efecto,

$$\begin{aligned} e^{hD_x} e^{kD_y} = {} & [1 + hD_x^{(1)} + (h^2/2!)\,D_x^{(2)} + \ldots + (h^r/r!)\,D_x^{(r)} + \ldots] \\ & [1 + kD_y^{(1)} + (k^2/2!)\,D_y^{(2)} + \ldots + (k^r/r!)\,D_y^{(r)} + \ldots] \end{aligned} \tag{10}$$

lo que, efectuando operaciones y reuniendo términos semejantes, conduce a escribir:

$$e^{hD_x} e^{kD_y} = 1 + (hD_x + kD_y)^{(1)} + (1/2!)\,(hD_x + kD_y)^{(2)} + \ldots \tag{11}$$

Con esto queda demostrada la equivalencia (8). Por otra parte, puesto que en los sumandos de la fórmula (11) pueden intercambiarse los términos hD_x, kD_y, se vuelve a constatar la propiedad conmutativa.

La relación (9), escrita como ecuación funcional, viene a ser,

$$f(z_1)\,f(z_2) = f(z_1 + z_2) \tag{12}$$

Hagamos ver que esta relación vale para un número cualesquiera de sumandos. Al efecto, si se cambia z_2 por $z_2 + z_3$, se tiene,

$$f(z_1)\ \ f(z_2 + z_3) = f(z_1 + z_2 + z_3) \tag{13}$$

y, en virtud de la misma (12):

$$f(z_1)\,f(z_2)\,f(z_3) = f(z_1 + z_2 + z_3), \tag{14}$$

proceso que podrá continuarse indefinidamente.

Aplicando estas relaciones al caso en que $z_1, z_2, \ldots$ designan los operadores hD_x, $kD_y, \ldots$, podrá escribirse finalmente:

$$e^{hD_x}\, e^{kD_y}\, e^{lD_u} \ldots f(x) \tag{15}$$

$$= [1 + (hD_x + kD_y + lD_u + \ldots)^{(1)} + (1/2!)\,(hD_x + kD_y + lD_u + \ldots)^{(2)} + \ldots + (1/r!)\,(hD_x + kD_y + lD_u + \ldots)^{(r)} + \ldots]\, f(x) = f(x + h, y + k, u + l, \ldots)$$

Este es el desarrollo de Taylor generalizado que, mediante sumatoria, se expresa así:

$$f(x + h, y + k, u + l, \ldots) = \left[\sum_{r=0}^{\infty} (1/r!)\,(hD_x + kD_y + lD_u + \ldots)^{(r)} \right] f(x) \tag{16}$$

Notas complementarias. — Resulta interesante ver con cuánta rapidez se llega a distintos resultados del Análisis, al hacer intervenir el operador exponencial. He aquí algunos ejemplos.

a) *Fórmula del binomio.* — Para obtenerla de manera inmediata, basta escribir:

$$e^{hD_x} \cdot x^k = (x + h)^k = [1 + hD_x^{(1)} + (h^2/2!)\,D_x^{(2)} + (h^3/3!)\,D_x^{(3)} + \ldots]\, x^k$$
$$= x^k + \binom{k}{1} x^{k-1} h + \binom{k}{2} x^{k-2} h^2 + \ldots \tag{17}$$

Desarrollo limitado para k entero positivo, o bien, desarrollo en serie si k no es un número natural.

b) *Serie logarítmica.* — Siguiendo el mismo procedimiento, se obtiene la serie:

$$ln\,(x + h) = lnx + h/x - h^2/2x^2 + h^3/3x^3 - h^4/4x^4 + \ldots \tag{18}$$

que, para $x = 1$, da la más conocida:

$$ln\,(1 + h) = h - h^2/2 + h^3/3 - h^4/4 + \ldots \tag{19}$$

c) *Fórmulas de adición.* — Se escribe,

$$e^{yD_x} f(x) = f(x + y) = [1 + yD_x^{(1)} + (y^2/2!)\,D_x^{(2)} + (y^3/3!)\,D_x^{(3)} + \ldots]\, f(x) \tag{20}$$

Se tiene aquí, de manera general, la fórmula de adición de las funciones elementales, en particular, de las circulares *cos x, sen x* y de las hiperbólicas *cosh x,senh x*. Aplicándole a la función *sen x,* se tiene:

$$sen(x + y) = [1 + yD_x^{(1)} + (y^2/2!)\,D_x^{(2)} + (y^3/3!)\,D_x^{(3)} + \ldots]\, f(x)$$
$$= (1 - y^2/2! + y^4/4! - \ldots)\ senx + (y - y^3/3! + y^5/5! - \ldots)\, cosx \tag{21}$$

Para $x = 0$, se obtiene de (21):

$$seny = y - y^3/3! + y^5/5! - \ldots \tag{22}$$

Por otra parte, la aplicación indicada en (20) da, para $f(x) = cosx$:

$$cos(x + y) = (1 - y^2/2! + y^4/4! - \ldots)\, cosx - (y - y^3/3! + y^5/5! - \ldots)\, sen\,x \tag{23}$$

que a la vez, para $x = 0$, suministra el desarrollo:

$$cosy = 1 - y^2/2! + y^4/4! - \ldots \tag{24}$$

Teniendo en cuenta estos resultados, las relaciones (21) y (23) se expresan:

$$sen(x + y) = \text{sen}x\text{cos}y + \text{cos}x\ \text{sen}y \tag{25}$$

$$cos(x + y) = \text{cos}x\text{cos}y - \text{sen}x\ \text{sen}y \tag{26}$$

que son las conocidas fórmulas de adición de la Trigonometría.

d) *El operador complejo* e^{iyD_x}. Este operador posee la notable propiedad de llevar las funciones reales al dominio complejo. Al efecto, se tiene de inmediato,

$$e^{iyD_x} f(x) = f(x+iy) \tag{27}$$
$$= [1 + iyD_x^{(1)} - (y^2/2!)\,D_x^{(2)} - i(y^3/3!)\,D_x^{(3)} + (y^4/4!)D_x^{(4)} + \ldots]\,f(x)$$

Si ahora en el segundo miembro se separan partes reales y partes imaginarias, se llega a la relación:

$$f(x+iy) = [1 - (y^2/2!)\,D_x^{(2)} + (y^4/4!)\,D_x^{(4)} - \ldots]\,f(x) \tag{28}$$
$$i[yD_x^{(1)} - (y^3/3!)\,D_x^{(3)} + (y^5/5!)\,D_x^{(5)} - \ldots]\,f(x)$$

y finalmente:

$$f(x+iy) = [cos(yD_x) + i\ sen(yD_x)]\,f(x) \tag{29}$$

Resulta de lo anterior que la fórmula de Euler es válida también para el operador (yD_x), puesto que, al comparar las últimas relaciones escritas se deduce:

$$e^{iyD_x} = cos(yD_x) + isen(yD_x) \tag{30}$$

Observación final. — Los grandes constructores del Análisis —Euler, Lagrange, Cauchy y otros— dieron considerable importancia al término llamado *Residuo* de la serie de Taylor. La razón por la que obraran así descansa en la circunstancia de haber ellos considerado el *polinomio entero* como la función más simple, la más adecuada para la aproximación de otras, y nadie osaría disputarles la razón.

No obstante, viendo las cosas hoy cuando las técnicas de computación mecánica y electrónica han facilitado tanto el cálculo numérico, la introducción del término residual parece hacerse innecesaria y presenta los siguientes inconvenientes:

1º) El nuevo término contiene un elemento incógnito *a priori* θ, cuando la función es de una sola variable; o varios elementos θ_1, θ_2, ... para funciones de varias variables, elementos de los que sólo se sabe cumplen la desigualdad:

$$0 < \theta j < 1.\ (j = 1, 2, \ldots).$$

2º) El nuevo término no tiene relación morfológica con los precedentes.

3º) Dado que gran parte de las series utilizadas en Cálculo poseen la propiedad de convergencia uniforme, ello quiere decir que para calcular una función en un dominio dado, bastará utilizar los n primeros términos de la serie, siendo n un número elegido de manera conveniente. En otras palabras: computar con una serie es computar con un polinomio, cuyos términos poseen una cierta ley de formación.

4º) El término residual resulta extraño en el Algebra de operadores y no parece tener importancia en la computación electrónica.