CONSIDERACIONES SOBRE LAS MEJORES CONDICIONES DE OBSERVACION EN ASTRONOMIA GEOGRAFICA

DARIO ROZO M.

Profesor Honorario de la Universidad Nacional y Presidente Honorario de la Sociedad de Ingenieros de Colombia.

El siguiente escrito es el Capítulo XIV de un texto de Astronomía Geográfica escrito para la Facultad de Ingeniería y para uso del Instituto Geográfico. Texto que desde hace varios años permanece inédito. El primer tomo de la obra se dio a la estampa con el título de *Astronomía y Geodesia* y trata de la teoría de los errores y de los mínimos cuadrados y es el Libro I.

El Libro II es el de Astronomía Geográfica.
El Libro III debe tratar sobre Geodesia y
El Libro IV sobre Cartografía.

Las buenas condiciones de observación tienen marcada influencia en la exactitud de los resultados que se obtengan para las coordenadas geográficas. Esa influencia depende a) del instrumental, b) del medio ambiente, y c) de las fórmulas matemáticas, sin hacer cuenta de la pericia y habilidad del observador.

a) En cuanto al instrumental conviene que sea sólido, que esté bien ajustado y que sea estable en sus correcciones; los teodolitos que se empleen deben apreciar ángulos pequeños ojalá del orden del segundo sexagesimal, principalmente en el círculo horizontal; puesto que con el fin de evitar los errores que causa un mal círculo vertical, se han ideado los procedimientos de equidistancias cenitales y los que se fundan en la medición del ángulo horario con ayuda del cronómetro; en cambio la lectura del círculo horizontal es imprescindible. Son preferibles los instrumentos que tienen nivel autorreductor.

Los cronómetros y cronoscopios han de tener marcha regular en lo posible, es decir, que determinada para períodos cortos, iguales y sucesivos, resulte constante o con fluctuaciones pequeñas; pueden hacerse comparaciones, por ejemplo, de dos en dos horas escuchando las señales horarias. Los buenos cronómetros se venden con certificados oficiales.

Puede considerarse como bueno un cronómetro cuya marcha sea inferior a 10 segundos por día o sea 0,4 por hora o menos; pero lo importante es que la marcha sea constante, y en este caso no importa que sea superior a los 0,4 por hora; habrá, eso sí, un poco más de trabajo en los cálculos.

b) En lo relativo al medio ambiente es indispensable disminuir en lo posible los efectos de la refracción, sobre todo los anómalos; por eso no deben hacerse observaciones con astros cercanos al horizonte: la mayor distancia cenital aceptable es de 70°, excepcionalmente puede llegarse a 75°, lo que no es aconsejable; deben evitarse las visuales que pasen sobre lugares donde haya combustión activa como en las fábricas con motores térmicos, hornos o fogatas.

Los métodos de equidistancias también persiguen el fin de eliminar las influencias de la refracción atmosférica.

c) Con referencia a las condiciones que exigen las fórmulas, hay que notar que estas determinan los métodos y que las condiciones deben deducirse de las fórmulas que se empleen en la solución, buscando en función de los errores posibles de los datos, las circunstancias en que esos errores influyen lo menos en la exactitud de los resultados que se buscan, para lo cual se consideran estos como función de aquellos.

OBSERVACIONES POR ALTURA ABSOLUTA DE UN ASTRO

Las fómulas aplicables son estas:

$$\operatorname{sen} h = \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \delta + \cos \phi \cos \delta \cos P \quad (1)$$
$$\operatorname{sen} \delta = \operatorname{sen} h \operatorname{sen} \phi + \cos h \cos \phi \cos A \quad (2)$$

Considerando ϕ y A como funciones de h, se obtiene de la (1):

$$\cos h \, dh = (\operatorname{sen} \delta \cos \phi - \cos \delta \operatorname{sen} \phi \cos P) \, d\phi \quad (3)$$

que según la (3-1) del § 15, da $\dfrac{dh}{d\phi} = \cos A \quad (4)$

o bien

$$d\phi = \frac{dh}{\cos A} \quad (5)$$

Tomando $d\phi$ y dh como errores, se nota que el error de latitud resulta mayor que el error cometido al apreciar la altura h del astro puesto que $\cos A$ no pasa del valor *uno*. El menor error $\Delta\phi$ se obtendrá cuando el ángulo A sea *cero*, es decir, cuando el astro esté en el meridiano; luego para determinar la latitud por altura absoluta de un astro conviene hacer las observaciones sobre el meridiano.

Puede presentarse duda para el caso de $A = 90°$, porque entonces la fórmula (5) tiende a 0/0. Siendo $\cos A = 0$, la fórmula (2-2) del párrafo 15 dará

$$\operatorname{sen} h = \operatorname{sen} \delta \,/\, \operatorname{sen} \phi \quad (6)$$

por tanto

$$d\phi = - \frac{\operatorname{sen}^2 \phi \cos h}{\cos \phi \operatorname{sen} \delta} \, dh \quad (7)$$

Pero como h debe ser cualquiera, es necesario eliminarlo; el valor de $\cos h$ deducido de la (6) y puesto en función de las tangentes es

$$\cos h = \frac{\cos \phi \cos \delta}{\operatorname{sen} \phi} (\operatorname{tg}^2 \phi - \operatorname{tg}^2 \delta)^{1/2} \quad (8)$$

lo que da

$$d\phi = - \operatorname{sen} \phi \left(\frac{tg^2\phi}{tg^2\delta} - 1 \right)^{1/2} dh \quad (9)$$

La (6) indica que sólo es posible la observación cuando $\delta < \phi$ o a lo sumo $\delta = \phi$.

Para que $\Delta\phi$ sea nulo cualquiera que sea el error Δh, se necesita una de las dos condiciones siguientes:

$$\phi = \delta \quad \text{ó} \quad \phi = 0$$

Esta última condición expresa que el lugar de observación debe estar en el ecuador, pero entonces es necesario que sea $\delta = 0$ porque estamos bajo el supuesto de que el azimut es de 90° (contado a partir del meridiano); todo esto constituye un caso excepcionalmente particular que no hay por qué tener en cuenta en el método general.

Por consiguiente en la determinación de latitudes por alturas absolutas de astros, debe observarse sobre el meridiano; las que se hagan en un azimut cualquiera darán resultados menos precisos.

La observación en el primer vertical tiene la ventaja de poder sustituir la medición de altura por la del ángulo horario, pero tiene el grave inconveniente de ser necesaria la determinación previa de la dirección del vertical principal y la del estado del cronómetro.

Bessel ha propuesto un método especial para obtener ϕ mediante observaciones en el primer vertical, el que a la vez sirve para encontrar hora y azimut; método que aquí no se detalla por quedar incluído en el método general de Gauss que será tratado en el capítulo siguiente.

La ecuación (2) da

$$(\cos h \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} h \cos \phi \cos A)\, dh = \cos h \cos \phi \operatorname{sen} A\, dA$$

que por las fórmulas (1-2) y (3-2) del § 15 se puede reducir a esta forma:

$$\cos \delta \cos E\, dh = \cos h \cos \delta \operatorname{sen} E\, dA \;\therefore$$

$$dA = \frac{1}{\operatorname{tg} E \cos h}\, dh \qquad (10)$$

Esto indica que para azimutes por altura absoluta, conviene observar estrellas en su mayor elongación, o sea cuando el ángulo paraláctico es recto. En este caso los errores de altura influyen extremadamente poco; hay que tener en cuenta que h tendrá un valor definido en cada caso.

Si no se tiene en cuenta el valor $E = 90°$ debemos sustituir sen E en función de las otras cantidades y se obtiene:

$$dA = \frac{\cos E}{\frac{\cos \phi}{\cos \delta} \cos h \operatorname{sen} A}\, dh \qquad (11)$$

De esta igualdad se deduce que *las condiciones para obtener el azimut más correcto por alturas absolutas, son las de observar el astro en las cercanías del primer vertical, a poca altura, y que la declinación sea en lo posible inferior a la latitud.*

PARA LA HORA

De la ecuación (1), considerando a P —ángulo horario— como función de h, resulta

$$dP = \frac{-\cos h}{\cos \delta \cos \phi \operatorname{sen} P}\, dh \qquad (12)$$

Esta fórmula hace ver que el método para determinar hora por alturas absolutas de astros es ventajoso en latitudes cercanas al ecuador y con estrellas de pequeña declinación; pero también indica que el error ΔP depende de la relación $\frac{\text{Cos } h}{\text{Sen } P}$ que es igual a $\frac{\text{Sen } Z}{\text{Sen } P}$, y en esta forma no puede apreciarse su magnitud, pues para que fuera pequeña, Sen Z debería acercarse a cero, pero para $z = 0$, $P = 0$ y la relación tendería a $\frac{0}{0}$. Eliminando esta relación por medio de las fórmulas (1-1) y (1-3), se encuentra

$$dP = \frac{-dh}{\text{Cos } \phi \text{ Sen } A} = \frac{-dh}{\text{Cos } \delta \text{ Sen } E} \;\therefore\; dP = \frac{dh}{(\text{Cos } \phi \text{ Cos } \delta \text{ Sen } A \text{ Sen } E)^{1/2}}$$

Estas igualdades indican que las observaciones deben hacerse en las proximidades del vertical principal ($A = 90°$, $A = 270°$) y que conviene que el ángulo paraláctico sea recto y además que δ y ϕ sean pequeños. Cuando δ ó ϕ valen 90°, el método es impracticable.

Para que la observación sea posible sobre el vertical principal se necesita que $\phi - \delta > 0$.

Cuando ϕ tiene valor alto pero inferior a 90°, el menor valor del error ΔP se obtiene para el menor valor de $\frac{\text{Cos } h}{\text{Cos } \phi \text{ Sen } P}$; las ecuaciones (1-1) y (1-3) permiten obtener $\left(\frac{\text{Cos } h}{\text{Cos } \phi \text{ Sen } P}\right)^2 = \frac{1}{\text{Sen } A \text{ Sen } E} \; \frac{\text{Cos } \delta}{\text{Cos } \phi}$

Conviene pues, en este caso, que $\delta > \phi$, y con esta condición es fácil buscar h de modo $E = 90°$, lo que da el método de determinar la hora por circumpolares que se utiliza en la determinación de la meridiana en lugares de latitud alta, como quedó expuesto en el § 94.

En consecuencia *la mejor posición del astro para determinación de hora por altura absoluta, es hacia el Este o hacia el Oeste, escogiéndolo de pequeña declinación y observándolo a poca altura, para obtener el mayor ángulo horario posible, pero a más de 30° de altura para evitar refracciones anómalas.*

OBSERVACIONES POR EQUIDISTANCIAS ZENITALES (EQUIALTURAS)

Mediante la observación de equidistancias zenitales de estrellas, se puede obtener *azimut, latitud* y *hora.*

En este método se elimina h y las fórmulas quedan generalmente expresadas en función de la latitud, del azimut o del ángulo horario. Conviene pues conocer los valores de $\frac{dh}{d\phi}$ y de $\frac{dh}{dP}$ para pasar de las fórmulas ya encontradas a las fórmulas que se necesitan mediando la eliminación de h.

La fórmula (3) da

$$\cos h \frac{dh}{d\phi} = \operatorname{sen} \delta \cos \phi - \cos \delta \operatorname{sen} \phi \cos P$$

que por una conocida fórmula trigonométrica se puede reducir a esta:

$$\frac{dh}{d\phi} = \text{Cos } A \qquad (14)$$

Análogamente la ecuación (1) y la conocida igualdad

$$\cos h \operatorname{sen} A = \cos \delta \operatorname{sen} P$$

darán

$$\frac{dh}{dP} = -\cos \phi \operatorname{sen} A \qquad (15)$$

PARA AZIMUT

La (11) dará sustituyendo $\cos h \operatorname{sen} A$ por $\cos \delta \operatorname{sen} P$,

$$dA = \frac{\cos E \cos A}{\cos \phi \operatorname{sen} P}\, d\phi$$

y para dos estrellas se tendrá:

$$\Delta A = dA_1 + dA_2 =$$
$$= \left[\frac{\cos E_1 \cos A_1}{\operatorname{sen} P_1} + \frac{\cos E_2 \cos A_2}{\operatorname{sen} P_2}\right] \frac{d\phi}{\cos \phi} \qquad (16)$$

Para que ΔA sea nulo, se necesita que el paréntesis del segundo miembro sea nulo, lo cual se consigue si $\cos E_1 = \cos E_2 = 0$; esto es, con observaciones de estrellas a igual altura y en su elongación lo que implica declinaciones iguales; esto en la práctica no se consigue sino con una misma estrella, pero entonces para observarla dos veces es necesario que A_1 y A_2 sean iguales y de signos contrarios, lo que es conveniente; pero en ningún caso los azimutes deben ser pequeños porque entonces los denominadores $\operatorname{sen} P_1$ y $\operatorname{sen} P_2$ se aproximan a cero. El método es adecuado para latitudes bajas pero el error en azimut resulta proporcional al error en latitud.

Resulta pues que para determinar el azimut por equialturas conviene observar la misma estrella a uno y otro lado del meridiano y a buena distancia de él; pero en la práctica este procedimiento resulta de larga duración. Se evita la demora observando dos estrellas cuyas declinaciones difieran muy poco, como las que se emplean para determinar el estado del cronómetro por el método de Zinger; en tal caso hay que introducir la corrección debida a la diferencia de declinaciones.

PARA LATITUD

Las fórmulas (5) y (15) dan

$$d\phi = \frac{-\cos \phi \operatorname{sen} A}{\cos A}\, dP$$

y para dos estrellas

$$\Delta\phi = d\phi_1 + d\phi_2 = -\cos \phi\, [\operatorname{tg} A_1\, dP_1 + \operatorname{tg} A_2\, dP_2] \qquad (17)$$

Para que $\Delta\phi$ fuera nulo se requeriría que $\operatorname{tg} A_1 = \operatorname{tg} A_2 = 0$, o sea que las dos estrellas se observen en el meridiano a iguales alturas, lo que en general no es posible rigurosamente. A cumplir la condición anotada tiende el método de Talcott-Horrebow.

Prescindiendo de la observación de equidistancias en el meridiano, conviene, para hacer mínimo el segundo miembro de la ecuación (17) que $\operatorname{tg} A_1$ y $\operatorname{tg} A_2$ sean poco más o menos iguales y de signos contrarios y ojalá de pequeño valor. En tal condición se debe tener:

$$A_1 = 0° + n° \text{ ó } = 360° - n°$$
$$A_2 = 180° - n° \text{ ó } = 180 + n°$$

En consecuencia, *para determinar la latitud por equidistancias zenitales* (método de Stechert), *las estrellas deben observarse una al Norte y otra al Sur, cercanas al meridiano y simétricas con relación al vertical principal.*

En el método de Garavito se cumplen doblemente estas condiciones.

PARA HORA

Las ecuaciones (13) y (14) junto con esta otra

$$\cos \phi \operatorname{sen} A = \cos \delta \operatorname{sen} E$$

dan
$$dP = -\frac{\cos A}{\cos \delta \operatorname{sen} E}\, d\phi \qquad (18)$$

y para dos estrellas se tendrá:

$$\Delta P = -\left[\frac{\cos A_1}{\cos \delta_1 \operatorname{sen} E_1} + \frac{\cos A_2}{\cos \delta_2 \operatorname{sen} E_2}\right] d\phi \qquad (19)$$

Para que ΔP sea lo menor posible, se necesita que los sumandos del paréntesis sean iguales o casi iguales y de signos contrarios. Para que sean de signos contrarios, como los cosenos de las declinaciones son siempre positivos, se requiere únicamente que E_1 y E_2 tengan signos opuestos y que $\cos A_1$ y $\cos A_2$ tengan ambos el mismo signo; las dos cosas se obtienen con azimutes simétricos con respecto al meridiano, como lo hace ver la fórmula fundamental siguiente:

$$\frac{\operatorname{sen} A}{\cos \delta} = \frac{\operatorname{sen} E}{\cos \phi}$$

Ahora bien, para el menor valor de cada uno de los sumandos del paréntesis, $\cos A_1$ y $\cos A_2$ deben ser pequeños y a la vez $\operatorname{sen} E_1$ y $\operatorname{sen} E_2$ grandes; estas dos condiciones se satisfacen cuando en la ecuación últimamente citada las cantidades δ y ϕ sean iguales entre sí o casi iguales. Lo mejor sería que E_1 y E_2 fueran ángulos rectos, o sea que las estrellas estuvieran en elongación o muy próximas a ella.

En consecuencia, *las mejores condiciones para determinar el estado de un cronómetro, cuando se emplea el método de distancias zenitales iguales de dos* estrellas diferentes son: a) observar una estrella al Este y otra al Oeste *en azimutes próximamente iguales y simétricos con respecto al meridiano;* b) *las estrellas observadas deben tener declinaciones muy poco diferentes entre sí y próximamente iguales a la latitud del lugar.*

Las condiciones apuntadas se cumplen todas en el método de Zinger.

Si se observara una *misma* estrella al Este y al Oeste, el error estudiado ΔP sería nulo; pero este método en la práctica tiene el inconveniente de ser de muy larga duración y la eventualidad de perderse la segunda observación por cambio de las condiciones atmosféricas.

Para el estudio que se deja expuesto sirvió de guía uno sobre el mismo asunto publicado por el Dr. Francisco José Duarte en su obra escrita en francés sobre métodos rigurosos en astronomía geográfica.

GENERALIZACION

Si se analizan a fondo los distintos métodos para determinar coordenadas geográficas por observaciones astronómicas, se llega a la conclusión de que todo estriba en la medición de alturas de astros, ya sea que esta medición se haga directa o indirectamente; porque en realidad la astronomía geográfica se reduce a resolver el triángulo astronómico cuyos elementos medibles son el azimut, el ángulo horario y la distancia zenital; con uno cualquiera de estos tres elementos se puede resolver el triángulo, pero el ángulo horario y el azimut son funciones de la distancia zenital. En consecuencia los errores en ángulo horario y en latitud, que son los que interesan, se traducen en un error de distancia zenital. Conviene pues hallar la expresión de este en función de los otros y encontrar la manera de hacer que sea lo menor posible.

Notemos previamente que $dh = - dz$ (20)
Se tomará dz como error de distancia cenital y la suma de términos análogos se indicará encerrando entre dos barras el símbolo de un sumando, como lo acostumbran algunos autores.

Las ecuaciones (15) y (14) dan respectivamente

$$dz_P = \cos\phi \text{ sen } A.dP$$
$$dz_\phi = -\cos A.d\phi$$

Ahora tomando $dz = dz_P + dz_\phi$, se tiene

$$dz = \cos\phi \text{ sen } A.dP - \cos A.d\phi \tag{21}$$

Si se ejecutan n observaciones, se debe tener

$$| dz | = \cos\phi \,|\, \text{sen } A \,|\, dP - | \cos A \,|\, d\phi$$

Pero se puede hacer

$$dz = D - \Delta Z_0$$

siendo Z_0 = *una constante,* de lo cual resulta $| dz | = | D | - n\Delta Z_0$ y por tanto se puede escribir

$$| D | = n\Delta Z_0 + | \text{sen } A \,|\, \cos\phi.\, dP - | \cos A \,|\, d\phi \tag{22}$$

Si se toman estrellas en distintas direcciones y simétricas de dos en dos los valores de $| \text{sen } A |$ y de $| \cos A |$ tenderán a anularse.

El *método de Gauss* satisface esta condición. En capítulo especial se estudiará este método.

DARIO ROZO M.