SOBRE LAS LEYES DE KEPLER Y DE NEWTON

CARLO FEDERICI CASA
Profesor de la Universidad Nacional

Esta memoria, lo mismo que las que han salido en esta misma Revista, quiere poner en evidencia, la llamada *estructura algebraica* de los fenómenos ligados a uno tan básico como el de *gravitación universal,* y mostrar cómo la nueva *álgebra de la física* (el viejo análisis dimensional) es instrumento de investigación y de demostración de grande valor.

Antes de Newton (Isaac; Woolsthorpe 1642, Kensington 1727) la Astronomía es una ciencia meramente descriptiva, puesto que ilustra y analiza, cada vez con mayor precisión, los movimientos de los planetas, ligándolos, desde los Babilonios hasta Tolomeo (Claudio; Tolemaide 100, Alejandría 170), en sistemas geométricos-cinemáticos de complejidad cada vez mayor.

En efecto: se comienza con el *sistema* geocéntrico de las veintisiete esferas homocéntricas de Eudoxio de Gnido (—408, —355) (una esfera para las estrellas, tres esferas para el Sol, tres esferas para la Luna, cuatro esferas para cada uno de los cinco planetas entonces conocidos: Mercurio, Venus, Marte, Júpiter, Saturno), *sistema* que él mismo seguramente debía considerar sólo como una construcción geométrica-cinemática apta para representar las trayectorias planetarias y celestes, y que según Simplicio era excelente para Mercurio, Júpiter, Saturno, mediocre para Venus y francamente malo para Marte, la "bestia negra" de los astrónomos hasta Keplero, *sistema* que no obstante todos los defectos que presenta merece toda nuestra admiración por haber sido el primero en que se va más allá de un simple razonamiento filosófico para describir el camino de los astros, y que por lo tanto, es el sistema con que la astronomía, como ciencia, inicia verdaderamente su carrera.

Se pasa luego, y en primer lugar, al sistema geocéntrico de las cincuenta y cinco esferas homocéntricas, de Aristóteles (Estagira-384, Calcide-322) (veintiocho más de las de Eudoxio como "neutralizantes" es decir aptas para salvaguardar la independencia de los diferentes planetas).

En segundo lugar se pasa al sistema geocéntrico de las excéntricas de Aristarco de Samos (—310, —264) que sustituye el de las homocéntricas de Aristóteles, puesto que las variaciones periódicas del esplendor de Venus y de Marte hacían insostenible la hipótesis de la invariabilidad de sus distancias a la Tierra, así como la variación del diámetro aparente de la Luna, —variación que llega hasta a 1/10 del mismo máximo y que permite explicar cómo los eclipses centrales del Sol pueden ser a veces totales y a veces anulares, hacía insostenible la hipótesis de la invariabilidad de la distancia de la Luna a la Tierra. En este sistema la Tierra ocupa el centro, el Sol describe en un año la circunferencia concéntrica (la eclíptica) a la Tierra, así como la Luna describe una circunferencia concéntrica a la Tierra en 27 días, y los cinco planetas describen circunferencias excéntricas, cuyos centros están situados sobre la recta Tierra-Sol de manera que la Tierra es externa a las circunferencias relativas a Venus y a Mercurio e interna a las circunferencias relativas a Marte, Júpiter y Saturno.

En tercer lugar se pasa al sistema geocéntrico de los epíciclos de Tolomeo (Claudio, Tolemaide 100, Alejandría 170), basado esencialmente en las obras de Apolonio (Pérgamo-260, Alejandría-200) y de Hipparco (Nicea-190, Rodi-124) que se proponen dar cuenta, a través de una serie de pruebas matemáticas, de las irregularidades ya numerosas al tiempo de Apolonio, que el sistema de Aristarco era incapaz de explicar, sistema que conservara el favor de la humanidad durante catorce o quince siglos por satisfacer cierta inclinación narcisista del hombre, sistema en el cual el centro es la Tierra, alrededor de la cual la Luna más cerca y el Sol más lejos, describen dos circunferencias fijas mientras que por cada planeta se emplean dos circunferencias: una fija, la "deferente", que tiene su centro en el centro de la Tierra y la otra móvil, la "epicicla", que tiene su centro sobre la "deferente"; el planeta describe la "epicicla" con movimiento directo, mientras que el centro de la misma (epicicla) describe la deferente también con movimiento directo.

Por último se pasa al sistema heliocéntrico de Copérnico (Nicola; Thorn 1473, Frauenburg 1543), que simplifica la geométrica-cinemática del sistema solar en su revolucionario "De revolutionibus orbium celestium" (cuyas pruebas de imprenta recibe en su lecho de muerte el año de 1543), pero sin enunciar ninguna hipótesis física que se pueda resumir y consolidar en un sistema de postulados que permita deducir aquella misma geométrica-cinemática, faltando entonces observaciones precisas sobre las cuales establecer firmemente los hechos necesarios para poder enunciar con provecho el deseado sistema de postulados; libro revolucionario que marca una de las etapas esenciales del pensamiento y tal que apenas se pueda citar dos o tres otras obras que se le puedan comparar en el orden de las repercusiones habidas en la humanidad: libro revolucionario en que se inician los tiempos modernos, no sólo para la astronomía sino también para la filosofía.

En el décimo capítulo de su obra es donde Copérnico presenta "el orden nuevo" para su gloria. El centro del sistema, centro del mundo, es el Sol, fijo; "órbitas sólidas" arrastran los planetas alrededor del mismo y la Tierra móvil, que lanzada sobre la "eclíptica", alrededor del astro central, recorre en 1 año su trayectoria y girando sobre sí misma en 24 horas toma rango entre los demás planetas; en fin la esfera de las estrellas fijas, inmóvil y límite del Universo.

Los períodos de revolución de los planetas son, expresados en días

Nm	Mercurio	Venus	Tierra	Marte	Júpiter	Saturno
Pr	80	275	365	730	4380	10950

Las observaciones que hacían falta a Copérnico, las suministra abundantemente el astrónomo danés Ticho (Brahe; Kundstrup 1546, Praga 1601) —tan incomparable observador como miope teórico—, y vienen ampliadas y resumidas por quien le sucede en la cátedra de "matemático imperial" a la Corte de Praga, es decir por

Kepler (Juan; Weil 1571, Ratisbona 1630), en las tres leyes que hoy llevan su nombre:
"la órbita de un planeta es una elipse con el Sol en uno de los focos"; "el segmento que une el Sol a un planeta describe áreas iguales en tiempos iguales"; "la potencia 3 de las distancias medias de los planetas al Sol, es decir, las semidistancias entre afelio y perihelio de cada planeta, son proporcionales a la potencia 2 de los períodos de revolución de los planetas alrededor del Sol", las primeras dos enunciadas en el año de 1609 en su "Astronomía nova" (Heidelbergae) y la tercera en el año de 1619 en su "Harmonices Mundi" (Linz).

Las leyes de Kepler constituyen la culminación de miles de años de búsqueda según una geometría-cinemática empírica del cielo y se puede afirmar que cierran el "período de la cinemática celeste" y abren la "época" de la "mecánica celeste", —según la distinción que hace Peguy entre "período" y época" correspondiente aquel a una evolución lenta, progresiva y regular y esta a un "nudo" a una "era" según Pelsener, —mecánica celeste que se inicia con las investigaciones de Newton en el año de 1666 y que toma cuerpo sólo en el año de 1682.

Las leyes de Kepler son descubiertas después de veintidós años de cálculos sin fin (sin logaritmos!) y de ensayos en que se descartan, despiadadamente, una hipótesis después de otra, cuando se observa que la misma no satisface las exigencias de la precisión con que han sido hechas las observaciones.

Solo la fe pitagórica en una armonía matemática de la naturaleza, armonía posible de ser evidenciada pudo sostenerlo; la historia de su perseverancia, no obstante las persecuciones y las tragedias domésticas que habrían quebrado la resistencia de un hombre normal, es una de las más heroicas de la ciencia.

En la Tabla 1 se han consignado las distancias medias, en mt. de cada planeta al Sol, y de cada satélite (considerado como un "planeta") al relativo planeta (considerado como un "sol") y la mantisa del logaritmo decimal de las mismas, y los períodos de revolución, en sc. de cada planeta alrededor del Sol y de cada satélite (considerado como un "planeta") alrededor del relativo planeta (considerado como un "sol"), y la mantisa del logaritmo decimal de los mismos.

En la Tabla 2 hemos escogido el eje de las abscisas para representar la variable cerodimensional $\lg(Pr/10^{p}$ sc$)$ en la cual Pr representa el período de revolución, en sc. de un planeta alrededor del sol o de un satélite alrededor del relativo planeta, y $p = 6,6,4,4,4,5,5$, con respecto al Sol, Tierra, Marte, Júpiter, Saturno, Uranio, Neptuno ordenadamente, y el eje de las ordenadas para representar la variable cerodimensional $\lg(Ds/10^{d}$ mt$)$ en la cual Ds representa la distancia media, (semidistancia entre Afelio y Perihelio) en mt. de un planeta al Sol, o de un satélite al relativo planeta y en que $d = 10, 8, 6, 10,10,10,10$, con respecto a Sol, Tierra, Marte, Júpiter, Saturno, Urano, Neptuno ordenadamente, de manera que podemos escribir:

$$X = \lg\,(Pr\ /\ 10^{p}\ sc),\ \text{et},\ Y = \lg\,(Ds\ /\ 10^{d}\ mt)$$

El hecho de que los puntos imágenes de los planetas con respecto al Sol y de los satélites considerados como "planetas" con respecto a los relativos planetas, considerados como "soles" pertenezcan a rectas, por lo menos en primera aproximación, y todas paralelas a la recta (0,0) (3,2) conduce a afirmar que la ley que liga X a Y, en primera aproximación, tiene que ser del tipo:

$$\text{“}Y = (2\ /\ 3)\ X + \lg Kp^{-}\text{”}$$

(siendo lg Kp— el segmento que cada recta corta sobre el eje de las Y, dependiente del "sol" considerado) y entonces se sigue que la ley que liga Pr a Ds tiene que ser (por lo menos en primera aproximación) del tipo:
$0 = 2X - 3Y + 3\lg Kp^{-} - 2.\lg(Pr/10^{p}\ sc) - 3.\lg(Ds\ /\ 10^{d}\ mt) + 3.\lg Kp^{-} = \lg\,(Pr/10^{p}\ sc)^{2}\ (Ds/10^{d}\ mt)^{-3}\ (kp^{-})^{3} = \lg\,(Pr^{2}Ds^{-3}Kp^{3-}sc^{-2}mt^{3}10^{-p+3d}) = 0$
de donde se deduce que

$$1 = Pr^{2}\ Ds^{-3}Kp^{-3}sc^{-2}mt^{3}10^{-2p+3d}$$

o, mejor, que

$$Ds^{3}\ /\ Pr^{2} = Kp^{-3}10^{3d-2p}mt^{3}\ sc^{-2}$$

que es la ley tercera de Kepler en primera aproximación. Calculándolos, o leyéndolos directamente en el Gráfico de la Tabla 2 se encuentra que los valores que lg Kp— asume ordenadamente para el Sol, Tierra, Marte, Júpiter, Saturno, Urano, Neptuno son: 0,175; 0,336; 0,693; 0,162; 0,345; 0,073; 0,062 de manera que los valores de Kp^{-3} son, ordenadamente: 3,351;10,20, 119,6 ; 0,3275 ; 0,0924 ; 1,650 ; 1,536 de manera que la tercera ley de Kepler para los diferentes sistemas "solares" Sol, Tierra, Júpiter, Saturno, Urano, Neptuno puede escribirse ordenadamente como sigue, si se recuerdan los valores de d y de p

$Ds^{3}\ /\ Pr^{2} =$	3,351	. 10^{18} mt^{3} sc^{-2}	para el sistema "solar" Sol
=	1,020	. 10^{13}	Tierra
=	1,196	. 10^{12}	Marte
=	3,275	. 10^{15}	Júpiter
=	9,245	. 10^{14}	Saturno
=	1,650	. 10^{14}	Urano
=	1,536	. 10^{14}	Neptuno

y entonces, en general, podemos afirmar que

$$\text{“}Ds^{3}\ /\ Pr^{2} = Kp = \text{constante de Kepler”}$$

en donde Kp es constante, por lo menos en primera aproximación, para cada sistema "solar" y variable de sistema "solar" a sistema "solar", o en otras palabras que: "Kp, es variable dependiente del "sol" y es constante o invariable, por lo menos en primera aproximación, con respecto a los "planetas" una vez que se haya fijado el "sol" ".

Se puede entonces afirmar que Kp (constante de Kepler), no es una constante cinemática universal, o sea igual para todos los sistemas "solares" sino una constante "solar" dependiente entonces de alguna magnitud dinámica "solar" característica y por lo tanto igual al producto, por lo menos en primera aproximación, de la masa "solar" Ms elevada a un exponente m, por ahora indeterminado, por una verdadera constante dinámica universal Nc cuyas dimensiones tienen entonces que ser tales que:

$$ln^{3}dr^{-2} = Kp = Ms^{m}\ Nc = mi^{m}\ .\ Nc = ln^{3}\ dr^{-2}$$

y entonces tales que

$$Nc = ln^{3}\ dr^{-2}mi^{-m}$$

de manera que la tercera ley de Kepler se puede escribir en la forma:

$$Ds^{3}\ /\ Pr^{2} = Ms^{m}\ .\ Nc$$

que evidencia, mejor que la precedente, la dependencia del cociente

$Ds^{3}\ /\ Pr^{2}$ de la masa "solar" Ms.

A la misma conclusión podemos llegar también de la siguiente manera:

"si se acepta, para una mayor sencillez, (lo que es posible por lo menos en primera aproximación) que la 1ª y 2ª ley de Kepler se pueden enunciar ligándolas en la forma "la órbita descrita por un "planeta" alrededor del "sol" es una circunferencia de la que el "sol" ocupa el centro y que el planeta describe con un movimiento uniforme" y si se recuerda el 1º principio de la dinámica "todo cuerpo persevera en su estado de movimiento rectilíneo uniforme (o de quietud, en particular) hasta que no interviene una fuerza a cambiar tal estado" entonces podemos deducir, — de la coexistencia de las proposiciones enunciadas, la existencia de una fuerza Fr que actúa sobre el "planeta" y debida necesariamente a una atracción por parte del "sol" y en virtud del 3º principio de la dinámica, "si un cuerpo A actúa sobre un cuerpo B con una fuerza F según la recta A B y en el sentido, para fijar las ideas B A, entonces el cuerpo B actúa sobre el cuerpo A con una fuerza igual a F (según la recta B A y en el sentido A B" podemos deducir también "la existencia de la fuerza Fr que actúa sobre el "sol" (y debida necesariamente a la atracción por parte del "planeta" ".

En conclusión podemos afimar que:
"existe una fuerza de intensidad Fr, aplicada en Pl (Planeta) cuya línea de acción es Pl Sl y cuyo sentido es Pl Sl y existe una fuerza, de intensidad Fr, aplicada en Sl (sol) cuya línea de acción es Sl-Pl y cuyo sentido es Sl Pl".

Tratemos entonces de encontrar la relación que liga esta fuerza Fr a las masas Ms y Mp del "sol" y del "planeta" a la distancia Ds entre el "sol" y el "planeta" y a la constante Kp de Kepler supuesta universal (no se necesitan otros datos puesto que los aducidos determinan "completamente" el problema en virtud de las mismas leyes de Kepler).

La relación que estamos buscando siempre se podrá expresar en la forma, siendo fi una función por ahora indeterminada:

$$0 = \mathrm{fi}\ (\mathrm{Fr, Ms, Mp, Ds, Kp})$$

y entonces el álgebra de las magnitudes nos sugiere calcular los monomios cerodimensionales Cd cuyos factores no todos aparentes sean los argumentos de fi, o sea los monomios Cd tales que, siendo f, s, p, d, k no todos ceros:

$$\mathrm{ln}^{o}\ \mathrm{dr}^{o}\mathrm{mi}^{o} = \mathrm{Cd} = \mathrm{Fr}^{f}\ \mathrm{Ms}^{s}\ \mathrm{M}^{p}\ \mathrm{Ds}^{d}\ \mathrm{Kp}^{k} = (\mathrm{ln\ dr}^{2}\ \mathrm{mi})^{f}(\mathrm{mi})^{s}(\mathrm{mi})^{p}(\mathrm{ln}^{3}\mathrm{dr}^{-2})^{k} = \mathrm{ln}^{f+d+3k}.\ \mathrm{dr}^{-2f-2k}.\ \mathrm{mi}^{f+s+p} = \mathrm{ln}^{o}\ \mathrm{dr}^{o}\ \mathrm{mi}^{o}$$

en donde ln,dr,mi significan respectivamente longitud, duración, masa inercial, es decir que

$$0 = f + d + 3k = -2f - 2k = f + s + p$$

de donde escogiendo f y p como variables independientes se deduce que

$$s = -f\ p,\ \mathrm{et},\ d = 2f,\ \mathrm{et},\ K = -f$$

de manera que los monómios Cd que estamos buscando tienen que ser tales que:

$$\mathrm{Cd} = \mathrm{Fr}^{f}\mathrm{Ms}^{-f-p}\ \mathrm{Mp}^{p}\ \mathrm{Ds}^{2f}\mathrm{Kp}^{-f} = (\mathrm{Fr\ Ms}^{-1}\ \mathrm{Ds}^{2}\ \mathrm{Kp}^{-1f})^{f}(\mathrm{Mp\ Ms}^{-1})\mathrm{p}$$

o sea, productos de potencias arbitrarias de los dos Cd independientes

$$\mathrm{Cd}_{1} = \mathrm{Fr\ Ms}^{-1}\ \mathrm{Ds}^{2}\ \mathrm{Kp}^{-1},\ \mathrm{et},\ \mathrm{Cd}_{2} = \mathrm{Mp\ Ms}^{-1}$$

de manera que, en virtud del postulado fundamental de Vaschy-Buckingham, la relación que estamos buscando tiene que ser del tipo:

$$0 = \mathrm{fi}-(\mathrm{Ad}_{-1}\ \mathrm{Fr\ Ms}^{-1}\mathrm{Ds}^{2}\ \mathrm{Kp}^{-1},\ \mathrm{Ad}_{-2}\ \mathrm{Mp\ Ms}^{-1})$$

de donde, aprovechando la indeterminación de Ad_{-1}, Ad_{-2}, fe, se deduce que

$$\mathrm{Fr} = (\mathrm{Ms\ Kp}\ /\ \mathrm{Ds}^{2}).\ \mathrm{fn}\ (\mathrm{Mp}\ /\ \mathrm{Ms})$$

siendo fn una función indeterminada.

Tal expresión de Fr en función de Ms, Kp, Ds, Mp es evidente y esencialmente "asimétrica" con respecto a Ms y a Mp contrariamente a lo que debíamos esperar si hubiésemos respectado la tercera ley de la dinámica.

Esta contradicción se supera y se resuelve si se admite que la constante Kp de Kepler no es universal, sino el producto de una constante dinámica universal Nc por una potencia, de exponente por ahora indeterminado, de la masa Ms del "sol", o sea que

$$\mathrm{Kp} = \mathrm{Ms}^{m}.\ \mathrm{Nc}$$

como ya lo dedujimos de los resultados de la Tabla 2 de manera que la constante universal Nc es de tipo dimensional tal que

$$\mathrm{Nc} = \mathrm{Kp}\ /\ \mathrm{Ms}^{m} = \mathrm{ln}^{3}\ \mathrm{dr}^{-2}\ /\ \mathrm{mi}^{m} = \mathrm{ln}^{3}\ \mathrm{dr}^{-2}\ \mathrm{mi}^{-m}$$

y la tercera ley de Kepler se enuncia, como ya sabíamos:

$$\mathrm{Ds}^{3}\ /\ \mathrm{Pr}^{2} = \mathrm{Nc}\ .\ \mathrm{Ms}^{m}$$

Tratemos ahora de deducir la ley, que tiene que existir por lo dicho, entre Fr, Ms, Ds, Nc, magnitudes de las cuales ya se conoce el significado.

La ley que estamos buscando siempre podrá ponerse en la forma:

$$0 = \mathrm{fi}\ (\mathrm{Fr, Ms\ Mp, Ds, Nc})$$

siendo fi una función por ahora indeterminada, y entonces el álgebra de las magnitudes nos sugiere calcular los monomios cerodimensionales Cd cuyos factores no todos aparentes sean los argumentos de fi, o sea los monomios Cd tales que, siendo f, s, p, d, n no todos ceros:

$$\mathrm{ln}^{o}\ \mathrm{dr}^{o}\ \mathrm{mi}^{o} = \mathrm{Cd} = \mathrm{Fr}^{f}\ \mathrm{Ms}^{s}\ \mathrm{Mp}^{p}\ \mathrm{Ds}^{d}\ \mathrm{Nc}^{n} = (\mathrm{ln\ dr}^{-2}\mathrm{mi})^{f}(\mathrm{mi})^{s}\ (\mathrm{mi})^{p}(\mathrm{ld})^{d}(\mathrm{ln}^{3}\ \mathrm{dr}^{-2}\mathrm{mi}^{-m})^{n} = \mathrm{ln}^{f+d+3n}\mathrm{dr}^{-2f-2n}.\ \mathrm{mi}^{f+s+p-nm} = \mathrm{ln}^{o}\ \mathrm{dr}^{o}\ \mathrm{mi}^{o}$$

de donde se deduce que

$$0 = f + d + 3n = -2f - 2n = f + s + p - nm$$

de donde, considerando las variables f y p como independientes se deduce que:

$$s = -p - (m+1)\ f,\ \mathrm{et},\ d = 2f,\ \mathrm{et},\ n = -f$$

de manera que los monomios Cd que estamos buscando tienen que ser del tipo tal que:

$$\mathrm{Cd} = \mathrm{Fr}^{f}\ \mathrm{Ms}^{-p-(m+1)f}\ \mathrm{Mp}^{p}\ \mathrm{Ds}^{2f}\ \mathrm{Nc}^{-f} = (\mathrm{Fr} = \mathrm{Ms}^{-m-s}\mathrm{Ds}^{2}\ \mathrm{Nc}^{-1})^{f}(\mathrm{Mp\ Ms}^{-1})^{p}$$

o sea, productos de potencias arbitrarias de los dos Cd independientes

$$\mathrm{Cd}_{-1} = \mathrm{Fr\ Ms}^{-m-1}\ \mathrm{Ds}^{2}\ \mathrm{Nc}^{-1},\ \mathrm{Cd}_{-2} = \mathrm{Mp\ Ms}^{-1}$$

o mejor, para ligar directamente Fr a Mp

$$\mathrm{Cd}_{1} = \mathrm{Fr\ Ms}^{-m}\ \mathrm{Mp}^{-1}\ \mathrm{Ds}^{2}\ \mathrm{Nc}^{-1},\ \mathrm{Cd}_{2} = \mathrm{Mp\ Ms}^{-1}$$

de manera que en virtud del postulado fundamental de Vaschy-Bucingham la relación que estamos buscando tiene que ser del tipo tal que

$$0 = \mathrm{fi}-(\mathrm{Ad}_{1}-\mathrm{Fr\ Ms}^{-m}\ \mathrm{Mp}^{-1},\ \mathrm{Ad}_{-2}\ \mathrm{Mp\ Ms}^{-1})$$

o también del tipo tal que

$$\mathrm{Ad}_{-1}\ \mathrm{Fr\ Ms}^{-m}\ \mathrm{Mp}^{-1}\ \mathrm{Ds}^{2}\ \mathrm{Nc}^{-1} = \mathrm{fe}\ (\mathrm{Ad}_{-2}\ \mathrm{Mp\ Ms'})$$

o mejor todavía, tal que

$$\mathrm{Fr} = (\mathrm{Nc\ Ms}^{m}\ \mathrm{Mp}\ /\ \mathrm{Ds}^{2}).\ \mathrm{fn}\ (\mathrm{Mp}^{v}\ \mathrm{Ms}^{-v})$$

aprovechando las indeterminaciones de Ad_{-1}, Ad_{-2} y fe Si en este punto se recuerda que, en virtud del ya citado 3er. principio de la dinámica la expresión de Fr tiene que ser simétrica con respecto a Ms y a Mp se deduce que

$$m = 1, \text{ et, } v = -v, \text{ o sea que } m = 1, \text{ et, } v = 0$$

y entonces que

$$Fr = Nc\ Ms\ Mp\ /\ Ds^2$$

que es la fórmula ya demostrada por Newton en el año de 1666 y publicada solo en el año de 1682 a la distancia de dieciseis años, en la fundamental obra: "Philosophiae naturalis principia mathematica" — London.

La fórmula que precede, y a la cual Newton llega por otro camino, (véase por ejemplo "Historie de la Mécanique" de Ducas) pone punto final a las "divinaciones" de

De-Dominis (Marco Antonio; Spalato 1566, Roma 1624) que en su "Euripiis, seu de fluxu et refluxu maris sentencia "—Romae 1624" busca explicar las mareas por medio de la atracción de la luna sobre las aguas;

de Kepler que en su "Prodromus dissertationum cosmographicarum continens mysterium cosmographicum" (Tubingen 1596) atribuye el movimiento de la luna a la atracción de la tierra, y que, más explícitamente, en su "Epitomaes astronomiae copernicanae liber quartus" (Lentiis ad Danubium 1620), afirma que en el sol como en todo planeta existe una "prensatio" o "vis prensandi" (prenso = traigo) que se transmite en línea recta, en todo el espacio, a través de todos los cuerpos y depende (la prensatio) de sus masas (del sol y del planeta) y de su recíproca distancia según la relación Fr = Ms / Ds;

de Bouillaud o Bullialdus (Ismaele; París 1605, París 1694) que en su "Astronomia Philolaica" Parisiae 1645, afirma que:

"la fuerza que el sol ejerce sobre los planetas está en razón inversa al cuadrado de las relativas distancias;

de Borelli (Juan Alfonso; Nápoles 1608, Roma 1679) que en su "Theoricas Mediceorum planetarumm ea causis phisics deductae" — Florentiae 1666, admite que los planetas gravitan hacia el sol por la misma virtud por la cual un cuerpo gravita hacia la tierra;

de Hooke (Roberto; Freshwater 1635, Londres 1702) que en su "An attempt to prove the of the Earth" London 1674, afirma que: "todos los cuerpos celestes sin excepción, ejercen un poder de atracción o de pesantes dirigido hacia el propio centro...

...todos los cuerpos una vez puestos en movimiento uniforme y rectilíneo persisten en moverse así indefinidamente en línea recta hasta que otras fuerzas lleguen a desviarlos de sus caminos hacia una circunferencia una elipse o cualquier otra curva más complicada...

...los poderes atractivos se ejercen con mayor energía a medida que los cuerpos sobre los cuales actúan se acercan al centro de donde los poderes emanan...

La demostración dada por Newton integra en una síntesis poderosa las leyes astronómicas de Kepler la ley de la fuerza centrífuga de Huyghens (Christian; van Zuylichen; la Haya 1629, la Haya 1695) y las leyes sobre caídas de los graves Galilei (Galileo; Pisa 1564, Firenze 1642) de manera que estos últimos tres grandes tienen que ser considerados como los principales precursores del grande de quien Halley dijo "Nec fas est propius mortali attingere Divos" y que se recuerda en la inscripción del monumento que le ha sido erigido en el Trinity College, como el que "Genus humanumm ingenio superavit".

En lo que concierne a la demora de 16 años entre la demostración y la publicación de la fórmula se puede afirmar que mientras Newton desde el año de 1666 había vislumbrado el cuadro comprensivo de validez universal de su ley sobre gravitación universal, los cálculos no estaban confirmados por las observaciones, en cuanto que la intensidad de la atracción que la tierra ejerce sobre la luna, magnitud calculada basándose en el movimiento de la luna, no parecía corresponder, en el sentido de la ley newtoniana, con la intensidad de la fuerza de gravedad sobre la superficie de la tierra, así que Newton, pensando que otras fuerzas, además de las consideradas tenían que actuar abandonaba, descorazonado, las búsquedas, las investigaciones.

Solamente 16 años más tarde, o sea en el año 1682, cuando llegó a conocer que las nuevas medidas geodésicas de la circunferencia terrestre habían proporcionado un valor que llegaba a ser una sexta parte mayor que aquel hasta entonces conocido, volvió a reanudar sus búsquedas y esta vez los cálculos coincidieron con las observaciones.

Es esta la explicación que presentan sobre tal demora algunos historiadores de la física, pero otros, por ejemplo Couderc afirman ser todo esto una leyenda puesto que un error del 15% no era de tal naturaleza como para desviar de su idea un físico así avezado como Newton que entre otras cosas no podía ignorar la imprecisión de las medidas relativas a la tierra.

Según este historiador de la astronomía una dificultad de índole más grave impidió por largo tiempo la verificación.

El peso de un objeto depende de la atracción, sobre el objeto mismo de todos los puntos de la tierra y no es de ninguna manera evidente que la tierra actúe como si toda su masa fuera concentrada en el centro así que como distancia entre objetos y tierra debería ser considerada aquella igual al radio terrestre. Newton tenía que emplear algunos años para establecer tal ley sin la cual ningún cálculo habría podido ser iniciado. Newton tenía que crear, y es esto uno entre los grandes méritos suyos, el instrumento matemático necesario a su trabajo: el cálculo de las fluxiones.

Una vez demostrado, por medio del cálculo de las fluxiones, que una masa esférica atrae como si estuviera concentrada en el centro de la esfera, Newton prosigue para verificar su ley, de la manera siguiente:

Sabiendo que el radio Dl de la órbita lunar es del orden de 60Rt, siendo Rt el radio terrestre, la fuerza que mantiene la luna sobre su órbita tendría que ser 3600 veces más débil que la gravedad en la superficie de la tierra, y como un cuerpo cayendo en caída libre en los alrededores de la tierra recorre en el primer segundo una distancia de 15 pies de París o 180 pulgadas, entonces la luna tendría que caer hacia la tierra a razón de 1/20 de pulgada por segundo.

Conociendo el período Pl del movimiento de la luna y la magnitud de la órbita se puede fácilmente calcular esta caída: con los datos que se conocían en aquella época en Inglaterra, Newton encuentra el valor 1/23 de pulgadas.

Con otras palabras el razonamiento de Newton se puede poner en la forma que sigue:

"si se indica con Mc una masa cualquiera en la superficie de la tierra con Gr la aceleración de gravedad, con Nc la constante de Newton-Cavendish (incógnita), con Mt la masa terrestre (incógnita), con Rt el radio terrestre (incógnito), con Ml la masa lunar (incógnita), con Dl la distancia de la luna a la tierra, con Vl la velocidad de la luna sobre su órbita y con Pl el período de revolución (sinódico) lunar, entonces podemos escribir que:

$$Mc \,.\, Gr = \text{la fuerza con que la tierra atrae a } Mc = Nc\ Mt\ Mg\ /\ Rt^2$$

de donde se deduce que:

$$Nc\ Mt\ Gr\ .\ Rt^2$$

y además

$Nc\ Mt\ Ml\ /\ Dl^2 =$ la fuerza con que la tierra atrae la luna $=$ la fuerza centrípeta que retiene a la luna sobre su órbita $= Ml\ Vl^2\ /\ Dl = Ml\ (2\ Dl)^2\ /\ Dl =$
$= 4\pi^2\ Ml\ Dl\ /\ Pl^2$

de donde se deduce que

$$Nc\ Mt\ Pl^2 = 4\pi^2\ Dl^3$$

y entonces usando de la precedente se deduce que

$$Gr\ Rt^2\ Pl^2 = 4\pi^2\ Dl^3$$

de la cual, indicando con Cc al cociente Dl/Rt, se deduce que:

$$Rt\ Gr\ Pr^2\ /\ 4\pi^2\ Cc^3$$

En 1666 el radio terrestre Rt, medido a través de observaciones geodésicas era tal que $Rt = 5{,}40.10^6$ mt mientras que, calculado con la fórmula que precede y los datos que en el mismo año se conocían, resulta ser que:

$$Rt = 9{,}80\ mt\ sc^{-2}\ (2{,}36{,}10^6\ sc)^2\ /\ 4.3{,}14^2\ .\ 60^3 = = 6{,}40.10^6 mt$$

o sea, la diferencia relativa es tal que

$$(Rt_c - Rt_g)\ /\ Rt_c = (6,4 - 5{,}4)\ /\ 6,4 = 5/32 = = 15/100 = 0{,}15$$

error admisible, como ya se había dicho.

Ahora que poseemos la ley de gravitación en la forma

$$Fr = Nc\ Ms\ Mp\ /\ Ds^2$$

con la constante universal Nc, de Newton — Covendish (Erico; Niza 1731, Londres 1810), evidenciada y del tipo dimensional;

$$Nc = Fr\ Ds^2\ /\ Ms\ Mp = ln\ dr^{-2}\ mi\ ln^2\ /\ mi = = ln^3\ dr^{-2}\ mi^{-1}$$

y cuyo valor determinó experimentalmente Cavendish, se quiere buscar la 3ª ley de Kepler en su segunda aproximación. Para tal efecto se debe buscar la relación que existe entre el período de revolución Pr de un "planeta" alrededor del "sol", la distancia media Ds entre el mismo planeta y el sol, las masas Mp y Ms respectivamente, y la constante universal Nc, relación que siempre podemos pensarla en la forma $0 = Fi\ (Pr, Ds, Mu, Ms, Nc)$ siendo fi una función, por ahora, indeterminada.

El álgebra de las magnitudes sugiere, entonces, buscar los monomios cerodimensionales Cd cuyos factores no todos aparentes sean los argumentos de Fi o sea los monomios Cd del tipo tal que, siendo r, d, p, s, n no todos ceros,

$$ln^o\ dr^o\ mi^o = Cd = Pr^r\ Ds^d\ Mt^p\ Ms^s\ Nc^n = = (Dr)^r\ (ln)^d\ (mi)^p\ (mi)^s\ (lr3\ dr^{-2}\ mi^{-1})^n = = ln^{\,d+3n}.\ dr^{r-2n}.\ mi^{ps-n} = ln^o\ dr^o\ mi^o$$

de donde se deduce que

$$0 = d + 3n = r - 2n = p + s - n$$

de donde escogiendo a n y a p como variable independientes se deduce que

$$d = -3n,\ et,\ r = 2n,\ et,\ s = n - p$$

de manera que los monomios Cd que estamos buscando son todos y sólo tales que

$$Cd = Pr^r\ Ds^d\ Mp^p\ Ms^s\ Nc^n = Pr^{2n}\ Ds^{-3}\ Mp^p\ Ms^{n-p} Nc^n = (Pr^2\ Ds^{-3}\ Ms\ Nc)^n\ (Mp\ Ms^{-1})^p = Cd$$

o sea todos y solo productos de potencias arbitrarias de los Cd tales que

$$Cd = Pr^2\ Ds^{-3}\ Es\ Nc,\ et,\ Cd_2 = Mp\ Ms^{-1}$$

así que la ley que estamos buscando, en virtud del postulado fundamental de Vaschy — Buckingham, tiene que ser del tipo:

$$0 = Fi\ (Ad^x, Ds^3\ Pr^{-2}\ Ms^{-1}\ Nc^{-1}, Ad_2x\ Mp\ Ms^{-1})$$

o, mejor aun, del tipo tal que

$$Ds^3\ /\ Pr^2 = Nc\ Ms\ .\ Fn\ (Mp\ /\ Ms)$$

que es la tercera ley de Kepler generalizada.

Si después, se toma en consideración la regla de ligar todo "período" (piénsese en aquel del "péndulo") a 2π en la forma $Pr\ /\ 2\pi$, entonces la última fórmula, aprovechando la indeterminación de fn, toma la forma

$$Ds^3\ /\ Pr^2 = Nc\ Ms\ fn\ (Mp\ /\ Ms)\ /\ 4^2$$

y si recordamos que como fórmula de Kepler en primera aproximación (experimental) teníamos

$$Ds^3\ /\ Pr^2 = Nc\ Ms\ /\ 4\pi^2$$

entonces podemos concluir que la fórmula de Kepler en segunda aproximación tiene que ser del tipo tal que:

$$Ds^3\ /\ Pr^2 = Nc\ Ms\ (I + Ad\ Mp\ /\ Ms)\ /\ 4^2 = = Nc\ (Ms + Mp)\ /\ 4^2$$

siendo Ad una constante adimensional, por ahora indeterminada.

Una consideración sobre el movimiento efectivo de Mp y de Ms, —ambas masas giran alrededor del baricentro del sistema cuya masa total es Ms + Mp—, permite pensar que Ad tiene que ser igual a I — de manera que la 3ª ley de Kepler en su forma de 2ª aproximación (y definitiva) es tal que

$$Ds^3\ /\ Pr^2 = Nc\ (Ms + Mp)\ /\ 4\pi^2$$

La tendencia sana, a la "racionalización" de las fórmulas físicas induce a escribir la fórmula de Newton en la forma

$$Fr = Ms\ Mp\ /\ 4\pi\ Cn\ Ds^2$$

siendo Cn la nueva constante gravitacional (de Cavendish-Newton) cuyo valor es tal que:

$$Cn = 1{,}194\ mt^{-3}\ sc^2\ kg$$

y entonces la fórmula de Kepler es de la forma tal que:

$$Pr^2\ /\ Ds^3 = 16\pi^3\ Cn\ /\ (Ms + Mp)$$

Nota—Si consideramos una tabla de los datos relativos a los principales Cometas períodicos, por ejemplo la de la "Astronomía" de José Comas Solá y se calcula en mt la semidistancia Ds entre Perihelio y Afelio y en sc el período Pr de revolución (véase tabla Nr) y se construye el gráfico tomado

$$X = lg\ (Ds\ /\ 10''\ mt),\ et,\ Y = lg\ (Pr\ /\ 10^8\ sc)$$

entonces es dable darse cuenta de que

$$Y = 3X\ /\ 2 - 0{,}76$$

es decir que

$$0 = 3X - 2Y - 1{,}52$$

$$= 3\lg (Ds / 10" mt) - 2\lg (Pr/10^8 sc) - \lg 33{,}5 =$$
$$= \lg (Ds^3 10^6 sc^2 / 10^{33} mt^3 Pr^2 \, 3{,}35 \,.\, 10) =$$
$$= \lg (Ds^3 / Pr^2 \,.\, 3{,}35.10^{18} mt^3 sc^{-2}) = 0$$

de donde se deduce que

$$Ds^3 / Pr^2 \,.\, 3{,}35 \,.\, 10^{18} mt^3 sc^{-2} = 1$$

es decir que

$$Ds^3 / Pr^2 = 3{,}35 \,.\, 10^{18} mt^3 sc^{-2}$$

o sea que para los cometas la semidistancia Ds, entre Perielio y Afelio, y el período Pr de revolución satisfacen a la misma ley, con la misma constante de Kepler, a la cual satisfacen los planetas.

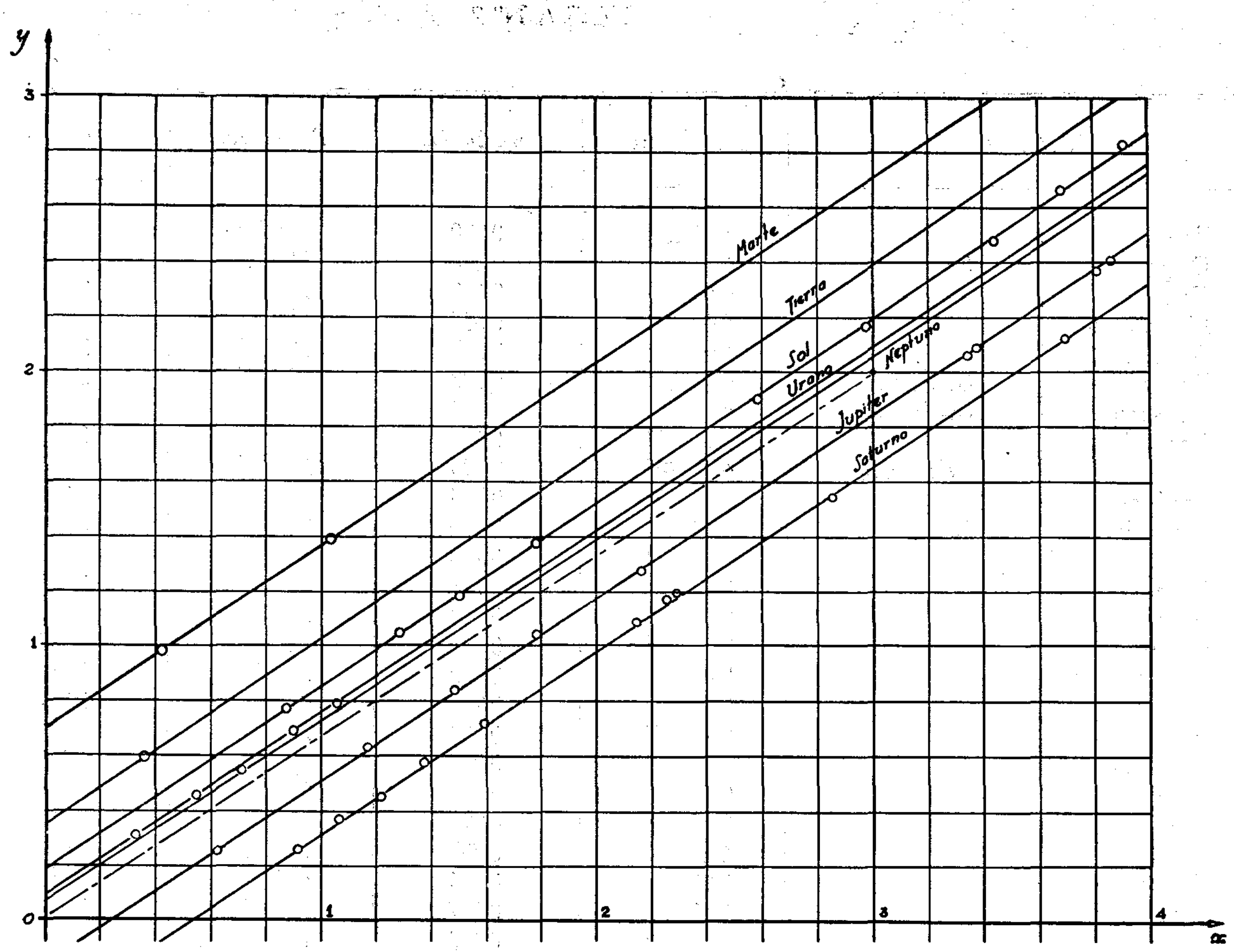
Esto permite afirmar que los cometas pertenecen al sistema solar así como al mismo pertenecen los planetas.

TABLA Nº 1

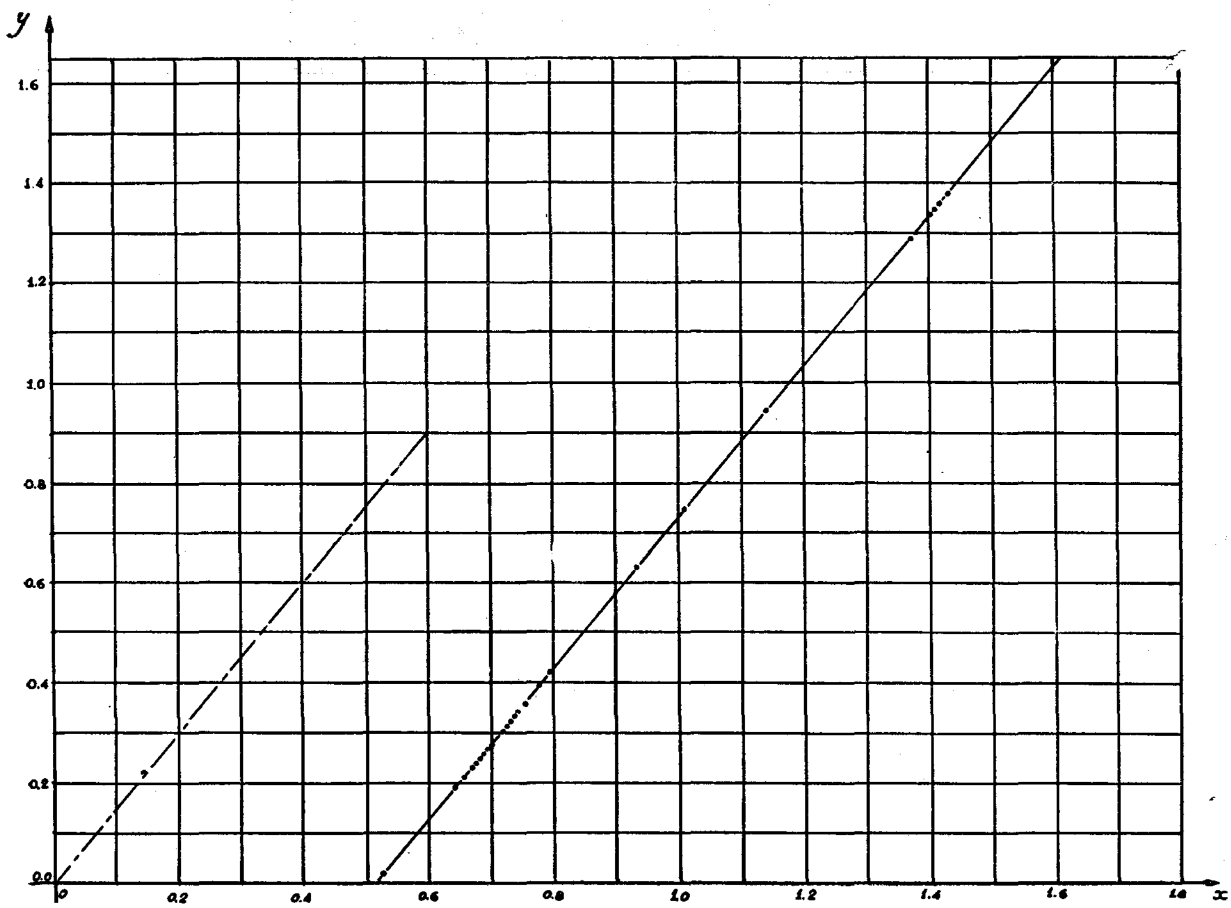
PLANETA	SATELITE	*Ds. en mt.*	*mn lg Ds*	*Pr. en sc.*	*mnlg Pr*
Mercurio		$5{,}78.10^{10}$	0,762	$7{,}60.10^{6}$	0,881
Venus		$1{,}08.10^{11}$	0,034	$1{,}94.10^{7}$	0,288
Tierra		$1{,}50.10^{11}$	0,175	$3{,}16.10^{7}$	0,499
	Luna	$3{,}84.10^{8}$	0,585	$2{,}36.10^{6}$	0,373
Marte		$2{,}28.10^{11}$	0,357	$5{,}94.10^{7}$	0,773
	Deimo	$9{,}50.10^{6}$	0,978	$2{,}68.10^{4}$	0,428
	Febo	$2{,}37.10^{7}$	0,375	$1{,}09.10^{5}$	0,037
Júpiter		$7{,}78.10^{11}$	0,891	$3{,}74.10^{8}$	0,573
	V	$1{,}80.10^{8}$	0,256	$4{,}23.10^{4}$	0,627
	Yo	$4{,}21.10^{8}$	0,625	$1{,}52.10^{5}$	0,182
	Europa	$6{,}70.10^{8}$	0,826	$3{,}07.10^{5}$	0,487
	Ganimedes	$1{,}07.10^{9}$	0,029	$6{,}18.10^{5}$	0,791
	Calisto	$1{,}18.10^{9}$	0,274	$1{,}44.10^{6}$	0,156
	VI	$1{,}14.10^{10}$	0,058	$2{,}16.10^{7}$	0,335
	VII	$1{,}17.10^{10}$	0,069	$2{,}25.10^{7}$	0,353
	VIII	$2{,}35.10^{10}$	0,361	$6{,}30.10^{7}$	0,799
	IX	$2{,}47.10^{10}$	0,392	$6{,}88.10^{7}$	0,838
Saturno		$1{,}43.10^{12}$	0,154	$9{,}14.10^{8}$	0,961
	Mimante	$1{,}83.10^{8}$	0,262	$8{,}12.10^{4}$	0,910
	Encelado	$2{,}34.10^{8}$	0,360	$1{,}18.10^{5}$	0,073
	Tetis	$2{,}90.10^{8}$	0,463	$1{,}63.10^{5}$	0,213
	Dione	$3{,}71.10^{8}$	0,570	$2{,}37.10^{5}$	0,374
	Rhea	$5{,}19.10^{8}$	0,715	$3{,}91.10^{5}$	0,592
	Titano	$1{,}20.10^{9}$	0,080	$1{,}38.10^{6}$	0,139
	Te	$1{,}44.10^{9}$	0,158	$1{,}80.10^{6}$	0,255
	Iperión	$1{,}46.10^{9}$	0,163	$1{,}84.10^{6}$	0,265
	Giapeto	$3{,}51.10^{9}$	0,545	$6{,}85.10^{6}$	0,836
	Febea	$1{,}28.10^{10}$	0,106	$4{,}76.10^{7}$	0,677
Urano		$2{,}87.10^{12}$	0,458	$2{,}65.10^{9}$	0,423
	Ariele	$1{,}98.10^{8}$	0,298	$2{,}18.10^{5}$	0,338
	Umbriele	$2{,}77.10^{8}$	0,442	$3{,}58.10^{5}$	0,554
	Titania	$4{,}54.10^{8}$	0,657	$7{,}53.10^{5}$	0,877
	Oberón	$6{,}07.10^{8}$	0,783	$1{,}16.10^{6}$	0,066
Neptuno		$4{,}49.10^{12}$	0,653	$4{,}68.10^{9}$	0,670
	Tritón	$3{,}41.10^{8}$	0,533	$5{,}08.10^{5}$	0,706
Plutón		$6{,}40.10^{12}$	0,806	$7{,}68.10^{9}$	0,885

TABLA Nº 2

COMETA		Ds. en mt.	mn lg Ds	Pr. en sc.	mnlg Pr
Enke		$3{,}31.10^{11}$	0,520	$1{,}04.10^{8}$	0,017
Grigg	Skjellerup	$4{,}37.10^{11}$	0,640	$1{,}57.10^{8}$	0,196
Tempel		$4{,}47.10^{11}$	0,650	$1{,}63.10^{8}$	0,212
$Nujmunin_2$		$4{,}62.10^{11}$	0,665	$1{,}71.10^{8}$	0,233
Brorsen		$4{,}64.10^{11}$	0,667	$1{,}72.10^{8}$	0,236
Tempel	Swift h.	$4{,}77.10^{11}$	0,678	$1{,}79.10^{8}$	0,253
De Vico	Swift E.	$4{,}86.10^{11}$	0,687	$1{,}85.10^{8}$	0,267
Tempel		$4{,}93.10^{11}$	0,693	$1{,}89.10^{8}$	0,276
Pons	Winnecke	$4{,}95.10^{11}$	0,695	$1{,}90.10^{8}$	0,279
Perrinel		$5{,}19.10^{11}$	0,715	$2{,}04.10^{8}$	0,310
Giacobini	Zinner	$5{,}25.10^{11}$	0,720	$2{,}07.10^{8}$	0,316
Koppf		$5{,}25.10^{11}$	0,720	$2{,}08.10^{8}$	0,318
$Biela_1$		$5{,}28.10^{11}$	0,723	$2{,}09.10^{8}$	0,320
$Biela_2$		$5{,}28.10^{11}$	0,723	$2{,}09.10^{8}$	0,320
d'Arrest		$5{,}28.10^{11}$	0,723	$2{,}09.10^{8}$	0,320
Finlay		$5{,}40.10^{11}$	0,732	$2{,}16.10^{8}$	0,334
Holmes		$5{,}40.10^{11}$	0,732	$2{,}16.10^{8}$	0,334
Borrelly		$5{,}42.10^{11}$	0,734	$2{,}17.10^{8}$	0,336
$Broocks_2$		$5{,}43.10^{11}$	0,735	$2{,}18.10^{8}$	0,338
Faye		$5{,}64.10^{11}$	0,751	$2{,}31.10^{8}$	0,364
Schaumasse		$5{,}96.10^{11}$	0,775	$2{,}51.10^{8}$	0.400
Wolff		$6{,}13.10^{11}$	0,787	$2{,}61.10^{8}$	0,417
Tuttle		$8{,}50.10^{11}$	0,929	$4{,}27.10^{8}$	0,630
Nujmunin		$1{,}09.10^{12}$	0,037	$5{,}58.10^{8}$	0,747
Pons		$1{,}38.10^{12}$	0,140	$8{,}80.10^{8}$	0,944
Westphal		$2{,}34.10^{12}$	0,369	$1{,}95.10^{9}$	0,290
Brorsen	Metcalfs	$2{,}52.10^{12}$	0,401	$2{,}18.10^{9}$	0,338
Pons	$Broocks_1$	$2{,}58.10^{12}$	0,412	$2{,}26.10^{9}$	0,354
Olbers		$2{,}61.10^{12}$	0,417	$2{,}29.10^{9}$	0,360
Halley		$2{,}96.10^{12}$	0,430	$2{,}40.10^{9}$	0,380



Representacion gráfica de la Tabla No. 1



Representacion gráfica de la Tabla No. 2