

# UTILIZACION DEL CALCULO MATRICIAL EN EL AJUSTAMIENTO POR MINIMOS CUADRADOS

LUIS DE GREIFF BRAVO

La finalidad de este trabajo es presentar, de una manera rápida y directa, el proceso de formación de los sistemas de *ecuaciones normales*, que es necesario resolver para lograr los valores óptimos, o sea, más probables, que se debe asignar a un conjunto de magnitudes que haya sido medido experimentalmente.

En esta exposición supondremos que el lector conoce, según los lineamientos clásicos, la teoría de ajustamiento de errores de observación basada en el principio de *mínimos cuadrados*, justificado en el Cálculo de Probabilidades. Será también necesario —para la comprensión del presente trabajo— que el lector conozca, al menos los fundamentos del álgebra de matrices.

Reduciremos la discusión a dos casos especiales, de mucha importancia en Astronomía, Geodesia, Física, etc., al primero de los cuales pasamos a referirnos.

Supongamos que un conjunto de magnitudes *pequeñas*, a saber,  $x_1, x_2, \dots, x_p$ , y decimos pequeñas por tratarse de *correcciones* que deben ser adicionadas a las magnitudes medidas, estén ligadas entre sí linealmente, en el sistema siguiente,

$$(1) \begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 + \dots + a_{1p} x_p + h_1 = 0, \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 + \dots + a_{2p} x_p + h_2 = 0, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{r1} x_1 + a_{r2} x_2 + a_{r3} x_3 + \dots + a_{rp} x_p + h_r = 0, \end{cases}$$

donde los  $a_{st}$ ,  $h_s$ , ( $s = 1, 2, \dots, r$ ;  $t = 1, 2, \dots, p$ ) son números reales conocidos. Si además es  $r > p$ , tenemos un sistema redundante.

El Algebra demuestra que estos sistemas son *en general*, incompatibles, no existiendo, por consiguiente, solución. El número de ecuaciones *superfluas* es, en este caso  $r - p$ , al suponer, claro está, que las ecuaciones (1) son *distintas*.

Empero, existe un número infinito de soluciones aproximadas (pseudo-soluciones) es decir, conjuntos de números  $x'_1, x'_2, \dots, x'_p$ , tales, que al ser sustituidos por las correspondientes incógnitas, no satisfacen rigurosamente las ecuaciones (1), adquiriendo los primeros miembros valores  $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_r$ , que llamaremos *residuos*.

Entre el número infinito de soluciones aproximadas interesa, siguiendo a los creadores de la teoría de errores de observación, Legendre y Gauss, aquella que dan para la suma de los cuadrados de los residuos un valor *mínimum*, es decir, para las cuales se tiene,

$$(2) \quad \sum_{v=1}^r \epsilon_v^2 = [\epsilon \epsilon] = \text{mínimum}$$

Se sabe que el sistema (1) genera un sistema de *ecuaciones normales*, de matriz cuadrada y simétrica, cuya dimensión es igual al número  $p$ . La resolución de este sistema responde a la cuestión.

Al efecto, si se utiliza la designación matricial, el sistema (1) puede escribirse así,

$$(3) \quad \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ \vdots \\ E_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_p \end{bmatrix} = 0$$

el cual expresaremos también en la forma abreviada,

$$(3 \text{ bis}) \quad (E_v) = (A) (x_v) + (h_v) = 0$$

Si empleamos asterisco para indicar los valores más probables de las  $x_v$ , se tiene,

$$(4) \quad (E_v^*) = (A) (x_v^*) + (h_v) = (\epsilon_v)$$

Como vamos a demostrar en seguida, de la condición (2) de *mínimum* se deduce, para obtener los valores más probables de las correcciones  $x_v^*$ , el siguiente sistema de ecuaciones normales,

$$(5) \quad T(A) (A) (x_v^*) + T(A) (h_v) = 0$$

En efecto, sean las ecuaciones de condición (1), de las cuales escribimos ahora la que ocupa el orden  $i$ ,

$$(6) \quad E_i = a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \dots + a_{ip} x_p + h_i = 0$$

Esta ecuación puede escribirse de la manera siguiente:

$$(7) \quad E_i = [a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{ip}] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{bmatrix} + h_i = 0$$

Los valores más probables de las incógnitas, a saber,  $x_1^*, x_2^*, \dots, x_p^*$ , al ser sustituidos por las variables en el sistema (1), dejan residuos  $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_i, \dots, \epsilon_r$ , teniéndose,

$$(8) \quad E_i^* = \epsilon_i, E_2^* = \epsilon_2, \dots, E_r^* = \epsilon_r$$

Ahora bien, la condición de *mínimum* (2) se expresa ahora, según el Cálculo Diferencial, así,

$$(9) \quad \sum_{v=1}^r \epsilon_v \frac{\partial \epsilon_v}{\partial x_1} = 0$$

Por otra parte, es,

$$(10) \quad \frac{\partial E_v^*}{\partial x_1} = \frac{\partial \epsilon_v}{\partial x_1} = a_{v1}$$



Sustituyendo este resultado en la (20), se tiene,

$$(27) \quad [x_v] T [A] + [h_v] \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{r1} \end{pmatrix} = 0$$

El producto anterior, por tratarse de vectores, es conmutativo, o sea que puede escribirse, transponiendo a la vez,

$$(28) \quad [a_{11}, a_{21}, \dots, a_{r1}] T ([x_v] T [A] + [h_v]) = 0$$

Efectuando la transposición indicada en la anterior, viene a ser,

$$(29) \quad [a_{11}, a_{21}, \dots, a_{r1}] ([A] (x_v) + (h_v)) = 0$$

donde, efectuando los productos, se tiene,

$$(30) \quad [a_{11}, a_{21}, \dots, a_{r1}] [A] (x_v) + [a_{11}, a_{21}, \dots, a_{r1}] (h_v) = 0$$

La (30) es la expresión que ya habíamos encontrado, para la ecuación normal de orden  $i$ . Supuesto escrito el sistema para  $i = 1, 2, \dots, p$ , el resultado se sintetiza en la expresión siguiente,

$$(5 \text{ bis})' \quad T [A] [A] (x_v^*) + T [A] (h_v) = 0$$

forma matricial del sistema de ecuaciones normales.

Ejemplo.— Formemos el sistema de ecuaciones normales que corresponde a las siguientes ecuaciones de condición,

$$(31) \quad \begin{aligned} a_1 x + b_1 y + h_1 &= 0, \\ a_2 x + b_2 y + h_2 &= 0, \\ a_3 x + b_3 y + h_3 &= 0. \end{aligned}$$

Se tiene, como matriz de los coeficientes y matriz transpuesta,

$$(32) \quad [A] = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{bmatrix}, \quad T [A] = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix}$$

cuyo producto en el orden requerido viene a ser,

$$(33) \quad T [A] [A] = \begin{bmatrix} a_1 a_1 + a_2 a_2 + a_3 a_3 & a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \\ b_1 a_1 + b_2 a_2 + b_3 a_3 & b_1 b_1 + b_2 b_2 + b_3 b_3 \end{bmatrix}$$

Introduciendo la notación debida a Gauss, la anterior se escribe,

$$(34) \quad T [A] [A] = \begin{bmatrix} [aa] & [ab] \\ [ba] & [bb] \end{bmatrix}$$

la cual multiplicando a derecha por el vector  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  nos da,

$$(35) \quad T [A] [A] \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} [aa] x + [ab] y \\ [ba] x + [bb] y \end{bmatrix}$$

Por otra parte, se tiene,

$$(36) \quad T [A] (h_v) = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [ah] \\ [bh] \end{pmatrix}$$

luego, finalmente,

$$(37) \quad \begin{aligned} [aa] x + [ab] y + [ah] &= 0, \\ [ba] x + [bb] y + [bh] &= 0, \end{aligned}$$

que son las dos ecuaciones normales de este caso.

Resulta interesante observar cómo la notación de Gauss, según la cual,

$$(39) \quad [ab] = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

es una manera particular de escribir el producto de la matriz línea - vector línea —

$$(40) \quad [a_1, a_2, a_3]$$

por la matriz columna - vector columna -,

$$(41) \quad \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

### Segundo caso

Un caso de particular importancia es aquél en que las correcciones  $v_i$  están ligadas entre sí por  $s$  ecuaciones lineales, siendo *inferior* el número de ecuaciones al de incógnitas, debiendo, por otra parte, satisfacer las correcciones la condición de que la suma de sus cuadros sea un *minimum*. (Cambiamos la designación para corresponder a la costumbre).

Sea el siguiente sistema de ecuaciones lineales de condición,

$$(42) \quad \begin{aligned} a_{11} v_1 + a_{12} v_2 + \dots + a_{1m} v_m + p_1 &= 0, \\ a_{21} v_1 + a_{22} v_2 + \dots + a_{2m} v_m + p_2 &= 0, \\ \dots & \dots \dots \dots \\ a_{s1} v_1 + a_{s2} v_2 + \dots + a_{sm} v_m + p_m &= 0 \end{aligned}$$

$s < m$ ;  $s$  ecuaciones,  $m$  incógnitas.

Diferenciando las (42), se tiene,

$$(43) \quad \begin{aligned} a_{11} dv_1 + a_{12} dv_2 + \dots + a_{1m} dv_m &= 0, \\ a_{21} dv_1 + a_{22} dv_2 + \dots + a_{2m} dv_m &= 0, \\ \dots & \dots \dots \dots \\ a_{s1} dv_1 + a_{s2} dv_2 + \dots + a_{sm} dv_m &= 0 \end{aligned}$$

Las ecuaciones (43) pueden ser resueltas para  $s$  incrementos, que pueden ser los primeros escritos, a saber,

$$(44) \quad dv_1, dv_2, \dots, dv_s$$

Como de la condición,

$$(45) \quad \Sigma v_i^2 = \text{minimum}$$

se deduce,

$$(46) \quad v_1 dv_1 + v_2 dv_2 + \dots + v_m dv_m = 0$$

podemos traer los  $dv_1, dv_2, \dots, dv_s$ , despejados en (43), a la (46), la cual contendrá solamente  $m - s$  incrementos diferenciales  $dv_{s+1}, dv_{s+2}, \dots, dv_m$ . Como éstos son independientes, sus coeficientes deberán igualarse a cero, lo cual nos da,

$$m - s$$

relaciones entre las  $v_i$ . Puesto que, por otra parte, se cuenta con las  $s$  ecuaciones (42), el número total de ecuaciones de que se dispone para determinar las

$m$  correcciones vendrá a ser,  $m - s + s = m$ , lo cual deja el problema teóricamente resuelto.

En la práctica se prefiere seguir un procedimiento llamado de *ecuaciones correlativas*, que pasamos a exponer aprovechando los recursos del Álgebra Matricial.

Los coeficientes de las ecuaciones (42) nos dan la matriz rectangular,

$$(47) \quad [A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{s1} & a_{s2} & \dots & a_{sm} \end{bmatrix}$$

Por otra parte, los vectores

$$(48) \quad (v_v) = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_m \end{bmatrix}, \quad (p_u) = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_s \end{bmatrix}$$

permiten escribir las (42) como sigue,

$$(49) \quad [A] (v_v) + (p_u) = 0$$

$s$  ecuaciones,  $m$  incógnitas;  $s < m$ . La condición (45) se puede escribir como sigue,

$$(45') \quad [v_1, v_2, \dots, v_m] \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_m \end{bmatrix} = \text{mínimum},$$

de la cual se deduce,

$$(50) \quad [v_1, v_2, \dots, v_m] \begin{bmatrix} dv_1 \\ dv_2 \\ \vdots \\ dv_m \end{bmatrix} = 0$$

que, escrita en forma sintética, es,

$$(51) \quad [v_v] (dv_v) = 0$$

En las (49) introducimos ahora la sustitución lineal siguiente,

$$(52) \quad (v_v) = T [A] (\lambda_\mu)$$

que hace que para determinar los parámetros  $\lambda$  debemos resolver el sistema normal,

$$(53) \quad [A] T [A] (\lambda_\mu) + (p_v) = 0$$

A las ecuaciones contenidas en (53) se las llama *ecuaciones correlativas*. Una vez obtenidas las  $\lambda$  se pueden calcular las  $v$  por medio de las (52). Después demostraremos cómo los valores que así se obtienen para las  $v$ , satisfacen a la condición de *mínimum* expresada por la (51).

Un ejemplo sencillo dará más claridad a lo anterior. Supongamos un sistema formado por dos ecuaciones de condición, a saber,

$$(54) \quad \begin{aligned} a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 + p_1 &= 0, \\ b_1 v_1 + b_2 v_2 + b_3 v_3 + p_2 &= 0 \end{aligned}$$

Se tiene,

$$(55) \quad [A] = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix}, \quad T [A] = \begin{bmatrix} a_1 b_1 \\ a_2 b_2 \\ a_3 b_3 \end{bmatrix}$$

Las (52) aplicadas a este caso, dan,

$$(56) \quad (v_v) = \begin{bmatrix} a_1 b_1 \\ a_2 b_2 \\ a_3 b_3 \end{bmatrix} (\lambda_\mu) = \begin{bmatrix} a_2 b_2 \\ a_1 b_1 \\ a_3 b_3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}$$

de donde, efectuando productos, se deduce,

$$(57) \quad \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 b_1 \\ a_2 b_2 \\ a_3 b_3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \lambda_1 + b_1 \lambda_2 \\ a_2 \lambda_1 + b_2 \lambda_2 \\ a_3 \lambda_1 + b_3 \lambda_2 \end{bmatrix}$$

La transformación correlativa viene a ser, en consecuencia,

$$(58) \quad \begin{aligned} v_1 &= a_1 \lambda_1 + b_1 \lambda_2, \\ v_2 &= a_2 \lambda_1 + b_2 \lambda_2, \\ v_3 &= a_3 \lambda_1 + b_3 \lambda_2. \end{aligned}$$

Ahora se efectúa el producto:

$$\begin{aligned} [A] T [A] &= \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 b_1 \\ a_2 b_2 \\ a_3 b_3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_1 a_1 + a_2 a_2 + a_3 a_3 & a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \\ b_1 a_1 + b_2 a_2 + b_3 a_3 & b_1 b_1 + b_2 b_2 + b_3 b_3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} [a a] & [a b] \\ [b a] & [b b] \end{bmatrix} \end{aligned}$$

teniéndose en seguida,

$$(59) \quad [A] T [A] (\lambda_\mu) = [A] T [A] \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [a a] \lambda_1 + [a b] \lambda_2 \\ [b a] \lambda_1 + [b b] \lambda_2 \end{bmatrix}$$

de manera que las *ecuaciones normales correlativas* son las siguientes,

$$(60) \quad \begin{aligned} [a a] \lambda_1 + [a b] \lambda_2 + p_1 &= 0, \\ [b a] \lambda_1 + [b b] \lambda_2 + p_2 &= 0, \end{aligned}$$

las cuales se resuelven (generalmente por el método de eliminación) para  $\lambda_1, \lambda_2$ , obteniéndose luego  $v_1, v_2, v_3$ , por medio de las (58).

*Suma de cuadrados de las correcciones.*

*Comprobación.*

Es costumbre comprobar los resultados numéricos por medio de la relación siguiente,

$$(61) \quad [v_v] = - [p_v] (\lambda_v)$$

la cual pasamos a demostrar.

De la (49), por transposición, se deduce,

$$(62) \quad [v_v] T [A] = - [p_v]$$

donde, multiplicando a derecha por  $T^{-1} [A]$ , se tiene,

$$(63) \quad [v_v] = - [p_v] T^{-1} [A]$$

Multiplicando (63) por (52), se tiene,

$$\begin{aligned} [v_v] (v_v) &= [vv] = - [p_v] T^{-1} [A] T [A] (\lambda_v) \\ (64) \quad &= - [p_v] (\lambda_v) \end{aligned}$$

como se quería demostrar. Así por ejemplo, en el ejercicio tratado anteriormente, se tiene,

$$(65) \quad v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 = - (p_1 \lambda_1 + p_2 \lambda_2 + p_3 \lambda_3)$$

Ahora nos encontramos en condiciones de demostrar por qué las  $v_i$ , calculadas por medio de las (52) y (53), satisfacen a la condición de *mínimum* (51).

Al efecto, trasponiendo (52), se tiene,

$$(66) \quad [v_v] = [\lambda_v] [A],$$

Diferenciando la misma (5), viene a ser,

$$(67) \quad (dv_v) = T [A] (d\lambda_v)$$

Multiplicando ahora las dos últimas, se tiene,

$$(68) \quad [v_v] (dv_v) = [\lambda_v] [A] T [A] (d\lambda_v)$$

Por otra parte, diferenciando la (53), se obtiene,

$$(69) \quad [A] T [A] (d\lambda_v) = 0$$

Teniendo en cuenta este resultado en la (68) se obtiene finalmente,

$$(70) \quad [v_v] (dv_v) = [\lambda_v] \cdot 0 = 0$$

lo cual demuestra el aserto.

### ORIGEN DE LAS ECUACIONES CORRELATIVAS

Se llega a las *ecuaciones correlativas* cuando se trata de determinar, en Análisis, los valores *máxima* o *mínima* de una función de varias variables. Limitándonos, para mayor sencillez en la exposición, al caso de una función de cuatro variables, a saber,

$$(71) \quad F(x_1, x_2, x_3, x_4) \equiv F$$

cuyos valores *mínima* deben determinarse, teniendo en cuenta que entre las variables existan, por ejemplo, dos ecuaciones de condición, a saber

$$(72) \quad \begin{aligned} \varphi(x_1, x_2, x_3, x_4) &= 0, \\ \varphi_1(x_1, x_2, x_3, x_4) &= 0, \end{aligned}$$

tal determinación se lleva a cabo como sigue.

Si las variables fuesen independientes, la condición de *mínimum* sería,

$$(73) \quad \frac{\partial F}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial F}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial F}{\partial x_3} dx_3 + \frac{\partial F}{\partial x_4} dx_4 = 0$$

que puede escribirse así,

$$(73 \text{ bis}) \quad \left[ \frac{\partial F}{\partial x_1} \right] (dx_1) = 0$$

Mas, como los incrementos  $dx_1, dx_2, \dots$  no son independientes, la diferenciación de las ecuaciones

(72) nos da,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} dx_3 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_4} dx_4 &= 0, \\ (74) \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_3} dx_3 + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_4} dx_4 &= 0, \end{aligned}$$

las cuales podemos también escribir como productos escalares, a saber,

$$(74 \text{ bis}) \quad \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \right] (dx_1) = 0, \quad \left[ \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} \right] (dx_1) = 0$$

Entre las tres ecuaciones (73) y (74) se puede eliminar dos incrementos, por ejemplo  $dx_3, dx_4$ , quedando como *eliminante* una relación que contiene los dos incrementos restantes  $dx_1, dx_2$ . Igualando a cero los coeficientes de  $dx_1, dx_2$  se obtendrán dos relaciones que, unidas a las dos (72), permitirán obtener las cuatro incógnitas  $x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*$ , que responden a la cuestión.

Para llevar a cabo la eliminación se emplea con éxito el método de *coeficientes indeterminados* o *multiplicadores de Lagrange*. Al efecto, multiplíquense las ecuaciones (74) por  $-\lambda_1, -\lambda_2$ , respectivamente, y súmense a (73). Se tiene,

$$(75) \quad \begin{aligned} \left[ \frac{\partial F}{\partial x_1} - \lambda_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} - \lambda_2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} \right] dx_1 + \\ \left[ \frac{\partial F}{\partial x_2} - \lambda_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} - \lambda_2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} \right] dx_2 + \dots = 0 \end{aligned}$$

o sea, de manera abreviada, la siguiente,

$$(75 \text{ bis}) \quad \left[ \frac{\partial F}{\partial x_1} - \lambda_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} - \lambda_2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} \right] (dx_1) = 0$$

Los números  $-\lambda_1, -\lambda_2$ , han de ser tales que los paréntesis se anulen, con lo cual la ecuación (75) queda automáticamente satisfecha. Se obtienen entonces las relaciones,

$$(76) \quad \begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x_1} - \lambda_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} - \lambda_2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} &= 0, \\ \frac{\partial F}{\partial x_2} - \lambda_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} - \lambda_2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} &= 0, \end{aligned}$$

que escribimos sintéticamente así,

$$(76) \quad \left[ \frac{\partial F}{\partial x_1} - \lambda_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} - \lambda_2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} \right] = 0$$

constituyendo las llamadas *ecuaciones correlativas*.

Apliquemos las consideraciones anteriores al caso de *mínimos cuadrados*. En este problema debe determinarse el *mínimum* de la función,

$$(77) \quad F \equiv x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$$

debiendo cumplirse además las ecuaciones de condición:

$$\frac{1}{2} \varphi = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_4 + p_1 = 0,$$

$$(78) \quad \frac{1}{2} \varphi_1 = b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 + b_4 x_4 + p_2 = 0.$$

Efectuando derivaciones parciales, se tiene,

$$(79) \quad \frac{\partial F}{\partial x_1} = 2x_1, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = 2a_1, \dots$$

valores que, al ser sustituidos en las (76) nos dan,

$$(80) \quad \begin{array}{l} x_1 - \lambda_1 a_1 - \lambda_2 b_1 = 0, \quad \therefore \quad x_1 = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 b_1 \\ x_2 - \lambda_1 a_2 - \lambda_2 b_2 = 0, \quad \therefore \quad x_2 = \lambda_1 a_2 + \lambda_2 b_2 \\ x_3 - \lambda_1 a_3 - \lambda_2 b_3 = 0, \quad \therefore \quad x_3 = \lambda_1 a_3 + \lambda_2 b_3 \\ x_4 - \lambda_1 a_4 - \lambda_2 b_4 = 0, \quad \therefore \quad x_4 = \lambda_1 a_4 + \lambda_2 b_4 \end{array}$$

Resultados que podemos sintetizar así,

$$(81) \quad \frac{\partial F}{\partial x_1} = 2x_1; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = 2a_1; \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} = 2b_1$$

y, en consecuencia,

$$(80 \text{ bis}) \quad [x_1 - \lambda_1 a_1 - \lambda_2 b_1] = 0$$

que es la abreviatura matricial de la transformación correlativa.

---

*Nota del autor.*— El presente estudio fue leído personalmente por su autor ante los profesores de la Facultad de Ciencias de la Universidad Nacional de Colombia, bajo el decanato del doctor Leopoldo Guerra Portocarrero, en el mes de Abril de 1955.