EL POTENCIAL GRAVITACIONAL DE LA TIERRA

JORGE ARIAS DE GREIFF

Observatorio Astronómico Nacional

Las siguientes notas son la ampliación de uno de los temas mencionados en un conferencia que con el título de "Los Satélites artificiales y la forma de la Tierra", tuve oportunidad de realizar en una de las sesiones de la Academia Colombiana de Ciencias, en el año de 1963. Otros aspectos de dicha charla, como por ejemplo el referente a las perturbaciones de un satélite causadas por no ser el potencial gravitacional terrestre el de una esfera homogénea o formada por capas esféricas homogéneas, y el de las implicaciones geofísicas, podrán ser objeto de otras notas separadas.

Desde el instante en que se contempló la posibilidad de colocar satélites artificiales de la tierra se consideró como uno de sus primordiales fines el de lograr un conocimiento más completo y preciso del potencial gravitacional de nuestro planeta.

Si el globo terráqueo fuera una esfera perfectamente homogénea, o formada por capas esféricas homogéneas, la órbita de un satélite artificial, omitiendo además el efecto perturbador de otros cuerpos celestes, luna, sol, etc., estaría regida por las leyes de Kepler: la órbita sería plana, el radio vector describiría áreas proporcionales a los tiempos, uno de los focos de la elipse coincidiría con el centro de la tierra, la relación del cubo del semi-eje mayor al cuadrado del período sería constante. Siendo la tierra de forma no rigurosamente esférica, la fuerza de atracción ejercida sobre el satélite no va necesariamente dirigida hacia el centro del planeta y su intensidad no es exactamente proporcional al inverso del cuadrado de la distancia. En estas condiciones el movimiento del satélite se puede considerar como realizado sobre una órbita elíptica cuyos elementos, excentricidad, semi-eje mayor, inclinación sobre el plano ecuatorial, longitud del nodo y argumento de su perigeo, estén permanentemente variando en una forma apreciable.

Precisamente, el estudio de las perturbaciones en las órbitas de los satélites permite conocer en mayor detalle el potencial gravitacional de la tierra y de tal potencial obtener a su vez un conocimiento más logrado de la forma de la tierra y de la distribución de su masa.

En las presentes notas se hará referencia al desarrollo del potencial terrestre por medio de Harmónicos Esféricos y a una relación de los valores obtenidos de los coeficientes de tales harmónicos a través del estudio de las órbitas de los satélites por diversos autores.

El Potencial gravitacional de la tierra en un punto exterior a ella satisface la ecuación diferencial

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

conocida como ecuación de Laplace. Esta famosísima ecuación apareció por primera vez en una de las memorias de Laplace, presentada en 1787 y publicada dos años más tarde.

Si esta ecuación se trasforma a coordenadas esféricas, mediante las relaciones

$$x = r\, sen\theta\, cos\phi$$
$$y = r\, sen\theta\, sen\phi$$
$$z = r\, cos\theta$$

puede escribirse de la siguiente manera:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\, sen\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(sen\theta \frac{\partial V}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\, sen^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial\phi^2} = 0$$

Se suele buscar una solución de esta ecuación que sea el producto de dos funciones, una de ellas una función de r y la otra una función de θ y ϕ:

$$V = R\,(r)\; Y\,(\theta,\phi)$$

Sustituyendo en la ecuación de Laplace en coordenadas esféricas, se obtiene:

$$\frac{2}{r}\frac{\partial V}{\partial r} + \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{cos\theta}{r\, sen\theta}\frac{\partial V}{\partial\theta} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial\theta^2} + \frac{1}{r^2\, sen^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial\phi^2} = 0$$

$$\frac{2}{r}\frac{dR}{dr}\,Y + \frac{d^2R}{dr^2}\,Y + \frac{cos\theta}{r\, sen\theta}\,R\,\frac{\partial Y}{\partial\theta} + \frac{R}{r^2}\frac{\partial^2 Y}{\partial\theta^2} + \frac{R}{r^2\, sen^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\phi^2} = 0$$

y multiplicando esta expresión por r^2/RY, se obtiene, luego de ordenar los términos:

$$r^2\frac{d^2R}{dr^2} + 2r\frac{dR}{dr}\;R = -\left(\frac{1}{Y}\frac{\partial^2 Y}{\partial\theta^2} + \frac{cos\theta}{Y\, sen\theta}\frac{\partial Y}{\partial\theta} + \frac{1}{Y\, sen^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\phi^2}\right)$$

Designando por $n(n+1)$ al valor común de los dos miembros de la anterior ecuación, que además debe ser constante, ya que a la izquierda se tiene una función de r únicamente y a la derecha una de θ y ϕ, se puede escribir:

$$r^2 \frac{d^2R}{dr^2} + 2r \frac{dR}{dr} - n(n+1)R = 0$$

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial\theta^2} + \frac{cos\theta}{sen\theta}\frac{\partial Y}{\partial\theta} + \frac{1}{sen^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\phi^2} + n(n+1)Y = 0$$

La primera de la ecuaciones tiene por soluciones: Ar^n y $Br^{-(n+1)}$. En el presente caso interesa la segunda de estas soluciones. La segunda ecuación diferencial representa la forma en que aparece por primera vez en las memorias de Laplace de 1782, publicadas en 1785. Es interesante notar cómo es en esta forma más compleja, en coordenadas polares y no en la forma simple que toma en coordanadas rectangulares, como aparece por vez primera. No debe olvidarse que la ecuación de Laplace y las de Legendre fueron logradas por estos dos extraordinarios genios precisamente cuando estudiaban la forma de la tierra y su potencial.

En cuanto esta segunda ecuación diferencial, puede ser objeto de una nueva separación de variables:

$$Y(\theta,\phi) = \Theta(\theta)\,\Phi(\phi)$$

Sustituyendo se encuentra:

$$\frac{\partial^2\Theta}{\partial\theta^2}\Phi + \frac{cos\theta}{sen\theta}\frac{\partial\Theta}{\partial\theta}\Phi + \frac{1}{sen^2\theta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\phi^2} + n(n+1)\Theta\Phi = 0$$

y, finalmente, multiplicando por $sen^2\theta/\Theta\Phi$, se puede escribir:

$$sen^2\theta\frac{\partial^2\Theta}{\partial\theta^2}\frac{1}{\Theta} + sen\theta\, cos\theta \frac{\partial\Theta}{\partial\theta}\frac{1}{\Theta} + n(n+1)\; sen^2\theta = -\frac{\partial^2\Phi}{\partial\phi^2}\frac{1}{\Phi}$$

Denominando m^2 el valor constante común a ambos miembros de la ecuación, resultan las siguientes dos ecuaciones: la primera,

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial\phi^2} + m^2\Phi = 0$$

Cuya solución es $\Phi = C\; cos\; m\phi + D\; sen\; m\phi$, y, la segunda,

$$sen^2\theta\frac{\partial^2\Theta}{\partial\theta^2}\frac{1}{\Theta} + sen\theta\, cos\theta\frac{\partial\Theta}{\partial\theta}\frac{1}{\Theta} + n(n+1)\, sen^2\theta = m^2$$

$$sen^2\theta\frac{\partial^2\Theta}{\partial\theta^2} + sen\theta\, cos\theta\frac{\partial\Theta}{\partial\theta} + [n(n+1)\, sen^2\theta - m^2]\,\Theta = 0$$

denominada ecuación asociada de Legendre, cuya forma algebraica se obtiene haciendo:

$$cos\theta = x, \qquad \frac{d\Theta}{d\theta} = -sen\theta\frac{d\Theta}{dx}$$

$$\frac{d^2\Theta}{d\theta^2} = -cos\theta\frac{d\Theta}{dx} - sen\theta\frac{d^2\Theta}{dx^2}\frac{dx}{d\theta} = -cos\theta\frac{d\Theta}{dx} + sen^2\theta\frac{d^2\Theta}{dx^2}$$

lo que permite, luego de hacer las sustituciones, escribir:

$$sen^2\theta\left(-cos\theta\frac{d\Theta}{dx} + sen^2\theta\frac{d^2\Theta}{dx^2}\right) + sen\theta\, cos\theta\left(-sen\theta\frac{d\Theta}{dx}\right) + \left[n(n+1)\, sen^2\theta - m^2\right]\Theta = 0$$

$$(1-x^2)\frac{d^2\Theta}{dx^2} - 2x\frac{d\Theta}{dx} + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right]\Theta = 0$$

Si en la ecuación asociada de Legendre se hace $m = 0$, se obtiene la ecuación de Legendre

$$(1-x^2)\frac{d^2\Theta}{dx^2} - 2x\frac{d\Theta}{dx} + n(n+1)\Theta = 0$$

Los polinomios de Legendre $P_n(x)$ son solución de esta ecuación.

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{N}\frac{(-1)^k(2n-2k)!}{2^n k!\,(n-k)!\,(n-2k)!}$$

en donde $N = n/2$ para n par, y
$N = (n-1)/2$ para n impar.

Otra definición de los polinomios de Legendre es la conocida con el nombre de fórmula de Rodrigues:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$$

Los primeros cinco polinomios de Legendre se indican a continuación:

$$P_0(x) = 1$$
$$P_1(x) = x$$
$$P_2(x) = \frac{3}{2} x^2 - \frac{1}{2}$$
$$P_3(x) = \frac{5}{2} x^3 - \frac{3}{2} x$$
$$P_4(x) = \frac{35}{8} x^4 - \frac{15}{4} x^2 + \frac{3}{8}$$

Por su parte la ecuación asociada de Legendre se satisface por los polinomios asociados de Legendre.

$$P_n^m(x) = (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m P_n(x)}{dx^m}$$

m, es un entero menor que n y el valor absoluto de x es menor que 1.

Los primeros polinomios asociados de Legendre son:

$$P_1^1 = (1-x^2)^{1/2}$$
$$P_2^1 = 3x\,(1-x^2)^{1/2}$$
$$P_2^2 = 3\,(1-x^2)$$
$$P_3^1 = \frac{3}{2} (5x^2-1)\,(1-x^2)^{1/2}$$

Volviendo a la forma trigonométrica, y recordando que para $m = 0$ los polinomios asociados se reducen a los polinomios de Legendre, se pueden indicar en un solo cuadro todos ellos:

n	m	P_n^m	
0	0	1	
1	0	$\cos\theta$	Zonal
1	1	$\operatorname{sen}\theta$	Sectorial
2	0	$\frac{3}{2}\left(\cos^2\theta - \frac{1}{3}\right)$	Zonal
2	1	$3 \operatorname{sen}\theta \cos\theta$	Teselar
2	2	$3 \operatorname{sen}^2\theta$	Sectorial
3	0	$\frac{5}{2}(\cos^3\theta - \frac{3}{5}\cos\theta)$	Zonal
3	1	$\frac{15}{2} \operatorname{sen}\theta \left(\cos^2\theta - \frac{1}{5}\right)$	Teselar
3	2	$15 \operatorname{sen}^2\theta \cos\theta$	Teselar
3	3	$15 \operatorname{sen}^3\theta$	Sectorial
4	0	$\frac{35}{8}\left(\cos^4\theta - \frac{6}{7}\cos^2\theta + \frac{3}{35}\right)$	Zonal

En las referencias anotadas al final puede encontrarse una completa discusión de las ecuaciones de Legendre y de los polinomios aquí citados, así como sus propiedades y el detalle de las demostraciones concernientes. (Bronwell, 1953; Byerly, 1959; Dettman, 1962; Ramírez, Takeuchi, Ruiz, ( ). Para lo que aquí interesa bastará recordar que se asumió para el potencial una solución

$$V = R(r)\ Y(\theta, \phi)$$
$$V = R(r)\ \Theta(\theta)\ \Phi(\phi)$$

$Y_{n,m}$ suele denominarse como harmónico superficial
$V_{n,m}$ recibe el nombre de harmónico sólido.

Si $m = 0$, se denominan harmónicos zonales, si $m = n$, se llaman sectoriales, en general se denominan teselares. En la figura adjunta se representan, como ilustración algunos de estos harmónicos.

Retornando al potencial y de acuerdo con las soluciones obtenidas atrás para las 3 ecuaciones diferenciales, se podrá escribir:

$$V_{n,m} = \frac{B_n}{r^{n+1}} (C_{n,m} \cos m\phi + D_{n,m} \operatorname{sen} m\phi)\ P_n^m(\cos\theta)$$

en donde n y m son enteros positivos con $n \geqslant m$

La expresión general para el potencial sera la siguiente:

$$V = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{r^{n+1}} \sum_{m=0}^{n} (C_{n,m} \cos m\phi + D_{n,m} \operatorname{sen} m\phi)\ P_n^m(\cos\theta)$$

separando los términos en los cuales m vale cero, e incorporando en $Cn, 0$ el coeficiente Bn, la expresión queda:

$$V = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^{n+1}} \left[C_{no} \, P_n \, (cos\theta) + \sum_{m=1}^{n} \, (C_{n,m} \, cos \, m\phi + D_{n,m} \, sen \, m\phi) \, P_n^m \, (cos\theta) \right]$$

Si se considera únicamente el término $n = 0$, y recordando que $P_0 \, (cos\theta) = 1$, se deberá tener para el potencial el valor correspondiente al de una masa con simetría esférica, por lo tanto,

$$\frac{C_{o,o}}{r} = \frac{GM}{r}$$

Además, si el origen del sistema de coordenadas coincide con el centro de masa de la tierra, el coeficiente del término $n = 1$ es cero; lo anterior permite escribir:

$$V = \frac{GM}{r} + \sum_{n=2}^{m} \frac{1}{r^{n+1}} \left[[C_{n,o} \, P_n \, (cos\theta) + \sum_{m=1}^{n} \, (C_{n,m} \, cos \, m\phi + D_{n,m} \, sen \, m\phi) \, P_n^m \, (cos\theta) \right]$$

Es, sin embargo, lo usual expresar el anterior desarrollo no en función de la colatitud aquí llamada θ, sino de la latitud geocéntrica ϕ' y denominar la longitud por λ. Además, utilizando una nomenclatura que se emplea con más frecuencia para los coeficientes de los polinomios, se puede modificar la escritura de la expresión del potencial:

$$V = \frac{GM}{r} \left[1 - \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{r}{R} \right)^n \left[J_n P_n \, (sen\phi') + \sum_{m=1}^{n} \, (J_{n,m} \, cos \, m\lambda + K_{n,m} \, sen \, m\lambda) \, P_n^m \, (sen\phi') \right] \right]$$

Las constantes G, M y R valen, respectivamente

$G = 6.668 \times 10^{-8}$ (c, g, s)	(Constante gravitacional).
$M = 5.977 \times 10^{29}$ gr.	(Masa de la tierra).
$R = 6378, 388$ Km.	(Radio ecuatorial de la tierra)

Antes de la época de los satélites artificiales se conocían los coeficientes de los harmónicos zonales segundo y cuarto pero con una exactitud mucho menor que en la actualidad. Los valores más aceptados eran los de Jeffreys y Jongolovitch. Al aceptar la hipótesis del equilibrio hidrostático se asumían nulos los harmónicos zonales impares.

Los primeros análisis de las órbitas de los satélites no sólo lograron una mayor exactitud para dichos coeficientes, sino que mostraron la existencia de una asimetría de la tierra con respecto al ecuador en la forma de coeficientes no nulos para los harmónicos zonales 3º, 5°, etc. El tercer harmónico zonal es el que ha dado lugar a la llamada "forma de pera" del globo terráqueo, claro está, admitiendo para la forma de la tierra la de una superficie equipotencial: las latitudes más al norte de 35° estarían elevadas, entre el ecuador y esta latitud habría una depresión, al sur del ecuador y hasta el paralelo 35 sur se encontraría una protuberancia y finalmente las latitudes australes estarían hundidas (ver la figura donde se ilustra el tercer harmónico zonal).

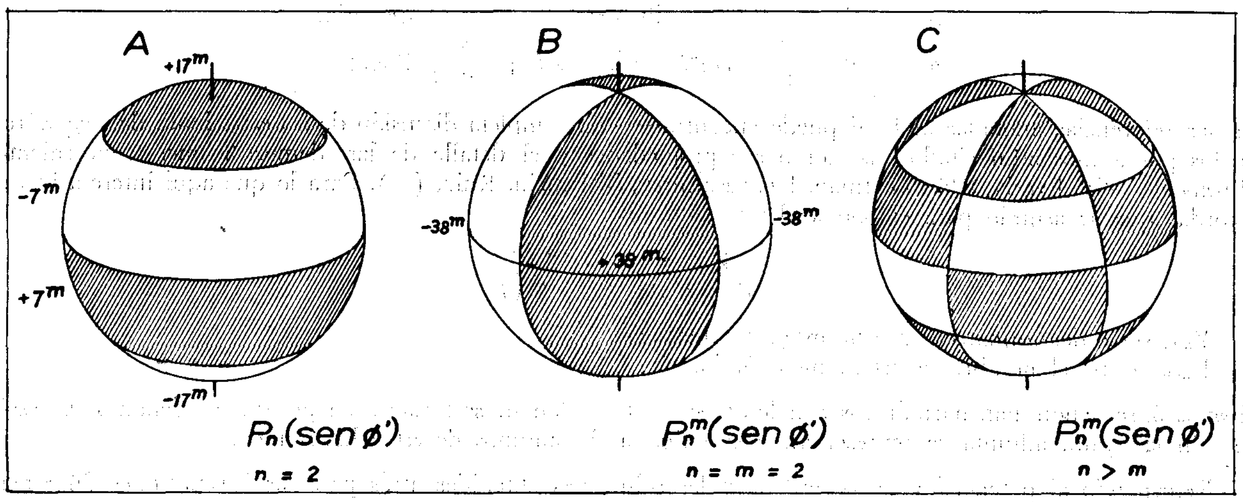

FIGURA Nº 1

A — *Harmónico Zonal:* La figura representa las zonas de signos contrarios correspondientes al tercer harmónico zonal. En general, hay n cambios de signo a lo largo de un meridiano, o, lo que es lo mismo, en n paralelos la función es igual a cero. Para el valor $J_3 = -2.566$ del potencial terrestre, las discrepancias correspondientes en los polos son $\pm$ 17 metros y en las zonas restantes alcanzan valores máximos de 7^m.

B — *Harmónico Sectoral:* Se ha dibujado el término $n = m = 2$. El harmónico sectoral cambia $2n$ veces de signo a lo largo de un paralelo; es cero, por lo tanto, en $2n$ meridianos. Para el valor $J_{22} = -1,97$ las máximas discrepancias con una esfera son de $\pm$ 38 metros.

C — *Harmónico Teselar:* Se ilustra aquí el término $n = 6$, $m = 3$; se nota como hay $2m$ cambios de signo a lo largo de un paralelo y $n - m$ cambios de signo a lo largo de un meridiano. La función es cero en $2m$ meridiano y $n - m$ paralelos.

Estudios más recientes han mostrado la existencia de harmónicos sectoriales y teselares, especialmente el harmónico sectorial dependiente de $m = n = 2$ que da lugar a considerar la elipticidad del ecuador; ver también figura respectiva. Esta elipticidad del ecuador ya había sido contemplada en algunos trabajos clásicos de geodesia.

El cuadro siguiente incluye los valores de los coeficientes de los harmónicos zonales del potencial terrestre obtenidos por diversos autores.

	O'Keefe (1959)	Kozai (1959)	King-Hele (1961)	D. E. Smith (1963)	Kozai (1963)
J_2		1082,19 ± 0.024	1082,79 ± 0.15		1082,48 ± 0.4
J_3	2,4 ± 0.3	—2,285 ± 0.018		—2,44 ± 0.07	—2,566 ± 0.012
J_4		—2,124 ± 0.041	—1,4 ± 0,2		—1.84 ± 0,09
J_5	—0,05 ± 0,07	—0,232 ± 0,04		—0.18 ± 0,03	—0.003 ± 0.019
J_6			— 09 ± 0,7		—0.39 ± 0.09
J_7				—0.30 ± 0,03	—0,469 ± 0,04
J_8					—0,02 ± 0,07
J_9					—0.114 ± 0.025

En cuanto a los harmónicos sectoriales y teselares, cuyo estudio apenas comienza, y donde existe aún bastante discrepancia entre los datos de diversa procedencia, sólo se incluyen los correspondientes al término $J_{2,2}$, indicando además la orientación del eje mayor del ecuador.

J_{22}	λ 22	
5,33 ± 0.48	33° W	Issak (1961)
1.68	38°,5 W	Kaula (1961)
4.0 ± 0,8	11° ± 6° W	Newton (1962)
2,3 ± 0,5	37° ± 9° W	Kozai (1963)
3.89	22° W	Kaula (1963)
3.43	21°,5 W	Kaula (1963)
2.20	10° W	Newton (1963)
1.97	19°,5 W	Kozai (1963)

BIBLIOGRAFIA Y REFERENCIAS

Bronwell, Arthur
Advanced Mathematics in Physics and Engineering. Mc. Graw' Hill, 1953.

Byerly, William E.
An Elementary Treatise on Fourier Series and Spherical, Cylindrical, and Ellipsoidal Harmonics. 1893, Reimpresion de Dover, 1959.

Dettman, John W.
Mathematical Methods in Physics and Engineering. Mc. Graw Hill, 1962.

Heiskanen, W. A. y Vening-Meinesz, P. A.
The Earth and its Gravity Field. Mc. Gram-Hill, 1958.

Jeffreys, Sir Harold
The Earth, its origin, history and physical constitution. Cuarta edición adicionada, Cambridge University Press, 1962.

Kozai, Yoshihide
Tesseral harmonics of the potential of the earth as derived from satellite motions. Smithsonian Institution, Special Report Nº 72, 1961.

Kozai, Yoshihide
The potential of the earth derived from satellite motion. Dynamics of satellites, editado por M. Roy, Springer Verlag, Berlin, 1963.

Ramírez, Arturo; Takeuchi, Yu y Ruiz, Carlos
Ecuaciones diferenciales. Bogotá, Universidad Nacional de Colombia, (sin fecha).

Smith, D. E.
A Determination of the odd Harmonics in the geopotencial Function. Planetary and Space Science, 11, Nº 7, 1963.

Todhunter, I.
A History of the Mathematical theories of Attraction and the figure of the Earth. Macmillan 1873, Reimpresion Dover, 1962.

Webster, Arthur G.
Partial Differential Equations of Mathematical Physics. 1927, Reimpresion de Dover, 1955.