INTEGRACION DE LA FORMA $f(x)\, e^{ax}$.

LUIS DE GREIFF BRAVO
Profesor de la Universidad Nacional

Las presentes notas contribuyen a complementar el artículo denominado: *"Sobre algunos resultados de la Integración por partes"*, publicado en el número 44 de esta Revista.

Es fácil hallar la integral indefinida, —primitiva—:

$$(1) \qquad \int f(x)\, e^{ax}\, dx$$

en la cual $f(x)$ es un polinomio entero, si se tiene en cuenta que el resultado es de la forma,

$$(2) \qquad f_1(x)\, e^{ax} + c$$

en la que $f_1(x)$ es un polinomio cuyo grado es igual al de $f(x)$.

En efecto, de la igualdad,

$$(3) \qquad \int f(x)\, e^{ax}\, dx = f_1(x)\, e^{ax} + c,$$

se obtiene, por diferenciación,

$$(4) \qquad f(x)\, e^{ax} = [a\, f_1(x) + f'_1(x)]\, e^{ax},$$

de la cual, al dividir por e^{ax}, resulta:

$$(5) \qquad f(x) = a\, f_1(x) + f'_1(x).$$

Con el fin de determinar $f_1(x)$, basta acudir al principio de identidad, o sea, igualar coeficientes de términos homólogos en los los miembros de la igualdad.

Demos claridad al procedimiento mediante algunos ejemplos.

I) Sea el caso siguiente,

$$I_1 = \int (3 - 4x + 5x^2)\, e^{3x}\, dx,$$

en el cual se tiene $a = 3$. Al designar el polinomio incógnito por medio de,

$$(6) \qquad f_1(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2,$$

se tiene, según la relación (5):

$$3 - 4x + 5x^2 = 3(b_0 + b_1 x + b_2 x^2) + (b_1 + 2b_2 x).$$

Igualando coeficientes, se obtiene,

$$3b_0 + b_1 = 3; \quad 3b_1 + 2b_2 = -4; \quad 3b_2 = 5,$$

de donde,

$$b_2 = 5/3; \quad b_1 = -22/9; \quad b_0 = 49/27.$$

Con esto puede escribirse el resultado:

$$I_1 = (1/27)\,(49 - 66x + 45x^2)\, e^{3x}.$$

II) Como segundo ejemplo, sea,

$$I_2 = \int (2 - 5x^2)\, e^{-2x/3}\, dx, \quad (a = -2/3).$$

Designando el polinomio incógnito lo mismo que en (6), puede escribirse,

$$-(2/3)\,(b^0 + b_1 x + b_2 x^2) + b_1 + 2b_2 x = 2 - 5x^2.$$

De esta identidad se deduce,

$$b_2 = 15/2; \quad b_1 = 45/2; \quad b_0 = -123/4.$$

De manera que el resultado final, es,

$$I_2 = (1/4)\,(-123 + 90x + 30x^2)\, e^{-2x/3}.$$

Procedemos ahora a obtener una fórmula para el caso siguiente:

$$(7) \qquad I_p = \int x^p\, e^{ax}\, dx$$

en la cual p es un entero positivo.

El polinomio incógnito, a saber:

$$(8) \qquad f_1(x) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_p x^p,$$

se determina por medio de las igualdades siguientes,

$$ab_0 + b_1 = 0, \quad ab_1 + 2b_2 = 0, \quad ab_2 + 3b_3 = 0,$$
$$\ldots\ ab_{p-1} + pb_p = 0, \quad ab_p = 1.$$

Resuelto el sistema constituído por las primeras p ecuaciones, se obtiene:

$$b_1 = -\frac{a}{1!}\, b_0,\ b_2 = \frac{a^2}{2!}\, b_0, \ldots, b_p = (-1)^p\, \frac{a^p}{p!}\, b_0.$$

Para b_p se tienen dos expresiones, lo que permite escribir,

$$b_p = \frac{1}{a} = (-1)^p\, \frac{a^p}{p!}\, b_0$$

De esta última relación, resulta para b_0:

$$b_0 = \frac{p!\,(-1)^p}{a^{p+1}}$$

Substituyendo este valor en los demás coeficientes y en el polinomio (8), se llega al resultado final:

$$(9) \qquad I_p = \frac{(-1)^p\, p!}{a^{p+1}} \left[1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \ldots + (-1)^p\, \frac{x^p}{p!} \right] + c.$$

Un procedimiento aun más sencillo para obtener integrales de la forma (1), consiste en aplicar la fórmula siguiente:

$$(10) \qquad \int f(x)\, e^{ax}\, dx = e^{ax} \left[\frac{f(x)}{a} - \frac{f'(x)}{a^2} + \frac{f''(x)}{a^3} - \ldots \right]$$

La deducción de esta fórmula se basa en la integración por partes. Al efecto se tiene,

$$(11) \qquad \int f(x)\, e^{ax}\, dx = \int f(x)\, d.\, \frac{e^{ax}}{a}$$
$$= f(x)\, \frac{e^{ax}}{a} - \frac{1}{a} \int f'(x)\, e^{ax}\, dx.$$

Aplicando la fórmula (11) a la última integral, se encuentra:

$$\int f(x)\, e^{ax}\, dx = e^{ax}\,\frac{f(x)}{a} - e^{ax}\,\frac{f'(x)}{a^2} + \frac{1}{a^2}\int f''(x)\, e^{ax}\, dx. \tag{12}$$

La generalización es inmediata. Para el caso general, el último término puede expresarse por,

$$\frac{1}{a^r}\int f^{(r)}(x)\, e^{ax}\, dx. \tag{13}$$

En el caso de un polinomio cuyo grado sea $(r-1)$, el último término de la (12) generalizada, desaparece, y se obtiene la relación (10).

Repetimos en seguida el ejemplo (I), con el fin de hacer ver la eficiencia de la fórmula (10):

$$\begin{aligned}&\int (3 - 4x + 5x^2)\, e^{3x}\, dx\\ &= [(3 - 4x + 5x^2)/3 - (-4 + 10x)/9 + 10/27]\, e^{3x}\\ &= (1/27)\,(49 - 66x + 45x^2)\, e^{3x},\end{aligned}$$

lo que comprueba el resultado obtenido anteriormente.