LAS ECUACIONES EN DIFERENCIAS FINITAS EN LA TEORIA DE LOS CIRCUITOS ELECTRICOS

GABRIEL POVEDA RAMOS

00. — Las ecuaciones en diferencias finitas, en especial las de tipo lineal, han venido encontrando cada vez más importantes y más amplias aplicaciones a problemas técnicos de la ingeniería. La teoría de las estructuras porticadas, el análisis de series temporales, la dinámica de sistemas mecánicos encadenados, el estudio de filtros eléctricos, son ramas de las disciplinas fundamentales que se han enriquecido con los métodos que les proporciona el estudio de las ecuaciones en diferencias finitas. En esta nota nos proponemos indicar algunos ejemplos de utilización de esas ecuaciones al estudio de circuitos eléctricos con elementos lineales, pasivos y bilaterales.

01. — Es bien conocida la aplicación de las EE.DD. FF [1] a las líneas de transmisión de tramos lineales con escapes, o a su equivalente eléctrico, el circuito-filtro. Aunque las ecuaciones clásicas (Kirchhoff, Maxwell) para la solución de redes son aplicables en estos casos, el uso de variables discretas resume y precisa los sistemas lineales que resultan de la aplicación de aquellas, permitiendo, además una solución unificada del problema.

02. — Las EE.DD.FF. constituyen una rama de lo que debiera llamarse análisis de funciones (reales) de variables (reales) discretas. Dentro de ella queda incorporado el llamado cálculo de diferencias finitas, cuya presentación activa en el campo del análisis matemático se debe a *G.* Boole. En la actualidad la teoría de dichas ecuaciones está siendo activamente investigada, en vista de la proliferación de aquellas cuestiones en que son susceptibles de utilización, cuestiones que van desde el estudio de progresiones elementales hasta el análisis econométrico de fenómenos dinámicos; desde la interpolación numérica hasta el análisis secuencial; desde la discusión de las oscilaciones de trenes hasta la aplicación de los "métodos de relajación". Los tipos más conocidos son los lineales, para los cuales existen procedimientos sencillos de solución, y vastas posibilidades de empleo. Hasta el momento, los tipos de EE.DD.FF. no-lineales de orden genérico han sido poco estudiados, aunque es previsible que en un futuro no remoto hayan de ser activamente estudiadas para satisfacer las demandas que habrán de plantear la teoría de los sistemas plásticos, y la de circuitos eléctricos con elementos no-lineales.

1.0 — Se desea considerar enseguida la forma como dependen del número de sus unidades constituyentes, las resistencias (o impedancias) de algunas redes de las llamadas "iterativas", esto es, que se pueden constituir repitiendo ordenadamente un mismo sistema de conexiones elementales entre sus nodos. Sistemas eléctricos de esta clase se presentan frecuentemente en dispositivos electrónicos y en redes de distribuciones. Además, cada vez más se generalizan como modelos analógicos para estudiar otros problemas.

---

[1] EE.DD.FF.: "Ecuaciones en diferencias finitas".

1.1. — Considérese un circuito eléctrico, como el esquematizado en la fig. 1, en el que cada conductor entre cada par de nodos tiene una misma resistencia óhmica, r. Designemos con R_n la resistencia de todo el sistema compuesto de n unidades básicas (parejas de nodos contiguos) entre 0 y el nodo "n"; y con R_{n+1} la resistencia de la red, *adicionada en otra unidad básica* (la pareja de nodos "n" y "$n+1$") se tendrá para esta última

$$R_{n+1} = \frac{(R_n + r)r}{R_n + 2r} \qquad (1.1.01)$$

por ser equivalente R_{n+1} al paralelo del conductor directo de 0 o "$n+1$" (resistencia r) con la serie de R_n y el conductor de "n" a "$n+1$" (resistencia r).

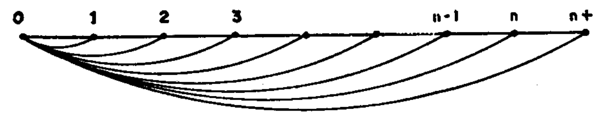

Fig. 1

La ecuación (1.1.01) puede ponerse

$$R_{n+1}\, R_n + 2r.\, R_{n+1} - r\, R_n - r^2 = 0 \qquad (1.1.02)$$

1.2. — La ecuación (1.1.02) es un tipo no lineal, que en la teoría de las EE.DD.FF. se conoce con el nombre de ecuación de Riccati. Por lo demás, es de coeficientes constantes, y su tratamiento es sencillo.

Como primer paso en su solución, introduzcamos la nueva variable Z_n definida por

$$Z_n = R_n - h \qquad (1.2.01)$$

y tal que en la expresión resultante para la ecuación, esto es, en

$$Z_{n+1}\, Z_n + (h + 2r)\, Z_{n+1} + (h - r)\, Z_n + (h^2 + rh - r^2) = 0 \qquad (1.2.02)$$

resulte nulo el término independiente:

$$h^2 + rh - r^2 = 0 \qquad (1.2.03)$$

esta última condición da para h uno de los dos valores

$$h_1 = r\,(-1 + \sqrt{5})/2 \qquad h_2 = r\,(-1 - \sqrt{5})/2$$

cuya elección se señalará oportunamente. Así, pues, satisfecha la (1.2.03), la ecuación (1.2.02) se escribe

$$Z_{n+1}\, Z_n + a\, Z_{n+1} + b\, Z_n = 0 \qquad (1.2.04)$$

siendo $a = h + 2r$, $b = h - r$. Dividiendo toda la ecuación (1.2.04) por el producto $Z_{n+1}\, Z_n$ y designando con $v_n = 1/Z_n$ al inverso de Z_n, resulta la ecuación

$$bv_{n+1} + a\, v_n + 1 = 0 \qquad (1.2.05)$$

que es lineal, inhomogénea, de coeficientes constantes. Su ecuación reducida

$$v_{n+1} + (a/b)\, v_n = 0 \qquad (1.2.06)$$

admite soluciones de forma exponencial en n

$$v_n^* = m^n \qquad (1.2.07)$$

en términos de la cual la ecuación auxiliar

$$m + a/b = 0 \qquad (1.2.08)$$

tiene como raíz única $-a/b$. De tal manera, la solución complementaria de (1.2.05) es

$$A\,(-a/b)^n \qquad (1.2.09)$$

Es obvio que la constante $-1/(a+b)$ es una solución particular de (1.2.05), en razón de lo cual, la solución general buscada es

$$v_n = A\,(-a/b)^n - 1/(a+b) \qquad (1.2.10)$$

siendo A una constante arbitraria. Si para h se toma el valor h_1 resulta

$$-a/b = (3+\sqrt{5})/(3-\sqrt{5}) = k_1 > 0$$

y si se toma el valor h_2, se tiene

$$-a/b = (3-\sqrt{5})/(3+\sqrt{5}) = k_2 > 0$$

Puede pues, ponerse, eligiendo definitivamente a h como $h = h_1 = r\,(-1+\sqrt{5})/2$ y $k = k_1 = (3+\sqrt{5})/(3-\sqrt{5})$, es

$$v_n = A\,k^n - 1/r\sqrt{5} \qquad (1.2.11)$$

La constante A puede evaluarse observando que, evidentemente

$$R_0 = 0 \qquad (1.2.12)$$

y puesto que $v_n = 1/(R_n - h)$, esto significa:

$$v_0 = -\frac{1}{h} = \frac{2}{r}\,\frac{1}{1-\sqrt{5}} \qquad (1.2.13)$$

pues $2h = r\,(-1+\sqrt{5})$. Substituyendo esa condición inicial (1.2.13) en (12.11), se escribe

$$\frac{2}{r}\,\frac{1}{1-\sqrt{5}} = A - \frac{1}{r\sqrt{5}} \qquad (1.2.14)$$

luego $A = -(1+\sqrt{5})/(5-\sqrt{5})r$

$$r\,v_n = -\frac{1+\sqrt{5}}{5-\sqrt{5}}\left(\frac{3+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}\right)^n - \frac{\sqrt{5}}{1} \qquad (1.2.15)$$

Ahora bien, de (1.2.01) y teniendo en cuenta que $Z_n = 1/v_n$ es claro que $R_n = h + 1/v_n$ y por tanto

$$R_n = \frac{r\sqrt{5}}{2} - \frac{r}{2} - \frac{r}{\dfrac{1+\sqrt{5}}{5-\sqrt{5}}\left(\dfrac{3+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}\right)^n + \dfrac{1}{\sqrt{5}}}$$

Esta sucesión (o función de la variable discreta n) es la solución particular de la ecuación de Riccati. (1.1.02), sometida a la condición inicial $R_0 = 0$.

---

1 Es bien sencillo comprobar que, en efecto esta clase de sucesiones es la solución de (1.2.05).

1.3 — Utilizando, bien sea la fórmula recurrente (1.1.01), o la ley de formación (1.2.16) se calcula fácilmente la sucesión R_n que resulta ser

$$R_0 = 0,\ R_1 = r/2,\ R_2 = 3r/5,\ R_3 = 8r/13,\ R_4 = 21\,r/34, \ldots$$

Si se disponen en una secuencia los numeradores y denominadores de las fracciones 0/1, 1/2, 3/5, 8/13, 21/34,..., que son factores de r en los valores de R_n, se tiene la sucesión de los números

0,1,1,2,3,5,8,13,21,34...

que no es otra que la llamada de Fibonaci. Pudiérase decir que al expresar R_n/r como fracción racional (aritmética), y ordenar las fracciones obtenidas; se tiene que: a) cada numerador es la suma del numerador y del denominador de la fracción anterior; b) cada denominador es la suma del denominador de la fracción anterior y el numerador de la propuesta.

La demostración de esta conjetura es un ejercicio que se deja a la curiosidad del lector, y se apoya en la ecuación en DD. FF. (1.1.02).

2.0 — En el análisis de los circuitos de cuatro terminales está un amplio campo de aplicaciones para la teoría de las EE. DD. FF. que, al parecer, no ha sido suficientemente explorado, debido a que los muchos ingenieros electricistas que se ocupan de esos problemas técnicos no están familiarizados con el instrumental matemático de las EE. DD. FF, y los matemáticos —no muchos, por cierto— que investigan la teoría y los métodos de solución de tales ecuaciones no suelen ocuparse en el análisis de circuitos eléctricos.

Como muestra de uno de los varios géneros de problemas sobre circuitos de 4 terminales, se desea exponer aquí la solución de uno en particular, más a título de ejemplo que de tratamiento sistemático de los circuitos en cascada mediante el uso de EE. DD. FF, lo cual podría ser motivo de una investigación más detenida.

2.1 — El problema de que se tratará es el de analizar el circuito de 4 terminales, de los que suelen denominarse "de escalera", esquematizado en la fig. 2, constituído por la repetición de una misma unidad fundamental: un cuadrupolo simétrico (eléctricamente) respecto a ambos pares diagonales de nodos, y para el cual la resistencia entre cada par de nodos contiguos es una misma, r.

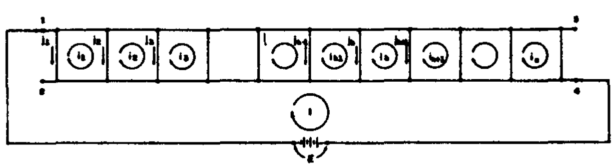

Fig. 2

Cuando se trata de determinar la resistencia entre dos cualesquiera de los 4 terminales, o cuando se analiza la red interpuesta, es costumbre formar los clásicos sistemas lineales con coeficientes dependientes de los parámetros eléctricos, y con las corrientes como incógnitas. Sin embargo, en casos como el que tratamos, es posible reducir todo el tratamiento a la solución de una ecuación en DDFF, muy sencilla por cierto.

Considérese el circuito esquematizado, en el cual todas las conexiones entre pares de nodos contiguos tienen una misma resistencia, mientras que el conductor que lo vincula a la fuente de FEM carece de resistencia. Descomponiendo el circuito en $n+1$ mallas de Maxwell (inclusive la del circuito externo) con sus respectivas corrientes asociadas, puede escribirse para la unidad genérica "h^a" de la red, la ecuación de la segunda ley de Kirchhoff,

$$i_{h+1} - 4i_h + i_{h-1} + I = 0 \qquad (2.1.01)$$

que es una ecuación en DDFF, lineal, de coeficientes constantes, no-homogénea.

Para la ecuación reducida

$$i_{h+1} - 4i_h + i_{h-1} = 0 \qquad (2.1.02)$$

existen soluciones exponenciales de la forma

$$i_h^* = Cm^h$$

La correspondiente ecuación auxiliar

$$m^2 - 4m + 1 = 0 \qquad (2.1.03)$$

posee las dos raíces $m_1 = 2 + \sqrt{3}$, $m_2 = 2 - \sqrt{3}$, que permiten establecer la solución complementaria

$$C_1\, m_1^h + C_2\, m_2^h \qquad (2.1.04)$$

Por otra parte, guiándonos por elementales consideraciones bien conocidas, se halla que una solución particular inmediata es la constante $-I/2$. De tal modo, la solución general de (2.1.01) se escribe

$$i_h = I\,(B_1\, m_1^h + B_2\, m_2^h + 1/2) \qquad (2.1.05)$$

en donde se han escrito las constantes arbitrarias de manera que tengan carácter de constantes nulidimensionales, desde el punto de vista físico.

Las condiciones de frontera

$$i_o = I \qquad\qquad i_{n+1} = 0 \qquad (2.1.06)$$

permiten poner:

$$B_1 + B_2 = 1/2$$
$$m_1^{n+1}\, B_1 + m_2^{\ n+1}\, B_2 = -1/2 \qquad (2.1.07)$$

pareja de ecuaciones que forman un sistema lineal compatible por ser el determinante de los coeficientes no nulo:

$$m_2^{n+1} - m_1^{n+1} \neq 0$$

por ser $m_1 \neq m_2$. Se halla para las constantes arbitrarias

$$B_1 = \frac{m_2^{n+1}+1}{2(m_2^{n+1}-m_1^{n+1})} \quad B_2 = -\frac{m_1^{n+1}+1}{2(m_2^{n+1}-m_1^{n+1})} \qquad (2.1.08)$$

y la solución general es

$$i_h = \frac{I}{2(m_2^{n+1}-m_1^{n+1})}\left[m_2^{n+1}(m_1^h+1) - m_1^{n+1}(m_2^h+1) + m_1^h - m_2^l\right] \qquad (2.1.09)$$

2.2 — Este resultado permite calcular, entre otras cosas, las corrientes actuales por cada derivación del lado 1-3 al lado 2-4

$$j_h = i_{h-1} - i_h$$

$$j_h = \frac{I}{2(m_2^{n+1}-m_1^{n+1})}\left[(m_2^{n+1}+1)\, m_1^{h-1}(-1-\sqrt{3}) - (m_1^{n+1}+1)\, m_2^{h-1}(-1+\sqrt{3})\right] \qquad (2.2.01)$$

Es posible calcular también, la resistencia equivalente de toda la red. En efecto, para el circuito externo puede escribirse:

$$I\,(n+1)\,r - r\sum_{k=1}^{k=n} i_k = E \qquad (2.2.02)$$

y como la resistencia equivalente es en este caso $R = E/I$ vale

$$\frac{R}{r} = n + 1 - \frac{\sum_{k=1}^{k=n} i_k}{I} \qquad (2.2.03)$$

$$\frac{R}{r} = 1 + \frac{n}{2} - \frac{1}{2(m_2^{n+1}-m_1^{n+1})}\left[(m_2^{n+1}+1)\sum_{k=1}^{k=n} m_1^k - (m_1^{n+1}+1)\sum_{k=1}^{k=n} m_2^k\right] \qquad (2.2.04)$$

2.3 — Si se cambiara el contacto del punto 1 al punto 2 (fig. 2) el problema habría de resolverse de idéntica manera, a menos de las condiciones de frontera válidas para determinar las constantes arbitrarias que son, en tal caso

$$i_o = 0 \qquad\qquad i_{n+1} = 0$$

2.4 — Una situación más interesante se presenta cuando las conexiones al circuito se hacen en los terminales 1 y 2, porque entonces la ecuación en DDFF es homogénea

(2.4.01)

y la introducción de las condiciones de frontera $i_o = I$, $i_{n+1} = 0$ en la solución general

$$i_h/I = B_1\, m_1^h + B_2\, m_2^h \qquad (2.4.02)$$

da lugar al sistema lineal:

$$\left.\begin{aligned} B_1 + B_2 &= 1 \\ m_1^{n+1} B_1 + m_2^{n+1} B_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (2.4.03)$$

De la solución de esta pareja de ecuaciones se desprende

$$\frac{i_h}{I} = \frac{m_2^{n+1}\, m_1^h - m_1^{n+1}\, m_2^h}{m_2^{n+1} - m_1^{n+1}} \qquad (2.4.04)$$

de donde

$$\frac{i_1}{I} = \frac{m_2\, m_1\,(m_2^n - m_1^n)}{m_2^{n+1} - m_1^{n+1}} = \frac{m_2^n - m_1^n}{m_2^{n+1} - m_1^{n+1}} \qquad (2.4.05)$$

ya que $m_1 m_2 = 1$, dado su carácter de raíces de (2.1.03). Entonces la primera corriente de rama, de 1-3 hacia 2-4, designada con $j_1 = I - i_1$ es:

$$j_1 = I\,\frac{m_2^{n+1} - m_1^{n+1}}{(1-\sqrt{3})m_2^n - (1+\sqrt{3})m_1^n} \qquad (2.4.06)$$

Y la ecuación de voltajes para el circuito externo (a través de la pila)

$$E - Ir + i_1 r = 0$$

da para la resistencia equivalente $R = E/I = j_1 r/I$, es

$$R = r \, \frac{(1-\sqrt{3})m_2^{n} - (1+\sqrt{3})m_1^{n}}{m_2^{n+1} - m_1^{n+1}} \tag{2.4.07}$$

2.5 — Pudieran prolongarse los ejemplos que muestran la fecundidad de las EE. DD. FF. cuando se aplican al análisis de estos tipos de circuitos eléctricos. Sin embargo, bastará al propósito de esta nota agregar un solo caso, a manera de ilustración del tratamiento de un sistema lineal de EE. DD. FF.

3.1. — Considérese el circuito esquemátizado en la fig. 3, constituído por un encadenamiento de unidades consecutivas, alimentado todo él por una fuente de FEM de voltaje V unidireccional y constante. Las resistencias en cada tramo de los lados *AB, A' B'*, son iguales, de valor óhmico r, y las resistencias en los tramos transversales tienen todas un mismo valor R. Es evidente que si el circuito se alimenta con una FEM sinusoidal estacionaria, y se sustituyen las resistencias por impedancias, el planteo del problema y su solución se mantienen inmodificados, salvo que en el último caso voltajes, corrientes e impedancias serán, en general, números complejos.

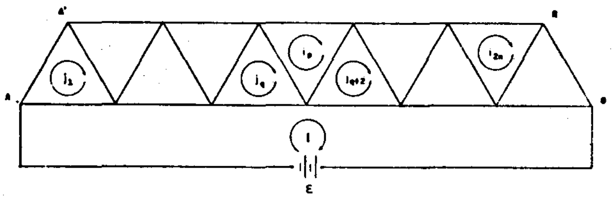

Fig. 3

Es bien claro que las corrientes de malla que pertenecen a la sucesión designada $[i_k]$ obedecen una ecuación que las relaciona con la de las mallas contiguas, diferente a la que corresponde a las corrientes de la sucesión $[J_h]$. Por otra parte, las corrientes-i comportan subíndices pares y las corrientes-j comportan subíndices impares.

De tal manera, designando con p la variable que recorre la sucesión 2, 4, 6, 8, 10,..., y con $q = p - 1$ la que recorre la sucesión 1, 3, 5, 7, 9,..., pueden escribirse las ecuaciones de mallas, de acuerdo con la ley de Kirchhoff (ver fig. 3).

(3.1.01.a) $\quad (2R + r)\, i_p - R\,(j_q + j_{q+2}) = 0$

(3.1.01.b) $\quad (2R + r)\, j_q - R\,(i_p + i_{p-2}) = Ir$

Estas dos, forman un sistema lineal de EE. DD. FF., para las dos variables i_p, j_q, dependientes de la variable independiente discreta $q = p - 1$ (o bien $p = q + 1$).

3.2. — De (3.1.01.a) se tiene

$$i_p = \frac{R}{2R + r}\,(j_q + j_{q+2}) \tag{3.2.01}$$

de manera que

$$i_{p-2} = \frac{R}{2R + r}\,(j_{q-2} + j_q) \tag{3.2.02}$$

Substituyendo (3.2.01) y (3.2.02) en (3.1.01.b) se encuentra:

$$j_{q+2} - 2a j_q + j_{q-2} = -Ib \tag{3.2.03}$$

siendo $2a = (2 + c)^2 - 2$, $b = c\,(2 + c)$, $c = r/R$. Nótese que por ser $c > o$, es siempre $2a > 2$, $a > 1$, $b > o$.

Despejando j_q de (3.1.01.b) y substituyéndolo con j_{q+2} en (3.1.01.a), se tiene

$$i_{p+2} - 2a\, i_p + i_{p-2} = -2Ic \tag{3.2.04}$$

El par de ecuaciones (3.2.03), (3.2.04), es equivalente al par (3.1.01.a), (3.1.01.b), y contiene las variables separadamente.

3.3. — La ecuación reducida de (3.2.04), es

$$i_{p+2}^* - 2a\, i_p^* + i_{p-2}^* = 0$$

y poniendo $p = 2k$, ($k = 1,2,3,4,\ldots, n$), al asumir soluciones de la forma $A\,e^{2\beta k}$, da lugar a la ecuación (auxiliar).

$$e^{2\beta} - 2a + e^{-2\beta} = 0 \tag{3.3.01}$$

de la cual resulta $a = \cosh 2\beta$. — β admite, pues, los dos valores $\beta_1 = |\cosh^{-1} a|/2$ (*) $\beta_2 = -\beta_1$, así que siendo $\beta_1 = u$, es $\beta_2 = -u$.

La solución complementaria de (3.2.04) se puede poner finalmente y la solución general es:

$i_{2k} = IB_1 \cosh 2uk + IB_2 \operatorname{senh} 2uk + 2I/(4 + c)$, observando que una solución particular es $Ic/(a - 1) = 2I/(4 + c)$.

Puede comprobarse inmediatamente sobre la misma fig 3 que la solución encontrada debe cumplir las condiciones de frontera $i_0 = o$, $i_{2(n+1)} = 0$. En consecuencia, debe ser

$$\begin{cases} B_1 = -2/(4 + c) \\ B_1 \cosh 2u\,(n + 1) + B_2 \operatorname{senh} 2u\,(n + 1) \\ \quad = -2/(4 + c) \end{cases}$$

y se deduce para la solución general la función

$$i_{2k} = \frac{2I}{4 + c}\left[\,1 - \cosh 2uk + \alpha .\ \operatorname{senh} 2uk\,\right]$$

siendo $\alpha = [-1 + \cosh 2u\,(n + 1)]\,/\operatorname{senh} 2u\,(n + 1)$

3.4. — Haciendo $q = 2k - 1$, la ecuación reducida de (3.2.03), que es

$$j_{q+2}^* - 2a\, j_q^* + j_{q-2}^* = 0 \tag{3.4.01}$$

da lugar a la auxiliar:

$$e^{2\epsilon} - 2a + e^{2\epsilon} = 0 \tag{3.4.02}$$

previa la presunción de soluciones de la forma $j_{2k\pm 1} = A\,e^{2\epsilon k}$. La ecuación (3.4.02) admite también para ϵ las dos raíces $u, -u$.

Por otra parte, se puede constatar en seguida que una solución particular es $Ib/(2a - 2) = I\,(2 + c)/(4 + c)$. Luego, la solución general es la expresión:

$$J_{2k-1} = IC_1 \cosh 2uk + IC_2 \operatorname{senh} 2uk + I\,(2 + c)/(4 + c)$$

que, en general debe cumplir la condición (3.1.01.b)

$$(2R + r)\, j_{2k-1} - R(i_{2k} + i_2(k - 1)) = Ir$$

(*) β_1 existe y es real, por ser $a > 1$.

de la cual se deduce que las constantes C_1, C_2, son

$$C_1 = \frac{2}{4+c} \quad \frac{-a\sqrt{a^2-1}-(1+a)}{2+c}, \quad C_2 = \frac{-2}{4+c}$$

$$\frac{\sqrt{a^2-1}-a(1+a)}{2+c}$$

3.5. — Si se designan con T_1, T_2, $T_3, \ldots$, T_{2n+1} los triángulos consecutivos que forman la red, se podrá calcular sencillamente la corriente de rama del lado común a los triángulos T_q, T_p, que será de magnitud igual a la de la diferencia i_p — j_q.

$$I_{q,p} = i_{2k} - j_{2k-1} = I$$

$$[1 - (C_1 - B_1) \cosh 2uk - (C_2 - B_2) \operatorname{senh} 2uk]$$

Y la corriente de rama por el lado común a $T_{p,q \mp 2}$ es

$$I_{p,q+2} = j_2(k+1) - i_{2k} = I(C_1\, a + C_2$$

$$\sqrt{a^2-1} - B_1) \cosh 2uk$$

$$+ I(C_2\, a + C_1 \sqrt{a^2-1} - B_2) \operatorname{senh} 2uk - I$$

3.6. — La ecuación de malla del circuito exterior (fuente de FEM y lado AB de la red) se escribe:

$$E - (n+1)\, Ir + r \sum_{k=1}^{k-n+1} j_{2k-1} = 0$$

y substituyendo la expresión para j_{2k-1}

$$\frac{E}{r} = (n+1)\, I - IC_1 \sum_{k=1}^{k=n+1} \cosh 2uk - IC_2 \sum_{k=1}^{k=n+1}$$

$$\operatorname{senh} 2uk + I \frac{(n+1)(2+c)}{(4+c)}.$$

De esta expresión se obtiene la resistencia equivalente $P = E/I$ de toda la red

$$\frac{P}{r} = 2(N+1) \frac{3+c}{4+c} - C_1 \sum_{k=1}^{k=n+1}$$

$$\cosh 2uk - C_2 \sum_{k=1}^{k=n+1} \operatorname{senh} 2uk$$

y evaluando las sumas sobre las funciones hiperbólicas, se obtiene:

$$\frac{P}{r} = 2(n+1)\frac{3+c}{4+c} - \frac{C_1}{2}\left[\frac{2}{a-1} \operatorname{senh}\, (2n+3)\, u - 1\right]$$

$$- \frac{C_2}{2}\left[\frac{}{a-1} \cosh\, (2n+3)\, u - \cosh u\right]$$

expresión ésta que puede calcularse para calcular la resistencia total P en términos de r.

3.7. — Es posible aducir varios otros ejemplos para ilustrar las posibilidades de aplicación de las EE. DD. FF. al análisis de circuitos eléctricos y al de estructuras mecánicas con las cuales guardan estrecha analogía. Por lo pronto el autor quedará más que satisfecho si esta breve nota sirviera al menos para incitar la inteligencia de colegas más capaces o de alumnos aventajados a ocuparse de estos temas.